



**UNIVERSITÀ DI PISA**

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

**MODELLIZZAZIONE DI UN  
CONVERTITORE STIRLING FREE-PISTON  
PER APPLICAZIONI SPAZIALI**

**Candidato**

*Federico Cannelli*

**Relatori**

*Mariano Andrenucci*

*Luca d'Agostino*

ANNO ACCADEMICO 2008/2009



*a Martina*

*alla mia famiglia*

*a Judy e Dora*

*“...sapere di avere qualcuno che ti  
vuole bene, che capisce ogni fibra del tuo  
essere e che non ti abbandonerà mai, nemmeno  
nella più disperata delle circostanze, dovrebbe  
essere l'essenza di ogni vero legame...”*



# Sommario

Il presente lavoro di tesi vuol proporre un metodo lineare di modellizzazione matematica, che descriva il comportamento di un moderno convertitore Stirling a pistoni liberi, un dispositivo che sta collezionando larghi consensi nel campo della generazione di potenza elettrica. Il suo utilizzo sta interessando in modo crescente applicazioni particolari come quelle spaziali, nelle quali alta affidabilità e scarsa manutenzione sono requisiti di primaria importanza. L'obiettivo che questa tesi si propone è analizzare la complicata sinergia di tutti i processi termodinamici (e dinamici), che caratterizzano il funzionamento di un dispositivo di questo tipo. Successivamente si cerca di creare uno strumento in grado di fornire indicazioni valide riguardo all'influenza esercitata sul funzionamento del motore dai vari parametri fisici, geometrici e ambientali. Basandosi sull'architettura dei recenti prototipi realizzati negli Stati Uniti per conto di *NASA*, e sui risultati ottenuti da precedenti lavori sull'argomento, si realizza quindi un sistema di equazioni linearizzate per la descrizione di ogni componente del motore. Tale sistema viene poi inserito in una simulazione temporale, con l'intento di confrontare i risultati ottenuti con le misurazioni sperimentali. Dimostrata la validità del modello, se ne valuta, tramite uno studio parametrico, la capacità di predire le prestazioni della macchina sotto diverse condizioni operative, così da catturare gli aspetti fondamentali che caratterizzano questa particolare tecnologia, così da potersene servire in un'eventuale successiva fase di progetto.

# Abstract

The aim of work presented in this thesis is to create a linear analysis model which can describe the behavior of a modern Free-Piston Stirling Converter, a device that is becoming very interesting in electric power generation field. The interest about its utilization is increasing especially in particular applications, like spatial missions, where there's a special requirement of high reliability and low maintenance. This thesis wants to analyze the complex interaction of all the thermodynamic (and dynamic) processes that characterizes the operation of such a device. After that, this work try to create a mathematical tool able to supply valid indications about the influence of several geometric, physical and environmental parameters, on the operation characteristics. With reference to recent existing prototypes, made in USA under the supervision of *NASA*, and to the results of previous linear models about this matter, a system of linearized equations is set up, to describe each component of the converter. Then, this system has been used for a time-referred simulation, to compare its results with the experimental measurements. Once the effectiveness of this model has been demonstrated, the target is to evaluate its capability for prediction of engine's performances under sever operational conditions. So the use of this model allows the user to understand the fundamental aspects of this particular technology, and it can be useful for a future design phase.

# Indice

<b>1</b>	<b><i>La macchina di Stirling</i></b>	<b>1</b>
1.1	<i>Generalità</i>	1
1.2	<i>Breve storia del motore Stirling</i>	2
1.3	<i>Ciclo Stirling ideale</i>	5
1.4	<i>Ciclo Pseudo-Stirling ideale</i>	12
1.5	<i>Macchina di Stirling reale</i>	14
1.5.1	<i>Macchine di tipo beta</i>	18
1.6	<i>Analisi teorica classica delle macchine di Stirling</i>	20
1.6.1	<i>Teoria di Schmidt</i>	20
1.6.2	<i>Modello adiabatico di Finkelstein</i>	26
<b>2</b>	<b><i>Il motore di Stirling a pistone libero</i></b>	<b>28</b>
2.1	<i>Descrizione generale</i>	28
2.1.1	<i>Il primo motore FPSE</i>	29
2.1.2	<i>Principio di funzionamento di un FPSE</i>	31
2.1.3	<i>Configurazioni</i>	34
2.1.4	<i>Vantaggi dei FPSE</i>	36
2.1.5	<i>Grandezze caratteristiche e prestazioni</i>	37
2.2	<i>I motori Free-Piston accoppiati con alternatori lineari, FPSE/LA</i>	40
2.2.1	<i>I motori Free-Piston di Sunpower Inc.</i>	42
2.2.2	<i>Infinia Corporation</i>	47
2.3	<i>Generatori Stirling per applicazioni spaziali</i>	51
2.4	<i>Stirling Radioisotope Generator SRG-110</i>	54
2.4.1	<i>55-We Technology Demonstration Convertor (TDC)</i>	58
2.5	<i>Advanced Stirling Convertors e ASRG-EU</i>	59
<b>3</b>	<b><i>Rassegna dei modelli di analisi lineare per FPSEs</i></b>	<b>65</b>
3.1	<i>Schema generico dei modelli LDA</i>	66
3.2	<i>Berchowitz e Wyatt-Mair, 1969</i>	67
3.3	<i>Urieli-Berchowitz, 1984</i>	68
3.4	<i>Berchowitz e Redlich [23], 1985</i>	69
3.5	<i>Goldberg (1980-1983)</i>	70
3.6	<i>Benvenuto-de Monte-Farina (1990-1992)</i>	72

<b>4</b>	<b><i>Modello di analisi lineare per FPSEs</i></b>	<b>75</b>
4.1	<i>Generalità del modello</i>	75
4.2	<i>Sviluppo del modello</i>	76
4.2.1	<i>Scelta dell'architettura</i>	78
4.3	<i>Ipotesi e semplificazioni</i>	81
4.3.1	<i>Ipotesi iniziali</i>	81
4.3.2	<i>Semplificazioni dell'analisi</i>	81
4.3.3	<i>Trafilamenti e pressione media</i>	83
4.3.4	<i>Temperature medie</i>	84
4.3.5	<i>Volumi medi degli spazi variabili</i>	85
4.4	<i>Modellizzazione delle camere del motore</i>	86
4.4.1	<i>Camera di compressione e di espansione</i>	86
4.4.2	<i>Volume di rimbalzo e molla gassosa</i>	89
4.5	<i>Modellizzazione del canale di rigenerazione</i>	90
4.5.1	<i>Riscaldatore</i>	91
4.5.2	<i>Refrigeratore</i>	97
4.5.3	<i>Rigeneratore</i>	98
4.5.4	<i>Riassunto delle equazioni per il canale di rigenerazione</i>	105
4.6	<i>Dinamica dei pistoni e variazione dei volumi di lavoro</i>	107
4.6.1	<i>Equazioni del moto dei due stantuffi</i>	108
4.6.2	<i>Variazione dei volumi</i>	109
4.7	<i>Sottosistema di carico</i>	110
<b>5</b>	<b><i>Validazione del modello e risultati</i></b>	<b>113</b>
5.1	<i>Sistema risultante delle equazioni</i>	113
5.2	<i>La simulazione temporale con Simplorer 7</i>	121
5.3	<i>Studio dell'influenza delle grandezze di controllo</i>	128
<b>6</b>	<b><i>Conclusioni</i></b>	<b>135</b>
6.1	<i>Risultati della tesi</i>	135
6.2	<i>Applicazioni future del modello</i>	136
6.3	<i>Margini di miglioramento</i>	136
	<i>Appendice A - Script del programma di simulazione</i>	137
	<i>Appendice B - Risultati completi della simulazione</i>	143
	<i>Bibliografia</i>	147



# Indice delle figure

<i>Fig. 1.1 - Schema del primo motore termico rigenerativo, brevettato da Robert e James Stirling nel 1816, [2] .....</i>	<i>2</i>
<i>Fig. 1.2 - La Ford Torino Stirling Special, con il motore mod. 4-215. A destra la scheda tecnica con le principali caratteristiche [3].....</i>	<i>5</i>
<i>Fig. 1.3 - Ciclo di Stirling ideale: Diagrammi p-V e T-S (a), posizione dei pistoni (b) e loro spostamento nel tempo (c), [1].....</i>	<i>6</i>
<i>Fig. 1.4 - Confronto tra ciclo di Stirling e ciclo di Carnot [1].....</i>	<i>9</i>
<i>Fig. 1.5 - Rendimento e potenza specifica del ciclo Stirling ideale, al variare del rapporto volumetrico e dell'efficienza di rigenerazione [1].....</i>	<i>10</i>
<i>Fig. 1.6 - Rendimento e potenza specifica del ciclo Stirling pseudo-ideale, al variare del rapporto di compressione e dell'efficienza di rigenerazione [1].....</i>	<i>12</i>
<i>Fig. 1.7 - Effetto delle perdite di pressione sul motore [1].....</i>	<i>14</i>
<i>Fig. 1.8 - Ciclo termodinamico per un motore Stirling reale, spazio di espansione (a), spazio di compressione (b) e fluido di lavoro (c), [3] .....</i>	<i>15</i>
<i>Fig. 1.9 - Motore Stirling di tipo alpha, configurazione a "V", [3].....</i>	<i>16</i>
<i>Fig. 1.10 - Motori Stirling multiciclo (sinistra) o multi effetto (destra), [3] .....</i>	<i>16</i>
<i>Fig. 1.11 - Motori Stirling di tipo beta (sopra) e di tipo gamma (sotto), [5].....</i>	<i>17</i>
<i>Fig. 1.12 - Macchina di Stirling monocilindrica (beta).....</i>	<i>18</i>
<i>Fig. 1.13 - Macchina di Stirling a guida rombica, ideata da Roelf Meijer, del Philips Lab. ..</i>	<i>19</i>
<i>Fig. 1.14 - Schema di riferimento per l'analisi di Schmidt, [3].....</i>	<i>21</i>
<i>Fig. 1.15 - Distribuzione di temperatura nei 5 componenti del motore, secondo l'analisi di Schmidt (modello isoterma), [3].....</i>	<i>22</i>
<i>Fig. 1.16 - Sostituzioni trigonometriche, [5] .....</i>	<i>24</i>
<i>Fig. 1.17 - Andamento della pressione di lavoro secondo la teoria di Schmidt, [3] .....</i>	<i>25</i>
<i>Fig. 1.18 - Distribuzione di temperatura nei 5 componenti del motore secondo il modello adiabatico di Finkelstein, [3] .....</i>	<i>27</i>
<i>Fig. 2.1 - Varie tipologie di motori Stirling a pistone libero: a) a due pistoni con semplice effetto, b) pistone-displacer con semplice effetto, c) macchine a doppio effetto, [3] .....</i>	<i>28</i>
<i>Fig. 2.2 - Primo modello sperimentale di motore Free-Piston, William Beale,1969 [8] .....</i>	<i>30</i>
<i>Fig. 2.3 - Schema di un motore Stirling a pistone libero: A - Displacer, B - Pistone, C - Asta del displacer, D - Spazio di espansione, E - Spazio di compressione, F - Anello rigenerativo, G - Spazio di rimbalzo, [3] .....</i>	<i>30</i>

<i>Fig. 2.4 - Andamento della pressione di lavoro e del moto dei pistoni nei primi motori a pistone libero,[3].....</i>	<i>34</i>
<i>Fig. 2.5 - Esempi di motori Free-Piston con displacer collegato elasticamente al pistone .....</i>	<i>35</i>
<i>Fig. 2.6 - Alcune varianti di motori Free-Piston con displacer e pistoni indipendenti e collegati elasticamente al cilindro,[3].....</i>	<i>35</i>
<i>Fig. 2.7 - Andamento della funzione di Beale al variare della temperatura dello scambiatore caldo,[3] .....</i>	<i>39</i>
<i>Fig. 2.8 - Primo esempio di sistema FPSE-Alternatore lineare, [8].....</i>	<i>40</i>
<i>Fig. 2.9 - Modello B-10 di Sunpower Inc.,[3] .....</i>	<i>41</i>
<i>Fig. 2.10 - Modello B-10 accoppiato ad un alternatore elettrico lineare,[3].....</i>	<i>43</i>
<i>Fig. 2.11 - Generatore solare Stirling modello SPIKE da 1 kW,[7].....</i>	<i>44</i>
<i>Fig. 2.12 - Grafici di potenza e efficienza dei modelli di punta di Sunpower in funzione della corsa del pistone,[9].....</i>	<i>45</i>
<i>Fig. 2.13 - Generatore portatile alimentato a JP-8, [10].....</i>	<i>47</i>
<i>Fig. 2.14 - Convertitore Sunpower da 35 We di ultima generazione, [10].....</i>	<i>47</i>
<i>Fig. 2.15 - Unità di conversione Free-Piston per il reattore SP-100, composta da due motori in contrapposizione,[11].....</i>	<i>48</i>
<i>Fig. 2.16 - Sistema di generazione di potenza da 550 We, con il reattore SP-100 collegato a quattro unità di conversione Stirling,[11] .....</i>	<i>49</i>
<i>Fig. 2.17 - Convertitore Stirling Free-Piston da 3 kW prodotto da Infinia Corporation, <a href="http://www.infiniacorp.com">www.infiniacorp.com</a>.....</i>	<i>50</i>
<i>Fig. 2.18 - Solar System (sinistra) e Solar Dish Farms (destra) di Infinia Corporation, <a href="http://www.infiniacorp.com">www.infiniacorp.com</a>.....</i>	<i>51</i>
<i>Fig. 2.19 - Impianto SPDE da 25 kw per generazione di potenza in applicazioni spaziali .....</i>	<i>52</i>
<i>Fig. 2.20 - Motore a Pistone libero RE-1000,[4].....</i>	<i>53</i>
<i>Fig. 2.21 - Veduta esterna del convertitore da 55 We realizzato da STC/DOE,[12].....</i>	<i>55</i>
<i>Fig. 2.22 - Configurazione con due convertitori contrapposti, per ridurre le vibrazioni,[12].</i>	<i>55</i>
<i>Fig. 2.23 - Spaccato dello Stirling Radioisotope Generator SRG-110,[15].....</i>	<i>57</i>
<i>Fig. 2.24 - Esploso di un singolo modulo GPHS alimentato a Plutonio-238 .....</i>	<i>57</i>
<i>Fig. 2.25 - Sezione del Technology Demonstration Converter montato sul SRG-110,[14].....</i>	<i>58</i>
<i>Fig. 2.26 - Design delle molle planari montate sul TDC,[16].....</i>	<i>59</i>
<i>Fig. 2.27 - Il primo prototipo di FTB (Frequency Test Bed) di Sunpower Inc.,[18].....</i>	<i>60</i>
<i>Fig. 2.28 -Veduta esterna e schema della sezione trasversale del convertitore ASC-1,[19]....</i>	<i>61</i>
<i>Fig. 2.29 - Due convertitori ASC-E completi delle flange termiche di collegamento,[21] .....</i>	<i>62</i>
<i>Fig. 2.30 - Advanced Stirling Radioisotope Generator Engineering Unit, prodotto da Sunpower, DOE e Lockheed Martin, [21].....</i>	<i>63</i>

<i>Fig. 2.31 - Mini convertitore ermetico Sunpower da 35 We (a sinistra), e integrato in un generatore solare portatile con William Beale, inventore degli FPSE (a destra),[22].....</i>	<i>64</i>
<i>Fig. 3.1 - Schema e elementi della dinamica di un tipico sistema FPSE collegato con un generico dispositivo di carico, [4].....</i>	<i>65</i>
<i>Fig. 4.1 - Schema e componenti dell'architettura scelta.....</i>	<i>77</i>
<i>Fig. 4.2 - Grandezze fisiche e geometriche dell'architettura scelta.....</i>	<i>80</i>
<i>Fig. 4.3 - Camera di espansione (e) e camera di compressione (c).....</i>	<i>86</i>
<i>Fig. 4.4 - Camera di rimbalzo (B) e molla gassosa (gs).....</i>	<i>89</i>
<i>Fig. 4.5 - Riscaldatore (H) e refrigeratore (K) .....</i>	<i>91</i>
<i>Fig. 4.6 - Coefficienti di perdita per espansioni o compressioni improvvise del flusso in condotti cilindrici,[26].....</i>	<i>93</i>
<i>Fig. 4.7 - Dati sperimentali per l'andamento del foattore di attrito f in funzione del numero di Reynolds, per flussi in tubi circolari, [24].....</i>	<i>93</i>
<i>Fig. 4.8 - Andamento ipotetico di G durante il funzionamento del motore .....</i>	<i>95</i>
<i>Fig. 4.9 - Rigeneratore poroso (R).....</i>	<i>99</i>
<i>Fig. 4.10 - Elementi mobili del motore, pistone (P) e displacer (D).....</i>	<i>108</i>
<i>Fig. 4.11 - Sottosistema di carico, (load device-load, ld_l).....</i>	<i>111</i>
<i>Fig. 5.1 - Interfaccia principale del simulatore di Ansoft Simplrer.....</i>	<i>121</i>
<i>Fig. 5.2 - Schema di calcolo del programma di simulazione.....</i>	<i>122</i>
<i>Fig. 5.3 - Risultato della simulazione per l'andamento dei pistoni, in ordinata è indicato lo spostamento dalla posizione di equilibrio (in mm).....</i>	<i>124</i>
<i>Fig. 5.4 - Risultati della simulazione di NASA sul Technology Demonstration Convertor]..</i>	<i>124</i>
<i>Fig. 5.5 - Andamento divergente delle oscillazioni dei pistoni nel transiente iniziale, che si esaurisce in tempi dell'ordine di 1 sec. ....</i>	<i>125</i>
<i>Fig. 5.6 - Oscillazioni stazionarie dei pistoni, una volta raggiunta la condizione di regime</i>	<i>125</i>
<i>Fig. 5.7 - Andamento temporale del coefficiente di perdita di carico nel canale di rigenerazione, in N*sec/kg.....</i>	<i>126</i>
<i>Fig. 5.8 - Variazione Stazionaria del coefficiente di perdita, il cui particolare comportamento agisce stabilizzando le oscillazioni dei pistoni.....</i>	<i>126</i>
<i>Fig. 5.9 - Fluttuazioni di temperatura, a regime, nella camera di compressione e nella camera di espansione, espresse in °K.....</i>	<i>127</i>
<i>Fig. 5.10 - Fluttuazioni di pressione nelle camere di espansione e compressione, in kPa....</i>	<i>127</i>
<i>Fig. 5.11 - Comportamento della corsa massima del pistone e della frequenza operativa al variare della costante elastica della molla principale, considerando Cld_l=0.....</i>	<i>129</i>
<i>Fig. 5.12 - Comportamento della corsa massima del pistone e della frequenza operativa al variare della temperatura del riscaldatore. ....</i>	<i>130</i>

*Fig. 5.13 - Variazione di  $X_p$  e di  $f$  in funzione dello smorzamento dato dal carico applicato, per diversi valori di rigidità della molla principale..... 131*

*Fig. 5.14 - Variazione del ritardo di fase e del rapporto di corsa tra i pistoni al variare del carico applicato..... 132*

*Fig. 5.15 - Variazione della corsa del pistone, della frequenza operativa, e del rapporto di corsa al variare della pressione media, per diversi valori di  $Cld_1$  e con  $KP=2.42E+05$  N/m 133*

*Fig. 5.16 - Variazione del ritardo di fase tra displacer e pistone al variare della pressione media, per diversi valori di  $Cld_1$  e con  $KP=2.42E+05$  N/m ..... 134*

# Indice delle tabelle

<i>Tabella 2.1 - Caratteristiche e prestazioni dei modelli più recent di FPSE-LA di Sunpower Inc.,[9] .....</i>	<i>45</i>
<i>Tabella 2.2 - Caratteristiche e prestazioni del Solar System di Infinia Corporation, www.infiniacorp.com .....</i>	<i>50</i>
<i>Tabella 2.3 - Sequenza completa dei convertitori ASC prodotti da Sunpower per NASA,[21]62</i>	
<i>Tabella 2.4 - Parametri e risultati dei test sull'ASRG, paragonate con gli esiti previsti delle future sperimentazioni,[22].....</i>	<i>63</i>
<i>Tabella 5.1 - Risultati della simulazione per i principali parametri operazionali de motore</i>	<i>123</i>









# 1 La macchina di Stirling

## 1.1 Generalità

*“Un motore Stirling è un dispositivo che opera su un ciclo chiuso rigenerativo, con espansioni e compressioni del fluido di lavoro a differenti temperature”.*

Questa è la definizione con cui Graham Walker apre la sua vasta trattazione su questo tipo di motori [1], ed è stata largamente usata fino a non molto tempo fa. Questa definizione è tuttavia impropria, come spiegato dallo stesso autore, in quanto in realtà si adatta a molti tipi di macchine termiche, con varie configurazioni, per le quali una più adatta definizione generale potrebbe essere “macchine termiche rigenerative”, vale a dire quelle macchine in cui il calore ceduto dal fluido di lavoro all’ambiente circostante viene reinserito nel ciclo alla medesima temperatura. All’interno di questa categoria, è poi possibile una prima distinzione fra quelle macchine nelle quali il flusso è controllato dalle variazioni di volume e quelle in cui è controllato dal funzionamento di valvole. È di non molti decenni fa la convenzione di raggruppare sotto il nome di “motori Stirling” le prime, operanti a circuito chiuso, e con “motori Ericsson” le seconde, che utilizzano un circuito aperto.

Un motore a ciclo Stirling rientra nella categoria dei cosiddetti motori ad aria calda (*hot air engines*) a combustione esterna. Il suo nome deriva dall’ideatore del ciclo termodinamico (ciclo Stirling, appunto) che viene realizzato nella macchina. Il lavoro utile viene prodotto comprimendo un fluido ad una temperatura relativamente bassa e espandendolo ad una temperatura elevata. Il fluido, che è sempre un gas, attraversa un ciclo chiuso all’interno di un volume che non ha scambi di massa con l’esterno. In questo modo la pressione minima del ciclo può essere più alta di quella atmosferica, con un conseguente proporzionale aumento del lavoro ottenibile dal motore. Le pareti del vano contenente il fluido di lavoro permettono lo scambio termico, consentendo il riscaldamento del gas, che può essere effettuato secondo diverse modalità, dalla combustione, al concentrazione di raggi solari attraverso uno specchio concavo, al rilascio di energia associato al decadimento di un isotopo radioattivo. In tutto il motore non ci sono valvole a regolare il flusso di gas, e questo lo rende estremamente più semplice rispetto a macchine più convenzionali. Tra gli altri vantaggi che questo motore presenta sono sicuramente da sottolineare sia la sua notevole silenziosità che la sua buona affidabilità, data dal basso numero di parti mobili al suo interno.

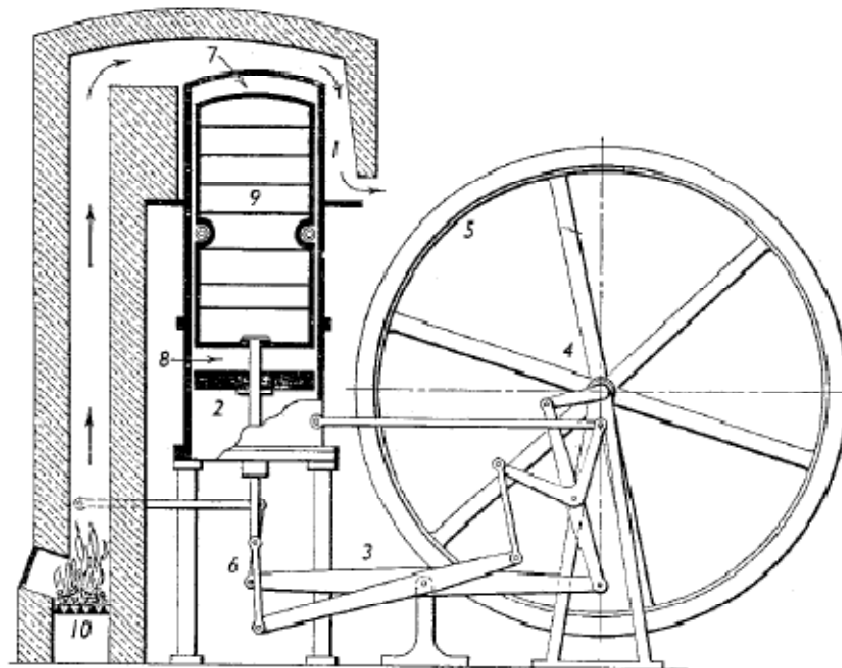


Fig. 1.1 - Schema del primo motore termico rigenerativo, brevettato da Robert e James Stirling nel 1816, [2]

Le sue applicazioni negli ultimi trent'anni hanno visto ampliarsi considerevolmente la loro area di impiego, soprattutto nel campo della generazione di potenza per gruppi elettrogeni. Si utilizzano per esempio motori Stirling alimentati dalla combustione di biomasse per produrre l'energia necessaria a impianti di piccola e media grandezza. Un particolare tipo di questi motori, che verrà ampiamente descritto nel presente lavoro di tesi, ha avuto uno sviluppo esponenziale che è ancora in corso, e che presumibilmente gli conferirà il ruolo di principale convertitore energetico del futuro, specialmente per impianti nei quali le condizioni di impiego debbano sottostare a specifiche restrizioni, come quelli progettati per missioni spaziali.

### 1.2 Breve storia del motore Stirling

Nel 1816, il reverendo Robert Stirling, un parroco della chiesa scozzese, ideò lo scambiatore termico rigenerativo. Questo lo portò, assieme al fratello James, alla realizzazione del primo motore termico rigenerativo a ciclo chiuso, da lui denominato "economizzatore", che in seguito prese il suo nome (Fig. 1.1). L'iniziale sviluppo della macchina fu ovviamente limitato dalla disponibilità dei materiali e dalle conoscenze tecnologiche dell'epoca, come lo stesso inventore riconobbe. Egli infatti, alla fine della sua vita, si trovò a dover sottolineare i limiti della sua creazione, affidando al futuro il momento in cui, grazie a nuove tecnologie e all'impiego di nuovi materiali, essa avrebbe potuto esprimere appieno le sue potenzialità:

*“Queste imperfezioni verranno rimosse in notevole misura solo dal tempo. [...] Sta ad abili e ambiziosi meccanici, in un’epoca futura, ripetere [i miei esperimenti] sotto circostanze più favorevoli, per il completo successo.”*

Tuttavia l’invenzione del motore Stirling, insieme alla contemporanea nascita del motore Ericsson, dovuta all’omonimo ideatore svedese, fu il primo passo di un processo che portò, durante il diciannovesimo secolo, alla creazione in tutto il mondo di migliaia di motori “ad aria calda”. Una completa rassegna dei vari modelli e delle loro applicazioni sarebbe poco utile, ai fini di questa tesi; per il lettore interessato ad un ulteriore approfondimento, si rimanda alla trattazione di Vincenzo Naso [3, cap. 9]. I nuovi motori si presentavano affidabili, efficienti e molto più sicuri delle alternative a vapore e dei loro bollitori, che a causa dei materiali usati, spesso provocavano incidenti, esplodendo. L’ascesa dei motori ad aria calda perse però la sua spinta verso la fine del secolo, quando gli ormai collaudati motori a combustione interna, e i nuovissimi motori elettrici, ebbero la meglio nella maggior parte delle applicazioni. Dopo la prima guerra mondiale i motori ad aria calda, fatta eccezione per qualche applicazione speciale, scomparvero addirittura dal panorama commerciale, trovando posto più nei musei che nell’utilizzo pratico.

Proprio in uno di questi musei, un direttore tecnico del Philips Research Laboratory ebbe modo di constatare, verso la metà degli anni ‘30, come i motori ad aria calda si adattassero meglio di quelli a vapore per la realizzazione di generatori elettrici, dei quali si avvertiva la necessità in tutte quelle zone non ancora raggiunte dalla fornitura energetica regolare. Iniziò così da parte del Philips Lab. uno studio approfondito di questi motori, sia come macchine motrici che come macchine operatrici. Due dimostrazioni, in particolare, colpirono la comunità scientifica. Un piccolo motore Stirling da 2,5 hp, montato su una barca, spinse un gruppo di scienziati del Philips lungo i canali olandesi, silenziosamente, fino alla velocità di 15 km/h. La seconda dimostrazione, di gran lunga la più impressionante, fu il resoconto filmato dell’esperimento sul refrigeratore Philips. In esso è possibile vedere una macchina di Stirling accoppiata ad un motore elettrico. Accendendo il motore in uno dei due versi di rotazione, la macchina si comporta come una pompa di calore, condensando l’aria attorno alla sua estremità. Spento il motore, la macchina di Stirling, in virtù della differenza di temperatura creata dal suo precedente funzionamento, diventa essa stessa un motore, sostenendo una rotazione in senso contrario fino all’azzeramento del gradiente termico.

Dopo la fine del secondo conflitto globale, l’avvento di batterie a secco e transistor rese meno pressante il bisogno energetico. l’interesse verso un metodo alternativo di produzione di energia, come il motore Stirling, rallentò, causando la chiusura di molti programmi di studio, ma non perse del tutto la sua spinta, ma non fu così. Grazie all’impegno di alcuni suoi geniali

## *1 La macchina di Stirling*

ingegneri, come Roelf Meijer, la Philips continuò il suo lavoro, teso a costruire motori di potenze maggiori, impensabili quando, circa un secolo prima, Robert Stirling si era arreso ai limiti tecnologici del suo tempo.

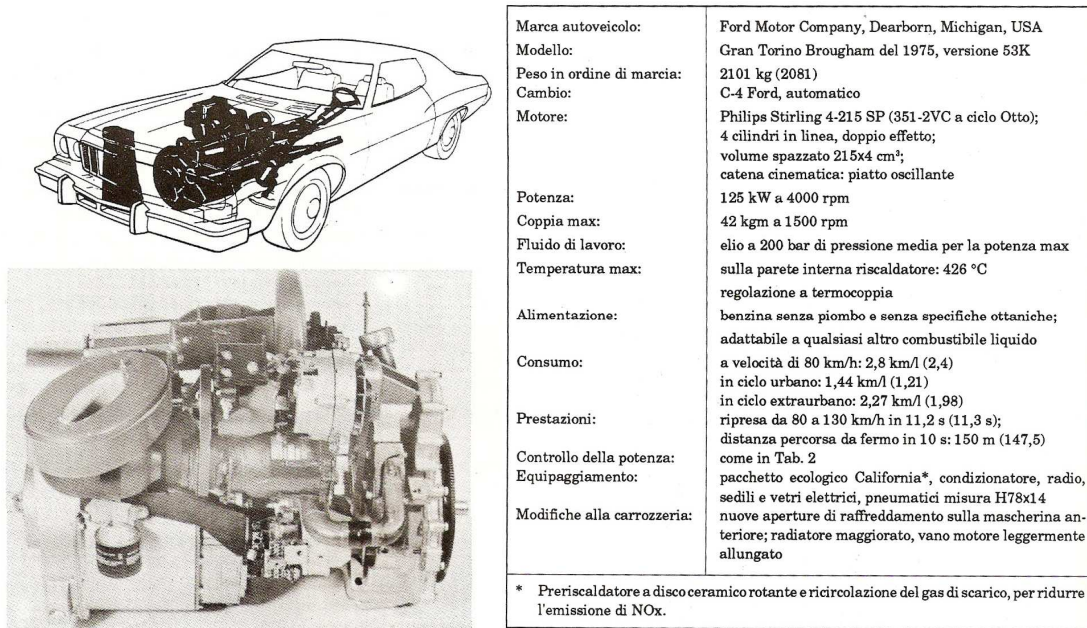
Già verso la fine degli anni '50 si videro i primi motori capaci di sviluppare centinaia di hp. Nel decennio successivo, fiorirono numerosi accordi di licenza tra il Philips Lab., la General Motors Corporation e la Ford Motors Co., e si registrarono i primi movimenti nella stessa direzione di numerose altre aziende europee, come la svedese United Stirling. Si cominciava a parlare di realizzare motori Stirling per applicazioni spaziali e sottomarine, sia con requisiti di propulsione che di generazione di potenza. Il lavoro delle varie aziende in molteplici campi di utilizzo spinse anche NASA alla creazione di un Stirling Engine Project Office (1975), che raccogliesse esperienza nel settore e lanciasse un programma di studio indipendente.

Grazie al contributo di Ford e General Motors, nacquero le prime automobili equipaggiate con motori Stirling, come la Ford Torino Stirling Special, (Fig. 1.2) che arrivò ad un passo dalla produzione su larga scala. Ma la guerra nello Yom Kippur, e la conseguente crisi petrolifera globale persuasero il mondo industrializzato alla cautela nell'intraprendere strade innovative. Molte sovvenzioni furono ritirate, e nel 1977 la partecipazione della Ford si chiuse definitivamente. La crisi fu un duro colpo per il proseguimento dello sviluppo del motore Stirling, la cui sopravvivenza fu lasciata alle iniziative di ricerca personali o di alcune aziende isolate.

Durante questo ventennio di grande entusiasmo, comunque, erano nati molti spunti per la creazione di diverse varianti del motore Stirling tradizionale. Una di esse, in particolare, merita più di una citazione. Fu infatti a metà degli anni '60, che il professor William Beale dell'Università di Athens, Ohio, ideò il motore Stirling Free-Piston, la cui descrizione sarà affrontata con precisione più avanti. La nascita di questo dispositivo rappresenta un punto di svolta nelle applicazioni delle macchine a ciclo Stirling, aprendo il filone di studio che ha portato ad un crescente (e recente) sviluppo di generatori elettrici sempre più efficienti e ridotti, la cui crescita sarà analizzata profondamente in seguito.

Nella parte finale del ventesimo secolo, la disponibilità di risorse nuovamente crescente ha permesso che nascesse un notevole interesse sui motori Stirling che si è diffuso in modo più omogeneo nel globo, specialmente nella realizzazione di impianti per la produzione energetica.

Questo interesse ha riguardato sia l'uso domestico di questi impianti, per le richieste di energia di abitazioni o industrie, sia la realizzazione e l'utilizzo di particolari versioni altamente efficienti e affidabili, impiegabili in campi non convenzionali, come appunto quello spaziale.



**Fig. 1.2 - La Ford Torino Stirling Special, con il motore mod. 4-215. A destra la scheda tecnica con le principali caratteristiche [3].**

Proprio in questo settore, dai primi anni 2000, si sono ottenuti risultati incoraggianti, che hanno fatto crescere ulteriormente l'interesse per questo tipo di tecnologia. Specialmente nell'ambito dei motori Stirling Free-Piston, utilizzati come convertitori termoelettrici, il NASA Glenn Research Center sta attualmente perfezionando dei gruppi di generazione di potenza che promettono un notevole salto di qualità per le necessità energetiche di missioni in cui non sia possibile l'intervento umano. Spinti da questi successi, che saranno descritti in modo più accurato nel prossimo capitolo, anche altri enti spaziali, come ESA (European Space Agency), stanno cominciando muoversi in questa direzione.

### ***1.3 Ciclo Stirling ideale***

Il ciclo di Stirling ideale è molto simile, per certi aspetti, al ciclo di Carnot, che non viene qui descritto, data la sua frequente presenza in letteratura (si veda, ad esempio [1]). Il ciclo Stirling è costituito da una compressione e un'espansione isoterme, intervallate da due trasformazioni isocore.

# 1 La macchina di Stirling

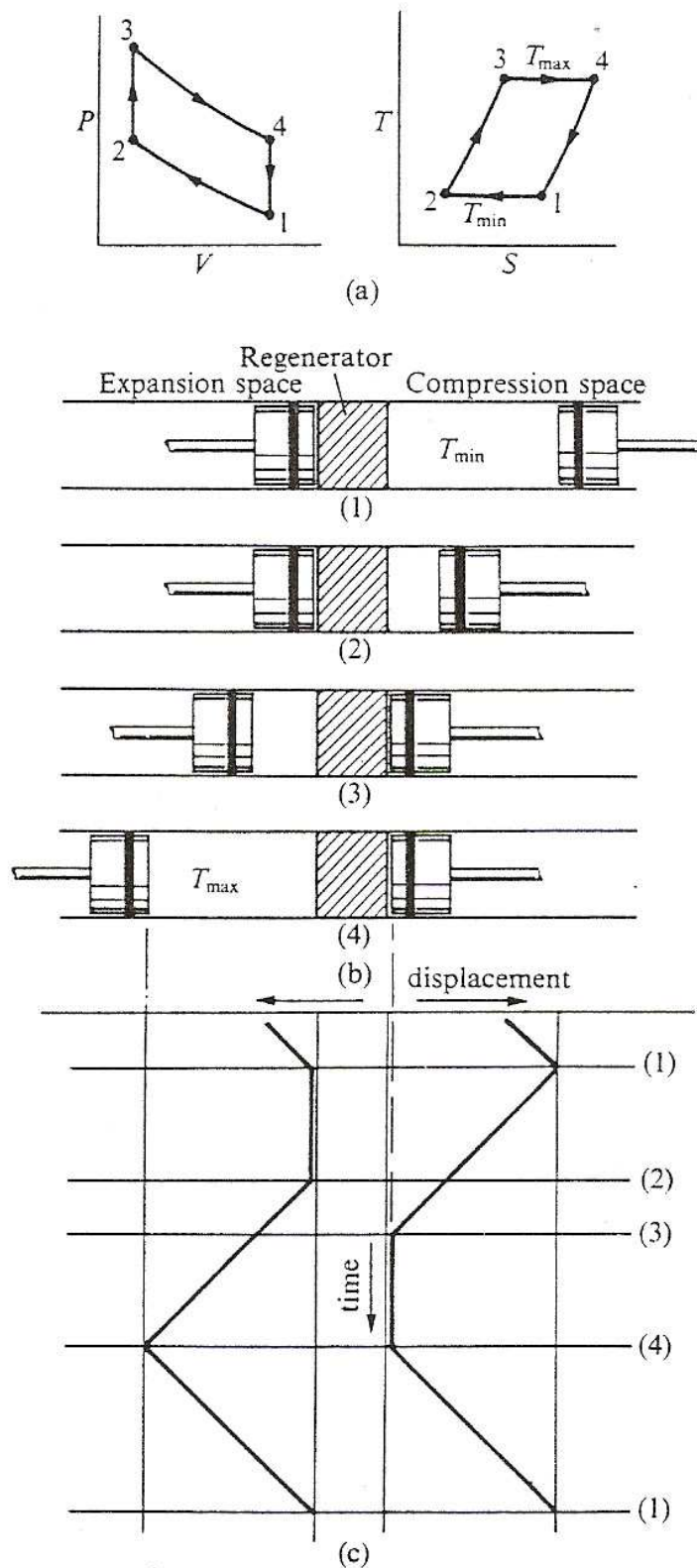


Fig. 1.3 - Ciclo di Stirling ideale: Diagrammi p-V e T-S (a), posizione dei pistoni (b) e loro spostamento nel tempo (c), [1]

Con riferimento alla Fig. 1.3, si considerano due pistoni opposti all'interno dello stesso cilindro, separati da un rigeneratore. Quest'ultimo può essere pensato come una matrice più o meno porosa, che garantisce il passaggio del fluido di lavoro, realizzato in un materiale che permetta un buon scambio termico fra le due fasi. Si individuano così uno spazio di espansione (caldo) e uno di compressione (freddo), indicati in figura. Le trasformazioni compiute dal fluido di lavoro (gas ideale), compreso tra i due pistoni, sono:

- Compressione isotermica (1 → 2) – Tutto il gas si trova nella camera fredda, quella di compressione, che ha volume massimo  $V_1$ , alla temperatura  $T_{min}$ . Il pistone a destra comprime il gas in modo isoteramico, finché esso occupa il volume  $V_2$ . Il pistone di sinistra resta fermo.
- Riscaldamento isocoro (2 → 3) – I due pistoni si muovono insieme, trasferendo il gas attraverso il rigeneratore, fino alla camera calda, dove occupa lo stesso volume  $V_3 = V_2$ . In questo passaggio il gas viene riscaldato fino alla temperatura  $T_{max}$ .
- Espansione isotermica (3 → 4) – Il gas, nello spazio di espansione, espande in modo isoteramico, causando lo spostamento del pistone di sinistra, fino ad occupare il volume  $V_4 = V_1$ , restando alla temperatura  $T_{max}$ . Il pistone destro resta fermo a contatto con il rigeneratore.
- Raffreddamento isocoro (4 → 1) – in seguito al moto simultaneo dei due pistoni, il gas viene nuovamente trasferito attraverso il rigeneratore, fino ad occupare sempre lo stesso volume nello spazio di compressione. Nel fare questo il gas viene raffreddato, per il passaggio nel rigeneratore, fino alla temperatura  $T_{min}$ . La situazione è di nuovo quella della fase (1) e il ciclo può ripetersi.

La macchina descritta in Fig. 1.3 è detta *macchina di Stirling ideale*. Essa presenta solamente due spazi di lavoro, che sono considerati anche spazi di scambio termico con l'esterno. Le ipotesi di semplificazione più significative, che la rendono diversa da una possibile realizzazione pratica, sono la rigenerazione unitaria e il moto discontinuo dei pistoni. Il rigeneratore, in particolare, nel caso descritto si comporta come una "spugna termodinamica", assorbendo e cedendo la stessa quantità di calore. Viene trascurata completamente, per esempio, la quantità di calore che lo attraversa per conduzione termica, dovuta all'elevato gradiente di temperatura che si instaura per il contatto con lo spazio caldo e quello freddo.

Per valutare le prestazioni della macchina ideale, è opportuno osservare i processi termodinamici che avvengono durante le trasformazioni. Si consideri un gas caratterizzato dalla pressione  $p$ , la temperatura  $T$ , il volume  $V$ . Per il primo principio della termodinamica, la

## 1 La macchina di Stirling

variazione dell'energia interna  $E$  del gas sottoposto a una qualsiasi trasformazione in cui la sua composizione rimanga costante è

$$\Delta E = \Delta Q - \Delta L = T\Delta S - p\Delta V \quad (0.1)$$

dove  $\Delta Q$  è la quantità di calore scambiato,  $\Delta L$  è il lavoro compiuto o subito dal gas, e  $\Delta S$  è la sua variazione di entropia. Poiché il fluido di lavoro è un gas ideale, con calori specifici costanti, la sua energia interna è anche uguale a

$$E = c_v T \quad \rightarrow \quad \Delta E = c_v \Delta T \quad (0.2)$$

Durante le trasformazioni isoterme, dunque, il gas non varia la sua energia interna, e la quantità di calore e di lavoro scambiati sono uguali. Invece durante le trasformazioni isocore, il gas non compie lavoro, restando costante il volume a disposizione. Dunque si ha variazione di energia interna in funzione del calore ceduto o assorbito dal passaggio nel rigeneratore.

Con riferimento al ciclo termodinamico di Fig. 1.3, e tenendo presente l'equazione di Stato dei gas ideali,

$$pV = RT \quad (0.3)$$

gli scambi di energia operati dal gas nella macchina sono:

$$\begin{aligned} Q_{1,2} = L_{1,2} &= \int_1^2 p dV = RT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \\ Q_{2,3} &= c_v (T_3 - T_2) \\ Q_{3,4} = L_{3,4} &= \int_3^4 p dV = RT_3 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \\ Q_{4,1} &= c_v (T_1 - T_4) = -c_v (T_3 - T_2) \\ L_{2,3} = L_{4,1} &= 0 \end{aligned} \quad (0.4)$$

Come si vede, dunque, le quantità di calore scambiato durante le trasformazioni isocore ( $2 \rightarrow 3$  e  $4 \rightarrow 1$ ) sono uguali, anche se di verso contrario. Esse infatti rappresentano la spiegazione fisica del funzionamento del rigeneratore, il quale immagazzina il calore che assorbe dal gas quando questo passa dal volume caldo a quello freddo. Durante il passaggio inverso, poi, la matrice del rigeneratore restituisce al fluido la stessa quantità di calore, riportandolo alla temperatura  $T_{max}$ . E' quindi possibile ricavare le espressioni del lavoro utile prodotto dal motore e del suo rendimento termodinamico.



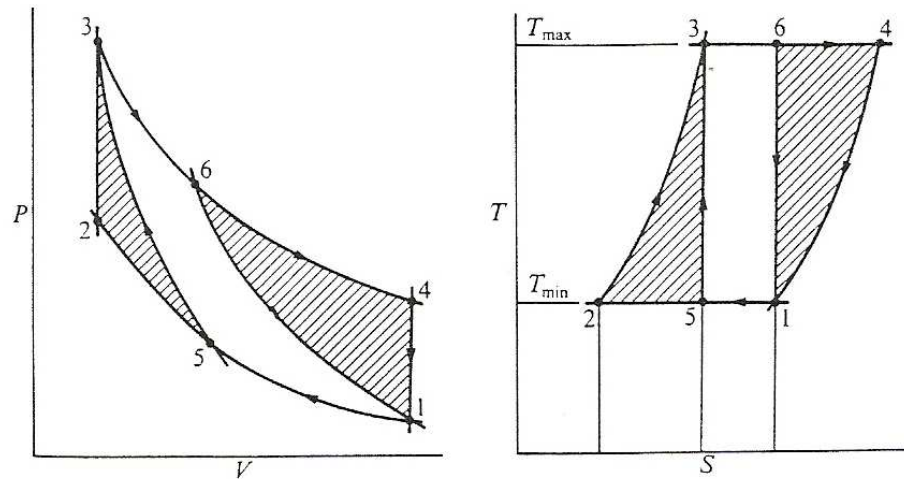


Fig. 1.4 - Confronto tra ciclo di Stirling e ciclo di Carnot [1]

$$L_u = R(T_{max} - T_{min}) \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \quad (0.5)$$

$$\eta = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{L_u} = 1 - \frac{T_{max}}{T_{min}} \quad (0.6)$$

Dall'equazione (0.6) si evince dunque che il rendimento del ciclo Stirling ideale è uguale a quello di un ciclo di Carnot che lavora tra le stesse due temperature estreme. Si può anzi aggiungere che a parità di condizioni, il ciclo Stirling è più vantaggioso. Si osservi infatti la Fig. 1.4, che mostra un ciclo di Stirling e uno di Carnot a confronto, collegati a due sorgenti termiche con le stesse temperature  $T_{max}$  e  $T_{min}$ . L'area racchiusa dal ciclo, come è noto, rappresenta il lavoro utile prodotto. Come si vede la macchina di Stirling ideale è capace di produrre un lavoro utile, per unità di volume, maggiore di quella di Carnot, lavorando nelle stesse condizioni e avendo quindi lo stesso rendimento termodinamico. Il vantaggio della macchina di Stirling può essere visto alternativamente come la capacità di produrre lo stesso lavoro di una macchina di Carnot presentando però ingombri minori.

Tutto questo è ovviamente valido se si ipotizza che l'efficienza di rigenerazione sia unitaria, e che quindi non ci siano perdite significative negli scambi termici fra gas e rigeneratore. Così che quest'ultimo possa effettivamente "rigenerare" il gas alle stesse condizioni ogni volta che questo lo attraversa. La rigenerazione è uno degli aspetti più significativi di tutto il ciclo. Questo fenomeno è possibile perché le trasformazioni isocore sono *isodiabatiche*, cioè ad ogni temperatura  $T$  e per ogni variazione  $\Delta T$  scambiano uguali quantità di calore, in senso contrario.

# 1 La macchina di Stirling

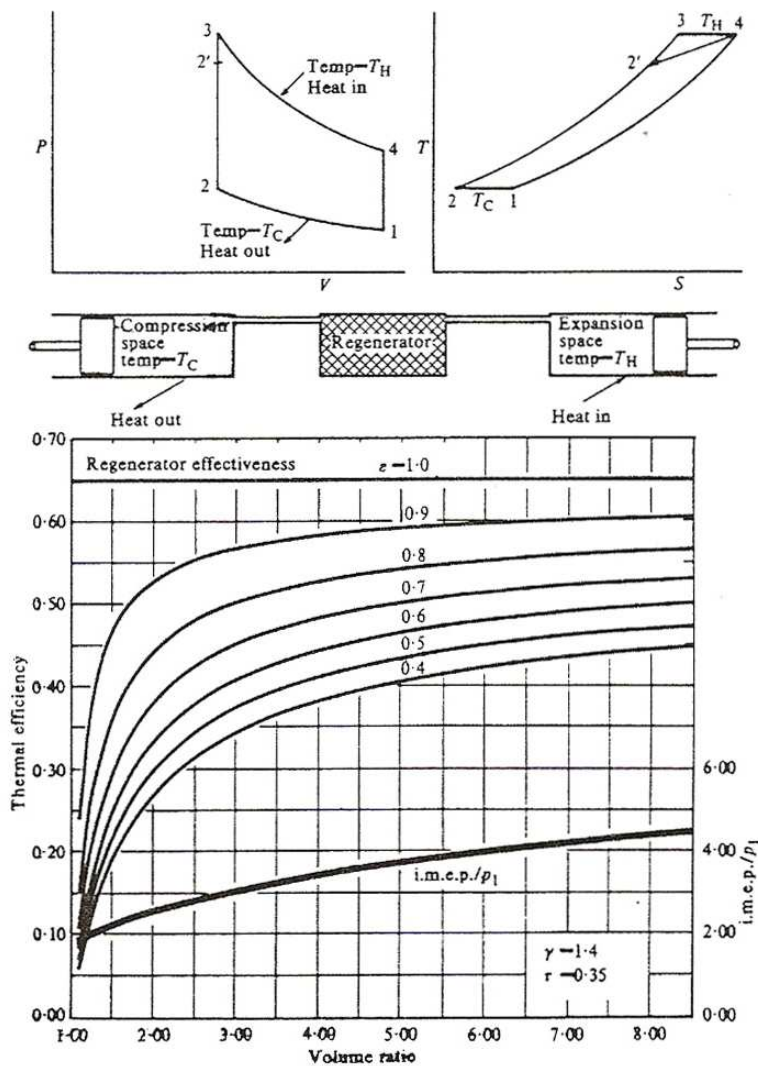


Fig. 1.5 - Rendimento e potenza specifica del ciclo Stirling ideale, al variare del rapporto volumetrico e dell'efficienza di rigenerazione [1]

Ciò permette di poter fornire al gas, durante una delle due trasformazioni, lo stesso calore che esso ha ceduto nell'altra. E' quindi possibile definire un'efficienza di rigenerazione, tramite l'espressione

$$\eta_{rig} = \frac{T_{2'} - T_H}{T_H - T_C} \quad (0.7)$$

dove la temperatura  $T_{2'}$ , con riferimento alla Fig. 1.5, rappresenta la temperatura che il gas raggiunge, passando dal volume freddo a quello caldo, durante una rigenerazione con un'efficienza minore di uno. Walker ([1, cap. 2]) presenta un'analisi approfondita dei principali cicli

termodinamici rigenerativi. Da questa analisi è possibile ricavare un'espressione del rendimento e del ciclo utile in funzione di una serie di parametri adimensionali caratteristici del motore. Definendo:

- Il rapporto di compressione volumetrico  $r_v = V_1/V_2$
- Il rapporto di temperatura  $\tau = T_{\min}/T_{\max}$
- Il rapporto tra i calori specifici  $\gamma = c_p/c_v$

Walker perviene alle seguenti espressioni:

$$\eta(r_v, \eta_{rig}, \tau, \gamma) = \frac{(\gamma - 1)(1 - \tau) \ln r_v}{(1 - \eta_{rig})(1 - \tau) + (\gamma - 1) \ln r_v} \quad (0.8)$$

$$L_u(r_v, \eta_{rig}, \tau, \gamma) = RT_{\min} \left( \frac{1}{\tau} - 1 \right) \ln r_v \quad (0.9)$$

che dimostrano ancora come nel caso di una perfetta rigenerazione ( $\eta_{rig} = 1$ ) il ciclo di Stirling abbia un rendimento pari a quello di Carnot, a parità di temperature estreme. Walker dimostra anche che, definendo un'opportuna *pressione effettiva media indicata*, di espressione

$$i.m.e.p.(r_v, \tau, p_1) = p_1 \frac{r_v (1 - \tau) \ln r_v}{\tau (r_v - 1)} \quad (0.10)$$

è possibile ottenere un'espressione adimensionale per la *potenza specifica* di un ciclo, che non dipende né dall'efficienza rigenerativa, né da  $\gamma$ .

$$\zeta(r_v, \tau) = \frac{i.m.e.p.}{p_1} = \frac{r_v (1 - \tau) \ln r_v}{\tau (r_v - 1)} \quad (0.11)$$

la Fig. 1.5 mostra appunto l'andamento delle grandezze adimensionali espresse dalle equazioni (0.8) e (0.11) in funzione del rapporto di compressione  $r_v$ , per diversi valori di  $\eta_{rig}$ .

Come accennato in precedenza, una macchina di Stirling può lavorare anche seguendo un ciclo inverso, semplicemente assorbendo calore da una sorgente termica che si trova ad una temperatura più bassa di quella a cui lo cede. Si realizza in questo modo una macchina operatrice che può essere utilizzata come refrigeratore o pompa di calore. Questa strada è stata percorsa con successo da molte aziende, Philips in testa, ottenendo risultati più che notevoli. Dato che le macchine funzionanti a ciclo Stirling inverso non risultano interessanti ai fini del presente lavoro di tesi, si rimanda il lettore che fosse interessato ad altri lavori, fra i quali segnaliamo quelli di Walker, Finkelstein e Naso ([1,2,3])

### 1.4 Ciclo Pseudo-Stirling ideale

Il ciclo Stirling ideale è un insieme di processi molto difficile da realizzare praticamente. Uno dei problemi sicuramente più ardui da risolvere riguarda gli scambi termici con le sorgenti esterne. Infatti le operazioni di compressione e espansione, previste isoterme, dovrebbero avvenire grazie a scambi di calore estremamente rapidi ed efficienti.

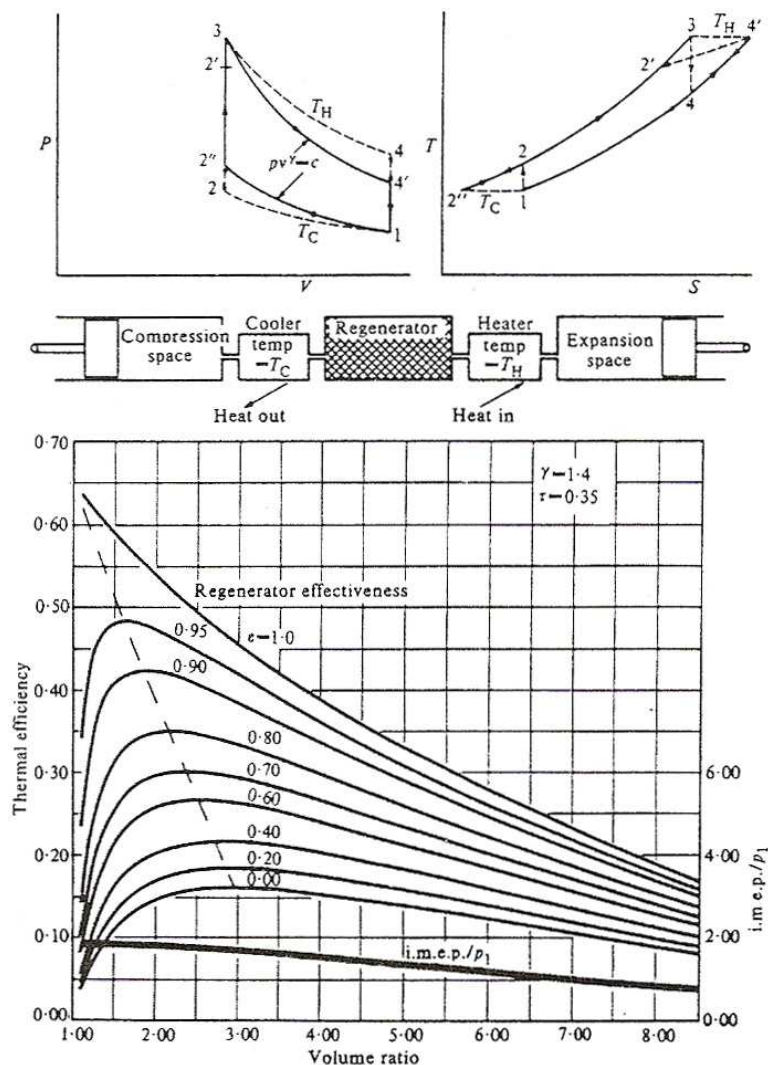


Fig. 1.6 - Rendimento e potenza specifica del ciclo Stirling pseudo-ideale, al variare del rapporto di compressione e dell'efficienza di rigenerazione [1]

Le velocità degli elementi mobili (che tipicamente sono dell'ordine di almeno qualche m/sec), comportano però che per tali scambi i tempi, così come le superfici, siano molto ridotti, dell'ordine di quelli che possono verificarsi nei principali motori a combustione interna.

Pertanto non è possibile assumere che le trasformazioni di espansione e compressione avvengano a temperatura costante. E' infatti più realistico considerare tali trasformazioni come adiabatiche. Per vedere come questo influisca sul ciclo termodinamico si osservi la Fig. 1.6. Al termine della compressione, il fluido di lavoro anziché raggiungere il punto 2'', che corrisponderebbe ad una trasformazione isotermica, si porta nel punto 2, di fine compressione isoentropica (adiabatica reversibile). A quel punto, il fluido deve essere riportato alle condizioni corrispondenti alla macchina ideale.

E' quindi necessaria la presenza di un refrigeratore che ristabilisca le condizioni del punto 2''. In modo analogo occorre un riscaldatore alla fine dell'espansione, per ripristinare le condizioni del punto 4'. L'inserimento dei due scambiatori di calore ausiliari, quindi, consente di riportare il fluido in quegli stati termodinamici che solo dei processi isotermici gli consentirebbero.

Il dispositivo capace di realizzare quanto appena detto è descritto da un modello a 5 componenti, per la presenza degli scambiatori, oltre ai volumi caldo e freddo e al rigeneratore (vedi Fig. 1.6, in alto). Gli scambi termici quindi hanno ora luogo negli scambiatori, e non più nelle camere di espansione e di compressione, le cui pareti sono ritenute adiabatiche. Il ciclo compiuto da tale dispositivo è definito *ciclo pseudo-Stirling ideale*. Esso considera una rigenerazione unitaria, e realizza un rendimento e un lavoro utile minori rispetto al ciclo ideale. Infatti, a differenza di quest'ultimo, nel ciclo pseudo-ideale il rendimento termodinamico della macchina, anche ipotizzando una rigenerazione unitaria, dipende sia dal rapporto delle temperature estreme che dal rapporto volumetrico di compressione.

Sempre da Walker ([1]), infatti, ricordando che l'equazione che caratterizza una trasformazione adiabatica è

$$pV^\gamma = \text{costante} \quad (0.12)$$

è possibile ricavare l'espressione

$$\eta(r_v, \eta_{rig}, \tau, \gamma) = \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{r_v^{\gamma-1}}\right)\right] - \tau(r_v^{\gamma-1} - 1)}{\left[1 - \left(\frac{\eta_{rig}}{r_v^{\gamma-1}}\right)\right] - \tau(1 - \eta_{rig})r_v^{\gamma-1}} \quad (0.13)$$

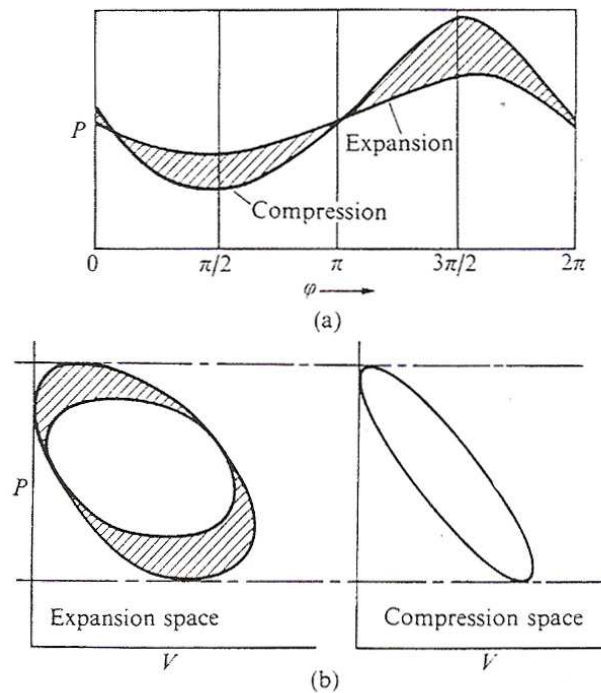
che nel caso di rigenerazione perfetta ( $\eta_{rig} = 1$ ) assume la forma

$$\eta = 1 - \tau r_v^{\gamma-1} \quad (0.14)$$

Il rapporto volumetrico di compressione, quindi, risulta fondamentale ai fini del rendimento termodinamico di una macchina di Stirling pseudo-ideale.

### ***1.5 Macchina di Stirling reale***

Come è facile capire, non può esistere nessuna macchina in grado di far realizzare al fluido di lavoro il ciclo termodinamico ideale, o pseudo-ideale, descritto nel paragrafo precedente. La differenza con un possibile caso reale è evidenziata in particolare da due ipotesi: il moto discontinuo dei pistoni, e il volume nullo del gas che occupa lo spazio esterno, quello non spazzato dal movimento degli stantuffi. Queste ipotesi assicurano che durante la fase di compressione tutto il gas si trovi nello spazio di compressione, e viceversa durante la fase di espansione. Dunque i processi di scambio di lavoro sono localizzati nei rispettivi spazi.



**Fig. 1.7 - Effetto delle perdite di pressione sul motore [1]**

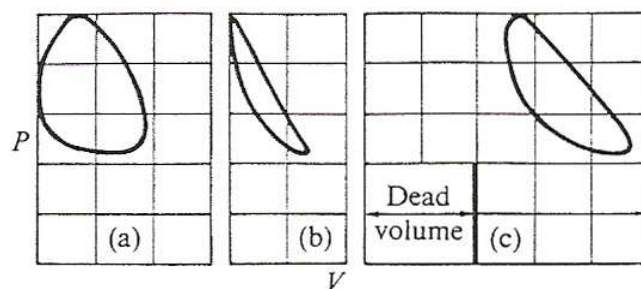


Fig. 1.8 - Ciclo termodinamico per un motore Stirling reale, spazio di espansione (a), spazio di compressione (b) e fluido di lavoro (c), [3]

Una qualunque realizzazione pratica, invece, deve sottostare ad un movimento continuo dei pistoni, oltre a dover considerare debitamente lo spazio occupato dagli scambiatori, dal rigeneratore, e dai condotti di interconnessione, che non può in nessun caso essere trascurato.

Questo riduce inevitabilmente il lavoro prodotto. Infatti la presenza di parte del gas nella camera di espansione, per esempio, durante la fase di compressione, causa un aumento del lavoro necessario alla compressione stessa, poiché parte del gas si trova ad una temperatura molto elevata. Analogamente, nella fase di espansione, il lavoro che si ottiene dalla frazione di gas che si trova nello spazio freddo è minore rispetto al valore previsto con la descrizione ideale.

A questi due problemi, si aggiunge tutta una serie di perdite energetiche, dovute a:

- Perdite di pressione dovute al passaggio attraverso il rigeneratore e gli scambiatori (Fig. 1.7)
- Perdite per trafileamento del gas intorno ai pistoni
- Perdite per l'efficienza di rigenerazione non unitaria
- Perdite per scambi termici non reversibili
- Perdite per conduzione termica attraverso il rigeneratore

A causa di queste e di altre perdite di tipo secondario, il ciclo termodinamico realizzato da una macchina di Stirling reale è quello riportato in Fig. 1.8, in cui si vede chiaramente come il lavoro prodotto (l'area racchiusa dal ciclo) sia minore di quello ideale.

Il dispositivo reale che più si avvicina, per le condizioni del gas e per la disposizione dei pistoni, allo schema osservato precedentemente nella descrizione del ciclo pseudo-ideale, è quello di Fig. 1.9. Si tratta della soluzione costruttiva più semplice da realizzare (si noti la somiglianza con lo schema idealizzato di Fig. 1.6), con i pistoni contrapposti e tutto il gas racchiuso fra di essi. Essa tuttavia non è l'unica che consente di realizzare il ciclo pseudo-ideale.

## 1 La macchina di Stirling

Difatti negli anni le soluzioni pratiche per la costruzione di macchine di Stirling si sono succedute con grande varietà di configurazioni. Una classificazione dei vari tipi di dispositivi può essere fatta secondo diversi criteri di catalogazione, come l'accoppiamento dei pistoni, il numero di cilindri o di effetti (Fig. 1.10).

Ai fini della presente trattazione risulta più significativa una distinzione delle varie configurazioni fatta in base alla posizione relativa e alla funzione dei pistoni. Secondo questo criterio, i motori a ciclo Stirling possono essere raggruppati in tre principali categorie. Lo schema di Fig. 1.9 è chiamato configurazione *alpha*, ed è caratterizzato dalla presenza di due pistoni. In questa situazione uno dei due stantuffi si occupa di imprimere lavoro al gas, comprimendolo, mentre l'altro riceve il lavoro utile dall'espansione del fluido. Entrambi possono essere collegati, attraverso un manovellismo, ad un albero al quale viene impresso un moto rotativo risultante. Tramite esso è poi possibile, nel caso in cui la macchina debba lavorare nel ciclo inverso, imporre ai pistoni il moto necessario.

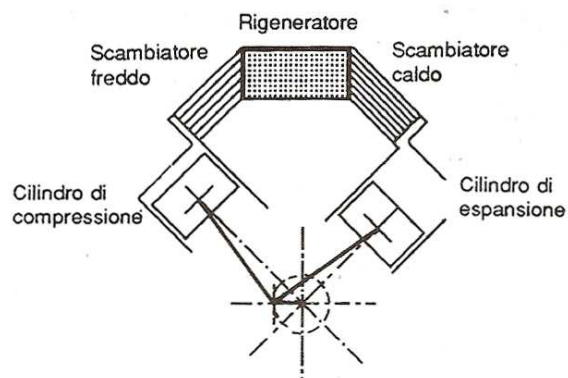


Fig. 1.9 - Motore Stirling di tipo *alpha*, configurazione a "V", [3]

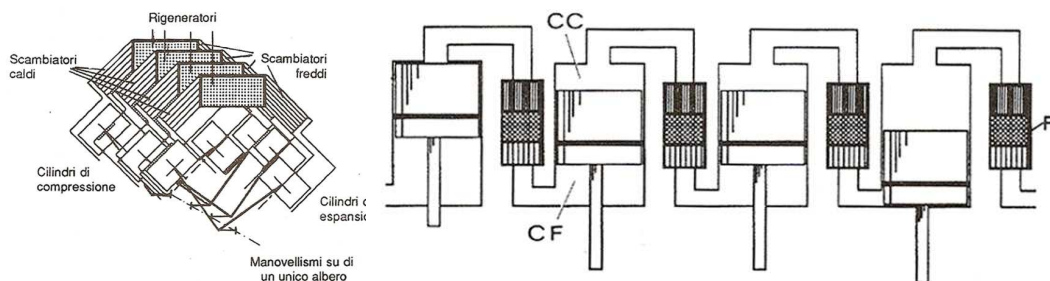


Fig. 1.10 - Motori Stirling multiciclo (sinistra) o multi effetto (destra), [3]



Una configurazione alternativa alla precedente è quella che prevede la presenza, al posto di uno dei due pistoni, di un cosiddetto “dislocatore” (*displacer*), che si differenzia dal *pistone di potenza* proprio per la sua funzione durante il ciclo di lavoro. Questa categoria ha inoltre la possibilità di un’ulteriore distinzione (vedi Fig. 1.11) fra macchine in cui pistone e displacer si trovino nello stesso cilindro (configurazione *beta*) e macchine in cui essi si muovano in cilindri separati (configurazione *gamma*).

In questo tipo di macchine il displacer ha la funzione di trasferire il gas dallo spazio di espansione a quello di compressione e viceversa, realizzando in questo modo le trasformazioni isovolumiche che coinvolgono la rigenerazione.

Le trasformazioni in cui si ha scambio di lavoro, quindi, sono lasciate al pistone di potenza. Il principio di funzionamento delle configurazioni con displacer è diverso, in alcuni aspetti, da quello delle macchine con l’architettura precedente, come è descritto in dettaglio nel prossimo paragrafo. In modo particolare ci si sofferma sulle macchine di tipo *beta*, che comprendono i motori di cui tratta la presente tesi.

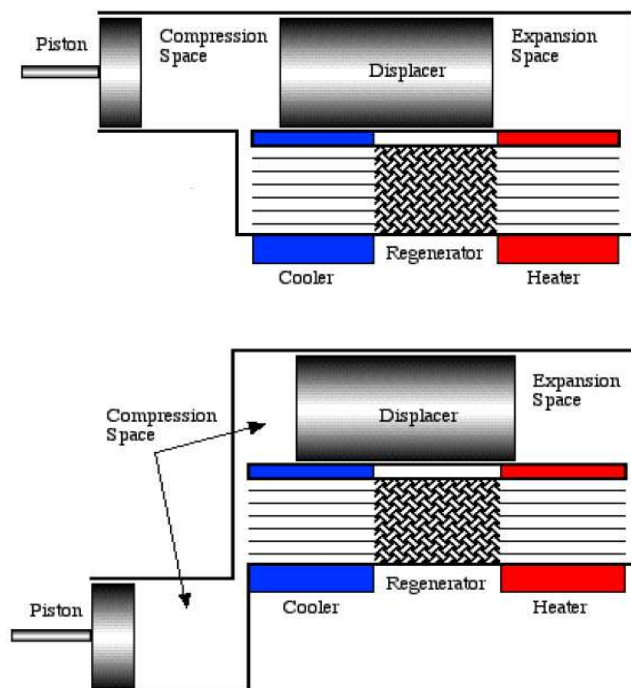


Fig. 1.11 - Motori Stirling di tipo *beta* (sopra) e di tipo *gamma* (sotto), [5]

1.5.1 Macchine di tipo beta

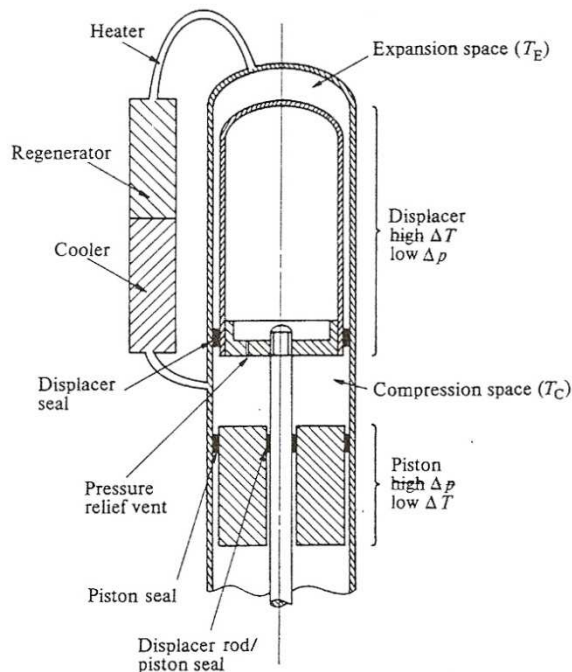


Fig. 1.12 - Macchina di Stirling monocilindrica (beta)

Come detto, si tratta di macchine monocilindriche (Fig. 1.12), in cui il displacer separa lo spazio di espansione da quello di compressione, che sono collegati comunque da un percorso contenente i due scambiatori di calore e il rigeneratore. Lo spazio di espansione ha in genere una forma a cupola, dovuta al tentativo di contrastare le tensioni termiche che vi si possono instaurare al raggiungimento delle temperature operative (diverse centinaia di °C). E' quindi conveniente dare una forma simile anche all'estremità calda del displacer, così da non aumentare quella parte di volume (volume *morto*) che non contribuisce alla produzione di lavoro.

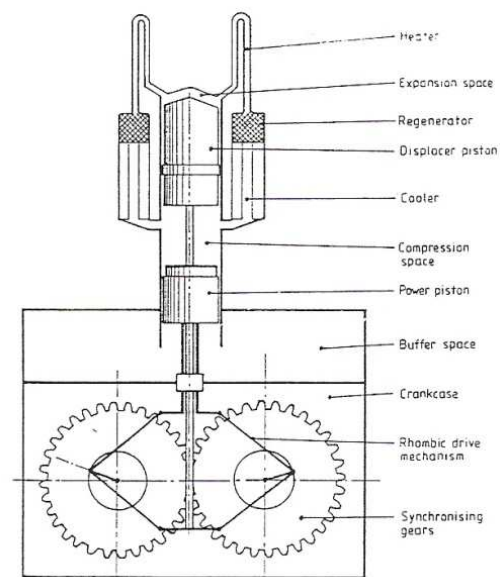
Il pistone è l'elemento attraverso il quale si può estrarre potenza dal motore. I vari tipi di potenza utile dipendono poi dal tipo di dispositivo di carico che vi è collegato. E' infatti possibile utilizzare il moto alternativo del pistone per guidare un compressore o una pompa (o per muovere il cursore di un alternatore lineare, come vedremo più avanti). Alternativamente tale moto può essere trasformato in un moto rotativo attraverso per esempio una guida rombica (vedi Fig. 1.13), come quella inventata da Mejer.

Il volume che si trova sotto il pistone di potenza può essere sigillato, comportandosi come una molla gassosa. Da qui il nome di *spazio di rimbalzo*, il quale può essere pressurizzato, così da aumentare la pressione minima del ciclo, e consentire un lavoro prodotto maggiore.

Questo ovviamente comporta degli inconvenienti, il principale dei quali è un non trascurabile trafileamento di gas attraverso il pistone, che va limitato con delle tenute, oppure con l'utilizzo di gas biatomici al posto di gas monoatomici, meno inclini al trafileamento. Nel prossimo capitolo vedremo come questo fenomeno, anziché un disturbo, possa essere considerato una semplice caratteristica operativa della macchina, almeno nel particolare tipo di motori di cui questa tesi si occupa.

Il displacer invece, deve sottostare ad elevate differenze di temperatura, piuttosto che di pressione, perciò è opportuno che nel suo progetto, si tenda a limitare il più possibile la conduzione termica.

E' per questo motivo che in quasi tutte le realizzazioni recenti, il displacer appare come un corpo cilindrico cavo, piuttosto allungato, collegato alla carcassa del motore da un'asta. Le pareti del displacer sono in genere molto sottili, e la sua resistenza strutturale è aiutata dalla pressione del gas che lo riempie (non diversa dalla pressione della camera di rimbalzo). In questa tesi si pone l'attenzione su un particolare tipo di macchine di Stirling di tipo *beta*, nel quale il pistone e il displacer non sono collegati a nessuna guida cinematica, e vengono lasciati liberi di muoversi alternativamente, sotto l'unica spinta della variazione di pressione sulle loro facce. Queste macchine di Stirling, presenti per lo più nella versione di motori, sono dette *motori Stirling a pistone libero* (FPSE – *Free Piston Stirling Engines*) e verranno descritte profusamente nel capitolo successivo.



**Fig. 1.13 - Macchina di Stirling a guida rombica, ideata da Roelf Meijer, del Philips Lab., [5]**

## ***1.6 Analisi teorica classica delle macchine di Stirling***

L'analisi rigorosa del comportamento fisico dei motori di Stirling presenta difficoltà evidenti, dovute soprattutto al livello di accuratezza che si vuole raggiungere nella loro descrizione. Tutte le perdite spiegate in precedenza, unite alla reale efficienza di scambiatori e rigeneratore, e al volume da essi occupato, creano un enorme divario tra i tentativi di descrizione teorica, seppur rigorosa, e l'effettivo ciclo di trasformazioni, moti e scambi energetici che avvengono dentro un dispositivo di questo genere.

Durante gli anni questo divario ha subito notevoli riduzioni, grazie all'avanzamento della ricerca e all'aumento delle capacità e della velocità dei moderni calcolatori. Unitamente a questo va considerata una comprensione sempre maggiore di questi motori, che ha permesso di isolare gli aspetti più significativi del loro funzionamento, e quindi i parametri e i fenomeni fisici più in grado di influenzarne maggiormente le prestazioni.

Ad oggi i modelli di analisi predittiva o progettuale per motori Stirling sono numerosi, e presentano molte sostanziali differenze, come vedremo nel dettaglio più avanti relativamente ai motori a pistone libero. Tuttavia la grande maggioranza di questi modelli ha un progenitore comune nel primo tentativo di analisi del funzionamento di una macchina di Stirling, fatta da Schmidt nella seconda metà del diciannovesimo secolo, e migliorata da Finklestein non più di 50 anni fa. Questa trattazione, seppur molto idealizzata, è rimasta il punto di partenza di numerosi lavori successivi, alcuni dei quali anche molto recenti.

Nonostante resoconti completi dell'analisi di Schmidt, relativa al ciclo ideale di Stirling, e della variante di Finkelstein, relativa a quello pseudo ideale, siano perfettamente reperibili in letteratura, all'interno di ogni testo che affronti il tema delle macchine a ciclo Stirling (si veda per esempio [1,3,5]), l'autore ritiene utile riportarne i punti fondamentali.

### ***1.6.1 Teoria di Schmidt***

Gustav Schmidt era un ricercatore del German Polytechnic Institute di Praga. Nel 1871 egli pubblicò un'analisi nella quale otteneva una soluzione in forma chiusa delle equazioni che descrivono la termodinamica di una macchina di Stirling, al fine di predirne le prestazioni, note le condizioni operative. Il modello cui fa riferimento la seguente discussione è quello di

Fig. 1.14.

La trattazione di Schmidt parte da una nutrita serie di ipotesi semplificative, quali:

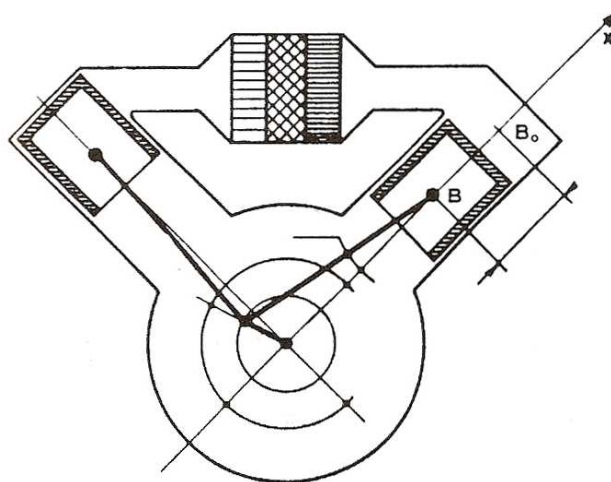
- 1) La pressione del fluido di lavoro è, in ogni istante, la stessa in tutti i punti del circuito

- 2) Il fluido di lavoro è un gas ideale
- 3) Non ci sono trafilementi ( $m_{tot}=const.$ )
- 4) Non c'è gradiente di temperatura negli scambiatori
- 5) La rigenerazione è perfetta
- 6) La variazione dei volumi nello spazio di lavoro è sinusoidale
- 7) La temperatura di pistoni e cilindro è costante

Oltre a queste assunzioni, il limite forse maggiore dell'analisi di Schmidt era l'ipotesi che il ciclo termodinamico seguito dal fluido di lavoro fosse il ciclo di Stirling nella sua *forma ideale*. Vale a dire considerare che le trasformazioni di espansione e compressione avvenissero in modo *isotermico*, cosa che si è visto essere piuttosto irrealistica.

Tuttavia questo non ha impedito a un gran numero di successori di Schmidt di basare su questa serie di ipotesi i loro lavori per circa un secolo, compresi i ricercatori del Philips Lab., i cui risultati comunque non sono mai stati pubblicati in modo dettagliato.

Poiché quello che si vuole dare è una descrizione generale della teoria, allo scopo di illustrarne i capisaldi e i risultati, la presente discussione non ricalca con precisione l'elaborazione di Schmidt. Le equazioni sono presentate nella forma proposta da Urieli e Berchowitz in [5], che risulta più facile da comprendere. Una trattazione più rigorosa è esposta in [1], ma all'interno di questo lavoro sarebbe risultata ridondante.



**Fig. 1.14 - Schema di riferimento per l'analisi di Schmidt, [3]**

# 1 La macchina di Stirling

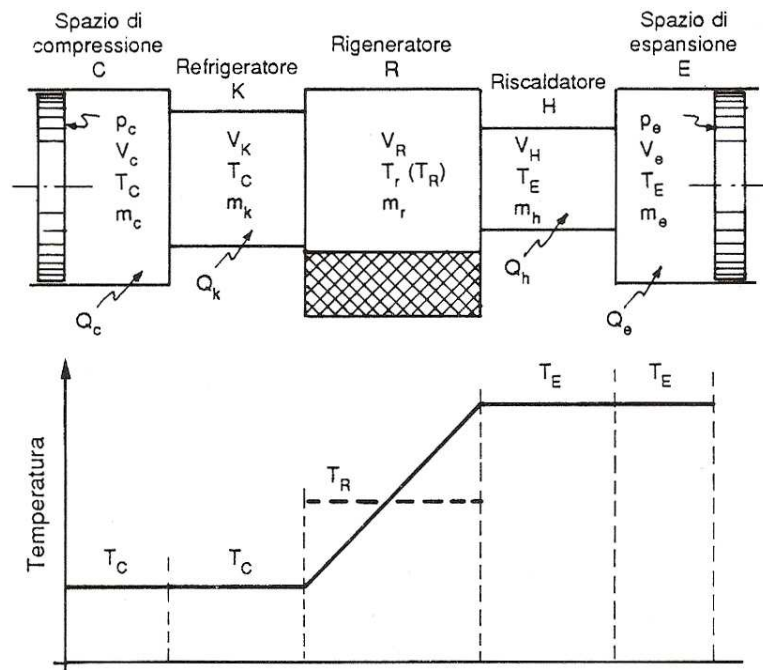


Fig. 1.15 - Distribuzione di temperatura nei 5 componenti del motore, secondo l'analisi di Schmidt (modello isoterma), [3]

La distribuzione di temperatura assunta dal modello isotermico è quella di Fig. 1.15, dove l'andamento lineare della temperatura nel rigeneratore è stabilito dall'assunzione che in esso l'effettiva temperatura segua la legge

$$T_r = \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} \quad (0.15)$$

Si considera l'equazione di stato dei gas ideali, con  $\mathfrak{R}$  la costante molare, presa nella forma

$$pV = M_{gas} \mathfrak{R} T \quad (0.16)$$

Si può quindi ottenere la pressione del gas, che per le ipotesi fatte, sarà quella risultante dal riempimento di un volume totale che comprende gli spazi di lavoro, gli scambiatori e il rigeneratore. Quindi

$$p = \frac{M_{gas} \mathfrak{R}}{\left[ \frac{V_e}{T_e} + \frac{V_c}{T_c} + V_r \frac{\ln(T_h/T_k)}{(T_h - T_k)} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_k}{T_k} \right]} \quad (0.17)$$

dove  $M_{gas}$  è la massa totale del fluido, ed è già stata sostituita l'equazione (0.15). La variazione dei volumi degli spazi di lavoro, supposta sinusoidale, è presa nella forma

$$V_c = V_{c_{dead}} + \frac{V_{c_{sw}}}{2}(1 + \cos \theta) \quad (0.18)$$

$$V_e = V_{e_{dead}} + \frac{V_{e_{sw}}}{2}[1 + \cos(\theta + \alpha)] \quad (0.19)$$

dove  $V_{c_{dead}}$  e  $V_{e_{dead}}$  sono i volumi morti, e  $V_{c_{sw}}$  e  $V_{e_{sw}}$  le ampiezze di oscillazione rispettivamente del volume di compressione e di espansione, mentre  $\theta$  è l'angolo di manovella. Sostituendo le equazioni (0.18) e (0.19) nella (0.17), si ricava

$$p = M_{gas} \mathfrak{R} \left[ s + \left( \frac{V_{e_{sw}} \cos \alpha}{2T_h} + \frac{V_{c_{sw}}}{2T_k} \right) \cos \theta - \left( \frac{V_{e_{sw}} \sin \alpha}{sT_h} \right) \sin \theta \right]^{-1} \quad (0.20)$$

con

$$s = \left[ \frac{V_{c_{sw}}}{sT_k} + \frac{V_{c_{dead}}}{T_k} + \frac{V_k}{T_k} + V_r \frac{\ln(T_h/T_k)}{T_h - T_k} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_{e_{sw}}}{2T_h} + \frac{V_{e_{dead}}}{T_h} \right] \quad (0.21)$$

Con le seguenti sostituzioni trigonometriche, riferite alla Fig. 1.16,

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{\frac{V_{e_{sw}} \sin \alpha}{T_h}}{\frac{V_{e_{sw}} \cos \alpha}{T_h} + \frac{V_{c_{sw}}}{T_k}} \right) \quad (0.22)$$

$$c = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{V_{e_{sw}}}{T_h} \right)^2 + 2 \frac{V_{e_{sw}} V_{c_{sw}}}{T_h T_k} \cos \alpha + \left( \frac{V_{c_{sw}}}{T_k} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (0.23)$$

È possibile costruire un'espressione più semplice per la pressione del gas

$$p = \frac{M_{gas} \mathfrak{R}}{s(1 + b \cos \phi)} \quad (0.24)$$

Con

$$b = \frac{c}{s} \quad \text{e} \quad \phi = \theta + \beta \quad (0.25)$$

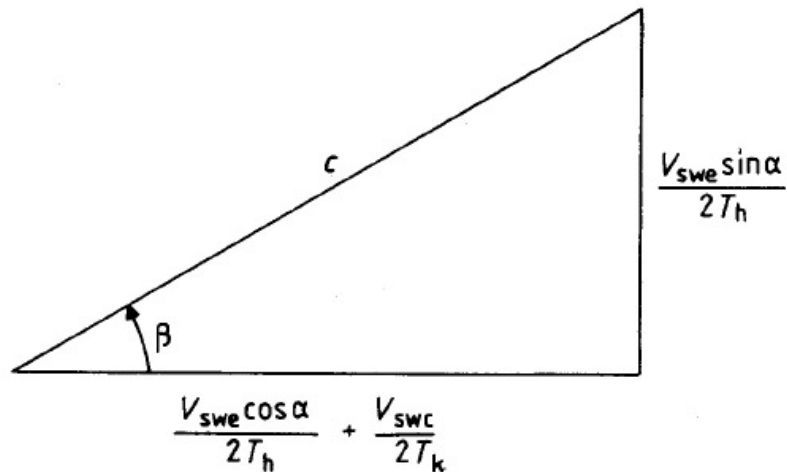


Fig. 1.16 - Sostituzioni trigonometriche, [5]

Quindi i valori massimo, minimo e medio della pressione sono

$$p_{\max} = \frac{M_{\text{gas}} \mathfrak{R}}{s(1-b)} \quad (0.26)$$

$$p_{\min} = \frac{M_{\text{gas}} \mathfrak{R}}{s(1+b)} \quad (0.27)$$

$$p_{\text{medium}} = \frac{M_{\text{gas}} \mathfrak{R}}{s\sqrt{1-b^2}} \quad (0.28)$$

l'ultimo dei quali (ottenuto dalle tavole di Dwight, "Tables of Integrals and Other Mathematical Data", 1957) è il modo più semplice per correlare la pressione media alla massa totale di gas con cui si riempie il motore.

Il lavoro scambiato dal motore con l'esterno è diviso tra la fase di compressione e quella di espansione, dunque

$$W = W_c + W_e \quad (0.29)$$

Con

$$W_c = \oint p dV_c = \int_0^{2\pi} p \frac{dV_c}{d\theta} d\theta \quad (0.30)$$

$$W_e = \oint p dV_e = \int_0^{2\pi} p \frac{dV_e}{d\theta} d\theta \quad (0.31)$$



Sostituendo le espressioni della variazione dei volumi, espresse dalle equazioni (0.18) e (0.19), si raggiunge un'espressione definitiva per i lavori di compressione e di espansione, dai quali è poi possibile ottenere il rendimento del motore. Cioè

$$W_c = \pi V_{c_{sw}} p_{medium} \sin \beta \frac{\sqrt{1-b^2} - 1}{b} \quad (0.32)$$

$$W_e = \pi V_{e_{sw}} p_{medium} \sin(\beta - \alpha) \frac{\sqrt{1-b^2} - 1}{b} \quad (0.33)$$

$$\eta = \frac{W}{W_e} = 1 + \frac{V_{c_{sw}} \sin \beta}{V_{e_{sw}} \sin(\beta - \alpha)} \quad (0.34)$$

Ricordando poi la (0.22) si ricava

$$\eta = 1 - \frac{T_h}{T_k} \quad (0.35)$$

La (0.35) è la conferma di quanto ricavato tramite considerazioni termodinamiche, ed è conseguenza inevitabile delle ipotesi semplificative su cui si basa l'analisi, che ovviamente è piuttosto distante dai casi di realizzazione pratica. Tuttavia la teoria di Schmidt consente di avere una prima stima plausibile per l'andamento della pressione media del gas di lavoro, come mostrato in Fig. 1.17

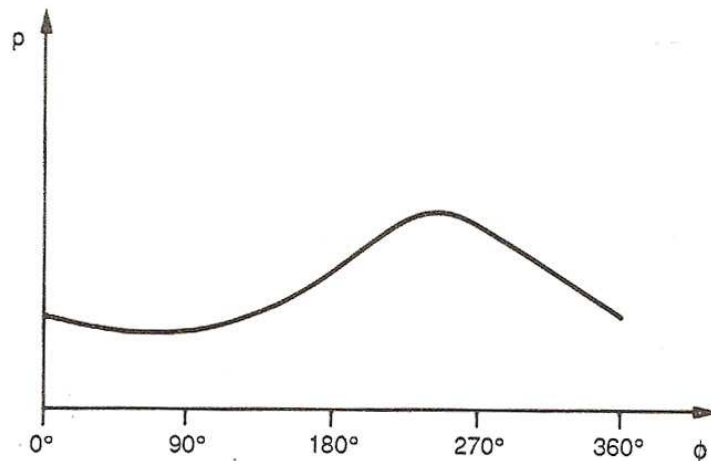


Fig. 1.17 - Andamento della pressione di lavoro secondo la teoria di Schmidt, [3]

### 1.6.2 Modello adiabatico di Finkelstein

Solo agli inizi degli anni '60, quindi quasi un secolo dopo la presentazione della teoria di Schmidt, fu proposto un nuovo approccio modellistico. Theodor Finkelstein, un ingegnere britannico laureatosi all'università di Londra, formulò una trattazione più sofisticata, basandosi sulla constatazione, cui si è già accennato in precedenza, che le trasformazioni negli spazi di lavoro non possano essere realisticamente considerate isoterme. Egli considerò dunque che tali processi vadano presi come politropici, se non addirittura adiabatici, e propose quindi la presenza degli scambiatori ausiliari, per sostenere il ciclo pseudo-ideale descritto in precedenza.

Pur mantenendo tutte le altre ipotesi, Finkelstein ipotizzò quindi che, mentre negli scambiatori termici, in virtù di una velocità pressoché infinita di scambio termico, la condizione di isotermità era comunque accettabile, negli spazi di lavoro essa andasse abbandonata, in favore di una formulazione più vicina alla situazione reale.

Secondo questo punto di vista, dunque, la temperatura del gas nella camera di espansione, per esempio, può trovarsi ora sopra, ora sotto il valore della temperatura  $T_h$  dello scambiatore caldo. Lo stesso vale per la camera di compressione. Questo porta ad una distribuzione di temperatura nel motore, diviso sempre in 5 parti, uguale a quella di Fig. 1.18,

Il metodo utilizzato da Finkelstein è quello di applicare l'equazione di stato e i bilanci di massa ed energia ad ogni volume, raggiungendo così un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari (di cui Urieli e Berchowitz propongono un brillante metodo di soluzione numerica [5]), pur non fornendo un'espressione analitica della pressione di lavoro in funzione degli spostamenti dei pistoni.

Il principale problema della trattazione di Finkelstein riguardava le temperature di interfaccia tra gli spazi di lavoro e gli scambiatori, indispensabili nell'applicare il bilancio di energia. Essendo ogni spazio caratterizzato da una temperatura, ed avendo gli spazi di lavoro una temperatura diversa dai rispettivi scambiatori, nasce il problema di quale valore assegnare all'interfaccia tra lo spazio di compressione e lo scambiatore freddo, e tra lo spazio di espansione e lo scambiatore caldo.

Con l'intento di superare questo ostacolo, Finkelstein introdusse le *temperature condizionali*. Egli in sostanza assunse come temperatura di interfaccia quella dello spazio da cui proviene il fluido. Chiamando  $\dot{m}_{eh}$  e  $\dot{m}_{kc}$  le portate di fluido attraverso le suddette interfacce, e assumendo per esse un valore positivo nel caso in cui il fluido passi dall'ambiente caldo verso quello freddo, detta ipotesi corrisponde a prendere

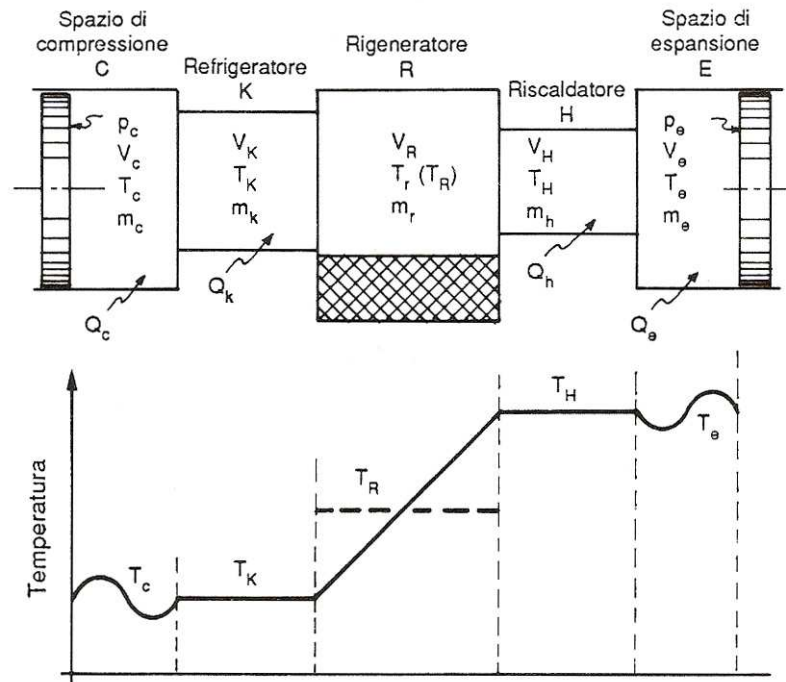


Fig. 1.18 - Distribuzione di temperatura nei 5 componenti del motore secondo il modello adiabatico di Finkelstein, [3]

$$T_{eh} = \begin{cases} T_h & \text{se } \dot{m}_{eh} < 0 \\ T_e(t) & \text{se } \dot{m}_{eh} > 0 \end{cases} \quad (0.36)$$

$$T_{kc} = \begin{cases} T_k & \text{se } \dot{m}_{kc} > 0 \\ T_c(t) & \text{se } \dot{m}_{kc} < 0 \end{cases} \quad (0.37)$$

Questa ipotesi è molto vicina a ciò che fisicamente succede in una macchina reale, e rispetto ad altre soluzioni, quali quella di prendere come temperatura di interfaccia una media delle temperature degli spazi adiacenti, è anche più vantaggiosa per le simulazioni numeriche, come dimostrato da Urieli [5].

L'analisi di Finkelstein resta dunque fortemente idealizzata. Nonostante ciò l'aver introdotto la possibilità di non considerare processi isotermici fu un enorme passo avanti, il primo dopo l'introduzione del modello di Schmidt. Il modello adiabatico è alla base di tutti i successivi tentativi di descrizione analitica della termodinamica dei motori Stirling, compreso quello di cui tratta la presente tesi.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

### 2.1 Descrizione generale

Un motore di Stirling a pistone libero (Free-Piston Stirling Engine, FPSE) è il risultato di una semplice variazione, applicabile ad ogni macchina di Stirling. La sua particolarità sta nel fatto che i pistoni non sono collegati ad un manovellismo, che ne guida il movimento reciproco e determina il loro sfasamento, ma vengono lasciati liberi di muoversi, con la sola eventuale eccezione di collegamenti elastici con la carcassa del motore.

Il moto degli elementi mobili, quindi, è originato dalle sole forze di pressione del gas e dall'interazione fluidodinamica dei componenti, unico elemento che va ad accoppiare l'andamento di un pistone rispetto all'altro. Come illustrato in (Fig. 2.1) esistono motori a stantuffi liberi per moltissime configurazioni di macchine Stirling, siano esse a singolo o doppio effetto, con due pistoni o del tipo pistone-displacer (Vincenzo Naso presenta un'ampia classificazione delle varie realizzazioni, [3, cap.12], che va comunque ben oltre l'ambito di interesse di questa tesi).

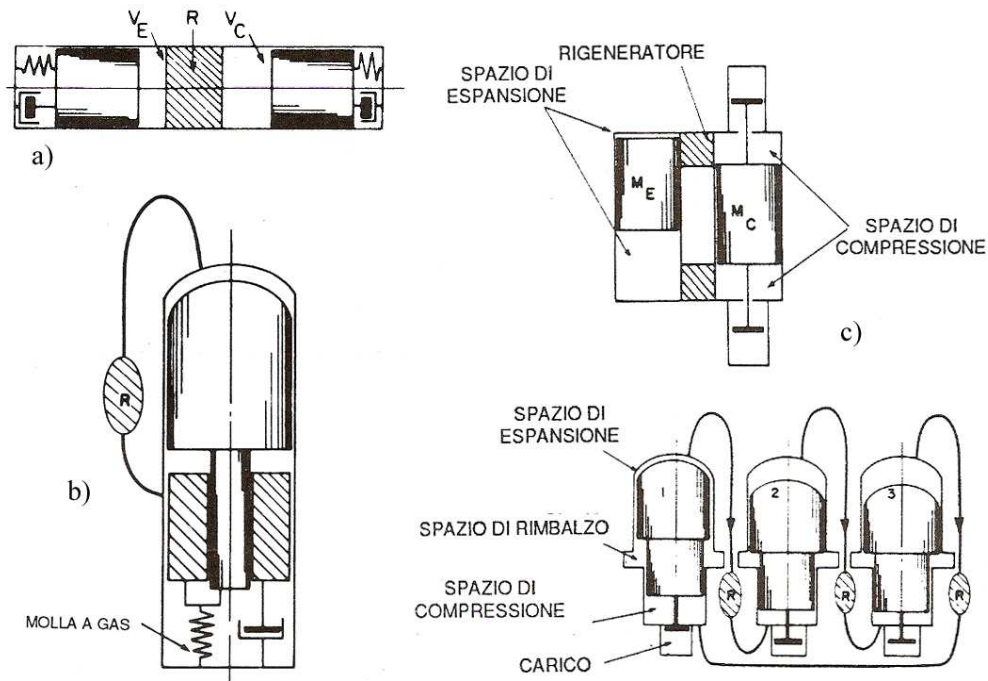


Fig. 2.1 - Varie tipologie di motori Stirling a pistone libero: a) a due pistoni con semplice effetto, b) pistone-displacer con semplice effetto, c) macchine a doppio effetto, [3]

Tuttavia la grande maggioranza di macchine a pistone libero presenta una configurazione di tipo *beta*, soprattutto per la sua straordinaria semplicità. Questi motori consistono solamente di un displacer e un pistone (organo da cui è possibile estrarre potenza) operanti in un unico cilindro completamente chiuso (Fig. 2.1-b). Ciò permette quindi di trascurare gli eventuali trafilamenti attorno al pistone, che portano il gas di lavoro a fluire in uno spazio chiuso (*spazio di rimbalzo*) che si comporta come una molla gassosa. In questo modo il gas trafila in entrambe le direzioni, causando semplicemente uno spostamento del punto medio di oscillazione del pistone. Questo fenomeno può essere controllato tramite opportuni *dispositivi di centramento* (in genere dei piccoli fori) che permettono di settare la posizione del punto medio di oscillazione di pistone e displacer sui valori desiderati. Questi dispositivi non vengono presi in considerazione nella modellizzazione preliminare affrontata da questa tesi, ad un lettore interessato si consiglia una trattazione più specifica, come quella effettuata da de Monte [4].

### 2.1.1 Il primo motore FPSE

Come accennato nel paragrafo 1.2, questo particolare tipo di macchina, che viene impiegata per lo più come motore, fece la sua comparsa a metà degli anni '60. La sua prima realizzazione si deve al prof. William Beale, della Ohio State University. Fu lui infatti ad avere l'intuizione di eliminare il manovellismo ad un motore a guida cinematica.

I motori Stirling di quel periodo, realizzati da Philips e General Motors (vedere paragrafo 1.2), pur realizzando rendimenti termici di tutto rispetto, risultavano comunque pesanti, ingombranti e notevolmente complessi.

Con l'aiuto di quelli che allora erano i suoi studenti, Beale realizzò un prototipo della sua creazione, con l'intento di ottenere una versione semplificata di quei motori, con pesi e dimensioni ridotte, che mantenesse gli stessi livelli di prestazione.

Il modello per gli esperimenti presentato da Beale nel 1969 ([8]), è riportato schematicamente in Fig. 2.2. Si trattava di un dispositivo molto piccolo, con un diametro massimo di appena 2'' (circa 5 cm). Al suo interno si muovevano i due stantuffi, un pistone relativamente pesante e un displacer molto più leggero. Fra quest'ultimo e il cilindro veniva lasciato uno spazio, attraversabile dal gas sotto la spinta del displacer stesso. Come si vede dalla figura, questo condotto anulare costituiva quindi il rigeneratore, comprensivo degli scambiatori di calore (un avvolgimento elettrico e un'intercapedine piena d'acqua). In questo modo, oltre a semplificare il progetto, si riducevano anche le perdite di pressione che il flusso avrebbe subito dovendo attraversare un condotto esterno al cilindro, come nelle normali macchine di tipo *beta* (Fig. 1.11). Il pistone e l'asta del displacer al suo interno erano invece provvisti di tenute, in modo da separare lo spazio di rimbalzo dal volume superiore.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

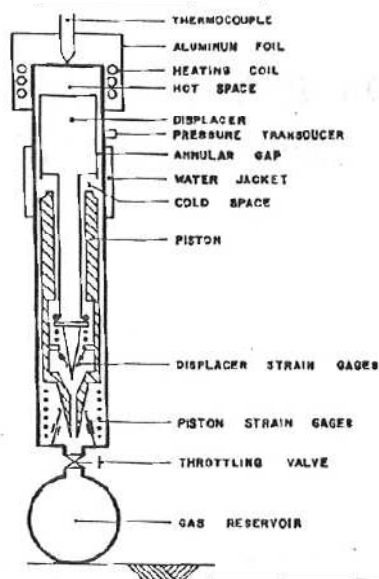


Fig. 2.2 - Primo modello sperimentale di motore Free-Piston, William Beale, 1969 [8]

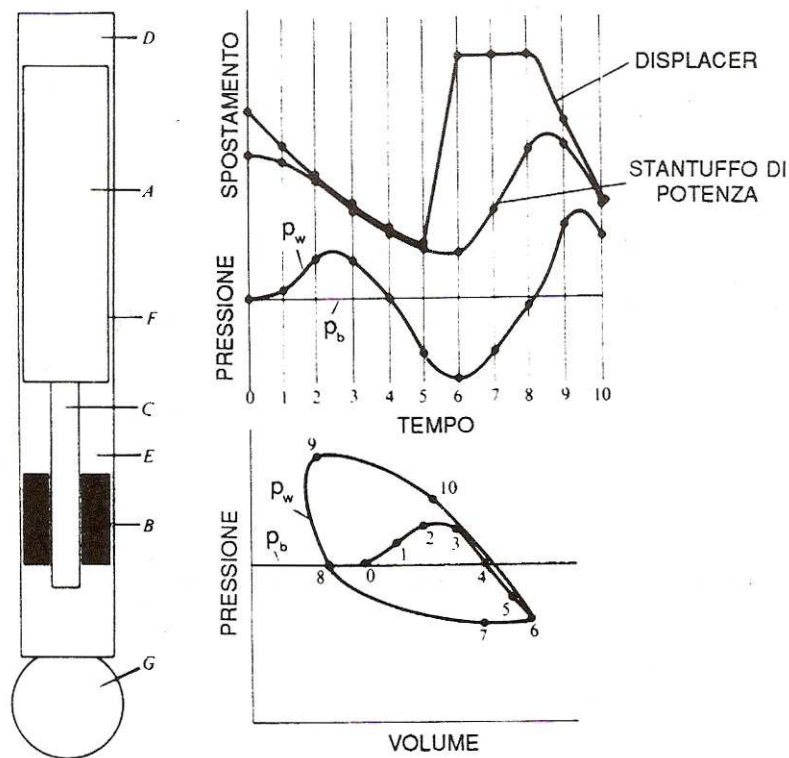


Fig. 2.3 - Schema di un motore Stirling a pistone libero: A - Displacer, B - Pistone, C - Asta del displacer, D - Spazio di espansione, E - Spazio di compressione, F - Anello rigenerativo, G - Spazio di rimbalzo, [3]

L'estrazione di potenza veniva simulata da una valvola di laminazione, regolabile, che metteva in comunicazione lo spazio di rimbalzo con un serbatoio di volume molto maggiore. Si poteva così determinare l'ampiezza di oscillazione degli stantuffi, che avendo una molla gassosa

comune nello spazio di rimbalzo, erano soggetti a continue collisioni reciproche, che diedero alle macchine con questa configurazione l'appellativo di "macchine bang-bang".

L'efficienza misurata dagli esperimenti di Beale risultò molto bassa (intorno al 10%), conseguenza sia delle collisioni sopra citate, sia della bassa efficienza di rigenerazione del motore. L'assenza di un rigeneratore vero e proprio, in fatti, limitava molto la capacità del gas di scambiare calore con le sorgenti nel poco tempo a disposizione, durante l'attraversamento del canale anulare.

Tuttavia le ridotte dimensioni del prototipo, unite alla semplicità costruttiva, furono spunti più che sufficienti per investigare sugli ampi margini di miglioramento che il dispositivo prometteva. Come si vedrà nel seguito, negli ultimi trent'anni aziende come la Sunpower Inc., fondata dallo stesso Beale, hanno sviluppato ampiamente questa tecnologia, raggiungendo livelli di prestazioni che hanno portato il motore Free-Piston a competere in moltissimi campi, sia con gli altri tipi di macchine Stirling che con i motori, più "tradizionali", a combustione interna.

### 2.1.2 Principio di funzionamento di un FPSE

Nonostante la sua semplicità, il funzionamento di un motore di Stirling a pistoni liberi non è di immediata intuizione. Nel tentativo di darne una descrizione il più possibile accurata e comprensibile, si propone di seguito l'analisi ispirata da Beale [8] e ricostruita in dettaglio, fase per fase, in molti altri testi, fra cui quelli di Vincenzo Naso e Filippo de Monte ([3,4]).

Si fa quindi riferimento alla Fig. 2.3, nella quale è rappresentata una delle configurazioni più diffuse di questo motore, insieme al diagramma temporale dello spostamento dei pistoni e della pressione di lavoro. Si distinguono tre masse, un displacer (A), un pistone (B) e un cilindro che li contiene. Si identificano quindi il *volume di lavoro*, superiormente al pistone (diviso tra lo spazio di espansione e quello di compressione), e il *volume di rimbalzo* (G), al di sotto.

Il displacer presenta un'asta che passa attraverso il pistone e finisce nello spazio di rimbalzo, così da avere in comune col pistone la molla gassosa. Asta e displacer possono essere aperti e cavi, così da far parte dello spazio di rimbalzo, oppure chiusi, con un piccolo orifizio in modo che la pressione la loro interno sia la stessa, mediamente, di quella del ciclo.

Il motore è supposto in posizione verticale, in modo da poter trascurare effetti di disallineamento causati da forze laterali, in seguito si vedrà come questa condizione possa essere raggiunta anche in posizione orizzontale, grazie a opportuni collegamenti elastici.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

Si consideri una fase iniziale in cui le masse sono ferme, la pressione è la stessa in ogni volume del motore, e lo stesso valga per la temperatura. Lo stato termodinamico del fluido di lavoro (racchiuso al di sopra del pistone) è quindi quello indicato dal punto 0 in Fig. 2.3.

Tramite una sorgente termica, si inizia a riscaldare lo spazio di espansione. Il conseguente aumento di pressione del gas ( $p_w$  in figura), spingerà entrambi i pistoni verso il basso (trasformazione 0-1). Se si considera, in prima approssimazione, che lo spazio di rimbalzo sia molto più grande di quello di lavoro, e che quindi la sua pressione possa essere assunta costante, la forze di pressione agenti sul pistone di potenza e sul displacer sono

$$F_p = (p_w - p_B)(A_p - A_d) \quad (2.1)$$

$$F_D = (p_w - p_B)A_d \quad (2.2)$$

Per effetto della grande differenza di masse (il pistone in genere pesa 10 volte di più del displacer), e del rapporto delle sezioni (i valori tipici sono dell'ordine di  $3 \leq A_p/A_d \leq 4$ ) l'accelerazione impressa ai due pistoni sarà quindi molto diversa, in genere

$$\frac{a_D}{a_p} \cong 3.33 \quad (2.3)$$

quindi il displacer accelera molto di più del pistone.

All'aumentare della temperatura in camera di espansione, la pressione nello spazio di lavoro continua a crescere, e quindi spinge ulteriormente verso il basso gli stantuffi. In virtù della sua maggiore accelerazione, il displacer si muove più velocemente, causando lo schiacciamento del volume di compressione (E, in figura). Il gas che si trova in questo volume quindi è costretto a fluire nello spazio di espansione attraverso lo spazio anulare intorno al displacer. Così facendo il gas si scalda, passando dalla zona fredda a quella calda (rigenerazione). Questo fa alzare ulteriormente la temperatura nel volume di espansione, e quindi la pressione di lavoro cresce ancora, insieme alle accelerazioni degli stantuffi (trasf. 1-2).

Dopo un certo tempo, a causa della già descritta particolarità di questo tipo di architettura, il displacer entra in contatto con il pistone, e i due stantuffi si muovono insieme. Lo spazio di compressione è nullo e non c'è più trasferimento di gas attraverso il rigeneratore, quindi il gas si trova tutto nello spazio di espansione, con una pressione ancora superiore a quella dello spazio di rimbalzo, quindi continua a spingere i pistoni. Il volume dello spazio di lavoro quindi aumenta e questo causa un'espansione del gas. La pressione  $p_w$  passa dal punto 2



al punto 3 in figura, e poi in rapida espansione fino al punto 4, in corrispondenza del quale ha lo stesso valore della pressione nello spazio di rimbalzo,  $p_B$ .

Da questo momento in poi, gli stantuffi si muovono per inerzia, e la massa del pistone è tale da fargli continuare la corsa verso il basso, espandendo ulteriormente il gas di lavoro, e facendo scendere la pressione  $p_w$  a valori inferiori a  $p_B$  (4-5). La forza risultante esercitata su pistone e displacer cambia quindi verso, rallentandone il moto. Questo rallentamento si fa sentire prima sul displacer, di massa molto inferiore, che si stacca da pistone e comincia a risalire (5-6), mentre il pistone continua a scendere, espandendo ancora il gas e aumentando quindi la forza che lo rallenta.

Salendo, il displacer fa passare gas nello spazio di compressione, raffreddandolo e diminuendo quindi la pressione  $p_w$ . Nel punto 6 del grafico di Fig. 2.3, la forza di pressione dovuta alla differenza tra  $p_B$  e  $p_w$  supera in modulo la forza di inerzia del pistone, fermandolo e facendolo tornare verso l'alto.

Inizia quindi la fase di compressione (6-7 e 7-8), durante la quale il displacer resta fermo alla sommità del cilindro, per effetto della pressione sulla sua asta, con tutto il gas di lavoro nello spazio di compressione. La pressione  $p_w$  raggiunge di nuovo il valore di  $p_B$  al punto 8.

Da questo punto in poi lo stantuffo continua a salire per la forza di inerzia, comprimendo ulteriormente il gas e portando la pressione  $p_w$  al punto 9, mentre il displacer, comincia a muoversi verso il basso, ora che la risultante agente su di esso ha di nuovo il verso iniziale. Il fluido di lavoro si muove di nuovo verso lo spazio caldo, aumentando la temperatura e quindi, ulteriormente, la pressione  $p_w$ , che fa crescere le forze di pressione dirette verso il basso, agenti su entrambi gli stantuffi.

Al punto 10 il displacer si trova di nuovo a contatto con il pistone e il ciclo si ripete come dal punto 2, senza la sequenza di avviamento precedente. Nel grafico in basso di Fig. 2.3 la pressione  $p_w$  è plottata in funzione del volume dello spazio di lavoro, approssimando il grafico del ciclo Stirling ideale.

I primi motori che seguivano questo funzionamento, secondo questa analisi idealizzata, hanno fornito leggi di moto dei pistoni del tipo di quelle rappresentate in Fig. 2.4, con un andamento sinusoidale del displacer e del pistone, il primo in anticipo di circa  $50^\circ$  sul secondo.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

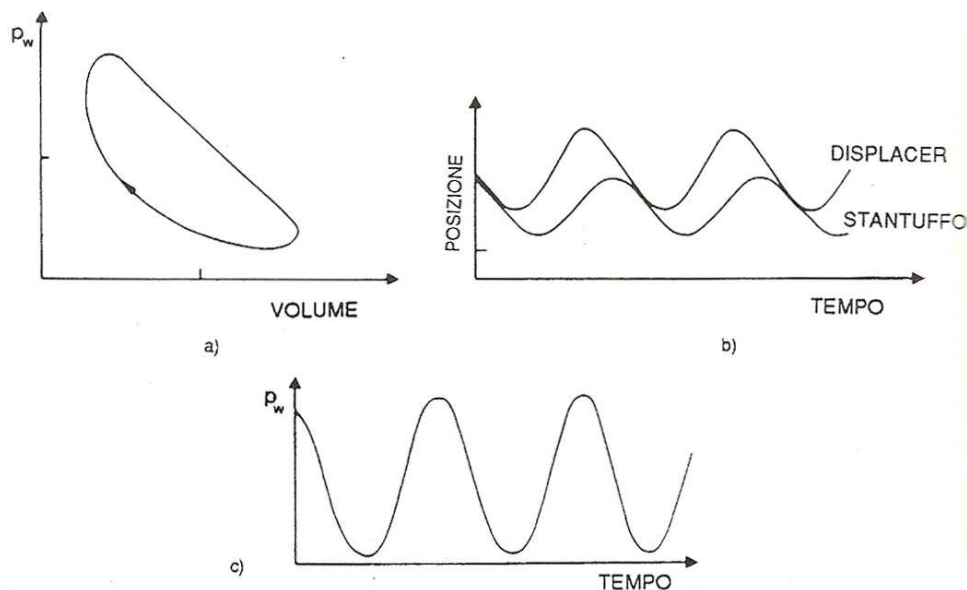


Fig. 2.4 - Andamento della pressione di lavoro e del moto dei pistoni nei primi motori a pistone libero,[3]

### 2.1.3 Configurazioni

Come detto, la macchina appena descritta non è che una delle configurazioni possibili in cui si può presentare un motore Stirling a pistoni liberi. I due elementi comuni a tutte queste restano comunque:

- la distinzione di tre masse separate e potenzialmente mobili: pistone, displacer e cilindro. Tuttavia di solito si considera una delle tre masse, in genere il cilindro, molto più grande delle altre due, riducendosi così ad un sistema oscillante a due gradi di libertà.
- La separazione di tre volumi: lo *spazio di rimbalzo*, una *molla gassosa* (talvolta affiancata a molle meccaniche) che permette agli elementi di oscillare, e lo *spazio di lavoro*, comprendente lo spazio di espansione, quello di compressione, il rigeneratore e gli scambiatori.

La macchina *bang-bang*, discussa nel paragrafo precedente, ha un'unica molla gassosa comune per entrambi gli stantuffi. Alternativamente è possibile collegare questi ultimi al basamento, in vari modi. In particolare si possono distinguere motori con displacer collegato elasticamente al pistone (Fig. 2.5), e motori in cui il displacer è indipendente dal pistone, e collegato elasticamente al cilindro (e quindi al basamento), tramite una molla gassosa, meccanica, o entrambe (Fig. 2.6). Il primo caso è più semplice da realizzare, mentre il secondo, che comporta una molla gassosa più piccola, riduce le perdite di isteresi causate dalla molla stessa.

Per questo e per il fatto che si tratta della soluzione maggiormente utilizzata nell'ambito delle realizzazioni di cui questa tesi si occupa, lo schema di Fig. 2.6 è quello cui si farà riferimento in seguito.

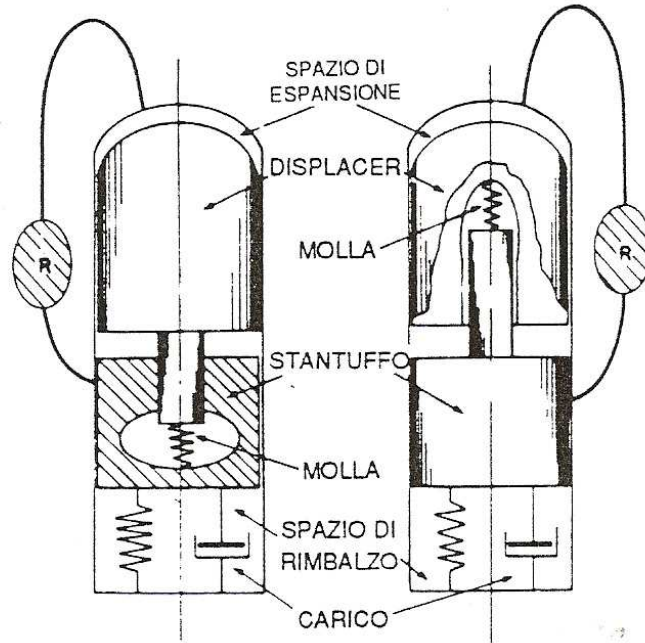


Fig. 2.5 - Esempi di motori Free-Piston con displacer collegato elasticamente al pistone, [3]

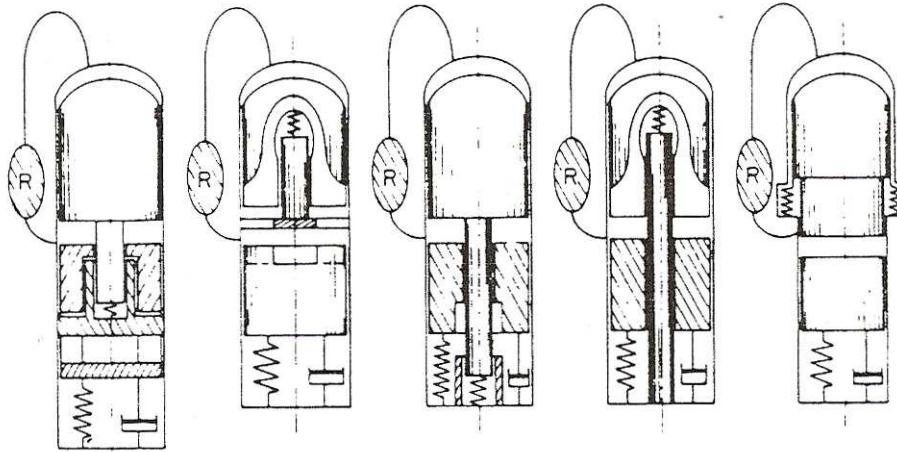


Fig. 2.6 - Alcune varianti di motori Free-Piston con displacer e pistoni indipendenti e collegati elasticamente al cilindro, [3]

### 2.1.4 Vantaggi dei FPSE

I vantaggi principali offerti dai motori a pistone libero sono molti, a cominciare dalla già citata semplicità costruttiva. Il *basso numero di elementi mobili* (in effetti solo i due stantuffi) garantisce di poter raggiungere prestazioni equivalenti a quelle di motori Stirling a guida cinematica, ma con una drastica riduzione del peso e dell'ingombro. Soprattutto questa caratteristica, come sarà illustrato nella parte finale del capitolo, li ha resi molto appetibili agli occhi dell'industria spaziale, dove i requisiti di dimensione e massa sono più limitati.

Nelle macchine a guida cinematica, il funzionamento è influenzato dalla presenza di forze esterne, come le spinte laterale dovute ad un eventuale manovellismo. In quelle a pistone libero, invece, *non ci sono forze esterne*, fatta eccezione per le forze di massa agenti sui pistoni, se l'asse del motore non è posizionato verticalmente, che sono comunque molto esigue. Inoltre non è richiesta *nessun particolare livello di tenuta* ai pistoni, dato che, come già visto in precedenza, sigillando completamente il motore, è possibile renderlo immune agli eventuali trafileamenti di gas. Tutto questo si traduce in:

- *Livelli di usura molto bassi*, che permettono a questi dispositivi, con pochi accorgimenti progettuali, di garantire vite operative di molto anni, con *alta affidabilità* e spesso *nessuna richiesta di manutenzione esterna*
- *Attriti molto limitati* fra i vari componenti, che contribuiscono quindi ad alzare il rendimento termodinamico, minimizzando le perdite.

Con i motori a pistone libero è poi possibile ottenere *sistemi privi di vibrazioni*, montando per esempio due dispositivi in contrapposizione, così che per simmetria possa compensare le spinte degli elementi mobili.

La caratteristica che forse più delle altre rende questi motori estremamente interessanti è la loro capacità di *auto-avviarsi*. Come descritto nel paragrafo 2.1.2, infatti, è sufficiente riscaldare l'estremità corrispondente allo spazio di espansione, per mettere in movimento i pistoni, dopodiché il funzionamento sarà garantito dal mantenimento della differenza di temperatura fra gli scambiatori. In alternativa, per un motore già a contatto con la sorgente termica, può bastare una piccola vibrazione esterna, magari dovuta ad un altro componente di un sistema più grande, per far muovere il displacer, e quindi avviare il ciclo.

Fin dalla loro nascita, i motori a pistone libero hanno dovuto combattere con una limitata applicabilità, dovuta per lo più al fatto di essere compatibili esclusivamente con macchine caratterizzate da un moto rettilineo alternativo. Questo inevitabilmente ne ha sempre arginato lo sviluppo come macchine di uso universale. Tuttavia si tratta di un problema più che

risolvibile, applicando qualora sia necessario per esempio un moto rotativo, un apposito convertitore cinematico.

Il vero svantaggio delle configurazioni Free-Piston è da ricercare nella progettazione, che risulta sempre molto complicata, sia che si tratti di ricercare uno strumento universale di progetto, in grado di legare le numerose grandezze in gioco e predire il comportamento del motore, sia che si tratti di realizzare praticamente le soluzioni che questo strumento può fornire. Per la completa comprensione della sequenza di fenomeni dinamici e termodinamici che costituiscono il funzionamento del motore, si rende necessaria un'analisi simultanea che abbracci il movimento dei pistoni, le trasformazioni termodinamiche compiute dal gas, le variazioni nelle condizioni delle molle gassose, e l'influenza del dispositivo di carico applicato al motore.

E' proprio nella ricerca di una soluzioni al detto problema che si sono mossi tutti i tentativi di creazione di un modello di analisi di questo tipo di motori, tra i quali quello descritto in questa tesi.

### 2.1.5 Grandezze caratteristiche e prestazioni

Come detto in precedenza, l'insieme delle grandezze che caratterizzano il funzionamento di un motore a pistone libero è molto nutrito. Tuttavia si possono distinguere tre generi di queste grandezze, così da separare anche la loro influenza sulle

Seguendo il suggerimento di de Monte [4,cap.1], e considerando il sistema composto dal motore e dal dispositivo di carico, si individuano:

- 1) **Grandezze di controllo** – sono le grandezze non intrinseche della macchina, che possono essere variate in modo indipendente fra loro, grandezze come:
  - $T_{H_s}$ , la temperatura dello scambiatore caldo.
  - $T_{K_s}$ , la temperatura dello scambiatore freddo.
  - $C_{ld\_1}, K_{ld\_1}$ , i parametri che descrivono il carico collegato al motore (vedere paragrafo 4.7)
  - $M_{gas}$ , la massa totale di gas immessa nel motore.

Il criterio di scelta delle grandezze di controllo non è univoco, tuttavia scegliendo quelle sopra elencate è possibile ignorare la natura effettiva delle sorgenti termiche, o del dispositivo di carico applicato, mantenendo la

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

trattazione su un grado di generalità che non la renda adatta soltanto a soluzioni particolari.

- 2) **Grandezze fisse** – sono invece le grandezze interne del motore, quelle che restano invariate a prescindere dall'andamento di quelle di controllo:
  - Dimensioni geometriche
  - Masse degli elementi mobili
  - Rigidezze delle eventuali molle meccaniche
  - Materiali dei vari componenti
  - Tipo di gas di lavoro
- 3) **Grandezze variabili** – rappresentano le prestazioni del motore, ovvero il risultato dell'applicazione delle grandezze di controllo a un motore con determinate grandezze fisse, e sono:
  - Corsa dei pistoni ( $X_p, X_D$ ) o loro rapporto ( $r$ )
  - Frequenza operativa ( $\omega$ )
  - Ritardo di fase del pistone rispetto al displacer ( $\phi$ )
  - Potenza sviluppata ( $P_u$ ) e conseguente rendimento ( $\eta$ )

Con questa distinzione è possibile quindi isolare quei parametri su cui può essere utile agire per influenzare nella direzione voluta il funzionamento e quindi il livello di prestazioni di un motore a pistone libero, posto di conoscere la sua architettura, la sua massa e le sue dimensioni. Alternativamente, fissate le determinate condizioni operative, si possono trarre utili informazioni sulle relazioni cui devono sottostare pesi e ingombri dei vari componenti per ottenere i risultati cercati.

La prima relazione formale in grado di predire le prestazioni di un motore di Stirling fu elaborata da Beale, che già negli anni '60, arrivò alla formula

$$\frac{P_u}{p_m V f} = \text{costante} \cong 0.015 \quad (2.4)$$

dove  $P_u$  è la potenza erogata,  $p_m$  è la pressione media di lavoro,  $V$  è la cilindrata del pistone di potenza e  $f$  la frequenza operativa del motore.

La (2.4), nota come *formula di Beale*, è in realtà valida per qualsiasi tipo di motore Stirling, qualunque sia la sua configurazione. Si tratta di una relazione semplice, utile per indirizzare le successive scelte progettuali, tuttavia ha dimostrato di restituire valori piuttosto accurati della potenza sviluppabile da un motore di determinate caratteristiche. Walker [1] in

seguito ribattezzò il rapporto esposto nell'equazione precedente con il nome di *Numero di Beale* ( $Be$ ), risistemando la (2.4) nella forma

$$P_u = Be p_m V f \quad (2.5)$$

Studi successivi su questa formula, operati da svariati autori come lo stesso Walker, o Urieli e Berchowitz [5], hanno evidenziato come in realtà la grandezza  $Be$  non si possa considerare una costante, dato che se ne apprezzano notevoli variazioni in funzione di diversi parametri quali le temperature operative e il tipo di macchina. Si parla allora più opportunamente di *Funzione di Beale*, a più variabili, il cui andamento al variare, per esempio, della temperatura nello spazio di espansione è stato studiato da Walker [1], con i risultati esposti in Fig. 2.7. Si nota come  $Be(T_e)$  non sia una funzione univoca, ma si possa individuare una fascia di valori possibili di  $Be$  per ogni valore della temperatura  $T_e$ , proprio a causa della sua dipendenza da molti fattori.

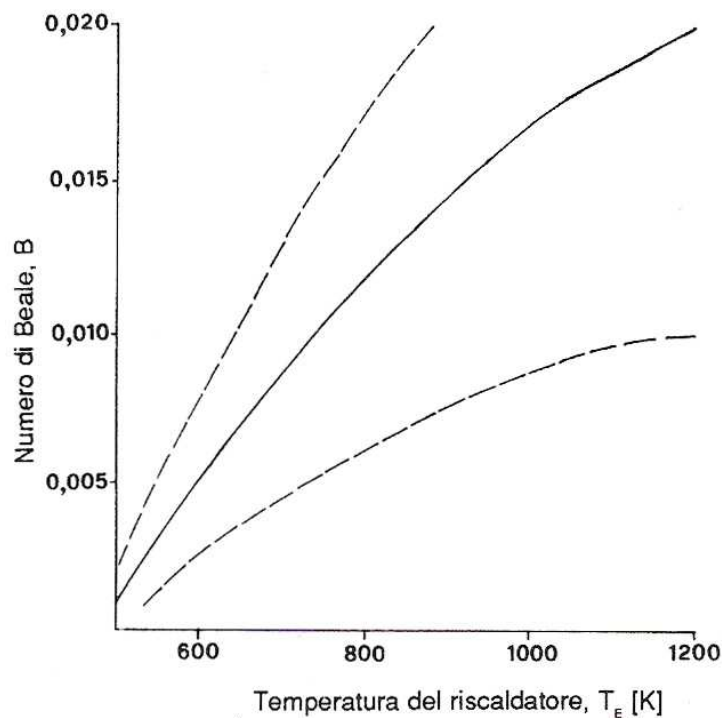


Fig. 2.7 - Andamento della funzione di Beale al variare della temperatura dello scambiatore caldo,[3]

## 2.2 I motori Free-Piston accoppiati con alternatori lineari, FPSE/LA

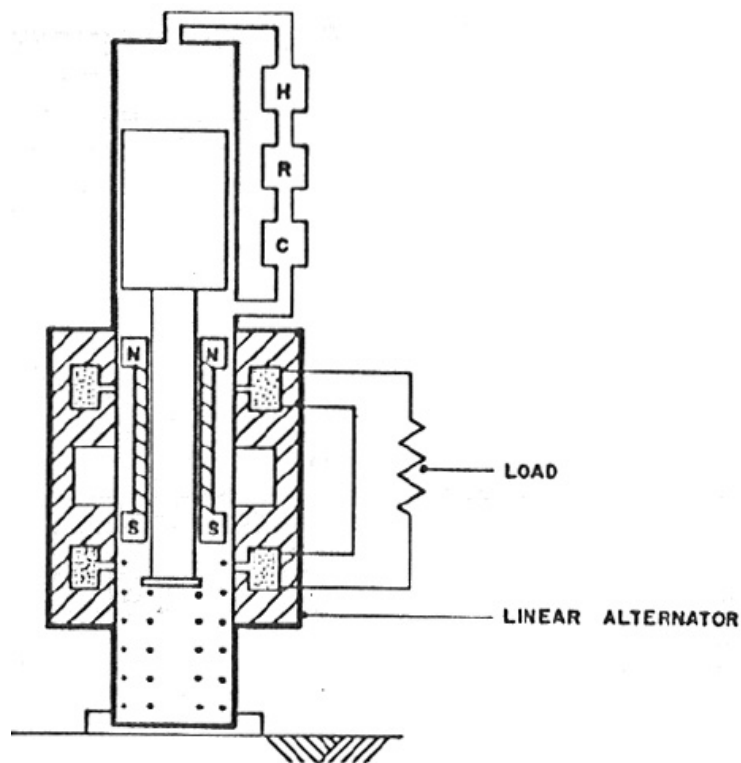


Fig. 2.8 - Primo esempio di sistema FPSE-Alternatore lineare, [8]

Come detto sono tante le applicazioni possibili per le quali un motore di Stirling Free-Piston può essere la soluzione più idonea. In mezzo a tutte queste soluzioni (pompe, compressori, refrigeratori), l'attenzione di questa tesi si focalizza su una configurazione di particolare interesse. Applicando infatti al motore un alternatore lineare, di cui il pistone di potenza rappresenta il cursore, è possibile realizzare un sistema di conversione termo-elettrica molto semplice ed affidabile.

L'aggiunta dell'alternatore non pregiudica assolutamente la semplicità funzionale del motore, e anche caratteristiche particolari quale la chiusura completa del dispositivo e la pressurizzazione non vengono compromesse. E' infatti possibile inserire l'alternatore nella camera di rimbalzo, riempita come le altre dal fluido di lavoro, e gli unici problemi di tenuta possono riguardare i cavi elettrici che trasportano la differenza di potenziale prodotta, ma trattandosi di elementi fissi, ciò rappresenta una difficoltà molto limitata.

Fu proprio Beale [8], per primo, a suggerire fra le altre questa soluzione per la sua invenzione, realizzando anche un prototipo (Fig. 2.8) che presentava anche scambiatori di calore



più rifiniti rispetto a quello di Fig. 2.2. In questa sezione ci si limita ad una descrizione superficiale delle architetture e delle prestazioni di alcuni modelli di interesse. Nei prossimi capitoli sarà descritto con precisione ogni componente di un esemplare esistente, al quale si riferisce il modello fisico-matematico presentato in questa tesi.

Nel 1974 Beale fondò una società, la Sunpower Inc. (del cui lavoro si parlerà nel paragrafo successivo) dando il via ad un percorso di sviluppo che nei trent'anni passati dalla sua prima pubblicazione ha portato ad enormi progressi.

Ad oggi il numero delle aziende che investono in questa tecnologia è in continua crescita, e ricopre una vasta area geografica, dagli Stati Uniti all'Europa, all'estremo oriente. Tuttavia, dato l'orientamento scientifico del presente lavoro, si è scelto di analizzare il processo di sviluppo dei generatori elettrici Stirling Free-Piston attraverso il lavoro delle due aziende (entrambe statunitensi), che si sono distinte in questa tecnologia sia per i risultati ottenuti sia per il loro contributo diretto ai recenti progetti ad uso spaziale.

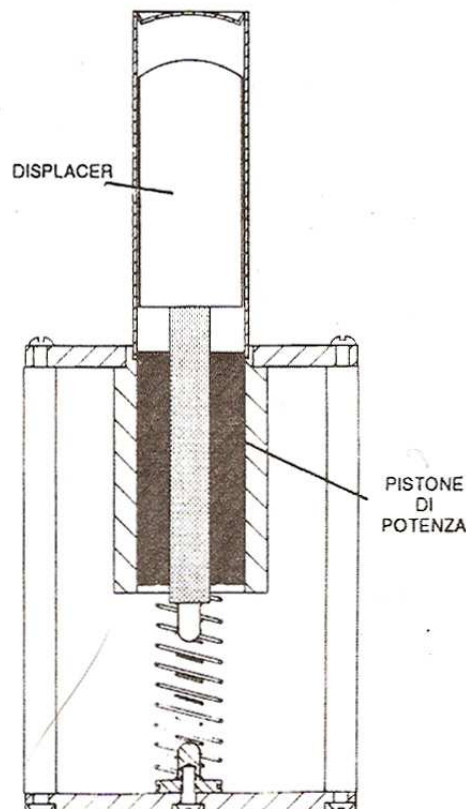


Fig. 2.9 - Modello B-10 di Sunpower Inc.,[3]

### 2.2.1 I motori Free-Piston di Sunpower Inc.

L'azienda fondata dall'inventore del motore Stirling Free Piston, con sede ad Athens in Ohio, ha collezionato negli anni più di cento brevetti nello sviluppo di macchine operatrici con questo tipo di funzionamento. Ad oggi è indiscusso leader mondiale nella tecnologia Free-Piston.

Inizialmente l'attività di Sunpower riguardò la produzione di più versioni del prototipo lanciato da Beale di Fig. 2.2. Uno di questi modelli fu messo subito in commercio, anche se per lo più per scopi dimostrativi o didattici. Si tratta del motore denominato modello B-10 (o 10-B), rappresentato in Fig. 2.9. Era un modello molto preliminare, che lavorava ad aria. Lungo appena 260 mm, con un diametro di 100 mm, non superava il peso di 1.5 kg.

Uno dei grandi pregi mostrati da questo piccolo motore fu la possibilità di essere alimentato con una grande varietà di sorgenti termiche, quali resistenze elettriche, propano o energia solare. Questa sua versatilità si rifletteva anche nei possibili accoppiamenti con eventuali dispositivi in grado di utilizzare e convertire l'energia prodotta. In una di queste applicazioni, il motore B-10 era collegato appunto ad un alternatore lineare, in un sistema complessivo (Fig. 2.10) in grado di convertire i circa 100 W di potenza termica assorbita in una potenza elettrica che andava dai 5 We ai 20 We, in funzione del suo grado di pressurizzazione (2÷5 bar).

Furono subito chiare le grandi potenzialità di questi sistemi, e già dall'inizio degli anni '70, la *Canadian Atomic Energy Commission* ne richiese l'inclusione in un progetto che intendeva realizzare gruppi elettrogeni da 100 W, alimentati a radioisotopi, per garantire l'energia nelle zone più remote dell'America Settentrionale. Il programma fallì perché il livello di comprensione delle reali esigenze progettuali di questi dispositivi non era ancora sufficiente, tuttavia fu la base per il loro seguente sviluppo esponenziale. Come osservato dallo stesso Beale [6], gli elementi delicati nel progetto di un alternatore lineare Stirling Free-Piston non sono pochi, e soprattutto, non sono indipendenti gli uni dagli altri. Le tenute, il centraggio dei pistoni, la sincronizzazione del carico, il controllo della purezza del fluido di lavoro, sono solo alcuni di questi elementi, ognuno dei quali può potenzialmente pregiudicare il funzionamento del motore.

Dopo la parentesi canadese, comunque, il lavoro di Sunpower continuò a produrre apparecchiature sempre più soddisfacenti. E' parere dell'autore che non sarebbe utile riportare in questa sede un resoconto dettagliato dei numerosi modelli creati sotto la supervisione di Beale, il quale può comunque essere facilmente reperito, a vari livelli di precisione, sia presso i testi classici sull'argomento, sia presso la vasta libreria presente sul sito internet ufficiale della

compagnia ([www.sunpower.com](http://www.sunpower.com)). Pertanto ci si limita ad indicare i passi principali del percorso che ha portato alla realizzazione dei moderni convertitori che interessano il lavoro di questa tesi.

Sotto la sponsorizzazione di *Kawasaki Heavy Industries*, furono realizzati modelli progressivamente più accurati, denominati M10, M100 e SPIKE. Quest'ultimo, riportato in Fig. 2.11, era in grado di produrre 1kW di potenza, e poteva essere alimentato dal calore prodotto concentrando i raggi solari, attraverso un opportuno specchio concavo, sulla sua estremità calda.

Da allora fino ad oggi il lavoro di Sunpower ha continuato a migliorare la tecnologia del motore Free-Piston. Il suo particolare design, che prevede l'uso esclusivo di cuscinetti idrostatici, alternatori compatti e una meccanica altamente semplificata, è stato esteso ad una vasta serie di motori, refrigeratori criogenici, pompe o compressori, che si sono resi più vantaggiosi ed efficienti non solo rispetto alle macchine Stirling tradizionali, ma anche rispetto ad altre soluzioni a pistone libero.

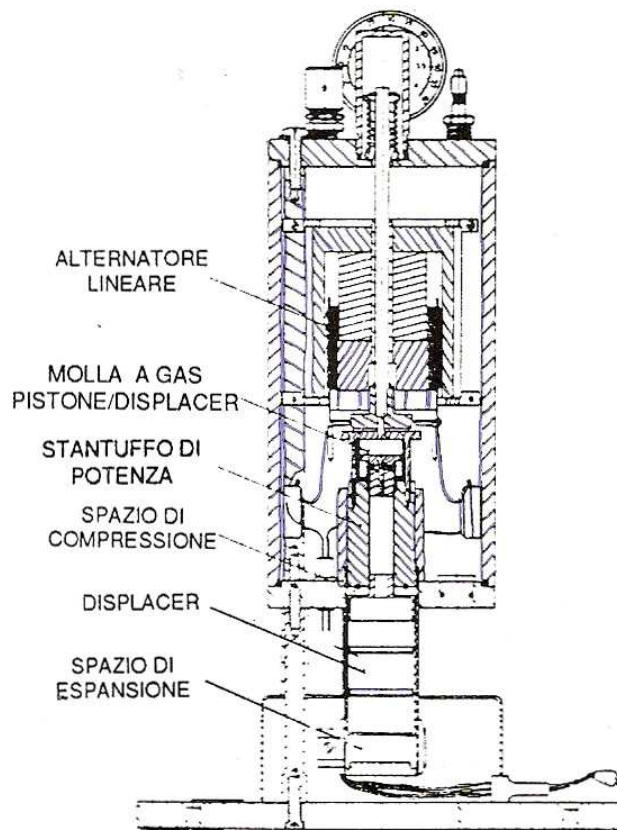


Fig. 2.10 - Modello B-10 accoppiato ad un alternatore elettrico lineare,[3]

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

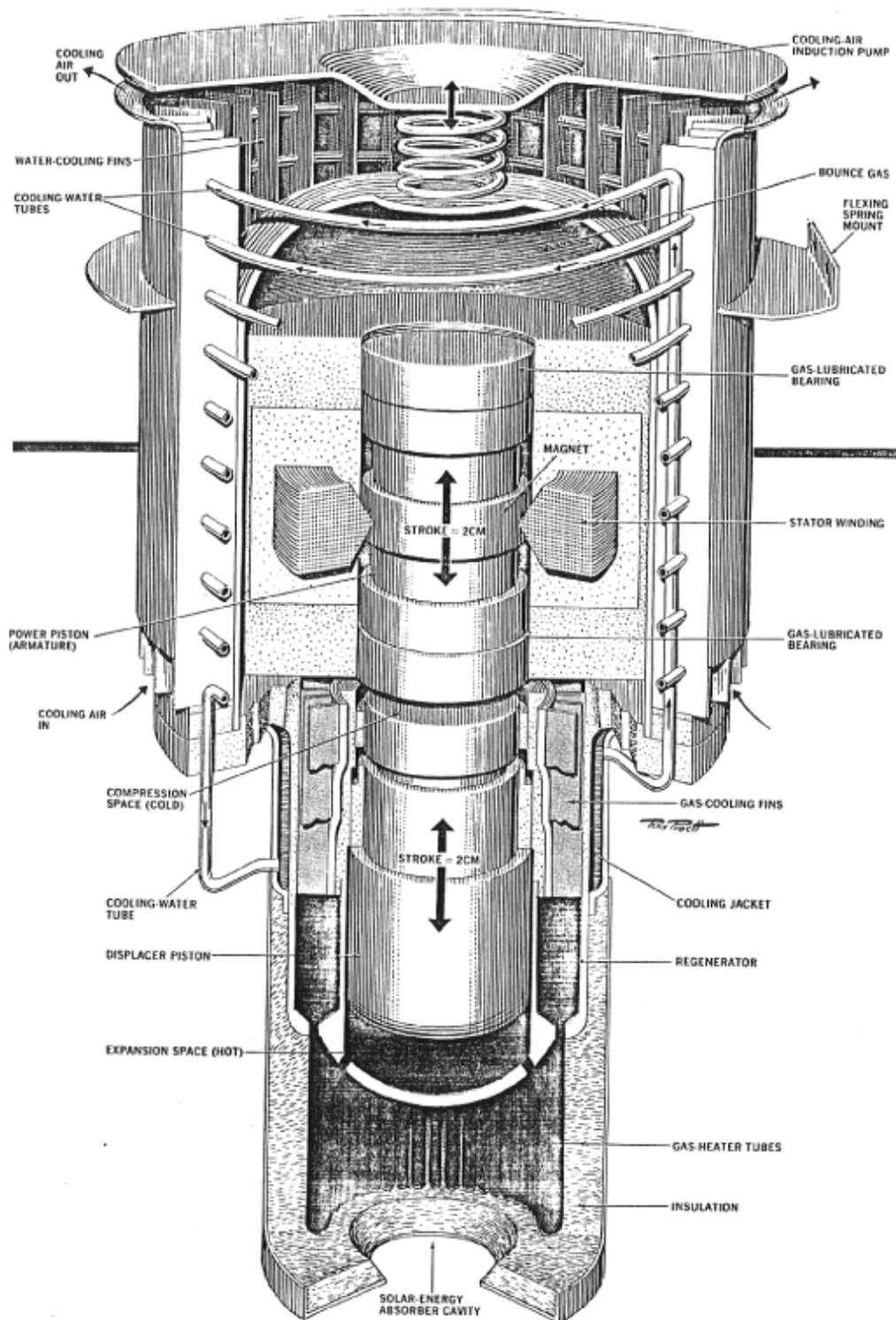


Fig. 2.11 - Generatore solare Stirling modello SPIKE da 1 kW,[7]

Sunpower Free-Piston Stirling Engine Prototype Availability								
Prototype Model	Power (nominal)	Temperature Ratio (Th/Tc)	Efficiency	Heat Source	Heat Rejection	Hermetically Sealed	Mass	Dimensions, Diameter x Length in mm (nominal)
EE-35	42W <sub>e</sub>	2.7	32%	Electric Heater	Air/Water Cooling	No	1.4 kg	52 x 157
EE-35-H	42W <sub>e</sub>	2.7	32%	Propane/JP-8 Burner	Air/Water Cooling	Yes	0.6 kg	50 x 142
EE-80	95W <sub>c</sub>	3.0	36%	Electric Heater/Propane Burner	Air/Water Cooling	No	3.7 kg	69 x 193
EE-80-H(*)	95W <sub>e</sub>	3.0	36%	TBD	Air/Water Cooling	Yes	1.0 kg	65 x 186
EG-1000	1000W <sub>e</sub>	2.7	32%	Propane Burner	Water Cooling	No	35 kg	270 x 435

Tabella 2.1 - Caratteristiche e prestazioni dei modelli più recent di FPSE-LA di Sunpower Inc.,[9]

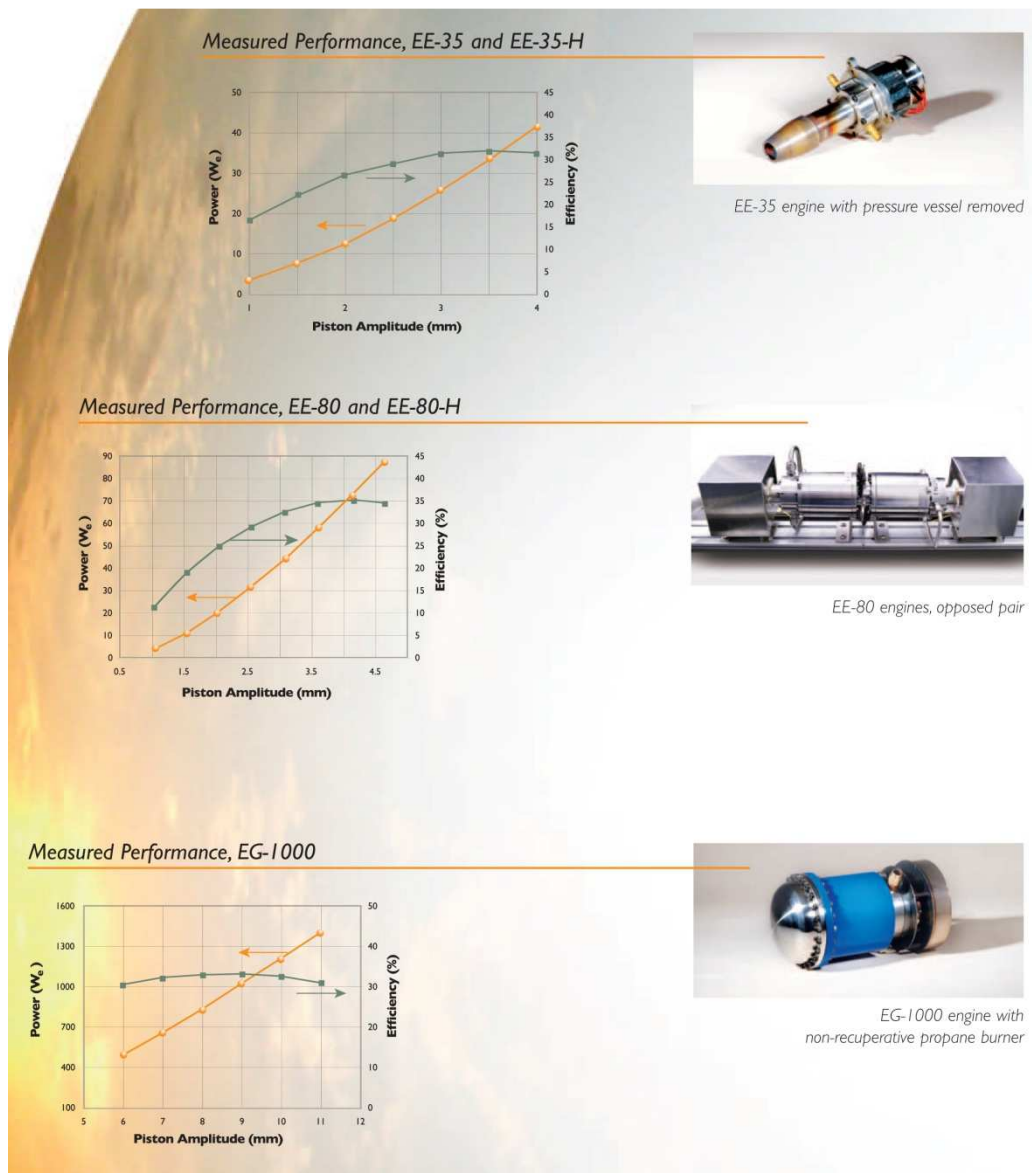


Fig. 2.12 - Grafici di potenza e efficienza dei modelli di punta di Sunpower in funzione della corsa del pistone,[9]

## *2 Il motore di Stirling a pistone libero*

Ad oggi, trentacinque anni dopo la sua fondazione, Sunpower è quindi il più autorevole riferimento nel settore dei motori FPSE, potendo contare su dispositivi in grado di erogare un'ampia gamma di potenze utili, così da poter rispondere a varie esigenze energetiche, che vanno dalla produzione di energia per uso domestico, all'alimentazione di grossi impianti industriali.

La Tabella 2.1 mostra alcune caratteristiche dei motori sviluppati più recentemente, o attualmente in corso di sperimentazione.. Come si vede, in tutti i casi, questi prodotti riescono a esprimere valori molto alti di potenza specifica, che li rendono altamente competitivi con altri sistemi di produzione elettrica. La Fig. 2.12 mostra appunto le prestazioni di alcuni di questi modelli.

Fra i dispositivi che sono tuttora oggetto di studio c'è il motore EG-1000, che viene sperimentato anche in Europa (attualmente in Gran Bretagna) come fulcro di un sistema di generazione di potenza ad uso residenziale. Per questo motivo, al fine di renderlo adattabile a situazioni grande distribuzione, è stato progettato con l'intento di contenere il più possibile i costi. Questo comunque non gli impedisce di restare su livelli di efficienza di tutto rispetto (>30%),

La perdurata collaborazione con NASA, come vedremo in seguito, ha accelerato la crescita delle capacità progettuali di Sunpower, così come di altre aziende, permettendole di raggiungere traguardi molto prestigiosi, specialmente nella comprensione delle leggi di scalatura, in modo da riportare gli ottimi risultati di prestazione dei generatori Free-Piston anche su modelli di dimensioni molto ridotte.

A titolo di esempio si osservi la Fig. 2.13, nella quale è presentato un generatore portatile di recentissima realizzazione. Si tratta di un dispositivo composto da un bruciatore alimentato a JP-8 (Jet Propellant 8, un combustibile a base di Kerosene), che alimenta un convertitore Stirling molto compatto, insieme ad un sistema di raffreddamento ad aria e ad un controller. Il generatore nel complesso, sviluppato nell'ambito del progetto DARPA [10], pesa soltanto 1.7 kg. ed è in grado di erogare 35 We, grazie al convertitore Stirling Free-Piston EE-35, mostrato in RIFERIMENTO FIGURA già connesso con gli scambiatori termici.

Modelli come l'EE-35 rappresentano l'attuale direzione preferenziale di ricerca e sviluppo affrontata da Sunpower. Il consolidamento di questi piccoli ed efficienti convertitori apre la strada alla tecnologia dei motori Stirling a pistone libero per quasi tutte le applicazioni in cui si renda necessario produrre anche piccole quantità di potenza elettrica sotto stringenti requisiti di massa e ingombro.



Fig. 2.13 - Generatore portatile alimentato a JP-8, [10]



Fig. 2.14 - Convertitore Sunpower da 35 We di ultima generazione, [10]

Per questa ragione non sorprende il grande interesse che il lavoro di Sunpower ha destato in NASA e Lockheed Martin Aerospace (vedi paragrafo 2.5), relativamente alla produzione di generatori di potenza piccoli, leggeri e affidabili, da impiegare in situazioni particolari, come missioni spaziali di lunga durata o in ambienti che non consentano l'intervento umano.

### 2.2.2 *Infinia Corporation*

*Infinia Corporation* ha sede a Kennewick, nella stato di Washington. L'azienda è diventata una corporazione da pochi anni, continuando di fatto l'opera della precedente *Stirling Technology Company*. *Infinia* merita più di una citazione per il suo lavoro sui motori Stirling Free-Piston, in particolare riguardo ai generatori di potenza elettrica.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

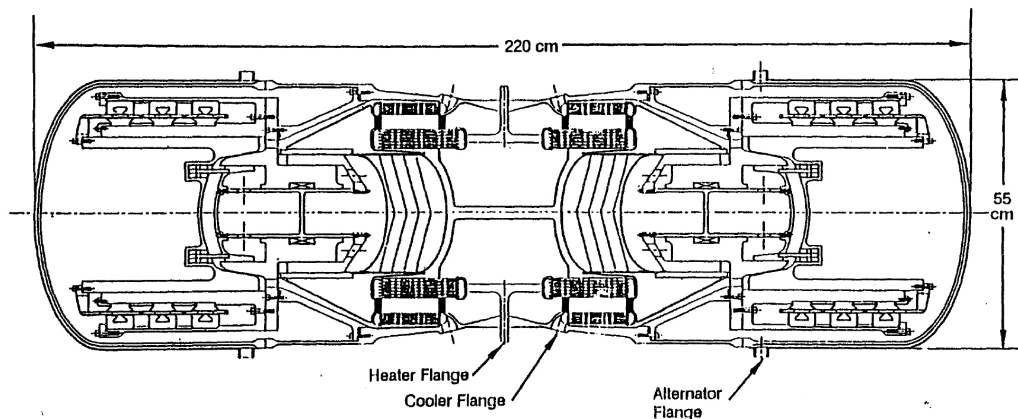


Fig. 2.15 - Unità di conversione Free-Piston per il reattore SP-100, composta da due motori in contrapposizione,[11]

La storia professionale di *Infinia* è parallela a quella di *Sunpower*. Nel 1967 inizia l'attività in ambito medico, con la produzione di sistemi termici per assistenza ventricolare. Il primo passo importante nella creazione di sistemi di conversione energetica di tipo Stirling Free-Piston viene fatto nel 1984, quando *Infinia* fornisce il convertitore per il reattore nucleare *Rockwell International SP-100*.

Questa collaborazione interessa anche il *NASA Lewis Research Laboratory*, che lancia uno studio per valutare la possibilità di realizzare sistemi di generazione di potenza autosufficienti, in grado per esempio di alimentare eventuali strutture lunari permanenti [11]. Il contributo di *Infinia* è la realizzazione di un sistema con due convertitori Stirling Free-Piston contrapposti (Fig. 2.15), capace di erogare quasi 200 We di potenza, lavorando tra gli oltre 1200 K sviluppati dal reattore e i 600 K dei pannelli radiativi. Il sistema prevedeva l'utilizzo di 4 gruppi di conversione Stirling, collegati al reattore SP-100 da un circuito di condotti termici in grado di portare il calore alle estremità calde di ogni coppia di motori Stirling (vedi Fig. 2.16). Secondo il progetto illustrato da *Rockwell International* [11], il sistema nel complesso sarebbe stato in grado di produrre circa 550 kW di potenza elettrica.

La collaborazione con NASA si fa più serrata dal 1997, come vedremo nel paragrafo successivo, quando *Infinia* entra, insieme con *Lockheed Martin*, nella progettazione generatori Stirling a radioisotopi, nei quali l'agenzia spaziale statunitense vede degli ottimi sostituti per i sistemi termoelettrici.

L'attività principale di *Infinia* resta comunque per le applicazioni terrestri. Dopo aver disegnato un sistema di conversione solare da 25kW, per NASA e DOE (Department of Energy), *Infinia* si lancia nella produzione di sistemi generazione di potenza su larga scala, specializzandosi nella realizzazione delle cosiddette *Solar Dish Farms* (fattorie di dischi solari),



di cui si può vedere un esempio in Fig. 2.18. L'obiettivo è quello di rendere la tecnologia dei motori Free-Piston il più possibile adattabile ai moderni impianti solari.

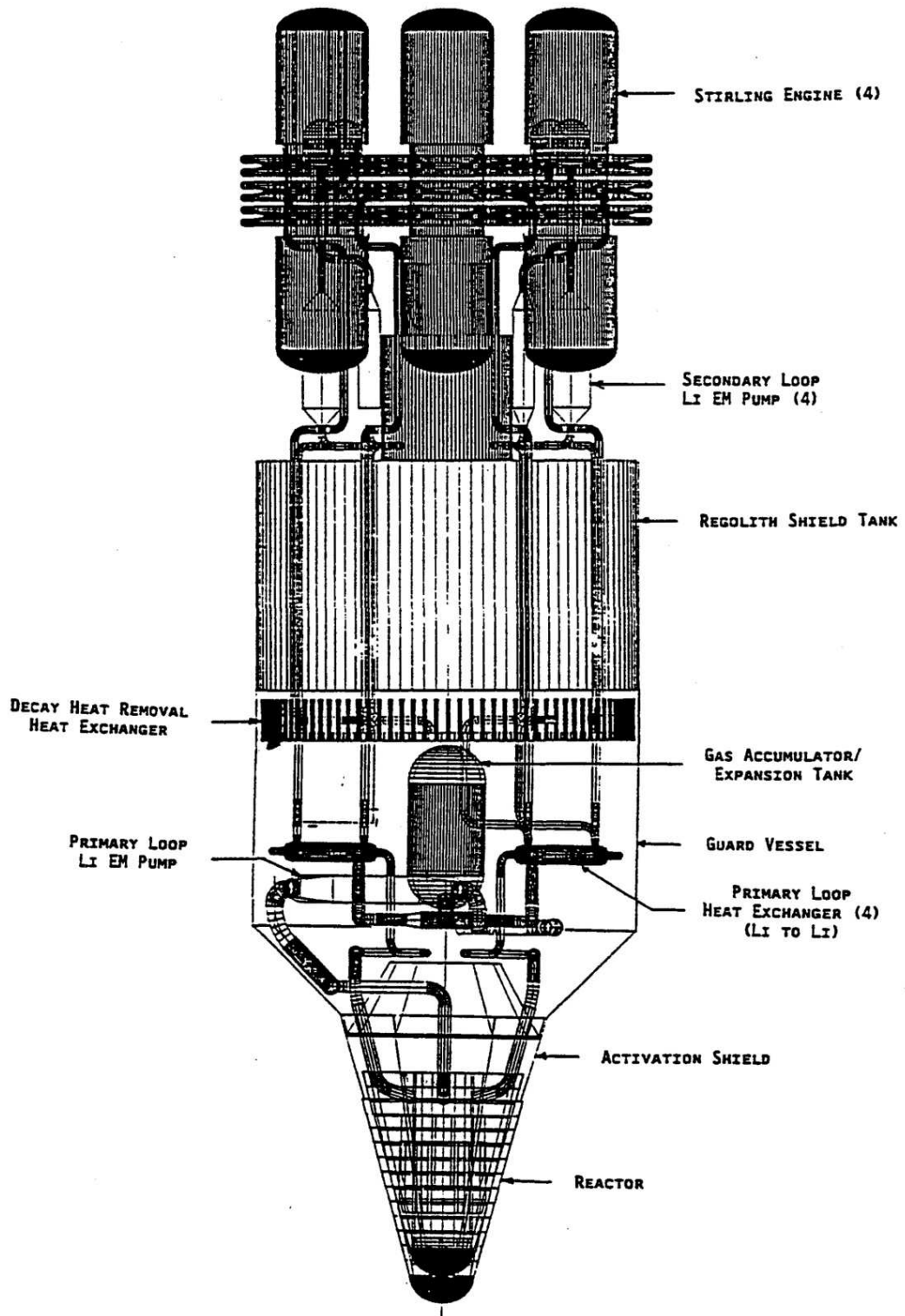


Fig. 2.16 - Sistema di generazione di potenza da 550 We, con il reattore SP-100 collegato a quattro unità di conversione Stirling,[11]

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

Nel 2000 Infinia ha presentato il suo primo motore Stirling da 1 kW, che gli è valso un corposo finanziamento governativo di circa 50 milioni di dollari. Dopo aver presentato al mondo il primo motore Stirling Free-Piston multicilindro, nel 2004, Infinia si è dedicata allo sviluppo a tempo pieno del progetto solare. Nel 2007 finisce la prima fase del finanziamento, mentre la seconda si è chiusa appena un anno fa, ed ha portato alla luce il primo generatore solare Stirling da 3 kW (Fig. 2.17), per la produzione combinata di energia elettrica e termica per le abitazioni.

In Fig. 2.18 è riportato il cosiddetto *Infinia Solar System*, che comprende uno specchio solare parabolico di ultima generazione e un convertitore Stirling Free-Piston, le cui dimensioni e caratteristiche operative sono riassunte in Tabella 2.2.

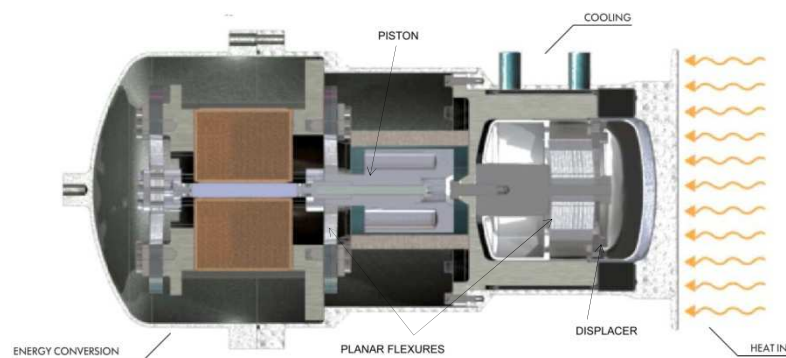


Fig. 2.17 - Convertitore Stirling Free-Piston da 3 kW prodotto da Infinia Corporation, [www.infiniacorp.com](http://www.infiniacorp.com)

OUTPUTS*		WEIGHTS & DIMENSIONS	
Peak Power**	3,000 W	Weight	864 kg (1900 lb)
Voltage	240 VAC 1Ø 3 Wire or 208 VAC 3Ø 3 Wire**	<b>Pointed at Horizon</b>	<b>Pointed at Zenith</b>
Frequency**	50 Hz or 60 Hz***	Width	4.7 m (15.4 ft)
	<small>* at rated input direct normal insolation (DNI) &gt;= 850 W/m<sup>2</sup> at 20°C (68°F) ambient temperature, net power out @ terminal, clean reflector, wind speed &lt;= 100 kph.</small>	Length	4.6 m (15 ft)
	<small>** voltage and frequency automatically sensed and adjusted according to voltages on output terminals (grid connect) voltage and frequency user adjustable, Overall System Efficiency: 24% Peak</small>	Height	5.6 m (18.4 ft)
	<small>*** Based on local utility requirements, with no de-rating for either 50 Hz or 60 Hz</small>		6.4 m (21 ft)
INPUTS		AMBIENT CONDITIONS	
Tracking Grid Load	Steady state 5 W; peak 50 W	Operating Temperature Range	-20°C to 55°C (-4°F to 131°F)
Slew to Sun/Slow Grid Load	Steady state 50 W; peak 250 W	Operating Elevation Range*	-75 m to 1,890 m (6,200 ft) above sea level
		Operating Relative Humidity Range	0 to 100%
		Wind Speed – Max Operation	50 km/h (31 mph) for up to 3 second gust
		Wind Speed – Maximum**	140 km/h (87 mph)
		Snow Load, Maximum, Stowed***	1 kN/m <sup>2</sup> (20.9 psf) on inverted dish
		Ice Load, Maximum, Stowed***	5 cm (2 in. on one side)
		Noise	65 dBA @10 m
COMPLIANCE		<small>* Locations above 1,890 (6,200 ft) elevation may require optional equipment</small>	
ETL Listed	UL 1741, UL 2200	<small>** No damage will occur to the Chassis or Bi-axial Drive systems when in the stow position up to the Maximum Wind Speed</small>	
CE Marked		<small>*** Non-concurrent</small>	
CEC Listed			

Tabella 2.2 - Caratteristiche e prestazioni del Solar System di Infinia Corporation, [www.infiniacorp.com](http://www.infiniacorp.com)



Fig. 2.18 - Solar System (sinistra) e Solar Dish Farms (destra) di Infinia Corporation, [www.infiniacorp.com](http://www.infiniacorp.com)

Il merito maggiore del lavoro di Infinia Corporation è sicuramente quello di aver dimostrato la validità della tecnologia Stirling a pistone libero nella produzione alternativa di energia. Avendo reso questa tecnologia molto più accessibile che in passato, Infinia ha inserito un nuovo importante tassello nella ricerca di nuove tipologie di generazione di energia pulita. I solar systems sono efficienti, silenziosi, ecologici, e possono quindi affiancarsi a tecniche già collaudate quali quella fotovoltaica o eolica, contribuendo a spingere lo sviluppo e il progresso energetico in direzioni più sostenibili e comunque vantaggiose.

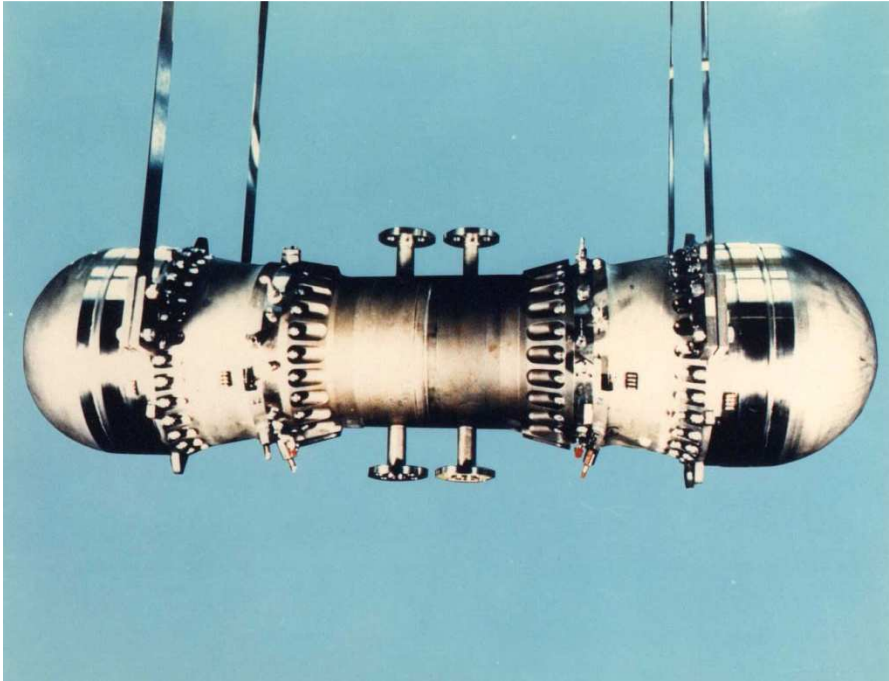
### 2.3 Generatori Stirling per applicazioni spaziali

Fin dalla loro nascita, fu subito chiara l'attrattiva che i convertitori Stirling Free-Piston potevano esercitare sulle agenzie spaziali. Quei loro pregi, leggerezza, compattezza, efficienza, affidabilità, che già nelle applicazioni terrestri li distinguevano da altri sistemi di generazione di potenza, in ambiente spaziale li rendevano addirittura unici, insieme a caratteristiche particolari come l'assenza di cambiamenti di fase durante il ciclo e il regolare funzionamento in assenza di gravità.

I primi impianti costruiti dichiaratamente per uso spaziale, furono realizzati in collaborazione da Sunpower e Mechanical Technology, Inc (MTI). Si trattava di due motori Stirling a pistoni liberi, il primo in grado di erogare 2 kWe, il secondo capace di produrre fino a 12.5 kWe (la Fig. 2.19 mostra il cosiddetto *Space Power Demonstration Engine - SPDE*, un impianto composto da due esemplari di quest'ultimo convertitore, montati in contrapposizione, per una potenza complessiva di circa 25 kWe).

Lo scopo preliminare di queste realizzazioni iniziali, era quello di portare la già alta potenza specifica di sistemi di questo tipo a livelli che li rendessero molto più vantaggiosi delle altre tecniche di elettro-generazione già impiegate (celle a combustibile o generatori ermoelettrici).

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero



**Fig. 2.19 - Impianto SPDE da 25 kw per generazione di potenza in applicazioni spaziali,[15]**

Nel 1978, il risultato finale degli sforzi congiunti di Sunpower e MTI portò alla costruzione del motore RE-1000, un dispositivo con finalità di ricerca, realizzato per il NASA Lewis Research Center. Il RE-1000 (Fig. 2.20) era un motore monocilindrico con displacer collegato elasticamente al basamento. Mentre lo scambiatore freddo (ad acqua) e il rigeneratore avevano forma anulare, lo scambiatore caldo era costituito da una serie di tubi nei quali il fluido riceveva calore per effetto joule da una resistenza elettrica. Non trattandosi di un modello ad uso commerciale, non era particolarmente leggero (la massa totale superava i 10 kg) né compatto, e il dispositivo di carico era simulato da un semplice smorzatore viscoso.

NASA ha continuato a manifestare un profondo interesse per i motori Stirling Free-Piston, eseguendo numerose prove su dispositivi con l' RE-1000 per molti anni. I risultati sperimentali non sono facilmente reperibili, se non su specifica concessione di NASA. Alcuni dati si possono ritrovare, ben catalogati, nel lavoro di Filippo de Monte [4].

Nel 1997 infine, Nasa richiede e ottiene da Infinia, allora Stirling Technology Company, due prototipi di convertitore molto compatti, al fine di dimostrare con ulteriori esperimenti le prestazioni e la adattabilità della tecnologia Free-Piston. In particolare i convertitori Stirling vengono visti come il più adatto rimpiazzo per i sistemi termoelettrici presenti nei gruppi RTGs (Radioisotope Thermoelectric Generators).

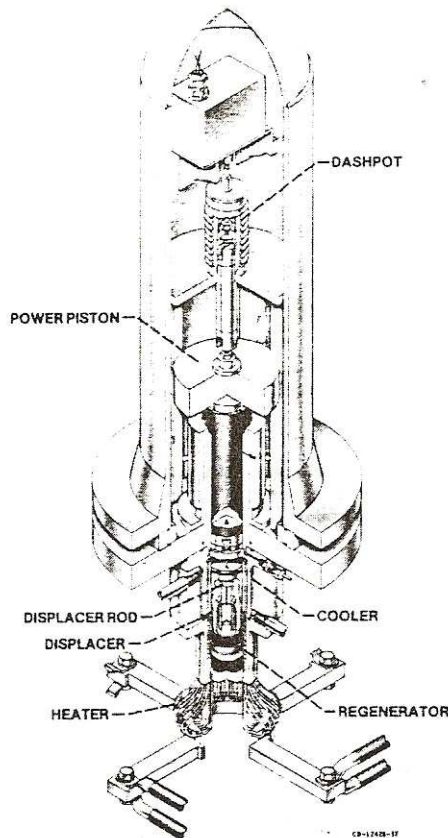


Fig. 2.20 - Motore a Pistone libero RE-1000,[4]

Nei dieci anni che sono seguiti a questa data, lo studio dei convertitori Stirling, la loro messa a punto, la ricerca di soluzioni sempre più efficienti e affidabili ha coinvolto decine e decine di ricercatori del NASA Glenn Research Center (GRC), che dal 1999 è la reincarnazione del Lewis Research Laboratory. Si è realizzata una gran quantità di esperimenti, sulla resistenza strutturale di questi sistemi, sulla loro affidabilità e durata, sulle possibilità di scalatura e miglioramento delle prestazioni. Un resoconto completo di tutti gli esperimenti e dei loro risultati esulerebbe ampiamente dalle finalità di questa tesi. Tuttavia è opportuno riportare un'analisi dettagliata del progetto sotto il quale tutti questi esperimenti sono stati stanziati, e dei risultati che ad oggi (Novembre 2009) ha prodotto. In modo particolare si vedranno due realizzazioni simili di generatori a radioisotopi che utilizzano convertitori Stirling Free-Piston per produrre energia elettrica, utilizzabile da varie applicazioni. Questi convertitori verranno descritti in dettaglio, in virtù del fatto che la loro architettura è quella che ha ispirato la creazione del modello matematico che è oggetto di questa tesi (e che sarà presentato nel 4)

## 2.4 Stirling Radioisotope Generator SRG-110

Come accennato nel paragrafo precedente, dal 1997 in ambiente NASA si comincia a pensare di realizzare delle unità di generazione di potenza che sfruttino il calore prodotto da un isotopo radioattivo, e lo convertano in energia elettrica utilizzabile per apparecchiature di bordo, installazioni permanenti, o anche rovers di nuovissima concezione. Generatori di questo tipo esistono già, ma si cerca di migliorare i dispositivi di conversione del calore, in particolare modo per ridurre massa e dimensione del sistema complessivo, e renderlo facilmente trasportabile.

Con la loro efficienza di oltre il 20%, i convertitori Stirling Free Piston sembrano promettere un forte riduzione della massa di isotopo radioattivo necessaria (un terzo circa) a sviluppare le stesse potenze di generatori tradizionalmente equipaggiati con convertitori termoelettrici semiconduttori.

La scelta cade quindi su Stirling Technology Company (STC), che poi diventerà Infinia Corporation, che in quel periodo sta sviluppando un prototipo di convertitore da 55 We, sotto contratto con il Department of Energy, forte delle precedenti realizzazioni per applicazioni terrestri, sempre alimentate a radioisotopi (RG-10 e RG-350).

STC fornisce due convertitori gemelli (Fig. 2.21), già ampiamente testati su lunghe durate di funzionamento, che vengono inclusi in tutta una serie di prove sperimentali, tese fra l'altro a determinare la miglior configurazioni possibile per l'assemblaggio del generatore. In modo particolare si fissa l'attenzione sulla possibilità di ridurre le vibrazioni causate dal funzionamento dei motori Stirling.

Vari esperimenti portano alla soluzione di collegare i due motori in asse, contrapposti (Fig. 2.22), unitamente ad un meccanismo di assorbimento delle vibrazioni, sviluppato dalla stessa STC nel 1999.

Il modello realizzato da STC viene denominato *Technology Demonstration Converter* (TDC), e ne vengono prodotti una ventina di esemplari, che verranno impiegati in moltissimi test, fino alla fine della collaborazione tra STC e NASA/DOE. Collaborazione che nel 2002, con il contributo della Lockheed Martin Aerospace, porta alla realizzazione del primo Generatore Stirling a Radioisotopi per applicazioni spaziali, che viene chiamato SRG-110 (Stirling Radioisotope Generator – 110) perché in grado di erogare una potenza nominale di 110 We, grazie all'azione combinata dei due TDC da 55 We cadauno.



Fig. 2.21 - Veduta esterna del convertitore da 55 We realizzato da STC/DOE,[12]

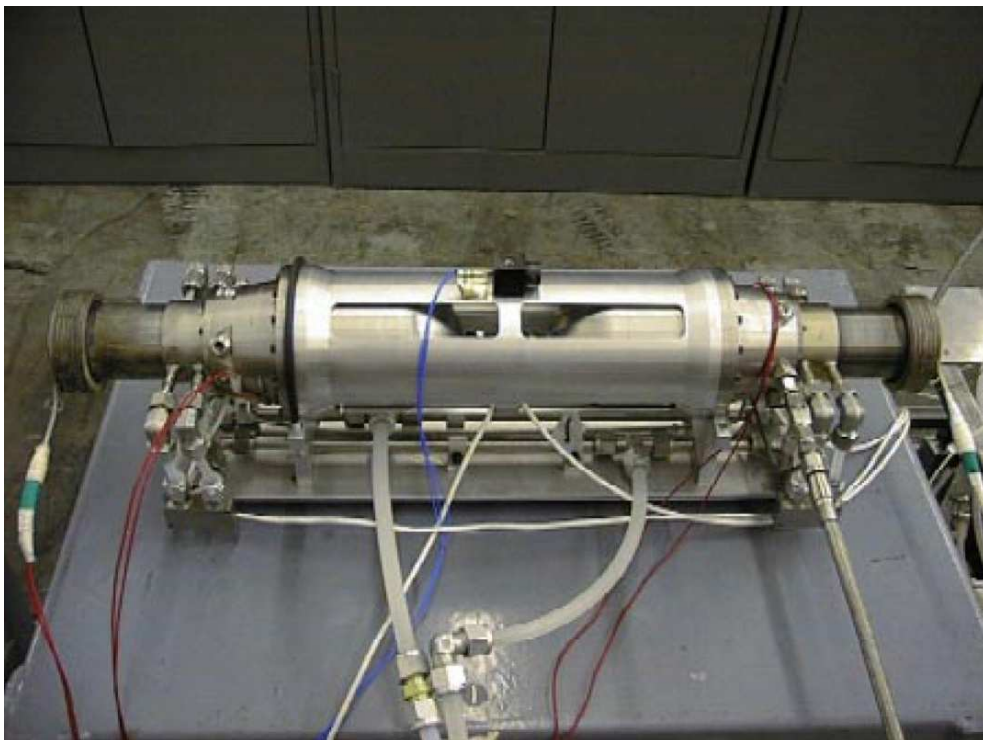


Fig. 2.22 - Configurazione con due convertitori contrapposti, per ridurre le vibrazioni,[12]

## *2 Il motore di Stirling a pistone libero*

Nella Fig. 2.23 si può osservare una visione complessiva del generatore, nella cosiddetta versione ingegneristica (Engineerig Unit – EU). I due convertitori Stirling sono sistemati con le camere di rimbalzo rivolte l'una verso l'altra. In questo modo ogni motore viene scaldato da una sorgente termica indipendente.

Questo accorgimento permette di garantire il funzionamento dell'unità, anche se in misura ridotta, se dovesse verificarsi un guasto a uno dei due convertitori o ad una delle due sorgenti. E' tuttavia possibile una configurazione alternativa con le due estremità calde vicine, così da poter utilizzare un'unica sorgente termica per entrambi i convertitori, riducendo ulteriormente la massa totale.

Il calore viene fornito da un modulo General Purpose Heat Source (GPHS) sviluppato da DOE, che contiene circa 600 gr di Plutonio-238 (Fig. 2.24), per una potenza termica totale di 250 W (500 W complessivi se ci sono due GPHS). Questo calore , che si traduce in una temperatura operativa di 650°C, viene convertito da ognuno dei motori Stirling in circa 60 We di potenza elettrica alternata, che tramite un convertitore AC/DC diventano i circa 55 We nominali dell'apparecchio.

Tutti i componenti sono racchiusi da una struttura in berillio, che svolge anche la funzione di radiatore, le cui dimensioni sono quelle di un parallelepipedo di circa 75x40x30 cm. La massa totale del generatore risulta di 32.7 kg, per una potenza specifica di 3.6 W/kg.

Siccome la modellizzazione affrontata in questa tesi ha avuto come prima ispirazione l'architettura del Technology Demonstration Convertor di STC, è opportuno dare una descrizione più approfondita di questo componente, che verrà analizzato dettagliatamente in ogni sua parte nel 4. Per ogni ulteriore informazione sul TDC o sul generatore nel suo complesso, anche riguardo ai test effettuati su di esso, si rimanda a riferimenti bibliografici quali [12,13,14,15,16].

Purtroppo una rassegna completa delle grandezze geometriche e fisiche del TDC non è facilmente reperibile, se non sotto diretta concessione di NASA GRC. I dati di seguito riportati sono il risultato di una lunga catalogazione di pubblicazioni dell'argomento fatta dall'autore in circa un anno di ricerca.



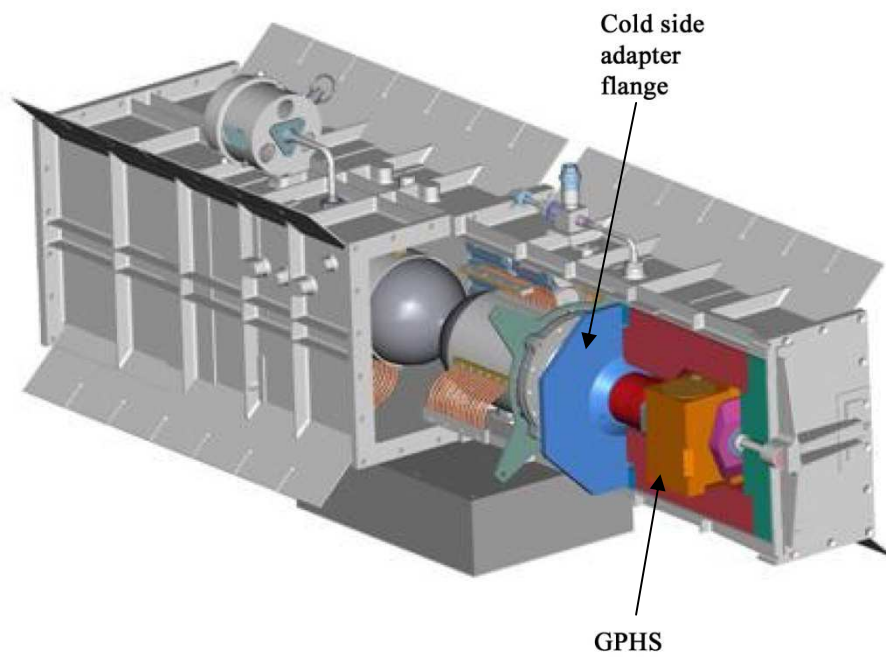


Fig. 2.23 - Spaccato dello Stirling Radioisotope Generator SRG-110,[15]

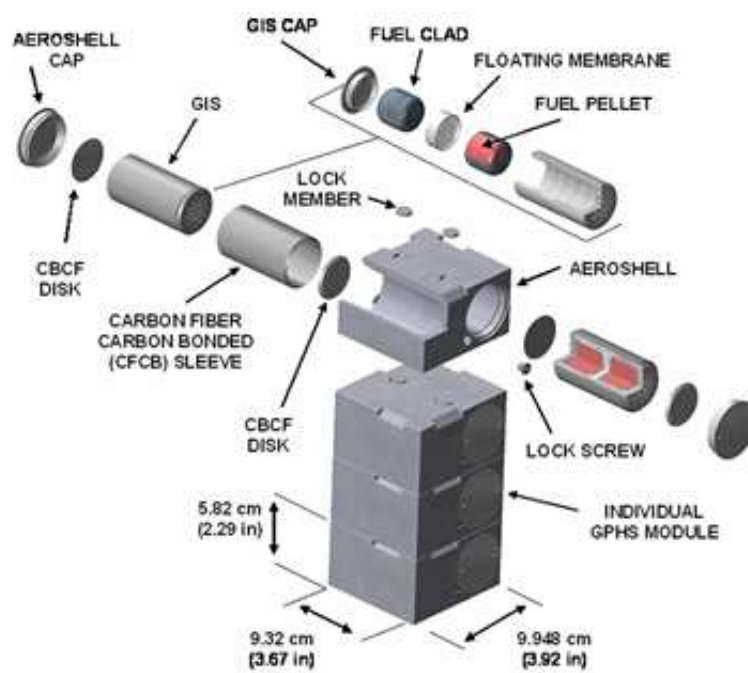


Fig. 2.24 - Esploso di un singolo modulo GPHS alimentato a Plutonio-238,( [www.ne.doe.gov](http://www.ne.doe.gov))

### 2.4.1 55-We Technology Demonstration Converter (TDC)

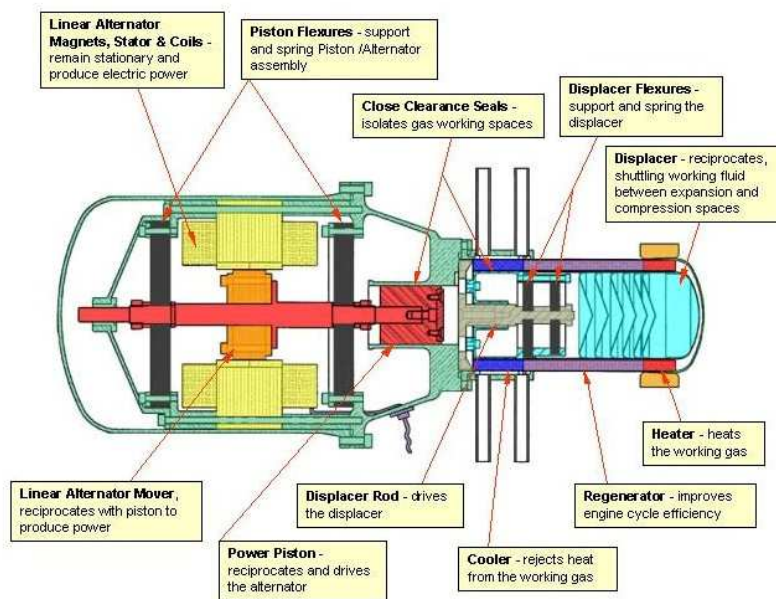


Fig. 2.25 - Sezione del *Technology Demonstration Converter* montato sul SRG-110,[14]

Il convertitore Stirling Free-Piston realizzato da STC per il generatore SRG-110 si presenta esteriormente come un involucro sigillato e pressurizzato. Al suo interno (Fig. 2.25) si individuano due volumi separati: la camera di rimbalzo, contenente gli avvolgimenti dell'alternatore lineare, e il volume di lavoro, separato in uno spazio di espansione e uno di compressione da un canale anulare che comprende il rigeneratore e i due scambiatori. Tutti i volumi sono riempiti di Elio, ad una pressione media di 2.5 MPa.

Lo scambiatore caldo (650°C) rappresenta l'interfaccia del motore con l'unità GPHS, mentre quello freddo (80°C) è a contatto con la struttura che funziona da radiatore. Il rigeneratore, così come in moltissimi motori Stirling anche a guida cinematica, è formato da un materiale poroso (letto di sferette, spugna metallica o simili) per migliorare il contatto termico con il gas.

Il displacer (cavo) e il pistone di potenza sono entrambi collegati al basamento da delle molle a spirale (Fig. 2.26), Il pistone alla pareti della camera di rimbalzo e il displacer ad un'asta centrale. Questo sistema, come visto in Fig. 2.17, è utilizzato da Infinia anche per altri modelli di convertitore. L'utilità principale di molle così dimensionate è quella di guidare e centrare gli elementi mobili, azzerando i carichi radiali e permettendo così un perfetto funzionamento anche in posizioni diverse da quella verticale.



Fig. 2.26 - Design delle molle planari montate sul TDC,[16]

La rigidezza di tali molle è uno dei parametri più difficili da ritrovare nella letteratura recente, tuttavia è possibile fare delle stime considerando che nel loro disegno si è tenuto conto del fatto che fossero in grado di far risuonare gli stantuffi a frequenze vicine a quella operativa.

L'alternatore presenta dei magneti permanenti (Neodimio-ferro-boro) statorici, con avvolgimenti di rame sistemati con asse ortogonale a quello del motore. Il cursore, solidale con il pistone di potenza, è costituito da un nucleo ferromagnetico, che muovendosi varia la riluttanza delle linee di flusso e induce una differenza di potenziale sinusoidale negli avvolgimenti [17].

Il materiale scelto per la camera di espansione (*Heater Head*) è Inconel-718, una lega di Nickel e Cromo, che ha garantito buona resistenza al creep e quindi una lunga vita operativa (i test hanno dimostrato un'eccellente affidabilità per missioni di anche 10 anni). Il TDC lavora ad una frequenza operativa di circa 80 Hz, con un rendimento di conversione del 27% circa.

## 2.5 *Advanced Stirling Convertors e ASRG-EU*

Vista la validità dei risultati ottenuti nel progetto del SRG-110, NASA e DOE decidono di investigare sulle possibilità di ulteriori miglioramenti nella tecnologia dei generatori Stirling a radioisotopi. Nel 2003 nasce il progetto NASA RPCT (Radioisotope Power Conversion Technology), un percorso di ricerca strutturato in tre fasi annuali, teso a sviluppare dei convertitori Stirling di nuova generazione, che vengono commissionati a Sunpower Inc. Si cerca in particolare di ridurre ancora peso e ingombro dei generatori, cercando di ottenere le più alte efficienze possibili.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero



Fig. 2.27 - Il primo prototipo di FTB (*Frequency Test Bed*) di Sunpower Inc.,[18]

Durante la *Phase I* Sunpower fornisce un modello sperimentale (Fig. 2.27) chiamato *Frequency Test Bed* (FTB), da utilizzare per verificare le prestazioni di potenza richieste alle frequenze operative ricercate ( $\approx 80$  We a 105 Hz). L'FTB dimostra un'efficienza record del 36%, con un rapporto di temperatura di circa 3. Come si vede dalla Fig. 2.28, le sue dimensioni sono molto più piccole del TDC utilizzato in SRG-110, per quanto non sia disegnato per minimizzarne il peso. Gli esperimenti sul FTB guidano la progettazione dei primi ASCs (Advanced Stirling Convertors).

Nella *Phase II*, consolidato il disegno generale, vengono prodotti i primi 4 esemplari di ASC-1, di cui in Fig. 2.28 si osserva la veduta esterna, priva delle flange di collegamento termico del riscaldatore e del radiatore. La riduzione delle dimensioni è molto elevata, con un diametro massimo di 65 mm e una lunghezza totale di circa 186 mm. Anche la massa totale del convertitore è stata ridotta, portandola a 1.3 kg circa.

La differenza più sostanziale con il TDC risiede tuttavia nelle capacità termiche. Il materiale con cui è fabbricata l'heater head dell'ASC-1 è MarM-247, una superlega Nickel con una forte concentrazione di elementi refrattari, che ha permesso di innalzare fino a 850°C la temperatura operativa dell'heater head mantenendo buone affidabilità e resistenza a creep.

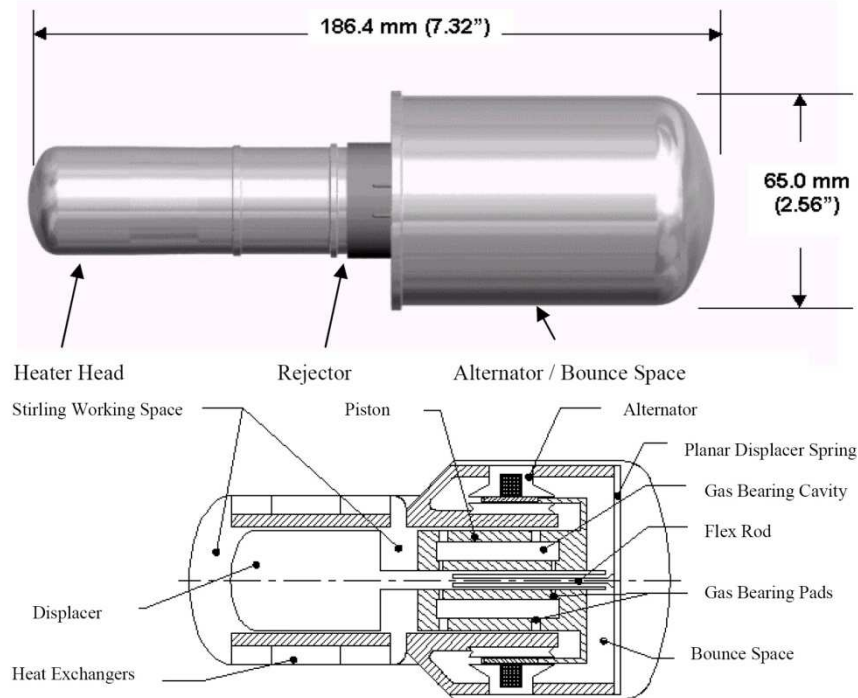


Fig. 2.28 –Veduta esterna e schema della sezione trasversale del convertitore ASC-1,[19]

L'attuale *Phase III* tendeva inizialmente alla realizzazione di 4 convertitori ASC-2 con la stessa capacità termica dei precedenti, ma ermeticamente chiusi e più leggeri, con masse molto vicine ad 1 kg. Tuttavia il successo della *Phase II* ha portato NASA alla richiesta di altri 7 convertitori, denominati ASC-0, ASC-1HS e ASC-E, la cui costruzione ha permesso di effettuare ulteriori test e di affinare il disegno degli ASC-2. Ovviamente questi motori, date le dimensioni molto ridotte, presentano un'architettura interna necessariamente diversa da quella del convertitore da 55 We di STC. Come si può osservare in Fig. 2.28, pistone e displacer non sono guidati da molle indipendenti, e il loro centraggio è affidato esclusivamente a cuscinetti gas-dinamici. L'unica molla planare presente nel dispositivo (di disegno simile a quelle del TDC) serve da collegamento elastico con la struttura per entrambi gli stantuffi. Gli avvolgimenti dell'alternatore, inoltre, sono disposti più esternamente, e interagiscono con delle flange solidali al pistone.

La sequenza completa degli esemplari realizzati da Sunpower per il progetto RPCT è riportata nella Tabella 2.3. In particolare i 3 convertitori ASC-E sono stati costruiti con un heater head in Inconel-718, già utilizzato per il TDC. Questi modelli (raffigurati in Fig. 2.29 con le flange termiche per il reflusso di calore e il cappuccio isolante per l'heater head) hanno un'interfaccia tale da poter essere inseriti in un Radioisotope Power System Engineering Unit (RPS-EU) creato da Lockheed Martin sotto contratto con DOE.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

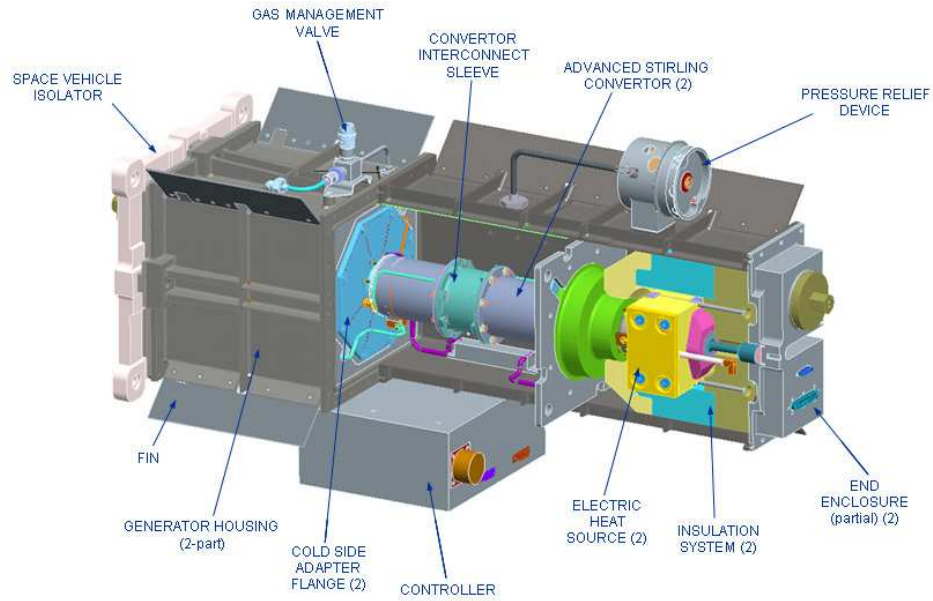
	Units	Head Material	Head Temperature (C)	Hermetic	Additional Design Evolution
FTB	2	Stainless Steel	650	No	
ASC-1a	2	MarM-247	850	No	
ASC-1b	2	MarM-247/ IN-718	850	No	Inertia welded Head
ASC-0	2	IN-718	650	Yes	Brazed displacer dome/body joint
ASC-1HS	2	MarM-247/ IN-718	850	Yes	Improved piston/gas bearing/center port configuration
ASC-E	3	IN-718	650	Yes	Improved piston sensor, Inconel rejector pressure wall for reliability
ASC-2	4	MarM-247/ IN-718	850	Yes	Diffusion bonded external acceptor

**Tabella 2.3 - Sequenza completa dei convertitori ASC prodotti da Sunpower per NASA,[21]**



**Fig. 2.29 - Due convertitori ASC-E completi delle flange termiche di collegamento,[21]**

L'unione degli sforzi di Sunpower, NASA GRC, DOE e Lockheed Martin, ha portato alla realizzazione di un *Advanced Stirling Radioisotope Generator Engineering Unit* (ASRG-EU, Fig. 2.30), che attualmente si trova sui banchi di prova del NASA GRC, per test di definizione delle prestazioni e prove di affidabilità. Il generatore utilizza lo stesso involucro esterno in berillio del SRG-110, che contiene due unità ASC-E, in grado erogare ognuna 88 We nominali, ricevendo calore a 650°C dalle rispettive GPHS. La pressione media dell'elio dentro gli ASC-E è 3.5 MPa, e la frequenza operativa è ancora di 105 Hz. Con i nuovi convertitori la massa di isotopo radioattivo necessaria al riscaldamento è scesa del 75% rispetto ai vecchi generatori termoelettrici a semiconduttori, e questo, unitamente alla leggerezza degli ASCs, ha permesso di contenere la massa totale del generatore intorno ai 20 kg. Grazie ad un'efficienza di conversione del 93% nel sistema di controllo, l'ASRG produce complessivamente 140 We, con una potenza specifica di 6.7 W/kg.



**Fig. 2.30 - Advanced Stirling Radioisotope Generator Engineering Unit, prodotto da Sunpower, DOE e Lockheed Martin, [21]**

Parameter	ASRG —650 °C	ASRG —850 °C
Power per ASRG (beginning-of-life (BOL)) We	143	~ 160
Power degradation, %/yr	0.8 (power decays with fuel decay)	
Mass per ASRG, kg	20.2 *	~ 19
Dimensions, mm	Length: 725 Width: 293 Height: 410	TBD
Number of GPHS modules	2	2
Thermal power input (BOL), W	500	500
ASRG specific power, We/kg	7.0	~ 8.4
Conversion efficiency, %	28	~32
Controller	Single fault tolerant	
Operating environment	Vacuum and Mars atmosphere	
Life requirement	14 yr mission + 3 yr storage	

**Tabella 2.4 - Parametri e risultati dei test sull'ASRG, paragonate con gli esiti previsti delle future sperimentazioni,[22]**

Sono previsti nel prossimo futuro esperimenti che coinvolgano anche la seconda generazione di ASC-2, equipaggiati in modo da poter lavorare a 850°C, dopo che le attuali prove su ASRG hanno dimostrato una vita operativa a 650°C di circa 17 anni. Risultati ottenuti e previsioni future di queste apparecchiature sono riassunti in Tabella 2.4.

## 2 Il motore di Stirling a pistone libero

In questi mesi, Sunpower ha fornito a NASA un'ulteriore nuovo modello di convertitore, ancora più piccolo (Fig. 2.30), saldato in un involucro ermetico, con una potenza di 35 We, le cui potenziali applicazioni sono ancora oggetto di studio; ma la funzionalità della tecnologia Free-Piston, nella conversione diretta di energia termica, ha ormai dimostrato quanto questi apparecchi possano fare, per risolvere i problemi di generazione di potenza delle applicazioni spaziali, quali che siano i campi di utilizzo cui si vogliono destinare.



**Fig. 2.31 - Mini convertitore ermetico Sunpower da 35 We (a sinistra), e integrato in un generatore solare portatile con William Beale, inventore degli FPSE (a destra),[22]**



### 3 Rassegna dei modelli di analisi lineare per FPSEs

Nel corso degli anni sono stati sviluppati moltissimi modelli di analisi sul funzionamento dei motori Stirling a pistone libero, secondo varie forme e diversi livelli di accuratezza. Lo scopo di queste trattazioni è quello di poter predire l'andamento del motore e le sue prestazioni, partendo dalle sue caratteristiche geometriche e operazionali, risparmiando il tempo di lunghe simulazioni, utili solo per un iniziale confronto dei dati previsti con quelli realmente misurati. Rispetto ai metodi di analisi non lineare (metodi di simulazione), che prevedono l'integrazione numerica delle equazioni, e necessitano quindi di un lungo tempo di calcolo, i modelli di analisi lineare (LDA) mostrano notevoli vantaggi, specialmente in una fase preliminare dello studio di un motore. Con la possibilità di integrare analiticamente le equazioni del modello, infatti, i metodi LDA portano a determinare delle relazioni algebriche fra le grandezze caratteristiche del motore (vedi paragrafo 2.1.5), e consentono quindi un migliore comprensione del funzionamento del motore, anche se il livello di precisione dei risultati è minore rispetto ai modelli di simulazione.

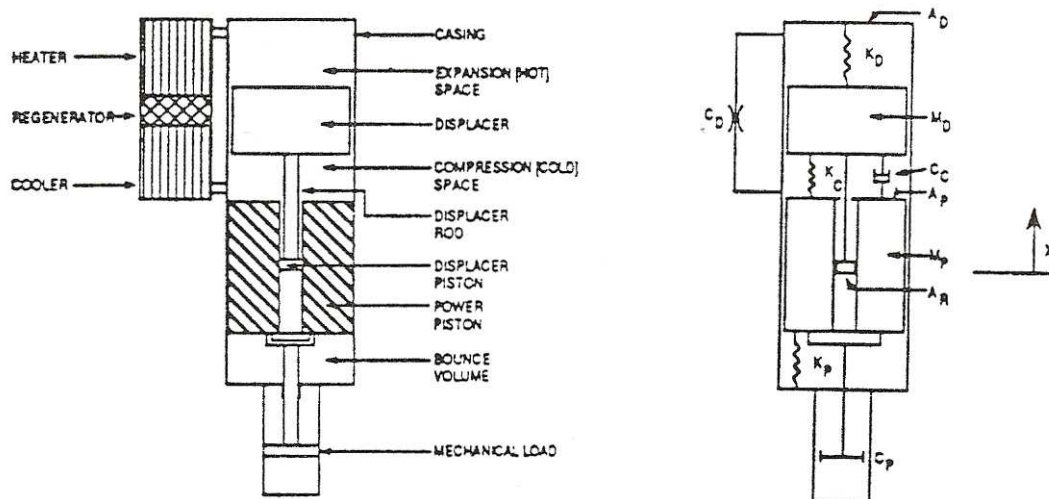


Fig. 3.1 - Schema e elementi della dinamica di un tipico sistema FPSE collegato con un generico dispositivo di carico, [4]

### 3 Rassegna dei modelli di analisi lineare per FPSEs

Questi metodi sono stati classificati in 3 categorie a seconda del loro livello di accoppiamento fra i due aspetti fondamentali dei motori Stirling, quello dinamico e quello termodinamico:

- *Metodi in cui dinamica e termodinamica sono disaccoppiate*, che non danno risultati accurati, specialmente per motori Free-Piston, in quanto in essi le forze di pressione sono considerate una forzante esterna del moto dei pistoni, che influenza la dinamica, ma non ne viene influenzata a sua volta.
- *Metodi in cui c'è un accoppiamento parziale tra dinamica e termodinamica*, che sono cronologicamente i primi a essere stati sviluppati, anche se i risultati ottenuti non sono stati soddisfacenti.
- *Metodi con dinamica e termodinamica accoppiate*, che risultano i più corretti per analizzare i FPSE, nei quali l'influenza reciproca è molto importante.

Per quanto detto, l'ultimo tipo risulta quello più adatto nell'analisi che interessa questo lavoro di tesi, ed è pertanto quello su cui si concentrerà questa breve rassegna dei vari modelli presentati fino ad oggi e dei loro risultati. Quanto riportato di seguito è preso dall'esauriente trattazione del Prof. Filippo de Monte [4], il cui lavoro, per quanto non recentissimo (1993), resta comunque il più valido riferimento attuale sull'argomento.

#### 3.1 Schema generico dei modelli LDA

Lo scopo finale dei modelli di analisi lineare dei motori Free-Piston è solitamente quello di predire la dinamica dei pistoni, in modo da poter estrarre dal modello le grandezze variabili del motore (vedi paragrafo 2.1.5), e quindi le sue prestazioni e caratteristiche di funzionamento. In quest'ottica, facendo riferimento ad uno schema costruttivo come quello illustrato in Fig. 3.1, tutti i modelli di questo tipo si riducono a scrivere l'equazione del moto dei due pistoni secondo il sistema

$$\mathcal{M} \ddot{x} + C \dot{x} + \mathcal{K} x = F(t) \quad (3.1)$$

dove  $\mathcal{M}$  è la matrice delle masse dei pistoni,  $C$  è la matrice degli smorzamenti e  $\mathcal{K}$  è la matrice delle rigidezze. Smorzamenti e rigidezze sono quelli esterni al comportamento del fluido di lavoro, si tratta quindi per esempio delle costanti elastiche di eventuali molle meccaniche, oppure di smorzamenti dovuti all'attrito viscoso sviluppato dai pistoni nelle loro sedi.

Il vettore forzante  $F(t)$  è composto da un termine dovuto al fluido di lavoro e da uno dovuto al sistema di carico, cioè

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_w(t) + \mathcal{F}_{ld\_l}(t) \quad (3.2)$$

con il suffisso *ld\_l* che sta per *load device-load*, come vedremo nel capitolo successivo, ed indica il sottosistema composto dal dispositivo di carico e dal carico stesso. A sua volta, anche il termine  $\mathcal{F}_w(t)$  può essere separato in due componenti, per rappresentarlo in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ :

$$\mathcal{F}_w(t) = -C_w \dot{x} - \mathcal{K}_w x \quad (3.3)$$

introducendo così le matrici di rigidezza ( $\mathcal{K}_w$ ) e smorzamento ( $C_w$ ) relative al circuito di lavoro. Proprio in base al modo di trattare il vettore  $\mathcal{F}_w(t)$  si dividono i metodi LDA (vedi [4]), e per quanto detto sopra, relativamente al tipo di modello considerato ai fini di questa tesi, in seguito si considerano solo i modelli che portano a equazioni del moto nella forma

$$\mathcal{M} \ddot{x} + (C + C_w) \dot{x} + (\mathcal{K} + \mathcal{K}_w) x = \mathcal{F}_{ld\_l}(t) \quad (3.4)$$

## 3.2 Berchowitz e Wyatt-Mair, 1969

Arrivano a equazioni del moto nella forma della (3.4) sviluppando in serie di Mc Laurin la pressione dello spazio di lavoro, dello spazio di rimbalzo e della molla gassosa, e rascurando poi i termini non lineari delle espressioni ottenute, funzioni degli spostamenti di pistone e displacer.

Il calcolo successivo si basa poi sull'assunzione che i pistoni seguano moti sinusoidali, e sostituendo espressioni del genere nelle equazioni del moto, si ottengono relazioni algebriche per calcolare la frequenza operativa ( $f$ ) e il ritardo di fase del pistone rispetto al displacer ( $\phi$ ). Un confronto con i dati sperimentali su alcuni motori FPSE/LA ha evidenziato le buone potenzialità del modello, che presenta tuttavia molte ipotesi semplificative. Tra le più importanti, oltre l'aver assunto a priori il tipo di moto dei pistoni, si evidenziano:

- Spazi di compressione e espansione isotermici
- Perdita di pressione nulla negli scambiatori e nel rigeneratore
- Pressione  $p_B$  dello spazio di rimbalzo costante.
- Comportamento adiabatico della molla gassosa.
- Forza data dal sottosistema di carico proporzionale alla velocità del pistone.

### 3.3 Urieli-Berchowitz, 1984

Si tratta di un miglioramento della'analisi precedente, presentato per esteso in [5] , nel quale compare anche la caduta di pressione nel canale rigenerativo, anche se in modo non intrinseco. Poiché  $\Delta p_w$  è una funzione quadratica della velocità degli elementi mobili, essa viene linearizzata, ma invece di trascurare semplicemente il termine non lineare, si utilizza una linearizzazione equivalente basata sulla dissipazione di energia in un quarto di ciclo. Dopodiché si assume che la pressione in camera di espansione e di compressione sia rispettivamente:

$$p_e = p_w + \Delta p_w \quad p_c = p_w \quad (3.5)$$

dove  $p_w$  è la pressione del fluido di lavoro, calcolata senza la perdita di pressione. Anche la molla gassosa, per quanto considerata ancora adiabatica, viene arricchita dei fenomeni di isteresi non lineari che la caratterizzano, tramite una forza dissipativa viscosa. Questo sistema di “depurazione” delle pressioni dai fenomeni dissipativi viene applicata anche alla camera di rimbalzo, dove la pressione non è più assunta costante. Tramite queste aggiunte, e assumendo leggi del moto dei pistoni in forma complessa, oltre alle espressioni relative a  $f$  e a  $\phi$ , se ne ottiene una anche per  $r$  (rapporto di corsa fra i pistoni). Inoltre si raggiunge il cosiddetto *vincolo geometrico*, una condizione di compatibilità fisica che lega la frequenza ai coefficienti di rigidità e smorzamento delle matrici.

Se invece si assumono leggi del moto sinusoidali, si ottengono espressioni algebriche per la potenza utile e per quella dissipata dal motore. I risultati del modello vengono poi confrontati con quelli relativi alle prove su motori esistenti, fra i quali il RE-1000 della Sunpower.

La conclusione del modello riguarda le condizioni di stabilità dei sistemi FPSE/LD-L, e comprende le seguenti affermazioni:

- Si intende per macchina lineare una collegata ad un carico che sia lineare, quindi proporzionale alla prima potenza della velocità di spostamento del pistone di potenza
- Si intende per configurazione di equilibrio una situazione caratterizzata da oscillazioni stazionarie
- La macchina lineare presenta una sola configurazione di equilibrio, che risulta *instabile*, e che quindi viene pregiudicata dalla minima variazione di una grandezza di controllo (par. 2.1.5) per far arrestare la macchina o far divergere le oscillazioni.

Ciò significa che una macchina rigorosamente lineare non è in grado di lavorare nella realtà, perché dinamicamente instabile. In realtà, come affermato dallo stesso de Monte [4] ,

anche qualora questo fosse vero, sarebbe sufficiente utilizzare dei meccanismi di regolazione che agiscano sulle grandezze di controllo per evitare la perdita della configurazione di equilibrio.

### 3.4 Berchowitz e Redlich [23], 1985

Il loro lavoro si incentra sulla ricerca di una condizione di equilibrio stabile della macchina. Tale condizione viene trovata, ma nel caso particolare in cui la caduta di pressione nel condotto di rigenerazione sia nulla. Le equazioni del moto vengono integrate nel dominio di Laplace, e con il criterio di Nyquist applicato al diagramma polare del polinomio caratteristico del sistema, si stabilisce il segno della parte reale delle radici. Si ottiene così un'espressione approssimata per calcolare la pulsazione operativa  $\omega$ :

$$\omega \approx \frac{\omega_D \omega_P (Q_P + Q_D)}{\omega_P Q_D + \omega_D Q_P} \quad (3.6)$$

dove si inseriscono le espressioni delle pulsazioni naturali di pistone e displacer

$$\omega_P = \sqrt{\frac{K_P}{M_P}} \quad \omega_D = \sqrt{\frac{K_D}{M_D}} \quad (3.7)$$

e i rapporti tra l'energia immagazzinata e quella dissipata in un ciclo dal pistone e dal displacer

$$Q_P = \frac{\omega_P M_P}{2\pi C_P} \quad Q_D = \frac{\omega_D M_D}{2\pi C_D} \quad (3.8)$$

In questo modo si ottiene un'espressione per la legge del moto degli elementi mobili nella forma

$$x_i(t) = \sum_{n=1}^4 \alpha_{i_n} e^{\lambda_n t} \quad (3.9)$$

e si arriva ad una condizione di stabilità, cioè una disequazione, che se soddisfatta, quando viene progettato il motore, assicura una coppia di radici  $\lambda$  complesse coniugate a parte reale positiva (le altre due con parte reale negativa), che corrispondono a delle oscillazioni divergenti.

Quindi la macchina presenta una configurazione di equilibrio instabile, quando le parti reali delle due radici sono nulle, e quindi quando la condizione di stabilità è verificata in senso stretto, ad una minima variazione dei parametri di controllo, la parte reale delle radici diventa positiva o negativa (rottura o arresto del motore). Al contrario la macchina non lineare, cioè

### 3 Rassegna dei modelli di analisi lineare per FPSEs

reale, ha infinite configurazioni di equilibrio, con radici complesse con parte reale positiva. Le non-linearità associate alle pressioni impediscono alle oscillazioni di continuare a crescere in ampiezza e le fissano su valori costanti. Se da una configurazione di equilibrio la macchina viene perturbata, si porta automaticamente su una configurazione non di equilibrio, con radici a parte reale negativa, che porterà le oscillazioni ad annullarsi.

Quindi le non linearità hanno un effetto *stabilizzante*, ma solo in fase di smorzamento, non in fase di eccitamento.

Se si scrivono le leggi del moto in forma complessa, si raggiungono le stesse espressioni algebriche trovate da Urieli e Berchowit in [5], nel caso di  $\Delta p_w$  nullo. Tuttavia questo modello, al confronto con i valori di potenza misurata sperimentalmente, non mostra buone capacità di predizione.

#### 3.5 Goldberg (1980-1983)

Da un approccio iniziale preso dall'analisi di Berchowit e Wyatt-Mair, Goldberg calcola le leggi del moto riconducendosi ad un sistema di quattro equazioni differenziali del 1° ordine, che risulta del tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{x}(t) \quad (3.10)$$

dove  $\mathcal{A}$  è la matrice contenete rigidzze e smorzamenti per unità di massa e  $\mathbf{x}$  è il vettore delle incognite preso come

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_P \\ \dot{x}_P \\ x_D \\ \dot{x}_D \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

La soluzione di questo sistema è nota dalla teoria dei sistemi, si veda per esempio [29], integrando per esempio nel dominio di Laplace e poi effettuando una antitrasformata. La soluzione del sistema si ottiene come

$$\mathbf{z}(t) = \mathcal{B} \mathbf{z}(0) \quad (3.12)$$

dove  $\mathcal{B}$  è una matrice nella quale ogni elemento ha la forma

$$\mathcal{B}_{ij} = (\mathcal{B}_1)_{ij} e^{s_1 t} + (\mathcal{B}_2)_{ij} e^{s_2 t} + (\mathcal{B}_3)_{ij} e^{s_3 t} + (\mathcal{B}_4)_{ij} e^{s_4 t} \quad (3.13)$$

Essendo gli  $s_i$  gli autovalori del sistema e le costanti  $(\mathcal{B}_k)_{ij}$  calcolabili con metodi classici della teoria dei sistemi come il teorema di Heaviside [[29]].

Goldberg sceglie un motore per il quale  $s_1=0$ , e le altre tre radici sono imposte essere una reale due complesse coniugate, poiché questa assunzione è necessaria per ottenere oscillazioni stabili. Descrivendo un motore che lavora in condizioni stazionarie, già collegato ad un sottosistema di carico, rigidzze e smorzamenti sono tali da ottenere due radici immaginarie pure e una reale negativa, che esprime un transitorio che sparisce. Si ottengono così

$$\mathcal{B}_{ij} = 2 \left( |\mathcal{B}|_2 \right)_{ij} \cos(\omega t + \phi_{ij}) \quad (3.14)$$

e per qualunque  $z_k(t)$  risulta

$$z_k(t) = 2 \left[ \sum_{i=1}^4 |\mathcal{B}|_{2ki} \cos(\omega t + \phi_{ki}) z_i(0) \right] \quad (3.15)$$

Determinando così la legge del moto del pistone per  $k=1$  e del displacer per  $k=3$ .

Quindi Goldberg, senza alcuna condizione di stazionarietà, fornisce soltanto le leggi del moto dei pistoni, che risultano sinusoidali, e che permettono di ottenere lavoro prodotto e calora scambiato dal motore in un ciclo.

In un lavoro successivo, lo stesso Goldberg ricerca poi una condizione di *stabilità asintotica*, che ritiene un requisito fondamentale per il funzionamento dei FPSE. Riportandosi nuovamente ad un sistema del tipo di (3.10), Goldberg afferma che se il polinomio caratteristico di tale sistema è non singolare e tutte le sue radici hanno parte reale negativa, allora il sistema è stabile asintoticamente (condizione necessaria e sufficiente). Se invece il polinomio ha radici a parte reale negativa o nulla, e quelle multiple hanno parte reale negativa, allora il sistema è stabile.

Quindi secondo Golberg, per valutare la stabilità si un FPSE modellato linearmente con un metodo del tipo (3.10), si possono seguire due strade:

- Calcolare esplicitamente le radici del polinomio caratteristico
- Usare criteri (Routh o Lyapunov) per verificare le condizioni di stabilità del sistema.

### 3.6 Benvenuto-de Monte-Farina (1990-1992)

Sempre seguendo l'approccio di Berchowitz e Wyatt-Mair per la determinazione delle equazioni del moto, conservano le ipotesi fondamentali del modello di Urieli e Berchowitz del 1984, tranne per la non-linearità dovuta alla perdita di pressione nel canale del rigeneratore, che viene considerata variabile con  $f$ ,  $\phi$ ,  $r$  e  $X_p$  (cioè la corsa del pistone di potenza, e per lo smorzamento dovuto all'isteresi delle molle gassose, che varia con  $\omega$ ).

Le equazioni del moto vengono linearizzate e integrate, ma una volta raggiunto il polinomio caratteristico del sistema, questo viene studiato in un modo particolare che gli stessi autori definiscono *del tutto peronale*, teso a stabilire quando esso ammette due radici immaginarie pure e due complesse coniugate con parte reale negativa. Questa tecnica, a differenza dei criteri di stabilità sopra enunciati, permette di determinare una *condizione di stazionarietà*, alla quale devono soddisfare i coefficienti di smorzamento (nei quali compare anche il  $\Delta p_w$ ) per garantire oscillazioni stazionarie. Si ottiene così anche una espressione per la frequenza  $f$ , e se si impongono leggi del moto sinusoidali, si determinano anche delle relazioni per  $r$  e  $\phi$ .

Si giunge quindi ad un sistema di 4 equazioni non lineari, algebriche, nelle cinque incognite

$$X_p, r, \phi, f, C_{ld-t} \quad (3.16)$$

dove  $C_{ld-t}$  è il coefficiente di smorzamento dovuto al carico.

Definendo ancora una *macchina* lineare quella collegata da un carico lineare, e per *configurazione di equilibrio* quella caratterizzata da oscillazioni stazionarie, le conclusioni raggiunte sulla stabilità di funzionamento dei FPSEs sono:

- La macchina lineare presenta infinite configurazioni di equilibrio, definite dalle quattro equazioni nelle cinque incognite (3.16). Al variare del  $C_{ld-t}$  le oscillazioni diventano divergenti o convergenti fino a che le altre incognite non assumono valori tali da soddisfare le 4 equazioni, e soprattutto la condizione di stazionarietà, finendo su una nuova configurazione di equilibrio.
- Non tutte le configurazioni di equilibrio sono accettabili, poiché non si possono permettere collisioni tra gli stantuffi, o tra uno di essi ed il cilindro.
- La non-linearità associata alla perdita di pressione, dovuta al regime turbolento che si stabilisce nel canale di rigenerazione ha un effetto stabilizzante sul funzionamento. Se



essa non venisse calcolata, si otterrebbero quattro equazioni in quattro incognite (non ci sarebbe  $X_p$ ), che sarebbero soddisfatte per un solo valore del carico.

Successivamente, Benvenuto, de Monte e Farina migliorano il modello appena descritto, inserendo anche un'efficienza non unitaria del rigeneratore, anche se in modo non intrinseco. Rifacendosi cioè alle equazioni del modello isoterma del gas di lavoro, e aggiungendo l'efficienza di rigenerazione con la tecnica semplificata proposta da Urieli e Berchowitz (*analisi semplice*, [5]).

Inoltre vengono presentate delle curve raffiguranti  $X_p$ ,  $r$ ,  $\phi$ ,  $f$  e la potenza utile al variare di  $C_{id\_1}$ , basandosi su due motori a pistone libero progettati dagli autori. Queste curve dimostrano qualitativamente l'entità dell'influenza della non-linearità associata a  $\Delta p_w$ , che dimostra che, entro certi limiti, la macchina è in grado di autoregolarsi, grazie al regime turbolento che nasce nel canale di rigenerazione.

Nel loro ultimo lavoro insieme, Benvenuto e de Monte riescono compiere un ulteriore passo avanti. Fino ad allora infatti (1992), era stato possibile ottenere equazioni del moto lineari solo adottando un *modello isoterma* per la termodinamica degli spazi di espansione e compressione, trascurando quindi le perdite dovute all'adiabaticità di tali spazi, che come è detto è più realistica (vedi par.1.4).

La metodologia presentata da Benvenuto e de Monte segue un approccio adiabatico, e segna un netto progresso nei modelli lineari di analisi per Free-Piston, perché evidenzia l'effetto stabilizzante della variazione delle temperature negli spazi di lavoro. Infatti le temperature medie degli spazi risultano funzioni di  $X_p$ , il che significa che al variare del coefficiente di carico, la macchina è in grado di regolarsi, variando sia le sue temperature medie, sia la sua pressione media, spostando quindi i punti medi di oscillazione dei due stantuffi (in macchine di piccola potenza, 100÷500 W).

Nel 1993 de Monte, nella sua tesi di Dottorato di Ricerca, presso l'Università di l'Aquila [4], presenta un modello matematico ancora più aggiornato, che raccoglie tutti i risultati dei suoi studi precedenti, e che presenta diverse novità, fra le quali:

- 1) L'eventuale non-linearità del carico associato alla macchina, già presentata da Chen e Griffin nel 1983, considerando un carico applicato che dipenda in modo non lineare sia dalla velocità del pistone che dalla sua posizione, anche se poi su tale carico viene effettuata una linearizzazione equivalente.
- 2) L'irreversibilità degli scambi termici negli scambiatori di calore, estendendo l'*analisi semplice*, sviluppata per macchine a guida cinematica [5], ai FPSEs.

### *3 Rassegna dei modelli di analisi lineare per FPSEs*

- 3) Il calcolo delle pressioni negli spazi di lavoro ( $p_e$  e  $p_c$ ) tramite l'ipotesi di Organ che

$$p_e = p_w + \frac{\Delta p_w}{2} \quad p_c = p_w - \frac{\Delta p_w}{2} \quad (3.17)$$

- 4) Il calcolo accurato della perdita di pressione negli scambiatori di calore.

## 4 Modello di analisi lineare per *FPSEs*

### 4.1 Generalità del modello

In questo capitolo viene presentato nel dettaglio il metodo di modellizzazione per motori Free-Piston proposto dall'autore, e sviluppato con la collaborazione del Prof. Mariano Andrenucci e del Prof. Luca d'Agostino, del Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale dell'Università di Pisa. Il modello descritto nelle pagine seguenti si basa su un'analisi lineare che accoppia intrinsecamente le componenti dinamica e termodinamica del funzionamento del motore, ma in modo diverso dai vari lavori visti nel capitolo precedente.

Nei modelli già descritti, nonostante si voglia operare un accoppiamento totale tra dinamica e la termodinamica del motore, quest'ultima viene analizzata sempre per l'effetto che ha sul movimento dei pistoni, essendo questo l'aspetto che più interessa per valutare il comportamento della macchina (rendimento, potenza utile, ecc.)

Nell'analisi che viene qui illustrata, invece, quello che si cerca di dare è una descrizione globale, che abbracci anche l'evoluzione delle condizioni del fluido di lavoro durante il ciclo operativo. In questo modo la macchina non risulta più caratterizzata da un sistema di equazioni del tipo di (3.1), ma da un sistema di cui (3.1) costituisce solo una parte, e che ha per incognite, oltre alle posizioni e le velocità degli elementi mobili, anche le pressioni e le temperature dello spazio di rimbalzo, della molla gassosa, e dello spazio di lavoro (diviso nei cinque componenti definiti dal modello adiabatico del par. 1.6.2)

Questo metodo non è dissimile dal raccogliere i fenomeni termodinamici sotto forma di coefficienti di rigidità e smorzamento per il moto dei pistoni (come illustrato nei vari modelli visti nel Capitolo 3). In questo modo però si ha una descrizione precisa dell'andamento delle pressioni e delle temperature, che diventano a loro volta degli output del modello, e che permettono di conoscere le condizioni termodinamiche di ogni volume del motore e il comportamento effettivo del gas, non solo in funzione del suo effetto sui pistoni, ma anche come eventuale parametro di progetto per i vari componenti.

Il modello presenta inoltre un'analisi molto accurata della perdita di pressione che il fluido subisce nell'attraversare gli scambiatori di calore e il rigeneratore, un aspetto che in quasi tutti i lavori precedenti (escluso quello di de Monte) è stato trattato in modo notevolmente approssimato. Questo effetto smorzante è secondo l'autore la chiave del funzionamento stabile

## *4 Modello di analisi lineare per FPSEs*

del motore, e quindi una sua corretta modellazione è alla base di una giusta descrizione del suo comportamento.

La differenza fondamentale fra il lavoro presentato in questa tesi e le varie versioni di modello di analisi lineare per Free-Piston che sono stati elaborati fino ad ora, è sicuramente il fatto che nel presente modello l'aspetto dinamico e termodinamico vengono messi sullo stesso piano e considerati *realmente* e *intrinsecamente* accoppiati. E' così possibile apprezzare l'influenza reciproca tra l'insieme delle trasformazioni termodinamiche compiute dal gas e il movimento continuo di pistone e displacer, che a parere dell'autore è la vera essenza del funzionamento di un motore Stirling a pistoni liberi, specialmente degli esemplari più recenti visti nel capitolo 2.

### *4.2 Sviluppo del modello*

Fondandosi sul modello adiabatico di Finkelstein, l'analisi consiste sull'applicazione, alle varie camere del motore, delle equazioni di :

- bilancio di massa
- bilancio di energia
- equazione di stato

considerando ogni parte del volume a disposizione del gas come caratterizzato da valori uniformi di pressione, temperatura e densità. Ottenute le equazioni risultanti, si utilizza un metodo perturbativo delle variazioni, procedendo poi alla linearizzazione, sotto l'ipotesi di piccole perturbazioni. Questo passaggio può non sembrare estremamente rigoroso, ma come vedremo, avendo come scopo quello di stimare l'andamento di pressioni e temperature al muoversi dei pistoni, risulta tuttavia adeguato.

Contemporaneamente a questo, vengono scritti i bilanci di quantità di moto sul pistone di potenza e sul displacer, che vengono poi resi come un sistema di quattro equazioni differenziali lineari del primo ordine con un semplice cambio di variabile, secondo il metodo già utilizzato, per esempio, da Goldberg (vedi par.3.5).

L'accoppiamento dunque viene realizzato sia attraverso le pressioni delle camere, che compaiono come forzanti nelle equazioni del moto dei pistoni, sia attraverso le variazioni di volume presenti nei bilanci integrali, che sono linearmente dipendenti da posizione e velocità degli elementi mobili.

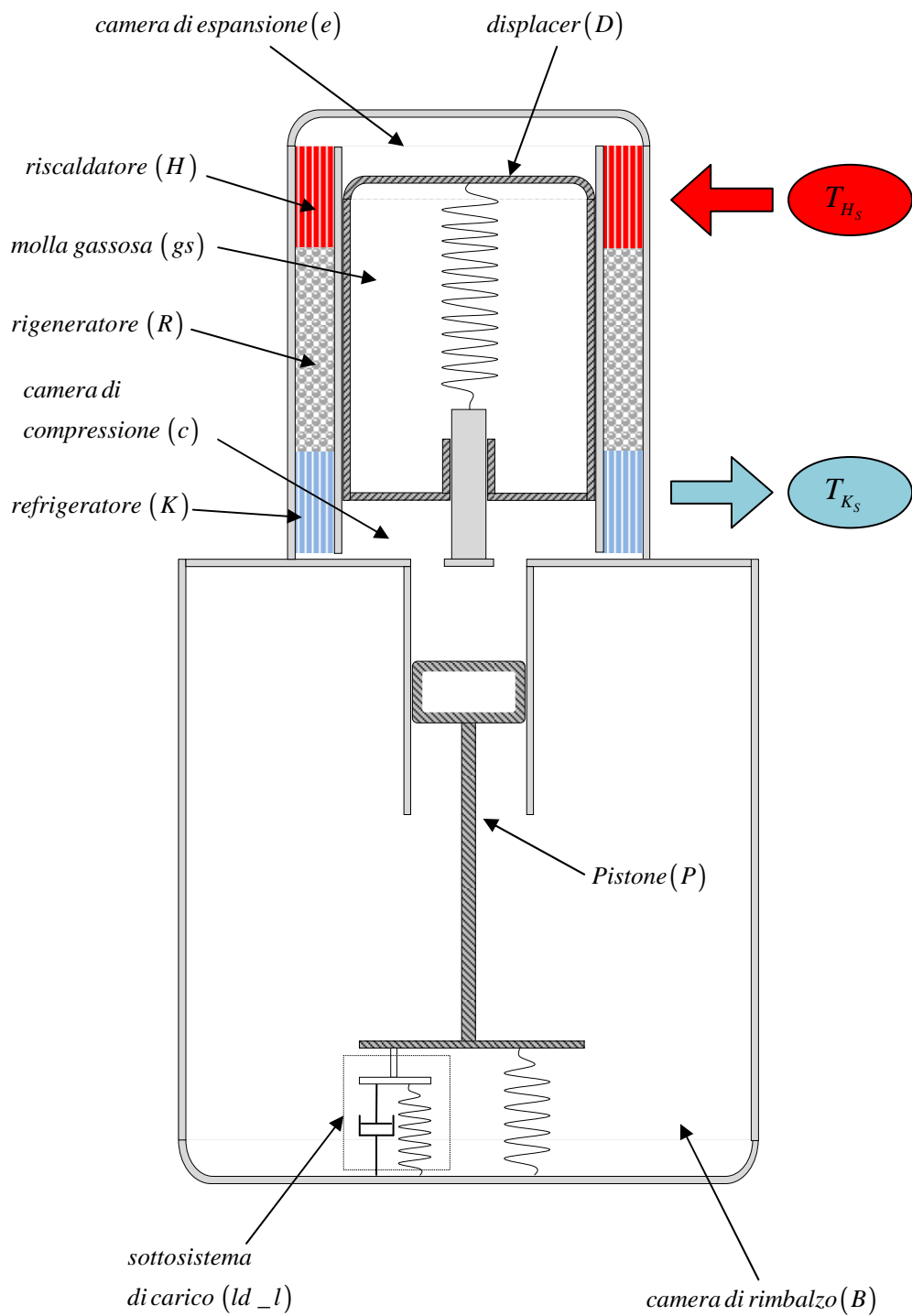


Fig. 4.1 – Schema e componenti dell'architettura scelta

## 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

Lo studio approfondito del canale di rigenerazione, poi, fornisce una stima accurata del salto di pressione che il fluido subisce nel suo attraversamento, collegando la pressione della camera di espansione a quella della camera di compressione.

Si raggiunge quindi un sistema di equazioni differenziali lineari del 1° ordine, che può essere studiato algebricamente, oppure implementato in un calcolatore per ottenere simulazioni di funzionamento, una volta definiti i vari parametri significativi (vedi cap. 5).

### 4.2.1 Scelta dell'architettura

Data la semplicità dello schema costruttivo di questo motore, c'è una forte similitudine fra i vari esemplari realizzati in tempi più recenti, come si è potuto vedere dalla descrizione di vari modelli di Sunpower e Infinia, nel cap.2. Per questo motivo è stata scelta, come base per il modello, un'architettura (Fig. 4.1) che presentasse tutti i tratti distintivi dei moderni convertitori Stirling Free-Piston (canale rigenerativo anulare, molle meccaniche, ecc), con proporzioni geometriche verosimili e riscontrabili in letteratura. In particolare si può chiaramente individuare la somiglianza con la configurazione del TDC di Infinia Corp. (Fig. 2.25), sul quale si è basata buona parte dell'iniziale fase di ricerca del presente lavoro. Nella figura si distinguono lo *spazio di rimbalzo* (indicato dal pedice  $B$ ), diviso dallo *spazio di lavoro* (in alto), che a sua volta è composto da cinque volumi ben definiti: una camera di espansione (pedice  $e$ ), una camera di compressione (pedice  $c$ ), gli scambiatori ad alta e bassa temperatura (pedici  $H$  e  $K$ , collegati con le rispettive sorgenti termiche), e il rigeneratore (pedice  $R$ ). I vari spazi sono separati dalla presenza dei due elementi mobili: Il pistone di potenza (pedice  $P$ ), collegato elasticamente al cilindro da una molla meccanica e connesso al dispositivo di carico, e il displacer (pedice  $D$ ) cavo, anch'esso collegato elasticamente al cilindro tramite un'asta centrale. All'interno del displacer si trova la molla gassosa (pedice  $gs$ ). Lo schema di Fig. 4.1 è quello cui si farà riferimento durante tutta la presentazione del modello, ed è in ragione di esso che si definiscono le seguenti grandezze (Fig. 4.2), alcune delle quali, sebbene non indispensabili nell'elaborazione analitica del modello, sono state utili nella successiva fase in cui se ne è tentata un'implementazione per verificarne l'attendibilità.

#### ● *Caratteristiche degli elementi mobili*

- $M_D$  = massa mobile del displacer
- $M_P$  = massa mobile del pistone
- $K_D$  = rigidità della molla meccanica del displacer
- $K_P$  = rigidità della molla meccanica del pistone
- $K_{ld\_l}$  = rigidità dovuta al sottosistema di carico

- $C_{ld\_l}$  = smorzamento dovuto al sottosistema di carico
- **Dimensioni**
  - $L_e$  = lunghezza della camera di espansione
  - $L_c$  = lunghezza della camera di compressione
  - $L_H$  = lunghezza del riscaldatore
  - $L_K$  = lunghezza del refrigeratore
  - $L_R$  = lunghezza del rigeneratore
  - $L_D$  = lunghezza dell'interno del displacer
  - $L_B$  = lunghezza della camera di rimbalzo
  - $L_{D_s}$  = lunghezza della corsa concessa al displacer
  - $L_{P_s}$  = lunghezza della corsa concessa al pistone
  - $D$  = diametro interno dello spazio di lavoro
  - $D_D$  = diametro del displacer
  - $D_p$  = diametro del pistone
  - $D_B$  = diametro interno della camera di rimbalzo
  - $D_{hub}$  = diametro dell'asta di guida del displacer
  - $t_w$  = spessore delle pareti dello spazio di lavoro
  - $t_B$  = spessore delle pareti della camera di rimbalzo
  - $A = \frac{\pi}{4} [D^2 - (D_D + 2t_w)]$  = sezione del canale contenente scambiatori e rigeneratore
  - $A_D = \frac{\pi}{4} D_D^2$  = sezione del displacer
  - $A_p = \frac{\pi}{4} D_p^2$  = sezione del pistone
  - $A_B = \frac{\pi}{4} D_B^2$  = sezione della camera di rimbalzo
  - $A_{hub} = \frac{\pi}{4} D_{hub}^2$  = sezione dell'asta di guida del displacer

Ovviamente quella presentata in Fig. 4.1 è una versione semplificata della potenziale architettura di un motore esistente. Questo perché è stata scelta con l'intento di non voler dare una semplice descrizione di un dispositivo già costruito, ma di rendere il modello elaborato valido per ogni configurazione plausibile, sotto varie condizioni operative, così da poter fornire utili indicazioni nell'ottica di un futuro progetto.

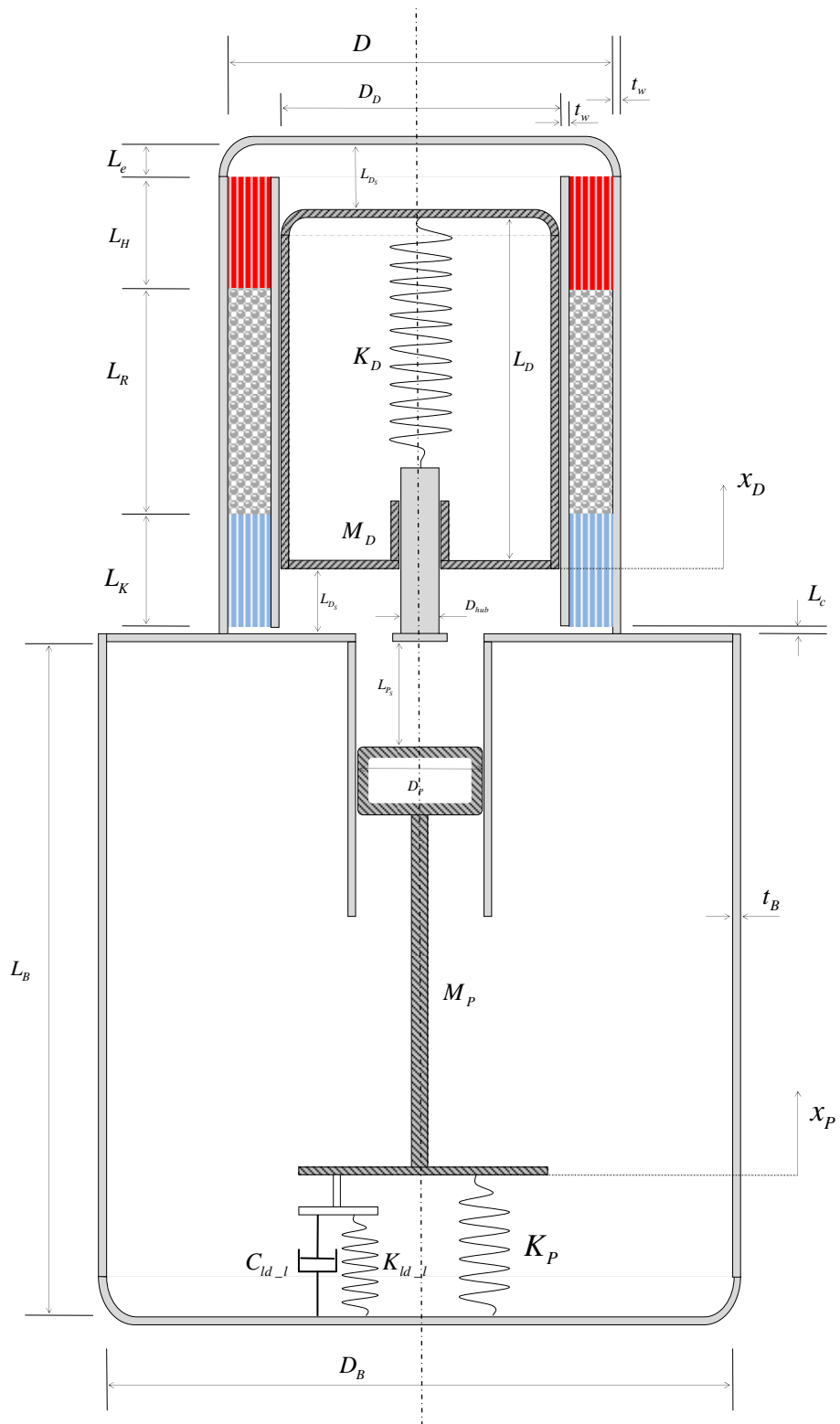


Fig. 4.2 - Grandezze fisiche e geometriche dell'architettura scelta



### 4.3 Ipotesi e semplificazioni

Il presente modello si basa su una corposa serie di ipotesi semplificative, alcune delle quali sono comunque rintracciabili nella quasi totalità delle teorie precedentemente proposte. Rispetto alla maggior parte dei lavori visti nel capitolo precedente, anzi, il lavoro qui descritto rivela un livello di approssimazione molto minore, soprattutto per quanto riguarda il comportamento del fluido di lavoro.

#### 4.3.1 Ipotesi iniziali

Al fine di facilitare la comprensione dell'analisi proposta, risulta opportuno riassumere qui le principali assunzioni di partenza, cui verrà comunque fatto riferimento ogni qual volta si renda necessario, durante la descrizione particolare delle varie parti del modello. Le ipotesi fondamentali sono:

- 1) Il fluido di lavoro (che come detto in genere è gas elio) è considerato come un gas ideale, con calori specifici costanti ( $C_p = \gamma C_v$ )
- 2) Gli spazi di lavoro del motore (camera di compressione e di espansione, interno del displacer e camera di rimbalzo) sono *adiabatici* e con distribuzioni uniformi di pressione, temperatura e densità (0D)
- 3) Gli scambiatori sono costituiti da una serie di dotti paralleli a sezione uniforme, e caratterizzati da un'efficienza di scambio termico quasi unitaria.
- 4) Il rigeneratore è considerato come un mezzo poroso, con sezione e porosità uniformi, con proprietà termodinamiche variabili assialmente, uguali per il gas e per la matrice solida.
- 5) La rigenerazione termica è supposta perfetta
- 6) Il flusso attraverso scambiatori e rigeneratore si assume unidimensionale (1D).
- 7) Pistone e displacer sono adiabatici e non sviluppano nessun attrito scorrendo nelle loro sedi.

A queste ipotesi si vanno ad aggiungere tutte le assunzioni che riguardano invece lo sviluppo delle equazioni nella loro forma definitiva, e che distinguono quindi il modello da altri dello stesso tipo.

#### 4.3.2 Semplificazioni dell'analisi

Quando un FPSE funziona in modo stazionario, il moto dei pistoni, e quindi la variazione di ogni grandezza ad esso associata, hanno un andamento molto simile a quello

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

armonico. Questo è ancor più accentuato se si considera la cosiddetta macchina lineare, che come detto è caratterizzata da un sistema di equazioni del moto del tipo di (3.1), la cui soluzione generale è appunto armonica. Per questo motivo nei vari metodi di analisi lineari di *FPSE*, è un'ipotesi molto diffusa assumere preventivamente una legge del moto armonica per i pistoni, come fatto già da Schmidt (par.1.6.1), e come si può ritrovare nel lavoro di molti autori ([1] [2] [5]).

Detto questo, non volendo tuttavia fare ipotesi a priori sul tipo di moto seguito dai pistoni, il presente modello si limita a considerare che le variazioni di ogni grandezza di pressione, volume e temperatura avvengano comunque attorno ad un valore medio. Pertanto tutte le grandezze avranno espressioni del tipo

$$A(t) = \bar{A} + \tilde{A}(t) , B(t) = \bar{B} + \tilde{B}(t) , \dots \quad (4.1)$$

Si utilizza quindi una sorta di modello perturbativo per l'analisi, al fine di poter linearizzare le equazioni sotto l'ipotesi di piccole perturbazioni, osservando cioè che vale

$$|\tilde{A}| \ll |\bar{A}| \quad (4.2)$$

Questa, a prima vista, può non sembrare un'ipotesi molto rigorosa, specialmente nel caso dei volumi degli spazi di espansione e compressione, la cui variazione appare tutt'altro che trascurabile di fronte al valor medio. Tuttavia, come vedremo in seguito, trattandosi di volumi di controllo aperti, osservare questa ipotesi non implica grosse perdite di accuratezza, almeno al livello di approssimazione cui tende il modello.

I valori medi delle grandezze (vedi paragrafi successivi) si riferiscono tutti ad una configurazione di equilibrio, della quale è bene precisare con chiarezza gli aspetti. Si fa riferimento ad un istante in cui:

- Il motore è stato riempito con una certa massa di gas  $m_{tot}$
- Gli scambiatori di calore hanno raggiunto le loro temperature operative
- I pistoni sono entrambi nel loro centro di oscillazione ( $x_D, x_P = 0$ )
- In virtù delle temperature delle varie parti del motore, e dell'assenza di moto, il gas si è ridistribuito nelle varie camere, tutto alla stessa pressione media.

In questo modo, per le grandezze termodinamiche, si considera soltanto la variazione temporale dovuta allo spostamento dei pistoni dalla loro posizione centrale. Osservando quanto detto nel 2.1.2 sul principio di funzionamento di un *FPSE*, assumere tale configurazione appare errato, in quanto è proprio il riscaldamento della camera calda ad avviare il moto dei pistoni.

Quando poi la temperatura della camera è arrivata al suo valore operativo, a causa del loro sfasamento, non esiste un istante in cui entrambi i pistoni si trovino nel loro centro di oscillazione. I motivi per cui si è scelto di non ovviare a questa apparente incongruenza sono due.

In primo luogo, volendo studiare non il transitorio di accensione, ma il funzionamento stazionario del motore in funzione delle grandezze di controllo, si sceglie di portare tutto alle condizioni operative, così da analizzare semplicemente l'interazione tra la dinamica dei pistoni e la termodinamica del gas, non influenzata dalla fase di avviamento. In secondo luogo, specialmente nei motori in cui i pistoni sono guidati da molle meccaniche, è sufficiente un piccolo spostamento dalla posizione di equilibrio, perché gli elementi mobili inizino ad oscillare fino ad alimentarsi con le variazioni di pressione che essi stessi provocano portandosi alle oscillazioni di regime con il giusto angolo di fase.

Per quanto riguarda la pressione media, va fatta un'ulteriore precisazione riguardo al trafileamento del gas tra lo spazio di lavoro e i volumi accessori (camera di rimbalzo e molla gassosa).

### ***4.3.3 Trafileamenti e pressione media***

Le perdite per trafileamento sono un aspetto molto importante in un motore Stirling, e sebbene in un motore Free-Piston, ermeticamente chiuso, non costituiscano un problema di prestazioni, hanno effetti tutt'altro che trascurabili.

Il trafileamento si verifica sia attraverso il pistone e il displacer, che non garantiscono elevata tenuta, sia in corrispondenza dell'asta del displacer. In un ciclo completo, se la stessa quantità di gas passasse da una parte e dall'altra, non si avrebbe un trafileamento complessivo del fluido di lavoro. Tuttavia, poiché la quantità di gas che trafile è proporzionale alla variazione della pressione nei vari volumi, questo spostamento non è simmetrico. In particolare, siccome le variazioni di pressione in camera di rimbalzo e nella molla gassosa sono molto minori di quelle che si verificano negli spazi di lavoro, ciclo dopo ciclo, si ha un costante aumento del gas presente in questi due volumi, a spese della quantità che concorre al ciclo termodinamico.

L'effetto principale di questo fenomeno è quindi, oltre a una moderata perdita di potenza, uno spostamento dei centri di oscillazione dei due elementi mobili, l'uno verso l'altro, con il rischio di portare a indesiderabili collisioni.

Per rimediare a questo effetto, si utilizzano dei dispositivi di centramento con i quali sia possibile registrare i punti medi di oscillazione dei pistoni. In genere l'esigenza di bassi costi di produzione fa cadere la scelta, per questi dispositivi, sulla realizzazione di piccoli *fori di*

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

*centramento*. Si tratta di piccoli dotti circolari che compensano la quantità di gas che trafila attraverso le tenute. Un'alternativa a questa soluzione è l'utilizzo di veri e propri sistemi di controllo, presenti sui modelli più recenti, che svolgono la stessa funzione.

Considerando il perfetto funzionamento di questi organi, è lecito assumere che la pressione media del gas, generatasi per effetto del completo riempimento del motore con una data quantità di fluido, sia non solamente la stessa per tutte le camere, ma rimanga costante nel tempo, durante il funzionamento del motore. Tale pressione sarà quindi pari alla componente media delle varie pressioni considerate nel modello, e il suo calcolo, a partire dalla massa totale di gas considerata, è dato dall'equazione di stato complessiva di tutto il fluido

$$\bar{p} = p = \frac{m_{tot} \mathfrak{R}}{\left( \frac{\bar{V}_e}{\bar{T}_e} + \frac{\bar{V}_c}{\bar{T}_c} + \frac{\bar{V}_H}{\bar{T}_H} + \frac{\bar{V}_R}{\bar{T}_R} + \frac{\bar{V}_K}{\bar{T}_K} + \frac{\bar{V}_B}{\bar{T}_B} + \frac{\bar{V}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \right)} \quad (4.3)$$

dove  $\mathfrak{R}$  è la costante molare del gas, e i  $\bar{V}_i$  e  $\bar{T}_i$  sono i valori medi rispettivamente di volume e temperatura dei vari spazi del motore, che verranno definiti in seguito.

#### 4.3.4 Temperature medie

Come detto, la configurazione di equilibrio cui fanno riferimento i valori medi delle grandezze considerate riguarda la situazione in cui i pistoni sono fermi, ma le varie zone del motore hanno già la loro temperatura operativa. Quindi le componenti medie delle temperature sono da considerarsi, al pari di quelle delle altre grandezze, dei dati e non delle incognite del problema in esame. A questo proposito, tramite alcune considerazioni semplificative, si possono determinare tutte le temperature medie.

Trascurando infatti le perdite per conduzione che si possono avere nell'attraversare le pareti esterne del motore, e in virtù dell'aver assunto scambiatori termici con efficienza unitaria, è possibile considerare la temperatura media degli scambiatori, e quindi del gas che si trova al loro interno, uguale a quella delle rispettive sorgenti termiche. Visti i loro volumi molto ridotti nella realtà (per confronto si veda la Fig. 2.25), si possono assegnare tali valori anche alle temperature medie di camera di espansione e di compressione.

Come visto nei paragrafi 2.4 e 2.5, nelle applicazioni che interessano questa tesi spesso il radiatore che ha il compito di dissipare il calore in eccesso è la struttura stessa dell'unità di generazione di potenza. Dunque risulta verosimile assumere che tutto il motore si troverebbe alla temperatura della sorgente fredda, se non ci fosse il modulo GPHS a riscaldarne l'*heater*

*head*. Quindi non è azzardato prendere come temperatura media della camera di rimbalzo quella dello scambiatore freddo, e cioè quella della camera di compressione.

Un discorso a parte va fatto per la molla gassosa, e per il rigeneratore, che vedono in sostanza lo stesso ambiente termico. Per la determinazione di tale temperatura sono stati proposti molti sistemi, che riguardano vari modi di assumere un valore medio tra quelle di sorgente calda e sorgente fredda. Come vedremo in seguito, tale temperatura in questo modello viene determinata semplicemente dall'analisi termo-fluidodinamica del rigeneratore, dove viene considerato anche il flusso termico conduttivo che attraversa la sua matrice metallica.

Riassumendo, i valori delle temperature medie presi in esame per il modello sono:

$$\begin{aligned}\bar{T}_e &= \bar{T}_H = T_{H_S} \\ \bar{T}_c &= \bar{T}_B = \bar{T}_K = T_{K_S} \\ \bar{T}_{gs} &= \bar{T}_R\end{aligned}\tag{4.4}$$

#### 4.3.5 Volumi medi degli spazi variabili

Durante il funzionamento del motore solo i volumi di alcuni dei componenti sopra discussi subiscono una variazione. I volumi degli scambiatori e del rigeneratore, infatti, sono fissi, e costituiscono quindi il cosiddetto *volume morto* del motore. Ovviamente la variazione dei rimanenti volumi è influenzata esclusivamente dal movimento dei pistoni, dunque il loro valor medio, riferibile alla posizione dei pistoni data da  $x_p = x_D = 0$ , è semplicemente determinabile a partire dalle grandezze definite in Fig. 4.2.

$$\begin{aligned}\bar{V}_e &= AL_e + A_D L_{D_S} \\ \bar{V}_c &= AL_c + A_D L_{D_S} + A_P L_{P_S} \\ \bar{V}_{gs} &= A_D L_D \\ \bar{V}_B &= A_B L_B - A_P L_{P_S}\end{aligned}\tag{4.5}$$

avendo trascurato sia lo spessore delle pareti del displacer che la lunghezza di pistone di potenza, che a seconda di come si sceglie di costruirlo, può variare di molto. Nell'espressione del volume della camere di rimbalzo, poi, non è stato considerato il volume che verrà occupato dal dispositivo di carico, in quanto si vuole prescindere dal tipo di carico applicato. Inoltre lo spazio occupato dall'eventuale carico, in ogni caso, non influisce in modo pesante sul volume totale della camera.

## 4.4 Modellizzazione delle camere del motore

Di seguito si riporta l'analisi rigorosa dei vari componenti del motore, tenendo conto delle ipotesi semplificative fatte e delle considerazioni descritte fin qui. Quest'analisi riguarda gli spazi di lavoro, il canale di rigenerazione e i volumi di rimbalzo.

### 4.4.1 Camera di compressione e di espansione

Per quanto detto nel paragrafo 4.3.1, all'interno delle camere di espansione e di compressione, così come per la molla gassosa e per la camera di rimbalzo, si considerano distribuzioni uniformi di pressione, temperatura e densità, trascurando il campo di velocità del fluido, tranne che per quanto riguarda il flusso di gas che passa attraverso il canale di rigenerazione. Questo si traduce nell'imporre, per ogni camera, che

$$\nabla p = \nabla \rho = \nabla T = 0 \quad (4.6)$$

Per affrontare la seguente analisi risulta utile l'uso di una particolare grandezza, definibile come *densità di flusso di massa* nel canale di rigenerazione, e indicata con la lettera  $G$ . L'uso di questa grandezza, avendo come espressione

$$\underline{G} = \frac{\dot{m}}{A} = \rho \underline{u} \quad (4.7)$$

permette di rinunciare a conoscere la variazione effettiva di densità ( $\rho$ ) e velocità ( $\underline{u}$ ) del flusso attraverso il canale, e quindi della quantità di gas alternativamente entrante o uscente dalle camere.

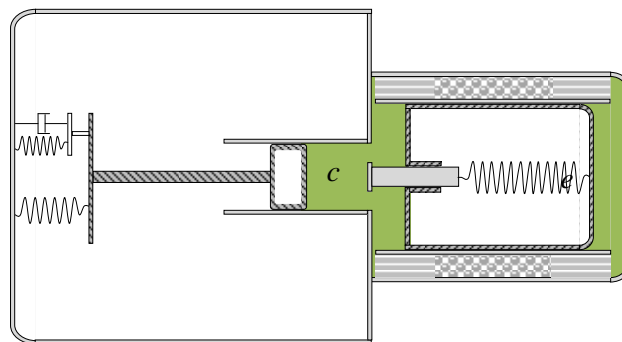


Fig. 4.3 - Camera di espansione (e) e camera di compressione (c)

A questo punto, tenendo conto dell'equazione di stato dei gas ideali, presa nella forma

$$p = \rho \mathfrak{R}T \quad (4.8)$$

si possono applicare i bilanci di massa e energia in forma integrale alle due camere, che si esprimono tramite le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint_S \rho (\underline{u} - \underline{u}') \cdot d\underline{S} = 0 \quad (\text{massa}) \quad (4.9)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c_v T dV + \oint_S \rho c_v T (\underline{u} - \underline{u}') \cdot d\underline{S} = - \oint_S p \underline{u} \cdot d\underline{S} \quad (\text{energia}) \quad (4.10)$$

L'applicazione di questi bilanci porta a scrivere due equazioni per la camera di espansione,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{p_e V_e}{\mathfrak{R} T_e} \right) &= G_{eH} \sigma A \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{p_e V_e c_v}{\mathfrak{R} T_e} T_e \right) &= -G_{eH} \sigma A c_v T_e - p_e \frac{dV_e}{dt} \end{aligned} \quad (4.11)$$

E due per la camera di compressione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{p_c V_c}{\mathfrak{R} T_c} \right) &= G_{cK} \sigma A \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{p_c V_c c_v}{\mathfrak{R} T_c} T_c \right) &= G_{cK} \sigma A c_v T_c - p_c \frac{dV_c}{dt} \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove è già stata sostituita l'equazione di stato per entrambe le camere. Ovviamente  $G_{eH}$  e  $G_{cK}$  rappresentano rispettivamente la densità di portata che attraversa la frontiera fra scambiatore caldo e camera di espansione e quella fra scambiatore freddo e camera di compressione. Per esse si assume valore positivo quando la direzione del flusso va dall'ambiente caldo a quello freddo. La grandezza  $\sigma$ , che compare nelle equazioni e verrà descritta in dettaglio in seguito, esprime semplicemente la frazione di sezione libera di attraversamento degli scambiatori, che si suppone abbiano entrambi lo stesso numero di dotti, dello stesso diametro, quindi

$$\sigma = \frac{A_{vuoto}}{A_{tot}} \quad (4.13)$$

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

Svolgendo le equazioni dei sistemi (4.11) e (4.12), e sostituendo in ognuno di essi la seconda equazione nella prima, si ottiene il seguente gruppo di relazioni, che riassume l'analisi delle camere di lavoro.

$$V_e \frac{dp_e}{dt} + \gamma p_e \frac{dV_e}{dt} + G_{eH} \sigma A \Re T_e = 0 \quad (4.14)$$

$$p_e \frac{dV_e}{dt} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_e V_e}{T_e} \frac{dT_e}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

$$V_c \frac{dp_c}{dt} + \gamma p_c \frac{dV_c}{dt} - G_{cK} \sigma A \Re T_c = 0 \quad (4.16)$$

$$p_c \frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_c V_c}{T_c} \frac{dT_c}{dt} = 0 \quad (4.17)$$

Per ottenere un sistema di analisi lineare, è adesso necessario procedere alla linearizzazione delle equazioni, che come detto viene affrontata sotto l'ipotesi già discussa nel par. 4.3.2. Per ogni volume, pressione e temperatura, così come per la variabile  $G$ , si assumono espressioni del tipo

$$V_e(t) = \bar{V}_e + \tilde{V}_e(t), \quad p_e(t) = \bar{p}_e + \tilde{p}_e(t), \quad G_{eH}(t) = \tilde{G}_{eH}(t), \dots \quad (4.18)$$

Dove si è tenuto conto che le variazioni di  $G$  avvengono attorno ad un valor medio nullo, avendo tale grandezza un valore negativo per una metà del ciclo, e positivo per l'altra metà. Assumendo dunque che sia vera la (4.2), le equazioni da (4.14) a (4.17), diventano

$$\gamma \bar{p}_e \frac{d\tilde{V}_e}{dt} + \bar{V}_e \frac{d\tilde{p}_e}{dt} + \tilde{G}_{eH} \sigma A \Re \bar{T}_e = 0 \quad (4.19)$$

$$\bar{p}_e \frac{d\tilde{V}_e}{dt} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_e \bar{V}_e}{\bar{T}_e} \frac{d\tilde{T}_e}{dt} = 0 \quad (4.20)$$

$$\gamma \bar{p}_c \frac{d\tilde{V}_c}{dt} + \bar{V}_c \frac{d\tilde{p}_c}{dt} - \tilde{G}_{cK} \sigma A \Re \bar{T}_c = 0 \quad (4.21)$$

$$\bar{p}_c \frac{d\tilde{V}_c}{dt} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_c \bar{V}_c}{\bar{T}_c} \frac{d\tilde{T}_c}{dt} = 0 \quad (4.22)$$



che rappresentano la forma definitiva delle equazioni per le camere di lavoro. Le espressioni delle componenti variabili dei volumi, verranno poi ricondotte al movimento dei pistoni, (vedi 4.6.2)

#### 4.4.2 Volume di rimbalzo e molla gassosa

Nell'architettura scelta, a differenza dello schema presentato per esempio in Fig. 2.3, il displacer e il pistone di potenza hanno molle gassose separate. Questi volumi possono essere considerati sostanzialmente chiusi, a meno dei trafilementi, che però non vengono presi in esame per quanto detto nel paragrafo 4.3.3.

Con riferimento alla Fig. 4.4, l'applicazione dell'equazione di stato (4.8), e dei bilanci (4.9) e (4.10), porta a scrivere due equazioni per ogni volume, simili a quelle delle camere di lavoro, che sono

$$\begin{aligned} \gamma \frac{p_{gs}}{T_{gs}} \frac{dV_{gs}}{dt} + \frac{V_{gs}}{T_{gs}} \frac{dp_{gs}}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_{gs} V_{gs}}{T_{gs}} \frac{dT_{gs}}{dt} + p_{gs} \frac{dV_{gs}}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma \frac{p_B}{T_B} \frac{dV_B}{dt} + \frac{V_B}{T_B} \frac{dp_B}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_B V_B}{T_B} \frac{dT_B}{dt} + p_B \frac{dV_B}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

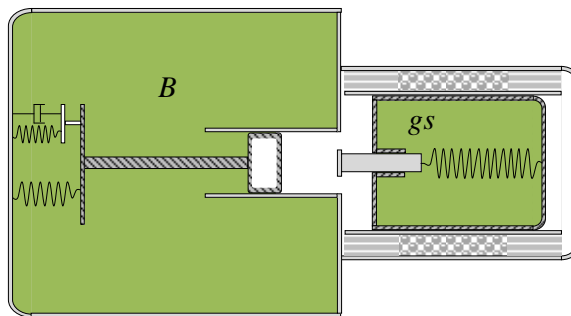


Fig. 4.4 - Camera di rimbalzo (B) e molla gassosa (gs)

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

Facendo ancora uso delle ipotesi (4.1) e (4.2), si ottengono quindi le quattro equazioni che rappresentano l'analisi completa della molla gassosa e della camera di rimbalzo.

$$\gamma \frac{\bar{p}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{V}_{gs}}{dt} + \frac{\bar{V}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{p}_{gs}}{dt} = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_{gs} \bar{V}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{T}_{gs}}{dt} + \bar{p}_{gs} \frac{d\tilde{V}_{gs}}{dt} = 0 \quad (4.26)$$

$$\gamma \frac{\bar{p}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{V}_B}{dt} + \frac{\bar{V}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{p}_B}{dt} = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_B \bar{V}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{T}_B}{dt} + \bar{p}_B \frac{d\tilde{V}_B}{dt} = 0 \quad (4.28)$$

anch'esse da integrare con le espressioni per la variazione dei volumi, del paragrafo 4.6.2.

### 4.5 Modellizzazione del canale di rigenerazione

Nello schema scelto per rappresentare il canale di rigenerazione, la forma e la costituzione di scambiatori e rigeneratore sono piuttosto particolareggiate, in ragione del fatto che nei modelli più recenti di convertitori Free-Piston (par 2.4 e 2.5) vengono utilizzate per questi componenti architetture molto simili.

Per il presente modello, quindi, sempre con un occhio di riguardo alla letteratura contemporanea, si è scelto di immaginare gli scambiatori come una serie di dotti cilindrici paralleli, di uguale diametro. Come ulteriore semplificazione, senza timore di perdere in accuratezza, si considera anche l'ipotesi che entrambi gli scambiatori abbiano dotti in ugual numero e dimensioni. Il rigeneratore è invece pensato come una matrice metallica porosa, per la cui analisi ci si fonda sulla trattazione di Kaviany [25], che sarà descritta in seguito.

Per l'analisi di questi tre componenti si assegna ad ogni tratto (riscaldatore, refrigeratore e rigeneratore) un'ascissa  $x$  considerata positiva andando dallo spazio caldo a quello freddo, applicando stavolta, oltre ai bilanci di massa ed energia, anche quello di quantità di moto, dovendo determinare anche la velocità del flusso, almeno tramite la densità di flusso di massa  $G$ .

### 4.5.1 Riscaldatore

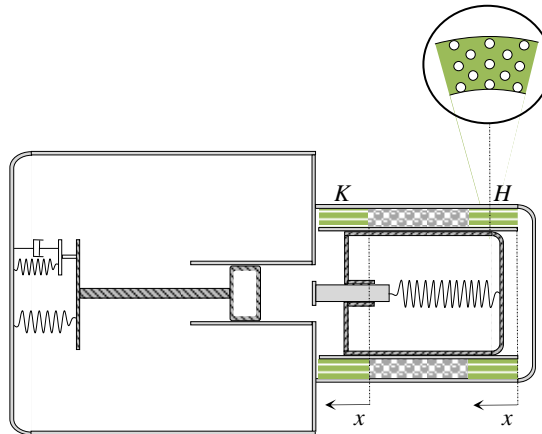


Fig. 4.5 – Riscaldatore (H) e refrigeratore (K)

Per quanto detto nei paragrafi precedenti, si considera che all'interno degli scambiatori la temperatura del gas sia la stessa di quella del metallo che li costituisce. Questo significa assumere che tale temperatura è uguale a quella della corrispondente sorgente termica, avendo trascurato le perdite per conduzione termica dovute all'attraversamento delle pareti esterne del motore.

Per l'applicazione dei bilanci si considera un volume infinitesimo tra  $x$  e  $x+dx$ , in questo modo il *bilancio di massa* fornisce

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_H \sigma A dx) + \frac{\partial}{\partial x}(G_H \sigma A) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho_H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(G_H) = 0 \quad (4.29)$$

Riferendosi sempre alle ipotesi (4.1) e (4.2), è possibile considerare che

$$\rho_H(t) = \bar{\rho}_H + \tilde{\rho}_H(t) \quad (4.30)$$

$$\tilde{G}_H(t) = \rho_H u_H \cong \bar{\rho}_H \tilde{u}_H \quad (4.31)$$

dunque l'equazione (4.29) diventa

$$\frac{d\tilde{\rho}_H}{dt} + \frac{\partial \tilde{G}_H}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

A questo punto è possibile fare una considerazione logica sullo stato del gas all'interno dello scambiatore. Si può infatti supporre che siano trascurabili le variazioni della massa di gas che mediamente si trova nel riscaldatore, giungendo quindi a scrivere che

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

$$\frac{\partial \rho_H}{\partial t} \cong 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{G}_H}{\partial x} \cong 0 \Rightarrow \tilde{G}_H \cong \text{uniforme} \quad (4.33)$$

Quindi la densità di flusso di massa all'interno del tratto del riscaldatore ha gradiente nullo.

Per quanto riguarda il *bilancio di quantità di moto*, è possibile integrare il bilancio su tutto il gas all'interno dello scambiatore. Trascurando i termini non stazionari, e considerando quanto appena detto, si ottiene l'espressione

$$\frac{p_e - p_{HR}}{\bar{\rho}_H} \cong \pm k_{t_H} \frac{u_H^2}{2} \quad (4.34)$$

dove  $p_{HR}$  la pressione all'interfaccia tra il riscaldatore e il rigeneratore, mentre  $u_H$  è la velocità del gas dentro lo scambiatore. Il parametro  $k_{t_H}$  è il *coefficiente di perdita*, la cui determinazione è il risultato del contributo di più fattori. Durante l'attraversamento dello scambiatore, infatti, il flusso subisce perdite di carico concentrate all'imbocco dei dotti e allo sbocco nel rigeneratore, e perdite di carico distribuite nella lunghezza dei dotti per effetto dell'attrito, quindi  $k_{t_H}$  si può esprimere come

$$k_{t_H} = k_{in} + k_{att} + k_{out} \quad (4.35)$$

Dall'analisi di flussi in condotti (vedi per esempio [26]), si possono considerare in prima approssimazione, dei valori piuttosto plausibili dei vari termini della (4.35). Con riferimento alla Fig. 4.6, infatti, e considerando i rapporti fra le aree in gioco, è ragionevole assumere

$$k_{in} \cong 0.5 \quad , \quad k_{out} \cong 1 \quad (4.36)$$

Per quanto riguarda invece il coefficiente di perdita dovuto all'attrito, la sua espressione

$$k_{att} = f_{att} \frac{L_H}{\phi_{duct}} \quad (4.37)$$

dove  $\phi_{duct}$  è il diametro di un singolo dotto, e il *fattore di attrito*  $f_{att}$  è ricavabile da diagrammi sperimentali (Fig. 4.7), come funzione del *Numero di Reynolds locale*  $Re_\phi$ , cioè

$$Re_\phi = \frac{u \phi_{duct}}{\nu} = \frac{|\tilde{G}| \phi_{duct}}{\mu} \quad (4.38)$$

dove  $\nu$  e  $\mu$  sono le *viscosità cinematica* e *dinamica* (medie) del fluido.

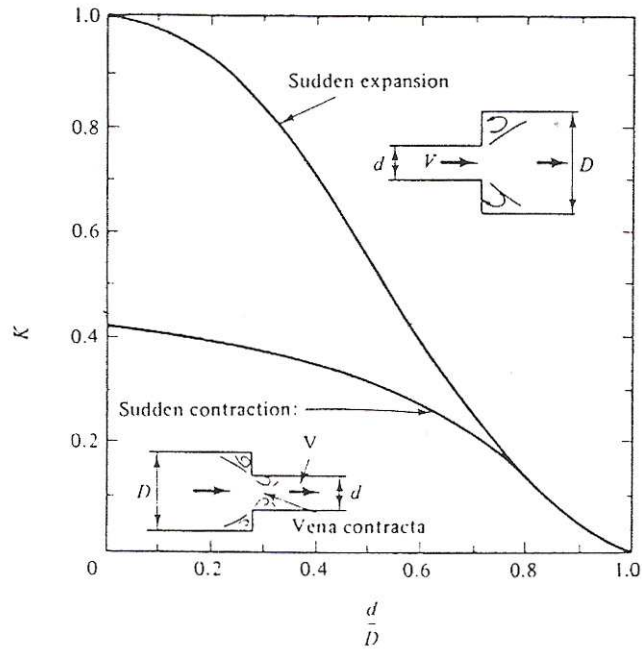


Fig. 4.6 - Coefficienti di perdita per espansioni o compressioni improvvise del flusso in condotti cilindrici,[26]

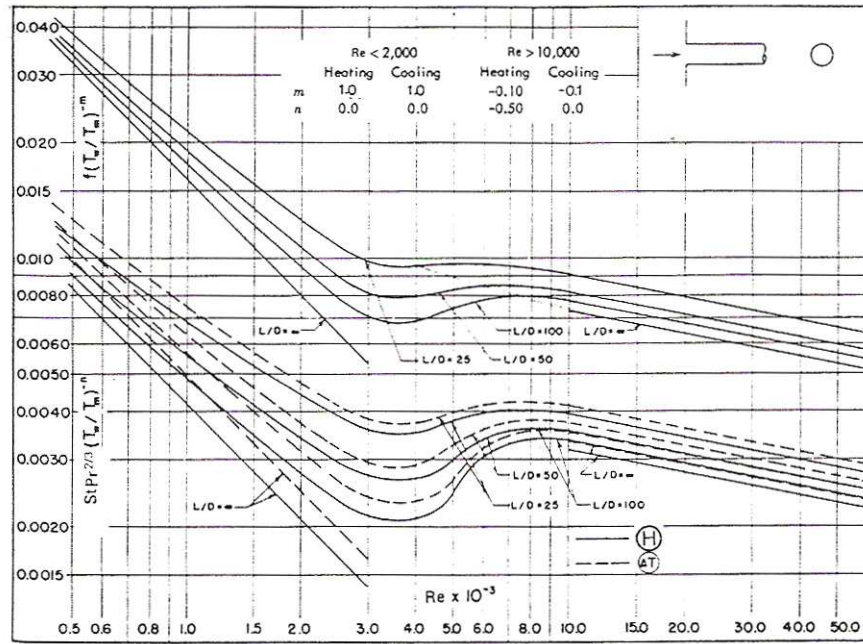


Fig. 4.7 - Dati sperimentali per l'andamento del foattore di attrito  $f$  in funzione del numero di Reynolds, per flussi in tubi circolari, [24]

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

In particolare, come si vede dalla Fig. 4.7, l'andamento del fattore di attrito in funzione del numero di Reynolds può essere diviso in tre *zone* (l'analisi seguente è presa da [24]) :

— Un *regime laminare* con  $Re_\phi < 2000$ , nel quale le curve sono apprestate dall'equazione

$$f_{att} = \frac{64}{Re_\phi} \quad (4.39)$$

— Un *regime turbolento* per  $Re_\phi > 6000$ , dove vale

$$f_{att} = \frac{0.079}{Re_\phi^{0.25}} \quad (4.40)$$

— Una *zona di transizione*, per  $2000 < Re_\phi < 6000$ , dove per dotti circolari si ritiene valida

$$f_{att} = 7.343 \times 10^{-4} Re_\phi^{0.3142} \quad (4.41)$$

Riassumendo, dunque, il *coefficiente di perdita* complessivo dovuto all'attraversamento del riscaldatore è esprimibile con

$$k_{t_H} = 0.5 + f_{att} \frac{L_H}{\phi_{duct}} + 1 \quad (4.42)$$

Riprendendo l'equazione (4.34), e facendo uso nuovamente della (4.1), si possono scrivere le due equazioni

$$\frac{\bar{p}_e - \bar{p}_{HR}}{\bar{\rho}_H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_{HR} = \bar{p}_e = \bar{p} \quad (4.43)$$

$$\frac{\tilde{p}_e - \tilde{p}_{HR}}{\bar{\rho}_H} = \pm k_{t_H} \frac{\tilde{u}_H^2}{2} \quad (4.44)$$

Dalla seconda equazione si vede che le perdite di pressione aerodinamiche dipendono dal quadrato della velocità, quindi da quadrato di  $\tilde{G}_H$ . Questo però, oltre a implicare una non-linearità (di cui ci occuperemo in seguito), risulta errato, avendo preventivamente assegnato un verso positivo alla portata.

Infatti, per essere realistica, la perdita di pressione scritta in (4.34), così come vale per gli altri tratti, deve essere concorde in segno con  $u_H$ , e quindi con  $G_H$ , le quali passano alternativamente da valori positivi a negativi, per effetto del moto del displacer.

Per ovviare a questa incongruenza, si può scegliere di scrivere la (4.44) nella forma

$$\tilde{p}_e - \tilde{p}_{HR} = \pm k_t \frac{\tilde{G}_H^2}{2\bar{\rho}_H} \cong k_{t_h} \frac{\bar{G}_H}{2\bar{\rho}_H} \tilde{G}_H \quad (4.45)$$

Dove  $\bar{G}_H$  non è il valore medio attorno al quale varia la densità di flusso, che come detto è zero, bensì il valore che assume  $G_H$  mediamente in un semiperiodo, durante il quale mantiene lo stesso segno. Per meglio comprendere quanto appena illustrato, si consideri che, per effetto del moto del displacer, il valore di  $G_H$  abbia l'andamento pressoché sinusoidale illustrato in Fig.

4.8. Per calcolare un'espressione valida di  $\bar{G}_H$  si può imporre che

$$\int_0^{T/2} \tilde{G}_H^2 dt = \int_0^{T/2} \hat{G}^2 \sin^2(\omega t) dt = |\tilde{G}_H| \int_0^{T/2} \hat{G} \sin(\omega t) dt \quad (4.46)$$

dalla quale si arriva a

$$|\tilde{G}_H| = \frac{\pi}{4} \hat{G}_H \quad (4.47)$$

che permette di riscrivere la (4.45) nella forma

$$\tilde{p}_e - \tilde{p}_{HR} = \frac{\pi k_{t_h}}{8\bar{\rho}_H} |\tilde{G}_H| \tilde{G}_H \quad (4.48)$$

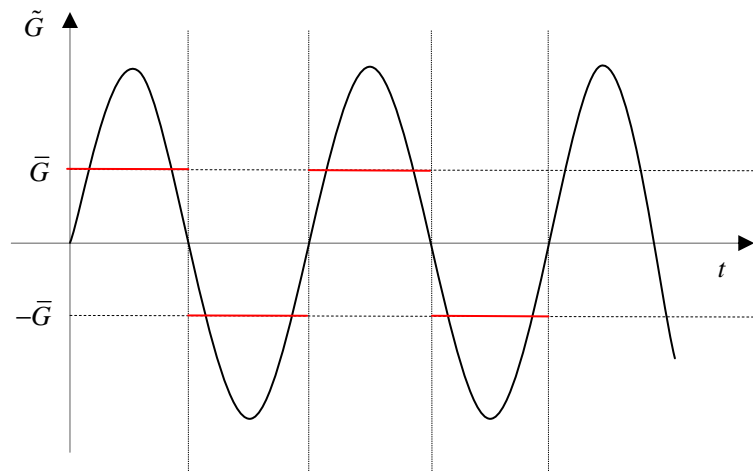


Fig. 4.8 - Andamento ipotetico di  $G$  durante il funzionamento del motore

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

La densità media  $\bar{\rho}_H$  è ricavabile, per quanto detto, dall'equazione di stato, ottenendo

$$\bar{\rho}_H = \frac{\bar{p}_H}{\Re T_H} = \frac{\bar{p}}{\Re T_{H_s}} \quad (4.49)$$

Al posto del bilancio di energia, risulta più opportuno considerare un *bilancio di entalpia*, che considerando di nuovo un volume infinitesimo tra  $x$  e  $x+dx$ , risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_H c_p T_H \sigma A dx) + \frac{\partial}{\partial x} (G_H c_p T_H \sigma A) dx = h_H (T_{H_s} - T_H) n \pi \phi_{duct} dx \quad (4.50)$$

dove  $h_H$  è il *coefficiente di scambio termico convettivo* del riscaldatore. Attraverso l'uso del bilancio di massa espresso dall'equazione (4.32), la precedente può essere riscritta nella forma

$$T_H \left( \frac{\partial \rho_H}{\partial t} + \frac{\partial G_H}{\partial x} \right) + \rho_H \frac{\partial T_H}{\partial t} + G_H \frac{\partial T_H}{\partial x} = (T_{H_s} - T_H) \frac{n \pi h_H \phi_{duct}}{c_p \sigma A} \quad (4.51)$$

A questo punto, ai fini della trattazione che questa tesi si propone, risulta utile procedere con un'analisi *adimensionale*. Con questo intento si procede ad adimensionalizzare le variabili, tramite delle rispettive grandezze di riferimento (indicate col pedice 0), relative ad una situazione definita (che può essere per esempio quella con i pistoni fermi). Si ottengono dunque delle *variabili caratteristiche adimensionali*, definite come

$$\rho_H^* = \frac{\rho_H}{\rho_0}; T_H^* = \frac{T_H}{T_0}; t^* = \frac{t}{t_0}; u_H^* = \frac{u_H}{u_0} \quad e \quad x_H^* = \frac{x}{L_H} \quad (4.52)$$

che, sostituite nell'equazione (4.51), danno

$$\frac{\rho_0 T_0}{t_0} \rho_H^* \frac{\partial T_H^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0 T_0}{L_H} \rho_H^* u_H^* \frac{\partial T_H^*}{\partial x^*} = \frac{T_0}{L_H} (T_{H_s}^* - T_H^*) \frac{\pi n h_H \phi_{duct}^*}{c_p \sigma A^*} \quad (4.53)$$

Introducendo il *numero di Strohual*,  $St$ , che è definibile come

$$St = \frac{L}{ut} = \frac{L_H}{u_0 t_0} \quad (4.54)$$

si ottiene

$$St \rho_H^* \frac{\partial T_H^*}{\partial t^*} + \rho_H^* u_H^* \frac{\partial T_H^*}{\partial x^*} = \frac{h_H}{\rho_0 u_0 c_p} (T_{H_s}^* - T_H^*) \frac{\pi n \phi_{duct}^*}{\sigma A^*} \quad (4.55)$$



A proposito dell'ultima equazione, è possibile fare un paio di ipotesi semplificative, perfettamente plausibili nel caso di scambiatori termici ben dimensionati, che sono

$$St \ll 1 \quad (4.56)$$

$$\frac{h_H}{\rho_0 u_0 c_p} \ll 1 \quad (4.57)$$

ottenendo quindi semplicemente

$$\frac{\partial T_H}{\partial x} \cong 0 \quad \rightarrow \quad T_H = T_e \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \bar{T}_H = \bar{T}_e = \bar{T}_R(0) \\ \tilde{T}_H = \tilde{T}_e \end{cases} \quad (4.58)$$

Che fornisce il campo di temperatura nel riscaldatore, con  $\bar{T}_R(0)$  la temperatura all'interfaccia tra quest'ultimo e il rigeneratore.

Si noti che quanto appena ottenuto è perfettamente compatibile con l'osservazione pratica. La funzione del riscaldatore, come accennato nel paragrafo 1.4, è infatti quella di "aggiustare" la temperatura del gas, riportandola al valore indicato dal ciclo ideale, ed è pertanto assolutamente logico che esso sia creato in modo da essere in grado di mantenere un profilo di temperatura uniforme lungo il tratto del canale che lo interessa.

#### 4.5.2 Refrigeratore

L'analisi del refrigeratore è del tutto simile a quella appena descritta, relativa al riscaldatore, con risultati ovviamente analoghi. Si definiscono quindi la *densità media*  $\bar{\rho}_K$  e la *densità di flusso di massa*  $G_K$  come

$$\bar{\rho}_K = \frac{\bar{p}}{\Re T_{K_s}} \quad (4.59)$$

$$\tilde{G}_K = \rho_K u_K \cong \bar{\rho}_K \tilde{u}_K \quad (4.60)$$

Con l'applicazione dei bilanci di massa, quantità di moto ed entalpia, che per brevità vengono omessi, si raggiungono quindi i risultati descritti in breve di seguito.

Trascurando le variazioni di quantità di gas mediamente presente nello scambiatore si ottiene

$$\frac{d\tilde{\rho}_K}{dt} + \frac{\partial \tilde{G}_K}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}_K \cong \text{uniforme} \quad (4.61)$$

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

Dal bilancio di quantità di moto, trascurando i termini non stazionari, si arriva a

$$\frac{\bar{p}_{RK} - \bar{p}_c}{\bar{\rho}_K} = 0 \Rightarrow \bar{p}_{RK} = \bar{p}_c = \bar{p} \quad (4.62)$$

$$\frac{\tilde{p}_{RK} - \tilde{p}_c}{\bar{\rho}_K} = \pm k_{t_k} \frac{\tilde{u}_K^2}{2} \quad (4.63)$$

dove, sotto le stesse ipotesi discussa nel paragrafo precedente, si considera

$$k_{t_k} = 0.5 + f \frac{L_K}{\phi_{duct}} + 1 \quad (4.64)$$

e grazie alle considerazioni espresse dall'equazione (4.46), si ottiene

$$\tilde{p}_{RK} - \tilde{p}_c = \frac{\pi k_{t_k}}{8 \bar{\rho}_K} |\tilde{G}_K| \tilde{G}_K \quad (4.65)$$

Infine, dall'applicazione del bilancio di entalpia, eseguendo gli stessi passaggi fatti per il riscaldatore, tramite la stessa analisi dimensionale, si determina il profilo di temperatura del gas attraverso il refrigeratore

$$\frac{\partial T_K}{\partial x} \cong 0 \rightarrow T_K = T_c \rightarrow \begin{cases} \bar{T}_K = \bar{T}_c = \bar{T}_R(L_R) \\ \tilde{T}_K = \tilde{T}_c \end{cases} \quad (4.66)$$

dove  $\bar{T}_R(t)$  è la temperatura media all'interfaccia tra il rigeneratore e il refrigeratore.

#### 4.5.3 Rigeneratore

Il rigeneratore è senza dubbio l'oggetto più complicato, almeno dal punto di vista dell'analisi matematica e fisica, di tutto il motore. Sebbene sia un componente piuttosto semplice da realizzare (il più delle volte si tratta di una semplice matrice metallica saldata, in genere in acciaio inossidabile), la sua descrizione dal punto di vista termodinamico e fluidodinamico risulta molto complessa.

Per questo motivo i vari modelli di analisi lineare che negli anni sono stati elaborati per descrivere il funzionamento dei FPSE, hanno spesso difettato di un'approfondita trattazione di questo elemento. Il presente modello, per quanto si collochi in una fase piuttosto preliminare, cerca di dare una visione più accurata dell'effetto che il rigeneratore ha sul gas di lavoro, e quindi sul comportamento del motore, soprattutto dal punto di vista delle perdite di pressione.

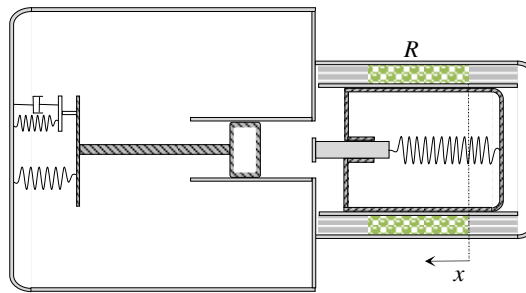


Fig. 4.9 - Rigeneratore poroso (R)

Con questo intento si considera la matrice solida del rigeneratore come un mezzo poroso, calcolando il gradiente di pressione secondo l'analisi, proposta da Kaviany [25], del flusso monodimensionale attraverso materiali di questo tipo.

Per il mezzo poroso in questione, si considera uniforme la sua *porosità*  $\mathcal{E}$ , definita come

$$\mathcal{E} = \frac{V_{vuoto}}{V_{totale}} \quad (4.67)$$

Il *bilancio di massa*, sempre considerando un volume infinitesimo tra  $x$  e  $x+dx$  (dove  $x$  stavolta è l'ascissa definita in Fig. 4.9), porta a scrivere

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_R \mathcal{E} A dx) + \frac{\partial}{\partial x}(G_R \mathcal{E} A) dx = 0 \quad (4.68)$$

Operando le ormai note sostituzioni, espresse dalla (4.1), è possibile pervenire alla forma

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_R}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{G}_R}{\partial x} = 0 \quad (4.69)$$

Nei casi, quali quello in esame, in cui si consideri un'efficienza di rigenerazione unitaria, è possibile tramite una differenziazione logaritmica dell'equazione di stato, e l'ipotesi (4.2), assumere che

$$\rho_R = \frac{p_R}{\mathcal{R}T_R} \Rightarrow \frac{\tilde{\rho}_R}{\rho_R} = \frac{\tilde{p}_R}{\bar{p}_R} - \frac{\tilde{T}_R}{\bar{T}_R} \Rightarrow \tilde{\rho}_R \cong 0 \quad (4.70)$$

Il che porta, come nel caso degli scambiatori di calore, a un gradiente nullo della densità di flusso di massa  $G_R$ , cioè

$$\frac{\partial \tilde{G}_R}{\partial x} = 0 \quad (4.71)$$

Il bilancio di quantità di moto, sullo stesso volume infinitesimo, si esprime come

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_R u_R \varepsilon A dx) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_R u_R^2 \varepsilon A) dx = -A \varepsilon \frac{dp_R}{dx} - A \varepsilon \frac{dp_{R_L}}{dx} \quad (4.72)$$

Dove il secondo termine a secondo membro rappresenta il gradiente di pressione attraverso un mezzo poroso. Tale gradiente ([25]), se si considera per esempio un letto di sfere, ha un'espressione del tipo

$$-\frac{dp_{R_L}}{dx} = \frac{\mu}{K} u_D + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\rho_R}{d_p} u_D^2 \quad (4.73)$$

Dove compaiono le seguenti grandezze, caratteristiche del particolare mezzo:

- $K = \frac{\varepsilon^3}{180(1-\varepsilon)^2} d^2 =$  permeabilità del mezzo poroso, secondo Carman-Kozeny [25]
- $d_p =$  diametro medio delle sfere, che in genere è dell'ordine dei  $10^{-4}$  m
- $u_D = \varepsilon u_p = \frac{\dot{m}}{\rho A} =$  filter velocity, mediata su tutto il volumetto elementare

L'equazione (4.72) può essere adimensionalizzata, tramite la definizione di una serie di variabili adimensionali, simili a quelle già viste nel paragrafo 4.5.1 per il riscaldatore, cioè

$$\rho_R^* = \frac{\rho_R}{\rho_{R_0}}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad u_R^* = \frac{u_R}{u_{R_0}}, \quad p_R^* = \frac{p_R}{p_{R_0}} \quad e \quad x_R^* = \frac{x}{L_R} \quad (4.74)$$

Con le quali si ottiene il *bilancio di quantità di moto adimensionale*

$$\frac{\rho_{R_0} u_{R_0}}{t_0} \rho_R^* \frac{\partial u_R^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_{R_0} u_{R_0}^2}{L_R} \rho_R^* u_R^* \frac{\partial u_R^*}{\partial x_R^*} = -\frac{p_{R_0}}{L_R} \left( \frac{dp_R^*}{dx_R^*} + \frac{1}{p_{R_0}} \frac{dp_{R_L}}{dx_R^*} \right) \quad (4.75)$$

Il quale può essere ulteriormente semplificato inserendo le espressioni del *numero di Mach locale* e del già visto *numero di Strouhal*, cioè

$$M_{R_0}^2 = \frac{u_{R_0}^2 \rho_{R_0}}{\gamma p_{R_0}} \quad (4.76)$$

$$\text{St} = \frac{L_R}{u_{R_0} t_0} \quad (4.77)$$

ottenendo la forma

$$\gamma_{R_0} M_{R_0}^2 \left( \text{St} \rho_R^* \frac{\partial u_R^*}{\partial t^*} + \rho_R^* u_R^* \frac{\partial u_R^*}{\partial x_R^*} \right) = - \left( \frac{dp_R^*}{dx_R^*} + \frac{1}{p_{R_0}} \frac{dp_{R_L}}{dx_R^*} \right) \quad (4.78)$$

A questo punto ci si affida al fatto che in rigeneratori con perdite di pressione non elevate, è dimostrato valido assumere

$$M_{R_0} \ll 1 \quad \text{e} \quad \text{St} \ll \frac{1}{M_{R_0}^2} \quad (4.79)$$

e si perviene alla

$$-\frac{dp_R}{dx} = -\frac{dp_{R_L}}{dx} = 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\mu u_R}{d_p^2} + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\rho_R u_R^2}{d_p} \quad (4.80)$$

Che si può scrivere anche, utilizzando la variabile  $G_R = \rho_R u_R$ , come

$$-\frac{dp_R}{dx} = 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\mu}{d_p^2} G_R + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\rho_R}{d_p} G_R^2 \quad (4.81)$$

Separando poi la parte stazionaria dell'equazione da quella non stazionaria, si ottiene

$$-\frac{d\bar{p}_R}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_R = \bar{p}_{HR} = \bar{p} \quad (4.82)$$

$$-\frac{d\tilde{p}_R}{dx} = 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\mu}{d_p^2 \rho_R} \tilde{G}_R + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\rho_R}{d_p} \tilde{G}_R^2 \quad (4.83)$$

Per quanto riguarda l'ultimo termine, va fatta la stessa considerazione valida per gli scambiatori di calore, in modo che il gradiente di pressione abbia sempre lo stesso segno relativo, rispetto alla direzione di flusso del gas. Ricordando dunque la (4.46), si ottiene, come negli altri casi

$$|\tilde{G}_R| = \frac{\pi}{4} \tilde{G}_R \quad (4.84)$$

che porta all'espressione definitiva del gradiente di pressione dato dal rigeneratore

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

$$-\frac{d\tilde{p}_R}{dx} = 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\bar{\mu}_R}{\bar{\rho}_R d_p^2} \tilde{G}_R + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\pi}{4} \frac{|\tilde{G}_R|}{\bar{\rho}_R d_p} \tilde{G}_R \quad (4.85)$$

dove per semplicità si considerano una *densità media* e una *viscosità dinamica media*, calcolate in base ad una temperatura mediata fra quelle estreme del rigeneratore, anziché in base alla temperatura, che come vedremo, è costante nel tempo, ma non lungo  $x$ .

$$\bar{\mu}_R = \frac{\mu(\bar{T}_H) + \mu(\bar{T}_K)}{2} \quad (4.86)$$

$$\bar{\rho}_R = \frac{\bar{p}}{\Re\left(\frac{\bar{T}_H + \bar{T}_K}{2}\right)} \quad (4.87)$$

Grazie a questo, è possibile integrare l'espressione (4.85) su tutta la lunghezza  $L_R$  del rigeneratore, essendo composta solo da grandezze costanti lungo  $x$ . Si determina quindi il salto di pressione complessivo, nel tratto poroso, per la componente non stazionaria della pressione.

$$\tilde{p}_{HR} - \tilde{p}_{RK} = \left( 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\bar{\mu}_R L_R}{\bar{\rho}_R d_p^2} + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\pi L_R}{4 \bar{\rho}_R d_p} \frac{|\tilde{G}_R|}{\tilde{G}_R} \right) \tilde{G}_R \quad (4.88)$$

Dal *bilancio di entalpia*, concludendo, si può ricavare la distribuzione della temperatura del gas (che è uguale, sezione per sezione, a quella della matrice) nel rigeneratore, nelle due componenti, media e variabile. Il bilancio può essere considerato valido per entrambe le fasi, solida e gassosa, avendo ipotizzato un'efficienza di rigenerazione unitaria.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\rho_R \varepsilon c_p + \rho_S (1-\varepsilon) c) T_R A dx \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_R \varepsilon u_R c_p A T_R) dx = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ -k(1-\varepsilon) A \frac{\partial T_R}{\partial x} \right] dx \end{aligned} \quad (4.89)$$

dove  $c$  è il calore specifico del letto poroso, di densità  $\rho_S$ , e  $k$  la sua conducibilità termica. Sistemando l'equazione, e utilizzando il bilancio di massa, nella forma della (4.69), si ottiene

$$\begin{aligned} (\rho_R \varepsilon c_p + \rho_S (1-\varepsilon) c) \frac{\partial T_R}{\partial t} + \varepsilon c_p T_R \left[ \frac{\partial \rho_R}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_R u_R)}{\partial x} \right] + \\ + G_R \varepsilon c_p \frac{\partial T_R}{\partial x} - k(1-\varepsilon) \frac{\partial^2 T_R}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

È quindi nuovamente possibile separare il regime stazionario da quello non stazionario, per calcolare le espressioni delle due componenti della temperatura.

— Regime stazionario

Gli unici termini stazionari dell'equazione (4.90) sono

$$-k(1-\varepsilon)\frac{\partial^2 \bar{T}_R}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \bar{T}_R = C_1 x + C_2 \quad (4.91)$$

Che poi, con le adeguate condizioni al bordo, fornisce

$$\begin{cases} \bar{T}_R(0) = \bar{T}_H \\ \bar{T}_R(L_R) = \bar{T}_K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = T_{H_s} \\ C_1 = \frac{T_{K_s} - T_{H_s}}{L_R} \end{cases} \quad (4.92)$$

Dunque il profilo della temperatura media nel rigeneratore è lineare nella direzione assiale, cioè

$$\bar{T}_R = T_{H_s} + \frac{T_{K_s} - T_{H_s}}{L_R} x \quad (4.93)$$

con  $0 \leq x \leq L_R$

— Regime non stazionario

La parte non stazionaria della (4.90), sotto l'ipotesi di piccole perturbazioni, dà

$$c_R \frac{\partial \tilde{T}_R}{\partial t} + \tilde{G}_R \varepsilon c_p \frac{\partial \bar{T}_R}{\partial x} + \tilde{G}_R \varepsilon c_p \frac{\partial \tilde{T}_R}{\partial x} - k(1-\varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{T}_R}{\partial x^2} = 0 \quad (4.94)$$

Dove si è inserito il *calore specifico equivalente*, relativo all'insieme delle due fasi

$$c_R = (\bar{\rho}_R \varepsilon c_p + \rho_s (1-\varepsilon) c) \quad (4.95)$$

L'equazione risultante, sistemata con la(4.93), è quindi

$$k(1-\varepsilon) \frac{\partial^2 \tilde{T}_R}{\partial x^2} + c_R \frac{\partial \tilde{T}_R}{\partial t} = \varepsilon c_p \frac{T_{H_s} - T_{K_s}}{L_R} \tilde{G}_R \quad (4.96)$$

Quest'equazione, come appare chiaro, non è di facile soluzione. Dal momento che tuttavia, come vedremo in seguito, essa risulta disaccoppiata dalle altre, è possibile

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

studiarla in modo semplificato assumendo, come fatto per la grandezza  $G$ , che l'oscillazione del flusso e delle sue proprietà abbia un andamento molto simile a quello armonico. Dunque alle grandezze  $\tilde{G}_R$  e  $\tilde{T}_R$  è possibile assegnare espressioni del tipo

$$\tilde{T}_R = \hat{T}_R e^{-i\omega x} \quad e \quad \tilde{G}_R = \hat{G}_R e^{-i\omega x} \quad (4.97)$$

dove  $\omega$  è la pulsazione operativa del motore, che viene determinata dall'analisi del sistema di equazioni. In questo modo è possibile scrivere la (4.96) come

$$k(1-\varepsilon) \frac{\partial^2 \hat{T}_R}{\partial x^2} - i\omega c_R \hat{T}_R = \varepsilon c_p \frac{T_{H_s} - T_{K_s}}{L_R} \hat{G}_R \quad (4.98)$$

che si può risolvere considerando che l'omogenea associata

$$k(1-\varepsilon) \tilde{T}_R'' + c_R \tilde{T}_R = 0 \quad (4.99)$$

Ha una soluzione generale nella forma

$$\tilde{T}_R^{(o)} = C_3 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_2 x} \quad (4.100)$$

Con  $\lambda_1, \lambda_2$  soluzioni dell'equazione

$$k(1-\varepsilon) \lambda^2 + c_R \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega c_R}{k(1-\varepsilon)}} \quad (4.101)$$

Per quanto riguarda la soluzione particolare, si può prendere

$$\tilde{T}_R^{(p)} = C_5 \tilde{G}_R \quad \text{con} \quad C_5 = \varepsilon c_p \frac{T_{H_s} - T_{K_s}}{i\omega c_R L_R} \quad (4.102)$$

Quindi alla fine il profilo della parte non stazionaria della temperatura ha come espressione

$$\tilde{T}_R = C_3 e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_2 x} + C_5 \hat{G}_R \quad (4.103)$$

Con le costanti di integrazione  $C_3$  e  $C_4$  che possono essere calcolate tramite le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} \tilde{T}_R(0) = \tilde{T}_H = \tilde{T}_e \\ \tilde{T}_R(L_R) = \tilde{T}_K = \tilde{T}_c \end{cases} \quad (4.104)$$



ottenendo quindi

$$\begin{cases} C_3 = \frac{\tilde{T}_H e^{\lambda_2 L_R} - \tilde{T}_K + C_3 \tilde{G}_R (1 - e^{\lambda_2 L_R})}{e^{\lambda_2 L_R} - e^{\lambda_1 L_R}} \\ C_4 = \frac{\tilde{T}_K - \tilde{T}_H e^{\lambda_1 L_R} - C_3 \tilde{G}_R (1 - e^{\lambda_1 L_R})}{e^{\lambda_2 L_R} - e^{\lambda_1 L_R}} \end{cases} \quad (4.105)$$

È bene sottolineare che la determinazione del profilo di temperatura che si stabilisce nel rigeneratore, e più in generale in tutto il canale di rigenerazione, è un problema secondario rispetto alla soluzione del sistema delle altre equazioni che descrivono il funzionamento del motore. È solo a partire dalle fluttuazioni di temperatura nelle camere di lavoro, infatti, che si determina l'entità delle rispettive fluttuazioni di temperatura nel canale. Il cui interesse è quindi solo quello di determinare le condizioni cui devono sottostare i componenti che vi si trovano. Solamente facendo questa precisazione è possibile considerare valida la soluzione espressa per l'equazione (4.96), *non avendo essa alcun effetto sugli altri esiti del modello.*

#### 4.5.4 Riassunto delle equazioni per il canale di rigenerazione

Attraverso l'analisi appena presentata si ottiene quindi un set di equazioni che determinano le condizioni del gas influenzate dal passaggio attraverso il canale di rigenerazione, per quanto riguarda il *flusso di massa*, la *pressione* e la *temperatura*.

##### FLUSSO DI MASSA

Poiché il gradiente di  $G$  risulta nullo in tutti e tre i tratti considerati, tramite semplici considerazioni di continuità è possibile dire che

$$\sigma \tilde{G}_H = \varepsilon \tilde{G}_R = \sigma \tilde{G}_K \quad (4.106)$$

E avendo supposto lo stesso numero e la stesa dimensione di dotti per entrambi gli scambiatori, vale

$$\tilde{G}_H = \tilde{G}_K = \frac{\varepsilon}{\sigma} \tilde{G}_R \quad (4.107)$$

##### PRESSIONE

Per quanto riguarda tutte le componenti medie della pressione, è dimostrato che

$$\bar{p}_e = \bar{p}_{RH} = \bar{p}_{RK} = \bar{p}_K = \bar{p}_c = \bar{p} \quad (4.108)$$

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

Mentre per le componenti non stazionarie, si possono individuare tre tratti distinti di perdita di pressione

$$\tilde{p}_e - \tilde{p}_{HR} = \frac{\pi k_{tH}}{8\bar{\rho}_H} \left| \tilde{G}_H \right| \tilde{G}_H \quad (4.109)$$

$$\tilde{p}_{RK} - \tilde{p}_c = \frac{\pi k_{tK}}{8\bar{\rho}_K} \left| \tilde{G}_K \right| \tilde{G}_K \quad (4.110)$$

$$\tilde{p}_{HR} - \tilde{p}_{RK} = \left( 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\bar{\mu}_R L_R}{\bar{\rho}_R d_p^2} + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\pi L_R}{4\bar{\rho}_R d_p} \right) \tilde{G}_R \quad (4.111)$$

Utilizzando poi l'equazione (4.107), è possibile sommare le tre equazioni precedenti ottenendo l'espressione del salto di pressione totale subito dal fluido nel canale, collegando così la pressione in camera di compressione con quella in camera di espansione.

$$\tilde{p}_e - \tilde{p}_c = C_{loss} \tilde{G}_R \quad (4.112)$$

Dove  $C_{loss}$  è il *coefficiente di perdita totale*, che lega il salto di pressione al flusso di massa. È bene precisare che tale coefficiente non è costante nel tempo, ma funzione della *densità di flusso di massa*, avendo come espressione

$$C_{loss}(\tilde{G}_R) = 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\bar{\mu}_R L_R}{\bar{\rho}_R d_p^2} + \left( \frac{\pi \varepsilon^2 k_{tK}}{8\sigma^2 \bar{\rho}_K} + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\pi L_R}{4\bar{\rho}_R d_p} + \frac{\pi \varepsilon^2 k_{tH}}{8\sigma^2 \bar{\rho}_H} \right) \left| \tilde{G}_R \right| \quad (4.113)$$

#### TEMPERATURA

Come detto, l'analisi del canale fornisce, in via secondaria, il profilo della temperatura dentro gli scambiatori e il rigeneratore. Tale profilo, non influisce nella risoluzione del sistema, dato che la sua componente media risulta perfettamente individuabile già dalle ipotesi fatte inizialmente, mentre la componente non stazionaria diviene identificabile solo una volta risolto il sistema principale di equazioni e determinate le fluttuazioni di temperatura nelle camere di lavoro ( $\tilde{T}_e$  e  $\tilde{T}_c$ ).

Il profilo medio della temperatura è dato da

$$\bar{T}_H = \bar{T}_e = \bar{T}_R(0) = T_{H_s} \quad (4.114)$$

$$\bar{T}_K = \bar{T}_c = \bar{T}_R(L_R) = T_{K_s} \quad (4.115)$$

$$\bar{T}_R = T_{H_s} + \frac{T_{K_s} - T_{H_s}}{L_R} x \quad \text{per } 0 \leq x \leq L_R \quad (4.116)$$

Che risulta perfettamente identico all'assumere la distribuzione di temperatura ipotizzata dal modello adiabatico di Finkelstein, illustrata in figura Fig. 1.18.

Il profilo di temperatura, nella sua parte non stazionaria è invece

$$\tilde{T}_H = \tilde{T}_e \quad (4.117)$$

$$\tilde{T}_k = \tilde{T}_c \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_R = & \frac{\tilde{T}_H e^{\lambda_2 L_R} - \tilde{T}_K + C_3 \tilde{G}_R (1 - e^{\lambda_2 L_R})}{e^{\lambda_2 L_R} - e^{\lambda_4 L_R}} e^{\lambda_1 x} + \\ & + \frac{\tilde{T}_K - \tilde{T}_H e^{\lambda_1 L_R} - C_3 \tilde{G}_R (1 - e^{\lambda_1 L_R})}{e^{\lambda_2 L_R} - e^{\lambda_4 L_R}} e^{\lambda_2 x} + C_3 \tilde{G}_R \end{aligned} \quad (4.119)$$

Il cui andamento è dovuto ovviamente al moto dei pistoni, e quindi al cambiamento delle condizioni del gas in camera di espansione e di compressione, che determina la fluttuazione delle temperature  $\tilde{T}_e$  e  $\tilde{T}_c$  l'entità di  $\tilde{G}_R$ .

#### 4.6 Dinamica dei pistoni e variazione dei volumi di lavoro

Il moto degli elementi mobili è al tempo stesso il risultato e la causa delle trasformazioni termodinamiche effettuate dal gas nello spazio di lavoro e negli spazi di rimbalzo. Come illustrato nel Capitolo 2, nelle realizzazioni più recenti, specialmente per le applicazioni di cui questa tesi si vuole occupare, i pistoni non sono in contatto esclusivamente con molle gassose, ma anche con degli elementi elastici meccanici. La funzione di questi ultimi è per lo più quella di guidare il moto degli stantuffi, eliminando quindi le possibili forze laterali. Tuttavia, se ben dimensionate, queste molle possono regolare il funzionamento del motore, agendo sia sulle corse dei pistoni che sulla frequenza operativa, permettendo di portare la pressione media a valori anche molto elevati, senza causare spinte eccessive.

Per questo motivo si è scelto di rappresentarle nella descrizione della dinamica degli elementi mobili, nonostante la loro presenza non sia strettamente indispensabile al funzionamento di un FPSE. Allo stesso tempo tuttavia, si è scelto di non considerare eventuali smorzamenti dovuti all'attrito dei pistoni nelle loro sedi, che per effetto dei cuscinetti gassosi risulta molto basso e che potrebbe essere di qualche interesse in una futura fase di progetto

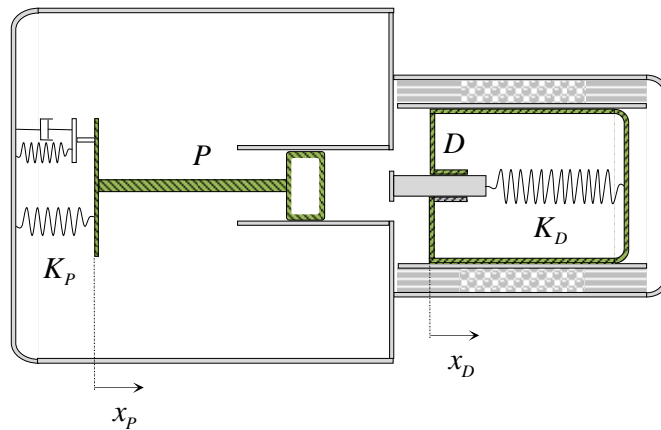


Fig. 4.10 - Elementi mobili del motore, pistone (P) e displacer (D)

Come detto, uno dei termini di accoppiamento tra le equazioni del moto dei pistoni e quelle che descrivono la termodinamica del gas, è la legge di variazione dei volumi di lavoro in ragione delle posizioni degli stantuffi, che verrà esplicitata chiaramente più avanti in questa sezione.

#### 4.6.1 Equazioni del moto dei due stantuffi

Il displacer è sottoposto all'azione di pressione dovuta al gas che si trova in camera di espansione, in camera di compressione e al suo interno. Con lo spostamento del displacer indicato con  $x_D$  e avente verso positivo quello raffigurato in Fig. 4.10, il bilancio di quantità di moto dell'elemento si può scrivere come

$$M_D \ddot{x}_D = p_c (A_D - A_{hub}) - p_{gs} (A_D - A_{hub}) + p_{gs} A_D - p_e A_D - K_D x_D \quad (4.120)$$

Per quanto riguarda il pistone, invece, esso si trova a subire l'azione delle forze di pressione esercitate dal gas in camera di compressione e da quello in camera di rimbalzo. Sull'elemento agisce inoltre la forza dovuta al sottosistema *dispositivo di carico-carico (load device-load)*, qualunque sia la natura di questo componente. Quindi il bilancio di quantità di moto per il pistone di potenza (trascurando la sezione dello stelo) risulta

$$M_P \ddot{x}_P = (p_B - p_c) A_P - K_P x_P + F_{ld\_l} \quad (4.121)$$

Come più volte accennato in precedenza, poiché tutte le altre equazioni del modello sono equazioni differenziali lineari del *primo ordine*, è necessario portare in tale forma anche la (4.120) e la (4.121), in modo da poter creare un sistema di equazioni dello stesso ordine.

Con questo intento, si introducono due nuove variabili  $u_D$  e  $u_P$ , che rappresentano le velocità dei pistoni, definite come di seguito. In questo è possibile ottenere un sistema di quattro equazioni dello stesso ordine, nella forma

$$\frac{dx_D}{dt} = u_D \quad (4.122)$$

$$M_D \frac{du_D}{dt} + K_D x_D = (p_c - p_e) A_D + (p_{gs} - p_c) A_{hub} \quad (4.123)$$

$$\frac{dx_P}{dt} = u_P \quad (4.124)$$

$$M_P \frac{du_P}{dt} + K_P x_P = (p_B - p_c) A_P + F_{ld\_l} \quad (4.125)$$

Facendo ancora una volta uso della posizione espressa dalla (4.1), è possibile separare la parte stazionaria delle equazioni, che dà semplicemente

$$\bar{p}_e = \bar{p}_c = \bar{p}_{gs} = \bar{p}_B = \bar{p} \quad (4.126)$$

dalla parte non stazionaria, che determina il sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_D}{dt} &= \tilde{u}_D \\ \frac{d\tilde{u}_D}{dt} + \frac{K_D}{M_D} \tilde{x}_D &= (\tilde{p}_c - \tilde{p}_e) \frac{A_D}{M_D} + (\tilde{p}_{gs} - \tilde{p}_c) \frac{A_{hub}}{M_D} \\ \frac{d\tilde{x}_P}{dt} &= \tilde{u}_P \\ \frac{d\tilde{u}_P}{dt} + \frac{K_P}{M_P} \tilde{x}_P &= (\tilde{p}_B - \tilde{p}_c) \frac{A_P}{M_P} + \frac{F_{ld\_l}}{M_P} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Quest'ultimo rappresenta la versione definitiva delle equazioni che descrivono la dinamica dei pistoni, le quali possono quindi essere messe a sistema con le altre fin qui determinate.

#### 4.6.2 Variazione dei volumi

Nel paragrafo 4.3.5 si è visto come i valori medi dei volumi delle camere di lavoro e di rimbalzo possano essere determinati semplicemente a partire dalle grandezze geometriche del motore. Per quanto riguarda le componenti fluttuanti di questi volumi, com'è di immediata comprensione, essi dipenderanno dalla posizione dei pistoni.

#### 4 Modello di analisi lineare per FPSEs

In particolare, mentre il volume della camera di espansione, così come quello della molla gassosa, dipenderà dalla posizione del displacer, e il volume della camera di rimbalzo dipenderà dalla posizione del pistone, quello della camera di compressione varierà simultaneamente in ragione sia di  $x_D$  che di  $x_p$ .

Tramite semplici considerazioni geometriche, considerando i versi positivi degli spostamenti dei pistoni, visti in precedenza, è immediato scrivere che

$$\tilde{V}_e = -A_D \tilde{x}_D \quad (4.128)$$

$$\tilde{V}_{gs} = A_{hub} \tilde{x}_D \quad (4.129)$$

$$\tilde{V}_c = A_D \tilde{x}_D - A_p \tilde{x}_p \quad (4.130)$$

$$\tilde{V}_B = A_p \tilde{x}_p \quad (4.131)$$

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni da (4.19) a (4.22) e da (4.25) a (4.28), si ottiene un ulteriore accoppiamento tra la dinamica e la termodinamica del motore, eliminando contemporaneamente le 4 incognite relative alle componenti fluttuanti dei volumi.

#### 4.7 Sottosistema di carico

Per la modellizzazione del sistema di carico, il modello considera alcune ipotesi semplificative che verranno qui illustrate, allo scopo di giustificare le scelte fatte. Come ben analizzato da de Monte [4], l'espressione più generale della forza esercitata dal sottosistema di carico sul pistone è quella che le assegna un dipendenza funzionale, non lineare, dalla posizione e dalla velocità dello stantuffo, cioè

$$F_{ld\_l} = F_{ld\_l}(x_p, \dot{x}_p) \quad (4.132)$$

In particolare, de Monte afferma che l'espressione di tale forza è della forma

$$F_{ld\_l} = F_{ld\_l,K} + F_{ld\_l,C} = -Kx_p |x_p|^{n_K-1} - C\dot{x}_p |\dot{x}_p|^{n_C-1} \quad (4.133)$$

dove i coefficienti  $K$ ,  $C$ ,  $n_K$  e  $n_C$  sono caratteristici del dispositivo di carico e del carico ad esso collegato. Dovendo essere utilizzata per un modello di analisi lineare, la (4.133) deve essere linearizzata.

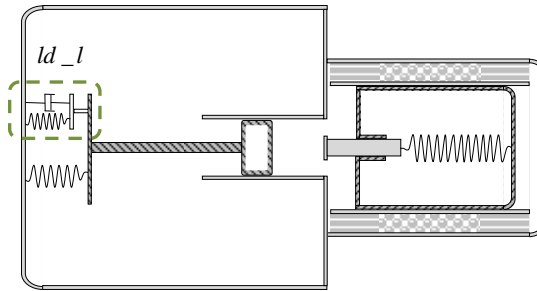


Fig. 4.11 - Sottosistema di carico, (load device-load, ld\_l)

De Monte propone una *linearizzazione equivalente*, che non viene qui riportata (ma che può essere ritrovata per esteso in [4]), che porta a scrivere l'equazione lineare

$$F_{ld\_l} = -K_{ld\_l}x_P - C_{ld\_l}\dot{x}_P \quad (4.134)$$

che sarà la forma cui si farà riferimento in questo modello. Dunque il sottosistema di carico si comporta complessivamente come una rigidità e uno smorzamento.

A questo proposito, è possibile fare una considerazione più stringente, che però risulta più che valida, almeno nell'ambito del tipo di applicazioni per *FPSE* che questa tesi si propone di studiare. Lo stesso de Monte, infatti, dimostra che esistono vari casi in cui il coefficiente di rigidità  $K_{ld\_l}$  può essere considerato nullo, ad esempio quando il sistema di carico è un semplice smorzatore viscoso, come quello presente nel motore di ricerca RE-1000, da lui studiato. Attraverso un'analisi dettagliata [4, cap.4], de Monte descrive come uno di questi casi sia quello in cui il pistone di potenza è collegato ad un alternatore lineare, a sua volta connesso con un circuito di carico che lavori in condizioni di risonanza, tramite un opportuno condensatore di sintonia. Tale situazione è appunto quella in cui si può considerare un convertitore di potenza del tipo di quelli descritti nel capitolo 2, sui quali si incentra il presente lavoro.

Per questo motivo, nella attuale trattazione, la forza esercitata sul pistone di potenza dal sottosistema di carico, è considerata semplicemente come

$$F_{ld\_l} = -C_{ld\_l}\dot{x}_P \quad (4.135)$$

#### *4 Modello di analisi lineare per FPSEs*

lasciando allo sviluppo di analisi future il compito di studiare la reale forma di tale forza, possibilmente per il dimensionamento di un apparato di conversione (alternatore lineare) adeguato ad eventuali specifiche richieste.

Con queste considerazioni, è possibile riscrivere l'equazione del moto del pistone, espressa dall'ultima delle (4.127), nella sua forma definitiva, che è

$$\frac{d\tilde{u}_p}{dt} + \frac{K_p}{M_p} \tilde{x}_p + \frac{C_{ld-l}}{M_p} \tilde{u}_p = (\tilde{p}_B - \tilde{p}_c) \frac{A_p}{M_p} \quad (4.136)$$



## 5 Validazione del modello e risultati

La creazione del modello lineare che è stato descritto nel capitolo precedente mira a raggiungere una elevata capacità descrittiva delle caratteristiche di funzionamento di un motore Stirling Free-Piston, così da poter essere utilizzato sia in fase di predizione delle prestazioni di un motore esistente, che per il primo dimensionamento di un eventuale futuro prototipo.

Con questo intento si sviluppa il percorso illustrato in questo capitolo, in cui si cerca un'applicazione che convalidi le scelte fatte in fase di modellizzazione, e che allo stesso tempo fornisca indicazioni concrete per il suo utilizzo pratico.

### 5.1 Sistema risultante delle equazioni

L'analisi presentata nel capitolo 4 determina un set di equazioni che, per quanto detto, sono in grado di descrivere il comportamento complessivo di un *FPSE*, partendo semplicemente dall'analisi fisica di ogni sua parte. Ricapitolando quanto approfondito nelle pagine precedenti, si ottengono due equazioni differenziali per ogni camera del motore, che descrivono la variazione di temperatura e pressione del gas al loro interno.

Il risultato dell'analisi del canale di rigenerazione è invece la definizione del legame tra le pressioni in camera di espansione e di compressione, attraverso la perdita di carico causata da scambiatori e rigeneratore, funzione della portata del flusso. L'andamento della distribuzione di temperatura in questo tratto, anch'esso risultante dalla trattazione illustrata nel paragrafo 4.5, è disaccoppiata dalle altre equazioni. Tale andamento è dunque semplicemente ottenibile una volta risolto il sistema principale, come risulta chiaro anche da un'osservazione pratica. Infatti mentre le oscillazioni di temperatura delle camere giocano comunque un ruolo nello sviluppo delle forze di pressione agenti sui pistoni, e ne sono influenzate a loro volta, le fluttuazioni termiche che avvengono nel canale, come già specificato, dipendono semplicemente da come varia la temperatura negli spazi di lavoro (si vedano a tal proposito le equazioni da (4.117) a (4.119)), e non influenzano nessun aspetto del funzionamento del motore.

Questa è una diretta conseguenza del metodo di linearizzazione adottato, che considera che gli scambiatori, qualunque modifica di temperatura subisca il gas, abbiano comunque un'efficienza tale da ristabilirne il giusto valore. Un livello minore di approssimazione permetterebbe di apprezzare l'effetto della fluttuazione di temperatura negli scambiatori, ma

## 5 Validazione del modello e risultati

eccederebbe dagli scopi prefissi da questa tesi. È opportuno sottolineare che tutte le equazioni appena dette hanno come incognite le componenti variabili delle grandezze termodinamiche considerate, quelle cioè che sono causate dal movimento degli stantuffi, avendo preso a riferimento, come configurazione di equilibrio, uno stato del motore di cui si suppongono note le caratteristiche. A quelle appena elencate vanno poi aggiunte le quattro equazioni che descrivono il moto dei pistoni con le considerazioni fatte sul sottosistema di carico.

Prima di descrivere le considerazioni che possono essere fatte sul particolare tipo di sistema risultante delle equazioni, vediamo nel dettaglio la struttura. Come detto non tutte le equazioni ricavate nel processo di analisi sono indispensabili alla formulazione di tale sistema, dunque, per rendere più agevole al lettore la comprensione del percorso qui spiegato, si riportano di seguito le equazioni su cui effettivamente si fonda, onde evitare continui riferimenti ad altre parti del testo. Si considerano quindi:

— Dalle camere di lavoro:

$$\gamma \bar{p}_e \frac{d\tilde{V}_e}{dt} + \bar{V}_e \frac{d\tilde{p}_e}{dt} + \tilde{G}_{eH} \sigma A \mathfrak{R} \bar{T}_e = 0$$

$$\bar{p}_e \frac{d\tilde{V}_e}{dt} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_e \bar{V}_e}{\bar{T}_e} \frac{d\tilde{T}_e}{dt} = 0$$

$$\gamma \bar{p}_c \frac{d\tilde{V}_c}{dt} + \bar{V}_c \frac{d\tilde{p}_c}{dt} - \tilde{G}_{cK} \sigma A \mathfrak{R} \bar{T}_c = 0$$

$$\bar{p}_c \frac{d\tilde{V}_c}{dt} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_c \bar{V}_c}{\bar{T}_c} \frac{d\tilde{T}_c}{dt} = 0$$

— Dalla camera di rimbalzo e dalla molla gassosa:

$$\gamma \frac{\bar{p}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{V}_{gs}}{dt} + \frac{\bar{V}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{p}_{gs}}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_{gs} \bar{V}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{T}_{gs}}{dt} + \bar{p}_{gs} \frac{d\tilde{V}_{gs}}{dt} = 0$$

$$\gamma \frac{\bar{p}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{V}_B}{dt} + \frac{\bar{V}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{p}_B}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_B \bar{V}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{T}_B}{dt} + \bar{p}_B \frac{d\tilde{V}_B}{dt} = 0$$

— Dal canale di rigenerazione:

$$\tilde{p}_e - \tilde{p}_c = C_{loss} \tilde{G}_R$$

$$\tilde{G}_H = \tilde{G}_K = \frac{\varepsilon}{\sigma} \tilde{G}_R$$

— Dalla *dinamica dei pistoni*:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}_D}{dt} &= \tilde{u}_D \\ \frac{d\tilde{u}_D}{dt} + \frac{K_D}{M_D} \tilde{x}_D &= (\tilde{p}_c - \tilde{p}_e) \frac{A_D}{M_D} + (\tilde{p}_{gs} - \tilde{p}_c) \frac{A_{hub}}{M_D} \\ \frac{d\tilde{x}_P}{dt} &= \tilde{u}_P \\ \frac{d\tilde{u}_P}{dt} + \frac{K_P}{M_P} \tilde{x}_P + \frac{C_{ld-l}}{M_P} \tilde{u}_P &= (\tilde{p}_B - \tilde{p}_c) \frac{A_P}{M_P}\end{aligned}$$

— Dalla *legge di variazione dei volumi*:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_e &= -A_D \tilde{x}_D \\ \tilde{V}_{gs} &= A_{hub} \tilde{x}_D \\ \tilde{V}_c &= A_D \tilde{x}_D - A_P \tilde{x}_P \\ \tilde{V}_B &= A_P \tilde{x}_P\end{aligned}$$

Come detto sono state escluse le già citate equazioni relative alle incognite  $\tilde{T}_H$ ,  $\tilde{T}_K$  e  $\tilde{T}_R$ , che si ricavano in un secondo tempo. Dunque, unendo tutte le relazioni appena elencate, si ottiene il sistema risultante, che prende la forma di quello rappresentato a pagina seguente

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\gamma A_D \bar{p}_e \frac{d\tilde{x}_D}{dt} + \bar{V}_e \frac{d\tilde{p}_e}{dt} + \varepsilon A \mathfrak{R} \bar{T}_e \tilde{G}_R = 0 \\
 -A_D \bar{p}_e \frac{d\tilde{x}_D}{dt} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_e \bar{V}_e}{\bar{T}_e} \frac{d\tilde{T}_e}{dt} = 0 \\
 \gamma (A_D - A_{hub}) \bar{p}_c \frac{d\tilde{x}_D}{dt} - \gamma A_P \bar{p}_c \frac{d\tilde{x}_P}{dt} + \bar{V}_c \frac{d\tilde{p}_c}{dt} - \varepsilon A \mathfrak{R} \bar{T}_c \tilde{G}_R = 0 \\
 \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_c \bar{V}_c}{\bar{T}_c} \frac{d\tilde{T}_c}{dt} + (A_D - A_{hub}) \bar{p}_c \frac{d\tilde{x}_D}{dt} - A_P \bar{p}_c \frac{d\tilde{x}_P}{dt} = 0 \\
 \frac{\gamma A_P \bar{p}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{x}_P}{dt} + \frac{\bar{V}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{p}_B}{dt} = 0 \\
 \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_B \bar{V}_B}{\bar{T}_B} \frac{d\tilde{T}_B}{dt} + A_P \bar{p}_B \frac{d\tilde{x}_P}{dt} = 0 \\
 \frac{\gamma A_{hub} \bar{p}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{x}_D}{dt} + \frac{\bar{V}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{p}_{gs}}{dt} = 0 \\
 \frac{1}{\gamma-1} \frac{\bar{p}_{gs} \bar{V}_{gs}}{\bar{T}_{gs}} \frac{d\tilde{T}_{gs}}{dt} + A_{hub} \bar{p}_{gs} \frac{d\tilde{x}_D}{dt} = 0 \\
 \tilde{p}_e - \tilde{p}_c = \underbrace{\left[ 180 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\bar{\mu}_R L_R}{\bar{\rho}_R d_p^2} + \left( \frac{\pi \varepsilon^2 k_{t_K}}{8 \sigma^2 \bar{\rho}_K} + 1.8 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \frac{\pi L_R}{4 \bar{\rho}_R d_p} + \frac{\pi \varepsilon^2 k_{t_H}}{8 \sigma^2 \bar{\rho}_H} \right) \right]}_{C_{loss}} \left| \tilde{G}_R \right| \tilde{G}_R \\
 \frac{d\tilde{x}_D}{dt} = \tilde{u}_D \\
 \frac{d\tilde{u}_D}{dt} + \frac{K_D}{M_D} \tilde{x}_D = (\tilde{p}_c - \tilde{p}_e) \frac{A_D}{M_D} + (\tilde{p}_{gs} - \tilde{p}_c) \frac{A_{hub}}{M_D} \\
 \frac{d\tilde{x}_P}{dt} = \tilde{u}_P \\
 \frac{d\tilde{u}_P}{dt} + \frac{K_P}{M_P} \tilde{x}_P + \frac{C_{ld-1}}{M_P} \tilde{u}_P = (\tilde{p}_B - \tilde{p}_c) \frac{A_P}{M_P}
 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Nel quale sono già state eliminate le componenti variabili dei volumi, e la densità di flusso di massa attraverso il canale di rigenerazione viene espressa solo tramite la variabile  $\tilde{G}_R$ .

Eliminando successivamente tale variabile, e tenendo conto che, come dimostrato

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_e &= \bar{T}_H = T_{H_s} \\
 \bar{T}_c &= \bar{T}_B = \bar{T}_K = T_{K_s} \\
 \bar{T}_{gs} &= \bar{T}_R
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

e

$$\bar{p}_e = \bar{p}_c = \bar{p}_{gs} = \bar{p}_B = \bar{p} = p \tag{5.3}$$

si perviene, dopo aver risistemato le equazioni, alla forma definitiva del sistema cercato, che risulta

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{d\tilde{x}_D}{dt} &= \tilde{u}_D \\
 \frac{d\tilde{u}_D}{dt} &= -\frac{K_D}{M_D} \tilde{x}_D - \frac{A_D}{M_D} \tilde{p}_e + \frac{A_D - A_{hub}}{M_D} \tilde{p}_c + \frac{A_{hub}}{M_D} \tilde{p}_{gs} \\
 \frac{d\tilde{x}_P}{dt} &= \tilde{u}_P \\
 \frac{d\tilde{u}_P}{dt} &= -\frac{K_P}{M_P} \tilde{x}_P - \frac{C_{ld-l}}{M_P} \tilde{u}_P - \frac{A_P}{M_P} \tilde{p}_c + \frac{A_P}{M_P} \tilde{p}_B \\
 \frac{d\tilde{p}_e}{dt} &= \frac{\gamma A_D p}{\bar{V}_e} \tilde{u}_D - \frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{H_s}}{\bar{V}_e C_{loss}} \tilde{p}_e + \frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{H_s}}{\bar{V}_e C_{loss}} \tilde{p}_c \\
 \frac{d\tilde{T}_e}{dt} &= \frac{(\gamma-1) A_D T_{H_s}}{\bar{V}_e} \tilde{u}_D \\
 \frac{d\tilde{p}_c}{dt} &= -\frac{\gamma(A_D - A_{hub}) p}{\bar{V}_c} \tilde{u}_D + \frac{\gamma A_P p}{\bar{V}_c} \tilde{u}_P + \frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{K_s}}{\bar{V}_c C_{loss}} \tilde{p}_e - \frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{K_s}}{\bar{V}_c C_{loss}} \tilde{p}_c \\
 \frac{d\tilde{T}_c}{dt} &= -\frac{(\gamma-1)(A_D - A_{hub}) T_{K_s}}{\bar{V}_c} \tilde{u}_D + \frac{(\gamma-1) A_P T_{K_s}}{\bar{V}_c} \tilde{u}_P \\
 \frac{d\tilde{p}_{gs}}{dt} &= -\frac{\gamma A_{hub} p}{\bar{V}_{gs}} \tilde{u}_D \\
 \frac{d\tilde{T}_{gs}}{dt} &= -\frac{(\gamma-1) A_{hub} \bar{T}_{gs}}{\bar{V}_{gs}} \tilde{u}_D \\
 \frac{d\tilde{p}_B}{dt} &= -\frac{\gamma A_P p}{\bar{V}_B} \tilde{u}_P \\
 \frac{d\tilde{T}_B}{dt} &= -\frac{(\gamma-1) A_P T_{K_s}}{\bar{V}_B} \tilde{u}_P
 \end{aligned} \right. \tag{5.4}$$

## 5 Validazione del modello e risultati

Dove i valori medi dei volumi delle camere sono definiti dalle equazioni (4.5). Come si può vedere, si tratta di un sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari del primo ordine, che in forma matriciale può essere scritto

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_D \\ \tilde{u}_D \\ \tilde{x}_P \\ \tilde{u}_P \\ \tilde{p}_e \\ \tilde{T}_e \\ \tilde{p}_c \\ \tilde{T}_c \\ \tilde{p}_{gs} \\ \tilde{T}_{gs} \\ \tilde{p}_B \\ \tilde{T}_B \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} \tilde{x}_D \\ \tilde{u}_D \\ \tilde{x}_P \\ \tilde{u}_P \\ \tilde{p}_e \\ \tilde{T}_e \\ \tilde{p}_c \\ \tilde{T}_c \\ \tilde{p}_{gs} \\ \tilde{T}_{gs} \\ \tilde{p}_B \\ \tilde{T}_B \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \mathcal{M} x \quad (5.5)$$

Dove la matrice  $\mathcal{M}$  risulta definita come

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_D}{M_D} & 0 & 0 & 0 & -\frac{A_D}{M_D} & 0 & \frac{A_D - A_{hub}}{M_D} & 0 & \frac{A_{hub}}{M_D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{K_p}{M_p} & -\frac{C_{id,l}}{M_p} & 0 & 0 & -\frac{A_p}{M_p} & 0 & 0 & 0 & \frac{A_p}{M_p} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma A_D p}{\bar{V}_e} & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{H_s}}{\bar{V}_e C_{loss}} & 0 & \frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{H_s}}{\bar{V}_e C_{loss}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\gamma-1) A_D T_{H_s}}{\bar{V}_e} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma(A_D - A_{hub}) p}{\bar{V}_c} & 0 & \frac{\gamma A_p p}{\bar{V}_c} & \frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{K_s}}{\bar{V}_c C_{loss}} & 0 & -\frac{\varepsilon A \mathcal{R} T_{K_s}}{\bar{V}_c C_{loss}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\gamma-1)(A_D - A_{hub}) T_{K_s}}{\bar{V}_c} & 0 & \frac{(\gamma-1) A_p T_{K_s}}{\bar{V}_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma A_{hub} p}{\bar{V}_D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\gamma-1) A_{hub} \bar{T}_D}{\bar{V}_D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma A_p p}{\bar{V}_B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1) A_p T_{K_s}}{\bar{V}_B} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Se la matrice appena definita fosse a coefficienti tutti costanti, la soluzione del sistema (5.4) potrebbe essere trovata facilmente applicando uno dei molti metodi della analisi matriciale. Per esempio secondo [28], diagonalizzando *a blocchi* la matrice, secondo la formula canonica di Jordan, è possibile ottenere una soluzione del vettore delle incognite nella forma

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{\lambda_k t} \mathbf{c}_k \quad (5.7)$$

Dove i  $\lambda_k$  sono gli autovalori della matrice  $\mathcal{M}$ , e i  $\mathbf{c}_k$  i corrispondenti auto vettori. Mentre gli  $\alpha_k$  sono dei coefficienti scalari determinabili tramite la relazione

$$\mathbf{c} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{c}_k \quad (5.8)$$

essendo  $\mathbf{c}$  il vettore costituito dalle condizioni iniziali.

Dato che i coefficienti della matrice rappresentano grandezze che difficilmente, in una fase di analisi teorica preliminare quale quella presentata, si possono conoscere a priori (soprattutto per quanto riguarda le dimensioni o le masse oscillanti), risulterebbe più utile uno studio del sistema, attraverso i metodi classici della teoria dei sistemi. Osservando la forma del polinomio caratteristico della matrice, si potrebbero infatti estrapolare le relazioni cui dovrebbero sottostare i vari parametri per garantire, per esempio, autovalori immaginari puri, e quindi oscillazioni stabili di ampiezza costante.

Tuttavia, l'uso di entrambe queste soluzioni viene scoraggiato per due ragioni:

- 1) Uno dei coefficienti della matrice non è costante, anche supponendo di conoscere tutti i parametri osservati in precedenza. La grandezza espressa con  $C_{loss}$ , infatti, risulta direttamente dipendente dal modulo di  $\tilde{G}_R$ , e quindi funzione delle uscite del sistema. Trattandosi di un elemento fondamentale per il modello presentato, che si propone un'analisi accurata della perdita di pressione attraverso il rigeneratore, anche utilizzarne un valore mediato, oppure calcolato iterativamente, renderebbe vana la trattazione fatta per questo componente.
- 2) l'elevato numero dei parametri liberi del sistema, e l'alto ordine della matrice complicano alquanto lo studio del polinomio caratteristico. Nel momento in cui ci si propone un'analisi del tutto generalizzata, ci si riduce a cercare relazioni utili fra le dimensioni geometriche, le masse dei pistoni, le costanti elastiche delle molle, le condizioni operative, e l'influenza dell'alternatore. Definire un

## 5 Validazione del modello e risultati

andamento del luogo delle radici in funzione di tutti questi parametri, anche qualora alcuni di essi venissero ragionevolmente fissati, rischia di essere molto pesante dal punto di vista del calcolo, contrastando quindi con il tentativo di creare uno strumento leggero e flessibile per la descrizione degli *FPSEs* che abbia una reale validità pratica.

A causa di questi motivi, per cercare una conferma della validità del modello proposto, è stato deciso di riferirlo ad un esemplare di motore già esistente, in modo da settare tutti i parametri della matrice  $\mathcal{M}$ . Dopodiché si è cercato di ottenere una *simulazione temporale*, che mostrasse un andamento degli elementi mobili compatibile (almeno dal punto di vista qualitativo) con la situazione reale. L'intento è quello di verificare, in tempi ragionevolmente brevi, se il modello è in grado di cogliere in prima battuta gli aspetti fondamentali di quanto succede all'interno di questo particolare tipo di motori.

Per la simulazione è stato preso a riferimento il *Technology Demonstration Converter*, di cui si è ampiamente parlato nel paragrafo 2.4.1 e sul quale si è iniziato a investigare all'inizio di questo lavoro di tesi. Una lista dei principali parametri fisici e operativi di questo motore è riportata di seguito:

- Gas di lavoro: Elio, considerato come gas ideale;
- Lunghezza totale del motore  $L_{tot} = 37$  cm, vedi Fig. 2.25;
- Diametro massimo  $D_{max} = 150$  mm;
- Massa totale  $M = 6$  kg
- Heater head in lega Inconel-718;
- Temperatura del riscaldatore  $T_{H_s} = 923$  K;
- Temperatura del refrigeratore  $T_{K_s} = 353$  K;
- Frequenza operativa  $f = 82.5$  Hz;
- Pressione interna media  $p_m = 2.59$  MPa;
- Corsa massima del pistone  $X_p \cong 12$  mm ;
- Rapporto di corsa  $r \approx 3$ .

Purtroppo una lista dettagliata dei parametri relativi al TDC, che sono necessari per il calcolo del modello, non è disponibile, se non su espressa concessione di NASA GRC. Per questa ragione, in seguito, si è cercato di ottenere una stima della variazione delle grandezze prestazionali del motore, in funzione dello spostamento dai valori nominali delle principali grandezze di controllo (par. 5.3).



La scelta del software per l'implementazione è stata indirizzata su *Ansoft Simplorer*, usato anche da NASA per la creazione di un modello non lineare in grado di simulare il comportamento dei convertitori in loro possesso.

## 5.2 La simulazione temporale con Simplorer 7

Ansoft Simplorer 7 è un simulatore multidominio estremamente potente e versatile, che presenta una vasta gamma di modelli in linguaggio C++ e VHDL. Si è dimostrato molto valido nel caso in esame, permettendo una notevole facilità di implementazione, con brevissimi tempi di costruzione del programma e calcolo dei risultati. Per lo script completo del programma di soluzione che è stato realizzato si veda l'Appendice A.

Uno degli elementi presenti nelle librerie standard di simplorer è un solutore di sistemi di equazioni differenziali ordinarie, di facile utilizzo, che da solo è in grado di implementare tutto il sistema (5.4), alleggerendo notevolmente, in questo modo, l'architettura del programma.

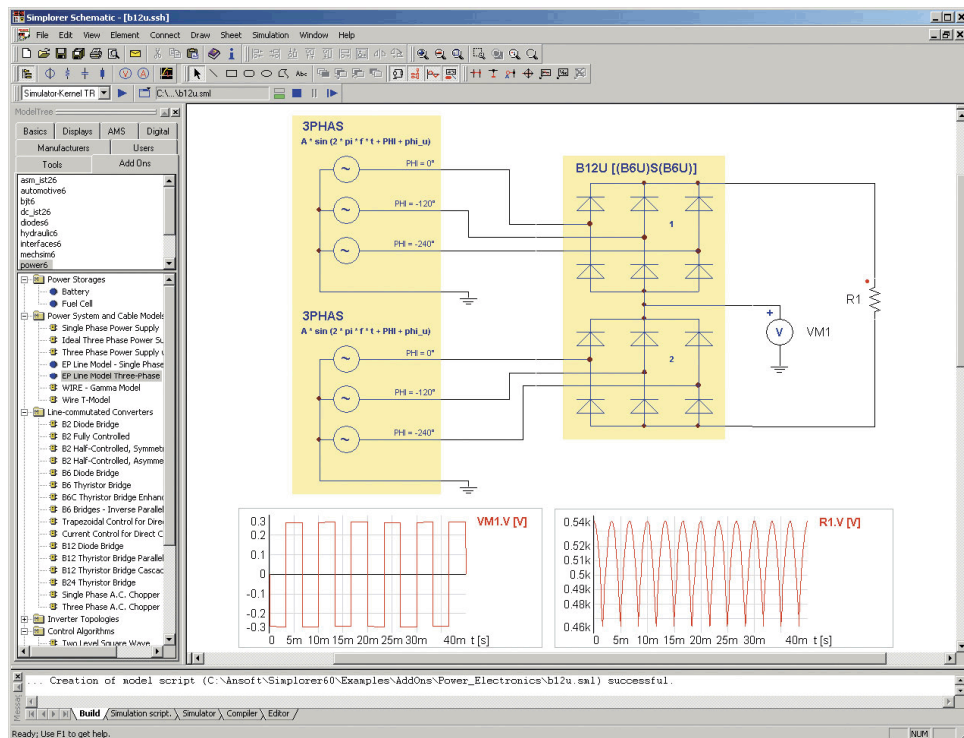


Fig. 5.1 - Interfaccia principale del simulatore di Ansoft Simplorer, [www.ansoft.com/products/em/simplorer/](http://www.ansoft.com/products/em/simplorer/)

## 5 Validazione del modello e risultati

Lo schema di calcolo risulta di fatto composto solo di tre elementi (Fig. 5.2):

- Un blocco di condizioni iniziali (ICs), contenente tutte le grandezze fisse del problema: dimensioni, masse, tipo di gas, temperature operative, valori medi di volumi e pressione.
- Un blocco di soluzione (DES, Differential Equations Solver) del sistema lineare di equazioni differenziali (12x12), messo in forma omogenea, completo delle condizioni iniziali. La soluzione di questo blocco è un vettore che ha per componenti le parti fluttuanti delle grandezze, così come sono indicate nell'equazione (5.5).
- Un blocco di equazioni (EQU) che, ad ogni step della simulazione, calcola una stima più accurata del coefficiente  $C_{loss}$ , attraverso la grandezza  $\tilde{G}_R$ , che viene inserito nel solutore allo step successivo.

In questo modo si ottiene una simulazione molto realistica, con il coefficiente di perdita di carico nel canale che cresce proporzionalmente alla portata di gas dentro il canale stesso. È fondamentale sottolineare l'importanza di questo aspetto, solo così è infatti possibile ottenere un andamento temporale corretto di  $C_{loss}$ , la cui variazione in funzione della posizione del displacer, come vedremo, è in grado di stabilizzare il moto dei pistoni. Mentre l'assunzione di un valore costante per questa grandezza non permetterebbe di ottenere oscillazioni di ampiezza costante, come dimostrato da molte prove di simulazione.

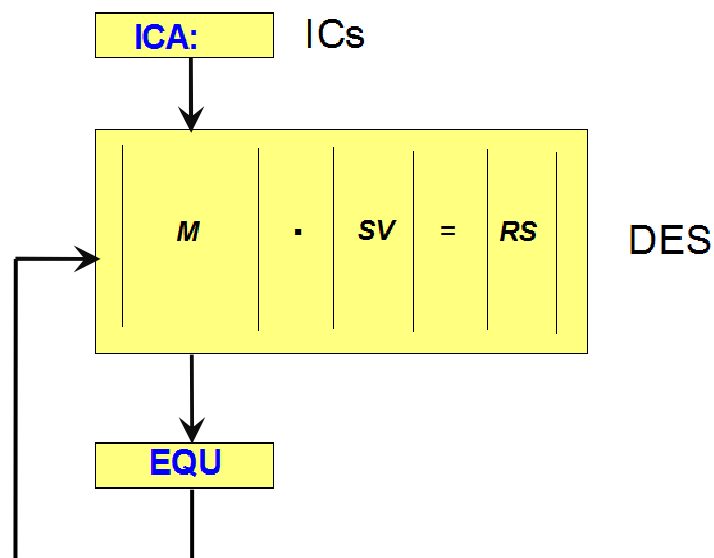


Fig. 5.2 - Schema di calcolo del programma di simulazione.

Nell'assegnare al sistema i vari parametri, la determinazione di alcuni di essi risulta molto difficoltosa, in ragione della scarsa disponibilità di dati completi sul TDC, come su altri *FPSEs*, il cui utilizzo contemporaneo in numerose prove sperimentali rende blindate molte caratteristiche del loro design. Per questo motivo si è dovuti ricorrere a considerazioni logiche nell'assegnazione dei valori delle costanti elastiche delle molle meccaniche e del coefficiente di smorzamento dovuto al sistema di carico. Tali considerazioni si sono poi rivelate valide, nel momento in cui si è dimostrato (par.5.3) che il valore di tali parametri ha effetto solo sulla frequenza, l'ampiezza di oscillazione e lo sfasamento degli elementi mobili, ma non cambia assolutamente il funzionamento qualitativo del motore.

La simulazione di base, dunque, è stata fatta assegnando alle molle costanti elastiche tali da far risuonare i pistoni a frequenze vicine a quella operativa del motore, e annullando lo smorzamento dovuto al carico. Numerose prove successive hanno poi determinato l'effetto che la variazione di questi parametri ha sul sistema, fornendo precise indicazioni su quali aspetti del funzionamento risentano dell'applicazione di configurazioni diverse.

Una volta settati tutti i parametri, la simulazione ha dimostrato che per avviare il moto è sufficiente uno spostamento infinitesimo di uno dei pistoni dalla posizione di equilibrio (in questo caso è stato dato uno spostamento iniziale di 0.001 mm al displacer), essendo le parti del motore già alle rispettive temperature operative. Si verifica così quanto assunto nel paragrafo 4.3.2.

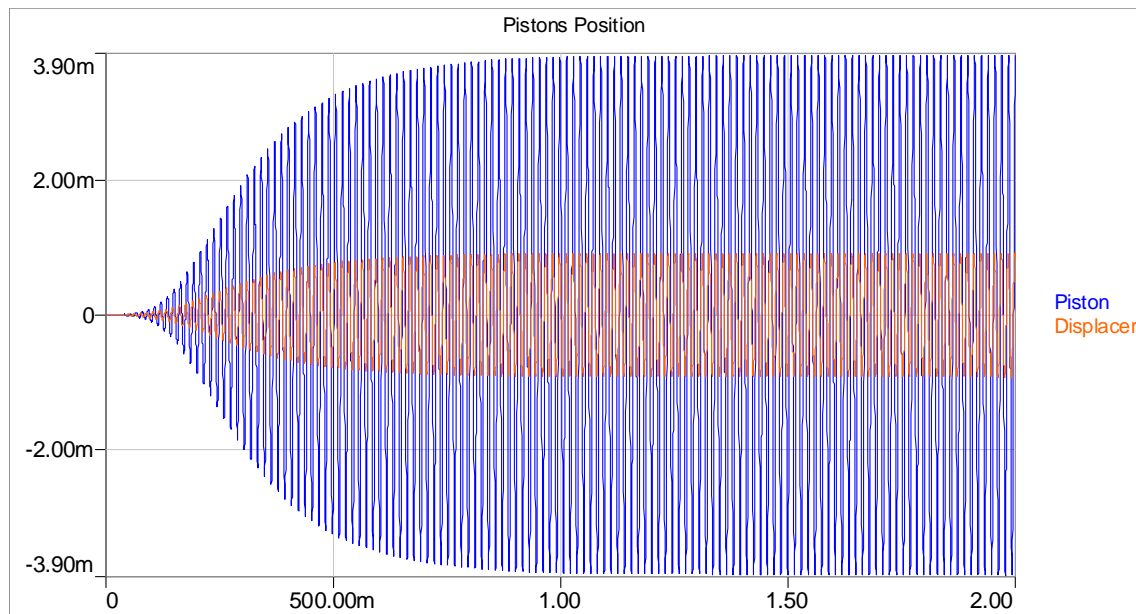
L'andamento risultante dei pistoni è illustrato in Fig. 5.3, dalla quale si vede che dopo un certo transiente iniziale, l'oscillazione degli stantuffi si stabilizza su un valore costante dell'ampiezza, che *rimane tale finché non viene variato uno dei parametri assunti*. Si noti la somiglianza con i risultati della simulazione di NASA sullo stesso motore, in Fig. 5.4.

Le prestazioni operative risultanti dalla simulazione sono riassunte in Tabella 5.1

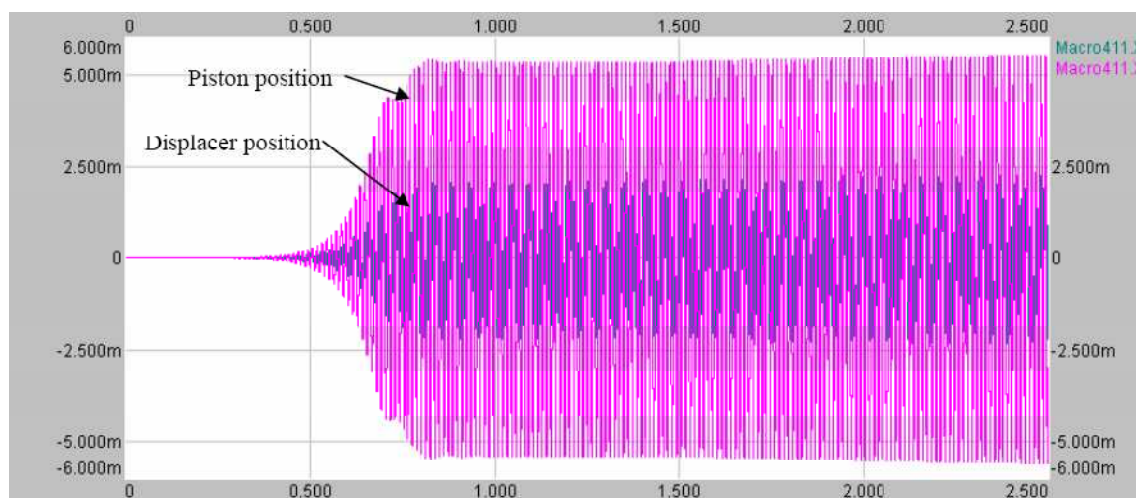
<b><i>Corsa massima del pistone (<math>X_P</math>)</i></b>	7.74 mm
<b><i>Rapporto di corsa pistone-displacer (<math>r</math>)</i></b>	4.2
<b><i>Frequenza (<math>f</math>)</i></b>	67 Hz
<b><i>Ritardo di fase pistone-displacer (<math>\varphi</math>)</i></b>	$\approx 29^\circ$

Tabella 5.1 - Risultati della simulazione per i principali parametri operazionali de motore

## 5 Validazione del modello e risultati

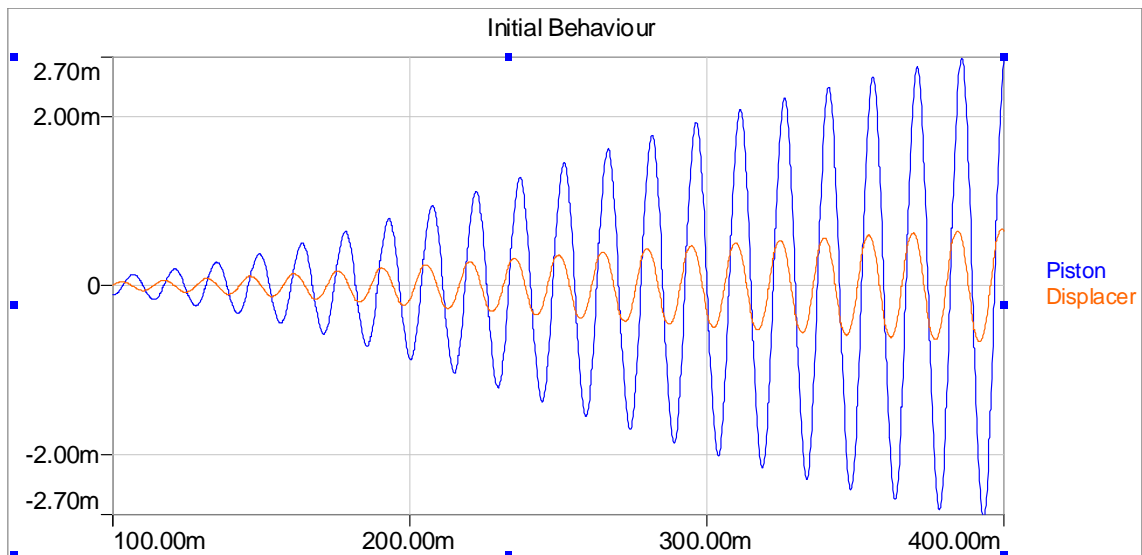


**Fig. 5.3 - Risultato della simulazione per l'andamento dei pistoni, in ordinata è indicato lo spostamento dalla posizione di equilibrio (in mm).**

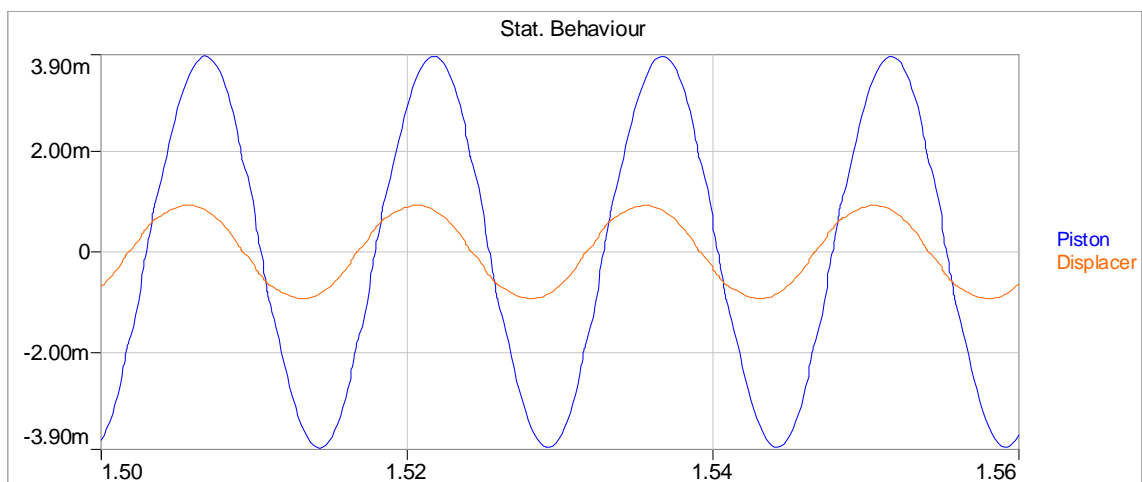


**Fig. 5.4 - Risultati della simulazione di NASA sul Technology Demonstration Converter, [27]**

Nelle Fig. 5.5e Fig. 5.6 di pagina seguente si possono anche apprezzare gli andamenti sia in fase iniziale che una volta raggiunta la condizione di regime. È da notare in quest'ultima situazione, l'angolo di ritardo di fase tra pistone e displacer. Questo parametro non può trovare riscontro con prove sperimentali effettive, i cui risultati non sono reperibili in forma completa. Tuttavia anche in questo caso, si tratta di un valore indicativo, che può essere modificato agendo opportunamente sulle grandezze di controllo del motore.



**Fig. 5.5 - Andamento divergente delle oscillazioni dei pistoni nel transiente iniziale, che si esaurisce in tempi dell'ordine di 1 sec.**



**Fig. 5.6 - Oscillazioni stazionarie dei pistoni, una volta raggiunta la condizione di regime**

Il comportamento appena illustrato, come già detto in precedenza, si deve alle caratteristiche stabilizzanti delle perdite di carico che si hanno nel canale di rigenerazione. Questo è reso ancor più evidente dal fatto che in questa simulazione esse rappresentano l'unica dissipazione di energia del motore, avendo eliminato temporaneamente il sottosistema di carico, e non considerando perdite per attrito nel movimento dei pistoni.

Lo schema di calcolo utilizzato fornisce l'andamento di queste perdite in funzione dello spostamento del displacer. Tale spostamento determina il modulo della densità di flusso di massa all'interno del canale, che per effetto della linearizzazione adottata, comporta la giusta differenza di pressione tra  $\tilde{p}_e$  e  $\tilde{p}_c$ . In Fig. 5.7 si vede il comportamento temporale di  $C_{loss}$ ,

## 5 Validazione del modello e risultati

mentre la Fig. 5.8 mostra la sua fluttuazione, una volta raggiunta la condizione di regime. Senza questa continua variazione, non si potrebbe ottenere il funzionamento stazionario osservato in Fig. 5.6, perché le oscillazioni risulterebbero inevitabilmente smorzate.

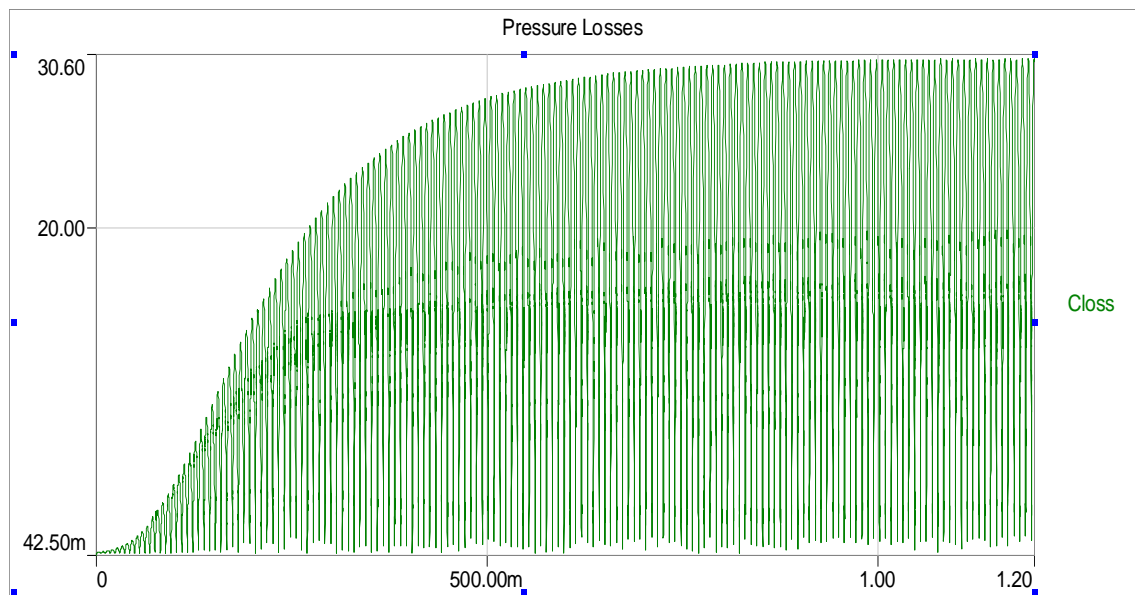


Fig. 5.7 - Andamento temporale del coefficiente di perdita di carico nel canale di rigenerazione, in  $N \cdot \text{sec}/\text{kg}$

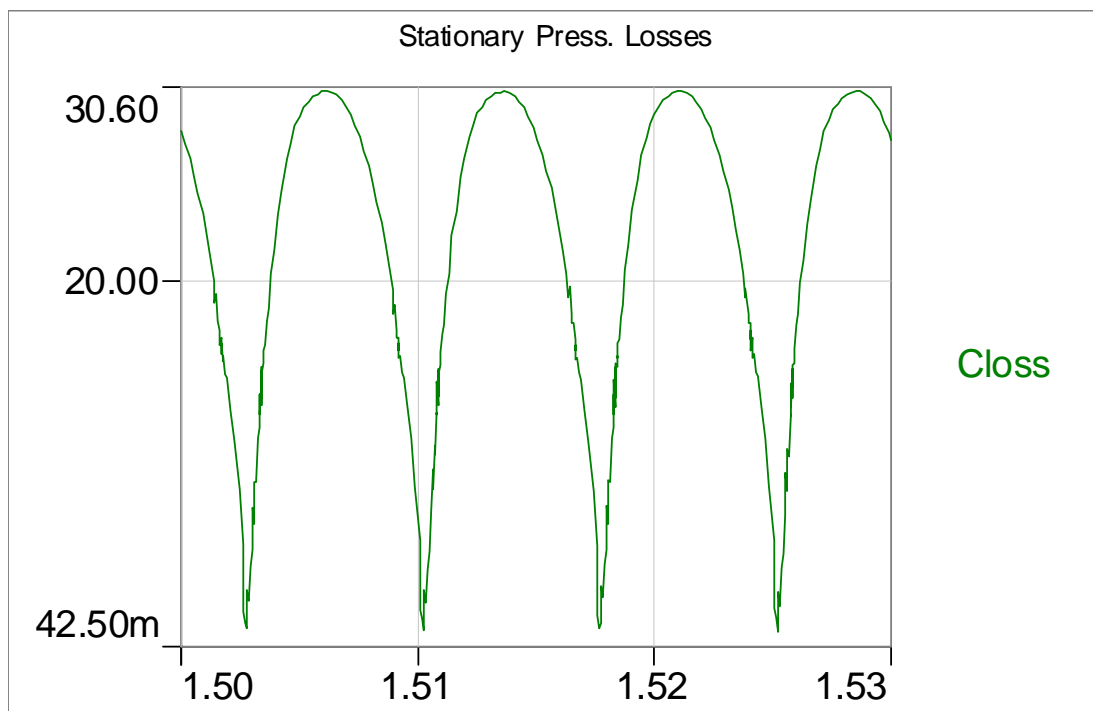


Fig. 5.8 - Variazione Stazionaria del coefficiente di perdita, il cui particolare comportamento agisce stabilizzando le oscillazioni dei pistoni

Il programma così strutturato fornisce naturalmente anche le fluttuazioni di pressione e temperatura nelle camere di lavoro e in quelle di rimbalzo. In particolare rivestono un certo interesse le variazioni di queste proprietà del gas in camera di espansione e di compressione. La Fig. 5.9 mostra l'andamento a regime di  $\tilde{T}_e$  e  $\tilde{T}_c$ , che quindi permettono di determinare tutta la distribuzione fluttuante di temperatura nel canale di rigenerazione, secondo le equazioni da (4.117) a (4.119). La Fig. 5.10, invece, illustra la variazione di pressione nelle camere di lavoro, effetto del movimento dei pistoni. Si osservi l'analogia con il comportamento della macchina di Stirling reale, descritto nel capitolo 1 e rappresentato in particolare nella Fig. 1.7.

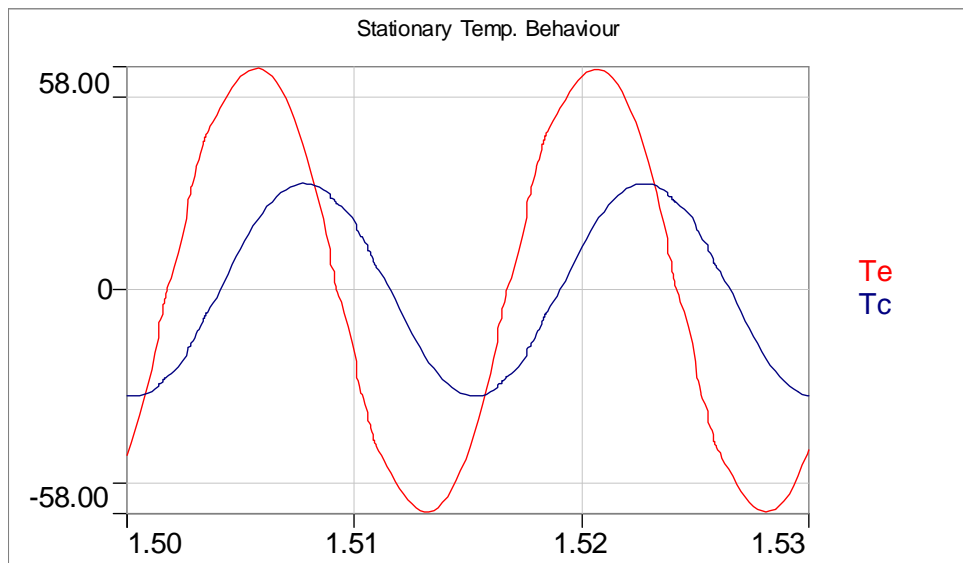


Fig. 5.9 - Fluttuazioni di temperatura, a regime, nella camera di compressione e nella camera di espansione, espresse in °K

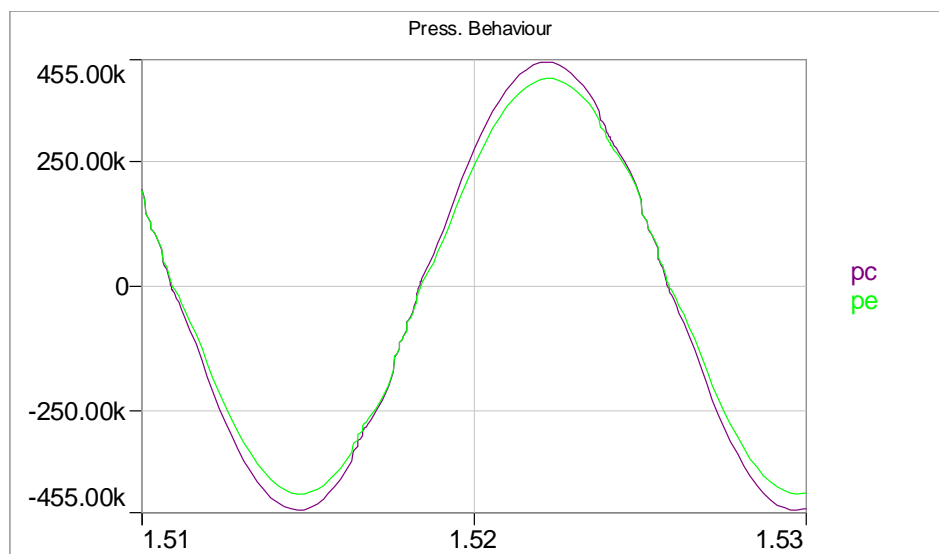


Fig. 5.10 - Fluttuazioni di pressione nelle camere di espansione e compressione, misurate in kPa

### 5.3 Studio dell'influenza delle grandezze di controllo

La simulazione appena vista dimostra la validità del modello proposto nel descrivere il funzionamento di un motore Sitrling a pistoni liberi, e la sua applicabilità ad un certo numero di diverse configurazioni e condizioni di utilizzo. Lo scopo della creazione di questo modello, comunque, va oltre la semplice capacità illustrativa. Quello che si è cercato di realizzare è uno strumento in grado di fornire precise indicazioni per un eventuale primo dimensionamento, che porti poi alla costruzione di un prototipo utilizzabile per prove pratiche.

La semplice implementazione del modello sulle caratteristiche di un motore già esistente appare un utilizzo riduttivo dello strumento di analisi, specialmente in casi come quello in esame, in cui molti dei parametri fissi del problema non hanno un riferimento preciso in letteratura, come appunto le costanti elastiche delle molle, o l'effetto del carico applicato. Perciò è risultato utile osservare il comportamento della soluzione del sistema al variare di uno o più di questi parametri, cercando di ottenere le relazioni fondamentali sulla loro influenza nelle prestazioni. Con questo intento sono state programmate le numerose simulazioni di cui si presenta un resoconto in questo paragrafo.

Riferendosi alla distinzione delle grandezze fondamentali nel funzionamento dei motori Free-Piston, operata nel paragrafo 2.1.5, sono state scelte come parametri liberi la pressione media  $p$ , il coefficiente di smorzamento dovuto al carico  $C_{ld\_l}$  e la temperatura operativa del riscaldatore  $T_{H_s}$ , tralasciando quella del refrigeratore, che comunque nelle applicazioni di interesse risulta semplicemente funzione delle condizioni ambientali di utilizzo, come illustrato nel capito 2. Vista l'importanza che rivestono nei modelli più recenti, si è deciso di aggiungere invece le costanti elastiche delle molle meccaniche, o comunque di quella collegata al pistone  $K_p$ , dato che la grande differenza di massa fra pistone e displacer la rende l'elemento caratterizzante sia la frequenza che l'ampiezza massima degli stantuffi.

I parametri operazionali di cui si osservano le variazioni, invece, sono quelli che caratterizzano completamente la dinamica degli elementi mobili, permettendo quindi di ricavare le prestazioni del motore (par. 2.1.5). Si tratta quindi della corsa massima del pistone  $X_p$ , del rapporto di corsa e del ritardo di fase tra pistone e displacer,  $r$  e  $\phi$ , e della frequenza di funzionamento  $f$ .

L'utilità di queste simulazioni, oltre a cercare di ottenere relazioni pratiche tra

$$K_p, C_{ld\_l}, p_m, T_{H_s} \rightarrow X_p, r, f, \phi \quad (5.9)$$



è quindi quella di verificare l'affidabilità del modello, anche qualora ci si sposti dalle condizioni appena descritte.

Da quanto visto, si è potuto stabilire che l'influenza della costante elastica della molla collegata al pistone si fa sentire soprattutto sull'ampiezza di oscillazione del pistone e sulla frequenza operativa, come dimostrano i grafici in Fig. 5.11, mentre ha poco effetto sul ritardo di fase.

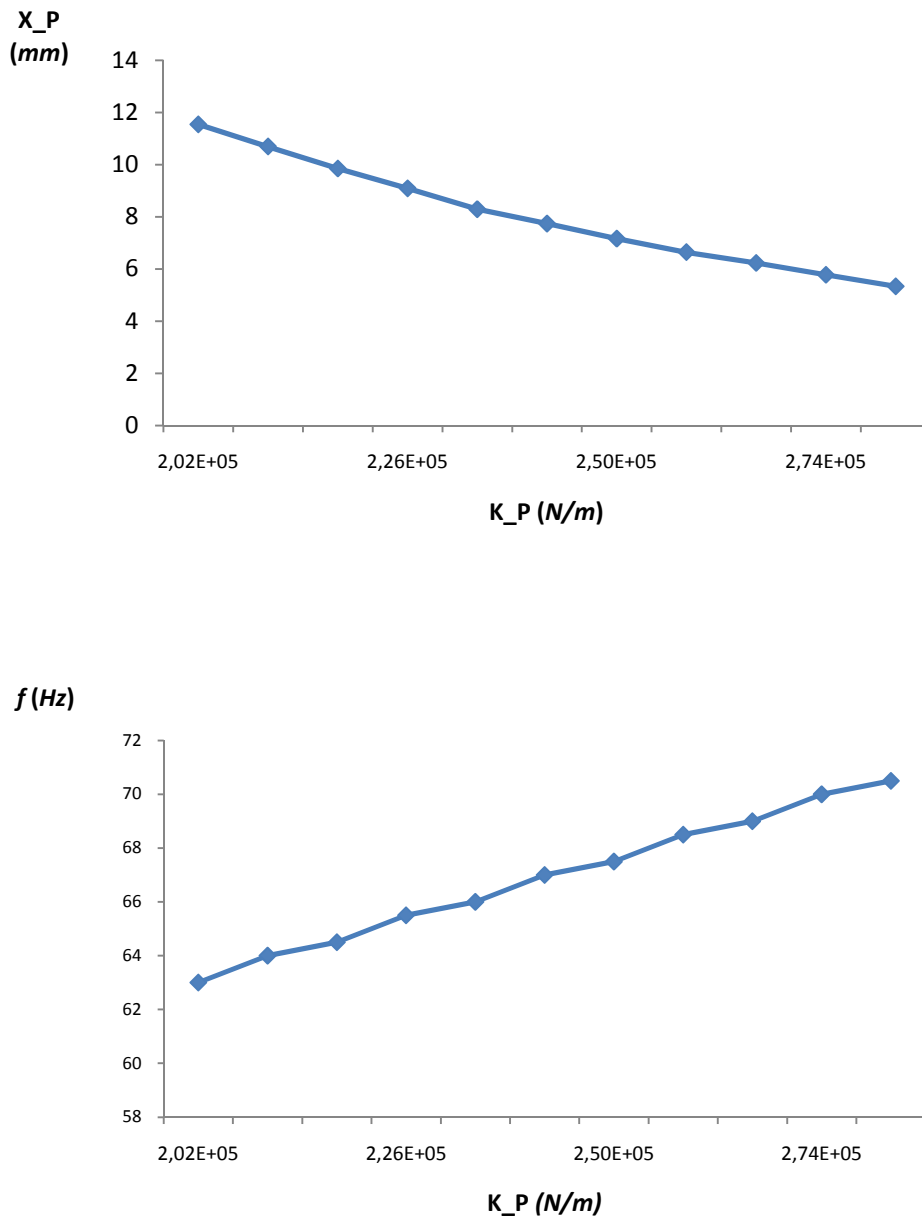


Fig. 5.11 - Comportamento della corsa massima del pistone e della frequenza operativa al variare della costante elastica della molla principale, considerando  $C_{ld\_I}=0$ .

## 5 Validazione del modello e risultati

Per quanto riguarda la temperatura del riscaldatore, si dimostra che essa *non ha alcun effetto sulla frequenza operativa*, mentre causa una variazione nell'ampiezza  $X_p$ , in ragione delle diverse forze di pressione che induce nella camera di espansione (Fig. 5.12).

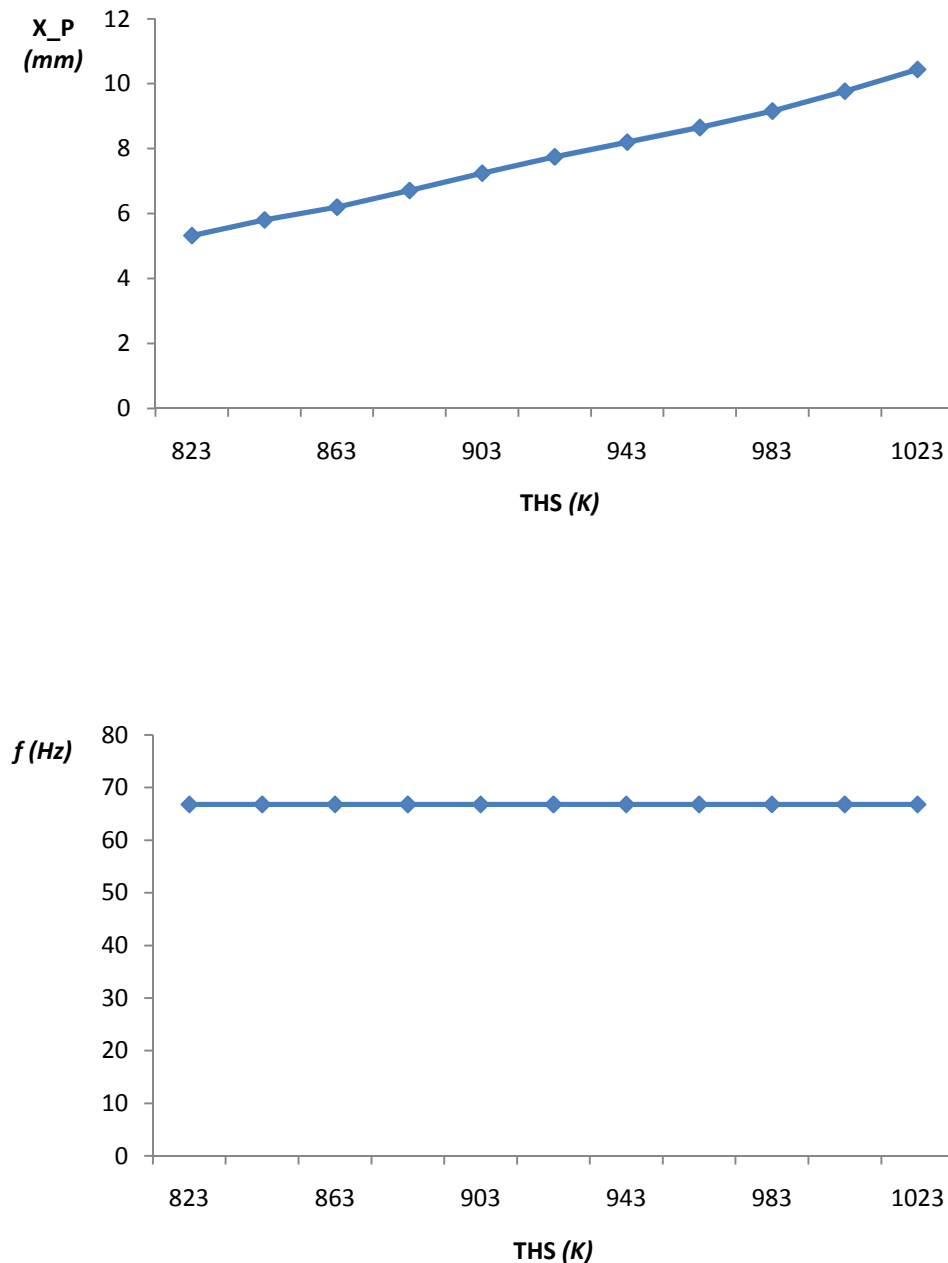


Fig. 5.12 - Comportamento della corsa massima del pistone e della frequenza operativa al variare della temperatura del riscaldatore.

Particolarmente interessanti sono i casi in cui si impone la variazione di più di un parametro, come si vede nei diagrammi seguenti, dai quali si intuisce la possibilità di ottenere, variando le condizioni operative, le caratteristiche di funzionamento volute. Nelle figure Fig. 5.13 e Fig. 5.14, per esempio, si può apprezzare l'effetto ottenuto collegando un sistema di carico al motore, che rispetti le considerazioni fatte nel paragrafo 4.7. Come è lecito aspettarsi, l'influenza del carico si fa sentire soprattutto sull'ampiezza di oscillazione del pistone di potenza. Tuttavia, utilizzando molle di diversa rigidezza, è possibile riportarsi nelle condizioni di funzionamento realizzate dal motore libero.

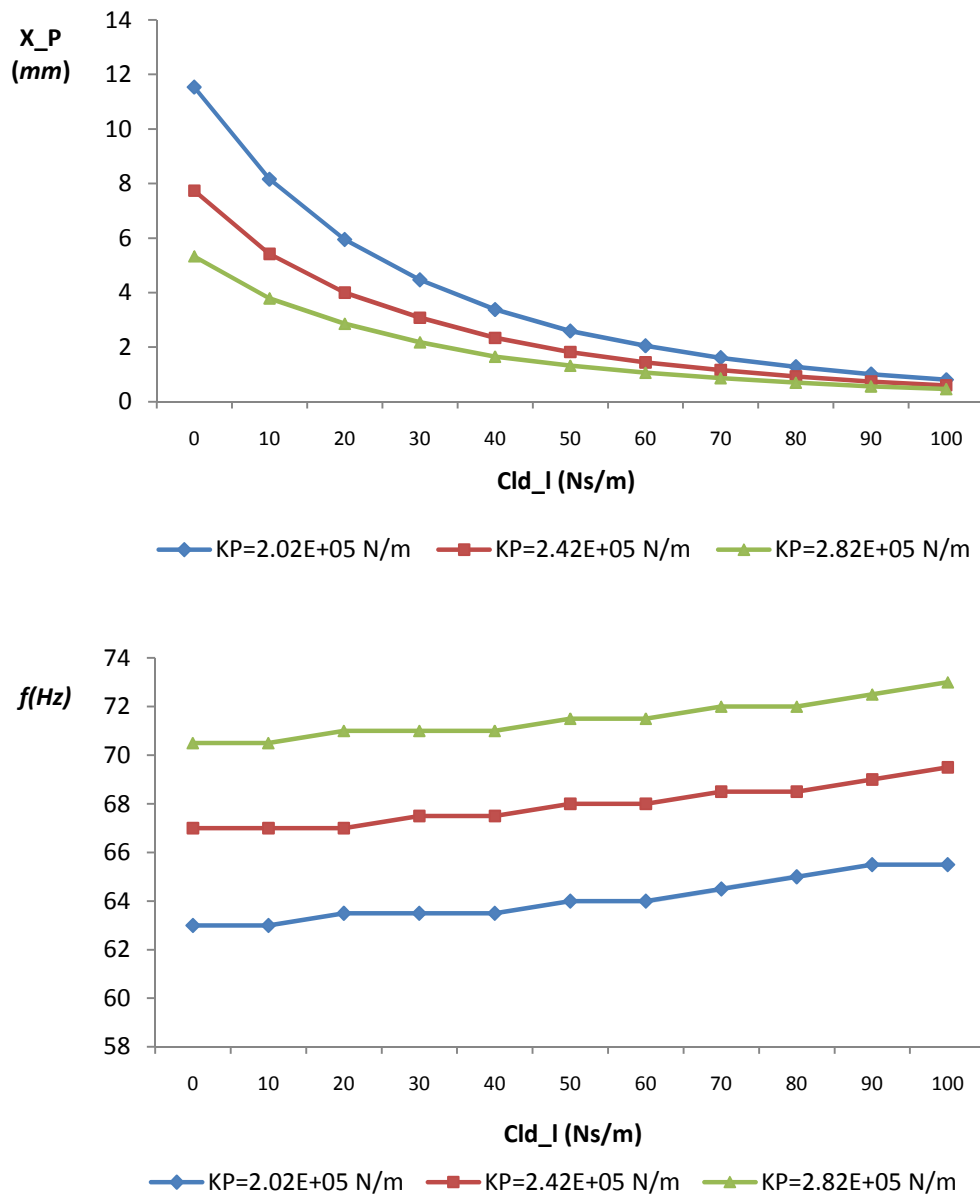


Fig. 5.13 - Variazione di  $X_P$  e di  $f$  in funzione dello smorzamento dato dal carico applicato, per diversi valori di rigidezza della molla principale

## 5 Validazione del modello e risultati

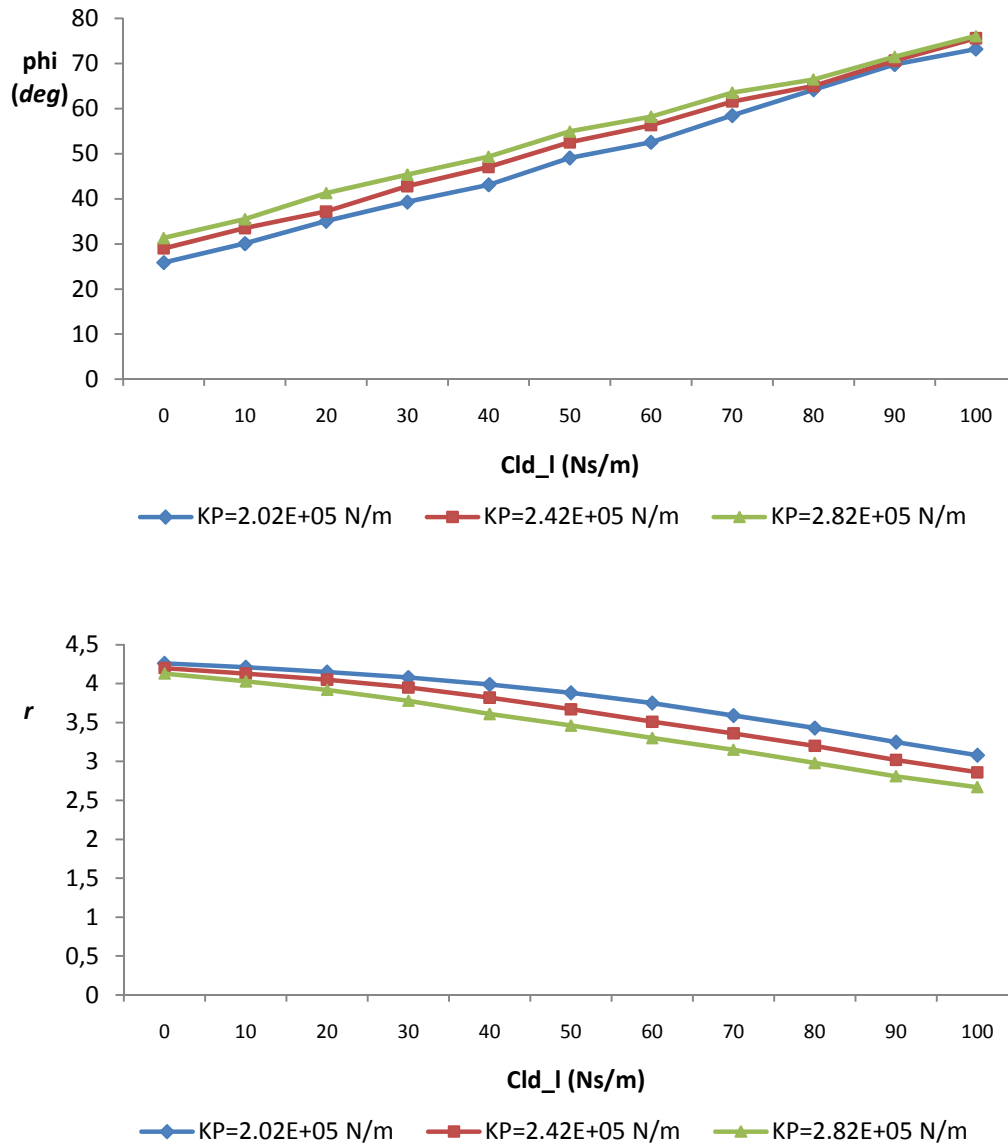


Fig. 5.14 - Variazione del ritardo di fase e del rapporto di corsa tra i pistoni al variare del carico applicato.

Anche la pressione media di esercizio del gas nel motore influisce sui parametri prestazionali. Essa è ovviamente funzione della massa totale di gas che si trova all'interno del volume complessivo. Massimizzare tale pressione significa aumentare la potenza utile estraibile dal motore. L'utilizzo di pressioni elevate rende indispensabile la presenza delle molle meccaniche, che in caso di lavoro a bassa pressione, potrebbero essere omesse senza pregiudicare il funzionamento del motore. Le alte pressioni medie sviluppano invece delle forze sui pistoni tali da portarli a scontrarsi con le pareti del motore. Tuttavia, come mostrano gli ultimi grafici, nelle pagine seguenti, assicurando il giusto valore delle costanti elastiche e dello smorzamento dovuto al carico, è possibile far lavorare il motore a pressioni anche molto alte, ottenendo prestazioni confrontabili con le precedenti.

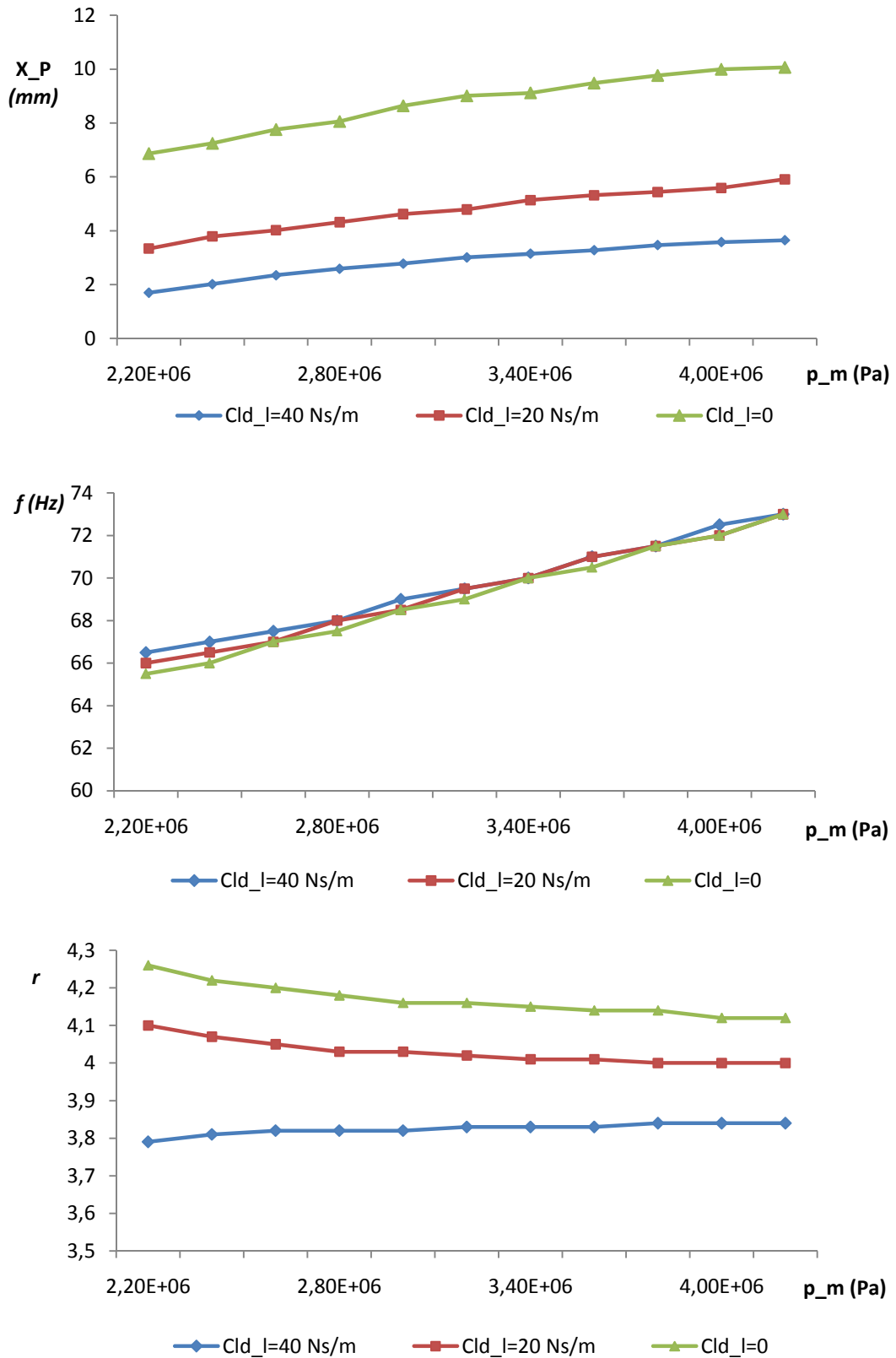


Fig. 5.15 - Variazione della corsa del pistone, della frequenza operativa, e del rapporto di corsa al variare della pressione media, per diversi valori di  $Cld\_l$  e con  $KP=2,42E+05$  N/m

## 5 Validazione del modello e risultati

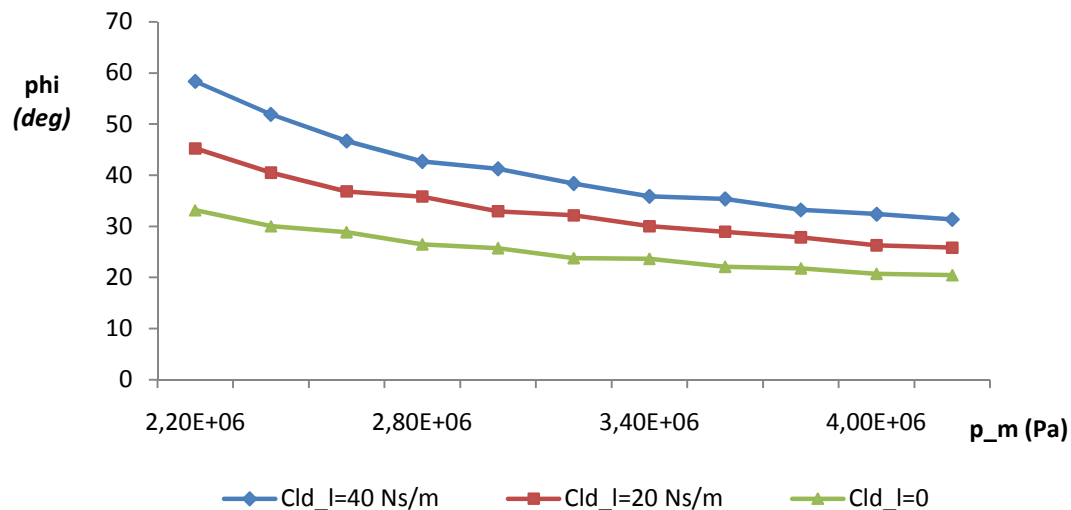


Fig. 5.16 - Variazione del ritardo di fase tra displacer e pistone al variare della pressione media, per diversi valori di  $Cld\_l$  e con  $KP=2.42E+05$  N/m

Gli andamenti raffigurati nei precedenti grafici mostrano i risultati di maggior interesse ottenuti dalle varie simulazioni. La lista completa di questi risultati è comunque riportata in Appendice B. È importante sottolineare che in tutte le prove realizzate per ottenere i diagrammi appena descritti, il sistema ha mostrato sempre lo stesso comportamento qualitativo, con oscillazioni prima divergenti e poi costanti. Ciò dimostra che le assunzioni semplificative fatte nell'impostare la prima configurazione (par. 5.2) non hanno effetto sul tipo di funzionamento del sistema, ma comportano semplicemente valori diversi dei parametri che caratterizzano le situazioni operative.

## 6 Conclusioni

Si analizzano adesso i risultati del lavoro di tesi, alla luce di quanto osservato nei capitoli 4 e 5, accennando inoltre all'utilità pratica di questo lavoro e alla possibilità di migliorarlo in futuro.

### *6.1 Risultati della tesi*

L'analisi ha studiato a fondo i processi dinamici e termodinamici caratteristici del funzionamento stabile dei motori Stirling a pistone libero, portando alla realizzazione di un modello matematico lineare (cap 4).

Questo modello, pur semplificato in alcuni aspetti, ha presentato alcuni elementi di originalità, rispetto ai precedenti lavori sviluppati nella stessa direzione. Infatti, oltre alla corretta descrizione del comportamento degli elementi mobili del motore, esso pone particolare attenzione all'andamento delle condizioni termodinamiche del fluido di lavoro, soprattutto per quanto riguarda l'effetto dissipativo e stabilizzante del rigeneratore poroso.

L'implementazione del modello attraverso un programma di simulazione ha convalidato le ipotesi che ne stanno alla base. La simulazione, basata su un prototipo già esistente e testato, ha mostrato una buona capacità di predire sia l'andamento qualitativo della dinamica e termodinamica del motore, sia l'aspetto quantitativo delle prestazioni raggiunte (par. 5.2). Pur con le limitate informazioni disponibili, il raffronto fra i risultati del modello e le prove sperimentali eseguite sul motore reale hanno presentato una notevole corrispondenza..

Lo studio parametrico effettuato in seguito ha voluto dimostrare come i soddisfacenti risultati, ottenuti nella prima fase di simulazione, non fossero frutto della combinazione dei parametri adottati, ma della giusta interpretazione dei fenomeni fisici descritti. Questa analisi, eseguita al variare di quelle che sono state considerate le grandezze di controllo fondamentali del sistema, ha portato inoltre a determinare la tendenza dei principali parametri prestazionali del motore (par 5.3), fornendo quindi istruzioni utili al dimensionamento preliminare di un prototipo sperimentale.

### 6.2 Applicazioni future del modello

Il modello creato per questa tesi potrà quindi essere impiegato, almeno in fase iniziale, per la realizzazione pratica di un motore Stirling a pistone libero, il cui effetto sia semplicemente la conversione termo-meccanica di energia. In aggiunta, affiancandogli, una schematizzazione valida per l'alternatore lineare, sarà possibile ottenere il progetto teorico di un convertitore termo-elettrico del tipo visto nel paragrafo 2.2.

In alternativa, con riferimento ad un prototipo esistente, il modello sarà in grado di predire una stima piuttosto accurata delle sue prestazioni al variare delle condizioni di utilizzo, oppure di fornire, mediante la scelta mirata dei parametri liberi, le giuste indicazioni per le eventuali leggi di scalatura.

### 6.3 Margini di miglioramento

Il modello può essere reso più accurato, esaminando più in dettaglio alcuni degli aspetti che esso considera in modo più approssimato, date le sue iniziali esigenze di semplicità. In particolare gli elementi che secondo il parere dell'autore possono essere oggetto di futuri approfondimenti sono:

- *Un' efficienza non unitaria per il rigeneratore e gli scambiatori*, abbandonando l'ipotesi di un'uguale temperatura per il gas e per la struttura. Sarebbe così possibile stimare le perdite di calore e quindi le quantità effettive di energia scambiata dal motore con le sorgenti termiche, ottenendo indicazioni sul rendimento della macchina
- *Un'analisi più realistica dei processi di trasferimento convettivo di calore negli scambiatori*, in modo da ricostruire con maggior precisione il profilo di temperatura del gas al loro interno. Questo permetterebbe inoltre di determinare le caratteristiche degli scambiatori (lunghezza, diametro dei dotti) necessarie al corretto riscaldamento o raffreddamento del gas.
- *La modellizzazione di un eventuale alternatore lineare*, così da collegare il coefficiente  $C_{ld\_1}$  alle sue caratteristiche costruttive (numero e sezione degli avvolgimenti, intensità dei magneti, traferri, ecc). Ciò consentirebbe di stimare la potenza elettrica ottenibile, o in alternativa, sotto determinati requisiti di potenza, dimensionare l'alternatore stesso, e quindi il suo effetto sul moto del pistone.



- *La considerazione del calore sviluppato dal sottosistema di carico* (alternatore o altro), che fornirebbe un valore più preciso della temperatura media del gas nella camera di rimbalzo.
- *Una stima più circostanziata dei trafilamenti*, che permetterebbe di analizzare la reale redistribuzione del gas nelle camere durante il funzionamento, così da dimensionare degli organi di centramento tali da garantire la posizione desiderata dei punti medi di oscillazione.

Questi e altri spunti di riflessione possono portare il presente modello ad un livello superiore di precisione, che rappresenti la comprensione accurata del meccanismo di funzionamento di questo tipo di motori, e possa contribuire all'ulteriore sviluppo di questa tecnologia.

# Appendice A

## Script del programma di simulazione

Si riporta di seguito lo script completo del programma di simulazione costruito con il software Ansoft Simplorer 7.

```
INTERN EQU {THS:=923 ;
            TKS:=353 ;
            TD:=(THS-TKS)/(ln(THS/TKS)) ;
            DD:=0.0548 ;
            DP:=0.036 ;
            t_ext:=0.00144 ;
            MD:=0.2044 ;
            MP:=2.044 ;
            KD:=((200*PI)^2)*MD ;
            KP:=0.3*((200*PI)^2)*MP ;
            Cl_d_1:=0 ;
            AD:=PI*((DD/2)^2) ;
            AP:=PI*((DP/2)^2) ;
            epsilon:=0.9 ;
            gamma:=1.66667 ;
            D:=0.06923 ;
            DB:=0.14423 ;
            A:=(PI/4)*((D^2)-((DD+t_ext)^2)) ;
            Le:=0.0115 ;
            Lc:=0.0043 ;
            LB:=0.231 ;
            LK:=0.0317 ;
            LR:=0.075 ;
            LH:=0.02 ;
            LD:=0.13846 ;
            LDs:=0.003 ;
            LPs:=0.006 ;
            pm:=2590000 ;
            n:=280 ;
            fi_duct:=0.001 ;
            sigma:=(PI*n*(fi_duct^2))/(4*A) ;
            Ve:=(Le*PI/4*(D^2-DD^2))+ (LDs*PI/4*(DD^2)) ;
            Vc:=(Lc*PI/4*(D^2-
                D^2))+ (LPs*PI/4*(DP^2))+ (LDs*PI/4*(DD^2)) ;
            VB:=(LB*PI/4*(DB^2))- (LPs*PI/4*(DP^2)) ;
            VD:=LD*PI/4*(DD^2) ;
            VH:=sigma*A*LH ;
            VK:=sigma*A*LK ;
            VR:=epsilon*A*LR ;
            R:=2.077 ;
            k:=11.4 ;
            b:=0.00288 ;
            mu_R:=3.59*(10^(-4)) ;
            dp:=0.0008 ;
            Dhub:=0.0115 ;
            Ahub:=(Dhub^2)*PI/4 ;
            GR:=0 ;
            Teh:=THS ;
            Tck:=TKS ;
            mu_H:=4.94*(10^(-4)) ;
```

```

mu_K:=2.24*(10^(-4)) ;
ro_H:=pm/(R*THS) ;
ro_R:=pm/(2*R)*((1/THS)+(1/TKS)) ;
ro_K:=pm/(R*TKS) ;
Closs:=(180*(1-
epsilon)^2*mu_R*LR)/(ro_R*(dp^2)*(epsilon^3)) ; } DST:

SIM(Type:=SFML, Sequ:=INIT);

COUPL DES DES1 (ORD:=1,DIM:=12,SYSTEM:=
{
  {{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,0,1,0,0,
0,0,0,0,0,0,0}},{{0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,
0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0}},{{0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0}},{{0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0}},
{{0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0}},{{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0}},{{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1}}

  ,{{0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{KD/MD,0,0,0,AD/MD,0,-(AD-
Ahub)/MD,0,-Ahub/MD,0,0,0}},{{0,0,0,-
1,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,0,KP/MP,Cld_l/MP,0,0,AP/MP,0,0,0,-AP/MP,0}},{{0,-
(gamma*pm*AD)/(Ve),0,0,(epsilon*A*R*THS)/(Ve*Closs),0,-
(epsilon*A*R*THS)/(Ve*Closs),0,0,0,0,0}},{{0,-((gamma-
1)*AD*THS)/Ve,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,(gamma*pm*(AD-Ahub))/Vc,0,-
(gamma*pm*AP)/Vc,-
(epsilon*A*R*TKS)/(Vc*Closs),0,(epsilon*A*R*TKS)/(Vc*Closs),0,0,0,0,0}}
  ,{{0,((gamma-1)*(AD-Ahub)*TKS)/Vc,0,-((gamma-
1)*AP*TKS)/Vc,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,(gamma*Ahub*pm)/VD,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}},
{{0,((gamma-
1)*Ahub*TD)/VD,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}},{{0,0,0,(gamma*AP*pm)/VB,0,0,0,0,0,0,0,0,0}},
{{0,0,0,((gamma-1)*AP*TKS)/VB,0,0,0,0,0,0,0,0,0}}
}

,RS:=
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

,IC:=
{
  {0.000001}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
  ,{0}
}

,INTEGRATOR:=0,ErrMAX:=10m) DST: SIM(Type:=DESSolver,
Inst:=DES1) ;
INTERN MAXT XP ( INPUT:=Piston,Y0:=0,FACT:=1,TS:=0) ;
INTERN MAXT XD ( INPUT:=Displacer,Y0:=0,FACT:=1,TS:=0) ;

```

```

INTERN EQU { pe:=DES1.SV[4,0] ;
            Te:=DES1.SV[5,0] ;
            pc:=DES1.SV[6,0] ;
            Tc:=DES1.SV[7,0] ;
            pgs:=DES1.SV[8,0] ;
            Tgs:=DES1.SV[9,0] ;
            pB:=DES1.SV[10,0] ;
            TB:=DES1.SV[11,0] ;
            GR:=(pe-pc)/Closs ;
            Re_H:=(epsilon*(abs(GR))*fi_duct)/(sigma*mu_H) ;
            Re_K:=(epsilon*(abs(GR))*fi_duct)/(sigma*mu_K) ;
            IF(GR=0 )

            {f_H:=0}
            ELSE IF( Re_H>= 6000)
            {f_H:=0.079/(Re_H^0.25)}
            ELSE IF(Re_H>=2000)
            {f_H:=7.343*(10^(-4))*(Re_H^0.3142)}
            ELSE
            {f_H:=16/Re_H} ;
            IF(GR=0 )
            {f_K:=0}
            ELSE IF( Re_K>= 6000)
            {f_K:=0.079/(Re_K^0.25)}
            ELSE IF(Re_K>=2000)
            {f_K:=7.343*(10^(-4))*(Re_K^0.3142)}
            ELSE
            {f_H:=16/Re_K} ;
            ktH:=1.5+(f_H*LH/fi_duct) ;
            ktK:=1.5+(f_K*LK/fi_duct) ;
            Closs:=(180*(1-
            epsilon)^2*mu_R*LR)/(ro_R*(dp^2)*(epsilon^3))+(((epsilon^2*PI*kt
            H)/(8*ro_H*(sigma^2))+epsilon^2*PI*ktK)/(8*ro_K*(sigma^2)))+(1.8
            *PI*LR*(1-epsilon))/(4*ro_R*dp*(epsilon^3))*abs( GR )) ;

            Piston:=DES1.SV[2,0] ;
            Displacer:=DES1.SV[0,0] ;

            IF(XD.VAL=0)
            {r:=0}
            ELSE
            {r:=XP.VAL/XD.VAL} ;}

SIMCTL simCtl1
{
SIMCFG SECM SECM1 ( Solver := 1, LDF := 1, Iteratmax := 40,
IEmax := 0.001, VEmax := 0.001 ) ;
SIMCFG SIMPLORER_TR Simplorer1 ( Tend := 2, Hmin := 10u, Hmax :=
1m ) ;
SIMCFG SIMPLORER_AC Simplorer2 ( Fstart := 1, Fend := 1k, Fstep
:= 10, ACSweepType := 1, Iteratmax := 40, EMaxAC := 1u ) ;
SIMCFG SIMPLORER_DC Simplorer3 ( Iteratmax := 50, EMaxDC := 1m,
Relaxmax := 10 ) ;
SIMCFG SIMPLORER Simplorer4 ( Theta := 27, BDMold := 1) ;
}

OUTCTL outCtl1
{

OUTCFG VIEWTOOL out1 ( xmin := 0, xmax := Tend, ymin := -400,
Ymax := 400 ) ;

RESULT VIEW VANALOG_0 ( DES1.SV[9,0], Type:=ANALOG ) ;
RESULT SDB SDB_1( DES1.SV[9,0] ) ;
RESULT VIEW VANALOG_2 ( DES1.SV[8,0], Type:=ANALOG ) ;
RESULT SDB SDB_3( DES1.SV[8,0] ) ;
RESULT VIEW VANALOG_4 ( DES1.SV[7,0], Type:=ANALOG ) ;

```

```

RESULT SDB SDB_5( DES1.SV[7,0] );
RESULT VIEW VANALOG_6 ( DES1.SV[6,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_7( DES1.SV[6,0] );
RESULT VIEW VANALOG_8 ( DES1.SV[5,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_9( DES1.SV[5,0] );
RESULT VIEW VANALOG_10 ( DES1.SV[4,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_11( DES1.SV[4,0] );
RESULT VIEW VANALOG_12 ( DES1.SV[3,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_13( DES1.SV[3,0] );
RESULT VIEW VANALOG_14 ( DES1.SV[2,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_15( DES1.SV[2,0] );
RESULT VIEW VANALOG_16 ( DES1.SV[1,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_17( DES1.SV[1,0] );
RESULT VIEW VANALOG_18 ( DES1.SV[0,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_19( DES1.SV[0,0] );
RESULT SDB SDB_20( DES1.SV[10,0] );
RESULT VIEW VANALOG_21 ( DES1.SV[10,0], Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_22( Closs );
RESULT VIEW VANALOG_23 ( Closs, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_24( b );
RESULT VIEW VANALOG_25 ( b, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_26( THS );
RESULT VIEW VANALOG_27 ( THS, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_28( GR );
RESULT VIEW VANALOG_29 ( GR, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_30( Teh );
RESULT VIEW VANALOG_31 ( Teh, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_32( Tck );
RESULT VIEW VANALOG_33 ( Tck, Type:=ANALOG );
RESULT VIEW VANALOG_34 ( XD.VAL, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_35( XD.VAL );
RESULT VIEW VANALOG_36 ( GR, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_37( Closs );
RESULT SDB SDB_38( GR );
RESULT VIEW VANALOG_39 ( Closs, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_40( pe );
RESULT VIEW VANALOG_41 ( pe, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_42( pc );
RESULT VIEW VANALOG_43 ( pc, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_44( Displacer );
RESULT VIEW VANALOG_45 ( Displacer, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_46( Piston );
RESULT VIEW VANALOG_47 ( Piston, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_48( Te );
RESULT VIEW VANALOG_49 ( Te, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_50( Tc );
RESULT VIEW VANALOG_51 ( Tc, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_52( pgs );
RESULT VIEW VANALOG_53 ( pgs, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_54( r );
RESULT VIEW VANALOG_55 ( r, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_56( Tgs );
RESULT VIEW VANALOG_57 ( Tgs, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_58( TB );
RESULT VIEW VANALOG_59 ( TB, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_60( pB );
RESULT VIEW VANALOG_61 ( pB, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_62( XP.VAL );
RESULT VIEW VANALOG_63 ( XP.VAL, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_64( TKS );
RESULT VIEW VANALOG_65 ( TKS, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_66( KP );
RESULT VIEW VANALOG_67 ( KP, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_68( Cl_d_1 );
RESULT VIEW VANALOG_69 ( Cl_d_1, Type:=ANALOG );
RESULT SDB SDB_70( pm );
RESULT VIEW VANALOG_71 ( pm, Type:=ANALOG );

```

## *Appendici*

```
OUTCFG SimplorerDB DB1  
( Xmin := 0, Xmax := Tend, Reduce := 0, StepNo := 2,  
  Stepwidth := 10u, RelChange := 0.0 );  
}
```

```
RUN ( Model:=, Out := OutCtl1, Sim := SimCtl1 );
```

## Appendice B

### Risultati completi delle simulazioni

Per completezza si riportano di seguito tutti i dati relativi alle simulazioni, effettuate per determinare gli andamenti dei grafici esposti nel capitolo 5.

#### *Variatione di $K_p$*

<b><math>K_p</math> (N/m)</b>	<b><math>XP</math> (mm)</b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>\Phi</math> (deg)</b>	<b><math>f</math>(Hz)</b>
2,02E+05	11,54	4,26	25,87	63
2,10E+05	10,69	4,24	26,63	64
2,18E+05	9,85	4,23	26,73	64,5
2,26E+05	9,09	4,22	27,87	65,5
2,34E+05	8,29	4,21	27,79	66
2,42E+05	7,74	4,2	29	67
2,50E+05	7,16	4,19	28,83	67,5
2,58E+05	6,64	4,17	30,18	68,5
2,66E+05	6,23	4,16	29,94	69
2,74E+05	5,77	4,14	31,3	70
2,82E+05	5,33	4,13	31,31	70,5

#### *Variatione di $T_{H_s}$*

<b><math>T_{H_s}</math> (K)</b>	<b><math>XP</math> (mm)</b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>\Phi</math> (deg)</b>	<b><math>f</math>(Hz)</b>
823	5,32	4,18	31,89	66,8
843	5,8	4,18	0,09	66,8
863	6,2	4,19	30,28	66,8
883	6,71	4,19	29,55	66,8
903	7,24	4,2	28,84	66,8
923	7,75	4,2	28,26	66,8
943	8,2	4,2	27,75	66,8
963	8,65	4,2	27,3	66,8
983	9,16	4,21	26,81	66,8
1003	9,77	4,21	26,22	66,8
1023	10,44	4,21	25,67	66,8

## Appendici

### Variazione di $C_{ld\_1}$ per diversi valori di $K_p$

$$K_p = 2.02 \times 10^5 \text{ N/m}$$

<b><math>C_{ld\_1}</math> (Ns/m)</b>	<b><math>XP</math> (mm)</b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>\Phi</math> (deg)</b>	<b><math>f</math>(Hz)</b>
0	11,54	4,26	25,87	63
10	8,16	4,21	30,1	63
20	5,95	4,15	35,06	63,5
30	4,47	4,08	39,32	63,5
40	3,38	3,99	43,14	63,5
50	2,59	3,88	49,1	64
60	2,05	3,75	52,54	64
70	1,61	3,59	58,49	64,5
80	1,28	3,43	64,22	65
90	1,01	3,25	69,79	65,5
100	0,801	3,08	73,24	65,5

$$K_p = 2.42 \times 10^5 \text{ N/m}$$

<b><math>C_{ld\_1}</math> (Ns/m)</b>	<b><math>XP</math> (mm)</b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>\Phi</math> (deg)</b>	<b><math>f</math>(Hz)</b>
0	7,74	4,2	29	67
10	5,42	4,13	33,5	67
20	4	4,05	37,19	67
30	3,08	3,95	42,8	67,5
40	2,34	3,82	47,07	67,5
50	1,82	3,67	52,53	68
60	1,44	3,51	56,35	68
70	1,16	3,36	61,6	68,5
80	0,929	3,2	65,03	68,5
90	0,74	3,02	70,65	69
100	0,601	2,86	75,62	69,5



$$K_p = 2.82 \times 10^5 \text{ N/m}$$

<b><i>C<sub>ld_l</sub></i> (Ns/m)</b>	<b><i>XP</i> (mm)</b>	<b><i>r</i></b>	<b><i>Phi</i> (deg)</b>	<b><i>f</i>(Hz)</b>
0	5,33	4,13	31,31	70,5
10	3,79	4,03	35,49	70,5
20	2,86	3,92	41,29	71
30	2,18	3,78	45,38	71
40	1,65	3,61	49,36	71
50	1,32	3,46	54,94	71,5
60	1,06	3,3	58,26	71,5
70	0,862	3,15	63,55	72
80	0,696	2,98	66,5	72
90	0,563	2,81	71,53	72,5
100	0,467	2,67	76,1	73

*Variazione di  $p_m$  per diversi valori di  $C_{ld_l}$*

$$C_{ld_l} = 0$$

<b><i>p<sub>m</sub></i> (Pa)</b>	<b><i>XP</i> (mm)</b>	<b><i>r</i></b>	<b><i>Phi</i> (deg)</b>	<b><i>f</i>(Hz)</b>
2,20E+06	6,87	4,26	33,14	65,5
2,40E+06	7,25	4,22	30,01	66
2,60E+06	7,76	4,2	28,86	67
2,80E+06	8,06	4,18	26,49	67,5
3,00E+06	8,64	4,16	25,73	68,5
3,20E+06	9,01	4,16	23,79	69
3,40E+06	9,12	4,15	23,65	70
3,60E+06	9,49	4,14	22,1	70,5
3,80E+06	9,77	4,14	21,8	71,5
4,00E+06	10	4,12	20,72	72
4,20E+06	10,07	4,12	20,46	73

## Appendici

$$C_{ld\_l} = 20 \text{Ns/m}$$

<b><math>p\_m</math> (Pa)</b>	<b><math>XP</math> (mm)</b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>\Phi</math> (deg)</b>	<b><math>f</math>(Hz)</b>
2,20E+06	3,34	4,1	45,24	66
2,40E+06	3,79	4,07	40,49	66,5
2,60E+06	4,02	4,05	36,83	67
2,80E+06	4,32	4,03	35,82	68
3,00E+06	4,62	4,03	32,93	68,5
3,20E+06	4,79	4,02	32,15	69,5
3,40E+06	5,14	4,01	30,02	70
3,60E+06	5,32	4,01	28,94	71
3,80E+06	5,44	4	27,85	71,5
4,00E+06	5,59	4	26,27	72
4,20E+06	5,91	4	25,83	73

$$C_{ld\_l} = 40 \text{Ns/m}$$

<b><math>p\_m</math> (Pa)</b>	<b><math>XP</math> (mm)</b>	<b><math>r</math></b>	<b><math>\Phi</math> (deg)</b>	<b><math>f</math>(Hz)</b>
2,20E+06	1,7	3,79	58,37	66,5
2,40E+06	2,02	3,81	51,89	67
2,60E+06	2,35	3,82	46,68	67,5
2,80E+06	2,59	3,82	42,7	68
3,00E+06	2,78	3,82	41,26	69
3,20E+06	3,01	3,83	38,39	69,5
3,40E+06	3,15	3,83	35,86	70
3,60E+06	3,28	3,83	35,39	71
3,80E+06	3,47	3,84	33,21	71,5
4,00E+06	3,58	3,84	32,39	72,5
4,20E+06	3,65	3,84	31,35	73

# Bibliografia

- [1] “*Stirling Engines*” –Walker G., 1980 – *Oxford University Press*
- [2] “*Air Engines*” – Finkelstein T., Organ A.J., 2001 – *ASME Press*
- [3] “*La Macchina di Stirling*” – Naso V., 1991 – *Editoriale ESA*
- [4] “*Analisi Termodinamica e Dinamica di Motori Stirling a Pistone Libero*” – de Monte F., 1993 – *Università degli Studi di L’Aquila*
- [5] “*Stirling cycle Engines Analysis*” – Urieli I., Berchowitz D.M., 1984 – *Adam Highler Ltd*
- [6] “*The Development of Stirling Engines at Sunpower, Inc.*” – Beale W., 1983 – 2<sup>nd</sup> *International Conference on Stirling Engine, Shanghai, China.*
- [7] “*Solar Stirling Engines*” – Lindsey E.F.,1978 – *Popular Science*
- [8] “*Free Piston Stirling Engines, some Model Tests and Simulations*” – William Beale, 1969 – *SAE*
- [9] “*High Performance Free-Piston Stirling Engines*” – Sunpower Inc. brochure
- [10] “*Diesel Fuel-to-Electric Energy Conversion Using Compact, Portable, Stirling Engine-Based Systems*” – Huth J., Collins J. - *13th International Stirling Engine Conference*
- [11] “*Lunar Electric Power Systems Utilizing The SP-100 Reactor Coupled to Dynamic Conversion Systems*” – Rockwell International, Rocketdyne Division – *NASA Contractor Report CR-191023*
- [12] “*Technology Development for a Stirling Radioisotope Power System for Deep Space Missions*” – Thieme L. G., Qiu S., White M. A.,2000 - *Paper NASA/TM—2000-209767*
- [13] “*Update on the NASA GRC Stirling Technology Development Project* – Thieme L. G., Schreiber J.G., 2000 - *Paper NASA/TM—2000-210592*
- [14] “*Extended Operation of Stirling Convertors*” – Schreiber J.G., Roth M.E., Pepper S.V., 2004 - *Paper NASA/TM—2004-213388*

- [15] “*Developmental Considerations on the Free-Piston Stirling Power Convertor for Use in Space*” – Schreiber J.G., 2007 – *Paper NASA/TM—2007-214805*
- [16] “*Reliability Quantification of the Flexure: A Critical Stirling Convertor Component*” – Shah A.R., Korovaichuk I, Zampino E.J., 2004 – *Paper NASA/TM—2004-213412*
- [17] “*A 3-D Magnetic Analysis of a Linear Alternator for a Stirling Power System*” – Geng S.M., Schwarze G.E., Niedra J.M., 2000 – *Paper NASA/TM—2000-210249*
- [18] “*Advanced 80 We Stirling Convertor Development Progress*” – Wood J.G., Carroll C., Penswick L.B., 2005 - *AIP Conference Proceedings (2005)*
- [19] “*Advanced 80 We Stirling Convertor Phase II Development Progress*” - Wood J.G., Carroll C., Penswick L.B., Matejczyk D., 2005 – *Progress report at Sunpower Inc.*
- [20] “*Continued Development of the Advanced Stirling Convertor (ASC)*”- Buffalino A., Wilson K., Wong W.A., Wood J.G., Penswick L.B., Matejczyk D., 2007 – *Progress report at Sunpower Inc.*
- [21] “*Advanced Stirling Convertor (ASC)—From Technology Development to Future Flight Product*” – Wong W.A., Wilson K., Wood J.G., 2008 – *Paper NASA/TM—2008-215282*
- [22] “*Development of the Sunpower 35 We Free-Piston Stirling Convertor*” – Wood J.G., Lane N., 2005 – *AIP Conference Proceedings (2005)*
- [23] “*Linear Dynamics of Free-Piston Stirling Engines*” – Redlich R.W., Berchowitz M.D., 1985 – *Proc Instn Mech Engrs, Vol 199*
- [24] “*Compact Heat Exchangers*” – Kays W.M., London A.L., 1964 – *McGraw-Hill*
- [25] “*Flow In Porous Media*” – Kaviany M. – *The Handbook of Fluid Dynamics*
- [26] “*Fluid Mechanics*” – White F.M., 1979 – *McGraw-Hill*
- [27] “*Overview of the GRC Stirling Convertor System Dynamic Model*” – Lewandowski E., Regan T. - *NASA/CR—2004-213366*
- [28] “*Introduction to Matrix Analysis*” – Bellman R., 1960 – *Mcgraw-Hill*
- [29] “*Teoria dei sistemi*” – Balestrino A., Celentano G., 1982 – *Liguori Editore*





# Ringraziamenti

*Ho pensato di frequente, non solo durante l'ultimo anno, a come avrei impostato questa pagina, senza mai sapere quello che poi ci avrei scritto. Molte delle frasi che mi sono venute in mente le ho trovate banali, comuni. Poi ho pensato che troppo spesso sentimenti come la gratitudine, o l'affetto, non vengono espressi a voce, come fossero appunto banali, scontati. So di essere uno dei primi a farlo, perciò voglio fissare qua questi pensieri, da dove non possano scappare. Questo lavoro, e più in generale tutto il percorso dell'università, è stato per me un viaggio straordinario, molto impegnativo, ma entusiasmante. E adesso che sono arrivato alla fine, vorrei renderne partecipi tutti quelli che, in un modo o nell'altro, ne hanno fatto parte. Tutti quelli che, con il loro aiuto, con il sostegno, o anche semplicemente con la loro presenza, hanno reso possibile il completamento di questo viaggio.*

*GRAZIE a mio padre Luca e mia madre Miriam, a mia sorella Selene e ai miei nonni, per l'aiuto e l'affetto, per una fiducia nelle mie capacità che non avevo nemmeno io, e per tutto quello che hanno visto in me in questi anni. Conosco i sacrifici che sono stati fatti per me, e li ricorderò sempre...*

*...Senza di voi non avrei potuto cominciare questo viaggio.*

*GRAZIE a tutti i miei amici. Ai compagni di squadra, che mi hanno permesso di tener viva una passione testarda. Agli amici di Grosseto, dai quali sono stato spesso colpevolmente lontano, ma che ho sempre ritrovato al loro posto, come ci fossimo appena salutati. Non è un privilegio da poco avere vicino persone così. Ai colleghi di studio, compagni di delusioni e trionfi. A 4 di loro va un ringraziamento particolare, neanche se avessi potuto scegliere avrei trovato delle persone così simili e complementari a me, che per una volta voglio chiamare per nome: Giacomo, Andrea, Federico e Francesco...*

*...Senza di voi forse non sarei riuscito a continuare questo viaggio.*

*GRAZIE ai Professori Mariano Andrenucci e Luca d'Agostino, per l'eccezionale disponibilità, il grande aiuto, e la stima che mi hanno sempre dimostrato fin dal primo minuto. Grazie al professor Filippo de Monte, dell'Università dell'Aquila, per il contributo indispensabile al mio lavoro...*

*...Senza di voi non sarei riuscito a concludere degnamente questo viaggio.*

*GRAZIE a Martina, mio unico, indispensabile, insostituibile punto di riferimento, mia compagna di vita. Mi hai accompagnato attraverso mille difficoltà, condividendo i miei successi e le mie debolezze. Il tuo continuo, incondizionato sostegno è stato il motore che mi ha portato fin qui...*

*...senza di te, semplicemente, tutto questo non avrebbe avuto significato.*

*Grazie*