Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica

Teoria evolutiva dei giochi.

Candidato:

Alessandro Maddaloni

Relatore:

Prof.Paolo Acquistapace

Controrelatore:

Prof.Giandomenico Mastroeni

Anno Accademico 2008/2009

A Giulia e Nicola

Indice

Introduzione **5**

1 Elementi di teoria dei giochi **9**
1.1 Strategie e payoff 9
1.1.1 Strategie miste 10
1.2 Equilibri di Nash 11
1.2.1 Giochi simmetrici 14

2 Giochi dinamici **15**
2.1 Strategie evolutivamente stabili 15
2.1.1 Hawks e doves 19
2.1.2 Altri esempi 20
2.2 Dinamica di gioco 21
2.2.1 Alcuni richiami 21
2.2.2 Dinamica ed ESS 25
2.3 Giochi asimmetrici 35
2.3.1 Dinamica asimmetrica 37

3 Alcune applicazioni **45**
3.1 Open access 45
3.1.1 Versione dinamica 48
3.1.2 Caso nonlineare 52
3.2 Giochi asimmetrici 2×2 53
3.3 La selezione naturale 56
3.3.1 La legge di Hardy-Weinberg 56
3.3.2 Teorema fondamentale della selezione naturale 58
3.3.3 Un modello continuo 60
3.3.4 Fitness dipendenti dalla densità 65

Introduzione

Nella sua tesi di dottorato, mai pubblicata, il popolare matematico John Nash suggeriva un'interpretazione del suo concetto di equilibrio nell'ambito di giochi tra individui scelti a caso da vaste popolazioni, individui che non devono necessariamente avere una conoscenza dell'intera struttura del gioco, o l'abilità di effettuare complicati processi razionali. È di questo tipo di giochi che si occupa la teoria evolutiva dei giochi, che può essere considerata come un'estensione della teoria dei giochi classica.
L'interesse per questo argomento nacque nel 1973, quando John Maynard Smith e George R.Price formalizzarono alcune problematiche che sorgono nel contesto della biologia. Sono proprio le scienze biologiche, insieme a quelle economiche e sociali, le discipline in cui la teoria evolutiva dei giochi trova un numero sempre maggiore di applicazioni.
Le principali differenze rispetto alla teoria dei giochi classica risiedono nel fatto che in un gioco evolutivo i giocatori, ovvero individui scelti a caso da una vasta popolazione, non hanno la capacità di analizzare razionalmente il gioco; è l'interazione tra i vari giocatori a determinare la scelta delle strategie, e quelle che producono un maggiore guadagno risulteranno essere usate più di frequente. I giocatori potrebbero addirittura non avere consapevolezza del guadagno che una determinata strategia produce; esiste tuttavia una 'legge' che li indirizza verso strategie sempre più proficue: questo avviene, per esempio, nella modifica della frequenza delle caratteristiche genetiche delle specie viventi operata dalla selezione naturale, descrivibile attraverso un modello semplificato di cui ci occuperemo nell'ultimo capitolo.
Nel primo capitolo vengono presentati sia i concetti basilari della teoria dei giochi classica, sia gli strumenti necessari per la trattazione successiva: le definizioni di gioco, payoff, strategie miste, equilibri di Nash, insieme a qualche esempio di gioco e ai fatti fondamentali, come il teorema di esistenza di un equilibrio misto di Nash per un gioco discreto a due giocatori.
Il secondo capitolo introduce la teoria evolutiva, nella quale si ha una popolazione di giocatori sottoposti, in maniera casuale, a un gioco a due giocatori discreto e simmetrico: tra le possibili strategie alcune possono rivelarsi

evolutivamente stabili, vale a dire che quando vengono adottate dall'intera popolazione resistono, in un ben precisato senso, a mutazioni (di strategie) di una piccola percentuale dei giocatori. Per questo tipo di giochi è stata ipotizzata una dinamica, detta della replicazione, secondo cui il tasso di incremento, al variare del tempo, della frequenza della strategia i-esima tra la popolazione è dato dalla differenza tra il payoff, che tale strategia ottiene contro un giocatore a caso, e il payoff medio; in formule, una volta dette A la matrice dei payoff e x_i la suddetta frequenza, la dinamica si scrive come $\frac{\dot{x}_i}{x_i} = ((Ax)_i - x^T Ax)$. Nel corso del capitolo vengono analizzati alcuni teoremi che legano stabilità statica, evolutiva e dinamica: per esempio, usando gli strumenti classici dei sistemi dinamici, si dimostra che una strategia evolutivamente stabile si rivela un punto di equilibrio asintoticamente stabile nella dinamica associata al gioco. La trattazione è corredata da numerosi esempi, alcuni dei quali comprendono casi patologici.
È possibile riformulare alcuni dei concetti descritti per applicarli a giochi lievemente diversi, come quelli in cui i guadagni non sono necessariamente lineari, o nei quali si scontrano due popolazioni distinte, con distinte matrici dei payoff. Proprio a questo tipo particolare di giochi ci si può riferire per affrontare una questione di attualità negli studi sociali: il problema delle pubblicazioni scientifiche open access. Nel terzo capitolo mostriamo che la situazione può essere modellata come un gioco tra una popolazione di scienziati e una di editori che hanno a disposizione la scelta tra open access e non open access; le caratteristiche dei payoff spingono a studiare il gioco da un punto di vista dinamico. Ne risulta una periodica redistribuzione delle frequenze delle strategie tra le due popolazioni. Questo modello, che viene proposto in [8], presenta alcuni aspetti che possono essere resi più realistici: si è scelto di migliorarlo, prima modificando alcune ipotesi e poi introducendo dei payoff non lineari; l'evoluzione nei due casi presenta alcune differenze.
Come già anticipato, viene studiata infine un'altra possibile applicazione della teoria evolutiva dei giochi: la formalizzazione del processo di selezione naturale, nel quale si riduce la frequenza delle caratteristiche genetiche che peggio si adattano all'ambiente in cui sono inserite. In alcuni casi, conoscendo tutte le combinazioni di geni possibili in una popolazione, e il relativo tasso di sopravvivenza, si può calcolare come varia la frequenza dei cosiddetti genotipi all'interno della popolazione, al continuo susseguirsi delle generazioni. Ne viene fuori un'equazione della replicazione, associata a un curioso gioco in cui i giocatori risultano essere i geni, mentre gli esseri viventi costituiscono solo il tavolo da gioco. Per questo gioco vengono ricavati alcuni risultati particolari, che si aggiungono a quelli esaminati nel secondo capitolo: per esempio una caratteristica dell'equazione della selezione naturale è la corrispondenza biunivoca tra punti di equilibrio asintoticamente stabili e strategie evoluti-

vamente stabili.

Ringrazio tutti quelli che hanno contribuito alla mia formazione, e le persone che mi sono state vicine in questi anni. Ringrazio il professore Paolo Acquistapace per la sua disponibilità.

Capitolo 1

Elementi di teoria dei giochi

Questo capitolo contiene alcuni concetti della teoria dei giochi classica, indispensabili per lo studio della teoria evolutiva dei giochi. Saranno introdotti i giochi discreti non cooperativi in forma normale e saranno descritte alcune loro proprietà, limitatamente a quello che è strettamente necessario per la trattazione successiva.
Per discussioni più dettagliate sulla teoria dei giochi classica, si possono consultare numerosi testi che si occupano dell'argomento, per esempio [1], oppure [2].

1.1 Strategie e payoff

Sia $I = \{1, 2, ..., n\}$ un insieme di giocatori, ognuno dei quali ha a disposizione un insieme $\sigma(i)$ di strategie $i = 1, ..., n$. A seconda della strategia scelta, ciascun giocatore riceverà un guadagno, o payoff, dato da:

$$\pi_i : \prod_{i=1}^{n} \sigma(i) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Detto $\sigma := \prod_{i=1}^{n} \sigma(i)$ e $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$, diamo la seguente

Definizione 1.1.1. *Un gioco non cooperativo in forma normale è una terna* (I, σ, π).

Da ora in poi prenderemo in esame principalmente giochi nei quali $n = 2$ e ciascun $\sigma(i)$ è finito, che vengono chiamati giochi discreti a 2 giocatori; in questo caso i payoff sono rappresentati da matrici $A = (a_{hk})$ e $B = (b_{hk})$ dove $a_{hk} = \pi_1(h, k)$, $b_{hk} = \pi_2(h, k)$, quindi il primo giocatore 'gioca le righe' delle matrici dei payoff, mentre il secondo 'gioca le colonne'.

Esempio Probabilmente il gioco più conosciuto è il dilemma del prigioniero, in cui 2 delinquenti vengono fatti prigionieri e devono decidere se confessare o meno. Se uno dei due confessa e l'altro no, chi confessa sarà rilasciato mentre l'altro farà 5 anni di galera; se entrambi confessano, faranno 4 anni di galera ciascuno; se nessuno confessa, faranno 1 anno di galera ciascuno. Quindi le matrici dei payoff sono:

$$A = B^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Strategie miste

Una strategia mista per il giocatore i-esimo è una distribuzione di probabilità su $\sigma(i)$; nel caso discreto, è un vettore $x = (x_1, ..., x_{k_i})$ con $k_i = |\sigma(i)|$ e $\sum x_j = 1$. Se il giocatore i sceglie la strategia mista x, significa che userà la strategia $j \in \sigma(i)$ con probabilità x_j. I vettori base e_j rappresentano le strategie originarie, che vengono chiamate strategie pure.
L'insieme delle possibili strategie miste per il giocatore i è dato dal simplesso unitario k_i-dimensionale:

$$S_{k_i} = \{(x_1, ..., x_{k_i}) \in [0,1]^{k_i} | \quad \sum x_j = 1\}.$$

Indichiamo con A e B le matrici dei payoff; se il primo giocatore gioca la strategia mista x, e il secondo gioca la strategia mista y, il guadagno atteso per il primo giocatore sarà:

$$P_1(x, y) = \sum_i x_i \sum_j a_{ij} y_j = x^T A y$$

mentre per il secondo sarà:

$$P_2(x, y) = \sum_i x_i \sum_j b_{ij} y_j = x^T B y.$$

Possiamo concludere che, se abbiamo un gioco $(\sigma(1), \sigma(2), A, B)$ con $n = |\sigma(1)|$, $m = |\sigma(2)|$, allora la cosiddetta estensione mista del gioco sarà (S_n, S_m, P_1, P_2).

Esempio Riprendiamo il dilemma del prigioniero: l'estensione mista è data dal gioco (S_2, S_2, P_1, P_2), con $P_1(x, y) = x^T A y$; $P_2(x, y) = x^T A^T y$, dove $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2 Equilibri di Nash

Una nozione fondamentale nella teoria dei giochi è quella di equilibrio di Nash: se i due giocatori prendono l'accordo di usare ciascuno una strategia, diciamo x_1 e x_2, e nessuno dei due guadagna a fare il furbo e usare un'altra strategia, abbiamo un equilibrio di Nash; più formalmente diamo la seguente

Definizione 1.2.1. *Dato un gioco tra due giocatori* $(\sigma(1), \sigma(2), \pi_1, \pi_2)$*, diciamo che una coppia di strategie* $(x_1, x_2) \in \sigma(1) \times \sigma(2)$ *è un equilibrio di Nash se*

$$\begin{aligned} \pi_1(y_1, x_2) \leq \pi_1(x_1, x_2) \quad \forall y_1 \in \sigma(1) \quad y_1 \neq x_1 \\ \pi_2(x_1, y_2) \leq \pi_2(x_1, x_2) \quad \forall y_2 \in \sigma(2) \quad y_2 \neq x_2. \end{aligned}$$

Si dice che l'equilibrio è stretto se valgono strettamente entrambe le disuguaglianze.

In altri termini x_1 è una risposta ottima a x_2 per il primo giocatore e x_2 è una risposta ottima a x_1 per il secondo giocatore.
In generale le funzioni di risposta ottima (best reply) sono delle funzioni

$$\begin{aligned} BR_1 : \sigma(2) \longrightarrow \wp(\sigma(1)) \\ BR_2 : \sigma(1) \longrightarrow \wp(\sigma(2)) \end{aligned}$$

definite da

$$\begin{aligned} BR_1(x_2) = \{z \mid \pi_1(z, x_2) \geq \pi_1(w, x_2) \ \forall w \in \sigma(1)\} \\ BR_2(x_1) = \{z \mid \pi_2(x_1, z) \geq \pi_2(x_1, w) \ \forall w \in \sigma(2)\}. \end{aligned}$$

Sia ora $BR : \sigma(1) \times \sigma(2) \longrightarrow \wp(\sigma(1) \times \sigma(2))$ definita da $BR(x_1, x_2) = BR_1(x_2) \times BR_2(x_1)$.
Con queste notazioni, possiamo dire che (x_1, x_2) è un equilibrio di Nash se e solo se è un punto fisso per BR (ricordiamo che (x_1, x_2) è un punto fisso per una funzione multivalore Φ, se e solo se $x \in \Phi(x)$).

Esempio Nel dilemma del prigioniero con matrici di payoff:

$$A = B^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

è facile controllare che la coppia (e_1, e_1) è un equilibrio di Nash nelle strategie pure, infatti se un giocatore sceglie la seconda strategia invece della prima ci perde, qualsiasi cosa faccia l'altro giocatore (in questa situazione si dice anche che la prima riga domina la seconda).
Il dilemma nasce proprio dal fatto che, se entrambi scegliessero la seconda

strategia, otterrebbero una pena più lieve, tuttavia questo non è un equilibrio di Nash, infatti, se i prigionieri si accordassero di non confessare, ciascuno dei due avrebbe un guadagno a non mantenere l'accordo.
Osserviamo, dunque, che un equilibrio di Nash non massimizza necessariamente il profitto medio dei giocatori.
Purtroppo non è sempre vero che esiste un equilibrio di Nash nelle strategie pure, per esempio il gioco che ha come matrici di payoff

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

non ha equilibri di Nash puri, come si verifica facilmente.

Definizione 1.2.2. *Diciamo che (x, y) è un equilibrio misto (o nelle strategie miste) di Nash per un gioco a due giocatori, se (x, y) è un equilibrio di Nash per l'estensione mista del gioco.*

Un equilibrio misto di Nash, è una coppia di strategie miste che risulta un punto fisso per BR, considerando, però, che per l'estensione mista (S_n, S_m, P_1, P_2) di un gioco discreto a due giocatori, le funzioni di risposta ottima sono $BR_1 : S_m \to \wp(S_n)$ e $BR_2 : S_n \to \wp(S_m)$; $BR : S_n \times S_m \to \wp(S_n \times S_m)$ definita, come già detto, da $BR(x, y) = BR_1(y) \times BR_2(x)$.
Le risposte ottime a strategie miste sono strategie miste, tuttavia esiste sempre una risposta ottima pura.

Proposizione 1.2.3. *Siano $x \in S_m$, $y \in S_n$ strategie nell'estensione mista di in un gioco discreto tra due giocatori, se definiamo le risposte ottime pure $PBR_2(x) := BR_2(x) \cap \sigma(2)$ e $PBR_1(y) := BR_1(y) \cap \sigma(1)$; si ha che $PBR_2(x)$, $PBR_1(y) \neq \emptyset$, inoltre gli elementi di $BR_2(x)$ (risp. $BR_1(y)$) sono tutte e solo le combinazioni convesse delle strategie di $PBR_2(x)$ (risp. $PBR_1(y)$).*

Dimostrazione. Dimostriamo solo metà delle affermazioni, l'altra metà è analoga. Innanzitutto $BR_1(y) \neq \emptyset$, perché contiene i massimi di una funzione continua su un compatto. Prendiamo, allora, $z = (z_1, ..., z_m) \in BR_1(y)$. Per nessun indice i, tale che $z_i \neq 0$, può valere la relazione $e_i^T Ay < z^T Ay$, perché altrimenti avremmo

$$z^T Ay = \sum_{z_i \neq 0} z_i e_i^T Ay < \sum_{z_i \neq 0} z_i z^T Ay = z^T Ay$$

ne segue che, per questi indici, si ha $z^T Ay = e_i^T Ay$, cioè

$$\{e_i | \ z_i \neq 0\} \subset BR_1(y)$$

. Quindi un elemento z di $BR_1(y)$ è una combinazione convessa delle strategie pure di $BR_1(y)$. Viceversa, sempre per la linearità della funzione payoff, una qualsiasi combinazione convessa delle strategie pure di risposta ottima è anche essa una risposta ottima. $\square$

Da questa proposizione seguono immediatamente due importanti corollari:

Corollario 1.2.4. *Gli insiemi $BR_1(y)$ e $BR_2(x)$ sono facce dei simplessi S_m e S_n, in particolare sono chiusi e convessi.*

Corollario 1.2.5. *Un equilibrio di Nash stretto è necessariamente una coppia di strategie pure.*

Nelle strategie miste, diversamente che in quelle pure, esiste sempre un equilibrio di Nash (per i giochi discreti); prima di dimostrare questo importante teorema, occorre richiamare alcune cose:

Definizione 1.2.6. *Dato uno spazio metrico A, diciamo che una funzione $\Phi : A \longrightarrow 2^A$ ha grafico chiuso, se per ogni $(x_j)_j, (y_j)_j, x, y$ con $x_j \to x$, $y_j \to y$ e $y_j \in \Phi(x_j)$ per ogni j, risulta $y \in \Phi(x)$.*

Uno strumento molto utile per dimostrare l'esistenza degli equilibri di Nash è il teorema del punto fisso di Kakutani [3].

Teorema 1.2.7 (di Kakutani)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ compatto, convesso e non vuoto. Sia $\Phi : A \longrightarrow 2^A$ una funzione multivalore. Se*

1. *Φ ha grafico chiuso*
2. *Φ è a valori convessi chiusi (ovvero $\Phi(x)$ è un convesso chiuso per ogni $x \in A$)*

allora Φ ha un punto fisso.

Adesso possiamo enunciare e dimostrare il seguente

Teorema 1.2.8. *Un gioco discreto a due giocatori $(\sigma(1), \sigma(2), \pi_1, \pi_2)$ ammette sempre un equilibrio di Nash nelle strategie miste*

Dimostrazione. Posto $n = |\sigma(1)|$ e $m = |\sigma(2)|$, gli insiemi delle strategie miste sono i simplessi S_n e S_m, che sono convessi e compatti così come il loro prodotto $A := S_n \times S_m$. Consideriamo $BR : A \longrightarrow 2^A$:

1. BR ha grafico chiuso, in quanto ce l'hanno sia BR_1 che BR_2, vediamo per brevità solo il caso di BR_2, essendo l'altro analogo: se $x_j \to x$, $y_j \to y$, $y_j \in BR_2(x_j)$ e, per assurdo, $y \notin BR_2(x)$, esiste $\bar{y} \in S_m$ tale che $\pi_2(x, \bar{y}) > \pi_2(x, y)$; per j sufficientemente grande, però, si mantiene $\pi_2(x_j, \bar{y}) > \pi_2(x_j, y_j)$ per la continuità di π_2, questo è assurdo perché $y_j \in BR_2(x_j)$ per ogni j.

2. BR è a valori convessi chiusi perché prodotto di insiemi che sono convessi e chiusi per il corollario 1.2.4.

Ne segue, per il teorema di Kakutani, che BR ammette un punto fisso, il quale, per quanto detto in precedenza, è un equilibrio di Nash. □

1.2.1 Giochi simmetrici

Nella teoria evolutiva dei giochi spesso si ha una popolazione di giocatori che vengono considerati indistinguibili: in questo caso ci troviamo di fronte a una particolare categoria di giochi, detti giochi simmetrici.

Definizione 1.2.9. *Un gioco discreto a due giocatori* $(\sigma(1), \sigma(2), \pi_1, \pi_2)$ *si dice simmetrico se* $\sigma(1) = \sigma(2)$ *e* $\pi_1(s_i, s_j) = \pi_2(s_j, s_i)$*, per ogni* $s_i, s_j \in \sigma(1)$.

Ora, se chiamiamo A e B le matrici dei payoff, un gioco simmetrico è tale che A e B sono matrici quadrate e $B = A^T$. Un esempio di gioco simmetrico è il dilemma del prigioniero.
Un equilibrio di Nash (x, y) si dice simmetrico se $x = y$, cioè se i due giocatori usano la stessa strategia (pura o mista). Questo significa che x è una risposta ottima a se stesso. Quando ci occupuremo di popolazioni di giocatori indistinguibili, ci interesseranno solo equilibri di Nash simmetrici.

Osservazione. *Un gioco simmetrico non ha necessariamente solo equilibri simmetrici, tuttavia esistono sempre equilibri simmetrici (nelle strategie miste), per convincersene si può applicare il teorema di Kakutani alla funzione* $BR_1 (= BR_2)$*, sull'insieme* S_m*, per trovare un punto fisso di* BR_1*, cioè una risposta ottima a se stesso, vale a dire un equilibrio simmetrico.*

Capitolo 2

Giochi dinamici

La teoria dei giochi classica si occupa principalmente di interazioni che avvengono una sola volta tra giocatori, quasi sempre umani, che si comportano in maniera perfettamente razionale, conoscendo tutti i dettagli del gioco. Nella teoria evolutiva dei giochi, invece, si considera un gioco che si ripete continuamente nel tempo e avviene tra giocatori scelti a caso tra una popolazione sufficientemente vasta; tali giocatori sono 'programmati' per agire in un determinato modo, ovvero per usare una determinata strategia nel gioco; qualche processo evolutivo, poi, modifica i tipi di comportamento e la loro distribuzione, all'interno della popolazione.
La teoria evolutiva dei giochi è stata inizialmente formulata dai biologi, che si occupavano dei conflitti tra animali e della teoria dell'evoluzione; uno dei principali pionieri è John Maynard Smith [4]. Nel quadro della teoria dell'evoluzione una strategia viene spesso interpretata come un comportamento geneticamente programmato; i payoff sono determinati dalla fitness darwiniana, che misura il successo riproduttivo di un individuo. Molti autori sostengono che la teoria evolutiva dei giochi si applichi in maniera naturale al campo biologico, a differenza della teoria dei giochi classica, per la quale risulta difficile tradurre in una singola scala diversi tipi di guadagno (soldi, prestigio sociale, salute) e non è universalmente accettato l'assioma che ogni giocatore si comporti in maniera razionale.

2.1 Strategie evolutivamente stabili

Un concetto chiave della teoria evolutiva dei giochi è quello di stretegia evolutivamente stabile. Una tale strategia è resistente alla cosiddetta pressione evolutiva, in un senso ben preciso: supponiamo che da una popolazione molto vasta vengano ripetutamente scelti due individui per fare un gioco simmetri-

co (a due giocatori), e supponiamo che inizialmente tutti gli individui siano 'programmati' per usare una certa strategia S, pura o mista. Ora aggiungiamo alla popolazione inziale una piccola popolazione di individui, che invece sono programmati per usare un altra strategia, che è chiamata strategia mutante. La strategia S è detta evolutivamente stabile se, per ogni strategia mutante, esiste una soglia di invasione tale che, se la popolazione che usa la strategia mutante ha una popolosità inferiore alla soglia, allora la strategia S è preferibile rispetto alla strategia mutante. Bisogna aggiungere che la nozione di stabilità evolutiva non spiega come una popolazione arrivi ad una certa strategia, si limita a dirci se, una volta raggiunta, tale strategia sia resistente alla pressione evolutiva.
L'ipotesi fatta sulla grandezza della popolazione è essenziale: prima di tutto, affinché ci sia un'invasione effettiva, la soglia di invasione deve superare $1/n$, dove n è il numero di individui della popolazione; in più, la popolazione deve essere abbastanza grande da poter trascurare gli effetti che le azioni correnti di un individuo possano avere sulle azioni future degli altri. Nella analisi della stabilità, pertanto, non si terrà conto di queste problematiche.
Lo scenario in cui ci troviamo, come è stato già anticipato, è quello di un gioco noncooperativo discreto, simmetrico, a due giocatori. Assumiamo che l'insieme delle possibili strategie sia $\sigma(1) = \sigma(2) = \{R_1, R_2, ..., R_n\}$. Le strategie miste per entrambi i giocatori sono i punti del simplesso S_n. In una popolazione nella quale vengono usate diverse strategie (eventualmente miste), la strategia media sarà un certo $m \in S_n$; se un individuo usa la strategia $p \in S_n$ contro un altro, scelto a caso tra la popolazione, il suo guadagno atteso sarà $p^T Am$. Ad esempio, in una popolazione dove viene usata la strategia q da una porzione ϵ di popolazione e la strategia p da una porzione $1 - \epsilon$, se scegliamo un individuo che usa la strategia p e lo facciamo giocare contro un altro individuo a caso, il suo guadagno atteso sarà $p^T A(\epsilon q + (1 - \epsilon)p)$.
Formalizziamo il concetto di stabilità evolutiva descritto precedentemente.

Definizione 2.1.1. *Diciamo che $p \in S_n$ è una strategia evolutivamente stabile (ESS), se per ogni $q \neq p \in S_n$ vale*

$$q^T A(\epsilon q + (1 - \epsilon)p) < p^T A(\epsilon q + (1 - \epsilon)p) \tag{2.1.1}$$

per ogni $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, ovvero minore di una certa soglia $\bar{\epsilon}(q)$.

Proposizione 2.1.2. *$p \in S_n$ è una ESS se e solo se*

$$q^T Ap \leq p^T Ap \quad \forall q \in S_n \tag{2.1.2}$$

$$q^T Ap = p^T Ap \Rightarrow q^T Aq < p^T Aq \quad \forall q \neq p \in S_n. \tag{2.1.3}$$

Dimostrazione. Basta scrivere la (2.1.1) come

$$(1-\epsilon)(p^TAp - q^TAp) + \epsilon(p^TAq - q^TAq) > 0.$$

□

La (2.1.2) è la definizione di equilibrio simmetrico di Nash, viene perciò chiamata condizione di equilibrio. Tuttavia, da sola, non basta a garantire alla strategia p l'impossibilità di essere invasa da un'altra strategia q, la quale potrebbe essere un'altra risposta ottima a p. La condizione (2.1.3) viene detta condizione di stabilità e ci garantisce che, in quel caso, contro q si comporta meglio la strategia p che la strategia q.
Dalle equazioni (2.1.2) e (2.1.3), segue immediatamente la seguente

Proposizione 2.1.3. *Un equilibrio di Nash stretto è una ESS.*

Quindi, come nel caso degli equilibri di Nash, il fatto che una strategia x sia evolutivamente stabile, non garantisce che il guadagno x^TAx sia massimizzato.
Poniamo $q = e_i$ all'interno della (2.1.2), otteniamo

$$(Ap)_i \leq p^TAp$$

per $i = 1, ..., n$. Sommando si ha

$$p^TAp = \sum_{p_i>0} p_i(Ap)_i \leq (\sum_{p_i>0} p_i)p^TAp = p^TAp.$$

Pertanto, per gli indici per cui $p_i > 0$, deve valere l'uguaglianza. Si ricava che esiste una costante c, tale che $(Ap)_i \leq c$ per tutti gli i, con l'uguaglianza dove $p_i > 0$. In particolare, $p \in \text{int } S_n$ soddisfa la condizione di equilibrio se e solo se le sue coordinate risolvono il sistema

$$\begin{aligned}(Ap)_1 = ... &= (Ap)_n \\ p_1 + ... + p_n &= 1.\end{aligned}$$

Osserviamo che se $p \in \text{int } S_n$ è una ESS, allora è l'unica ESS, perché $\forall q \in S_n$ $q^TAp = p^TAp$, quindi deve valere necessariamente la condizione di stabilità $p^TAq > q^TAq$, per ogni $q \neq p$, il che significa che non c'è nessuna altra strategia, candidata a essere una ESS.

Proposizione 2.1.4. *$p \in S_n$ è una ESS se e solo se*

$$p^TAx > x^TAx \tag{2.1.4}$$

per ogni $x \neq p$ in qualche intorno di p.

Dimostrazione. Supponiamo che p sia evolutivamente stabile. I punti x vicini a p possono essere rappresentati nella forma $\epsilon q + (1-\epsilon)p$, per un appropriato ϵ, scegliendo i punti q anche solo all'interno del compatto $C := \{q \in S_n | \; q_i = 0$ per qualche $i \in$ supp$(p)\}$, che è l'unione delle facce di S_n che non contengono p. Dato $q \in C$, vale la (2.1.1) per ogni $\epsilon < \bar{\epsilon}(q)$. Si può fare in modo che $\bar{\epsilon}(q)$ sia continua in q, precisamente possiamo prendere

$$\bar{\epsilon}(q) = \begin{cases} \dfrac{(p-q)^T Ap}{(p-q)^T A(p-q)} & \text{se } (p-q)^T Aq < 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che si verifica essere ben definita e continua.
Possiamo concludere che esiste $\bar{\epsilon} := \min\{\bar{\epsilon}(q) | q \in C\}$.
Se poniamo $x = \epsilon q + (1-\epsilon)p$, la (2.1.1) e la (2.1.4) risultano equivalenti: basta moltiplicare la (2.1.1) per ϵ e aggiungere

$$(1-\epsilon)p^T A(\epsilon q + (1-\epsilon)p)$$

a entrambi i membri. Se facciamo variare $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, otteniamo la (2.1.4) su tutto un intorno di p.
Il viceversa è simile: per ogni $q \in S_n$, basta scegliere un x vicino a p che sia combinazione convessa di q e p, per un appropriato ϵ. A questo punto, come abbiamo visto, la (2.1.1) e la (2.1.4) sono equivalenti. □

In alcuni modelli i payoff non sono necessariamente lineari, ovvero il guadagno atteso usando la strategia i-esima, allo stato m, cioè $F_i(m)$, può non essere una funzione lineare, ma semplicemente una funzione di classe C^1.

Definizione 2.1.5. *Sia $F = (F_1, ..., F_n)$, diciamo che una strategia $p \in S_n$ è una ESS locale se esiste un intorno U di p tale che per ogni $x \neq p \in U$ vale*

$$p \cdot F(x) > x \cdot F(x). \tag{2.1.5}$$

Se i payoff sono nonlineari possono coesistere diverse ESS locali, anche nella parte interna di S_n, per capire come questo possa succedere, mettiamoci nel caso $n = 2$: se $p \in S_2$ è una ESS locale, allora

$$0 < p \cdot F(x) - x \cdot F(x) = (p_1 - x_1)(F_1(x) - F_2(x))$$

per x sufficientemente vicino a p. Per costruire un esempio in cui ci siano due ESS locali p e q, basta prendere una F tale che $F_1 - F_2$ si annulli sia in p che in q e sia decrescente in un loro intorno, cosa impossibile nel caso lineare. Per esempio si può prendere $p = (1/4, 3/4)$; $q = (3/4, 1/4)$ e $F_1 - F_2 =$

$(1/4 - x_1)(1/2 - x_1)(3/4 - x_1)$. Per ogni x tale che $0 < x_1 < 1/2$ vale la (2.1.5) per la strategia p; per ogni x tale che $1/2 < x_1 < 1$ vala la (2.1.5) per la strategia q, quindi siamo in presenza di due ESS locali in int S_2.
Per quanto riguarda i payoff lineari, va detto che ci sono giochi con parecchie ESS (di cui al più una interna), e altri che non ne hanno proprio.
Per chiarire le idee, vediamo alcuni esempi.

2.1.1 Hawks e doves

Uno dei primi giochi affrontati dai biologi teorici, nel contesto dei conflitti tra animali, è quello degli hawks e doves (falchi e colombe), nome che deriva dal titolo di un fumetto. In una popolazione animale accade spesso che due individui si scontrino, ad esempio per una preda, per il predominio territoriale, o per una femmina. Immaginiamo che ci siano due tipi di comportamento possibili: quello aggressivo, di un hawk, o quello pacifico, di un dove.
Se si scontrano due doves, si gonfiano, mostrano le loro capacità di combattimento, fin quando quello che capisce di essere inferiore si ritira. Il vincitore ottiene il premio G, e lo sconfitto niente, pertanto il guadagno medio risulta $G/2$. Un dove che incontra un hawk fugge e non ottiene niente, mentre l'hawk ottiene G. Uno scontro tra due hawks, invece, consiste in un combattimento all'ultimo sangue, che si conclude con la sconfitta del più debole. Supponiamo che le ferite da combattimento provochino a entrambi una perdita di C, allora il guadagno atteso risulta $(G - C)/2$, che assumiamo negativo. La matrice dei payoff, pertanto, è

$$A = B^T = \begin{pmatrix} (G-C)/2 & G \\ 0 & G/2 \end{pmatrix}.$$

In una popolazione consistente in gran parte di doves, si diffonderebbe l'aggressività degli hawks, perché è più facile incotrare un dove e guadagnare G; viceversa in una popolazione composta maggiormente di hawks, si diffonderebbe la strategia dei doves. Nessuna strategia è migliore dell'altra.
Se, all'interno della popolazione, la frequenza degli hawks è x_1 e quella dei doves è $1 - x_1$, allora il guadagno atteso di un hawk sarà

$$e_1^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = x_1 \frac{G-C}{2} + (1 - x_1)G,$$

mentre quello di un dove sarà

$$e_2^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix} = (1 - x_1)\frac{G}{2}.$$

I due guadagni sono uguali se e solo se $x_1 = G/C$. Se la frequenza degli hawks è minore di G/C, questi ottengono un guadagno maggiore, quindi aumenteranno; se la frequenza degli hawks è maggiore di G/C, ottengono un guadagno minore, quindi diminuiranno. L'evoluzione dovrebbe portare a una situazione di equilibrio stabile in cui la frequenza degli hawks è G/C. Questo è in accordo con il concetto di strategia evolutivamente stabile che è stato dato, infatti la strategia $p = (\frac{G}{C}, \frac{G-C}{C})$ è una ESS, perché

$$p^T Ax - x^T Ax = \frac{(G - Cx_1)^2}{2C}$$

che è strettamente positiva per tutti gli $x_1 \neq G/C$, così la (2.1.4) è soddisfatta. Siccome $p \in \text{int } S_n$, è anche l'unica ESS.

2.1.2 Altri esempi

Nel gioco del dilemma del prigioniero, la strategia e_1, ovvero confessare, è l'unica risposta ottima ad ogni strategia $y \in S_2$, pertanto è l'unica ESS del gioco. Entrambi i giocatori, però, guadagnerebbero di più usando simultaneamente la seconda strategia (non confessare). Abbiamo visto che una strategia evolutivamente stabile non ottimizza sempre il guadagno medio, si dice anche che non è un ottimo sociale, come succede in questo caso. Addirittura una ESS può risultare socialmente inefficiente, anche quando l'ottimo sociale è un equilibrio di Nash. Ad esempio nel gioco con matrice di payoff

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sia e_1 che e_2 sono ESS, chiaramente e_1 è strettamente preferibile a e_2, per entrambi i giocatori, ed è anche un equilibrio di Nash, nonstante questo anche la strategia e_2 risulta evolutivamente stabile.
In un certo senso, possiamo dire che le cose tendono all'equilibrio stabile più vicino da raggiungere, piuttosto che a quello da cui si trae maggiore guadagno.
Un esempio di gioco senza ESS è sasso-forbice-carta, in cui il sasso (strategia 1) batte la forbice (strategia 2); la forbice batte la carta (strategia 3); la carta batte il sasso. Ne risulta una matrice di payoff

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Non ci sono equilibri puri di Nash, l'equilibrio simmetrico dato da $p = (1/3, 1/3, 1/3)$, è l'unico equilibrio di Nash, quindi è l'unico ipotetico candidato a essere una ESS; ma siccome $e_1^T Ap = p^T Ap$ e $p^T Ae_1 = e_1^T Ae_1$, allora p non può essere evolutvamente stabile.

2.2 Dinamica di gioco

Gran parte della teoria dei giochi è statica. La nozione di stabilità evolutiva, tuttavia, si basa su considerazioni dinamiche implicite. In certe situazioni la dinamica soggiacente può essere modellata da equazioni differenziali sul simplesso S_n.
Assumiamo che ci siano n possibili strategie (pure o miste) per la popolazione, o, usando il linguaggio della genetica, assumiamo che ci siano n possibili fenotipi $E_1, ..., E_n$, distribuiti tra la popolazione con frequenze $x_1, ..., x_n$. Se la popolazione è sufficientemente vasta, e le generazioni si mescolano continuamente l'una nell'altra, possiamo assumere che lo stato della popolazione $x = (x_1, ..., x_n)$, si evolva in S_n come una funzione differenziabile del tempo. Il tasso di aumento $\dot{x}_i/x_i$ della strategia E_i è una misura del suo successo evolutivo. Seguendo il canone principale del darwinismo, possiamo esprimere questo successo come la differenza tra il guadagno $f_i(x)$ della strategia E_i e il guadagno medio della popolazione, che è $\bar{f}(x) = \sum x_i f_i(x)$. Otteniamo

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i} = \text{ guadagno di } E_i - \text{guadagno medio.}$$

Tutto ciò conduce al sistema di equazioni

$$\dot{x}_i = x_i(f_i(x) - \bar{f}(x)) \qquad i = 1, ..., n \tag{2.2.1}$$

che vengono chiamate equazioni della replicazione (replicator equations), termine coniato dal biologo Richard Dawkins.

2.2.1 Alcuni richiami

Richiamiamo, dalla teoria dei sistemi dinamici e delle equazioni differenziali, alcuni concetti che risulteranno utili in seguito.

Definizione 2.2.1. *Dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, un punto di equilibrio z è un punto tale che $f(z) = 0$.*

Definizione 2.2.2. *Dato un punto di equilibrio z di un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, diciamo che z è*

- *stabile, se per ogni intorno U di z, esiste un altro intorno W, tale che ogni soluzione che parte in W rimane dentro U;*

- *attrattivo, se esiste un intorno W di z, tale che ogni soluzione che parte in W converge verso z;*

- *asintoticamente stabile, se è stabile e attrattivo;*

- *globalmente stabile, se tutte le soluzioni che partono nell'insieme di definizione del sistema convergono a z.*

Definizione 2.2.3. *Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico; sia z un punto di equilibrio e sia A la matrice Jacobiana di f calcolata in z. Le parti reali degli autovalori di A si chiamano esponenti di Lyapunov.*

Calcolare gli esponenti di Lyapunov di un punto di equilibrio risulta utile per lo studio della sua stabilità .

Definizione 2.2.4. *Se tutti gli esponenti di Lyapunov sono negativi, il punto z si dice un pozzo (stabile); se tutti gli esponenti di Lyapunov sono positivi, il punto z si dice una sorgente (instabile); se sono uno negativo e l'altro positivo, il punto z è una sella (instabile).*

Se invertiamo il tempo una sorgente diventa un pozzo e viceversa.

Teorema 2.2.5. *Un pozzo è asintoticamente stabile.*

Definiamo ora il concetto di funzione di Lyapunov, cioè una funzione che ha un massimo forte in corrispondenza di un punto di equilibrio e non cresce mai lungo le soluzioni del sistema dinamico; questo genere di funzioni risultano utili per lo studio qualitativo del sistema.

Definizione 2.2.6. *Una funzione V definita e di classe C^1 in un intorno U di un punto di equilibrio z si dice funzione di Lyapunov per z, se valgono le due condizioni:*

1. $\dot{V} = \frac{d}{dt}V(x(t)) \geq 0$

2. $V(z) = 0$ *e* $V(x) < 0 \quad \forall x \neq z \in U$.

Se vale la disuguaglianza stretta nella condizione 1, V è detta funzione di Lyapunov stretta.

Ricordiamo, senza dimostrare, qualche importante risultato.

Teorema 2.2.7 (di Lyapunov)**.** *Sia z un punto di equilibrio per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$. Se esiste una funzione di Lyapunov V per z, allora z è un punto di equilibrio stabile. Se V è una funzione di Lyapunov stretta, allora z è asintoticamente stabile.*

Lemma 2.2.8 (di Gronwall)**.** *Sia $[a, b)$ un intervallo, con $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Siano β e u funzioni continue su $[a, b)$. Se u è derivabile nell'interno di $[a, b)$ e soddisfa la disuguaglianza*

$$\dot{u}(t) \geq \beta(t)u(t) \qquad \forall t \in [a, b),$$

allora u è limitata inferiormente dalla soluzione della corrispondente equazione differenziale $\dot{y} = \beta y$:

$$u(t) \geq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right) \qquad \forall t \in [a, b).$$

Vediamo, adesso, una versione del teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema dinamico:

Teorema 2.2.9. *Sia $X \subset \mathbb{R}^k$ un aperto e sia $f : X \to \mathbb{R}^k$ una funzione lipschitziana, allora per ogni $x^0 \in X$, esiste un δ tale che il sistema dinamico*

$$\dot{x} = f(x)$$

ha un'unica soluzione $\Phi(\cdot, x^0) : [-\delta, \delta] \to X$, tale che $\Phi(0, x^0) = x^0$. Inoltre la soluzione $\Phi(t, x^0)$ e la sua derivata rispetto al tempo sono continue in t.

L'applicazione Φ che, ad un assegnato $x^0 \in X$, associa la soluzione del sistema dinamico $\Phi(t, x^0)$ viene detta flusso integrale. Si può dimostrare che è continua in x^0, nel senso che, se $\Phi(t, y^0)$ e $\Phi(t, z^0)$ sono le soluzioni passanti rispettivamente per y^0 e z^0, al tempo 0, allora

$$|\Phi(t, y^0) - \Phi(t, z^0)| \leq |y^0 - z^0|e^{Lt},$$

ove L è la costante di Lipschitz della funzione f.

Definizione 2.2.10. *Chiamiamo l'insieme $\{x \mid \exists t \in \mathbb{R}\ x = \Phi(t, x^0)\}$ orbita passante per x^0.*

Vale la seguente

Proposizione 2.2.11. *Sia dato il sistema dinamico*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_n).$$

Sia $W(x_1, ..., x_n)$ *una funzione positiva sull'insieme di definizione del sistema dinamico, allora quest'ultimo ammette le stesse orbite del sistema*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_n)W(x_1, ..., x_n).$$

Ricordiamo la definizione di divergenza:

Definizione 2.2.12. *Dato un campo di vettori* f *definito su* $X \subset \mathbb{R}^n$*, chiamiamo divergenza di* f *nel punto* $x \in X$ *la quantità*

$$div[f(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x),$$

ovvero la traccia dello Jacobiano di f*.*

Consideriamo il sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.2.2}$$

con $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; dato un insieme misurabile $A \subset X$ e un tempo $t \in \mathbb{R}$, consideriamo l'insieme

$$A(t) := \{\Phi(t, x^0) \mid x^0 \in A\}.$$

$A(t)$ è misurabile e $m_n(A(t)) = \int_{A(t)} dx$; inoltre vale la formula di Liouville:

$$\frac{d}{dt} m_n(A(t)) = \int_{A(t)} div[f(x)]dx.$$

Parlando informalmente osserviamo che, dato un punto asintoticamente stabile, esso avrà un certo intorno A tale che la misura di $A(t)$ tende a 0 per $t \to \infty$; quindi se la divergenza di f è non negativa non possono esserci punti asintoticamente stabili. Infatti vale il seguente risultato

Proposizione 2.2.13. *Se l'insieme* X *è aperto e* $f \in C^1(X)$*, con* $div[f(x)] \geq 0$ *per ogni* $x \in X$*, allora il sistema dinamico* (2.2.2) *non ammette punti di equilibrio asintoticamente stabili.*

2.2.2 Dinamica ed ESS

Consideriamo le equazioni della replicazione (2.2.1): se la funzione di guadagno f è lipschitziana, come ad esempio nel caso lineare, si può applicare il teorema di esistenza e unicità, che ci garantisce l'esistenza di una (unica) soluzione continua, a partire da uno stato iniziale x^0.

Proposizione 2.2.14. *Il simplesso S_n, int S_n e il bordo ∂S_n sono invarianti rispetto alle* (2.2.1).

Dimostrazione. È facile rendersi conto che il bordo ∂S_n, ovvero l'unione delle facce $\{x \in S_n | x_i = 0 \text{ per qualche } i\}$, è invariante: infatti basta notare che se $x_i = 0$ a un dato istante allora, in base alle (2.2.1) $x_i = 0$ sempre. Osserviamo, poi, che l'insieme $H = \{x | \sum x_i = 1\}$ è invariante: infatti se $x \in H$, allora

$$\frac{d}{dt} \sum x_i = \sum \dot{x}_i = \sum x_i f_i(x) - (\sum x_i) \sum x_j f_j(x) = 0.$$

Il simplesso S_n è dato dall'intersezione di H con l'ottante positivo $\mathbb{R}^n_+$. Dimostriamo che tutte le soluzioni che partono in $H \cap \mathbb{R}^n_+$ non ne escono mai: se per assurdo non fosse così, esisterebbero un $x^0 \in S_n = H \cap \mathbb{R}^n_+$ e un tempo $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tali che $\Phi(\bar{t}, x^0)$, il punto in cui la soluzione che parte da x^0 si trova all'istante $\bar{t}$, non sta in S_n. Questa soluzione, essendo H invariante, dovrebbe attraversare il bordo di S_n; in virtù della continuità di Φ nella variabile t, dovrebbero esistere un tempo $\bar{s}$ e una strategia i, tali che $\Phi_i(\bar{s}, x^0) = 0$ e $\Phi_i(\bar{t}, x^0) < 0$, ma questo non può succedere, perché altrimenti $\Phi(t, x^0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ rappresenterebbe una soluzione, passante per $\Phi(\bar{s}, x^0)$, diversa da quella con la i-esima coordinata costantemente pari a 0, e questo violerebbe l'unicità.
Con lo stesso ragionamento, si dimostra che un punto che parte dall'interno di S_n non può mai raggiungere il bordo, e questo dimostra che anche int S_n è invariante. □

Possiamo, da ora in poi, considerare solo la restrizione delle (2.2.1) a S_n. Controlliamo che il concetto di non invadibilità di una strategia concordi con la dinamica della replicazione. Consideriamo un gioco discreto con N strategie pure e con matrice di payoff U. Supponiamo che all'interno della popolazione siano presenti solo due strategie $q, p \in S_N$; se x_1 e x_2 sono le rispettive frequenze, i payoff saranno dati da

$$f_1(x) = q^T U(x_1 q + x_2 p)$$
$$f_2(x) = p^T U(x_1 q + x_2 p).$$

Siccome $x_2 = 1 - x_1$, per studiare l'evoluzione dello stato della popolazione basta studiare l'evoluzione di x_1: seguendo le equazioni della replicazione otteniamo

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_1(f_1(x) - \bar{f}(x)) \\
&= x_1(1 - x_1)(f_1(x) - f_2(x)) \\
&= x_1(1 - x_1)[x_1(p^T Up - q^T Up + q^T Uq - p^T Uq) - (p^T Up - q^T Up)].
\end{aligned}$$

I punti di equilibrio $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$, corrispondono all'una o all'altra strategia. Dire che la strategia p non può essere invasa dalla strategia q, corrisponde a dire che il punto di equilibrio $x_1 = 0$ è asintoticamente stabile, cioè che la frequenza x_1 della strategia q decresce se è sufficientemente piccola. Infatti questo si verifica se solo se vale una delle due condizioni

$$\begin{aligned}
&(a) \quad q^T Up < p^T Up \\
&(b) \quad q^T Up = p^T Up \quad \text{e} \quad q^T Uq < p^T Uq.
\end{aligned}$$

Queste condizioni, come già è stato visto, assicurano che la strategia p non può essere invasa dalla strategia q, entro una certa soglia di invasione.
Nel caso in cui i payoff non siano lineari, abbiamo che

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= q^T F(x_1 q + x_2 p) \\
f_2(x) &= p^T F(x_1 q + x_2 p).
\end{aligned}$$

Dire che la strategia p non può essere invasa dalla strategia q vuol dire che $p^T F(x_1 q + (1 - x_1)p) > q^T F(x_1 q + (1 - x_1)p)$ per ogni x_1 sufficientemente piccolo; questo accade se e solo se $x_1 = 0$ è asintoticamente stabile nel sistema della replicazione.

Ritorniamo ad occuparci del gioco per il quale è stato definito il sistema dinamico (2.2.1). Avevamo inizialmente considerato n distinte strategie $E_1, ..., E_n$, presenti all'interno della popolazione; queste possono essere strategie pure o miste, quindi si presuppone che ci sia un certo gioco G, con un insieme di strategie pure $R_1, ..., R_N$ e le $E_i \in S_N$ sono n possibili strategie per questo gioco. Osserviamo che, a priori, non c'è nessuna relazione tra n e N. Poniamoci nel caso in cui i payoff di G siano lineari, e chiamiamo U la matrice $N \times N$ dei payoff. Lo stato x della popolazione sarà dato dalle frequenze x_i di diffusione della stretegia E_i.
Indichiamo con a_{ij} il payoff che ottiene la strategia E_i contro la strategia E_j, ovvero $E_i^T UE_j$; sia A la matrice con elementi a_{ij}. Il guadagno atteso per la

strategia E_i, in una popolazione il cui stato è x, sarà

$$f_i(x) = \sum_j a_{ij} x_j = (Ax)_i,$$

Abbiamo così costruito un altro gioco $\tilde{G}$, con matrice di payoff A, in cui possiamo considerare pure le strategie $E_1, ..., E_n$; le strategie miste $p \in S_n$ rappresentano gli stati della popolazione.

Definizione 2.2.15. *Diciamo che uno stato $p \in S_n$ è evolutivamente stabile, se valgono*

$$q^T Ap \leq p^T Ap \quad \forall q \in S_n \tag{2.2.3}$$
$$q^T Ap = p^T Ap \Rightarrow q^T Aq < p^T Aq \quad \forall q \neq p \in S_n. \tag{2.2.4}$$

In altri termini, $p \in S_n$ è uno stato evolutivamente stabile, se è una strategia evolutivamente stabile per il gioco $\tilde{G}$.
Osserviamo che la equazioni della replicazione (2.2.1) diventano

$$\dot{x}_i = x_i((Ax)_i - x^T Ax). \tag{2.2.5}$$

I punti di equilibrio sono quei punti $z = (z_1, ..., z_n) \in S_n$, tali che $(Az)_j = c$ per tutti gli j per i quali $z_j > 0$; c è da intendersi costante.
Quando ci sono solo due strategie, ovvero $n = 2$, si ha $1 - x_1 = x_2$, perciò il sistema della replicazione si riduce all'equazione:

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1)((Ax)_1 - (Ax)_2).$$

Possono darsi solo tre casi (a parte quello banale in cui tutti i punti sono di equilibrio):

- non c'è nessun equilibrio interno, in questo caso una delle due frequenze converge a 0;
- c'è un equilibrio interno stabile (globalmente), che risulta l'unico equilibrio di Nash;
- c'è un equilibrio interno instabile, in questo caso le strategie $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono entrambi punti di equilibrio asintoticamente stabili

Esempio Nel caso del gioco degli hawks e doves, caratterizzato dalla matrice di payoff

$$U = \begin{pmatrix} (G-C)/2 & G \\ 0 & G/2 \end{pmatrix},$$

abbiamo l'equazione

$$\dot{x} = \frac{1}{2}x(1-x)(G-Cx),$$

il punto $x = G/C$ risulta un punto di equilibrio globalmente stabile.
Supponiamo, ora, che alla popolazione di falchi e colombe si aggiunga una terza razza che si comporta a volte come falco, a volte come colomba con una frequenza di G/C e $(C-G)/C$ rispettivamente; questo significa che le possibili strategie per la popolazione sono $E_1 = (1,0); E_2 = (0,1); E_3 = (G/C, (C-G)/C)$. La matrice dei payoff è

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{G-C}{2} & G & \dfrac{G(C-G)}{2C} \\ 0 & \dfrac{G}{2} & \dfrac{G(C-G)}{2C} \\ \dfrac{G(G-C)}{2C} & \dfrac{G(C+G)}{2C} & \dfrac{G(C-G)}{2C} \end{pmatrix};$$

osserviamo che la strategia E_3 è evolutivamente stabile nel gioco originale, tuttavia, si può verificare che e_3 non è uno stato evolutivamente stabile nel gioco esteso alla terza razza.

Vediamo alcune relazioni tra equilibri di Nash del gioco $\tilde{G}$, e punti di equilibrio del sistema dinamico (2.2.5).

Teorema 2.2.16. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se z è un equilibrio di Nash, allora è un punto di equilibrio;*
2. *se z è un punto di equilbrio stabile, allora è un equilibrio di Nash;*
3. *se z è un punto limite di un'orbita interna (cioè $\exists\ x^0 \neq z \in int\ S_n$ tale che $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x^0) = z$), allora è un equilibrio di Nash.*
4. *se z è uno stato evolutivamente stabile, allora è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Dimostrazione.

1. Se z è un equilibrio di Nash, verifica $(Az)_j = z^T Az$, per tutti gli j per i quali $z_j > 0$, quindi è un punto di equilibrio del sistema (2.2.5).
2. Sia z un punto di equilibrio stabile, supponiamo per assurdo che z non sia un equilibrio di Nash. Allora, siccome $(Az)_j = z^T Az$, per tutti gli j per i quali $z_j > 0$, deve esserci necessariamente un indice i con $z_i = 0$ e $(Az)_i > z^T Az$. Per continuità, esistono un δ e un intorno U di z,

tale che per ogni $y \in U$, si ha $(Ay)_i - y^T Ay \geq \delta$. Se prendiamo una soluzione delle (2.2.5), $y(t)$, con $y(0) \in U$ si ha

$$\dot{y}_i(t) = y_i((Ay)_i - y^T Ay) \geq y_i \delta$$

per tutti gli $t > 0$ tali che $y(t) \in U$; quindi, applicando il lemma di Gronwall otteniamo

$$y_i(t) \geq y_i(0) e^{\delta t}$$

per tutti gli $t > 0$ tali che $y(t) \in U$; ne segue che una soluzione del sistema che parte in U, se ne allontana sempre (alla velocità dell'esponenziale); questo vuol dire che z non è un punto di equilibrio stabile.

3. Supponiamo per assurdo che $\exists\, x^0 \neq z \in \operatorname{int} S_n$, tale che $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x^0) = z$, ma che z non sia un equilibrio di Nash. Allora, facendo lo stesso ragionamento di prima, dovrebbero esistere una strategia i, e $\delta > 0$, tali che $(Az)_i - z^T Az > \delta$. Siccome $\Phi(t, x^0) \to z$, esiste un certo tempo T, tale che per ogni $t \geq T$, si ha

$$(A\Phi)_i - \Phi^T A\Phi > \delta/2,$$

cioè, $\dot{\Phi}_i(t, x^0) \geq \Phi_i(t, x^0)\delta/2 \quad \forall t \geq T$; applichiamo ancora il lemma di Gronwall in modo da avere

$$\Phi_i(t, x^0) > \Phi_i(T, x^0) \exp\left(\delta(t - T)/2\right) \quad \forall t \geq T,$$

essendo $\Phi_i(T, x^0) > 0$, si avrebbe $\Phi_i(t, x^0) \to \infty$, impossibile.

4. Per dimostrare che z è asintoticamente stabile, si può sfruttare il fatto che la funzione

$$V(x) = \prod_{z_i > 0} x_i^{z_i} - \prod_{z_i > 0} z_i^{z_i}$$

è una funzione di Lyapunov per z: chiaramente $V(z) = 0$, inoltre $V(x) < 0$ per $x \neq z$ in quanto

$$\log\Big(\prod_{z_i > 0} x_i^{z_i}\Big) \leq \log\Big(\prod_{z_i > 0} z_i^{z_i}\Big),$$

che sarebbe a dire

$$\sum_{z_i > 0} z_i \log \frac{x_i}{z_i} \leq 0.$$

Per dimostrare questa ultima disuguaglianza, si può sfruttare la stretta concavità del logaritmo e usare la disuguaglianza di Jensen, per cui

$$\sum_{z_i>0} z_i \log \frac{x_i}{z_i} \leq \log(\sum_{z_i>0} z_i \frac{x_i}{z_i}) = \log 1 = 0$$

e l'uguaglianza vale solo nel caso in cui $x_i = z_i$ per $i = 1, ...n$.
Adesso rimane da far vedere che $\dot{V}(x) > 0 \ \forall x \neq z$, in un certo intorno di z. Posto

$$P := V + \prod_{z_i>0} z_i^{z_i},$$

possiamo limitiarci a dimostrare che $\dot{P}(x) > 0$, in un certo intorno di z: precisamente nell'insieme degli x su cui P è positiva, ovvero $\{x| \ x_i > 0 \ \ \forall i \text{ t.c. } z_i > 0\}$.

$$\dot{P} = P\frac{d}{dt}\log P = P\frac{d}{dt}\sum_{z_i>0} z_i \log x_i = P\sum_{z_i>0} z_i \frac{\dot{x}_i}{x_i} =$$
$$P\sum_{z_i>0} z_i((Ax)_i - x^T Ax) = P(z^T Ax - x^T Ax).$$

Questa quantità risulta positiva per ogni $x \neq z$, in quanto z è uno stato evolutivamente stabile e quindi vale la (2.1.4).

□

Osservazione. *Se $z \in$ int S_n è una ESS, allora è un punto di equilibrio globalmente stabile, perché $\dot{P}(x) > 0$ per ogni $x \neq z \in$ int S_n.*

Osservazione. *Non avendo usato, all'interno della dimostrazione, la linearità della funzione payoff, è chiaro che il teorema è valido anche in caso di payoff nonlineari.*

Osservazione. *Nessuna delle quattro affermazioni del teorema 2.2.16 si può invertire.*

Il viceversa della prima condizione vale solo se $z \in$ int S_n, in quel caso $(Az)_1 = ... = (Az)_n$ e quindi z risulta un equilibrio di Nash. Se però prendiamo un punto di equilibrio z, tale che $z_i = 0$, potrebbe succedere che $(Az)_i > z^T Az$, quindi z potrebbe non essere un equilibrio di Nash.
Nel fare un esempio in cui un equilibrio di Nash può non essere stabile per il sistema dinamico della replicazione, approfittiamo per presentare una classe di giochi che generalizzano sasso-forbice-carta.

Esempio Consideriamo, al variare di $a \in \mathbb{R}$, un gioco con matrice di payoff

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1+a & -1 \\ -1 & 0 & 1+a \\ 1+a & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il gioco originale sasso-forbice-carta si ottiene con $a = 0$. Per ogni a il gioco ha un unico equilibrio simmetrico di Nash interno a S_3: $\bar{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Mostriamo che, lungo le soluzioni del sistema in intS_3, la funzione $f(x) = x_1x_2x_3$ cresce, decresce, o è costante a seconda che a sia maggiore, minore o uguale a 0. Osserviamo che, in questo caso, il sistema della replicazione è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [x_2(1+a) - x_3 - x^TAx]x_1 \\ \dot{x}_2 = [x_3(1+a) - x_1 - x^TAx]x_2 \\ \dot{x}_3 = [x_1(1+a) - x_2 - x^TAx]x_3. \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata rispetto al tempo di $f(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \dot{x_1}x_2x_3 + x_1\dot{x_2}x_3 + x_1x_2\dot{x_3} \\ &= x_1x_2x_3[(1+a)(x_1+x_2+x_3) - (x_1+x_2+x_3) - 3x^TAx] \\ &= x_1x_2x_3(a - 3x^TAx). \end{aligned}$$

Ricordando che

$$1 = (x_1+x_2+x_3)^2 = \|x\|^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3),$$

otteniamo, per il payoff medio x^TAx, l'espressione

$$\begin{aligned} x^TAx &= \\ (x_2(1+a) - x_3, -x_1 + x_3(1+a), x_1(1+a) - x_2) \cdot x &= \\ (1+a)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) &= \\ a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) &= \frac{a}{2}(1 - \|x\|^2), \end{aligned}$$

ne segue che

$$\dot{f}(x) = x_1x_2x_3\frac{a}{2}(3\|x\|^2 - 1).$$

La funzione $\|x\|^2$, su S_3, raggiunge il massimo nei tre vertici, dove vale 1; raggiunge il minimo in $\bar{x} = (1/3, 1/3, 1/3)$, dove vale $1/3$. Per cui il fattore $(3\|x\|^2 - 1)$ vale 0 per $x = \bar{x}$, ed è positivo altrove.

Per quanto detto, nel gioco originale di sasso-forbice-carta ($a = 0$), la

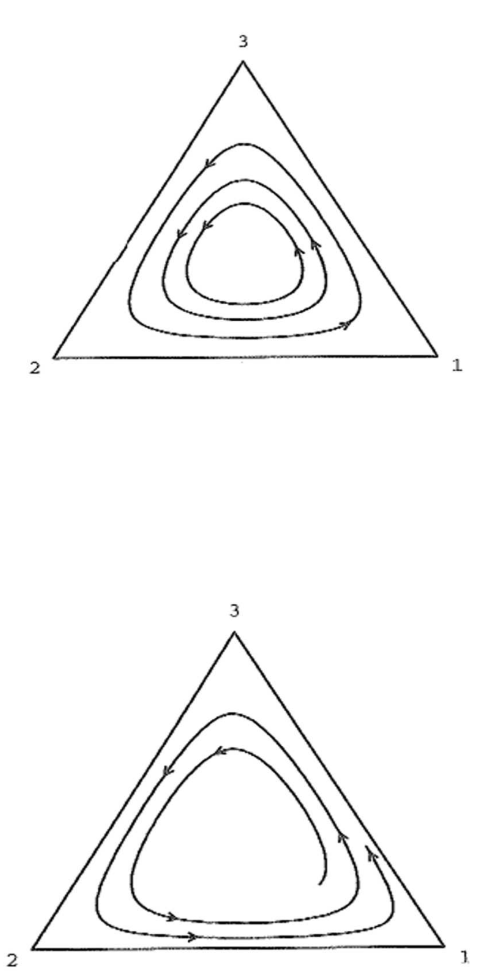

Figura 2.1: Ritratti delle orbite di sasso-forbice-carta generalizzato, nei casi $a = 0,\ a < 0,\ a > 0$.

funzione f rappresenta un integrale primo, ovvero una funzione costante sulle soluzioni; per cui, per ogni stato iniziale $x^0 \in \text{int } S_3$, la soluzione $\Phi(t, x^0)$ si muovo lungo la curva chiusa sulla quale f vale $x_1^0 x_2^0 x_3^0 =: \gamma$. Geometricamente questa curva è data dall'intersezione dell'iperbole $x_1 x_2 x_3 = \gamma$ con il simplesso S_3. Se $x^0 = \bar{x}$, questa intersezione si riduce al punto $\bar{x}$, altrimenti è una curva chiusa in $\text{int}S_3$. Tutte le soluzioni, quindi, sono periodiche.
Se $a < 0$, allora f è decrescente lungo le soluzioni, qunidi queste sono delle curve spiraleggianti, che si allontanano da $\bar{x}$. Se invece $a > 0$, allora le soluzioni sono curve spiraleggianti che si avvolgono verso $\bar{x}$.
Per cui l'unico equilibrio di Nash del gioco $\bar{x}$ risulta

- stabile, ma non asintoticamente stabile quando $a = 0$;
- asintoticamente stabile quando $a > 0$;
- instabile quando $a < 0$.

Osserviamo che $\bar{x}$, nel caso $a \leq 0$, non essendo asintoticamente stabile, non può essere una ESS, per via del teorema 2.2.16. Nel caso $a > 0$, invece, si dimostra che $\bar{x}$ è una ESS usando la proposizione 2.1.4, infatti

$$x^T A x = \frac{a}{2}(1 - \|x\|^2) < \frac{a}{3} = \bar{x}^T A x, \quad \forall x \neq \bar{x}.$$

Per convincersi che non vale l'inversa della terza affermazione, nel teorema 2.2.16, consideriamo il caso $a = 0$: l'equilibrio di Nash $\bar{x}$ è stabile, ma non asintoticamente; quindi siamo in presenza di un equilibrio di Nash, che però non è attrattivo, quindi non è punto limite di nessuna soluzione.

Nella dimostrazione del fatto che ESS $\Rightarrow$ asintoticamente stabile, abbiamo mostrato che z è una ESS se e solo se ha come funzione di Lyapunov stretta la funzione $V(x) = \prod_{z_i>0} x_i^{z_i} - \prod_{z_i>0} z_i^{z_i}$; tuttavia questa condizione non è necessaria affinché z sia asintoticamente stabile, quindi la dinamica della replicazione può ammettere punti asintoticamente stabili che non siano ESS, come mostra il seguente

Esempio Consideriamo il gioco con matrice di payoff

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Il punto $\bar{x} = (3/18, 8/18, 7/18)$ è l'unico equilibrio simmetrico di Nash del gioco; considerando l'equazione della replicazione per $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ e facendo qualche

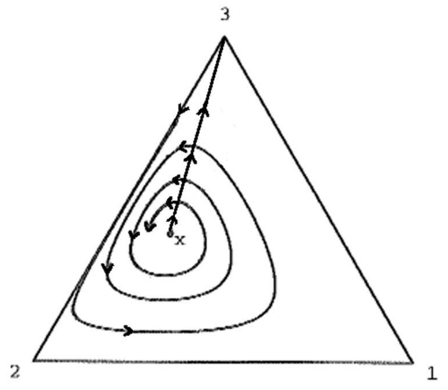

Figura 2.2: Un ritratto delle orbite.

conto, si possono trovare gli autovalori della matrice dello Jacobiano calcolato in $\bar{x}$; questi autovalori hanno entrambi parte reale negativa, quindi $\bar{x}$ è un pozzo, pertanto è asintoticamente stabile. Siccome $\bar{x}$ è nella parte interna, si ha che $y^T Ax = x^T Ax = 43/8 \quad \forall y \in S_3$; inoltre $e_3^T Ae_3 = 4 > 68/18 = \bar{x}^T Ae_3$, quindi $\bar{x}$ può essere invasa da e_3 e, pertanto, non è evolutivamente stabile.
Per avere un'idea di come sono fatte le orbite consideriamo che $a_{23} > a_{33}$, quindi e_2 può invadere e_3, mentre $a_{12} > a_{22}$, quindi e_1 può invadere e_2, inoltre $\bar{x}^T Ae_2 = 23/18 > a_{22}$ e $\bar{x}^T Ae_1 = 38/18 > a_{11}$, quindi $\bar{x}$ può invadere sia e_1 che e_2; ne risultano delle orbite spiraleggianti verso x che deviano leggermente verso e_3, quando intersecano il segmento che unisce $\bar{x}$ ad e_3.

Abbiamo appena visto che la stabilità asintotica non garantisce la stabilità evolutiva; rafforzando leggermente il concetto di stabilità asintotica, però, si ottiene un risultato di equivalenza.
Ricordiamo che a uno stato $z = (z_1, ..., z_n) \in S_n$, corrisponde una strategia $\tilde{z} = \sum_i z_i E_i \in S_N$, nel gioco originale. Se scegliamo diverse strategie possibili $W_1, ..., W_m \in S_n$, avremo un nuovo gioco H, in cui, se $\tilde{z} = \sum_{j=1}^m a_j W_j$, z sarà rappresentato dallo stato $(a_1, ..., a_m)$.

Definizione 2.2.17. *Diciamo che $z = (z_1, ..., z_n) \in S_n$ è fortemente stabile se, per ogni scelta di $W_1, ..., W_m \in S_n$, lo stato $(a_1, ..., a_m)$ che rappresenta*

z è asintoticamente stabile nel gioco H, ottenuto considerando $W_1, ..., W_m$ come possibili strategie iniziali.

Teorema 2.2.18. *Uno stato $z \in S_n$ è evolutivamente stabile se e solo se è fortemente stabile.*

Dimostrazione. Supponiamo $z = (z_1, .., z_n)$ evolutivamente stabile; scegliamo $W_1, ..., W_m \in S_n$ e consideriamo il gioco H indotto da queste strategie: ogni combinazione convessa di $W_1, ..., W_m$ è una combinazione convessa anche di $E_1, ..., E_n$, per cui $z = (a_1, ..., a_m)$ è uno stato evolutivamente stabile anche per il gioco H, quindi per il teorema 2.2.16 è asintoticamente stabile per la dinamica del gioco H. Dall'arbitrarietà di $W_1, ..., W_m$ segue che z è fortemente stabile.
Supponiamo z fortemente stabile; prendiamo $q \in S_n$ e consideriamo il gioco H ottenuto a partire dalle sole z e q come possibili strategie iniziali: siccome z è asintoticamente stabile, allora

$$\tilde{q}^T U \tilde{z} < \tilde{z}^T U \tilde{z}$$

oppure

$$\tilde{q}^T U \tilde{z} = \tilde{z}^T U \tilde{z} \ \text{ e } \ \tilde{q}^T U \tilde{q} < \tilde{z}^T U \tilde{q},$$

dove $\tilde{q} = \sum_{i=1}^n q_i E_i$ e U è la matrice dei payoff del gioco originale. Da tutto ciò si deduce che per ogni $q \in S_n$ si ha

$$q^T A z < z^T A z$$

oppure

$$q^T A z = z^T A z \ \text{ e } \ q^T A q < z^T A q,$$

cioè z è uno stato evolutivamente stabile. □

Osserviamo che nell'esempio precedente il punto $\bar{x} = (3/18, 8/18, 7/18)$ non può essere fortemente stabile, infatti se consideriamo $\bar{x}$ ed e_3 come sole possibili strategie, si verifica facilmente che $\bar{x}$ non è asintoticamente stabile nella dinamica unidimensionale associata.

2.3 Giochi asimmetrici

Fino ad ora abbiamo sempre considerato conflitti simmetrici, nel senso che tutti i giocatori sono indistinguibili. Molti conflitti, però, risultano asimmetrici: per esempio i conflitti tra maschi e femmine, o tra specie diverse di animali, possono dare luogo a guadagni che differiscono, a seconda della

specie. Restringiamoci a giochi tra due specie diverse, diciamo X e Y, e supponiamo sempre che le possibili strategie siano finite; supponiamo, inoltre, che i due giocatori che si affrontano appartengano sempre a specie diverse, o come si dice in biologia, supponiamo che i conflitti siano sempre interspecifici e mai intraspecifici. Uno studio del caso generale con N specie si può trovare in [5].
Siano $E_1, ..., E_n$ le strategie possibili per la popolazione X e $F_1, ..., F_m$ le strategie possibili per la popolazione Y. Indichiamo con x_i la frequenza di E_i all'interno di X, e con y_j la frequenza di F_j all'interno di Y; quindi lo stato x della popolazione X sarà un punto in S_n, lo stato y della popolazione Y sarà un punto in S_m. Se un individuo che usa la strategia E_i gioca contro un individuo che usa la strategia F_j, chiamiamo a_{ij} il payoff per il primo giocatore, b_{ji} il payoff per il secondo; perciò il gioco è descritto dalle matrici di payoff $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ji})$. Le espressioni $x^T Ay$ e $y^T Bx$, rappresentano i payoff medi per le popolazioni X e Y rispettivamente.
La condizione di stabilità evolutiva per i giochi asimmetrici è più limitante, rispetto alla stabilità evolutiva per i giochi simmetrici: assumiamo che la strategia E_i sia evolutivamente stabile contro uno stato y della popolazione Y, allora sicuramente non deve essere peggiore di tutte le altre strategie pure, cioè

$$(Ay)_i \geq (Ay)_k \quad \forall k \neq i;$$

nel caso dovesse valere l'uguaglianza, non c'è nessuna ragionevole condizione che ci assicura che E_k non possa essere invasa. Pertanto, in contrasto col caso simmetrico, non si possono ammettere altre risposte ottime. Questo ci porta alla seguente

Definizione 2.3.1. *Una coppia di strategie (p, q) si dice evolutivamente stabile per un gioco asimmetrico a due specie se*

$$p^T Aq > x^T Aq \quad \forall x \neq p \in S_n \tag{2.3.1}$$
$$q^T Bp > y^T Bp \quad \forall y \neq q \in S_m \tag{2.3.2}$$

Detto in altri termini una coppia (p, q) è evolutivamente stabile se è un equilibrio di Nash stretto per il gioco a due giocatori, con matrici di payoff A e B; abbiamo visto (corollario 1.2.5) che un equilibrio di Nash stretto è neccessariamente nelle strategie pure, da ciò discende la seguente

Proposizione 2.3.2. *Una coppia di strategie evolutivamente stabile è necessariamente nelle strategie pure.*

Esempio (Battaglia dei sessi) Vediamo un esempio di gioco asimmetrico: consideriamo una popolazione di maschi e femmine, in cui le femmine si

prendono sempre cura dei loro figli. Supponiamo che tra le femmine ci siano quelle timide, che prima di accoppiarsi si fanno fare la corte per lungo tempo, e quelle facili, che si accoppiano appena ne hanno l'occasione; supponiamo, invece, che tra i maschi ci siano quelli strafottenti, che abbandonano la compagna dopo l'accoppiamento e non sono disposti a farle la corte, e quelli fedeli, che sono disposti a una lunga corte e a prendersi cura dei figli.
Entrambi i genitori hanno un guadagno G dalla nascita di un figlio (o dall'atto dell'accoppiamento, se preferiamo); prendersi cura dei figli comporta un dispendio di tempo ed energia $-C$, che risulta a carico della sola femmina nel caso il maschio sia strafottente, è invece da dividersi a metà nel caso il maschio sia fedele; infine una lunga corte provoca un dispendio $-E$ per entrambi i partner. Assumiamo $0 < E < G < C < 2(G-E)$.
Se un maschio fedele si accoppia con una femmina timida, il payoff è $G - C/2 - E$ per entrambi; un maschio fedele e una femmina facile guadagnano entrambi $G - C/2$; un maschio strafottente che si accoppia con una femmina facile guadagna G, mentre la femmina guadagna $G - C$; infine un maschio strafottente e una femmina timida non si accoppiano, quindi il payoff è 0 per entrambi. Le matrici dei payoff, allora, sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & G \\ G - \dfrac{C}{2} - E & G - \dfrac{C}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & G - \dfrac{C}{2} - E \\ G - C & G - \dfrac{C}{2} \end{pmatrix}.$$

C'è un unico equilibrio di Nash dato da $x_1 = \dfrac{E}{C-G+E}$; $y_1 = \dfrac{C}{2(G-E)}$, che essendo misto non può essere stretto, quindi, come abbiamo osservato, non ci sono coppie di strategie evolutivamente stabili.

2.3.1 Dinamica asimmetrica

Possiamo, come abbiamo fatto in precedenza, associare un sistema di equazioni differenziali al gioco: assumiamo che il tasso di crescita $\dfrac{\dot{x}_i}{x_i}$ della frequenza della strategia E_i, sia uguale alla differenza tra il payoff $(Ay)_i$ e il payoff medio $x^T Ay$. Questo, e la corrispondente ipotesi per il tasso di crescita della frequenza della strategia F_j, conducono al sistema della replicazione

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i((Ay)_i - x^T Ay) \quad i = 1, ..., n \\ \dot{y}_j &= y_j((Bx)_j - y^T Bx) \quad j = 1, ..., m \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

sullo spazio $S_n \times S_m$ di tutti gli stati per X e Y.

Lemma 2.3.3. *L'aggiunta di costanti c_i, d_j alle colonne delle matrici dei payoff, lascia invariato il sistema della replicazione.*

Dimostrazione. Siano $\tilde{A}, \tilde{B}$, le matrici ottenute con le aggiunte delle costanti sulle colonne; poniamo $c = (c_1, ..., c_m)$ e $d = (d_1, ..., d_n)$; è facile verificare che $(\tilde{A}y)_i = (Ay)_i + \langle c, y \rangle$ e $x^T \tilde{A} y = x^T A y + \langle c, y \rangle$; analogamente si verifica che $(\tilde{B}x)_j = (Bx)_j + \langle d, x \rangle$ e $y^T \tilde{B} x = y^T B x + \langle d, x \rangle$. Perciò

$$(\tilde{A}y)_i - x^T \tilde{A} y = (Ay)_i - x^T A y$$
$$(\tilde{B}x)_j - y^T \tilde{B} x = (Bx)_j - y^T B x$$

e il sistema resta invariato. □

Con una dimostrazione molto simile a quella della proposizione 2.2.14 si può provare la seguente

Proposizione 2.3.4. *Gli insiemi $S_n \times S_m$, int $(S_n \times S_m)$, e $\partial(S_n \times S_m)$ sono invarianti rispetto alla dinamica della replicazione.*

I punti di equilibrio del sistema (2.3.3) interni a $S_n \times S_m$ sono le soluzioni (x, y), strettamente positive, del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} (Ay)_1 = \cdots = (Ay)_n \qquad & \sum y_j = 1 \\ (Bx)_1 = \cdots = (Bx)_m \qquad & \sum x_i = 1 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Se $n \neq m$ o non ci sono soluzioni al sistema (2.3.4), oppure le soluzioni formano un sottospazio affine di dimensione almeno $|n-m|$. L'insieme dei punti di equilibrio in int $(S_n \times S_m)$, perciò, o è vuoto, o interseca un sottospazio $|n-m|$-dimensionale; può esserci un punto d'equilibrio isolato solo se $n = m$; se tale punto esiste, è unico.

Proposizione 2.3.5. *I punti di equilibrio del sistema* (2.3.3) *in int* $(S_n \times S_m)$ *non possono essere nè pozzi, nè sorgenti.*

Dimostrazione. Possiamo considerare, nel sistema della replicazione, solo le prime $n-1$ equazioni per x e solo le prime $m-1$ equazioni per y. Consideriamo, per $1 \leq i, j \leq n-1$, le quantità

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} x_i((Ay)_i - x^T A y) = x_i(-\frac{\partial}{\partial x_j}(x^T A y)),$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta ricordando che per un punto di equilibrio in int $S_n \times S_m$ vale $(Ay)_i = (Ay)_n$; abbiamo inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x^T Ay) =$$
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_1(Ay)_1 + ... + x_{n-1}(Ay)_{n-1} + (1 - x_1 - ... - x_{n-1})(Ay)_n) =$$
$$(Ay)_j - (Ay)_n = 0$$

Perciò $\dfrac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} = 0$ per $1 \leq i, j \leq n-1$. Una analoga relazione vale per le y_j, quindi lo Jacobiano del sistema (2.3.3), calcolato in un punto di equilibrio in int $S_n \times S_m$, ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} O & C \\ D & O \end{pmatrix}$$

dove i blocchi di zeri sulla diagonale sono matrici quadrate $(n-1) \times (n-1)$ e $(m-1) \times (m-1)$ rispettivamente. Per il polinomio caratteristico di J vale la relazione

$$p(\lambda) = (-1)^{n+m-2} p(-\lambda),$$

che si ottiene moltiplicando per -1 le prime $n-1$ colonne e le ultime $m-1$ righe di $J - \lambda I$. Concludiamo che, se λ è un autovalore per J, allora lo è anche $-\lambda$, questo esclude sia pozzi che sorgenti. □

Per quanto riguarda le relazioni tra equilibri di Nash e punti di equilibrio nella dinamica della replicazione, valgono dei risultati analoghi ai giochi simmetrici.

Lemma 2.3.6. *Un punto $(z, w) \in S_n \times S_m$ è asintoticamente stabile se esiste un intorno U di (z, w) tale che per ogni $(x, y) \in U$ si ha*

$$z^T Ay - x^T Ay + w^T Bx - y^T Bx > 0.$$

Dimostrazione. Utilizziamo

$$V(x, y) = \prod_{z_i > 0} x_i^{z_i} \prod_{w_j > 0} x_j^{w_j} - \prod_{z_i > 0} z_i^{z_i} \prod_{w_j > 0} w_j^{w_j}$$

come funzione di Lyapunov. Per dimostrare che V è effettivamente una funzione di Lyapunov, si procede in maniera analoga alla dimostrazione del punto 4 del teorema 2.2.16: si nota che $V(z, w) = 0$; si usa la disuguaglianza di Jensen per mostrare che $V(x, y) < 0$ per $(x, y) \neq (w, z)$; infine, posto

$$P := V + \prod_{z_i > 0} z_i^{z_i} \prod_{w_j > 0} w_j^{w_j}$$

si dimostra che $\dot V > 0$, facendo vedere che $\dot P > 0$:

$$\dot P = P\frac{d}{dt}\log P = P\frac{d}{dt}\sum_{z_i>0} z_i \log x_i + \sum_{w_j>0} w_j \log y_j =$$

$$P\left(\sum_{z_i>0} z_i\frac{\dot x_i}{x_i} + \sum_{w_j>0} w_j\frac{\dot y_j}{y_j}\right) =$$

$$P\left(\sum_{z_i>0} z_i((Ay)_i - x^TAy) + \sum_{w_j>0} w_j((Bx)_j - y^TAx)\right) =$$

$$P(z^TAy - x^TAy + w^TBx - y^TBx) > 0$$

se $(x,y) \in U\cap M \neq \emptyset$, essendo $M = \{(x,y)|\, x_i > 0 \text{ se } z_i > 0 \text{ e } y_j > 0 \text{ se } w_j > 0\}$ l'insieme su cui $P > 0$. Concludiamo che (z,w) è asintoticamente stabile. □

Teorema 2.3.7. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *se (z,w) è un equilibrio di Nash, allora è un punto di equilibrio;*
2. *se (z,w) è un punto di equilbrio stabile, allora è un equilibrio di Nash;*
3. *se (z,w) è un punto limite di un'orbita interna (cioè esiste $(x^0,y^0) \in$ int $S_n \times S_m$, diverso da (z,w) tale che $\lim_{t\to\infty}\Phi(t,(x^0,y^0)) = (z,w)$), allora è un equilibrio di Nash.*
4. *se (z,w) è uno stato evolutivamente stabile, allora è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Ricalchiamo, con qualche modifica, la dimostrazione del teorema 2.2.16.

1. Deve valere $(Aw)_i = z^TAw$ (risp. $(Bz)_j = w^tBz$) per tutti gli indici per i quali $z_i > 0$ (risp $w_j > 0$).
2. Se per assurdo (z,w) non fosse un equilibrio di Nash, esisterebbe un indice i per il quale $z_i = 0$ e $(Aw)_i > z^TAw$, oppure un indice j per il quale $w_j = 0$ e $(Bz)_j > w^TBz$; possiamo assumere di trovarci nel primo caso, senza perdere generalità. Per continuità, esistono un $\delta > 0$ e un intorno U di (z,w), tali che per ogni $(x,y) \in U$, si ha $(Ay)_i - x^TAy \geq \delta$. Se prendiamo una soluzione $(x(t),y(t))$, con $(x(0),y(0)) \in U$ si ha

$$\dot x_i(t) = x_i((Ay)_i - x^TAy) \geq x_i\delta$$

per tutti i $t > 0$ tali che $(x(t), y(t)) \in U$; quindi, applicando il lemma di Gronwall otteniamo

$$x_i(t) \geq x_i(0)e^{\delta t}$$

per tutti i $t > 0$ tali che $(x(t), y(t)) \in U$; ne segue che una soluzione del sistema, che parte in U, se ne allontana sempre (alla velocità dell'esponenziale); questo vuol dire che (z, w) non è un punto di equilibrio stabile.

3. Procediamo per assurdo, senza perdere generalità supponiamo che esiste un indice i per il quale $(Aw)_i > z^T Aw$. Denotiamo con $(\phi, \psi) := \Phi$ il flusso integrale, separando le sue componenti su S_n da quelle su S_m; per ipotesi $\Phi(t, (x^0, y^0)) \to (z, w)$, per cui esistono un $\delta > 0$ e un tempo T dopo il quale

$$(A\psi)_i - \phi^T A\psi > \delta$$

cioè, $\dot{\phi}_i(t, (x^0, y^0)) \geq \phi_i(t, (x^0, y^0))\delta \quad \forall t \geq T$; applichiamo ancora il lemma di Gronwall in modo da avere

$$\phi_i(t, (x^0, y^0)) > \phi_i(T, (x^0, y^0)) \exp(\delta(t - T)) \quad \forall t \geq T.$$

Essendo $\phi_i(T, (x^0, y^0)) > 0$, si avrebbe $\phi_i \to \infty$, impossibile.

4. Per ipotesi si ha che

$$z^T Aw > x^T Aw \quad \forall x \neq z \quad \text{e} \quad w^T Bz > y^T Bz \quad \forall y \neq w.$$

Per continuità esiste un intorno U di (z, w) tale che per ogni $(x, y) \in U$, vale

$$z^T Ay - x^T Ay + w^T Bx - y^T Bx > 0,$$

quindi siamo nelle ipotesi del lemma precedente e possiamo concludere che (z, w) è asintoticamente stabile.

□

Le prime tre affermazioni non si possono invertire; la quarta affermazione, diversamente dal caso simmetrico, si può dimostrare essere un equivalenza.

Proposizione 2.3.8. *Sia $(z, w) \in S_n \times S_n$ se z e w non sono entrambe pure, allora (z, w) non può essere asintoticamente stabile.*

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

- $(z, w) \in \text{ int } (S_n \times S_m)$;

- Esiste i tale che $z_i = 0$, oppure esiste j tale che $w_j = 0$; cioè z o w sono su una faccia dei simplessi a cui appartengono.

Supponiamo di essere nel primo caso, consideriamo la funzione

$$P := \prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{j=1}^{m} y_j,$$

ricordando che $x_1 = 1 - \sum_{i>1} x_i$ e $y_1 = 1 - \sum_{j>1} y_j$, prendiamo in esame il sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{x_i}{P}[(Ay)_i - x^T Ay] \\ \dot{y}_j &= \frac{y_j}{P}[(Bx)_j - y^T Bx] \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

per $i = 2, ..., n$; $j = 2, ..., m$, che è ben definito su $\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}_+^{m-1}$, in quanto sul dominio P è positiva. Per la proposizione 2.2.11, la divisione di tutte le equazioni per la funzione P, non ha effetto sulle orbite. Osserviamo che per dimostrare che (z, w) non è asintoticamente stabile, è sufficiente dimostrare che il sistema (2.3.5) non ammette equilibri asintoticamente stabili. Per fare questo calcoliamo la divergenza del campo di vettori associato al sistema: scriviamo $\dot{x}_h$ come

$$\dot{x}_h = \frac{x_h}{\prod_{i=2}^{n} x_i \prod_{j=1}^{m} y_j} \left[\frac{(Ay)_h - x^T Ay}{1 - \sum_{k>1} x_k} \right] =$$
$$\frac{x_h}{\prod_{i=2}^{n} x_i \prod_{j=1}^{m} y_j} \left[\frac{(Ay)_h - \sum_{k>1} x_k (Ay)_k}{1 - \sum_{l>1} x_l} - (Ay)_1 \right];$$

ne segue che

$$\frac{\partial \dot{x}_h}{\partial x_h} = \frac{x_h}{\prod_{i=2}^{n} x_i \prod_{j=1}^{m} y_j} \left[\frac{-(1 - \sum_{l>1} x_l)(Ay)_h + (Ay)_h - \sum_{k>1} x_k (Ay)_k}{(1 - \sum_{l>1} x_l)^2} \right] =$$
$$\frac{x_h}{P} \left[(Ay)_h - \frac{x^T Ay - x_1 (Ay)_1}{1 - x_1} \right] \frac{1 - x_1}{x_1},$$

per cui sommando su h si ottiene che

$$\sum_{h>1} \frac{\partial \dot{x}_h}{\partial x_h} = \frac{1}{P} \left[x^T Ay - x_1 (Ay)_1 - (1 - x_1) \frac{x^T Ay - x_1 (Ay)_1}{1 - x_1} \right] \frac{1 - x_1}{x_1} = 0,$$

perché la quantità tra parentesi quadre è zero.

Siccome un discorso analogo vale per $\sum_{k>1} \dfrac{\partial \dot{y}_k}{\partial y_k}$, concludiamo che la divergenza è nulla su tutto $\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}_+^{m-1}$, pertanto per la proposizione 2.2.13 non possono esserci equilibri asintoticamente stabili.
Se ci troviamo nel secondo caso, consideriamo la funzione

$$P := \prod_{z_i \neq 0} x_i \prod_{w_j \neq 0} y_j,$$

posti $\bar{i}$ e $\bar{j}$ due indici per i quali $z_i \neq 0$ e $w_j \neq 0$, ricordando che $x_{\bar{i}} = 1 - \sum_{i \neq \bar{i}} x_i$ e $y_{\bar{j}} = 1 - \sum_{j \neq \bar{j}} y_j$, prendiamo in esame il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{x_i}{P}[(Ay)_i - x^T Ay] \\ \dot{y}_j &= \frac{y_j}{P}[(Bx)_j - y^T Bx] \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

per i, j tali che $z_i \neq 0$, $w_j \neq 0$, $i \neq \bar{i}$ e $j \neq \bar{j}$; il sistema è ben definito su $\mathbb{R}_+^{c_1-1} \times \mathbb{R}_+^{c_2-1}$, dove $c_1 := |\{i \mid z_i \neq 0\}|$ e $c_2 := |\{j \mid w_j \neq 0\}|$. Anche in questo caso per dimostrare che (z, w) non è asintoticamente stabile è sufficiente dimostrare che il sistema (2.3.6) non ammette equilibri asintoticamente stabili, e per farlo si procede come nel caso precedente. □

Teorema 2.3.9. *Sia (z, w) un equilibrio asintoticamente stabile nella dinamica della replicazione di un gioco asimmetrico, allora (z, w) è una coppia di strategie evolutivamente stabile.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente z e w devono essere necessariamente entrambe strategie pure. Supponiamo per assurdo che (z, w) non sia evolutivamente stabile, questo significa che (z, w) non è un equilibrio di Nash stretto; allora, senza perdere generalità, possiamo assumere che esista una strategia i, tale che $z^T Aw = (Aw)_i$, pertanto, detto E lo spigolo di S_n che connette i vertici z ed e_i, l'insieme $E \times \{w\}$ è un insieme di punti di equilibrio del sistema della replicazione; ne segue che (z, w) non può essere asintoticamente stabile, assurdo. □

Capitolo 3

Alcune applicazioni

In questo capitolo studieremo due applicazioni della teoria evolutiva dei giochi: la prima fa parte del ramo delle scienze sociali e riguarda le pubblicazioni scientifiche open access; la seconda tratta una delle discipline per le quali si è sviluppata la teoria evolutiva dei giochi, ovvero la teoria dell'evoluzione e della selezione naturale.

3.1 Open access

Con il termine open access si intende l'accesso gratuito alle pubblicazioni scientifiche. Ci sono diverse correnti di pensiero e diversi atteggiamenti riguardo alla pubblicazione di articoli open access, l'argomento è molto dibattuto. Informazioni più precise si possono trovare ad esempio in [6].
La questione dell'open access si può modellare come un gioco: in [7] gli autori costruiscono un gioco simmetrico tra gli scienziati, assumendo che lo scopo principale di questi sia quello di massimizzare la loro reputazione scientifica. Ne viene fuori un gioco a due giocatori con matrice dei payoff come quella del dilemma del prigioniero. Il tutto viene poi esteso alla teoria quantistica dei giochi, attraverso la quale si spiega come in alcune discipline scientifiche, dove l'open access è ampiamente adottato, convenga pubblicare open access; mentre, in altre discipline, dove questo non accade, la pubblicazione open access non è la strategia migliore.
Possiamo, invece, come viene fatto in [8], costruire un gioco asimmetrico tra scienziati ed editori, e studiarne la versione dinamica, che sembra essere più adatta alla situazione. Vediamo la cosa nel dettaglio.
Consideriamo il gioco tra scienziati ed editori dove i primi hanno a disposizione le strategie s_1, cioè pubblicare open access, ed s_2, cioè la pubblicazione tradizionale. Gli editori hanno a disposizione le strategie p_1, cioè accettare

o realizzare pubblicazioni open access, e p_2, cioè rifiutare qualsiasi pubblicazione open access.
Prima di presentare le matrici dei payoff, conviene introdurre alcune costanti:

- $R > 0$ rappresenta la reputazione scientifica che si ottiene con una pubblicazione. Questa reputazione viene ridotta di $r < R$ nel caso di pubblicazione open access.

- $I > 0$ rappresenta l'impatto che una pubblicazione dà sia allo scienziato che all'editore: questo viene ridotto di $i > 0$ nel caso di pubblicazione non open access (perché l'articolo non è sufficientemente disponibile).

- $L > 0$ rappresenta la spesa totale che comporta una pubblicazione open access.

- $G > 0$ è un piccolo compenso che lo scienziato dà all'editore per la pubblicazione, di qualsiasi tipo essa sia. Questo compenso può rappresentare, ad esempio, l'abbonamento ad una rivista.

- $P > 0$ è il prezzo che lo scienziato paga all'editore nel caso di pubblicazione non open access. Possiamo, realisticamente, assumere che valga $G + P > L + r - i$ e $P + L > i$.

Se uno scienziato che intende pubblicare open access si rivolge a un editore che pubblica open access, lo scienziato guadagnerà la reputazione ridotta, l'impatto e spenderà la metà dei costi di pubblicazione e il compenso all'editore per cui il payoff è $(R - r) + I - \frac{L}{2} - G$; l'editore guadagnerà il suo compenso, l'impatto e spenderà l'altra metà dei costi di pubblicazione open access, per cui il payoff è $G + I - \frac{L}{2}$. Nel caso lo scienziato si rivolga a un editore che non pubblica open access, e quindi non pubblica il suo lavoro, egli dovrà provvedere alla pubblicazione con i suoi mezzi, il payoff dell'editore sarà chiaramente 0 mentre quello dello scienziato $(R - r) + I - L$ perché dovra farsi carico da solo delle spese per garantire l'open access.
Se invece uno scienziato preferirebbe non pubblicare open access, ma si rivolge a un editore che pubblica open access, la pubblicazione avviene comunque open access; lo scienziato subisce perciò una perdita della quantità $s > 0$, che rappresenta la sua insoddisfazione: il suo payoff sarà pertanto $(R-r)+I-G-s$; è da intendersi che la quantità s è piccola e vale $s < L/2$. Il payoff dell'editore sarà $G + I - L$ perché si fa carico da solo delle spese di open access. In questa situazione il modello che stiamo descrivendo si discosta da quello proposto in [8], che adotta una convenzione meno realistica.
L'ultima eventualità rimasta è quella di uno scienziato e un editore che si accordino per una pubblicazione non open access: in tal caso i payoff saranno

$R + (I - i) - G - P$ per lo scienziato e $G + (I - i) + P$ per l'editore. Abbiamo così ottenuto che la matrice dei payoff per gli scienziati è

$$A = \begin{pmatrix} (R - r) + I - \frac{L}{2} - G & (R - r) + I - L \\ (R - r) + I - G - s & R + (I - i) - G - P \end{pmatrix},$$

mentre per gli editori è

$$B = \begin{pmatrix} G + I - \frac{L}{2} & G + I - L \\ 0 & G + (I - i) + P \end{pmatrix}.$$

Assumiamo, infine, che tutti i payoff a_{ij}, b_{ij} siano positivi (tranne $b_{21} = 0$); ciò corrisponde al fatto che pubblicando si ha un effettivo guadagno sia per lo scienziato che per l'editore.

Lemma 3.1.1. *In base alle ipotesi fatte sulle costanti, le quantità* $a_{12} - a_{22}, a_{21} - a_{11}, b_{22} - b_{12}, b_{11} - b_{21}$ *risultano positive.*

Dimostrazione. Si ha:

$$a_{12} - a_{22} = -r - L + i + G + P > 0$$

e

$$a_{21} - a_{11} = \frac{L}{2} - s > 0.$$

Inoltre, siccome $P + L > i$,

$$b_{22} - b_{12} = -i + P + L > 0$$

e poi

$$b_{11} - b_{21} = b_{11} > 0.$$

□

Abbiamo definito un gioco non cooperativo tra due giocatori, per il quale è facile trovare un equilibrio di Nash nelle strategie miste.

Proposizione 3.1.2. *Le strategie* $\bar{x} = (x_0, 1 - x_0),\ \bar{y} = (y_0, 1 - y_0)$, *dove*

$$x_0 = \frac{b_{22} - b_{12}}{b_{22} - b_{12} + b_{11} - b_{21}} = \frac{L + P - i}{P + G + I + L/2 - i},$$
$$y_0 = \frac{a_{12} - a_{22}}{a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11}} = \frac{P + G + i - L - r}{P + G + i - L/2 - r - s}, \tag{3.1.1}$$

sono un equilibrio misto di Nash per il gioco.

Dimostrazione. Si vede facilmente che:

$$A\bar{y} = \begin{pmatrix} y_0(a_{11} - a_{12}) + a_{12} \\ y_0(a_{21} - a_{22}) + a_{22} \end{pmatrix} = \frac{\det A}{a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che, per il lemma 3.1.1, il denominatore è strettamente positivo. Abbiamo che:

$$x^T A\bar{y} = \frac{\det A}{a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11}}(x + (1 - x)) = \frac{\det A}{a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11}} = \bar{x}^T A\bar{y},$$

anzi la quantità è indipendente dalla scelta di x.
Analogamente si vede che:

$$y^T B\bar{x} = \frac{\det B}{b_{12} - b_{22} + b_{21} - b_{11}}(y + (1 - y)) = \frac{\det B}{b_{12} - b_{22} + b_{21} - b_{11}} = \bar{y}^T B\bar{x}$$

e quindi, per definizione, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ formano un equilibrio di Nash. □

Esempio Scegliamo dei valori ragionevoli per le costanti introdotte:

$$i = 1;\ s = 1;\ r = 2;\ G = 3;\ L = 8;\ R = 10;\ I = 10;\ P = 12.$$

Le matrici dei payoff diventano:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

L'equilibrio di Nash è dato da $\left(\frac{19}{28}, \frac{9}{28}\right); \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3.1.1 Versione dinamica

Supponiamo di avere una popolazione di scienziati e una popolazione di editori. Sia x_i la frequenza della strategia s_i tra la popolazione degli scienziati; sia y_i la frequenza della strategia p_i tra la popolazione degli editori. Immaginiamo che, inizialmente, le popolazioni non siano nello stato $(\bar{x}, \bar{y})$ che definisce l'equilibrio di Nash (3.1.1), supponiamo ad esempio che gli scienziati che pubblicano open access siano un po' di meno: in questa situazione, come si può verificare dalle matrici dei payoff, gli editori hanno un guadagno maggiore nell'usare la strategia non open access, quindi la frequenza di questa strategia crescerebbe; in seguito a questa crescita, però, ci sarebbe un aumento della frequenza della strategia open access tra gli scienziati; poi un aumento della frequenza della strategia non open access tra gli editori; poi un aumento della frequenza della strategia open access tra gli scienziati;

infine di nuovo un aumento della frequenza della strategia non open access tra gli editori, e così via, seguendo lo schema di sotto.

$$\begin{array}{ccc} (s_1, p_1) & \leftarrow & (s_1, p_2) \\ \downarrow & & \uparrow \\ (s_2, p_1) & \rightarrow & (s_2, p_2) \end{array}$$

Queste continue oscillazioni impongono un approccio dinamico al problema. Il sistema della replicazione per giochi asimmetrici conduce al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x_i} = x_i((Ay)_i - x^T Ay) \\ \dot{y_j} = y_j((Bx)_j - y^T Bx) \end{cases}$$

per $i, j = 1, 2$.
Posto $x := x_1$ e $y := y_1$ si avrà $x_2 = 1 - x$ e $y_2 = 1 - y$. Con queste notazioni è più agevole fare i conti. Si ha
$\dot{x} = \dot{x_1} = x_1 = ((Ay)_1 - x^T Ay) =$
$= x(y_1(a_{11} - x_1 a_{11} - x_2 a_{21}) + y_2(a_{12} - x_1 a_{12} - x_2 a_{22})) =$
$= x(y(a_{11} - x a_{11} - (1-x)a_{21}) + (1-y)(a_{12} - x a_{12} - (1-x)a_{22})) =$
$= x(1-x)(y(a_{11} - a_{21}) + (1-y)(a_{12} - a_{22})) =$
$= x(1-x)((a_{12} - a_{22}) - (a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11})y)$
e similmente

$$\dot{y} = y(1-y)((b_{12} - b_{22}) - (b_{12} - b_{22} + b_{21} - b_{11})x).$$

Poniamo

$$a := a_{12} - a_{22}; \quad b := a_{21} - a_{11};$$

$$c := -b_{12} + b_{22}; \quad d := -b_{21} + b_{11}.$$

Osserviamo che, per il lemma 3.1.1, $a, b, c, d > 0$.
Il sistema di equazioni differenziali diventa:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x)(a - (a+b)y) \\ \dot{y} = y(1-y)(-c + (c+d)x) \end{cases}$$

sul quadrato $Q = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1]\}$. Questo sistema ha un carattere hamiltoniano vediamone alcune proprietà.
Consideriamo le funzioni H, f definite da

$$H(x, y) := c\log(x) + d\log(1-x) + a\log(y) + b\log(1-y),$$

$$f(x, y) = xy(1-x)(1-y).$$

Proposizione 3.1.3. *Il sistema della replicazione può essere riscritto come:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f\dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -f\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} f\frac{\partial H}{\partial y} &= xy(1-x)(1-y)\left(\frac{a}{y} - \frac{b}{1-y}\right) = \\ &= ax(1-x)(1-y) - bxy(1-x) = \\ &= x(1-x)(a - ay - by) = \dot{x} \end{aligned}$$

e anche:

$$\begin{aligned} -f\frac{\partial H}{\partial x} &= -xy(1-x)(1-y)\left(\frac{c}{x} - \frac{d}{1-x}\right) = \\ &= -cy(1-x)(1-y) + dxy(1-y) = \\ &= y(1-y)(-c + cx + dx) = \dot{y} \end{aligned}$$

□

Studiamo qualitativamente questo sistema: innanzitutto per i punti di equilibrio vale la seguente

Proposizione 3.1.4. *L'unico punto di equilibrio in int Q è (x_0, y_0) dove* $x_0 = \dfrac{a}{a+b}$; $y_0 = \dfrac{c}{c+d}$.

Dimostrazione. Siccome f è sempre strettamente positiva all'interno di Q, gli equilibri interni sono tutti e soli i punti stazionari di H. Da

$$(0,0) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}\right) = \left(\frac{a}{y} - \frac{b}{1-y}, \frac{c}{x} - \frac{d}{1-x}\right)$$

otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{y} = \dfrac{b}{1-y} \\ \dfrac{c}{x} = \dfrac{d}{1-x} \end{cases}$$

che ha come unica soluzione (x_0, y_0). □

Questo punto corrisponde all'equilibrio misto di Nash (3.1.1); non ci possono essere altri equilibri misti, altrimenti dovrebbero essere punti di equilibrio nella dinamica della replicazione.
Osserviamo che non ci sono equilibri di Nash nelle strategie pure e da questo segue che non ci sono strategie evolutivamente stabili.

Proposizione 3.1.5. *La funzione H è un integrale primo del sistema, ovvero:*

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$$

lungo le soluzioni del sistema.

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = c\frac{\dot{x}}{x} - d\frac{\dot{x}}{1-x} + a\frac{\dot{y}}{y} - b\frac{\dot{y}}{1-y}.$$

Ora, siccome stiamo considerando questa quantità lungo le soluzioni, possiamo sostituire le equazioni per $\dot{x}$ e $\dot{y}$ ottenendo:

$$\begin{aligned}&(c(1-x) - dx)(a - (a+b)y) + (a(1-y) - by)(-c + (c+d)x) = \\ &= (c - cx - dx)(a - ay - by) + (a - ay - by)(-c + cx + dx) = 0.\end{aligned}$$

□

Avendo un integrale primo possiamo servirci delle sue linee di livello per studiare il comportamento qualitativo delle orbite. Innanzitutto l'unico punto stazionario di H è un massimo: infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial^2 x} &= -\frac{c}{x^2} - \frac{d}{1-x^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial^2 y} &= -\frac{a}{y^2} - \frac{b}{1-y^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0,\end{aligned}$$

dunque l'hessiana di H calcolata nel punto (x_0, y_0) è:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{(c+d)^3}{cd} & 0 \\ 0 & -\dfrac{(a+b)^3}{ab} \end{pmatrix},$$

è definita negativa in virtù del lemma 3.1.1.
Inoltre per ogni q sulla frontiera di Q, si ha

$$\lim_{(x,y)\to q} H(x, y) = -\infty;$$

H quindi ha un massimo assoluto in (x_0, y_0). Intersecando il grafico di H con i piani di livello otteniamo le orbite del nostro sistema dinamico, che risultano essere chiuse e ruotano attorno al punto di equilibrio.

3.1.2 Caso nonlineare

Se la frequenza di pubblicazioni open access cresce, allora la perdita di reputazione r dovrebbe diminuire. Si può dare un modello più accurato, che tenga in considerazione questa osservazione, rinunciando alla linearità dei payoff.
Supponiamo che il termine r sia direttamente proporzionale a $h(x)$, dove $h(x)$ è una data funzione derivabile, strettamente decrescente e tale che $h(0) = 1$; $h(1) = 0$.
Sia (x, y) lo stato della popolazione, chiamiamo $f_i(x, y)$ il guadagno medio per uno scienziato che usi la strategia i, e $g_j(x, y)$ il guadagno medio per un editore che usi la strategia j. Si ha che

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \left(\frac{L}{2} - G\right) y + R + I - L - rh(x),\\
f_2(x,y) &= (P + i - s - rh(x))y + R + I - i - G - P,\\
g_1(x,y) &= \frac{L}{2}x + G + I - L,\\
g_2(x,y) &= (-G - I + i - P)x + G + I - i + P.
\end{aligned}
$$

Il sistema della replicazione è

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= x_i(f_i(x,y) - \bar{f}(x,y))\\
\dot{y}_j &= y_j(g_j(x,y) - \bar{g}(x,y))
\end{aligned}
$$

dove i guadagni medi $\bar{f}(x, y)$ e $\bar{g}(x, y)$ sono definiti rispettivamente da $x_1 f_1 + x_2 f_2$ e $y_1 g_1 + y_2 g_2$. Ponendo, come sempre, $x := x_1$; $y := y_1$, il sistema è equivalente a

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(1-x)(f_1(x,y) - f_2(x,y))\\
\dot{y} &= y(1-y)(g_1(x,y) - g_2(x,y))
\end{aligned}
\tag{3.1.2}
$$

che nel caso in esame sarebbe

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= x(1-x)[\big(\tfrac{L}{2} - G - P - i + s + rh(x)\big)\, y - L - rh(x) + i + G + P]\\
\dot{y} &= y(1-y)[\big(G + I + P + \tfrac{L}{2} - i\big)\, x + i - L - P].
\end{aligned}
$$

Il punto di equilibrio interno ha la stessa ascissa dell'equilibrio lineare, mentre l'ordinata è di poco maggiore; precisamente

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{P + L - i}{P + I + G + L/2 - i}\\
y_0 &= \frac{P + G + i - L - rh(x_0)}{P + G + i - L/2 - s - rh(x_0)}.
\end{aligned}
$$

Differentemente dal caso lineare, il punto di equilibrio non è più stabile; vale infatti il seguente risultato:

Proposizione 3.1.6. *Il punto di equilibrio (x_0, y_0) è una sorgente.*

Dimostrazione. Dimostriamo che gli esponenti di Lyapunov per (x_0, y_0) sono entrambi positivi: il polinomio caratteristico dello Jacobiano è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y}\right)\lambda + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}. \tag{3.1.3}$$

Calcoliamo i segni delle derivate parziali in (x_0, y_0):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} &= x_0(1-x_0)rh'(x_0)(y_0-1) > 0 \\
\frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} &= x_0(1-x_0)(L/2 - G - P - i + s + rh(x_0)) < 0 \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} &= y_0(1-y_0)(G + I + P + L/2 - i) > 0 \\
\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} &= 0.
\end{aligned}$$

Le parti reali degli autovalori dello Jacobiano in (x_0, y_0) sono concordi e hanno somma $x_0(1-x_0)rh'(x_0)(y_0-1) > 0$, pertanto sono entrambe positive. □

Osservazione. *Il fatto che (x_0, y_0) sia una sorgente non è in contrasto con la proposizione 2.3.5, che si riferisce a giochi lineari, come quello originale dell'open access(dove $h(x)$ vale sempre 1).*

3.2 Giochi asimmetrici 2×2

Generalizziamo i ragionamenti fatti per il gioco dell'open access, classificando i giochi asimmetrici 2×2.
Grazie al lemma 2.3.3 possiamo, senza perdita di generalità , assumere che le matrici dei payoff abbiano gli elementi sulle diagonali pari a 0, ovvero che siano della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che, come al solito, $x_2 = 1 - x_1$ e $y_2 = 1 - y_1$ e denotiamo x_1 e y_1 con x e y. La dinamica della replicazione diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x)(a_{12} - (a_{12} + a_{21})y) \\ \dot{y} = y(1-y)(b_{12} - (b_{12} + b_{21})x) \end{cases}$$

sul quadrato $Q = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1]\}$.
Se $a_{12}a_{21} \leq 0$, allora $\dot{x}$ non cambia mai segno in Q. In questo caso o x è costante, oppure converge verso 0 o 1. Analogamente se $b_{12}b_{21} \leq 0$, o y è costante, oppure converge verso 0 o 1. Allora rimangono da considerare i casi in cui $a_{12}a_{21} > 0$ e $b_{12}b_{21} > 0$. In questi casi c'è sempre un solo punto di equilibrio in int Q, dato da

$$P = \left(\frac{b_{12}}{b_{12} + b_{21}}, \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{21}} \right),$$

che rappresenta anche l'unico equilibrio di Nash misto del gioco.
Lo Jacobiano in P è dato da

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -(a_{12} + a_{21}) \dfrac{b_{12}b_{21}}{(b_{12} + b_{21})^2} \\ -(b_{12} + b_{21}) \dfrac{a_{12}a_{21}}{(a_{12} + a_{21})^2} & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono le soluzioni di

$$\lambda^2 - \frac{a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}}{(a_{12} + a_{21})(b_{12} + b_{21})} = 0.$$

Se $a_{12}b_{12} > 0$, gli autovalori sono reali e discordi, per cui P è un punto di sella e le orbite convergono a due angoli opposti del quadrato Q. Nel caso $a_{12}b_{12} < 0$, caso che si presenta nel gioco dell'open access (dopo avere ottenuto gli zeri sulla diagonale), gli autovalori sono immaginari puri e le orbite sono curve chiuse che ruotano periodicamente atttorno a P. Per provare quest'ultima affermazione, osserviamo che il sistema ha carattere hamiltoniano; detti

$$H(x, y) := a_{12} \log y + a_{21} \log(1 - y) - b_{12} \log x - b_{21} \log(1 - x),$$
$$f(x, y) = xy(1 - x)(1 - y),$$

si dimostra, analogamente a quanto fatto per il gioco dell'open access, che il sistema della replicazione diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = f \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -f \dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

e che H è un integrale primo. L'unico punto stazionario di H è P; nel caso in cui $a_{12}b_{12} > 0$ si tratta di un minimo, in quanto l'hessiana di H è definita positiva, nel caso $a_{12}b_{12} < 0$, come abbiamo visto, P è un massimo.

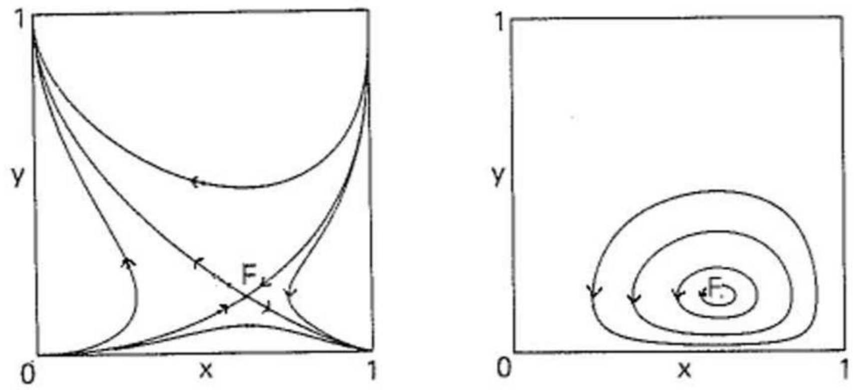

Figura 3.1: Ritratti delle orbite nei casi $a_{12}b_{12} > 0$ e $a_{12}b_{12} < 0$

Intersecando H con i piani di livello, si ottengono le orbite.
Osserviamo che, nel caso $a_{12}b_{12} > 0$, P è un equilibrio di Nash instabile nella dinamica della replicazione, cioè un controesempio alla seconda affermazione del teorema 2.3.7, mentre se $a_{12}b_{12} < 0$, P è un equilibrio di Nash che non è un punto limite di nessuna orbita interna, cioè un controesempio alla terza affermazione del teorema 2.3.7; per ottenere un controesempio anche alla prima affermazione, cioè avere un punto di equilibrio nella dinamica che non sia un equilibrio di Nash, basta considerare una qualsiasi coppia di strategie pure.
Facendo dei conti analoghi a quelli fatti per l'open access, si può dire qualcosa anche sul caso nonlineare: siano $f_i(x, y)$ e $g_j(x, y)$ funzioni derivabili, che rappresentano i guadagni medi allo stato (x, y); il sistema della replicazione è dato dalla (3.1.2). Sia P un punto di equilibrio interno, ovvero un punto tale che $f_1(P) = f_2(P)$ e $g_1(P) = g_2(P)$; per discuterne la stabilità ricordiamo che il polinomio caratteristico dello Jacobiano è dato dall'equazione (3.1.3). Si possono ricavare delle condizioni sulle derivate delle f_i, g_j che garantiscono la stabilità o l'instabilità di P, precisamente

- se $\dfrac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial x}\dfrac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial y}(P) - \dfrac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial y}\dfrac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial x}(P) < 0$, allora gli esponenti di Lyapunov sono discordi, quindi P è una sella instabile;

- se $\frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial x}\frac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial y}(P) - \frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial y}\frac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial x}(P) > 0$ allora P è una sorgente o un pozzo, a seconda che la quantità $\frac{\partial(f_1 - f_2)}{\partial x}(P) + \frac{\partial(g_1 - g_2)}{\partial y}(P)$ sia maggiore o minore di zero.

3.3 La selezione naturale

Le cellule degli organismi superiori, a parte rare eccezioni, contengono un nucleo dove risiede l'informazione genica, all'interno dei cromosomi; il numero di cromosomi varia da specie a specie, ma è sempre pari. Consideriamo alcuni tratti ereditari espressi nel fenotipo (l'insieme della caratteristiche manifeste) di un organismo, per esempio colore degli occhi o gruppo sanguigno. Nel caso più esemplificato, questo è determinato dall'azione combinata di una coppia di geni, presenti all'interno di una coppia di cromosomi; in molti casi, ci sono diversi tipi di geni, i cosiddetti alleli $A_1, ..., A_n$. Il genotipo è determinato dalla coppia che realmente appare nei cromosomi. Nel caso si tratti di A_iA_i, ovvero quando lo stesso allele appare due volte, il genotipo è omozigote, nel caso si abbia A_iA_j con $i \neq j$, allora è eterozigote. In quest'ultimo caso, un allele può sopprimere l'effetto dell'altro, nel senso che A_iA_j si manifesta come A_iA_i; A_i è allora detto dominante e A_j recessivo. I genotipi A_jA_i e A_iA_j non possono comunque essere distinti. Informazioni più dettagliate a riguardo, e molto altro ancora, possono essere trovate in [9] o [10].

3.3.1 La legge di Hardy-Weinberg

Supponiamo di avere n differenti alleli $A_1, ..., A_n$. Denotiamo con N_{ij} il numero di individui con genotipo A_iA_j, all'interno di una data popolazione; $N := \sum_{i,j} N_{ij}$ sarà il numero totale degli individui. Le frequenze dei genotipi sono date da

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N}.$$

Ogni individuo ha (per ogni coppia di cromosomi) due geni, pertanto il numero totale di geni è $2N$. Un individuo A_iA_i possiede due geni A_i, mentre un A_iA_j o un A_jA_i ne possiedono uno solo, pertanto la frequenza del gene i-esimo è data da

$$p_i = \frac{\sum_j N_{ij} + \sum_j N_{ji}}{2N} = \frac{1}{2}\sum_j p_{ij} + \frac{1}{2}\sum_j p_{ji}.$$

Consideriamo le generazioni successive e poniamoci nel caso molto semplice in cui

- viene creato un nuovo genotipo mediante la trasmissione di un allele da parte del padre e dell'altro allele da parte della madre, scelti a caso tra quelli presenti nei rispettivi corredi genetici (per esempio se il padre è del tipo A_1A_2 e la madre è A_3A_3, essi possono generare il genotipo A_1A_3 o A_3A_1 e il genotipo A_2A_3 o A_3A_2 con uguale probabilità;
- le dimensioni della popolazione sono molto grandi;
- le generazioni sono separate, altrimenti bisognerebbe tenere conto della distribuzione delle età all'interno della popolazione;
- i geni sono autosomi, cioè indipendenti dal sesso.

Sebbene queste ipotesi siano restrittive, sono alla base di molti modelli di genetica delle popolazioni.
In queste condizioni vale una legge di equilibrio genetico, scoperta indipendemente dal fisico tedesco Weinberg e dal matematico britannico Hardy, detta appunto legge di Hardy-Weinberg:

Proposizione 3.3.1. *1. Le frequenze dei geni restano inalterate di generazione in generazione;*

2. dalla prima generazione in poi, la frequenza del genotipo A_iA_j è p_ip_j.

Dimostrazione. Ricordando che p_i e p_{ij} denotano rispettivamente le frequenze dei geni e dei genotipi, indichiamo con p'_i e p'_{ij} le corrispondenti frequenze nella generazione successiva; in base alle ipotesi fatte, la probabilità che venga generato il fenotipo A_iA_j, cioè la sua frequenza nella generazione successiva p'_{ij}, è p_ip_j. Pertanto

$$p'_i = \frac{1}{2}\sum_j p'_{ij} + \frac{1}{2}\sum_j p'_{ji} = \frac{1}{2}p_i \cdot 2\sum_j p_j = p_i$$

□

Osservazione. *Considerato il fatto che i genotipi A_iA_j e A_jA_i sono indistinguibili, la frequenza del genotipo (non ordinato) eterozigote A_iA_j è $2p_ip_j$, quella del genotipo omozigote A_iA_i è p_i^2.*

La dinamica dell'evoluzione di queste frequenze è molto semplice: lo stato del pool genico $(p_1, ..., p_n)$ è costante; le frequenze genotipiche sono inizialmente p_{ij} e dopo una generazione raggiungono il valore di equilibrio dato da p_ip_j.

3.3.2 Teorema fondamentale della selezione naturale

Studiamo l'effetto della selezione naturale all'interno di una popolazione. Siano $A_1, ..., A_n$ i possibili alleli e $p_1, ..., p_n$ le rispettive frequenze tra la popolazione; sia w_{ij} la probabilità che un individuo A_iA_j sopravviva fino all'età dell'accoppiamento, i valori w_{ij} soddisfano $w_{ij} \geq 0$ e $w_{ij} = w_{ji}$, dato che i genotipi A_iA_j e A_jA_i sono indistinguibili.
Se N è il numero di zigoti nella generazione successiva, allora p_ip_jN sono del tipo A_iA_j, tra i quali $w_{ij}p_ip_jN$ sopravvivono all'età adulta; il numero totale di individui che raggiungo lo stadio dell'accoppiamento è $\sum_{r,s} w_{rs}p_rp_sN$; assumeremo che questa quantità sia diversa da 0. Indicando con p'_{ij} la frequenza del genotipo A_iA_j e con p'_i la frequenza dell'allele A_i, nell'età adulta della generazione successiva, si ha che

$$p'_{ij} = \frac{w_{ij}p_ip_jN}{\sum_{r,s} w_{rs}p_rp_sN}.$$

per p'_{ji} otteniamo lo stesso risultato, visto che $w_{ij} = w_{ji}$. Inoltre, essendo

$$p'_i = \frac{1}{2}\sum_j p'_{ij} + \frac{1}{2}\sum_j p'_{ji},$$

otteniamo che

$$p'_i = p_i \frac{\sum_j w_{ij}p_j}{\sum_{r,s} w_{rs}p_rp_s} \tag{3.3.1}$$

per $i = 1, ..., n$; queste relazioni ci forniscono un sistema dinamico discreto che descrive l'evoluzione della frequenza dei geni di generazione in generazione: detta W la matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix},$$

il sistema dinamico in questione è $T : S_n \to S_n$ definito da

$$(Tp)_i = p_i \frac{(Wp)_i}{p^TWp} \tag{3.3.2}$$

per $i = 1, ..., n$. Un punto p è di equilibrio per il sistema se per ogni i si ha $p_i = 0$ oppure $(Wp)_i = p^TWp$.
La quantità p^TWp, che denotiamo anche con $\bar{w}(p)$, può essere interpretata come la fitness media della popolazione. Il seguente teorema, chiamato teorema fondamentale della selezione naturale, afferma che la fitness media cresce di generazione in generazione.

Teorema 3.3.2. *La quantità $\bar{w}(p)$ cresce lungo ogni orbita del sistema dinamico* (3.3.2)*, ovvero*

$$\bar{w}(Tp) \geq \bar{w}(p) \tag{3.3.3}$$

con l'uguaglianza che vale se e solo se p è un punto di equilibrio.

Dimostrazione. Dal momento che $p^T W p > 0$, dobbiamo dimostrare che

$$(p^T W p)^2((Tp)^T W(Tp)) \geq (p^T W p)^3.$$

Considerando che l'espressione Tp è data dalla (3.3.2), il primo membro diventa

$$\sum_{i,h} p_i (Wp)_i w_{ih} p_h (Wp)_h = \sum_{i,j,h} p_i w_{ij} p_j w_{ih} p_h (Wp)_h =: A,$$

scambiando gli indici j e h otteniamo

$$\sum_{i,j,h} p_i w_{ih} p_h w_{ij} p_j (Wp)_j =: B;$$

siccome A e B sono la stessa quantità, il primo membro è anche uguale alla loro media aritmetica

$$\sum_{i,j,h} p_i w_{ij} p_j w_{ih} p_h \frac{(Wp)_j + (Wp)_h}{2} \geq \sum_{i,j,h} p_i w_{ij} p_j w_{ih} p_h {(Wp)_j}^{\frac{1}{2}} {(Wp)_h}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_i p_i \sum_j w_{ij} p_j (Wp)_j^{\frac{1}{2}} \sum_h w_{ih} p_h (Wp)_h^{\frac{1}{2}} = \sum_i p_i \left(\sum_j w_{ij} p_j (Wp)_j^{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

dove la prima disuguaglianza è quella tra la media aritmetica e la media geometrica.
Applicando la disuguaglianza di Jensen alla funzione convessa x^2, otteniamo che l'ultima espressione è non inferiore a

$$\left(\sum_i p_i \sum_j w_{ij} p_j (Wp)_j^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\sum_j p_j (Wp)_j^{\frac{1}{2}} \sum_i p_i w_{ij} \right)^2.$$

Dal momento che la matrice W è simmetrica otteniamo

$$\left(\sum_j p_j (Wp)_j^{\frac{1}{2}} (Wp)_j \right)^2 = \left(\sum_j p_j (Wp)_j^{\frac{3}{2}} \right)^2;$$

utilizzando ancora la disuguaglianza di Jensen applicata a $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, si ottiene che l'ultima espressione non è minore di

$$\left(\sum_j p_j (Wp)_j\right)^{\frac{3}{2}\cdot 2} = (p^T W p)^3,$$

che dimostra la (3.3.3).
Per concludere osserviamo che $\bar{w}(p) = \bar{w}(Tp)$ se e solo se tutte le stime sono uguaglianze; è facile vedere che questo avviene se e solo se tutte le quantità $(Wp)_j$ sono uguali per gli indici tali che $p_j > 0$, il che equivale a dire che p è un punto di equilibrio. □

Corollario 3.3.3. *Data un'orbita del sistema dinamico* (3.3.2)*, ogni suo punto di accumulazione è un punto di equilibrio.*

Dimostrazione. Sia y un punto di accumulazione per l'orbita, allora esiste $(k_j)_j$ tale che $T^{k_j}p \to y$; per continuità di T, $T^{k_j+1}p = T(T^{k_j}p)$ converge a Ty. D'altra parte la successione $\bar{w}(T^k p)$ è strettamente crescente e limitata da $\sum w_{ij}$, per cui converge a un certo L; si ha

$$\bar{w}(y) = \bar{w}(\lim_{j\to\infty} T^{k_j}p) = L,$$

inoltre

$$\bar{w}(Ty) = \bar{w}(\lim_{j\to\infty} T^{k_j+1}p) = L,$$

per cui $\bar{w}(y) = \bar{w}(Ty)$, cioè y è un punto di equilibrio. □

Se i punti di equilibrio sono isolati, allora ogni orbita converge a un punto di equilibrio.

3.3.3 Un modello continuo

Assumiamo che le generazioni si mescolino continuamente l'una nell'altra; se le nascite e le morti avvengono in maniera approssimativamente continua, possiamo considerare $N_i(t)$, il numero degli alleli A_i al tempo t, come una funzione derivabile. Con N indichiamo il numero totale degli individui della popolazione; $2N$ sarà il numero totale di alleli e $x_i = N_i/2N$ la frequenza degli A_i.
Assumiamo che la popolazione sia in ogni istante nell'equilibrio di Hardy-Weinberg, allora la frequenza del genotipo A_iA_j è data da $x_ix_j = N_iN_j/4N^2$. Chiamiamo b_{ij} e d_{ij} rispettivamente il tasso di nascita e il tasso di morte del genotipo A_iA_j; la loro differenza $m_{ij} = b_{ij} - d_{ij}$ è chiamata parametro di

fitness malthusiano, che per il momento assumeremo costante.
La crescita dell'allele A_i all'interno del pool genico è data da

$$\dot{N}_i = \sum_j m_{ij} \frac{N_i N_j}{4N^2} N + \sum_j m_{ji} \frac{N_j N_i}{4N^2} N,$$

siccome i genotipi $A_i A_j$ e $A_j A_i$ sono indistinguibili, si ha $m_{ij} = m_{ji}$, pertanto

$$\dot{N}_i = \frac{N_i}{2N} \sum_j m_{ij} N_j.$$

La crescita dell'intera popolazione è espressa da

$$\dot{N} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{N}_i = \frac{1}{4N} \sum_{i,j} m_{ij} N_i N_j = N \sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j.$$

Per quanto riguarda le frequenze degli alleli abbiamo

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{N_i}{2N} \right) = \frac{\dot{N}_i N - \dot{N} N_i}{2N^2} = x_i \left(\sum_j m_{ij} x_j - \sum_{r,s} m_{rs} x_r x_s \right),$$

che scritto in maniera più compatta diventa

$$\dot{x}_i = x_i((Mx)_i - x^T Mx). \tag{3.3.4}$$

Questa è un sistema della replicazione con matrice di payoff simmetrica: nel contesto della dinamica di gioco la simmetria della matrice dei payoff significa che gli interessi dei giocatori coincidono.
La selezione naturale può essere interpretata come un gioco evolutivo dove gli alleli $A_1, ..., A_n$ rappresentano le strategie; una coppia di strategie (A_i, A_j) dà luogo ad un individuo di genotipo $A_i A_j$ e la fitness di questo genotipo rappresenta il payoff (comune) per le strategie (A_i, A_j). Da questo punto di vista risulta che non sono gli esseri viventi a giocare, essi sono solo il tavolo da gioco.
Ritornando alla dinamica del gioco, vediamo il teorema fondamentale della selezione naturale nella sua versione continua, secondo cui la fitness media $\bar{m}(x) = x^T Mx$ cresce lungo le orbite del sistema (3.3.4).

Teorema 3.3.4. *Sia z un punto di equilibrio del sistema* (3.3.4)*, allora la funzione $V := \bar{m} - z^T Mz$ è una funzione di Lyapunov stretta per z.*

Dimostrazione. Si ha che

$$
\begin{aligned}
\dot{V} = \frac{d}{dt}(x^T Mx) = 2\dot{x}^T Mx = 2\sum \dot{x}_i(Mx)_i \\
= 2\sum x_i((Mx)_i - x^T Mx)(Mx)_i = 2\sum x_i((Mx)_i^2 - (x^T Mx)^2) \\
= 2\sum x_i((Mx)_i^2 - 2(Mx)_i x^T Mx + (x^T Mx)^2) \\
= 2\sum x_i((Mx)_i - x^T Mx)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $(Mx)_i - x^T Mx = 0$ per gli indici tali che $x_i > 0$, cioè se x è un punto di equilibrio.
Inoltre è chiaro che $V(z) = 0$, perciò V è una funzione di Lyapunov per z. □

Osservazione. *Abbiamo ottenuto un'informazione aggiuntiva: la crescita della fitness media è proporzionale alla varianza della fitness.*

Osservazione. *Per il teorema di Lyapunov tutte le orbite convergono all'insieme dei punti di equilibrio.*

Nel caso particolare della selezione naturale, per il sistema della replicazione vale la seguente

Proposizione 3.3.5. *I punti di equilibrio asintoticamente stabili del sistema* (3.3.4) *sono tutti e soli gli stati evolutivamente stabili.*

Dimostrazione. Una implicazione è garantita dal teorema 2.2.16, vediamo l'altra implicazione: sia z un equilibrio asintoticamente stabile, allora per il teorema precedente

$$x^T Mx < z^T Mz$$

per tutti gli $x \neq z$ in un certo intorno di z. Rimpiazzando x con $2x - z$, che pure è vicino a z, otteniamo

$$x^T Mx < x^T Mz$$

e, data la simmetria di M,

$$z^T Mx > x^T Mx$$

che per la proposizione 2.1.4, significa che z è uno stato evolutivamente stabile. □

Corollario 3.3.6. *Un equilibrio asintoticamente stabile in int S_n è anche globalmente stabile.*

Il teorema fondamentale ha come conseguenza che ogni punto di accumulazione delle orbite è un punto di equilibrio, tuttavia potrebbero esserci diversi punti di accumulazione per una singola orbita; la seguente proposizione stabilisce che ciò non è possibile.

Proposizione 3.3.7. *Ogni orbita del sistema* (3.3.4) *converge ad un punto di equilibrio.*

Dimostrazione. Consideriamo una qualsiasi orbita $\Phi(x^0, t)$; sia $p \in S_n$ un punto di accumulazione per tale orbita. Consideriamo la funzione

$$L(x) := -\sum_{p_i > 0} p_i \log \frac{x_i}{p_i}$$

definita su $S_n \cap \{x \mid \mathrm{supp}(x) \supseteq \mathrm{supp}(p)\}$; come abbiamo già visto nella dimostrazione del teorema 2.2.16, la funzione L raggiunge il suo minimo valore 0 solo in p. Per dimostrare che $\Phi(x^0, t) \to p$, faremo vedere che $L(\Phi(x^0, t)) \to 0$.
Sia $J := \{i \mid (Mp)_i \neq p^T Mp\}$. Siccome p è un punto di equilibrio, $p_i = 0$ per $i \in J$. Definiamo $S(x) := \sum_{i \in J} x_i$,

$$Z(x) := \begin{cases} \min_{i \in J}((Mx)_i - x^T Mx)^2 & J \neq \emptyset \\ 0 & J = \emptyset \end{cases}$$

e

$$K := \begin{cases} \max_{i \in J} |p^T Mp - (Mp)_i| & J \neq \emptyset \\ 0 & J = \emptyset \end{cases} .$$

Siccome p è un punto di accumulazione per $\Phi(x^0, t)$, dall'invarianza delle facce di S_n segue che la funzione $L(x(t))$ è definita, continua e derivabile rispetto al tempo per ogni t e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(x(t)) = -\sum_{p_i > 0} p_i \frac{\dot{x}_i}{x_i} = -\sum_{p_i > 0} p_i((Mx)_i - x^T Mx) &= x^T Mx - p^T Mx \\ &= x^T Mx - p^T Mp + p^T Mp - x^T Mp \\ &= x^T Mx - p^T Mp + \sum_i (p^T Mp - (Mp)_i) x_i. \end{aligned}$$

Siccome sull'orbita vale $x^T Mx < p^T Mp$, in virtù del teorema 3.3.4, allora

$$\frac{d}{dt} L(x(t)) < KS(x).$$

Inoltre

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \bar{m}(x(t)) = \sum x_i ((Mx)_i - x^T Mx)^2 \geq S(x) Z(x).$$

Posto $z := Z(p)$, osserviamo che gli insiemi

$$U_\epsilon := \{x \in S_n \mid L(x) < \epsilon\},$$

formano un sistema fondamentale di intorni di $p = \{x \in S_n \mid L(x) = 0\}$; quindi esiste un $\bar{\epsilon}$ tale che se $x \in U_{\bar{\epsilon}}$, ovvero $L(x) < \bar{\epsilon}$, allora x è abbastanza vicino a p da soddisfare

$$|Z(x) - Z(p)| < \frac{z}{2},$$

da cui

$$Z(x) > \frac{z}{2}.$$

Scegliamo una successione t_n tale che $x(t_n) \to p$, si avrà $L(x(t_n)) \to L(p) = 0$; per ogni $\epsilon < \bar{\epsilon}$ esiste N tale che $x(t_N)$ è abbastanza vicino a p da avere

$$L(x(t_N)) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{e} \qquad \frac{K}{z}(\bar{m}(p) - \bar{m}(x(t_N))) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Notiamo che la frazione $\frac{K}{z}$ è ben definita, convenendo che sia uguale a 1 nel caso in cui z, e quindi anche K, valgano 0.
Dimostriamo che $L(x(t)) < \epsilon$ per ogni $t > t_N$: se per assurdo non fosse così, detto T il minimo $t > t_N$ tale che $L(x(t)) \geq \epsilon$, si ha che $L(x(s)) < \epsilon < \bar{\epsilon}$ e di conseguenza $Z(x(s)) > \frac{z}{2}$ per ogni $s \in [t_N, T[$, per cui

$$\frac{d}{ds}L(x(s)) \leq KS(x(s)) \leq \frac{K}{2Z(x(s))} \cdot \frac{d}{ds}\bar{m}(x(s)) < \frac{K}{z} \cdot \frac{d}{ds}\bar{m}(x(s)).$$

Integrando tra t_N e T si ottiene

$$0 \leq L(x(T)) \leq L(x(t_N)) + \frac{K}{z}(\bar{m}(x(T)) - \bar{m}(x(t_N)));$$

d'altra parte $\bar{m}(x(t)) \leq \bar{m}(p)$, poichè $\bar{m}(x)$ cresce lungo le orbite (teorema 3.3.4), quindi

$$0 \leq L(x(T)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{K}{z}(\bar{m}(p) - \bar{m}(x(t_N)) < \epsilon,$$

il che è assurdo. Pertanto per ogni $t > t_N$ si ha $L(x(t)) < \epsilon$ e dall'arbitrarietà di ϵ si conclude che $L(x(t)) \to 0$. □

3.3.4 Fitness dipendenti dalla densità

Nel derivare l'equazione (3.3.4) avevamo ottenuto per N, la grandezza totale della popolazione, la relazione

$$\dot{N} = N\bar{m},$$

quindi una volta raggiunto un equilibrio z, la popolazione dovrebbe crescere esponenzialmente; questa caratteristica potrebbe rivelarsi poco realistica.
La maniera più semplice per superare questa difficoltà è considerare le fitness m_{ij} dipendenti dalla grandezza della popolazione: assumiamo che $m_{ij}(N)$ diventi negativo per valori sufficientemente grandi di N, più precisamente ipotizziamo che esistano delle costanti K_{ij} tali che $m_{ij}(N) > 0$ per $N < K_{ij}$ e $m_{ij} < 0$ per $N > K_{ij}$; prendiamo per esempio

$$m_{ij}(N) = r_{ij}\left(1 - \frac{N}{K_{ij}}\right),$$

con r_{ij} costanti positive.
In questo contesto le equazioni per N e per le x_i sono

$$\begin{aligned} \dot{N} &= N\bar{m}(N,x) \\ \dot{x}_i &= x_i\left(\sum_j m_{ij}(N)x_j - \bar{m}(N,x)\right) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

dove

$$\bar{m}(N,x) = \sum_{r,s} m_{rs}(N)x_r x_s.$$

Lo spazio degli stati è $\mathbb{R}_+ \times S_n$.

Proposizione 3.3.8. *I punti di equilibrio* (N^0, x^0), *del sistema* (3.3.5) *verificano*

$$\frac{d}{dt}\bar{m}(N(t),x(t))_{|(N^0,x^0)} = 0.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\frac{d}{dt}\bar{m}(N(t),x(t)) = \sum_i \frac{\partial\bar{m}}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial\bar{m}}{\partial N}\dot{N} =$$

$$2\sum_i x_i\left(\sum_j m_{ij}(N)x_j - \bar{m}(N,x)\right)^2 + \sum_{i,j} x_i x_j\left(\frac{d}{dN}m_{ij}(N)\right)N\bar{m}(N,x),$$

avendo ottenuto il primo membro nell'ultima uguaglianza con passaggi analoghi a quelli della dimostrazione del teorema 3.3.4. Una volta scritto in questo modo, è chiaro che $\frac{d}{dt}\bar{m}(N(t),x(t))$ vale 0 nei punti di equilibrio. $\square$

Siccome $\bar{m}(N,x) < 0$ per $N > \max_{i,j} K_{ij} =: K_0$, tutte le orbite sono limitate e terminano all'interno della regione dove $0 \leq N \leq K_0$.
Chiamiamo A, B, H gli insiemi dei punti (N,x) nei quali $\bar{m}(N,x)$ è rispettivamente positiva, negativa e uguale a zero.
Osserviamo che i punti di equilibrio si trovano tutti in H, anzi sono tutti e soli i punti di H per i quali $\frac{d}{dt}\bar{m}(N(t),x(t)) = 0$. Ci sono due possibilità per un'orbita non stazionaria:

- rimane tutto il tempo nella regione B e converge all'insieme dei punti di equilibrio;
- raggiunge la regione A, che è positivamente invariante, e converge all'insieme dei punti di equilibrio.

Quelli descritti sono semplici modelli, che servono a dare un'idea di come la teoria evolutiva dei giochi sia utile per descrivere il processo della selezione naturale; tuttavia per ottenere modelli più accurati bisognerebbe considerare molti altri fattori, come le mutazioni e le ricombinazioni genetiche; alcuni testi nei quali viene sviluppata una teoria che tiene conto di questi e altri fattori sono [16], [17], [18], [19].

Bibliografia

[1] Osborne, J. Martin, *An introduction to game theory*. Oxford University Press 2004.

[2] Fudenberg, D. and J. Tirole, *Game theory*. Cambridge: MIT Press 1991.

[3] Shizuo Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*. Duke Math. J. Volume 8, Number 3, (1941), 457-459.

[4] J. Maynard Smith, *Evolution and the theory of games*. Cambridge Univeristy Press 1982.

[5] Jörgen W. Weibull, *Evolutionary game theory*. Cambridge: MIT Press 1995.

[6] *Information platform on open access*. (2009), http://open-access.net

[7] M. Hanauske, St. Bernius, B. Dugall, *Quantum game theory and open access publishing*. Physica A. 382, (2007), 650-664. arXiv:physics/0612234v1.

[8] K. Habermann, L. Habermann *An evolutionary game theoretic approach to open access*. (2009), arXiv:0903.4562v1.

[9] Ch. Darwin, *On the origin of species by means of natural selection*. Cambridge-London 1859.

[10] E. Mayr, *Animal species and evolution*. Cambridge, Mass: Harvard Univ. Press 1963.

[11] F. Patrone, *Nash, Berge e Kakutani*. (2008), http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/Nash_Berge_Kakutani/Nash_Berge_Kakutani.pdf

[12] I.M. Bomze, *Non-cooperative two-person games in biology: a classification*. Int. J. Game Theory 15, (1986), 31-57.

[13] E.C. Zeeman, *Dynamics of the evolution of animal conflicts*. J. Theor. Biology 89, (1981), 249-270.

[14] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionary game dynamics*. Bulletin of the Amer. Math. Soc. 40, (2003), 479-511.

[15] A. Milani, *Introduzione ai sistemi dinamici*. Editrice PLUS 2009.

[16] R. Cressman, *The stability concept of evolutionary game theory*, Springer, Berlin 1992.

[17] J. Hofbauer, K. Sigmund, *The theory of evolution and dynamical systems*. Cambridge University Press 1988.

[18] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press 1998.

[19] J. Maynard Smith, *Will a sexual population evolve to an ESS?*. Amer. Naturalist 177, (1981), 1015-1018.