

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E  
NATURALI

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN  
SCIENZE FISICHE



TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

# Logica e Probabilità in Meccanica Quantistica

Candidato  
**Costantino Budroni**

Relatore  
**Prof. Giovanni Morchio**

ANNO ACCADEMICO 2008/2009



# Indice

<b>1</b>	<b>I vincoli alle interpretazioni classiche della MQ</b>	<b>12</b>
1.1	L'argomento EPR . . . . .	12
1.2	La logica quantistica . . . . .	14
1.3	Le disuguaglianze di Bell . . . . .	16
1.4	I teoremi di Gleason e Bell-Kochen-Specker . . . . .	19
1.5	Le disuguaglianze di Boole-Bell . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Apparati sperimentali e algebre di Boole parziali</b>	<b>23</b>
2.1	Le previsioni della MQ . . . . .	23
2.2	Relazioni booleane, loro estensioni, logica quantistica . . . . .	25
2.3	Apparati . . . . .	28
2.4	Relazione d'ordine . . . . .	29
2.5	Apparati composti . . . . .	33
2.6	Compatibilità: costruzione alternativa . . . . .	39
2.7	Probabilità su algebre di Boole parziali . . . . .	44
2.8	Conclusioni . . . . .	45
<b>3</b>	<b>I problemi di estendibilità delle strutture booleane parziali</b>	<b>46</b>
3.1	Algebre . . . . .	46
3.2	Misure . . . . .	48
3.2.1	Politopi di correlazione . . . . .	49
3.2.2	Misure parziali secondo Tarski e Horn . . . . .	57
3.3	Conclusioni . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Correlazioni attribuibili a osservabili quantistiche non compatibili</b>	<b>71</b>
4.1	Meccanica quantistica, modelli classici, modelli contestuali . . . . .	71
4.2	Modelli classici per un sistema a tre osservabili . . . . .	73
4.3	Conseguenze dell'esistenza di modelli classici per tre osservabili sulle interpretazioni della MQ . . . . .	76

**A Algebre di Boole** **80**  
A.1 Definizione e proprietà fondamentali . . . . . 80  
A.2 Misure . . . . . 85



# Introduzione

Il formalismo delle teorie classiche è basato su nozioni che si assumono ben stabilite dal punto di vista empirico (es. posizione e velocità di un punto materiale) e l'“incertezza” sui valori da assegnare alle variabili dinamiche può solo nascere da limitazioni pratiche, ad esempio la precisione finita degli apparati di misura e di conseguenza anche delle “preparazioni”, ed è, in linea di principio, rimuovibile. Queste incertezze possono essere inserite sistematicamente nella descrizione di un sistema fisico, come avviene ad esempio in meccanica statistica, tramite l'utilizzo di *misure di probabilità* che descrivono lo *stato* di un sistema, cioè un insieme di frequenze relative con cui le variabili assumono particolari valori su un insieme di sistemi che hanno subito la stessa “preparazione”.

Nel caso della meccanica quantistica, invece, nasce un problema di interpretazione dal fatto che gli elementi del formalismo, in particolare gli operatori autoaggiunti identificati con le *variabili dinamiche*, i vettori identificati con gli *stati del sistema*, non hanno un significato empirico evidente ed univoco. È quindi necessaria un'*interpretazione*, cioè un insieme di regole che permettono di derivare dal formalismo le “previsioni” sulle osservazioni sperimentali, ad esempio le regole che associano un apparato sperimentale ad un operatore autoaggiunto, i valori possibili della misura al suo spettro, una “preparazione” ad un vettore ecc..

La separazione tra formalismo e interpretazione nasce in definitiva dalla difficoltà di descrivere i fenomeni microscopici in un linguaggio *realistico*, cioè in termini di uno “stato di cose”, e infatti l'interpretazione della meccanica quantistica limita le possibili previsioni a procedure sperimentali ben definite ed evita alcune delle idealizzazioni implicite delle teorie classiche. Un esempio di questo è il *principio di indeterminazione* di Heisenberg che, nella sua formulazione “più debole”, afferma l'impossibilità di una misura simultanea di posizione e impulso e vincola quindi l'interpretazione della meccanica quantistica alle situazioni in cui *una sola* delle due variabili viene misurata.

Ci si può chiedere quindi quali siano le differenze fondamentali tra la meccanica classica e quella quantistica, e se tali differenze “giustificano” la “prudenza interpretativa” che si ha nel secondo caso, cioè se la meccanica quantistica *sia o no riformulabile come teoria classica*. Ci sono varie differenze che sono evidenti sul piano del formalismo, ma per la separazione tra formalismo e interpretazione discussa precedentemente solo alcune avranno delle “conseguenze fisiche”. Vedremo che la principale differenza tra

meccanica classica e quantistica è nella struttura delle loro predizioni, cioè nella struttura logico-probabilistica; inoltre cercheremo di analizzare questa struttura a partire dalle conseguenze fisiche direttamente osservabili, evitando di utilizzare nozioni anche importanti nel formalismo adottato, ma senza un significato empirico diretto. A parziale sostegno di questo punto di vista vediamo qual è e quale è stato il ruolo della probabilità nello sviluppo della teoria quantistica.

Nella vecchia teoria quantistica (*old quantum theory*) il concetto di probabilità non aveva un ruolo centrale, la principale differenza con le teorie fisiche precedenti stava piuttosto nella “quantizzazione”, cioè nel fatto che alcune variabili dinamiche potevano assumere solo certi valori all’interno di un insieme discreto e di conseguenza potevano variare solo in modo “discontinuo”.

Il concetto di probabilità viene introdotto, dopo la formulazione della meccanica matriciale di Heisenberg e della meccanica ondulatoria di Schroedinger, per discutere l’*indeterminazione* dei risultati di singoli esperimenti. In generale, se si vuole discutere l’“origine” di questa indeterminazione, si presentano due possibilità:

- (1) esistono delle limitazioni pratiche nell’effettuare gli esperimenti: le misure “disturbano” i “valori veri” delle variabili dinamiche e le preparazioni non possono essere “arbitrariamente precise”,
- (2) non esistono i “valori veri”, o meglio i risultati degli esperimenti non sono delle “proprietà predeterminate” del sistema in esame.

Questi due punti di vista corrispondono essenzialmente a due versioni del principio di indeterminazione di Heisenberg, seguendo l’esposizione fatta da Pitowsky in [1] discutiamo queste due versioni del principio di indeterminazione.

**Principio di indeterminazione debole:** se posizione e impulso hanno un valore ben definito, allora la misura della posizione di una particella disturba il valore del suo impulso e la misura del suo impulso introduce un’indeterminazione nella sua posizione. Tale disturbo non può essere arbitrariamente ridotto, se  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  sono le indeterminazioni della posizione e dell’impulso, vale  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ .

Questa formulazione del principio di indeterminazione è probabilmente quella che Heisenberg aveva in mente nella sua analisi del microscopio a raggi  $\gamma$ , ed è un’idea di indeterminazione classica se si assume che tali valori siano ben definiti. In principio infatti sarebbe possibile calcolare a partire dalle condizioni iniziali l’esatta natura e la grandezza del disturbo sull’impulso che avviene durante una misura di posizione e viceversa.

**Principio di indeterminazione forte:** Grandezze fisiche come “posizione”, “impulso”, “energia” ecc. tipicamente associate ai sistemi fisici esistono e sono ben definite solo nel contesto di particolari esperimenti. Quando viene effettuata una misura di posizione molto accurata il valore dell’impulso è semplicemente non definito, e viceversa.

Secondo questo principio non esistono “disturbi” dovuti alle misure, ma l’indeterminazione risiede nel fatto che posizione e impulso sono due grandezza “complementari” e non può quindi esistere una descrizione comune.

Vale la pena di discutere le implicazioni logiche di questi due principi, che giustificano anche il nome che gli abbiamo dato. Consideriamo la proposizione  $p$  = “posizione e impulso di una particella hanno in ogni istante valori ben definiti”, e la proposizione  $q$  = “la misura della posizione disturba il valore dell’impulso e viceversa”. Il principio debole potrebbe essere riformulato come  $p \implies q$ , cioè “se i valori di posizione e impulso esistono allora vengono disturbati dalla misura”. Il principio forte invece può essere formulato come  $\bar{p}$  ( $p$  negato). Tali principi stanno quindi nella relazione logica  $\bar{p} \implies (p \implies q)$ , che giustifica il nome che gli è stato dato.

Questi principi formulati in termini di posizione e impulso si applicano in meccanica quantistica a qualsiasi coppia di osservabili non commutanti  $A, B$  poiché per esse si può ricavare la “relazione di indeterminazione”  $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle_\phi|$  che lega il prodotto delle indeterminazioni dei valori delle osservabili su un certo stato  $\phi$  al valore di aspettazione del commutatore sullo stesso stato.

A seconda del punto di vista che si adotta tra (1) e (2) si può ammettere o negare la possibilità di eliminare questa indeterminazione, almeno in linea di principio, e cioè si può ammettere o negare la possibilità di “completare” la meccanica quantistica ad un teoria probabilistica classica, detta anche “teoria di variabili nascoste” (*hidden variables*). Sulla “completabilità” si esprimono Einstein Podolsky e Rosen [2] nel 1935, mostrando essenzialmente che in alcuni casi è lecito attribuire valori definiti anche a variabili “non commutanti”, cioè con una “relazione di indeterminazione”. Questo argomento mostra che se vogliamo negare il punto di vista 1, non possiamo farlo semplicemente sulla base dell’esistenza di “relazioni di indeterminazione” ( o dell’assenza di “stati senza dispersione”) nel formalismo della meccanica quantistica.

A questo punto del discorso risulta più chiaro ciò che avevamo anticipato e cioè che è necessaria una particolare attenzione per non attribuire conseguenze fisiche ad elementi del formalismo di cui non è chiaro il significato empirico, come nel caso del principio di indeterminazione forte che afferma molto di più dell’esistenza di relazioni di indeterminazione tra osservabili.

Da questo punto di vista le probabilità, date dai “valori di aspettazione teorici” per le osservabili quantistiche (*si/no*), quelle cioè rappresentate dai proiettori ortogonali, sono gli elementi che stabiliscono il confronto più diretto tra la teoria e le “frequenze relative”



osservate negli esperimenti.

Uno potrebbe allora accontentarsi di questo e analizzare la struttura della probabilità quantistica a partire soltanto da “un elenco” di aspettative per ogni possibile esperimento, ma vedremo nel capitolo 3 che questo approccio rende l’analisi molto complicata appena questo “elenco” diventa abbastanza lungo. Un modo per ovviare a questo problema è di capire quale è la struttura di questo “elenco”: mostreremo infatti nel capitolo 2 che, a partire da poche assunzioni “con un chiaro significato empirico” si può ottenere una struttura algebrica (o se vogliamo “logica”) “parziale” per l’insieme delle osservabili tale che

- (a) si definisce in termini empirici;
- (b) le osservabili (*si/no*) della meccanica quantistica soddisfano tale definizione.

Un approccio in parte diverso è quello che deriva dal lavoro di Birkhoff e Von Neumann [3] del 1936. Essi affermano che gli “eventi microscopici” non seguono le stesse regole associate agli “eventi macroscopici” (relazioni booleane), ma un diverso insieme di regole che essi chiamano *logica quantistica*. In pratica ad ogni proprietà  $P$  di un sistema fisico viene associato un test  $T$  tale che il sistema ha la proprietà  $P$  se e solo se “passa” il test  $T$ . Un’interpretazione “estrema” di questo formalismo, nello stesso spirito del principio di indeterminazione forte, afferma che le uniche “proprietà” di un sistema fisico sono quelle “misurabili” e che risultano verificate dalla misura. Anche in questo caso le “relazioni logiche” vengono ricavate interamente dal formalismo, cioè dalla struttura algebrica dei proiettori ortogonali in uno spazio di Hilbert o, equivalentemente, dalla struttura geometrica dei suoi sottospazi chiusi. Come vedremo nel capitolo 3 è fondamentale in questa costruzione il fatto che per un insieme di osservabili le “relazioni logiche” tra di esse vengono cercate all’interno dell’insieme stesso, escludendo a priori ogni possibilità di “completamento”.

Questo contributo viene ripreso da Mackey [4] (1963), successivamente sviluppato da Jauch e Piron ed esposto sistematicamente in [5] (1968) e [6] (1976). La versione sviluppata da Jauch e Piron nel lavoro [7] del 1963 viene criticata da Bell in [9], insieme ai teoremi sull’impossibilità di rappresentazione classica per la meccanica quantistica di Von Neumann e di Gleason. Nei casi di Von Neumann e Jauch e Piron tale critica può essere riassunta dicendo che le assunzioni dei teoremi sono giustificate solo sul piano del formalismo della meccanica quantistica, cioè vengono richieste delle proprietà per gli ipotetici “stati senza dispersione” che derivano da relazioni non banali tra esperimenti che non possono essere effettuati simultaneamente, sulla base del fatto che tali proprietà sono soddisfatte dagli stati della meccanica quantistica. Inoltre a sostegno della sua critica mostra che per un sistema di spin  $1/2$  è possibile costruire un modello probabilistico classico che riproduce tutti i risultati della meccanica quantistica.

Un discorso a parte va fatto per la critica di Gleason, per ora ci limitiamo ad osservare che il controesempio di Bell non contraddice Gleason poiché le ipotesi del suo teorema

richiedono che la dimensione dello spazio di Hilbert sia  $\geq 3$ .

Nell'articolo successivo Bell mostra sostanzialmente che per un modello probabilistico classico le correlazioni tra eventi che soddisfano opportune relazioni logiche siano vincolati da certe disuguaglianze, che vengono quindi dette *disuguaglianze di Bell*. Uno potrebbe obiettare che questa non è la formulazione originale di Bell poiché non entrano in gioco termini quali “località” o “separabilità” o “space-like”. Il punto è che l'origine delle disuguaglianze di Bell è logico-probabilistica e la separazione space-like serve solo per assicurare e interpretare relazioni logiche tra gli apparati. L'analisi del capitolo 4 avrà lo scopo di chiarire e approfondire questo punto, per ora possiamo anticipare, come prima giustificazione, il fatto che le cosiddette disuguaglianze di Bell, cioè disuguaglianze tra frequenze relative di eventi logicamente connessi, compaiono per la prima volta in un lavoro di Boole [10] del 1862 in cui vengono chiamate “conditions of possible experience” ( per maggiori dettagli si veda Pitowsky [11]).

Passiamo ora a discutere il risultato di Gleason. Il teorema di Gleason [12] (1957) afferma essenzialmente che se la dimensione dello spazio di Hilbert è  $\geq 3$  il più generale “stato” che soddisfa una condizione di additività sugli operatori commutanti è dato da una matrice densità. In un certo senso Gleason indebolisce le ipotesi del teorema di Von Neumann sull'impossibilità di rappresentazione classica per la meccanica quantistica richiedendo la condizione di additività solo sui commutanti. Tale teorema non era esplicitamente legato al problema della rappresentabilità classica, ma piuttosto al problema della costruzione assiomatica della meccanica quantistica. È invece legato esplicitamente a tale problema un lavoro di dieci anni dopo di Kochen e Specker [13] (1967) che, seguendo l'idea di Gleason, mostrano che per un insieme di 117 proiettori ortogonali rappresentanti misure del quadrato dello spin, per una particella di spin 1, lungo 117 direzioni diverse raggruppate in terne ortogonali, non esiste un'assegnazione di valori 0,1 consistente con le relazioni algebriche tra proiettori commutanti. Questi lavori mettono in evidenza il problema della *contestualità*, cioè se un'osservabile abbia un valore definito indipendentemente dal contesto in cui viene misurata.

Il punto di vista di questa tesi è vicino a quello di Gleason nel senso che assumeremo come struttura logica fondamentale della meccanica quantistica l'insieme delle sottoalgebre commutative, che nel caso di osservabili (*si/no*) corrispondono ad algebre di Boole; introdurremo così la nozione di *algebra di Boole parziale*.

Partendo quindi dalle *teorie probabilistiche contestuali*, cioè dalle collezioni di teorie probabilistiche classiche ciascuna riferita ad un particolare “contesto”, definite da queste strutture booleane parziali ci chiediamo fino a che punto siano “completabili” a teorie classiche, cioè data una teoria contestuale con un certo numero di “contesti” ci chiediamo se sia possibile ridurli, eventualmente ad uno solo (teoria classica).

Possiamo a questo punto elencare gli obiettivi della tesi:

- (1) giustificare il fatto di assumere come struttura logica di un insieme di osservabili (*si/no*) quella di *algebra di Boole parziale* e come struttura probabilistica quella di *teoria probabilistica contestuale*; tutto questo sulla base di proprietà degli “apparati” che siano verificabili sperimentalmente e valide per le osservabili della meccanica quantistica;
- (2) studiare le proprietà di tali strutture e in particolare la possibilità di completamento ad una teoria classica, e più in generale la possibilità di “riduzione del numero di contesti” per una data teoria probabilistica contestuale;
- (3) discutere le conseguenze fisiche dei risultati ottenuti al punto (2), in particolare la possibilità di attribuzione simultanea di un valore ad osservabili incompatibili in meccanica quantistica ed il ruolo di questa discussione in relazione ai concetti di “località” e “causalità”.

Nel **capitolo 1** vengono ricordati i principali risultati connessi al dibattito sui fondamenti della meccanica quantistica e che vincolano in particolare le sue possibili interpretazioni classiche. Vengono discussi: l’argomento EPR, la logica quantistica di Birkhoff e Von Neumann, le disuguaglianze di Bell, i teoremi di Gleason e Bell-Kochen-Specker e il punto di vista puramente probabilistico sulle disuguaglianze di Bell.

I capitoli successivi contengono invece i risultati di un’analisi autonoma dei punti (1) – (3) che si propone di riesaminare l’intero problema dai fondamenti delle strutture booleane alla discussione e interpretazione delle disuguaglianze che vincolano le interpretazioni della meccanica quantistica.

Nel **capitolo 2** si analizza il ruolo delle strutture booleane parziali in meccanica quantistica e si discute la possibilità del loro fondamento su fatti sperimentalmente osservabili e in maniera indipendente dal formalismo. In particolare si conclude che la struttura di teoria probabilistica contestuale che caratterizza le previsioni della meccanica quantistica si può ottenere, in due modi differenti, a partire da poche nozioni formulabili in termini di proprietà degli apparati di misura e sperimentalmente verificabili; entrambe le costruzioni sono basate sulla “proprietà di riproducibilità” degli apparati, cioè la possibilità di “confermare” il risultato di un esperimento, ma si distinguono nell’utilizzare diverse proprietà per caratterizzare gli apparati tra cui è possibile inserire “connettivi logici booleani”, nel primo caso si utilizza una “relazione d’ordine parziale”, mentre nel secondo una relazione di “compatibilità”, entrambe definite in termini di relazioni sperimentalmente verificabili su ogni singolo campione.

Nel **capitolo 3** si discutono le possibilità di estensione delle strutture booleane parziali a strutture booleane, cioè l’estensione da algebra di Boole parziale ad algebra di Boole e successivamente da collezione di misure di probabilità su delle sottoalgebre a

unica misura sull'intera algebra. Nel caso dell'estensione da algebra di Boole parziale ad algebra di Boole non ci sono criteri generali, ma mostriamo due esempi particolarmente interessanti poiché sono legati al teorema di Kochen-Specker e alle disuguaglianze di Bell. Per quanto riguarda l'estensione delle misure discutiamo due criteri: uno basato essenzialmente sul concetto di *politopo di correlazione* e l'altro sulla nozione di *misura parziale secondo Tarski e Horn*. Tramite il primo criterio mostriamo che per tre osservabili, indipendentemente dalle relazioni di compatibilità, esiste sempre una descrizione in termini di uno spazio di probabilità classico e colleghiamo questo risultato con il caso a quattro osservabili. Tramite il secondo mostriamo invece che esiste una descrizione in termini di uno spazio di probabilità classico anche per  $n$  osservabili con delle relazioni di compatibilità non banali.

Nel **capitolo 4** si utilizzano i risultati del capitolo precedente per discutere se sia possibile attribuire simultaneamente un valore a due osservabili incompatibili tramite un modello probabilistico classico che riproduca le previsioni della meccanica quantistica per un numero finito di osservabili. Il risultato CHSH ([14]) mostra che per quattro osservabili in generale non esiste un modello probabilistico classico che riproduce le previsioni della meccanica quantistica. Partendo da questo fatto, mostriamo come la scomposizione dell'analisi del caso CHSH in termini di sottosistemi a tre osservabili, per i quali il modello probabilistico classico è sempre costruibile, pone ulteriori vincoli alla possibilità di attribuzioni simultanee di valori a due osservabili incompatibili; infatti i problemi che nascono dall'analisi della compatibilità tra modelli a tre osservabili non sono, come vedremo, spiegabili in termini di "influenze" che si propagano a velocità maggiore di quella della luce.

# Capitolo 1

## I vincoli alle interpretazioni classiche della MQ

### 1.1 L'argomento EPR

È interessante chiedersi per quale motivo si debba tentare di interpretare la meccanica quantistica in termini classici; uno dei motivi principali è capire se l'indeterminazione sui risultati degli esperimenti, che è tipica della meccanica quantistica, sia della stessa natura dell'indeterminazione presente nella meccanica classica, cioè se nasca da un'impossibilità di “conoscere” i “valori veri” delle quantità fisiche di un certo sistema oppure se abbia un'altra origine. Detto in altri termini: esistono delle limitazioni pratiche che ci impediscono di misurare congiuntamente due osservabili “incompatibili”, oppure delle motivazioni più generali e profonde? Nel secondo caso, queste motivazioni derivano da principi a priori oppure dalla struttura stessa delle previsioni quantistiche?

Il dibattito sui fondamenti della meccanica quantistica, dai primi anni della formulazione della teoria fino a metà degli anni '60, vede contrapposti due punti di vista che potremmo identificare rispettivamente con le posizioni di Einstein e di Bohr e Heisenberg. La posizione del primo è essenzialmente che la meccanica quantistica è una teoria “provvisoria” e “incompleta” e che un suo “completamento” deve portare alla reintroduzione delle idee classiche. La posizione di Bohr e Heisenberg è invece opposta, essi pensano che la descrizione dei fenomeni microscopici non può essere fatta in termini classici, ma si può avere solo una descrizione “parziale” limitata a particolari procedure sperimentali; i fenomeni microscopici ci inducono cioè ad abbandonare l'idea di una descrizione classica e ad accettare una situazione nuova che può essere riassunta nel “*principio di complementarità*”.

Un tentativo di mettere in discussione le idee di Bohr e Heisenberg viene fatto da

Einstein Podolsky e Rosen (EPR) nel loro lavoro [2] del 1935. Essi si chiedono se la descrizione della meccanica quantistica possa essere considerata “completa”, nel senso che ad ogni “elemento di realtà” deve corrispondere un elemento della teoria; essi non danno una definizione precisa di realtà ma affermano che una condizione sufficiente per la realtà di una quantità fisica è la possibilità di predirne con certezza il valore senza in alcun modo disturbare il sistema. La versione originale dell’argomento EPR discute la possibilità di attribuire un valore simultaneo a posizione e impulso di una particella. Una formulazione semplificata che utilizza solo variabili discrete (variabili di spin) è stata proposta da Bohm in [15] ed è interessante poiché la discussione delle variabili di spin è più semplice rispetto alla discussione delle variabili continue come posizione e impulso ed è sufficiente ad ottenere risultati più forti come le disuguaglianze di Bell; vediamo allora la trattazione che ne fa Peres in [16]. Consideriamo un decadimento di un sistema di spin 0 in due sistemi di spin 1/2, per esempio il decadimento  $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ , supponiamo di separare i due prodotti del decadimento e di effettuare su uno di essi, ad esempio l’elettrone, una misura di spin. Se misuriamo la componente dello spin lungo l’asse  $x$  dell’elettrone e otteniamo come risultato + possiamo essere certi che misurando la stessa componente dello spin per il positrone troviamo il risultato  $-$ . Se assumiamo che le due misure vengano fatte in regione di spazio-tempo con separazione space-like in modo che non possano influenzarsi tra di loro, dobbiamo concludere che il risultato della misura sul positrone può essere identificato con una “proprietà” del sistema, indipendente dal fatto di misurarla, e che ad esempio viene “fissata” al momento del decadimento. Secondo la definizione EPR a tale valore deve quindi corrispondere un “elemento di realtà”. Supponiamo invece di scegliere di misurare la componente dello spin dell’elettrone lungo l’asse  $y$ , possiamo ripetere il ragionamento fatto precedentemente e concludere che anche alla componente lungo l’asse  $y$  dello spin del positrone deve corrispondere un “elemento di realtà” che determina il risultato di un’eventuale misura. La conclusione di questo ragionamento è, secondo EPR, che la meccanica quantistica non è una teoria completa poiché a certi “elementi di realtà” non viene assegnato un valore definito dalla teoria; una teoria completa, conclude l’argomento EPR applicato agli spin, dovrebbe quindi permettere l’attribuzione di un valore simultaneo a tutte le osservabili di spin e di conseguenza “fissare” tutti i risultati delle misure dello spin lungo una qualsiasi direzione. Questa attribuzione è in contraddizione con l’interpretazione del *principio di indeterminazione* secondo cui è possibile attribuire un valore definito alle osservabili solo in particolari situazioni in cui si misurano congiuntamente osservabili compatibili, mentre nel caso di incompatibili tale attribuzione non è mai possibile.

## 1.2 La logica quantistica

È invece nello stesso spirito di Bohr e Heisenberg che Birkhoff e Von Neumann introducono la *logica quantistica* nel loro lavoro [3] del 1936.

La logica quantistica è sostanzialmente lo studio della struttura di *reticolo ortocomplementato completo* dei sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert. Vediamo di cosa si tratta e in che senso viene definita “logica”, seguendo la trattazione fatta da Pitowsky in [1]; per semplicità tratteremo il caso di uno spazio di Hilbert di dimensione finita.

Le più semplici osservabili in meccanica quantistica sono le osservabili a due autovalori, che possono essere identificati con  $\{0, 1\}$  senza perdita di generalità, tali osservabili corrispondono a proiettori ortogonali e possono essere interpretate come delle “proprietà” che un certo sistema può avere oppure no. Inoltre, dato che per il teorema spettrale ogni operatore autoaggiunto si può scrivere come somma dei proiettori sui suoi autospazi ciascuno moltiplicato per il corrispondente autovalore, le probabilità per tutti i risultati possibili della misura di tutte le osservabili su un certo stato sono calcolabili a partire dai valori di aspettazione dei proiettori ortogonali. Possiamo quindi dire che queste “proprietà” sono sufficienti a caratterizzare un sistema fisico.

Notiamo che ad ogni proiettore ortogonale è associato in modo univoco un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert, possiamo quindi parlare equivalentemente di proiettori ortogonali o di sottospazi chiusi.

Tra questi proiettori si possono introdurre relazioni che corrispondono a relazioni “logiche”, cioè relazioni insiemistiche tra sottoinsiemi dello spazio di Hilbert; siano  $P_1$  e  $P_2$  due proiettori ortogonali su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  (di dimensione finita) allora:

- (1) diciamo che  $P_1 < P_2$  se  $P_1(\mathcal{H}) \subset P_2(\mathcal{H})$ ; tale operazione corrisponde alla relazione logica: “ $P_1$  implica  $P_2$ ”, infatti  $P_1 < P_2$  se e solo se vale per i valori di aspettazione di  $P_1$  e  $P_2$ :  $\langle P_1 \rangle_\phi = 1 \implies \langle P_2 \rangle_\phi = 1$ , per ogni stato  $\phi$ ;
- (2) definiamo invece  $P_1 \wedge P_2$  il proiettore sul sottospazio  $P_1(\mathcal{H}) \cap P_2(\mathcal{H})$ , tale proprietà corrisponde a “ $P_1$  e  $P_2$ ”, infatti uno stato  $\phi$  è autostato all’autovalore 1 di  $P_1 \wedge P_2$  se e solo se è autostato all’autovalore 1 sia di  $P_1$  che di  $P_2$ .

Le altre due relazioni “logiche” (complemento e disgiunzione) non possono essere definite tramite le corrispondenti operazioni insiemistiche (complemento e unione) poiché il complemento di un sottospazio e l’unione di due non sono in generale dei sottospazi. Si sceglie allora di introdurre le seguenti operazioni:

- (3) dato un proiettore ortogonale  $P$  definiamo  $P^c$  il proiettore sul complemento ortogonale del sottospazio  $P(\mathcal{H})$ ,
- (4) dati due proiettori ortogonali  $P_1$  e  $P_2$  definiamo  $P_1 \vee P_2$  il proiettore sul sottospazio generato da  $P_1(\mathcal{H}) \cup P_2(\mathcal{H})$ .

Vale la pena di aprire una parentesi sulla struttura dei proiettori ortogonali con le operazioni (1) – (4).

Si può dimostrare che si tratta di un *reticolo ortocomplementato completo* (in realtà si può ottenere di più), cioè un insieme  $\mathcal{B}$  con le seguenti proprietà (vedi Piron [6]):

esiste una *relazione d'ordine parziale*  $<$ , cioè una relazione tra alcune coppie di elementi che soddisfa:

$$(O_1) \quad b < b \text{ per ogni } b \text{ in } \mathcal{B},$$

$$(O_2) \quad b < c \text{ e } c < d \implies b < d ,$$

$$(O_3) \quad b < c \text{ e } c < b \implies b = c ;$$

$\mathcal{B}$  è *completo*, cioè per ogni famiglia di elementi  $b_i \in \mathcal{B}$  esiste l'  $\inf_i\{b_i\} \equiv \wedge_i b_i$  che appartiene ancora a  $\mathcal{B}$ , tale che

$$(L_1) \quad x < b_i \text{ per ogni } i \Leftrightarrow x < \wedge_i b_i,$$

ed esiste il  $\sup_i\{b_i\} \equiv \vee_i b_i$  in  $\mathcal{B}$  che soddisfa:

$$(L_2) \quad b_i < y \text{ per ogni } i \Leftrightarrow \vee_i b_i < y;$$

il sup e l'inf di tutti gli elementi di  $\mathcal{B}$  sono denotati rispettivamente con  $\mathbf{1}$  e  $\mathbf{0}$ .

Per ogni  $b \in \mathcal{B}$  esiste un complemento  $b'$  in  $\mathcal{B}$  tale che

$$(C_1) \quad (b')' = b, \text{ per ogni } b \in \mathcal{B},$$

$$(C_2) \quad b \wedge b' = \mathbf{0} \text{ e } b \vee b' = \mathbf{1}, \text{ per ogni } b \in \mathcal{B}$$

$$(C_3) \quad b < c \implies b' < c'.$$

Osserviamo che in questa costruzione le operazioni  $\wedge$  e  $\vee$ , introdotte tramite la relazione d'ordine parziale  $<$ , associano *ad ogni coppia di elementi*  $b, c \in \mathcal{B}$  l'elemento  $b \wedge c$  e l'elemento  $b \vee c$  *che appartengono ancora a*  $\mathcal{B}$ .

Tornando alla costruzione di Birkhoff e Von Neumann, osserviamo che essi identificano  $P^c$  con la proprietà “*non P*” e  $P_1 \vee P_2$  con “*P<sub>1</sub> o P<sub>2</sub>*”; tale identificazione viola alcune regole della logica classica, in particolare la distributività. L'interpretazione che viene data è che la logica classica è “inadeguata” a descrivere i fenomeni microscopici e va quindi sostituita con una “logica quantistica”, in questo senso il lavoro di Birkhoff e Von Neumann riprende le idee di Bohr e Heisenberg e le porta all'estremo mettendo in discussione non solo i concetti spazio-temporali della fisica classica (posizione, velocità, ecc.), ma addirittura la sua struttura logica. Come vedremo meglio in seguito il problema fondamentale di questa posizione è che essa dà un'interpretazione molto stretta dei



vincoli che la meccanica quantistica pone alla “osservabilità”. Tale problema sarà infatti il punto di partenza della critica di Bell che in particolare fornirà un “controesempio” a questa interpretazione costituito da un modello probabilistico classico per una particella di spin  $1/2$ .

La discussione delle strutture “non booleane”, o meglio “booleane parziali”, che viene fatta nei capitoli successivi della tesi rivaluta in un certo senso l’approccio di Birkhoff e Von Neumann eliminando però l’eccessiva rigidità che, come è stato messo in evidenza da Bell e come discuteremo in dettaglio nel capitolo 2, non è motivata dal punto di vista fisico e in particolare impedisce l’interpretazione in termini di probabilità classiche anche nei casi in cui è possibile.

Può essere interessante confrontare il nostro punto di vista con l’analisi di Pitowsky [17],[18] che combina gli assiomi della logica quantistica di Birkhoff e Von Neumann [3] con il risultato di Gleason [12] e interpreta il formalismo della meccanica quantistica come una “nuova teoria della probabilità”.

### 1.3 Le disuguaglianze di Bell

L’importante contributo del lavoro di Bell, in particolare dei lavori [9] e [8], al dibattito sui fondamenti della meccanica quantistica può essere riassunto in tre punti:

- 1) la critica della logica quantistica e più in generale delle interpretazioni che assumono il formalismo della meccanica quantistica senza discuterne il fondamento e la verifica tramite procedure sperimentali ben definite; è con questa logica, per esempio, che Bell critica il teorema di Von Neumann in [9];
- 2) l’enfasi sulla verifica degli aspetti non classici della meccanica quantistica alla base della critica al punto 1) mette in luce la centralità della nozione di “compatibilità” tra osservabili, ad esempio la richiesta di additività del teorema di Von Neumann viene accettata solo nel caso di osservabili che possono essere misurate congiuntamente sullo stesso sistema, cioè osservabili commutanti;
- 3) la trasformazione dell’argomento EPR in un argomento stringente sulla possibilità di interpretazione classica della meccanica quantistica; a posteriori è interessante notare che le ipotesi alla base di tale argomento sono di natura logico-probabilistica e il confronto con la meccanica quantistica avviene sulla base delle sue previsioni sperimentali.

Vediamo questi punti in dettaglio, partendo dal modello probabilistico che riproduce le aspettative della meccanica quantistica per un sistema di spin  $1/2$ . Nella costruzione più semplice le misure di probabilità sono ottenute come “misure prodotto”: a partire dalle misure di probabilità delle singole osservabili definite sui loro spettri, si costruisce una misura di probabilità “globale” data dal prodotto delle misure sul prodotto degli

spettri. Vedremo nel capitolo 3 che questa costruzione è possibile poiché le osservabili hanno relazioni di “compatibilità” banali (sono tutte incompatibili tra loro), mentre in generale non è possibile con relazioni di “compatibilità” non banali.

Una volta analizzato il caso di una particella di spin  $1/2$  Bell affronta i seguenti problemi:

*i)* se esistano altri casi in cui è possibile un’interpretazione classica della meccanica quantistica, in particolare analizzando il caso di due particelle di spin  $1/2$ ,

*ii)* come si confronta tale risultato con i “teoremi di impossibilità” di Von Neumann, Jauch e Piron, e, in particolare, con quello di Gleason.

Nel caso dei teoremi di Von Neumann e Jauch e Piron il risultato per lo spin  $1/2$  fornisce un “controesempio” che mostra la compatibilità con la meccanica quantistica di una descrizione classica per i sistemi rappresentati in meccanica quantistica in uno spazio di Hilbert di dimensione 2. Nel caso del teorema di Gleason [12], tale “controesempio” non funziona poiché la dimensione dello spazio di Hilbert è maggiore o uguale a 3 e le relazioni di “compatibilità” sono non banali. Bell procede allora per un’altra strada, criticando l’ipotesi, alla base del teorema, che il risultato della singola misura di un’osservabile sia indipendente da quali altre osservabili commutanti si misurano congiuntamente ad essa, affermando che tale ipotesi non è giustificata dato che diverse misure congiunte possono richiedere diverse disposizioni sperimentali, e comunque si fa riferimento alla nozione di “compatibilità” come “assenza di disturbo” che presenta aspetti problematici (si veda il capitolo 2). Per evitare tali problema l’idea di “compatibilità”, intesa in questo caso come una relazione tra un insieme di osservabili caratterizzata dall’indipendenza dei risultati delle loro singole misure rispetto al sottinsieme di osservabili che si sceglie di misurare congiuntamente, può essere ristretta dagli insiemi di osservabili commutanti a quelli di osservabili con “separazione space-like”, cioè misurabili separatamente in due regione di spazio-tempo con distanza space-like. In questo modo la portata del teorema di Gleason è, almeno apparentemente, ridotta.

All’interno della problematica aperta da questa osservazione Bell analizza un modello classico per due particelle di spin  $1/2$  e mostra come esso presenti in generale delle caratteristiche “non locali”, cioè di dipendenza della misura di un’osservabile in una certa regione dalla possibile scelta di effettuare una misura in un’altra regione arbitrariamente distante. Si chiede allora se *ogni* modello probabilistico che riproduca le aspettative della meccanica quantistica debba avere tali caratteristiche. A tale domanda risponde in maniera affermativa nel suo articolo successivo [8]. Egli mostra che ogni modello probabilistico classico che descriva tutte le possibile misure di spin su di un sistema di due particelle di spin  $1/2$  soddisfa delle disuguaglianze tra correlazioni misurabili in regioni con separazione space-like, che vengono violate dalle correlazioni predette dalla meccanica quantistica.

Da tale risultato nasce una discussione che contrappone “determinismo” e “località”, poiché Bell afferma che, se le previsioni della meccanica quantistica sono esatte, non esiste una “teoria deterministica locale” che riproduce tali previsioni.

L'analisi successiva del problema, in particolare Pitowsky [1], mostra come l'origine di tali disuguaglianze sia “puramente probabilistica”. Analizziamo, in questo spirito, la derivazione di disuguaglianze alla Bell per un caso a quattro osservabili.

Il caso discusso da Clauser, Horne, Shimony e Holt in [14] è forse il più semplice esempio di disuguaglianze di Bell poiché necessita solo di quattro osservabili.

Un'esposizione molto semplice è la seguente: consideriamo quattro variabili aleatorie  $A_1, A_2, A_3, A_4$  che assumono valori in  $\{-1, +1\}$ , notiamo che per qualsiasi assegnazione di un valore  $a_i \in \{-1, +1\}$  ad ogni variabile  $A_i$  vale:

$$-2 \leq a_1 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_3 - a_2 \cdot a_4 \leq 2 \quad (1.1)$$

queste disuguaglianze valgono allora anche per ogni combinazione convessa delle possibili attribuzioni  $a_i$ , e quindi per i valori di aspettazione:

$$-2 \leq \langle A_1 A_3 \rangle + \langle A_1 A_4 \rangle + \langle A_2 A_3 \rangle - \langle A_2 A_4 \rangle \leq 2 \quad . \quad (1.2)$$

Per ora abbiamo fatto uso solo del concetto di variabile random a valori in  $\{-1, 1\}$  vediamo ora come si interpreta questo risultato. Se identifichiamo le variabili random  $A_i$  con misure di spin, interpretiamo i risultati  $\{-1, 1\}$  come spin up e spin down e assumiamo che le variabili  $A_1$  e  $A_2$  agiscano su una particella, mentre  $A_3$  e  $A_4$  su un'altra con separazione space-like dalla prima, in modo che siano misurabili le correlazioni che entrano nella (1.2), allora la (1.2) esprime dei vincoli sulle possibili correlazioni tra osservabili con le caratteristiche descritte, valide per ogni teoria probabilistica classica. È interessante notare che in questo caso, al contrario dell'esposizione di Bell, i concetti di “particella”, “apparato”, “località” ecc. entrano solo nell'interpretazione del risultato (1.2) e non nella sua derivazione. L'origine di tali disuguaglianze è infatti puramente probabilistica: sono delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di estensioni di funzioni definite su sottinsiemi di un'algebra booleana a misure definite sull'intera algebra, come verrà discusso dettagliatamente nel capitolo 3.

In che modo allora si arriva ad affermare che la violazione di tali disuguaglianze è conseguenza di una “influenza non locale”? Che cosa viene “influenzato”? Tutti i risultati sperimentali sono compatibili con le previsioni della meccanica quantistica sia per i singoli risultati che per le correlazioni tra osservabili. In particolare la statistica delle singole osservabili non viene “influenzata” in meccanica quantistica, infatti date due osservabili dicotomiche compatibili  $A$  e  $B$  per le aspettative quantistiche vale:

$$\langle A \rangle = \langle AB \rangle + \langle AB^c \rangle, \quad (1.3)$$

cioè la probabilità che  $A$  misurata da sola risponda *si* è uguale alla probabilità che misurata insieme ad  $B$  risponda *si*. La spiegazione proposta da Bell in [8] è che l'influenza sia “sulle singole misure” e non sulla statistica, cioè una specie di “influenza a media nulla” sulle singole variabili.

## 1.4 I teoremi di Gleason e Bell-Kochen-Specker

Il teorema di Gleason [12], che risale al 1957, non viene inizialmente collegato al problema delle variabili nascoste, ma all'analisi dell'esistenza di assiomi per la meccanica quantistica più deboli rispetto a quelli forniti da Von Neumann ed eventualmente risultanti in una generalizzazione della meccanica quantistica. In particolare Gleason si chiede se sia possibile, indebolendo tali assiomi, ottenere per una generica osservabile  $A$  una statistica differente da quella fornita da una matrice densità  $\rho$  secondo la regola:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A). \quad (1.4)$$

Il risultato a cui giunge è che, se la dimensione dello spazio di Hilbert è maggiore o uguale a 3, non è possibile una generalizzazione della (1.4) compatibile con le previsioni della meccanica quantistica per le osservabili commutanti.

Vediamo più in dettaglio come procede. Si assume che:

- (a) i test (*si/no*) sono rappresentate da proiettori ortogonali in uno spazio di Hilbert;
- (b) i test effettuabili simultaneamente sono rappresentati da proiettori ortogonali commutanti;
- (c) la più generale assegnazione di una probabilità  $P_i \longrightarrow \langle P_i \rangle$  di ottenere *si* per il test associato ai  $P_i$  soddisfa: se  $P_1$  e  $P_2$  sono proiettori ortogonali commutanti, allora la loro somma  $P_{12} = P_1 + P_2$ , che è ancora un proiettore ortogonale, ha valore di aspettazione

$$\langle P_{12} \rangle = \langle P_1 \rangle + \langle P_2 \rangle \quad . \quad (1.5)$$

Il problema di caratterizzare i funzionali  $\langle \quad \rangle$  che soddisfano (a) – (c) viene ricondotto (vedi Pitowsky e Hrushovski [19]) allo studio di tutte le possibili funzioni a valori reali non negativi su uno spazio di Hilbert tali che:

- (1)  $f(\alpha v) = f(v)$  per ogni  $\alpha$  con  $|\alpha| = 1$  e per ogni vettore  $v$  di norma unitaria;
- (2)  $\sum_i f(e_i) = 1$  per ogni base ortonormale  $\{e_i\}$

Il valore di  $f(v)$  viene interpretato come la probabilità di trovare il sistema in uno stato descritto dal vettore  $v$ . La dimostrazione originale di Gleason può essere divisa in tre parti. Nella prima si dimostra che ogni attribuzione  $f$  in  $\mathbb{R}^3$  che soddisfa (1) – (2), deve essere continua. Nella seconda parte si dimostra che in  $\mathbb{R}^3$  la più generale  $f$  che soddisfa (1) – (2) è della forma

$$f(v) = \sum_{ij} \rho_{ij} v_i^* v_j, \quad (1.6)$$

dove  $\rho$  è una matrice densità,  $v_i$  indica la componente  $i$ -esima del vettore  $v$  e  $*$  indica il complesso coniugato. Nella terza parte il teorema viene generalizzato a spazi  $\mathbb{C}^N$  conducendosi al caso  $\mathbb{R}^3$ .

Osserviamo che Gleason è il primo a mettere in evidenza l'importanza delle strutture booleane parziali (cioè le collezioni di sottoalgebre commutative delle algebre di osservabili) in meccanica quantistica; inoltre dal punto di vista dell'analisi che verrà fatta nei capitoli successivi, il teorema di Gleason è fondamentale poiché mostra che le strutture booleane parziali della meccanica quantistica sono sufficienti a determinare completamente la struttura delle possibili statistiche definibili su di esse.

Questo risultato può essere collegato al problema delle variabili nascoste mostrando che la proprietà di continuità dimostrata da Gleason per le funzioni che soddisfano (1) – (2) è in contraddizione con l'attribuzione di valori in  $\{0, 1\}$ . Questo fatto viene notato in [9] da Bell che, partendo dalle stesse ipotesi di Gleason e ottenendo facilmente un risultato più debole, mostra come vettori (proiettori unidimensionali) a cui vengono attribuiti valori  $\{0, 1\}$  differenti debbano essere lontani un angolo minimo ( $\simeq 22,5$  gradi secondo la costruzione di Mermin [20]) per rispettare il postulato  $c$ ), altrimenti è possibile ottenere una contraddizione, e conclude che avendo a disposizione solo due valori tale attribuzione non è possibile. La stessa conclusione viene raggiunta da Kochen e Specker in [13] che presentano una costruzione esplicita con 117 vettori. L'argomento originale di Kochen e Specker è stato successivamente semplificato, si vedano ad esempio [21],[22],[23],[24].

## 1.5 Le disuguaglianze di Boole-Bell

Il lavoro di Pitowsky [1] è forse quello che mostra in maniera più esplicita l'origine puramente probabilistica delle disuguaglianze alla Bell e come esse siano condizioni non solo necessarie ma anche sufficienti per l'esistenza di un'interpretazione classica per un insieme di “previsioni” o di “frequenze relative” osservate in un certo esperimento.

Il concetto di *politopo di correlazione* viene introdotto da Pitowsky in [25] (1986) (ci riferiremo qui alla costruzione presentata in [1] (1989)) per discutere il seguente problema: date le *proposizioni atomiche*  $a_1, \dots, a_n$  e dei numeri positivi  $p_1, \dots, p_n, \dots, p_{ij}, \dots, \{ij\} \in S \subset \{ \{ij\} \mid 1 \leq i < j \leq n \}$ , associati alle  $a_i$  e ad alcune *congiunzioni logiche* tra di esse, ( $a_i$  e  $a_j$ ) con  $\{ij\} \in S$ , ci si chiede quali sono le condizioni necessarie e sufficienti affinché esista uno spazio di probabilità  $(X, \Sigma, \mu)$  e  $n$  eventi  $A_1, \dots, A_n$  tali che

$$\mu(A_i) = p_i \quad \mu(A_i \cap A_j) = p_{ij}. \quad (1.7)$$

Vediamo di chiarire un po' di cosa stiamo parlando. Il *calcolo proposizionale* è un *sistema formale* in cui formule che rappresentano *proposizioni* possono essere costruite a partire

da un insieme di *proposizioni atomiche* tramite l'utilizzo di *connettivi logici* (*e, o, non*). Tale costruzione è identificabile con un'algebra di Boole libera in cui le proposizioni atomiche sono i generatori liberi (da non confondere con gli atomi di un'algebra di Boole) e i connettivi logici (*e, o, non*) corrispondono alle operazioni booleane ( $\cap, \cup, ^c$ ). Un'assegnazione di un valore di verità alle proposizioni atomiche, e di conseguenza a tutte le altre proposizioni costruite a partire da esse, corrisponde ad un omomorfismo tra l'algebra di Boole che le rappresenta e l'insieme  $\{0, 1\}$  con le operazioni booleane definite nel seguente modo:  $x \cap y \equiv x \cdot y$ ,  $x^c \equiv 1 - x$  e  $x \cup y = x + y - x \cdot y$  per ogni  $x, y$  in  $\{0, 1\}$ . In particolare tale omomorfismo corrisponde ad una misura moltiplicativa, come è stato notato anche nel teorema (A.2.3).

In pratica la soluzione al problema precedente è la seguente: dati i  $2^n$  vettori  $u_\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_i \varepsilon_j, \dots)$ , con  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ , che rappresentano tutti le possibili assegnazioni di un valore di verità alle proposizioni atomiche  $a_i$  e alle loro congiunzioni logiche ( $a_i$  e  $a_j$ ),  $\{ij\} \in S$ , i numeri  $p_i, p_{ij}$  provengono da una misura su di uno spazio di probabilità  $(X, \Sigma, \mu)$  se e solo se il vettore  $(p_1, \dots, p_n, \dots, p_{ij}, \dots)$  si ottiene da una combinazione convessa dei vettori  $u_\varepsilon$ , l'insieme dei vettori generati da tali combinazioni convesse è detto *politopo di correlazione*.

Tale risultato è collegato alle disuguaglianze alla Bell dal teorema di Weyl-Minkowski che afferma che un sottinsieme di  $\mathbb{R}^N$  è un *politopo convesso*, cioè è generato dalle combinazioni convesse di un numero finito di vettori, se e solo se è un *poliedro convesso limitato*, cioè una regione di spazio delimitata da un certo numero di *facce piane* (sottinsiemi di iperpiani di  $\mathbb{R}^N$ ). Segue che ha due possibili descrizioni: una in termini dei suoi vertici, cioè un vettore è un elemento del politopo se è combinazione convessa dei suoi vertici, e una in termini delle sue facce, cioè un vettore è un elemento del politopo se le sue coordinate soddisfano certe disuguaglianze che rappresentano i semispazi la cui intersezione genera il poliedro. Sono appunto queste disuguaglianze nello studio della rappresentabilità in termini di un spazio di probabilità prendono il nome di *disuguaglianze di Bell generalizzate*.

In generale il problema dell'“estensione” delle previsioni della meccanica quantistica, o del “completamento” della meccanica quantistica ad una “teoria classica”, è esattamente questo: dato un insieme di “proposizioni” su un sistema fisico, cioè le previsioni della meccanica quantistica sulle quantità osservabili, e le congiunzioni logiche tra alcune di esse, cioè le previsioni per le misure congiunte di osservabili commutanti, ci si chiede se è possibile aggiungere le congiunzioni logiche non definite, cioè le previsioni per la misura congiunta di osservabili non commutanti, e rappresentare tutto in termini di uno spazio di probabilità classico.

La tesi dell'origine puramente probabilistica delle disuguaglianze alla Bell è rafforzata dall'osservazione, fatta da Pitowsky in [11], che questo problema fu studiato per la prima volta da Boole nel 1862 [10]. Esponiamo il problema di Boole come viene riformulato da Pitowsky in [11]: dati  $n$  numeri positivi  $p_1, \dots, p_n$  che rappresentano delle frequenze relative osservate per  $n$  eventi logicamente connessi, ci si può chiedere quali

siano le condizioni necessarie e sufficienti affinché tali numeri siano rappresentabili come probabilità in un opportuno spazio di probabilità. Tali condizioni, che come abbiamo visto prendono la forma di disuguaglianze lineari tra i  $p_i$ , vengono chiamate da Boole “condizioni dell’esperienza possibile”. Per questo motivo tali disuguaglianze prendono anche il nome di *disuguaglianze di Boole-Bell*.

Per un confronto con le discussioni più recenti sull’approccio puramente probabilistico all’analisi delle disuguaglianze alla Bell si vedano ad esempio [26], [27] e [28].

## Capitolo 2

# Apparati sperimentali e algebre di Boole parziali

### 2.1 Le previsioni della MQ

Iniziamo questo capitolo analizzando il ruolo delle strutture booleane parziali nella meccanica quantistica, successivamente mostreremo come tali strutture possano essere fondate, indipendentemente dal formalismo della meccanica quantistica, su fatti sperimentalmente osservabili. Partendo dall'analisi del caso quantistico introdurremo una generalizzazione della teoria probabilistica classica chiamata *teoria probabilistica contestuale*, costituita da una famiglia di teorie probabilistiche classiche ciascuna relativa ad un certo "contesto", cioè da una collezione  $\{(\mathfrak{B}_i, \mu_i)\}_{i \in I}$ , dove la coppia  $(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$  è formata da un'algebra di Boole  $\mathfrak{B}_i$  e una misura normalizzata  $\mu_i$  definita su di essa e rappresenta la teoria probabilistica classica riferita al "contesto"  $i$ -esimo; una definizione più rigorosa verrà data nel seguito, per ora anticipiamo che la struttura matematica alla base di tale teoria è quella di *algebra di Boole parziale*. Secondo questa definizione le teorie probabilistiche classiche sono quindi una sottoclasse delle teorie probabilistiche contestuali, caratterizzate dalla proprietà di avere un unico "contesto".

Per iniziare la discussione è utile riassumere brevemente il formalismo della meccanica quantistica e la sua interpretazione in termini di previsioni sulle procedure sperimentali effettuabili.

Dato che i sistemi quantistici descrivibili in spazi di Hilbert di dimensione finita contengono già tutti gli elementi "caratteristici" della meccanica quantistica (stati, osservabili, valori di aspettazione, probabilità di transizione) e dato che nel seguito tratteremo solo tali sistemi, in particolare i sistemi di spin, possiamo limitarci a discutere il caso finito dimensionale evitando così inutili complicazioni che non aggiungono molti elementi interessanti all'analisi che verrà fatta in seguito.

Gli *stati* della meccanica quantistica sono identificati con i vettori di norma unitaria



in uno spazio di Hilbert (di dimensione finita), mentre le *osservabili* sono identificate con gli operatori autoaggiunti su tale spazio. In termini sperimentali si interpretano gli stati come le possibili “preparazioni” a cui viene sottoposto un sistema fisico prima di una misura, e le osservabili come gli apparati che effettuano tali misure. L’effetto della misura di un’osservabile  $A$  su di un sistema fisico descritto dallo stato  $\psi$  è dal punto di vista del formalismo quello di sostituire lo stato  $\psi$  con uno degli *autostati*  $\phi_i$  di  $A$ , cioè uno degli autovettori di  $A$  corrispondente ad un certo autovalore  $\lambda_i$ ; in termini sperimentali ciò corrisponde alla lettura sull’apparato rappresentato dall’osservabile  $A$  del risultato  $\lambda_i$ . La probabilità di ottenere  $\phi_i$  è data da :

$$|(\phi_i, \psi)|^2 \quad (2.1)$$

dove con  $(\ , \ )$  abbiamo indicato il prodotto scalare sullo spazio di Hilbert. Nel caso di un’osservabile rappresentata da un proiettore ortogonale  $P$ , che in particolare ha autovalori 0 e 1, abbiamo che la (2.1) può essere riscritta come:

$$\langle P \rangle_\psi \equiv |(\psi, P\psi)|^2 \quad (2.2)$$

tale espressione, che si definisce *valore di aspettazione quantistico dell’osservabile  $P$  sullo stato  $\psi$* , si interpreta come *la probabilità che l’apparato rappresentato dall’osservabile  $P$  risponda 1*.

Come conseguenza del teorema spettrale abbiamo che ogni osservabile  $A$  può essere riscritta come

$$A = \sum_i \lambda_i P_i \quad (2.3)$$

dove  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $A$  e  $P_i$  i proiettori ortogonali sui relativi autospazi; in particolare tali proiettori commutano tra di loro. A partire da questo risultato possiamo ottenere per il *valore di aspettazione quantistico* di un’osservabile  $A$  su uno stato descritto da un vettore  $\psi$  :

$$\langle A \rangle_\psi = (\psi, A\psi) = \sum_i \lambda_i (\psi, P_i \psi) \quad (2.4)$$

cioè il valore di aspettazione quantistico di un’osservabile è la somma delle probabilità dell’uscita  $i$ -esima pesate con il valore associato a tale uscita. Quindi nel caso di esperimenti in cui misuriamo una sola osservabile possiamo interpretare i valori di aspettazione quantistici come “probabilità” di risposta “affermativa” ( $= 1$ ) nel caso dei proiettori e come “valori medi” o “valori di aspettazione classici” nel caso delle osservabili, possiamo cioè dire che in tal caso un proiettore rappresenta un “evento” mentre un’osservabile generica una “variabile aleatoria”.

Come conseguenza della validità del teorema spettrale per operatori autoaggiunti commutanti abbiamo che tale interpretazione è estendibile al caso di più osservabili commutanti. Dati due proiettori ortogonali  $P$  e  $Q$  commutanti (cioè  $PQ - QP = 0$ ) interpreto l’aspettazione

$$\langle PQ \rangle_\psi = (\psi, PQ\psi) = (\psi, QP\psi) \quad (2.5)$$

come la *probabilità congiunta* di  $P$  e  $Q$ , cioè in un esperimento in cui misuro  $P$  e  $Q$  in successione, in qualsiasi ordine, sullo stesso sistema preparato nello stato  $\psi$ , la probabilità che il sistema risponda *si* ad entrambi è data da  $\langle PQ \rangle_\psi$ . Si può estendere questo discorso a più osservabili (generiche) commutanti  $A_1, \dots, A_n$  affermando che esse sono misurabili in successione, in un'ordine qualsiasi, e identificando il valore di aspettazione  $\langle A_1 \dots A_n \rangle_\psi$  con la *correlazione* tra  $A_1, \dots, A_n$  definita da una teoria probabilistica classica.

Se ci si chiede allora cosa rappresenti la quantità  $(\psi, AB\psi)$  nel caso di due osservabili  $A$  e  $B$  non commutanti, si nota che in generale non è neanche un numero reale poiché  $AB$  non è un operatore autoaggiunto; dato che  $AB$  non è un'osservabile, tale quantità non è direttamente collegata a nessuna procedura sperimentale e quindi la meccanica quantistica non le assegna un'interpretazione fisica.

Riassumendo, gli elementi della teoria quantistica che hanno un significato fisico, e in particolare devono essere riprodotti in qualunque tentativo di interpretazione classica, sono i valori di aspettazione di tutte le osservabili, o equivalentemente di tutti i proiettori ortogonali, che corrispondono ad apparati di misura (*si/no*). Più in generale, fissate  $N$  osservabili commutanti, i tentativi di interpretazione classica devono riprodurre la teoria probabilistica classica originata dai valori di aspettazione dei loro polinomi.

Da questa osservazione segue che la meccanica quantistica definisce una *teoria probabilistica contestuale*, dove ogni "contesto" è definito da un insieme di proiettori commutanti. L'analisi del caso quantistico giustifica quindi l'introduzione delle teorie probabilistiche contestuali come generalizzazione delle teorie probabilistiche classiche.

## 2.2 Relazioni booleane, loro estensioni, logica quantistica

Nella discussione precedente abbiamo utilizzato il formalismo della meccanica quantistica, ma le teorie probabilistiche contestuali sono formulabili indipendentemente da esso e sono una classe molto più ampia rispetto a quelle che riproducono le aspettative della meccanica quantistica. Mostriamo come la possibilità di descrivere fenomeni fisici tramite teorie probabilistiche contestuali abbia un fondamento sperimentale indipendente dal formalismo della meccanica quantistica.

Il nostro punto di partenza per giustificare su basi empiriche l'introduzione delle teorie probabilistiche contestuali sarà la nozione di apparati sperimentali e le relazioni tra i risultati dei possibili esperimenti. Anticipiamo brevemente il percorso che seguiremo:

- a) partiremo dalla nozione di apparato sperimentale basata sulla condizione di *riproducibilità* cioè sulla possibilità "confermare" il risultato di un certo esperimento

to; discuteremo come questo ci permette di interpretare i risultati come delle “proprietà” del sistema in esame;

- b) introdurremo una *relazione d'ordine parziale*, definita solo in termini dei risultati degli esperimenti, e una relazione di equivalenza derivata da questa che ci permetterà di identificare gli apparati che “funzionano allo stesso modo” con la stessa “osservabile”;
- c) richiederemo che alcuni apparati (quelli “ordinati”) siano “componibili”, cioè che sia possibile introdurre dei *connettivi logici* tra i risultati degli esperimenti e ottenere dei *nuovi apparati* che rispettano le stesse regole dei vecchi, in particolare la “riproducibilità”; a partire da questi nuovi apparati sarà definibile una struttura booleana parziale.

Osserviamo che un'altra scelta possibile sarebbe stata quella di partire, invece che dalla relazione d'ordine, da una relazione di “compatibilità”, che in meccanica quantistica è definita in termini della commutatività, ma che non ha una definizione ovvia in termini dei risultati degli esperimenti. Esiste infatti una soluzione alternativa al problema che fa uso di una definizione di “compatibilità” che coincide con la commutatività nel caso quantistico, una possibilità che verrà analizzata più avanti.

La struttura booleana parziale, alla base delle teorie probabilistiche contestuali, sarà il punto di partenza per discutere nei prossimi capitoli i problemi legati all'interpretazione e alla possibilità di “estensione” di tali teorie. In particolare analizzeremo i seguenti problemi:

- (1) ci chiederemo se sia possibile aggiungere elementi derivati dalle relazioni logiche tra gli apparati cui non corrisponde già un apparato nell'insieme di partenza; vedremo che questa estensione corrisponde all'immersione dell'algebra di Boole parziale in un algebra di Boole e che non è sempre possibile. Anticipiamo che a differenza del punto (c) visto precedentemente, questa estensione non ci fornisce in generale dei nuovi apparati, e i risultati su tali elementi si possono interpretare solo come *attribuibili ma non osservabili*.
- (2) Nei casi in cui è possibile l'estensione al punto (1) possiamo chiederci se le frequenze relative osservate nei vari esperimenti abbiano un'interpretazione probabilistica globale, cioè se la collezione di misure di probabilità sulle sottoalgebre booleane che formavano l'algebra parziale prima dell'estensione al punto (1) si ottenga da una misura di probabilità definita sull'algebra booleana. Sarà chiaro in seguito che le probabilità che vengono aggiunte si interpretano come non direttamente osservabili ma solo *attribuibili*; in particolare vedremo che questa attribuzione non sarà unica.

Riguardo alla costruzione anticipata al punto (c) possiamo osservare che questa si discosta dalla logica quantistica che assume relazioni logiche  $(\wedge, \vee)$  tra tutti gli apparati che vengono ottenute tramite *sup* e *inf* rispetto alla relazione d'ordine parziale. Tale approccio ha conseguenze evidenti dal punto di vista dei punti (1) e (2); infatti la logica quantistica possiede una struttura non booleana, derivata dall'uso dei connettivi  $(\wedge, \vee)$ , che non ammette un'estensione ad un'algebra di Boole. Potrebbe quindi sembrare che l'estensione ai punti (1) e (2) non sia mai possibile; in realtà tale possibilità non è esclusa dalla logica quantistica ma da una sua particolare interpretazione. Vale quindi la pena di soffermarsi un attimo su questo punto per chiarirlo meglio. Vediamo due possibili interpretazioni di questa struttura non booleana tramite un esempio: consideriamo due apparati rappresentati da due proiettori ortogonali unidimensionali non commutanti  $P$  e  $Q$ , l'elemento  $P \wedge Q$  è definito come l'*inf* $\{P, Q\}$  rispetto alla relazione d'ordine parziale, e in questo caso coincide con l'elemento 0. Sappiamo dalla meccanica quantistica, lo vedremo in dettaglio più avanti, che certi esservabili non possono essere misurate congiuntamente; potremmo pensare allora che l'attribuzione di un valore all'elemento  $P \wedge Q$  dell'esempio precedente (*interpretato come congiunzione logica di  $P$  e  $Q$* ) è arbitraria poiché è impossibile una verifica sperimentale. In realtà la motivazione della definizione è la seguente: il *si* certo all'apparato  $P \wedge Q$  su uno stato implica il *si* a  $P$  e il *si* a  $Q$  se vengono misurati in successione ad esso.

Inoltre l'interpretazione di questi simboli come connettivi logici ( $e, o$ ) è in contrasto con le regole della probabilità classica poiché possiamo avere due esperimenti con probabilità di successo arbitrariamente vicina ad 1 ma la cui probabilità congiunta sarà sempre uguale a 0 (come mostrato in rif Pitowsky nel paragrafo 3.6).

Questa impostazione crea una struttura rigida che esclude la rappresentabilità classica (in termini di uno spazio di probabilità) anche per quei sistemi che, come vedremo, la ammettono; e che assume che la condizione di “non effettuabilità” implichi una impossibilità assoluta, e non sia una condizione dovuta ad esempio a limitazioni sugli apparati a nostra disposizione. In particolare vedremo più avanti (esempio 2.4.4) che a partire da strutture booleane di osservabili eliminando opportuni elementi tramite una sorta di “principio di indeterminazione”, associato ad una limitazione sui possibili esperimenti, e introducendo i connettivi logici  $(\wedge, \vee)$ , definiti come prima tramite *sup* e *inf*, si ottiene una struttura non booleana; risulterà allora che i connettivi  $(\wedge, \vee)$  non sono interpretabili come ( $e, o$ ) logici, e il fatto che non siano booleani non impedisce l'immersione dell'insieme delle osservabili in un struttura booleana tramite il reinserimento degli elementi che erano stati eliminati.

## 2.3 Apparati

Introduciamo ora la nozione di apparato. Un *apparato dicotomico* (*si/no*) è uno strumento che interagisce con un sistema fisico e restituisce un valore (*si* o *no*). A priori l'interazione tra il sistema e lo strumento può essere di vario tipo : potrebbe non avere nessun effetto sul sistema oppure modificarlo o addirittura distruggerlo, si pensi ad esempio alla differenza tra un telescopio che osserva la posizione di un corpo celeste, un apparato Stern-Gerlach che misura lo spin di un elettrone e un tubo fotomoltiplicatore che rileva un fotone. Il tipo di interazione tra apparato e sistema fisico in generale non ci interessa, ma dato che ammetteremo la possibilità di applicare più apparati “sullo stesso sistema” il significato di questa espressione dipenderà dal tipo di interazione tra sistema e apparato. Tornando agli esempi di prima potremmo dire che nel caso del telescopio si possono effettuare più misure “successive” che non “disturbano” il sistema esaminato, nel caso Stern-Gerlach si può pensare a misure successive ottenute tramite apparati posti in “serie”, mentre nel caso del rilevatore di fotoni non si possono applicare più apparati per volta. Il nostro punto di vista è che, indipendentemente da come funzionano gli apparati, ci interessa che per l'insieme che consideriamo sia ben definita una nozione di *applicazione successiva* di più apparati sullo stesso sistema.

La nozione di applicazione successiva è fondamentale per discutere la possibilità di introdurre delle relazioni logiche tra gli apparati. Ad esempio dati due apparati ci si può chiedere se se ne può considerare un terzo che rappresenti la loro congiunzione logica, cioè risponda *si* se e solo se rispondono *si* gli altri due applicati in successione.

In meccanica classica è sempre possibile introdurre queste relazioni logiche, vedremo infatti (esempio 2.4.1) che gli “apparati classici” corrispondono ad una famiglia di sottinsiemi dello spazio delle fasi e quindi le relazioni logiche si introducono tramite le operazioni insiemistiche ( $\cap, \cup, ^c$ ) che sono booleane; invece (esempi 2.4.3 e 2.5.1) in meccanica quantistica vengono introdotti connettivi logici booleani solo tra osservabili commutanti o “compatibili”.

Potremmo allora partire da una relazione di “compatibilità” tra apparati, ma questa non sembra facile da introdurre senza dare luogo ad un ragionamento circolare (es. i compatibili sono quelli per cui è definita un'applicazione “congiunta”) oppure senza introdurre come fondamentali i concetti di “preparazione” (es. stato) e “statistica” (es. valori di aspettazione) che invece fanno uso delle nozioni di esperimento, esperimenti successivi ecc.

La possibilità di introdurre una nozione di “compatibilità” definita solo in termini di risultati di singoli esperimenti verrà discussa nel paragrafo 2.4, per ora ci limitiamo a osservare che non essendo ovvia la soluzione di questo problema procediamo per un'altra strada.

Nella costruzione che segue ci proponiamo di utilizzare solo concetti che hanno una

diretta interpretazione in termini di risultati di esperimenti effettuabili; non partiremo quindi da concetti astratti come spazio di Hilbert o algebra degli operatori e non ci baseremo su affermazioni legate ad esperimenti non effettuabili (es. se avessi misurato in successione  $B$  e  $A$  invece che  $A$  e  $B$  avrei ottenuto...) legate ad esempio all'idea di commutatività; inoltre per il discorso fatto prima cerchiamo anche di evitare concetti come “preparazione” e “statistica”. Per fare questo una via possibile è quella di esprimere le proprietà che richiediamo tramite affermazioni del tipo: “per ogni possibile esperimento (cioè tutte le “preparazioni”) si verifica sempre (cioè probabilità 1) che... e non si verifica mai (cioè probabilità 0) che...”.

Vedremo che tre concetti che soddisfano questi requisiti sono la *proprietà di riproducibilità*, la *relazione d'ordine parziale* e l'*assioma di componibilità degli apparati ordinati*; e che questi sono sufficienti ad ottenere la struttura di algebra di Boole parziale che è quella che ci interessa analizzare come struttura logica fondamentale di una generalizzazione delle teorie della probabilità classiche, le teorie probabilistiche contestuali, che includa la struttura delle predizioni della meccanica quantistica.

## 2.4 Relazione d'ordine

Consideriamo un insieme di apparati e definiamo *applicazione successiva* di due o più apparati un esperimento in cui gli apparati interagiscono con un certo sistema in successione in un certo ordine restituendo ciascuno un valore (*si/no*).

Dati due apparati  $A$  e  $B$ , diremo che  $A < B$  o che  $A$  è un *raffinamento* di  $B$  se applicati in successione, in un ordine qualsiasi, si ottiene che se  $A$  restituisce *si* anche  $B$  restituisce *si* cioè si ottiene sempre uno dei risultati contenuti nella seguente tabella:

$A$	$B$	
si	si	(2.6)
no	si	
no	no	

Assumiamo inoltre che tale relazione sia transitiva cioè se  $A < B$  e  $B < C$  allora vale  $A < C$ . Applicando  $A$ ,  $B$  e  $C$  in successione e assumendo che la misura di  $A$  non modifichi la relazione  $B < C$  e viceversa la misura di  $C$  non modifichi la relazione  $A < B$  (il che è abbastanza ragionevole dato che  $A$  viene misurato prima e  $B < C$  per definizione vale “qualunque sistema venga fuori” da  $A$ ) la transitività è ovvia, ma richiediamo la condizione più forte che valga  $A < C$  indipendentemente dal fatto di applicare  $B$  o meno.

Introduciamo ora su questi apparati una relazione di equivalenza: diremo che  $A$  è equivalente a  $B$ , e scriveremo  $A \approx B$ , se vale  $A < B$  e  $B < A$ . Questo è equivalente a dire che applicando  $A$  e  $B$  in successione  $A$  restituisce *si* se e solo se  $B$  restituisce *si* cioè

otteniamo sempre uno dei risultati contenuti nella seguente tabella:

$A$	$B$	(2.7)
si	si	
no	no	

A questo punto possiamo introdurre una proprietà fondamentale che deve soddisfare ogni apparato contenuta nel seguente

**Assioma di riproducibilità:** per ogni apparato  $A$  esiste un apparato  $B$  tale che  $A \approx B$ , cioè per ogni apparato deve esistere un altro che applicato in successione “conferma” il risultato del primo.

La riproducibilità ci permette di interpretare il risultato di un certo esperimento come una “proprietà” che il sistema “possiede *dopo* l’esperimento”, poiché ripetendolo siamo certi di ottenere lo stesso risultato.

La relazione  $\approx$  è transitiva, per la transitività di  $<$ , e simmetrica per costruzione, ma in generale non è riflessiva perché potrebbe non avere senso dire che applico  $A$  e  $A$  in successione, ma se vogliamo introdurre una relazione di equivalenza possiamo porre per definizione che  $A \approx A$  indipendentemente dalle possibili applicazioni.

Per ogni apparato  $A$  posso definire l’apparato *complementare*  $A^c$  che è l’apparato in cui ho scambiato il *si* col *no*. Ovviamente è ancora un apparato perché soddisfa la riproducibilità ( $A \approx B \iff A^c \approx B^c$ ), inoltre vale  $A = (A^c)^c$ . Osservando la tabella (2.6) possiamo notare che  $A < B \implies B^c < A^c$  cioè complementando invertiamo la relazione  $<$ .

A questo punto  $<$  non è ancora una relazione d’ordine parziale, poiché non soddisfa la proprietà che se  $A < B$  e  $B < A$  allora  $A = B$ , abbiamo invece che in tal caso vale  $A \approx B$  per la definizione di  $\approx$ . Allora possiamo ottenere una relazione d’ordine parziale a partire da  $<$  quotizzando l’insieme degli apparati rispetto alla relazione di equivalenza  $\approx$ ; diremo che tutti gli apparati in una certa classe di equivalenza rappresentano un’*osservabile dicotomica*.

Rimane da verificare che la relazione  $<$  non dipenda dal rappresentante della classe di equivalenza cioè che se  $A < B$  allora vale  $A' < B'$  per ogni  $A' \approx A$  e per ogni  $B' \approx B$ . Ma questo segue dal fatto che se  $A' \approx A$  e  $B \approx B'$  allora  $A' < A < B < B'$  quindi per la transitività di  $<$  vale  $A' < B'$ .

L’insieme delle osservabili è così dotato di una relazione d’ordine parziale  $<$ , infatti date tre osservabili  $A, B$  e  $C$ :

$$(O_1) \quad A < A,$$

$$(O_2) \quad A < B \text{ e } B < C \implies A < C,$$

( $O_3$ )  $A < B$  e  $B < A \implies A = B$ ,

e di un complemento che soddisfa:

( $O_4$ )  $A < B \implies B^c < A^c$ .

Vediamo ora degli esempi di insiemi di osservabili dicotomiche che rientrano nella definizione che abbiamo dato:

**Esempio 2.4.1. (Sistemi classici)**

Consideriamo un insieme  $X$ , identifichiamo le osservabili con una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottinsiemi di  $X$  chiusa sotto complemento, e i sistemi con i punti  $x \in X$ ; diremo che  $A \in \mathcal{F}$  risponde *si* su  $x$  se  $x \in A$  e risponde *no* altrimenti. In questo caso la relazione d'ordine parziale è data dall'inclusione  $\subset$  e il complemento dal complemento insiemistico  $^c$ . Si verifica facilmente che soddisfano ( $O_1$ ) – ( $O_4$ ). Osserviamo inoltre che non si richiede che  $\mathcal{F}$  sia chiuso sotto intersezione e unione, in generale quindi i connettivi logici non sono definiti in un insieme dato di osservabili.

**Esempio 2.4.2. (Sistemi quantistici)**

Consideriamo uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  di dimensione  $n$  e consideriamo un insieme  $\mathcal{P}$  di proiettori ortogonali su  $\mathcal{H}$ , cioè operatori  $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  che soddisfano  $P^2 = P$  e  $P^* = P$  dove  $P^*$  è l'operatore aggiunto di  $P$ . In questo caso le osservabili sono gli elementi di  $\mathcal{P}$ ; i sistemi fisici sono descritti dai vettori  $\psi \in \mathcal{H}$  di norma unitaria, nel senso che ad ogni vettore  $\psi$  è associata una classe di singoli sistemi su cui le osservabili hanno statistica definita; supponiamo che  $P$  risponda *si* su  $\psi$  con probabilità  $\|P\psi\|^2$  e che risponde no con probabilità  $\|(1 - P)\psi\|^2$ , ovviamente le probabilità si sommano a 1.

Applicare due osservabili  $P, Q$  in successione significa assumere che  $P$  applicato a  $\psi$  dopo  $Q$  risponda come se lo si applicasse al vettore  $Q\psi/\|Q\psi\|$  se  $Q$  ha risposto *si* o al vettore  $(1 - Q)\psi/\|(1 - Q)\psi\|$  se  $Q$  ha risposto *no*. Gli apparati risponderanno ( $P = si, Q = si$ ) con probabilità  $\|PQ\psi\|$ , ( $P = si, Q = no$ ) con probabilità  $\|P(1 - Q)\psi\|$ , ( $P = no, Q = si$ ) con probabilità  $\|(1 - P)Q\psi\|$  e ( $P = no, Q = no$ ) con probabilità  $\|(1 - P)(1 - Q)\psi\|$ .

La relazione d'ordine  $P < Q$  è definita (vedi tabella (2.6)) dalla condizione che il caso ( $P = no, Q = si$ ) non si verifichi mai (probabilità 0), indipendentemente dall'ordine di disposizione degli apparati, cioè  $P < Q$  se  $PQ = QP = P$ .

In realtà è sufficiente richiedere una delle due tra le condizioni  $PQ = P$  e  $QP = P$ , cioè che non si verifichi mai il caso ( $P = no, Q = si$ ) con una data, qualsiasi, disposizione degli apparati. Infatti se vale  $PQ = P$  allora  $QP = Q^*P^* = P^* = P$ ; in particolare nel caso di proiettori ortogonali la relazione d'ordine definita in termini di una sola delle due condizioni implica la commutatività.

Si verifica facilmente che il complemento definito da  $P^c \equiv (1 - P)$  soddisfa le proprietà richieste.



**Esempio 2.4.3. (Descrizione quantistica di un sistema classico discreto)**

Consideriamo uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  di dimensione  $n$  e consideriamo l'insieme  $X$  di  $2^n$  proiettori ortogonali commutanti ottenuto da tutte le possibili matrici che hanno 0 fuori dalla diagonale e 0 e 1 sulla diagonale. Viceversa dato un insieme di  $k$  proiettori ortogonali commutanti esiste una base ortonormale in cui sono tutti diagonali e hanno la forma appena descritta, se  $k < 2^n$  possiamo completare quest'insieme con le combinazioni mancanti di 0 e 1 sulla diagonale. Si può verificare che  $X$  un'algebra di Boole con le operazioni  $P \cap Q \equiv PQ$ ,  $P \cup Q = P + Q - PQ$  e  $P^c = 1 - P$ , ed è isomorfo all'algebra di Boole dei sottinsiemi di  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Esempio 2.4.4. (Sistema classico con indeterminazione)**

Consideriamo  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$  dove  $\mu$  è la misura di Lebesgue e  $\mathcal{M}$  i sottinsiemi misurabili. Identifichiamo i sistemi fisici con i punti di  $\mathbb{R}^2$  e le osservabili con l'insieme  $\Sigma \subset \mathcal{M}$  dato da  $\{A \in \Sigma \mid \mu(A) \geq 1\} \cup \{\emptyset\}$ . Tra le osservabili è definita una relazione d'ordine parziale data da  $\subset$ . Osserviamo che ci sono dei problemi nel definire il complemento poiché  $\Sigma$  non è chiuso sotto tale operazione, tuttavia tale problema, che potrebbe essere risolto con alcuni accorgimenti, è irrilevante per la discussione che segue. Quello che vogliamo mettere in evidenza con questo esempio è che presa un'algebra booleana (in questo caso  $\mathcal{M}$ ) ed eliminati alcuni elementi (sottinsiemi di area minore di 1), i “connettivi logici” ( $\wedge, \vee$ ) definibili su  $\Sigma$  tramite la relazione d'ordine ( $A \wedge B \equiv \inf_{\Sigma}\{A, B\}$ ,  $A \vee B \equiv \sup_{\Sigma}\{A, B\}$ ) non corrispondono ai “connettivi logici booleani” ( $\cap, \cup$ ) definiti su  $\mathcal{M}$ . Vediamo di spiegare meglio questo punto. Notiamo che per come abbiamo definito  $\wedge$  vale:

$$A \wedge B = \begin{cases} A \cap B & \text{se } \mu(A \cap B) \geq 1 \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A questo punto consideriamo  $A, B, C \in \Sigma$  e diversi da  $\emptyset$ , tali che  $\mu(A \cap C) < 1$  e  $\mu(B \cap C) > 1$ . Risulta che non è soddisfatta la proprietà distributiva per ( $\wedge, \vee$ ), infatti:

$$(A \vee B) \wedge C \neq (A \wedge C) \vee (B \wedge C);$$

poiché a sinistra abbiamo  $(A \cup B) \cap C$  che appartiene ancora a  $\Sigma$  mentre a destra, dato che  $(A \cap C) = \emptyset$ , abbiamo  $B \cap C$ .

Questo esempio mostra che partendo da una struttura booleana ed eliminando opportuni elementi si può ottenere una “struttura logica” che somiglia molto a quella della logica quantistica, nel senso che i connettivi ( $\wedge, \vee$ ) sono definiti nello stesso modo a partire dalla relazione d'ordine. Inoltre il restringersi alle osservabili rappresentate da insiemi di area maggiore o uguale a 1 può essere interpretato come una sorta di “principio di indeterminazione”, nel senso che non possiamo “misurare” la posizione di un punto con precisione arbitraria; ad esempio se prendiamo come insiemi misurabili i rettangoli e identifichiamo le coordinate di  $\mathbb{R}^2$  con  $(q, p)$ , cioè posizione e impulso per un sistema unidimensionale, il requisito di area maggiore o uguale a 1 si traduce nella richiesta

$$\Delta p \Delta q \geq 1.$$

Gli esempi precedenti mostrano come le osservabili (*si/no*) classiche e quantistiche rientrino nella definizione di osservabili dicotomiche data precedentemente: cioè siano a due valori, con una nozione di “applicazione successiva” e con la proprietà di riproducibilità e come su di esse si possa introdurre la relazione d’ordine  $<$  e il complemento  $^c$ . Vedremo più avanti che soddisfano anche un “assioma di composizione” necessario per costruire gli “apparati composti”. Inoltre l’ultimo esempio mette in luce l’importanza di ammettere la possibilità di “completabilità” dell’insieme delle osservabili, infatti se cerchiamo gli elementi che rappresentano le relazioni logiche soltanto all’interno delle osservabili date, otteniamo una struttura non booleana la cui esistenza non implica però l’impossibilità di introdurre tali relazioni.

## 2.5 Apparati composti

Avendo introdotto i concetti di applicazione successiva e di relazione d’ordine, possiamo ora discutere in quali casi e con quale interpretazione fisica è possibile ottenere nuovi apparati a partire da quelli che abbiamo a disposizione.

Dati  $n$  apparati  $A_1, \dots, A_n$  definiamo *successione di apparati*  $(A_1, \dots, A_n)$  la disposizione in successione degli apparati nell’ordine indicato che possono interagire con un certo sistema e restituire una sequenza di risultati  $(r_1, \dots, r_n)$  dove  $r_i$  è un valore (*si/no*). Se vogliamo ottenere da queste sequenze un solo valore (*si/no*) possiamo combinare i risultati tramite un “circuito logico”  $L$  che a partire da una sequenza di  $n$  valori (*si/no*) ne restituisce uno solo ottenuto tramite dei connettivi logici booleani ( $\wedge, \vee, ^c$ ) (col significato di (*e, o, non*) logici) tra i valori di partenza; chiameremo allora la successione di apparati con il circuito logico  $(A_1, \dots, A_n; L)$  *combinazione (logica) di apparati*.

A questo punto possiamo definire *apparato composto* una combinazione di apparati che soddisfa la condizione di riproducibilità. Questa nozione è centrale nel seguito, infatti in generale combinando insieme apparati non si ottiene un apparato composto come si può vedere nel seguente esempio tratto dalla meccanica quantistica.

**Esempio 2.5.1.** Consideriamo la possibilità di ottenere apparati composti a partire da due proiettori ortogonali sugli stati di spin up lungo l’asse  $x$  e l’asse  $z$  per una particella di spin  $1/2$  così definiti:  $P_x = \frac{1+\sigma_x}{2}$  e  $P_z = \frac{1+\sigma_z}{2}$  dove  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  sono due delle matrici di Pauli. In un esperimento in cui li applico in successione posso ottenere uno tra i quattro possibili valori  $\{(si, si), (si, no), (no, si), (no, no)\}$  esistono quindi  $2^4$  possibili modi di combinarli tramite circuiti logici per ottenere un valore *si/no*. Dato che ci interessa trovare un controesempio ci basta trovare un solo caso sfavorevole, in cui cioè la combinazione dei possibili valori non definisce un apparato composto. Consideriamo allora la congiunzione

logica tra i risultati e chiamiamo  $\wedge$  il circuito che la implementa, la combinazione di apparati sarà allora  $(P_z, P_x; \wedge)$ . Si verifica facilmente che  $(P_z, P_x; \wedge)$  non soddisfa la condizione di riproducibilità e non è quindi un apparato composto: consideriamo due combinazioni di apparati  $(P_z, P_x; \wedge)_1$  e  $(P_z, P_x; \wedge)_2$  e supponiamo di farle interagire in successione con un certo sistema e che  $(P_z, P_x; \wedge)_1$  risponda *si*; a questo punto il sistema in uscita indipendentemente dallo stato iniziale è descritto dall'autovettore di  $P_x$  all'autovalore 1, abbiamo quindi che la seconda successione di apparati combinati conferma il risultato della prima solo in un quarto dei casi poiché  $P_z$  risponde *si* con probabilità 1/2 sull'autovettore di  $P_x$  all'autovalore 1 e  $P_x$  risponde *si* con probabilità 1/2 sull'autovettore di  $P_z$  all'autovalore 1.

Più in generale dimostriamo che non esiste nessuna combinazione di apparati che è in grado di confermare il risultato di  $(P_z, P_x, \wedge)$  cioè di rispondere *si* se e solo se  $(P_z, P_x, \wedge)$  risponde *si*. Consideriamo una combinazione di apparati  $(P_1, \dots, P_n; L)$ , se vogliamo che confermi il *si* applicata in successione a  $(P_z, P_x; \wedge)$ , deve essere  $n = 1$ ,  $P_1 = P_x$  e  $L(r_1) = r_1$  oppure  $P_1 = P_x$  e  $L(r_1, \dots, r_n) = r_1$ , cioè o la sequenza è costituita solo da  $P_x$  oppure  $P_x$  è il primo e il circuito logico ignora i risultati degli altri apparati, ma dato che la seconda successione è equivalente alla prima consideriamo per semplicità la prima. Ora supponiamo che la prima combinazione di apparati risponda *no*; sono possibili due casi ( $P_z = si, P_x = no$ ) oppure ( $P_z = no, P_x = si$ ), è ovvio che nel secondo caso l'apparato  $P_x$  applicato in successione a  $(P_z, P_x; \wedge)$  non conferma il risultato.

Abbiamo visto in questo esempio che l'uso dei connettivi logici tra i risultati degli esperimenti non sempre definisce un osservabile, nel senso che non è soddisfatta la riproducibilità. Sappiamo dalla meccanica quantistica che ci sono alcuni casi in cui questi connettivi si possono utilizzare per dare origine a degli “apparati composti” che coincidono con la nostra definizione, questi corrispondono ai casi di commutatività delle osservabili. Ci si può chiedere allora, date le proprietà delle osservabili dicotomiche definite precedentemente, in quali casi possiamo assumere che si ottengano degli apparati composti. Supporremo che questa proprietà valga almeno per un insieme di “raffinamenti” successivi, cioè per gli insiemi totalmente ordinati di osservabili. Mostriamo che questo è vero nel caso degli insiemi totalmente ordinati di osservabili quantistiche.

Introduciamo allora il seguente:

**Assioma di componibilità degli apparati ordinati:** data una successione di apparati  $(A_1, \dots, A_n)$ , con  $\{A_1, \dots, A_n\}$  insieme totalmente ordinato rispetto a  $<$ , per ogni circuito logico  $L$ , la combinazione di apparati  $(A_1, \dots, A_n; L)$  è un apparato composto.

La validità di questo assioma può essere verificata sperimentalmente su un insieme di apparati generici, e definisce la classe degli apparati che lo soddisfano. Una verifica

importante dal punto di vista degli obiettivi esposti all'inizio del capitolo è che esso sia soddisfatto nel caso degli apparati (*si/no*) della meccanica quantistica.

### Esempio 2.5.2. Combinazioni di proiettori ortogonali

Mostriamo che tale proprietà vale nel caso dei proiettori ortogonali in uno spazio di Hilbert. Siano  $(P_1, \dots, P_n)$  dei proiettori ortogonali in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  di dimensione  $N > n$ , tali che  $P_i < P_j$  per ogni  $i < j$ , cioè  $P_i P_j = P_j P_i = P_i$  per come abbiamo definito  $<$ . Dato che i  $P_i$  commutano e sono anche proiettori ortogonali esiste una base ortonormale  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$  di autovettori comuni a tutti i  $P_i$  tale che:

$$e_i \in V_0^{(j)}, \quad \text{oppure} \quad e_i \in V_1^{(j)} \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad (2.8)$$

dove  $V_0^{(j)}$  e  $V_1^{(j)}$  sono gli autospazi relativi agli autovalori 0 e 1 per l'operatore  $P_j$ . Supponiamo di partire da un generico stato descritto da un vettore  $v \in \mathcal{H}$ , ignoriamo per ora la questione della normalizzazione dei vettori, e supponiamo di misurare l'osservabile rappresentata da  $P_1$ . Se  $P_1$  risponde *si* abbiamo che

$$v \longrightarrow v_1 = \sum_{e_i \in V_1^{(1)}} (v, e_i) e_i \quad , \quad (2.9)$$

dove con  $(\ , \ )$  indichiamo il prodotto scalare definito su  $\mathcal{H}$ , altrimenti abbiamo

$$v \longrightarrow v_0 = \sum_{e_i \in V_0^{(1)}} (v, e_i) e_i \quad . \quad (2.10)$$

Supponiamo che  $P_1$  abbia risposto *si*. Per la relazione  $<$  vale che  $V_1^{(i)} \subset V_1^{(j)}$  per ogni  $i \leq j$ , quindi le successive applicazioni dei proiettori  $P_2, \dots, P_n$  agiranno come l'identità su  $v_1$ , cioè  $P_n \dots P_2 v_1 = v_1$ . Segue che tutte le misure successive daranno sicuramente *si* come risultato e ripetendo nuovamente la misura di  $P_1$  otteniamo sicuramente *si*. Dato che lo stato rimane  $v_1$  possiamo dire lo stesso anche delle nuove misure di  $P_2, \dots, P_n$ . Supponiamo invece che  $P_1$  abbia risposto *no*, utilizzando la (2.8) possiamo scrivere

$$v_0 = \sum_{e_i \in V_0^{(1)}} (v, e_i) e_i = \sum_{e_i \in V_0^{(1)} \cap V_0^{(2)}} (v, e_i) e_i + \sum_{e_i \in V_0^{(1)} \cap V_1^{(2)}} (v, e_i) e_i \quad ; \quad (2.11)$$

a seconda del risultato della misura di  $P_2$  rimarrà solo la prima o la seconda sommatoria che compaiono nella parte destra della (2.11). Ripetendo questo ragionamento per le misure successive si ottiene che se la misura della sequenza  $P_1, \dots, P_n$  restituisce come risultato la sequenza  $(r_1, \dots, r_n)$ , con  $r_i \in \{0, 1\}$  (con l'ovvia interpretazione in termini di risposte (*si/no*)), sullo stato iniziale  $v$  si ottiene

$$v \longrightarrow v_{fin} = \sum_{e_i \in \bigcap_j V_{r_j}^{(j)}} (v, e_i) e_i. \quad (2.12)$$

È ovvio che tale stato è autovettore di  $P_i$  all'autovalore  $r_i$  per ogni  $i$ , per cui una misura successiva di  $P_i$  conferma il risultato della precedente.

L'assioma di componibilità degli apparati ordinati permette di associare la costruzione degli apparati composti alla costruzione delle algebre booleane dando interpretazioni fisica ai risultati matematici che legano gli insiemi totalmente ordinati alle algebre di Boole. Enunciamo ora due risultati sulle algebre booleane che interpreteremo poi in termini di apparati composti; per evitare di spezzare il discorso che si sta facendo con una lunga parentesi sulle algebre booleane le nozioni necessarie per comprendere questi risultati sono state raccolte nell'appendice A.

**Teorema 2.5.1.** *Sia  $X = \{P_0, \dots, P_n\}$  un insieme totalmente ordinato con  $P_0 < \dots < P_n$ . Allora esiste un'algebra di Boole  $\mathfrak{B}$  e una mappa iniettiva  $f : X \rightarrow \mathfrak{B}$  che conserva la relazione d'ordine, tale mappa è detta immersione. Inoltre esistono un'algebra  $\mathfrak{B}_0$  e un'immersione  $f_0$  tali che per ogni  $\mathfrak{B}$  e  $f$  immersione esiste un omomorfismo iniettivo  $g : \mathfrak{B}_0 \rightarrow \mathfrak{B}$  tale che  $f = g \circ f_0$*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_0} & \mathfrak{B}_0 \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \mathfrak{B} \end{array}$$

$f_0$  è detta immersione canonica.

**Dimostrazione** Sia  $\mathfrak{B}$  un'algebra di Boole con  $n$  atomi  $\{a_1, \dots, a_n\}$  costruiamo  $f$  in questo modo:

$$\begin{aligned} f(P_0) &= \emptyset \\ f(P_1) &= a_1 \\ f(P_2) &= a_1 \cup a_2 \\ &\vdots \\ f(P_n) &= a_1 \cup \dots \cup a_n \end{aligned}$$

Tale  $f$  è iniettiva e conserva la relazione d'ordine infatti  $f(P_0) \subset f(P_1) \subset \dots \subset f(P_n)$ . Inoltre notiamo che la “più piccola” algebra di Boole su cui possiamo definire l'immersione è quella che contiene esattamente  $n$  atomi, tale immersione, che è unica a meno di isomorfismi tra algebre booleane, verrà detta immersione canonica.  $\square$

**Teorema 2.5.2.** *Ogni algebra di Boole finita  $\mathfrak{B}$  contiene un insieme totalmente ordinato di generatori.*

**Dimostrazione** Essendo finita  $\mathfrak{B}$  conterrà  $n$  atomi  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , definiamo allora gli elementi  $A_0, \dots, A_n$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A_0 &= \emptyset, \\ A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 \cup a_2, \\ &\vdots \\ A_n &= a_1 \cup \dots \cup a_n = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Questi elementi formano un insieme totalmente ordinato  $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n$ , inoltre generano tutti gli atomi di  $\mathfrak{B}$  infatti:

$$a_i = A_i \cap A_{i-1}^c$$

sono quindi un insieme totalmente ordinato di generatori per  $\mathfrak{B}$ .  $\square$

Riassumendo, l'inserimento dei connettivi logici tra apparati totalmente ordinati corrisponde all'immersione degli insieme totalmente ordinati in algebre di Boole; vediamo in dettaglio l'interpretazione fisica che collega questa costruzione astratta in termini delle operazioni  $(\cap, \cup, ^c)$  alla costruzione dei nuovi apparati che rappresentano queste relazioni logiche.

Partiamo da un insieme totalmente ordinato di osservabili  $X = \{A_0, \dots, A_n\}$ , supponiamo che  $A_0$  sia l'osservabile che risponde sempre *no* e  $A_n$  quella che risponde sempre *si*, non si perde di generalità poiché se l'insieme non le contiene possiamo sempre aggiungerle senza perdere l'ordinamento totale. I circuiti logici che possiamo applicare sulle sequenze di risultati  $(r_0, \dots, r_n)$  sono esattamente  $2^n$ , infatti le possibili sequenze  $(r_0, \dots, r_n)$  sono  $n$ , per via dell'ordinamento totale (ogni sequenza può essere identificata dal posto in cui si trova il primo *si*, poiché per la definizione di  $<$  sono *si* anche i risultati successivi) e del fatto che  $r_0$  è sempre *no* per la definizione di  $A_0$ , e le funzioni da un insieme di  $n$  elementi in  $\{0, 1\}$  sono  $2^n$ . Per il teorema (2.5.1) esiste un'algebra  $\mathfrak{B}_0$  e un'immersione canonica  $f_0$  di  $X$  in  $\mathfrak{B}_0$ ; notiamo che per costruzione  $\mathfrak{B}_0$  ha  $2^n$  elementi. I circuiti logici possono quindi essere messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di  $\mathfrak{B}_0$ , vediamo di costruire questa corrispondenza. Sia  $b \in \mathfrak{B}_0$ , presi  $\{a_1, \dots, a_n\}$  gli atomi di  $\mathfrak{B}_0$  che entrano nella costruzione di  $f_0$ ,  $b$  si scrive in maniera unica come  $b = \bigcup_{j \in J} a_j$  con  $J \subset \{1, \dots, n\}$ ; notiamo che  $a_i = f(A_i) \cap f(A_{i+1})^c$  e costruiamo il circuito  $L_b(r_0, \dots, r_n) \equiv \bigvee_{i \in J} r_i \wedge r_{i+1}^c$ . Chiamiamo l'insieme degli apparati composti ottenuti in questo modo  $X_c \equiv \{(A_0, \dots, A_n; L_b); b \in \mathfrak{B}_0\}$ ; i suoi elementi sono ancora apparati poiché soddisfano la condizione di riproducibilità per l'assioma di composizione, possiamo quindi estendere a  $X_c$  la relazione d'ordine  $<$  definita sugli apparati. In particolare risulta che  $X \subset X_c$  a meno di equivalenza, infatti per costruzione  $A_i \approx (A_0, \dots, A_n; L_{f_0(A_i)})$ . Per completare la nostra costruzione dobbiamo mostrare che

possiamo definire delle operazioni booleane su  $X_c$  che lo rendono un'algebra di Boole isomorfa a  $\mathfrak{B}_0$ . Ma dato che le operazioni in un'algebra di Boole sono completamente determinate dalla relazione d'ordine parziale, se dimostriamo che per ogni  $b, c \in \mathfrak{B}_0$   $b \subset c \iff (A_0, \dots, A_n; L_b) < (A_0, \dots, A_n; L_c)$  abbiamo finito. Ma questo è ovvio poiché la sequenza che otteniamo dalla prima misura della successione di apparati  $(A_0, \dots, A_n)$  è identica a quella ottenuta dalla successiva misura per l'assioma di componibilità degli apparati ordinati, quindi la relazione  $<$  tra apparati dipende solo dalla relazione d'ordine booleana tra i circuiti logici  $L_b$  e  $L_c$  che è la stessa degli elementi  $b$  e  $c$  di  $\mathfrak{B}_0$ . L'insieme degli apparati ha una struttura di ordine parziale e non totale quindi non si può fare la costruzione appena vista per tutto l'insieme degli apparati. Si potrà fare però per ogni sottinsieme totalmente ordinato dando origine ad un'algebra di Boole parziale, nozione definita nel seguente modo:

**Definizione 2.5.1.** Un insieme  $X$  è detto *algebra di Boole parziale* se esistono dei sottinsiemi  $\mathfrak{B}_i \subset X$ , in generale non disgiunti, tali che  $\bigcup_i \mathfrak{B}_i = X$  e i  $\{\mathfrak{B}_i\}$  sono algebre di Boole tali che :

$$(P_1) \quad A \cap_{\mathfrak{B}_i} B = A \cap_{\mathfrak{B}_j} B \text{ per ogni } i, j \text{ tali che } A, B \in \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_j$$

$$(P_2) \quad A \cup_{\mathfrak{B}_i} B = A \cup_{\mathfrak{B}_j} B \text{ per ogni } i, j \text{ tali che } A, B \in \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_j$$

$$(P_3) \quad A^{c_{\mathfrak{B}_i}} = A^{c_{\mathfrak{B}_j}} \text{ per ogni } i, j \text{ tali che } A \in \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_j$$

Dove  $(\cap_{\mathfrak{B}_i}, \cup_{\mathfrak{B}_i}, c_{\mathfrak{B}_i})$  sono le operazioni di intersezione, unione e complemento nell'algebra  $\mathfrak{B}_i$ . Dato che le operazioni booleane non dipendono dalla particolare algebra che consideriamo indicheremo l'algebra parziale con  $(X, \{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, c)$  o semplicemente con  $(\{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, c)$ .

Ora partendo dal nostro insieme di osservabili con la relazione d'ordine parziale  $<$  possiamo completarlo immergendo gli insiemi totalmente ordinati in algebre booleane, estendere la relazione d'ordine parziale a questi nuovi elementi tramite la relazione d'ordine parziale booleana  $\subset$  e infine quozientare rispetto alla relazione di equivalenza  $\approx$ ; otteniamo così un'algebra di Boole parziale. Rimane da verificare che le proprietà  $(P_1) - (P_3)$  sono soddisfatte. Consideriamo ad esempio  $(P_1)$ : siano  $A, B \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$  e siano  $P_1 < \dots < P_N$  e  $Q_1 < \dots < Q_M$  i generatori rispettivamente di  $\mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B}_2$ . Avremo allora :

$$\begin{aligned} A &\approx (P_1, \dots, P_N; L_A^1) \approx (Q_1, \dots, Q_M; L_A^2) \\ B &\approx (P_1, \dots, P_N; L_B^1) \approx (Q_1, \dots, Q_M; L_B^2). \end{aligned}$$

Segue dalla definizione di  $\approx$  che per la misura di  $(P_1, \dots, P_N)$  si ottiene una sequenza di risultati  $(r_1, \dots, r_N)$  tale che  $L_A^1(r_1, \dots, r_N) = si$  se e solo se il risultato di

una misura successiva o precedente di  $(Q_1, \dots, Q_M)$  è la sequenza  $(r'_1, \dots, r'_M)$  tale che  $L_A^2(r'_1, \dots, r'_M) = si$ ; vale lo stesso discorso per  $B$ . Inoltre se per una sequenza  $(r_1, \dots, r_N)$  vale  $L_A^1(r_1, \dots, r_N) = si$  e  $L_B^1(r_1, \dots, r_N) = si$ , allora vale  $L_{A \cap B}^1(r_1, \dots, r_N) = si$ , e lo stesso per gli  $L_{A,B}^2$ . Da questi due risultati segue che per la misura di  $(P_1, \dots, P_N)$  si ottiene una sequenza di risultati  $(r_1, \dots, r_N)$  tale che  $L_{A \cap B}^1(r_1, \dots, r_N) = si$  se e solo se il risultato di una misura successiva o precedente di  $(Q_1, \dots, Q_M)$  è  $(r'_1, \dots, r'_M)$  tale che  $L_{A \cap B}^2(r'_1, \dots, r'_M) = si$ . Vale quindi:

$$(P_1, \dots, P_n; L_{A \cap B}^1) \approx (Q_1, \dots, Q_M; L_{A \cap B}^2),$$

cioè l'elemento  $A \cap B$  non dipende dalla particolare algebra che utilizziamo per costruirlo.

Lo stesso ragionamento può essere fatto per i punti  $(P_2)$  e  $(P_3)$ .

A questo punto possiamo analizzare le conseguenze del teorema (2.5.2). Se partiamo da un insieme di osservabili dicotomiche che hanno una struttura booleana, si pensi ad esempio ai proiettori commutanti dell'esempio 2.4.3, da questi possiamo estrarre un insieme totalmente ordinato e generare la stessa struttura booleana di partenza tramite il procedimento descritto sopra. In particolare presi due proiettori ortogonali commutanti sappiamo che esiste un'algebra booleana che li contiene entrambi. Tramite questo risultato possiamo dare una definizione di *compatibilità tra apparati composti*, cioè una volta esteso l'insieme di partenza ad un'algebra di Boole parziale, che nel caso dei proiettori ortogonali, cioè le osservabili dicotomiche della meccanica quantistica, coincide con la commutatività.

**Definizione 2.5.2.** Data un'algebra di Boole parziale  $(X, \{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, ^c)$  diremo che due osservabili  $A$  e  $B$  in  $X$  sono *compatibili*, e indicheremo tale relazione con  $A \rightsquigarrow B$ , se esiste un'algebra  $\mathfrak{B}_k$  che le contiene entrambe.

Segue che nel caso di un insieme di osservabili dicotomiche quantistiche che comprende tutti i proiettori ortogonali in uno spazio di Hilbert, la nozione di "compatibilità" definita in termini di algebre di Boole parziali coincide con la nozione di commutatività definita per gli operatori in uno spazio di Hilbert.

## 2.6 Compatibilità: costruzione alternativa

Presenteremo ora una formulazione alternativa della teoria basata su una struttura di algebra di Boole parziale, che fa uso di una relazione di "compatibilità" definibile sugli apparati sperimentali in termini di risultati dei singoli esperimenti.

In generale l'idea che sta dietro l'introduzione della struttura di algebra di Boole parziale



presentata precedentemente, si basa sul fatto che siano identificabili opportuni insiemi di osservabili descrivibili in termini “classici”, cioè con una struttura logica booleana. Il problema che nasce immediatamente è come riconoscere tali osservabili, cioè quali proprietà deve avere una coppia, o più in generale un insieme di osservabili, per essere descritta in termini booleani. Nel caso di osservabili quantistiche questa proprietà corrisponde alla commutatività, e si potrebbe pensare che in termini di apparati sperimentali la commutatività si interpreti come una proprietà del tipo: “misurando in successione  $A$  e  $B$  oppure  $B$  ed  $A$  si ottiene lo stesso risultato”; tale proprietà è verificabile solo in termini statistici, infatti se si vuole riferire ai risultati dei singoli esperimenti si potrebbe esprimere nel seguente modo: “se al posto della misura in successione di  $A$  e  $B$  si fosse effettuata la misura in successione di  $B$  ed  $A$  si sarebbe ottenuto lo stesso risultato” e tale proprietà non è osservabile. Per evitare queste difficoltà abbiamo definito in termini di risultati degli esperimenti una “relazione d’ordine parziale” e, dato che nel caso delle osservabili quantistiche essere “ordinate” implicava commutare, si è presa in considerazione la classe di teorie in cui le osservabili “ordinate” sono descrivibili in termini “classici”. Si è dimostrato che tali osservabili sono sufficienti a generare un’algebra di Boole parziale tramite l’inserimento di connettivi logici booleani tra i risultati degli esperimenti.

Uno dei punti fondamentali di quella costruzione è l’*assioma di componibilità degli apparati ordinati*, che dice sostanzialmente che i risultati della misura di una successione di osservabili ordinate vengono “confermati” da una seconda misura della stessa successione. Ripercorrendo la verifica di tale proprietà nel caso di un insieme totalmente ordinato di proiettori ortogonali ci si rende immediatamente conto che l’unica proprietà utilizzata è il fatto che tali proiettori commutino. A questo punto ci si può chiedere se non si possano definire direttamente le osservabili “compatibili” come quelle per cui è possibile riprodurre i risultati della misura di una loro successione tramite la misura di una successione identica. Un test importante per questa strategia è la verifica che nel caso della meccanica quantistica questa nozione coincida con la commutatività. Una volta verificata questa condizione per la meccanica quantistica, costruiremo in generale una nozione di “apparati compatibili” che danno origine ad “apparati composti”, identificati con le successioni di un numero arbitrario di “apparati compatibili”.

**Definizione 2.6.1.** Dati due apparati dicotomici  $A$  e  $B$ , diremo che  $A$  è *compatibile a sinistra* con  $B$ , o alternativamente che  $B$  è *compatibile a destra* con  $A$ , e lo indicheremo con  $A \rightarrow B$  se in una misura in successione di  $A, B, A$ , indipendentemente dalle misure che si effettuano precedentemente o successivamente a questa sequenza, ottengo sempre uno dei risultati contenuti nella seguente tabella:

$$\begin{array}{c|c|c}
 A & B & A \\
 \hline
 \text{si} & \cdot & \text{si} \\
 \text{no} & \cdot & \text{no}
 \end{array} \tag{2.13}$$

dove con  $\cdot$  abbiamo indicato un qualsiasi risultato della misura di  $B$ . Cioè il risultato della misura di  $A$  viene confermato da un seconda misura di  $A$  anche se tra le due viene misurata l'osservabile  $B$ .

**Definizione 2.6.2.** Dati due apparati dicotomici  $A$  e  $B$ , diremo che  $A$  è *compatibile* con  $B$  se  $A$  è compatibile a destra e a sinistra con  $B$ , o equivalentemente se  $B$  è compatibile a sinistra e a destra con  $A$ , e lo indicheremo con  $A \leftrightarrow B$ . Segue dalla definizione che per due apparati compatibili i possibili risultati di una misura in successione di  $A, B, A, B$  sono contenuti nella seguente tabella:

$A$	$B$	$A$	$B$
si	si	si	si
si	no	si	no
no	si	no	si
no	no	no	no

(2.14)

In particolare per la proprietà di riproducibilità vale  $A \leftrightarrow A$ , cioè la relazione binaria  $\leftrightarrow$  è riflessiva; inoltre osserviamo che tale relazione è simmetrica per costruzione e vale quindi una tabella analoga alla (2.14) in cui si scambiano  $A$  e  $B$ .

Verifichiamo che tale definizione nel caso quantistico è equivalente alla la commutatività;

**Proposizione 2.6.1.** *Date due osservabili quantistiche rappresentate da due proiettori ortogonali  $P, Q$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , la misura in successione (partendo da sinistra) della sequenza  $Q, P, Q, P$  restituisce uno dei risultati contenuti nella tabella (2.14)  $\iff PQ - QP = 0$ , cioè  $P$  e  $Q$  commutano.*

**Dimostrazione** L'implicazione da destra a sinistra segue facilmente dall'esistenza di una base comune di autovettori con un'argomento identico a quello dell'esempio (2.5.2), vediamo allora l'altra.

La condizione espressa dalla tabella (2.14) implica in particolare :

$$\|PQPQ\psi\| = \|PQ\psi\|, \quad \text{per ogni } \psi \in \mathcal{H}, \quad (2.15)$$

cioè se un sistema descritto da uno stato  $\psi$  risponde *si* alle misure in successione  $Q$  e  $P$  sicuramente risponderà *si* se tali misure vengono ripetute nello stesso ordine. Vediamo che la (2.15) è in realtà un'uguaglianza tra vettori e non solo in norma. Per un generico proiettore ortogonale  $R$  su  $\mathcal{H}$  e un generico vettore  $\phi$  vale  $\|R\psi\| \leq \|\psi\|$  e

$$\|R\phi\| = \|\phi\| \quad \iff \quad R\phi = \phi, \quad (2.16)$$

questo si verifica facilmente scrivendo l'espansione di  $\phi$  in autovettori di  $R$ . Nel caso  $PQ$  vale comunque:

$$\|PQPQ\psi\| \leq \|QPQ\psi\| \leq \|PQ\psi\|, \quad (2.17)$$

dalla (2.15) segue che nella (2.17) le relazioni sono di uguaglianza e quindi per la (2.16) vale:

$$PQPQ\psi = QPQ\psi = PQ\psi, \quad \text{per ogni } \psi \in \mathcal{H}. \quad (2.18)$$

Partendo dal fatto che  $PQPQ = PQ$ , cioè che  $PQ$  è un proiettore, vogliamo allora dimostrare che  $PQ - QP = 0$ . Un generico vettore  $\psi \in \mathcal{H}$  può essere scritto come

$$\psi = PQ\psi + (1 - PQ)\psi \equiv \psi_1 + \psi_0. \quad (2.19)$$

Segue dalla definizione che  $\psi_0$  è autovettore di  $PQ$  all'autovalore 0, mentre  $\psi_1$  è autovettore all'autovalore 1. Consideriamo un vettore  $\psi_1$  di norma unitaria, autovettore di  $PQ$  all'autovalore 1; allora

$$(\psi_1, PQ\psi_1) = 1 \implies (P\psi_1, Q\psi_1) = 1 \implies \psi_1 = P\psi_1 = Q\psi_1, \quad (2.20)$$

dove abbiamo utilizzato che  $P = P^*$  nel primo passaggio, e la (2.16) insieme alla disuguaglianza di Schwarz nel secondo; inoltre per la linearità di  $P$  e  $Q$  vale  $P\psi_1 = Q\psi_1 = \psi_1$  indipendentemente dalla norma del vettore  $\psi_1$ , e perciò  $PQ\psi_1 = QP\psi_1$  per ogni autovettore di  $PQ$  all'autovalore 1. Resta da verificare la stessa condizione per gli autovettori  $\psi_0$  all'autovalore 0. Per ogni  $\psi_0$  vale:

$$(PQ\psi_0, \psi_0) = 0 = (\psi_0, QP\psi_0) \implies ((PQ - QP)\psi_0, \psi_0) = 0 \quad (2.21)$$

A questo punto possiamo calcolare  $PQ - QP$  su un generico vettore  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ :

$$\begin{aligned} ((QP - PQ)(\psi_0 + \psi_1), \psi_0 + \psi_1) &= ((QP - PQ)\psi_0, \psi_0 + \psi_1) = \\ &= -(\psi_0, (QP - PQ)(\psi_0 + \psi_1)) = \\ &= (\psi_0, (QP - PQ)\psi_0) = 0. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  segue che  $PQ - QP = 0$ , cioè  $P$  e  $Q$  commutano.  $\square$

In particolare nel caso quantistico la nozione di “compatibilità” definita tramite la tabella (2.14) è generalizzabile al caso di  $n$  osservabili dicotomiche “compatibili” a coppie, cioè dati  $n$  proiettori ortogonali  $P_1, \dots, P_n$  commutanti a coppie (o equivalentemente: per cui la misura in successione di ogni coppia restituisce uno dei risultati contenuti nella tabella (2.14)), risulta che la sequenza di risultati ottenuti misurando in successione  $P_1, \dots, P_n$  viene “confermata” da una seconda misura della stessa successione; la dimostrazione è identica alla verifica dell'assioma di componibilità degli apparati ordinati (esempio 2.5.2).

Nello stesso spirito della costruzione fatta a partire dagli insiemi totalmente ordinati di apparati, cioè partendo dalle proprietà delle osservabili quantistiche e generalizzando ad osservabili definite da apparati (*si/no*), possiamo procedere alla costruzione di

un'algebra di Boole parziale a partire dalla definizione di compatibilità data precedentemente. Sappiamo infatti (esempio 2.4.3) che un insieme di osservabili dicotomiche quantistiche, cioè di proiettori ortogonali, compatibili a coppie secondo la definizione (2.6.2), cioè commutanti a coppie, generano tramite l'introduzione di connettivi logici booleani un'algebra di Boole. Questa è una proprietà fondamentale per la costruzione dell'algebra di Boole parziale che non segue dalla definizione (2.6.2), è quindi necessario richiedere che gli apparati la soddisfino. Le teorie probabilistiche per cui vale sono caratterizzate dal seguente:

**Assioma di composizione di apparati compatibili:** data una successione di apparati  $(A_1, \dots, A_n)$  tali che  $A_i \leftrightarrow A_j$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ , la combinazione di apparati  $(A_1, \dots, A_n; L)$  è un apparato composto per ogni circuito logico  $L$ .

Questo assioma permette di costruire un'algebra di Boole parziale di apparati procedendo in modo simile alla costruzione fatta a partire dall'assioma di componibilità degli apparati ordinati: si aggiungono gli apparati composti costruiti tramite i circuiti logici tra compatibili, cioè si inseriscono connettivi booleani tra i risultati di misure "riproducibili" di successioni di apparati, gli apparati composti così costruiti formano algebre booleane; si estende ad essi la relazione d'ordine parziale  $<$  tramite la relazione d'ordine parziale booleana  $\subset$  e si quozienta rispetto alla relazione di equivalenza  $\approx$ . Si ottiene così un'algebra di Boole parziale, la verifica delle proprietà  $(P_1), (P_2), (P_3)$  è identica a quella fatta in per la costruzione tramite apparati ordinati.

Osserviamo però che l'algebra di Boole parziale che si costruisce a partire da un certo insieme di osservabili inserendo i connettivi logici tra le osservabili compatibili secondo la definizione (2.6.2) ha in generale più elementi rispetto a quella che si costruisce a partire dallo stesso insieme, ma inserendo i connettivi logici solo tra gli insiemi totalmente ordinati di osservabili. Questo perché per l'assioma di componibilità degli apparati ordinati segue che essi sono compatibili secondo la definizione (2.6.2), mentre in generale due apparati compatibili secondo la definizione (2.6.2) non sono ordinati. Le due costruzioni coincidono solo nel caso in cui per ogni algebra booleana che costituisce l'algebra di Boole parziale costruita a partire dalla relazione  $\leftrightarrow$  esiste un insieme totalmente ordinato di generatori presente nell'insieme delle osservabili di partenza, cioè non ottenuto come apparato composto, ci sono cioè nell'insieme di partenza abbastanza insiemi totalmente ordinati di osservabili per generare l'algebra di Boole parziale che si ottiene a partire dall'introduzione dei connettivi logici tra le osservabili compatibili secondo la definizione (2.6.2). Rientra in questo caso la meccanica quantistica infatti le due costruzioni coincidono se si prende in considerazione come insieme di osservabili di partenza tutti i proiettori ortogonali su uno spazio di Hilbert, cioè tutte le osservabili dicotomiche quantistiche per un certo sistema.

Per la maggiore generalità della costruzione della struttura booleana parziale a partire dalla relazione  $\leftrightarrow$ , assumeremo nel seguito che la struttura di algebra di Boole parziale

che consideriamo sia stata ottenuto a partire da questa costruzione, cioè che tutte e sole le coppie di compatibili nel senso della definizione (2.6.2) sono quelle per cui esiste un'algebra di Boole che le contiene, e indicheremo la relazione di compatibilità col simbolo  $\leftrightarrow$ .

Uno potrebbe chiedersi che utilità abbia presentare la costruzione basata sulla relazione d'ordine  $<$  se quella basata sulla relazione di compatibilità è più generale. Lo scopo di tale presentazione è quello di dare un fondamento alle strutture booleane parziali su basi empiriche e indipendentemente dal formalismo della meccanica quantistica. Entrambe le costruzioni sono quindi valide per questo scopo e mostrano due differenti soluzioni possibili del problema, infatti in un caso si assume la validità dell'assioma di componibilità degli apparati ordinati, mentre nell'altro la validità dell'assioma di componibilità degli apparati compatibili; se si è interessati esclusivamente al caso quantistico sappiamo che entrambi gli assiomi sono verificati, ma se si vuole discutere una generalizzazione della teoria della probabilità basata sulle teorie probabilistiche contestuali le differenze nelle ipotesi alla base delle due costruzioni possono essere rilevanti.

## 2.7 Probabilità su algebre di Boole parziali

Ci si può chiedere a questo punto in che modo entra il concetto di probabilità in questa discussione. Sappiamo che fissata una certa “preparazione” di un sistema fisico su cui effettuare una misura di un'osservabile, il suo risultato in generale non è determinabile prima che la misura venga effettuata. Ciò significa che ripetendo la misura su sistemi che hanno subito la stessa “preparazione” avremo diversi risultati possibili, il limite a cui tende la frequenza relativa di un certo risultato  $r$  per infinite ripetizioni dell'esperimento in cui misuro l'osservabile  $A$  viene detto *probabilità* di ottenere  $r$  per la misura di  $A$ . Nelle teorie della probabilità generalizzata che stiamo costruendo abbiamo quindi una “lista” di possibili esperimenti e a ciascuno vogliamo associare una probabilità di ottenere un certo risultato. La struttura che abbiamo introdotto per questa “lista” di esperimenti è quella di algebra di Boole parziale, alla base di questo c'è l'idea che restringendosi ad opportuni insiemi si dovessero ottenere delle relazioni logiche booleane (classiche), ora applichiamo la stessa idea al caso della probabilità.

**Definizione 2.7.1.** Data un'algebra parziale  $(X, \{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, c)$  definiamo *stato contestuale* un'attribuzione  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , tale  $f|_{\mathfrak{B}_i}$  è una misura normalizzata su  $\mathfrak{B}_i$ . Equivalentemente potremmo dire che uno stato contestuale su un'algebra di Boole parziale  $(X, \{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, c)$  è una collezione di *misure normalizzate compatibili*, o *misure di probabilità compatibili*  $\{f|_{\mathfrak{B}_i}\}$ , nel senso che due misure coincidono sull'intersezione delle algebre su cui sono definite.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per definire una teoria probabilistica contestuale:

**Definizione 2.7.2.** Una *teoria probabilistica contestuale* è definita una coppia  $((X, \{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, ^c), f)$  dove  $(X, \{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, ^c)$  è un'algebra di Boole parziale e  $f$  uno stato contestuale definito su di essa.

## 2.8 Conclusioni

L'interesse per le strutture booleane parziali nasce sostanzialmente dal risultato di Gleason [12], per il quale, come è stato discusso nel capitolo 1, le strutture booleane parziali della meccanica quantistica non solo impediscono una sua interpretazione in termini di probabilità classiche, ma determinano completamente la struttura delle possibili statistiche definibili su di esse.

Nello stesso spirito della critica di Bell a Von Neumann discussa nel capitolo 1, riteniamo decisivo riconoscere che le interpretazioni della meccanica quantistica devono confrontarsi non con il suo formalismo, ma con le sue previsioni sperimentali. Ogni "riformulazione" o "estensione" della meccanica quantistica deve mantenere le sue predizioni ma non necessariamente il suo formalismo. Dato che queste previsioni hanno una struttura di algebra di Boole parziale, si deve concludere che il problema del loro fondamento sperimentale è stato sottovalutato. In questo capitolo abbiamo analizzato la possibilità di tale fondamento in due modi indipendenti. Inoltre, come vedremo nel prossimo capitolo, il problema di un "completamento" delle predizioni della meccanica quantistica posto in questi termini dà origine a problemi e risultati che hanno conseguenze importanti sulla sua interpretazione e che verranno discussi nell'ultimo capitolo.

## Capitolo 3

# I problemi di estendibilità delle strutture booleane parziali

Abbiamo introdotto nel capitolo 2 una generalizzazione della teoria della probabilità classica basata sulla struttura di algebra di Boole parziale; tale struttura generalizza inoltre anche la struttura delle predizioni della meccanica quantistica poiché le proprietà che la definiscono sono soddisfatte in particolare dalle osservabili dicotomiche quantistiche.

L'argomento di questo capitolo sarà l'analisi delle possibilità di estendere questa struttura booleana parziale a struttura booleana, discuteremo cioè in quali casi queste teorie probabilistiche contestuali sono "completabili" a teorie probabilistiche classiche e più in generale analizzeremo la possibilità di una riduzione del numero di contesti. Tali estensioni verranno discusse in termini generali e in maniera indipendente dalla meccanica quantistica; in alcuni casi però sarà utile fare esempi espliciti con osservabili quantistiche oppure collegare i risultati ottenuti a particolari situazioni fisiche e alla descrizione che ne dà la meccanica quantistica poiché alcune possibilità di estensione saranno alla base della discussione sui tentativi di interpretazione della meccanica quantistica che verrà fatta nel capitolo 4.

### 3.1 Algebre

Cominciamo discutendo l'estensione da algebra parziale ad algebra, ci chiediamo cioè se, data un'algebra di Boole parziale  $(\{\mathfrak{B}_i\}, \cap, \cup, ^c)$ , esista un'algebra di Boole  $(\mathfrak{B}, \cap, \cup, ^c)$  che contenga le  $\mathfrak{B}_i$  come sottoalgebre.

Vediamo come primi esempi due casi in cui questa estensione è possibile. L'esistenza di queste particolari algebre booleane che completano le strutture di algebre parziali sarà fondamentale per affrontare in seguito il problema dell'estensione delle *collezioni di misure di probabilità* definite su tali algebre e in particolare per discutere i risultati

di Bell.

**Esempio 3.1.1.** Consideriamo uno spazio di Hilbert bidimensionale e un insieme di osservabili costituito da  $0, 1$  e  $N$  proiettori ortogonali  $P_1, \dots, P_N$  che soddisfano le condizioni  $P_i \neq 0, P_i \neq 1 \quad \forall i$  e  $P_i \neq P_j, P_i + P_j \neq 1 \quad \forall i, j$ . Cioè sono diversi da 0 e dall'identità, sono tutti distinti e non sono uno il complemento dell'altro. In termini di apparati sperimentali potremmo identificarli ad esempio con delle misure di spin in  $N$  direzioni diverse per una particella di spin  $1/2$ . Gli insiemi totalmente ordinati (massimali) che otteniamo da questi elementi sono esattamente  $N$ :  $I_i = \{0, P_i, 1\}$ . Ognuno genera un'algebra di quattro elementi  $\mathcal{A}_i = \{0, P_i, 1 - P_i, 1\}$ . Queste algebre sono contenute come sottoalgebre nell'algebra di Boole libera generata dagli elementi  $\{P_1, \dots, P_N\}$  presi come generatori liberi. La particolarità del caso in dimensione due è che, date due algebre  $\mathcal{A}_i$  e  $\mathcal{A}_j$ ,  $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \{0, 1\}$ , quindi non esistono "relazioni booleane" tra i  $P_i$ , e in un certo senso possiamo considerarli come "elementi indipendenti".

**Esempio 3.1.2.** Consideriamo ora due spazi di Hilbert bidimensionali  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  e il loro prodotto tensoriale  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Consideriamo i proiettori ortogonali  $P_1, \dots, P_N$  che agiscono su  $\mathcal{H}_1$  e i proiettori ortogonali  $Q_1, \dots, Q_M$  che agiscono su  $\mathcal{H}_2$  e soddisfano le stesse condizioni dell'esempio precedente cioè  $P_i \neq 0_1, P_i \neq 1_1 \quad \forall i$  e  $P_i \neq P_j, P_i + P_j \neq 1_1 \quad \forall i, j$ ,  $Q_i \neq 0_2, Q_i \neq 1_2 \quad \forall i$  e  $Q_i \neq Q_j, Q_i + Q_j \neq 1_2 \quad \forall i, j$ . Il nostro insieme di osservabili sarà  $\{0, 1, \dots, P_i, \dots, Q_j, \dots, P_i Q_j \dots\}$ . In termini di apparati sperimentali ciascun osservabile si può interpretare come due misure di spin su due particelle di spin  $1/2$  in  $N$  possibili direzioni per una e  $M$  possibili direzioni per l'altra.

Gli insiemi totalmente ordinati (massimali) che si ottengono da queste osservabili sono della forma  $0 < P_i Q_j < P_i < (P_i + Q_j - P_i Q_j) < 1$  oppure  $0 < P_i Q_j < Q_j < (P_i + Q_j - P_i Q_j) < 1$ . Si verifica che, fissati  $i, j$ , i due insiemi così identificati danno origine alla stessa algebra booleana di 16 elementi (poiché per  $n$  generatori liberi abbiamo  $2^{2^n}$  elementi):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij} = \{ & 0, 1, P_i, 1 - P_i, Q_j, 1 - Q_j, P_i Q_j, P_i(1 - Q_j), (1 - P_i)Q_j, (1 - P_i)(1 - Q_j), \\ & 1 - P_i Q_j, 1 - P_i(1 - Q_j), 1 - (1 - P_i)Q_j, 1 - (1 - P_i)(1 - Q_j), \\ & (1 - (1 - P_i)Q_j)(1 - P_i(1 - Q_j)), 1 - (1 - (1 - P_i)Q_j)(1 - P_i(1 - Q_j)) \} \end{aligned}$$

Anche in questo caso le algebre  $\mathcal{A}_{ij}$  si possono identificare con sottoalgebre di un'algebra libera che è quella generata da  $\{P_1, \dots, P_N, Q_1, \dots, Q_M\}$  presi come generatori liberi.

Vediamo ora un esempio in cui l'algebra di Boole parziale delle osservabili non può essere completata ad un'algebra di Boole, che mostra che per algebre parziali "abbastanza ricche" il completamento ad algebra booleana non è possibile.



**Esempio 3.1.3.** Consideriamo l'insieme  $X = \{P_1, \dots, P_{117}\}$  dei 117 proiettori ortogonali corrispondenti ai 117 vettori del teorema di Kochen-Specker [13]; il discorso è identico se si considerano ad esempio i 33 vettori della dimostrazione di Peres [22] o quelli di un'altra qualunque dimostrazione. Tali proiettori rappresentano delle misure del quadrato dello spin lungo 117 (o 33) direzioni per una particella di spin 1; hanno inoltre la caratteristica che per ogni terna di direzioni ortogonali  $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$  i corrispondenti proiettori commutano e soddisfano  $P_1 + P_2 + P_3 = 2$ , questo implica che in una base comune di autovettori essi sono rappresentati da matrici che hanno uno 0 e due 1 sulla diagonale. Sia  $S = \{ \{i, j, k\} \mid P_i, P_j, P_k \text{ commutano tra loro} \}$ . La struttura di algebra parziale è data dalla collezione di algebre  $\mathcal{A}_{ijk}$  con  $\{i, j, k\} \in S$ , dove  $\mathcal{A}_{ijk}$  è l'algebra booleana generata dai proiettori commutanti  $\{P_i, P_j, P_k\}$ . Osserviamo inoltre che per ogni  $\{i, j, k\} \in S$  vale:

$$P_i^c \cap P_j^c = P_i^c \cap P_k^c = P_j^c \cap P_k^c = \emptyset_{\mathcal{A}_{ijk}} \quad (3.1)$$

$$P_i \cap P_j \cap P_k = \emptyset_{\mathcal{A}_{ijk}}. \quad (3.2)$$

Ora supponiamo esista un'algebra di Boole  $\mathcal{A}$  generata da  $X$  tale che le  $\mathcal{A}_{ijk}$  siano sottoalgebre per ogni  $\{i, j, k\} \in S$ . Essendo un'algebra finita è atomica, quindi per il lemma (A.2.1) posso costruire almeno una misura moltiplicativa che fa 0 sugli elementi che compaiono nella (3.1) e nella (3.2), perché le  $\mathcal{A}_{ijk}$  sono sottoalgebre quindi  $\emptyset_{\mathcal{A}_{ijk}} = \emptyset_{\mathcal{A}}$ , ma questo è in contraddizione col teorema di Kochen-Specker. Infatti se esistesse tale misura potrei assegnare un valore  $\{0, 1\}$  ai  $P_i$  in maniera "globale" (cioè indipendentemente dalla terna in cui li considero) rispettando la condizione che per ogni terna assegno ad uno il valore 0 e a due il valore 1, che è equivalente alle (3.1) e (3.2). Ma per il teorema di Kochen-Specker tale assegnazione non è possibile e quindi non esiste un'algebra di Boole che contiene le  $\mathcal{A}_{ijk}$  come sottoalgebre.

Non siamo a conoscenza di criteri generali che determinano la possibilità di estensione di un'algebra di Boole parziale ad un'algebra di Boole, tuttavia gli esempi mostrano alcune situazioni interessanti poiché sono collegate ai risultati di Bell e Kochen-Specker. In particolare i primi due esempi sono sufficienti a discutere la possibilità di rappresentabilità classica nel caso dello spin 1/2 e saranno fondamentali nella discussione del significato fisico delle disuguaglianze di Bell che faremo nel capitolo successivo.

## 3.2 Misure

Partendo dai risultati ottenuti negli esempi (3.1.1) e (3.1.2) possiamo vedere in quali casi misure definite su alcune sottoalgebre possono essere estese ad una misura globale sull'algebra.

Prima di analizzare gli esempi citati abbiamo bisogno di alcuni risultati sulle misure.

Prima di tutto introdurremo un criterio di estendibilità basato sulla costruzione esplicita della misura normalizzata come combinazione convessa di misure moltiplicative, che è essenzialmente il metodo del politopo di correlazione di Pitowsky introdotto in [1]. Questo ci permetterà di discutere casi semplici (algebre generate da 3 e 4 osservabili) che hanno però importanza dal punto di vista fisico poiché sono legati alle disuguaglianze di Bell e al problema della “località”. Successivamente discuteremo alcuni risultati più generali dovuti a Tarski e Horn [29] che ci garantiranno l’estendibilità di misure definite su un numero arbitrario di osservabili, purché con una certa struttura.

### 3.2.1 Politopi di correlazione

Nella discussione dell’origine delle disuguaglianze di Boole-Bell fatta nel capitolo 1 abbiamo introdotto la nozione di *politopo di correlazione*. Utilizzando le stesse idee alla base dell’introduzione di tale nozione in [1], si ottiene un criterio per l’esistenza di estensioni di funzioni, definite su un’algebra di Boole e a valori nell’intervallo  $[0, 1]$ , a misure sull’intera algebra.

Ricordiamo il risultato fondamentale sulla possibilità di interpretazione probabilistica (classica) per delle attribuzioni di valori in  $[0, 1]$  ad un insieme di proposizioni e congiunzioni logiche tra di esse [1]:

**Teorema 3.2.1.** *Date  $n$  proposizioni atomiche  $a_1, \dots, a_n$  e dei numeri positivi  $p_1, \dots, p_n, \dots, p_{ij}, \dots$ ,  $\{ij\} \in S \subset \{ \{ij\} \mid 1 \leq i < j \leq n \}$ , associati alle  $a_i$  e ad alcune congiunzioni logiche tra di esse,  $(a_i \text{ e } a_j)$  con  $\{ij\} \in S$ , esiste uno spazio di probabilità  $(X, \Sigma, \mu)$  e  $n$  eventi  $A_1, \dots, A_n$ , tali che*

$$\mu(A_i) = p_i \quad \mu(A_i \cap A_j) = p_{ij},$$

*se e solo se, dati i  $2^n$  vettori  $u_\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_i \varepsilon_j, \dots)$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$  che rappresentano tutti le possibili assegnazioni di un valore di verità alle proposizioni atomiche  $a_i$  e alle loro congiunzioni logiche  $(a_i \text{ e } a_j)$ ,  $\{ij\} \in S$ , il vettore  $(p_1, \dots, p_n, \dots, p_{ij}, \dots)$  si ottiene da una combinazione convessa dei vettori  $u_\varepsilon$ .*

Sempre nel capitolo 1 abbiamo anche affermato che esiste una corrispondenza tra calcolo proposizionale e algebre di Boole libere, ottenuta tramite l’identificazione delle *proposizioni atomiche* con i *generatori liberi*, dei *connettivi logici* (*e, o, non*) con le operazioni booleane  $(\cap, \cup, ^c)$ , e delle *assegnazioni di un valore di verità* alle proposizioni con le *misure moltiplicative* sull’algebra.

Partendo da questa corrispondenza “tradurremo” il criterio del *politopo di correlazione* di Pitowsky nel linguaggio delle algebre di Boole.

Partiamo dal lemma (A.2.2) discusso nell'appendice A e osserviamo che da questo possiamo ottenere un criterio di estendibilità a misure normalizzate per funzioni definite su un sottoinsieme di elementi di un'algebra.

Sia  $\mathfrak{B}$  un'algebra finita con  $\{a_1, \dots, a_k\}$  atomi e sia  $X \subset \mathfrak{B}$  un sottoinsieme di elementi. Consideriamo una funzione  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , allora  $f$  ammette estensione ad una misura normalizzata  $\mu$  su  $\mathfrak{B}$  se e solo esistono  $k$  numeri  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , con  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , tali che

$$f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_{a_i}|_X \quad (3.3)$$

e  $\mu$  è data da:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta_{a_i} \quad (3.4)$$

In pratica le attribuzioni di valori in  $[0, 1]$  agli elementi dell'algebra hanno un'interpretazione probabilistica se e solo se questi valori vengono da una combinazione convessa delle misure moltiplicative. Questa costruzione è legata al concetto di politopo di correlazione e il legame sarà reso più esplicito dal seguente:

**Lemma 3.2.1.** *Sia  $\mathfrak{B}$  un'algebra generata da  $n$  generatori liberi  $\mathcal{G} = \{A_1, \dots, A_n\}$  e consideriamo un  $X \subset \mathfrak{B}$  con  $X = \{A_1, \dots, A_n, \dots, A_i \cap A_j, \dots, A_i \cap A_j \cap A_k, \dots\}$ , cioè  $X = \mathcal{G} \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ ,  $m \leq n$ , dove gli elementi di  $S_l$  sono le intersezioni di  $l$  generatori distinti, ma non necessariamente tutte le possibili cioè  $|S_l| \leq \binom{n}{l}$ . Ora consideriamo  $f : X \rightarrow [0, 1]$  e definiamo il vettore*

$$p = (p_1, \dots, p_n, \dots, p_{ij}, \dots, p_{i_1 \dots i_m}, \dots) \in \mathbb{R}^{|X|}$$

che ha come componenti i valori che assume  $f$  su  $X$  cioè:

$$p_i = f(A_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$p_{ij} = f(A_i \cap A_j), \quad A_i \cap A_j \in S_2 \text{ ottenere come}$$

...

$$p_{i_1 \dots i_m} = f(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}), \quad A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \in S_m.$$

Per ogni  $\varepsilon \in \{0, 1\}^m$  definiamo il vettore  $u_\varepsilon \in \{0, 1\}^{|X|}$  dato da

$$u_\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_i \varepsilon_j, \dots, \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \dots \varepsilon_{i_m}, \dots)$$

cioè per ogni componente  $p_{i_1 \dots i_k}$  di  $p$  c'è una corrispondente componente di  $u_\varepsilon$  data da  $\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k}$ .

Allora  $f$  ammette estensione a misura normalizzata su  $\mathfrak{B}$  se e solo se esistono  $2^n$  numeri  $\lambda(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in \{0, 1\}^n$ , tali che:

$$p = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) u_\varepsilon$$

con  $\lambda(\varepsilon) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \in \{0, 1\}^n, \quad e \quad \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) = 1$

### Dimostrazione

Data un'algebra libera con  $n$  generatori liberi sappiamo dal lemma (A.2.3) che essa ha  $2^n$  atomi che sono in corrispondenza biunivoca con gli  $\varepsilon \in \{0, 1\}^n$ . La condizione di estendibilità (3.3) si può riscrivere

$$f = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i (\delta_{a_i})|_X = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) (\delta_{a_\varepsilon})|_X \quad (3.5)$$

Ora basta mostrare che verificare questa condizione per ogni elemento di  $X$  è equivalente a verificare che il vettore  $p$  sia combinazione convessa degli  $u_\varepsilon$ . Infatti ci ricordiamo che  $\delta_{a_\varepsilon}(A_i) = \varepsilon_i$  e, dato che si tratta di misure moltiplicative,  $\delta_{a_\varepsilon}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k}$ , quindi:

$$p_i = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) \varepsilon_i \iff f(A_i) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) \delta_{a_\varepsilon}(A_i) \quad i = 1, \dots, n,$$

$$p_{ij} = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) \varepsilon_i \varepsilon_j \iff f(A_i \cap A_j) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) \delta_{a_\varepsilon}(A_i \cap A_j), \quad A_i \cap A_j \in S_2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$p_{i_1 \dots i_m} = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_m} \iff f(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \lambda(\varepsilon) \delta_{a_\varepsilon}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}),$$

$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \in S_m \quad . \quad \square$

L'involuppo convesso di  $k$  vettori in  $\mathbb{R}^N$  è detto *politopo convesso*; nel caso particolare delle combinazioni convesse dei vettori  $u_\varepsilon$ , poiché gli elementi  $A_i$  si interpretano come "osservabili" e le componenti del vettore  $p$  come "correlazioni", si parla di *politopo di correlazione* e verrà indicato con  $C(n, S_2, \dots, S_m)$ .

Nei casi in cui l'insieme  $X$  ha la particolare forma del lemma (3.2.1) la condizione di estendibilità richiede che il vettore  $p$ , costruito con i valori assunti da  $f$  su  $X$  (cioè le correlazioni a 2, 3, ecc), sia all'interno del politopo generato dai vettori  $u_\varepsilon$ ; ricordiamo che per il teorema di Weyl-Minkowski discusso nel capitolo 1 tale condizione è espressa

da disuguaglianze lineari tra i valori assunti da  $f$  su  $X$ .

Nei casi che esamineremo l'insieme  $X$  avrà anche una struttura di unione di sottoalgebre per cui la  $f$  non sarà semplicemente una funzione, ma sarà data da misure su certe sottoalgebre. Per la difficoltà della trattazione generale ci accontentiamo per ora di questo criterio ed esamineremo questa struttura di misura sulle sottoalgebre caso per caso. Vedremo che per i casi più semplici ci potremmo ricondurre a un  $X$  della forma  $X = \mathcal{G} \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$  e la struttura di misura su alcune sottoalgebre ci servirà per ottenere delle disuguaglianze tra le componenti del vettore  $p$ . Mostriamo invece nel seguito come la struttura di misura sulle sottoalgebre sia fondamentale per il criterio di estendibilità basato sulle *misure parziali secondo Tarski e Horn*.

**Osservazione 3.2.1.** Questa interpretazione geometrica del criterio di estendibilità per le misure ci permette di discutere l'unicità di tale estensione. Ci potremmo aspettare l'unicità, per ogni  $f$ , se introduciamo negli insiemi  $S_k$  tutte le possibili intersezioni tra i generatori liberi, cioè se per ogni  $k$  vale  $|S_k| = \binom{n}{k}$ , avremo quindi  $|X| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1$ . Questo perché le combinazioni convesse sono in particolare combinazioni affini e condizione sufficiente affinché la combinazione sia unica, in questo caso particolare in cui il primo vettore  $u_\varepsilon$  è  $(0, \dots, 0)$ , è che i restanti vettori siano linearmente indipendenti. Poiché i vettori  $u_\varepsilon$  sono  $2^n$ , condizione necessaria per la loro indipendenza lineare è che abbiano  $2^n - 1$  componenti. Tale condizione potrebbe anche essere sufficiente nel caso generale, ma la dimostrazione non è ovvia; per il seguito è sufficiente mostrarlo per il caso particolare  $n = 2$ . La dimostrazione è molto semplice basta scrivere esplicitamente i vettori  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \{0,1\}^2} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  e notare che gli ultimi tre sono linearmente indipendenti.

Quindi nel caso  $X = \{A_1, A_2, A_1 \cap A_2\}$ , se  $f : X \rightarrow [0, 1]$  ammette estensione a misura sull'algebra con generatori liberi  $\{A_1, A_2\}$  tale estensione è unica.

Il seguente teorema, il cui significato fisico verrà analizzato più in dettaglio nel prossimo capitolo, mostra essenzialmente che per tre osservabili è sempre possibile una rappresentazione probabilistica classica comunque siano date le possibili relazioni di compatibilità tra esse; la tecnica di dimostrazione è basata sull'analisi del politopo di Bell-Wigner fatta da Pitowsky in [1]. Invece il teorema (3.2.3) mostra che per quattro osservabili  $f$  è estendibile, cioè esiste una rappresentazione probabilistica, se esistono estensioni parziali di  $f$  a tre osservabili che coincidono sull'intersezione; un risultato molto simile, anche se espresso in termini diversi, si deve a Fine [30].

**Teorema 3.2.2.** Sia  $\mathfrak{B}$  un'algebra con generatori liberi  $\mathcal{G} = \{A_1, A_2, A_3\}$  e  $\mathfrak{B}_{13}$  e  $\mathfrak{B}_{23}$  le sottoalgebre generate rispettivamente da  $\{A_1, A_3\}$  e  $\{A_2, A_3\}$ .

Sia  $f : \mathfrak{B}_{13} \cup \mathfrak{B}_{23} \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f|_{\mathfrak{B}_{13}}$  e  $f|_{\mathfrak{B}_{23}}$  siano misure normalizzate sulle sottoalgebre. Allora  $f$  ammette estensione a una misura normalizzata sull'algebra  $\mathfrak{B}$ .

**Dimostrazione** Senza perdere di generalità possiamo considerare  $f : X = \{A_1, A_2, A_3, A_1 \cap A_3, A_2 \cap A_3\} \rightarrow [0, 1]$  perché per l'osservazione precedente  $f$  si estende in modo unico ad una misura sulle sottoalgebre  $\mathfrak{B}_{13}$  e  $\mathfrak{B}_{23}$ . Costruiamo il vettore  $p = (p_1, p_2, p_3, p_{13}, p_{23})$ , dato da  $p_i = f(A_i)$  e  $p_{ij} = f(A_i \cap A_j)$ , e utilizziamo il fatto che  $f$  è una misura se ristretta a  $\mathfrak{B}_{13}$  e  $\mathfrak{B}_{23}$ . Otteniamo:

$$p_{13} \leq \min\{p_1, p_3\} \quad p_{23} \leq \min\{p_2, p_3\} \quad (3.6)$$

dalla relazione di inclusione, mentre da

$$0 \leq f((A_i \cup A_j)^c) = 1 - f(A_i \cup A_j) = 1 - f(A_i) - f(A_j) + f(A_i \cap A_j), \quad \{ij\} = \{13\} \quad o \quad \{23\}$$

otteniamo

$$p_1 + p_3 - p_{13} \leq 1, \quad p_2 + p_3 - p_{23} \leq 1 \quad (3.7)$$

Introduciamo ora due coefficienti  $\chi$  e  $\eta$  che entreranno nella costruzione della combinazione convessa degli  $u_\varepsilon$  e parametrizzeranno tutte le possibili estensioni di  $f$ .

$$\eta \leq \min\{p_{13}, p_{23}\} \quad (3.8)$$

$$\eta \geq \max\{0, p_{13} + p_{23} - p_3\} \quad (3.9)$$

$$\chi \leq \min\{p_1 - p_{13}, p_2 - p_{23}\} \quad (3.10)$$

$$\chi \geq \max\{0, p_1 + p_2 + p_3 - p_{13} - p_{23} - 1\}. \quad (3.11)$$

Utilizzando le (3.6) e (3.7) si verifica facilmente che ogni numero che compare nel  $\min\{\dots\}$  della (3.8) è maggiore o uguale di ogni numero che compare nel  $\max\{\dots\}$  della (3.9) e lo stesso per le (3.10) e (3.11). Segue che le (3.8) – (3.11) definiscono due intervalli non vuoti e scelgo  $\eta$  e  $\chi$  all'interno di tali intervalli.

Ora possiamo scrivere i coefficienti  $\lambda(\varepsilon)$ :

$$\lambda(0, 0, 0) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 - p_{13} - p_{23}) + \chi$$

$$\lambda(1, 0, 0) = p_1 - p_{13} - \chi,$$

$$\lambda(0, 1, 0) = p_2 - p_{23} - \chi,$$

$$\lambda(0, 0, 1) = \eta + p_3 - p_{13} - p_{23},$$

$$\lambda(1, 1, 0) = \chi,$$

$$\lambda(1, 0, 1) = p_{13} - \eta,$$

$$\lambda(0, 1, 1) = p_{23} - \eta,$$

$$\lambda(1, 1, 1) = \eta.$$

A questo punto si verifica dalle definizioni di  $\chi$  e  $\eta$  e dei  $\lambda(\varepsilon)$  che:

$$\lambda(\varepsilon) \geq 0 \quad \text{per ogni } \varepsilon \in \{0, 1\}^3 \quad e \quad \sum_{\varepsilon \in \{0, 1\}^3} \lambda(\varepsilon) = 1$$

Si verifica altrettanto facilmente che  $\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda(\varepsilon) u_\varepsilon = p$ . Basta allora applicare il lemma (3.2.1) e abbiamo finito.  $\square$

**Osservazione 3.2.2.** Dal teorema segue che la rappresentazione probabilistica esiste sempre anche per i casi in cui le tre osservabili siano tutte non compatibili, oppure sia compatibile solo una coppia, il caso in cui tutte e tre siano compatibili è ovvio poiché sappiamo per il discorso fatto nel capitolo 1 che le aspettative della meccanica quantistica vengono da una misura di probabilità classica.

Infatti se prendiamo ad esempio il caso di tre osservabili non compatibili, sono date solo le aspettative  $p_1, p_2, p_3$ ; possiamo fare un primo completamento aggiungendo  $p_{13}$  e  $p_{23}$  che rispettino le condizioni (3.6) e (3.7), a questo punto applicando lo stesso procedimento usato nella dimostrazione del teorema si costruisce la misura. Un ragionamento analogo si applica nel caso in cui ci sia una sola coppia di compatibili.

In conclusione date tre osservabili immergibili in un'algebra libera (es. spin 1/2), indipendentemente dalle relazioni di compatibilità, esiste sempre una rappresentazione in termini di uno spazio di probabilità classico.

**Teorema 3.2.3.** Sia  $\mathfrak{B}$  un'algebra con generatori liberi  $\mathcal{G} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  e  $\mathfrak{B}_{ij}, \mathfrak{B}_{ijk}$ , le sottoalgebre generate rispettivamente da  $\{A_i, A_j\}$  e  $\{A_i, A_j, A_k\}$ . Sia  $f : \mathfrak{B}_{13} \cup \mathfrak{B}_{23} \cup \mathfrak{B}_{14} \cup \mathfrak{B}_{24} \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f|_{\mathfrak{B}_{13}}, f|_{\mathfrak{B}_{23}}, f|_{\mathfrak{B}_{14}}$  e  $f|_{\mathfrak{B}_{24}}$  siano misure normalizzate sulle sottoalgebre.

Allora  $f$  ammette estensione a una misura normalizzata sull'algebra  $\mathfrak{B}$  se e solo se esistono due estensioni parziali  $f^{123}$  e  $f^{124}$  di  $f|_{\mathfrak{B}_{13} \cup \mathfrak{B}_{23}}$  e  $f|_{\mathfrak{B}_{14} \cup \mathfrak{B}_{24}}$  alle algebre  $\mathfrak{B}_{123}$  e  $\mathfrak{B}_{124}$ , tali che  $f|_{\mathfrak{B}_{12}}^{123} \equiv f|_{\mathfrak{B}_{12}}^{124}$ .

**Dimostrazione** Un'implicazione è ovvia perché se esiste una misura normalizzata che estende  $f$  su  $\mathfrak{B}$  allora le sue restrizioni alle sottoalgebre  $\mathfrak{B}_{123}$  e  $\mathfrak{B}_{124}$  coincidono sull'intersezione.

Per il viceversa notiamo, come abbiamo fatto nel teorema precedente, che per l'osservazione (3.2.1) possiamo considerare, senza perdere di generalità,

$X = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_1 \cap A_3, A_2 \cap A_3, A_1 \cap A_4, A_2 \cap A_4\}$  e  $f : X \rightarrow [0, 1]$  e applicare a questa nuova definizione il lemma (3.2.1), quindi costruiremo nel solito modo il vettore  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_{13}, p_{23}, p_{14}, p_{24})$  e cercheremo i coefficienti  $\lambda(\varepsilon)$ .

Prima però applichiamo il teorema (3.2.2) alle sottoalgebre  $\mathfrak{B}_{123}$  e  $\mathfrak{B}_{124}$  e alle  $f|_{\mathfrak{B}_{13} \cup \mathfrak{B}_{23}}$  e  $f|_{\mathfrak{B}_{14} \cup \mathfrak{B}_{24}}$ , otteniamo che esistono sempre due estensioni parziali  $f^{123}$  e  $f^{124}$  a misure normalizzate sulle sottoalgebre  $\mathfrak{B}_{123}$  e  $\mathfrak{B}_{124}$ . Costruiamo ora il vettore:

$$p' = (p'_1, p'_2, p'_3, p'_{12}, p'_{13}, p'_{23}), \quad p'_i = f^{123}(A_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad p'_{ij} = f^{123}(A_i \cap A_j), \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Sappiamo per il lemma (3.2.1) che esistono  $u_\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_3, \varepsilon_2 \varepsilon_3)$  e  $\lambda'(\varepsilon)$  tali

che

$$p' = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda'(\varepsilon) u_\varepsilon \quad \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda'(\varepsilon) = 1, \quad \lambda'(\varepsilon) \geq 0.$$

Lo stesso ragionamento vale per il vettore

$$p'' = (p''_1, p''_2, p''_3, p''_{12}, p''_{13}, p''_{23}), \quad p''_i = f^{124}(A_i) \quad i = 1, 2, 4 \quad p''_{12} = f^{124}(A_1 \cap A_2), \\ p''_{i3} = f^{124}(A_i \cap A_4), \quad i = 1, 2,$$

abbiamo dei  $\lambda''(\varepsilon)$  tali che

$$p'' = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda''(\varepsilon) u_\varepsilon \quad \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda''(\varepsilon) = 1, \quad \lambda''(\varepsilon) \geq 0.$$

A questo punto possiamo definire per  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \in \{0, 1\}^4$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = \frac{\lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \lambda''(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4)}{\lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)} \quad (3.12)$$

se il denominatore non si annulla, e  $\lambda(\varepsilon) = 0$  per ogni  $\varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0, 1\}$  altrimenti. Possiamo verificare che se avessimo scelto  $\lambda''$  al posto di  $\lambda'$  nel denominatore non sarebbe cambiato nulla, infatti da

$$p'_{12} = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda'(\varepsilon) \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda''(\varepsilon) \varepsilon_1 \varepsilon_2 = p''_{12} \\ p'_1 = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda'(\varepsilon) \varepsilon_1 = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda''(\varepsilon) \varepsilon_1 = p''_1 \\ p'_2 = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda'(\varepsilon) \varepsilon_2 = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda''(\varepsilon) \varepsilon_2 = p''_2 \\ 1 = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda'(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda''(\varepsilon) \quad ;$$

segue che  $\lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1) = \lambda''(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda''(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$ . È ovvio che  $\lambda(\varepsilon) \geq 0$ ; vediamo che i  $\lambda$  si sommano a 1:

$$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^4} \lambda(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \sum_{\varepsilon_3, \varepsilon_4} \frac{\lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \lambda''(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4)}{\lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)} = \\ = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \frac{[\lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)] [\lambda''(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda''(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)]}{\lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)} = \\ = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0) + \lambda'(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^3} \lambda'(\varepsilon) = 1$$



Rimane solo da verificare  $\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^4} \lambda(\varepsilon) \varepsilon_i = p_i$ , per  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^4} \lambda(\varepsilon) \varepsilon_i \varepsilon_j = p_{ij}$  per  $i = 1, 2$  e  $j = 3, 4$ .  $\square$

Questa tecnica di dimostrazione è basata sulla costruzione esplicita della misura sugli elementi mancanti per cui non è applicabile a un caso generale di  $n$  osservabili. Inoltre presuppone la conoscenza di tutte le disuguaglianze tra le correlazioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una probabilità classica che le riproduca; ad esempio i parametri  $\chi$  e  $\eta$  introdotti nella dimostrazione del teorema 3.2.2 rappresentano le correlazioni mancanti  $(A_1, A_2, A_3)$  e  $(A_1, A_2, A_3^c)$ . In linea di principio questo metodo sarebbe applicabile ad un numero arbitrario di osservabili, purché fissato, ma è stato mostrato da Pitowsky in [1] che la derivazione di tutte le disuguaglianze che descrivono un certo politopo  $C(n, S_1)$  è un problema non trattabile dal punto di vista computazionale, infatti il numero e la complessità delle disuguaglianze cresce così in fretta che richiederebbe per il calcolo un numero di passi computazionali che va esponenzialmente con  $n$ .

Mostreremo ora un risultato, dovuto a Tarski e Horn [29], che ci fornisce un criterio per l'esistenza delle estensioni a misure di funzioni definite su sottinsiemi di un'algebra Booleana e in particolare dell'estensione di una collezione di misure definite su sottoalgebre booleane, che è il caso che ci interessa. Tale criterio è basato sul concetto di *misura parziale* e il risultato fondamentale sarà che una misura parziale ammette sempre estensione a misura sull'intera algebra. Riportiamo di seguito i risultati necessari per capire questo criterio e applicarlo in un caso particolare; per maggiori dettagli si veda [29]

Mostreremo due esempi di applicazione di questo criterio. Il primo esempio è la dimostrazione che per un insieme di osservabili tutte incompatibili tra loro, la cui algebra parziale ammette immersione in un'algebra booleana (si pensi all'esempio 3.1.1), è possibile estendere la collezione di misure di probabilità classiche, definite sulle algebre che formavano inizialmente l'algebra di Boole parziale, ad una misura di probabilità definita sull'intera algebra; inoltre vedremo l'interpretazione fisica di tale risultato.

Il secondo esempio invece non ha un'interpretazione fisica diretta, ma risulta interessante per un altro motivo; mostra infatti che nel caso di un numero arbitrario di osservabili anche con relazioni di compatibilità non banali è possibile estendere la collezione di misure di probabilità classiche ad una misura sull'intera algebra. Tratteremo infatti il caso di  $n$  osservabili  $\{A_1, \dots, A_n\}$  con relazioni di compatibilità del tipo  $A_i \leftrightarrow A_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , cioè ogni osservabile è compatibile con la precedente e la successiva. Partendo dal fatto che la loro algebra parziale è immergibile in un'algebra booleana libera discuteremo l'estendibilità della collezione di misure definite sulle sottoalgebre generate da  $\{A_i, A_{i+1}\}$ .

### 3.2.2 Misure parziali secondo Tarski e Horn

Il concetto di *misura parziale* viene introdotto da Tarski e Horn in [29] con l'obiettivo di analizzare la possibilità di estendere una funzione definita su un sottinsieme di un'algebra di Boole a misura sull'intera algebra, e di ottenere alcuni risultati già noti, in maniera più semplice e diretta senza l'utilizzo di concetti che non entrano nella loro formulazione. Questa nozione non viene collegata dagli autori alla meccanica quantistica, ma per la nostra costruzione in termini di algebre di Boole parziali e di collezioni di misure di probabilità essa ci fornisce un importante criterio di rappresentabilità classica.

Per introdurre il concetto di misura parziale partiamo dalla seguente:

**Proposizione 3.2.1.** *Sia  $m$  una misura normalizzata su un'algebra di Boole finita  $\mathfrak{B}$  e  $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathfrak{B}$  allora vale:*

$$\sum_{k < n} m(A_k) = \sum_{k < n} m \left( \bigcup_{r \in S_{k,n}} \bigcap_{i \leq k} A_{r_i} \right), \quad (3.13)$$

dove  $S_{k,n}$  è l'insieme di tutte le sequenze di numeri naturali  $r = (r_0, \dots, r_k)$  con  $0 \leq r_0 < \dots < r_k < n$

**Dimostrazione** Procediamo per induzione. I casi  $n = 0, 1$  sono ovvi, mentre il caso  $n = 2$  corrisponde alla nota formula:

$$m(A_0) + m(A_1) = m(A_0 \cup A_1) + m(A_0 \cap A_1)$$

Applicando due volte questa formula possiamo passare da  $n = 2$  a  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} m(A_0) + m(A_1) + m(A_2) &= m(A_0 \cup A_1) + m(A_0 \cap A_1) + m(A_2) \\ &= m(A_0 \cup A_1 \cup A_2) + m(A_2 \cap (A_0 \cup A_1)) + m(A_0 \cap A_1) \\ &= m(A_0 \cup A_1 \cup A_2) + m((A_2 \cap A_0) \cup (A_2 \cap A_1)) + m(A_0 \cap A_1) \\ &= m(A_0 \cup A_1 \cup A_2) + m((A_2 \cap A_0) \cup (A_2 \cap A_1) \cup (A_0 \cap A_1)) \\ &\quad + m(A_2 \cap A_0 \cap A_1) \end{aligned}$$

e in modo analogo si ottiene il passaggio da  $n$  a  $n + 1$ .  $\square$

Dato che nel seguito tratteremo solo misure normalizzate, le chiameremo semplicemente misure, sarà sottinteso che sono anche normalizzate.

A questo punto introduciamo la relazione d'ordine parziale  $\leq$  tra le "sequenze di elementi"  $\langle A_0, \dots, A_m \rangle$  di un'algebra di Boole definita nel seguente modo

**Definizione 3.2.1.** Siano  $A_0, \dots, A_{m-1}$  e  $B_0, \dots, B_{n-1}$  elementi di  $\mathfrak{B}$ , diremo che

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle \quad (3.14)$$

se

$$\left( \bigcup_{r \in S_{k,m}} \bigcap_{i \leq k} A_{r_i} \right) \subset \left( \bigcup_{r \in S_{k,n}} \bigcap_{i \leq k} B_{r_i} \right) \quad (3.15)$$

per ogni  $k < m$  dove  $S_{k,r}$  ( $r = m, n$ ) è lo stesso della proposizione 3.2.1.

Enunciamo ora alcune proprietà di  $\leq$ .

**Teorema 3.2.4.** *Siano  $A_0, \dots, A_{m-1}$ ,  $B_0, \dots, B_{n-1}$ ,  $C_0, \dots, C_{p-1}$ ,  $D_0, \dots, D_{q-1}$  elementi di  $\mathfrak{B}$  vale allora:*

(i) *se  $m = n$  e  $\langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle$  è una permutazione di  $\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle$  allora*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle.$$

(ii) *Se*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle \leq \langle C_0, \dots, C_{p-1} \rangle,$$

*allora*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle C_0, \dots, C_{p-1} \rangle.$$

(iii) *Se*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle$$

*e*

$$\langle C_0, \dots, C_{p-1} \rangle \leq \langle D_0, \dots, D_{q-1} \rangle,$$

*allora*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1}, C_0, \dots, C_{p-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1}, D_0, \dots, D_{q-1} \rangle.$$

(iv) *Se*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle \quad e \quad A_{m-1} = B_{n-1},$$

*allora*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-2} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-2} \rangle.$$

(v)

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle A_0, \dots, A_{m-1}, \emptyset \rangle \leq \langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle.$$

(vi) *Se*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle$$

*e  $B_{n-1} \cap A_i = \emptyset$  per ogni  $i < m$ , allora*

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-2} \rangle.$$

(vii) Se

$$B_k = \bigcup_{r \in S_{k,m}} \bigcap_{i \leq k} A_{r_i} \quad \text{per } k < m,$$

allora

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{m-1} \rangle \leq \langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle.$$

A questo punto possiamo introdurre la definizione di *misura parziale*:

**Definizione 3.2.2.** Una funzione reale  $f$  definita su un sottinsieme  $S$  di un'algebra di Boole  $\mathfrak{B}$  è detta *misura parziale* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(i)  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in S$ .

(ii) Se  $A_0, \dots, A_{m-1}$  e  $B_0, \dots, B_{n-1}$  sono elementi di  $\mathfrak{B}$  e

$$\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle,$$

allora

$$\sum_{i < m} f(A_i) \leq \sum_{j < n} f(B_j).$$

(iii)  $\mathbf{1} \in S$  e  $f(\mathbf{1}) = 1$ .

**Osservazione 3.2.3.** Una conseguenza ovvia della definizione 3.2.2 è che se  $\mathbf{1} \in S \subset T$  e  $f$  è misura parziale su  $T$ , allora  $f$  è misura parziale su  $S$ .

**Proposizione 3.2.2.** Sia  $f$  misura parziale su  $S$ :

(i) se  $\emptyset \in S$ , allora  $f(\emptyset) = 0$ ;

(ii) se  $x, y \in S$  e  $x \subset y$ , allora  $f(x) \leq f(y)$ ;

(iii) se  $x, y, x \cup y \in S$  e  $x \cap y = \emptyset$ , allora  $f(x \cup y) = f(x) + f(y)$ ;

(iv) se  $x, y, x \cup y$  e  $x \cap y \in S$ , allora  $f(x \cup y) + f(x \cap y) = f(x) + f(y)$ ;

**Dimostrazione** *ii*): se  $x \subset y$  allora  $\langle x \rangle \leq \langle y \rangle$  e quindi  $f(x) \leq f(y)$ .  
*iii*): dai punti (v) e (vii) del teorema 3.2.4 si ricava

$$\langle x, y \rangle \leq \langle x \cup y \rangle \leq \langle x, y \rangle,$$

il resto segue dal punto (ii) della definizione 3.2.2. Allo stesso si ottiene (iv) da

$$\langle x, y \rangle \leq \langle x \cup y, x \cap y \rangle \leq \langle x, y \rangle.$$

(i) invece segue da (iii) ponendo  $y = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 3.2.5.** *Sia  $S$  sottinsieme di  $\mathfrak{B}$  chiuso sotto  $\cap$  e  $\cup$ , condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione  $f$  su  $S$  a valori in  $[0, 1]$  sia una misura parziale è siano soddisfatti i punti (i) e (iii) della definizione 3.2.2 e i punti (i), (ii) e (iv) della proposizione 3.2.2.*

**Dimostrazione** La necessità segue della definizione 3.2.2 e dalla proposizione 3.2.2, vediamo che sono anche condizioni sufficienti. Dalla (iv) della proposizione 3.2.2 possiamo derivare la relazione 3.13 procedendo allo stesso modo della proposizione 3.2.1. Siano  $A_0, \dots, A_{m-1}$  e  $B_0, \dots, B_{n-1}$  in  $S$  e  $\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle$ , supponiamo  $m < n$ , il ragionamento è uguale nell'altro caso, per la (v) del teorema 3.2.4 possiamo sostituire  $\langle A_0, \dots, A_{m-1} \rangle$  con  $\langle A_0, \dots, A_{m-1}, \emptyset, \dots, \emptyset \rangle \equiv \langle A_0, \dots, A_{n-1} \rangle$  ottenuto inserendo  $n - m$  volte  $\emptyset$ . Ora utilizzando l'equazione 3.15 della definizione di  $\leq$  e la (ii) della proposizione 3.2.2 abbiamo

$$f \left( \bigcup_{r \in S_{k,n}} \bigcap_{i \leq k} A_{r_i} \right) \leq f \left( \bigcup_{r \in S_{k,n}} \bigcap_{i \leq k} B_{r_i} \right) \quad \text{per ogni } k < n \quad (3.16)$$

che insieme alla relazione 3.13 e alla (i) della proposizione 3.2.2 implica  $\sum_{i < m} f(A_i) \leq \sum_{j < n} f(B_j)$ , che è la (ii) della definizione 3.2.2.  $\square$

**Teorema 3.2.6.** *Sia  $S \subset \mathfrak{B}$  una sottoalgebra di  $\mathfrak{B}$  (o, in particolare, sia  $S = \mathfrak{B}$ ). Allora una funzione  $f$  su  $S$  è una misura parziale su  $S \iff f$  è una misura su  $S$ .*

**Dimostrazione**  $[\implies]$  segue dai punti (i) e (iii) della definizione 3.2.2 e dal punto (iii) della proposizione 3.2.2.

$[\impliedby]$  Segue dal fatto che  $S$  è una sottoalgebra e dalle proprietà della misura che sono soddisfatte le ipotesi del teorema 3.2.5, quindi  $f$  è una misura parziale.

**Teorema 3.2.7.** *Sia  $f$  una funzione definita su  $S_0 \cup S_1 \subset \mathfrak{B}$  tale che  $f(x) = 0$  se  $x \in S_0$  e  $f(x) = 1$  se  $x \in S_1$ . Allora  $f$  è una misura parziale su  $S_0 \cup S_1$  se e solo se  $\mathbf{1} \in S_1$  e vale:*

$$\bigcup_{i < m} A_i \cup \bigcup_{j < n} B_j^c \neq \mathbf{1} \quad (3.17)$$

per ogni  $A_i \in S_0$ ,  $B_j \in S_1$ ,  $i < m$ ,  $j < n$  e  $m, n < \infty$ .

**Dimostrazione** Sia  $f$  una misura parziale su  $S_0 \cup S_1$ , allora per il punto (iii) della definizione 3.2.2  $\mathbf{1} \in S_1$ . Supponiamo per assurdo che valga:

$$\bigcup_{i < m} A_i \cup \bigcup_{j < n} B_j^c = \mathbf{1} \quad (3.18)$$

per una certa scelta degli elementi  $A_i$  e  $B_j$ . Vale allora

$$\bigcap_{j < n} B_j \subset \bigcup_{i < m} A_i, \quad (3.19)$$

che implica

$$\langle B_0, \dots, B_{n-1} \rangle \leq \langle A_0, \dots, A_{m-1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1} \rangle \quad (3.20)$$

dove  $\mathbf{1}$  è ripetuto  $n - 1$  volte. Ma per il punto (ii) della definizione 3.2.2 abbiamo la contraddizione  $n \leq n - 1$ .

Viceversa supponiamo che  $1 \in S_1$  e che valga la 3.17, per mostrare che  $f$  è una misura parziale basta verificare il punto (ii) della definizione 3.2.2. Siano  $A_0, \dots, A_{m-1}, C_0, \dots, C_{p-1}$  in  $S_0$  e  $B_0, \dots, B_{n-1}, D_0, \dots, D_{q-1}$  in  $S_1$  e supponiamo che valga:

$$\langle B_0, \dots, B_{n-1}, C_0, \dots, C_{p-1} \rangle \leq \langle A_0, \dots, A_{m-1}, D_0, \dots, D_{q-1} \rangle \quad (3.21)$$

Se abbiamo che

$$\sum_{i < n} f(B_i) + \sum_{i < p} f(C_i) < \sum_{i < m} f(A_i) + \sum_{i < q} f(D_i) \quad (3.22)$$

deve essere  $n > q$ . Allora applicando la 3.15 alla relazione 3.21 otteniamo una serie di relazioni di inclusione che coinvolgono unioni e intersezioni di  $k$  elementi. Insieme alla condizione  $n > q$  la relazione d'inclusione per  $k = n$  ci da la condizione :

$$\bigcap_{j < n} B_j \subset \bigcup_{i < m} A_i$$

che è in contraddizione con l'ipotesi 3.17.  $\square$

Introduciamo ora le nozioni di “misura esterna” e “misura interna” che saranno fondamentali nella dimostrazione dei teoremi (3.2.15) e (3.2.16).

**Definizione 3.2.3.** Sia  $S \subset \mathfrak{B}$ ,  $f$  misura parziale su  $S$  e  $x \in \mathfrak{B}$ . Definiamo *misura esterna* di  $x$  rispetto a  $f$ , e la indichiamo con  $f_e(x)$ , l'inf dei numeri  $\xi$  della forma

$$\xi = \frac{1}{m} \left[ \sum_{i < n} f(A_i) - \sum_{j < p} f(B_j) \right] \quad (3.23)$$

dove  $A_i, B_j \in S$  per  $i < n, j < p$  e dove

$$\langle B_0, \dots, B_{p-1}, x_0, \dots, x_{m-1} \rangle \leq \langle A_0, \dots, A_{n-1} \rangle. \quad (3.24)$$

con  $x_i = x$  per ogni  $i < m$ .

Allo stesso modo definiamo *misura interna* di  $x$  rispetto a  $f$  il sup degli  $\xi$  della forma 3.23, dove però

$$\langle A_0, \dots, A_{n-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{p-1}, x_0, \dots, x_{m-1} \rangle. \quad (3.25)$$

Il teorema seguente ci mostra che nel caso in cui  $S$  sia una sottoalgebra di  $\mathfrak{B}$  la definizione di misura interna ed esterna coincide con l'idea intuitiva che suggerisce il nome.

**Teorema 3.2.8.** *Se  $f$  è una misura (parziale) su una sottoalgebra  $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ , allora  $f_i(x) = \sup\{f(y)|y \in \mathfrak{B}_0, y \subset x\}$  e  $f_e(x) = \inf\{f(y)|y \in \mathfrak{B}_0, x \subset y\}$*

**Dimostrazione** Sia  $g(x) = \sup\{y \in \mathfrak{B}_0|y \subset x\}$ , allora per la definizione 3.2.3  $g(x) \leq f_i(x)$ . Sia  $\varepsilon > 0$ , possiamo considerare due sequenze  $A_i, B_j$  in  $\mathfrak{B}_0$  tali che

$$\langle A_0, \dots, A_{k-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{k-1}, x_0, \dots, x_{m-1} \rangle, \quad (3.26)$$

con  $x_i = x$ , e che

$$m[f_i(x) - \varepsilon] < \sum_{i < k} f(A_i) - \sum_{j < k} f(B_j). \quad (3.27)$$

Notiamo che possiamo assumere lo stesso numero  $k$  di termini per la (i) della proposizione 3.2.2 e la (v) del teorema 3.2.4.

Inoltre, per la (iii) della proposizione 3.2.4, l'osservazione 3.2.3, e l'equazione 3.13, che abbiamo visto nella dimostrazione del teorema 3.2.6 vale anche per misure su insiemi chiusi sotto unione e intersezione, possiamo assumere che valga  $A_{i+1} \subset A_i$  e  $B_{i+1} \subset B_i$  per  $i < k-1$ . A questo punto definiamo  $C_i \equiv A_i \cap B_i^c$  e  $D_i \equiv A_i^c \cap B_i$ , per  $i < k$ . Allora per la (iv) e la (vii) del teorema 3.2.4 vale:

$$\langle C_0, \dots, C_{k-1} \rangle \leq \langle D_0, \dots, D_{k-1}, x_0, \dots, x_{m-1} \rangle, \quad (3.28)$$

e per l'equazione 3.13 vale:

$$f(C_i) - f(D_i) = f(A_i) - f(B_i), \quad \text{per } i < k. \quad (3.29)$$

Per costruzione abbiamo che ogni  $D_i$  è disgiunto da  $C_0, \dots, C_{k-1}$ , quindi per la (vi) del teorema 3.2.4 abbiamo:

$$\langle C_0, \dots, C_{k-1} \rangle \leq \langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle. \quad (3.30)$$

Definiamo

$$E_i = \bigcup_{r \in S_{i,k}} \bigcap_{j \leq i} C_{r_j}, \quad \text{per } i \leq \max\{k, m\}, \quad (3.31)$$

per la (vi) del teorema 3.2.4 abbiamo che  $E_i \subset x$  per  $i < m$  e per la definizione 3.2.1 che  $E_i = \emptyset$  per  $i \geq m$ .

Quindi:

$$m \cdot g(x) \geq \sum_{i < m} f(E_i) = \sum_{i < k} f(E_i) \quad (3.32)$$

e

$$m \cdot g(x) \geq \sum_{i < k} f(E_i) = \sum_{i < k} f(C_i) \geq \sum_{i < k} f(C_i) - \sum_{i < k} f(D_i) \quad (3.33)$$

$$= \sum_{i < k} f(A_i) - \sum_{i < k} f(B_i) > m[f_i(x) - \varepsilon], \quad (3.34)$$

per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  vale  $g(x) \geq f_i(x)$  e quindi  $g(x) = f_i(x)$ .

La dimostrazione è analoga per  $f_e(x)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.9.** *Sia  $f$  una misura parziale su  $S \subset \mathfrak{B}$  e  $x \in \mathfrak{B}$ , allora  $0 \leq f_i(x) \leq f_e(x) \leq 1$ .*

**Dimostrazione** Le disuguaglianze  $f_i(x) \geq 0$  e  $f_e(x) \leq 1$  seguono da  $\langle \emptyset \rangle \leq \langle x \rangle \leq \langle \mathbf{1} \rangle$ .  
Se

$$\langle A_0, \dots, A_{p-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{q-1}, x_0, \dots, x_{m-1} \rangle \quad (3.35)$$

e

$$\langle C_0, \dots, C_{r-1}y_0, \dots, y_{n-1} \rangle \leq \langle D_0, \dots, D_{s-1} \rangle \quad (3.36)$$

con  $x_i = x$  per  $i < m$  e  $y_j = x$  per  $j < n$ , allora per la (iii) e la (i) del teorema 3.2.4 vale

$$\langle A_0, \dots, A_{p-1}, \dots \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{q-1}, x_0, \dots, x_{m-1}, \dots \rangle \quad (3.37)$$

dove ogni termine  $A_0, \dots, A_{p-1}, B_0, \dots, B_{q-1}, x_0, \dots, x_{m-1}$  è ripetuto  $n$  volte, e vale

$$\langle C_0, \dots, C_{r-1}, y_0, \dots, y_{n-1} \dots \rangle \leq \langle D_0, \dots, D_{s-1}, \dots, \rangle \quad (3.38)$$

dove ogni termine è ripetuto  $m$  volte. Segue dai punti (iii) e (iv) del teorema 3.2.4 che

$$\langle A_0, \dots, A_{p-1}, C_0, \dots, C_{r-1} \dots \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{q-1}, D_0, \dots, D_{s-1}, \dots, \rangle \quad (3.39)$$

dove i termini  $A_i$  e  $B_i$  sono ripetuti  $n$  volte, mentre i termini  $C_i$  e  $D_i$   $m$  volte. Dalla definizione di misura parziale segue quindi che:

$$\frac{1}{m} \left[ \sum_{i < p} f(A_i) - \sum_{i < q} f(B_i) \right] \leq \frac{1}{n} \left[ \sum_{i < r} f(C_i) - \sum_{i < s} f(D_i) \right]. \quad (3.40)$$

Dal passaggio a sup e inf segue  $f_i(x) \leq f_e(x)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.10.** *Sia  $f$  misura parziale su  $S \subset \mathfrak{B}$  e sia  $x \in S$ , allora  $f_i(x) = f_e(x) = f(x)$ .*



**Dimostrazione** Segue dalla definizione di misura interna ed esterna e dal fatto che  $\langle x \rangle \leq \langle x \rangle$ .  $\square$

**Teorema 3.2.11.** *Se  $f$  è una misura parziale su  $S \subset \mathfrak{B}$  e  $x, y \in \mathfrak{B}$  e  $x \cap y = \emptyset$ , allora:*

$$f_i(x) + f_i(y) \leq f_i(x \cup y) \leq f_i(x) + f_e(y) \leq f_e(x \cup y) \leq f_e(x) + f_e(y). \quad (3.41)$$

Dal teorema precedente possiamo derivare una serie di proprietà per le misure interna ed esterna.

**Proposizione 3.2.3.** *Sia  $f$  misura parziale su  $S \subset \mathfrak{B}$ :*

(i) *se  $x \in S$ ,  $y \in \mathfrak{B}$  e  $x \cap y = \emptyset$ , allora*

$$f_i(x \cup y) = f(x) + f_i(y) \quad e \quad f_e(x \cup y) = f(x) + f_e(y);$$

(ii) *se  $x, y \in \mathfrak{B}$ ,  $x \cup y \in S$  e  $x \cap y = \emptyset$ , allora*

$$f(x \cup y) = f_i(x) + f_e(y);$$

(iii) *se  $x \in \mathfrak{B}$ , allora*

$$f_i(x) + f_e(x^c) = f_i(x^c) + f_e(x) = 1.$$

Enunciamo ora un criterio per una “prima estensione” di una misura parziale e che sarà fondamentale, oltre che per ottenere il teorema principale di questa sezione, cioè il 3.2.14, per la dimostrazione dei teoremi 3.2.15 e 3.2.16.

**Teorema 3.2.12.** *Se  $f$  è una misura parziale su  $S \subset \mathfrak{B}$ ,  $x \in \mathfrak{B}$  e  $g$  è una funzione su  $S \cup \{x\}$  che coincide con  $f$  su  $S$ , allora  $g$  è una misura parziale su  $S \cup \{x\} \iff f_i(x) \leq g(x) \leq f_e(x)$ .*

**Dimostrazione**[ $\Leftarrow$ ] Supponiamo  $f_i(x) \leq g(x) \leq f_e(x)$ , e consideriamo  $A_0, \dots, A_{k-1}$ ,  $B_0, \dots, B_{p-1}$  in  $S$  tali che:

$$\langle A_0, \dots, A_{k-1}, x_0, \dots, x_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{p-1}, y_0, \dots, y_{n-1} \rangle \quad (3.42)$$

con  $x_i = x$  e  $y_j = x$ . Dobbiamo allora mostrare che

$$m \cdot g(x) + \sum_{i < k} g(A_i) \leq n \cdot g(x) + \sum_{i < p} g(B_i). \quad (3.43)$$

Il caso  $n = m$  viene subito dalla (iv) del teorema 3.2.4 e dal fatto che  $g$  coincide con  $f$  su  $S$ . Supponiamo allora  $n - m = r > 0$ , per la (iv) del teorema 3.2.4 abbiamo:

$$\langle A_0, \dots, A_{k-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{p-1}, y_0, \dots, y_{r-1} \rangle$$

quindi  $r \cdot g(x) \geq f_i(x) \geq \sum_{i < k} f(A_i) - \sum_{i < p} f(B_i)$  da cui segue l'equazione 3.43. Se invece  $n < m$  basta usare  $g(x) \leq f_e(x)$ .

[ $\implies$ ] Viceversa supponiamo che sia una misura parziale su  $S \cup \{x\}$ . Sia  $\varepsilon > 0$ , possiamo trovare  $A_i, B_j$  in  $S$  tali che

$$\langle A_0, \dots, A_{k-1}, x_0, \dots, x_{m-1} \rangle \leq \langle B_0, \dots, B_{p-1} \rangle$$

con  $x_i = x$  e tali che

$$m[f_e(x) + \varepsilon] < \sum_{i < p} g(B_i) - \sum_{i < k} g(A_i).$$

Ma  $mg(x) + \sum_{i < k} g(A_i) \leq \sum_{i < p} g(B_i)$  perché  $g$  è una misura parziale.

Quindi  $g(x) < f_e(x) + \varepsilon$ ; la tesi segue dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

Il discorso è analogo per  $f_i(x)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.13.** *Se  $f$  è una misura parziale su  $S$  e  $S \subset T \subset \mathfrak{B}$ , allora esiste una misura parziale  $g$  su  $T$  che coincide con  $f$  su  $S$ .*

**Dimostrazione** La tesi segue dal teorema precedente.  $\square$

**Teorema 3.2.14.** *Se  $f$  è una misura parziale su un sottoinsieme  $S$  di un'algebra di Boole  $\mathfrak{B}$ , allora esiste una misura  $m$  su  $\mathfrak{B}$  che coincide con  $f$  su  $S$ .*

**Dimostrazione** La tesi segue dai teoremi 3.2.13 e 3.2.6.  $\square$

Abbiamo così ottenuto il risultato che giustifica l'introduzione del concetto di *misura parziale* nella definizione 3.2.2, cioè che ogni misura parziale nel senso di Tarski e Horn ammette sempre estensione a misura definita sull'intera algebra.

A questo punto ci si potrebbe chiedere quale sia il collegamento tra questo approccio e quello del politopo di correlazione introdotto in [1] e usato ad esempio nei teoremi 3.2.2 e 3.2.3. Dalla definizione 3.2.2 risulta abbastanza evidente che il punto fondamentale è la condizione (ii) che è appunto espressa da disuguaglianze tra i valori assunti dalla funzione sugli elementi dell'insieme su cui è definita. In particolare nel caso in cui abbiamo una funzione  $f$  definita su sottoinsieme  $X \subset \mathfrak{B}$ , con  $X$  e  $\mathfrak{B}$  della forma discussa nel lemma 3.2.1, abbiamo visto che sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i) il vettore  $p$ , costruito con i valori assunti da  $f$  su  $X$  come nel lemma 3.2.1, appartiene al politopo di correlazione  $C(n, S_2, \dots, S_m)$ ;

(ii) esiste una misura normalizzata  $m$  che estende  $f$  su  $\mathfrak{B}$ ;

(iii)  $f$  estesa su  $X \cup \{\mathbf{1}\}$  con  $f(\mathbf{1}) = 1$  è una misura parziale;

infatti abbiamo mostrato che (i)  $\iff$  (ii) e (ii)  $\iff$  (iii) che implica (i)  $\iff$  (iii). Questo significa che le disuguaglianze tra le componenti del vettore  $p$ , cioè i valori assunti da  $f$  su  $X$ , che descrivono il politopo  $C(n, S_2, \dots, S_m)$  devono essere equivalenti a quelle derivate dalla condizione (ii) della definizione di misura parziale. In questo senso i due approcci sono equivalenti, ma il vantaggio di quello che utilizza la misura parziale è, come abbiamo anticipato, che sfrutta molto di più la struttura algebrica dell'insieme su cui è definita la funzione da estendere a misura; questo risulta abbastanza evidente osservando i teoremi 3.2.5, 3.2.6 e 3.2.8, e dalla dimostrazione dei teoremi che seguono, il 3.2.15 e il 3.2.16.

**Teorema 3.2.15.** *Sia  $\mathfrak{B}$  l'algebra di Boole liberamente generata da  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $\mathfrak{B}_i$  la sottoalgebra generata da  $\{A_i\}$  per  $i = 1, \dots, n$ , sia  $X = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{B}_i$  e  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f|_{\mathfrak{B}_i}$  è una misura su  $\mathfrak{B}_i$ . Allora  $f$  è una misura parziale su  $X$ .*

**Dimostrazione** Dato che  $f|_{\mathfrak{B}_i}$  è una misura sulla sottoalgebra  $\mathfrak{B}_1$  è anche una misura parziale. Cominciamo col verificare che  $f|_{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2}$  è una misura parziale su  $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ . Per i teoremi 3.2.12 e 3.2.8, dato che  $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \cup \{A_2, A_2^c\}$  e che  $\mathfrak{B}_1$  è una sottoalgebra, basta verificare che

$$\begin{aligned} \sup\{f(x) | x \in \mathfrak{B}_1, x \subset A_2\} &\leq f(A_2) \leq \inf\{f(y) | y \in \mathfrak{B}_1, A_2 \subset y\}, \\ \sup\{f(x) | x \in \mathfrak{B}_1, x \subset A_2^c\} &\leq f(A_2^c) \leq \inf\{f(y) | y \in \mathfrak{B}_1, A_2^c \subset y\}. \end{aligned}$$

Ma tali condizioni sono equivalenti a:

$$0 = f(\emptyset) \leq f(A_2) \leq f(\mathbf{1}) = 1, \quad (3.44)$$

$$0 = f(\emptyset) \leq f(A_2) \leq f(\mathbf{1}) = 1, \quad (3.45)$$

che sono soddisfatte poiché  $f|_{\mathfrak{B}_i}$  è una misura su  $\mathfrak{B}_i$  per ogni  $i$ .

A questo punto possiamo ripetere il ragionamento per ogni  $f|_{\mathfrak{B}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_i}$  con  $i > 2$  poiché se  $x \in \mathfrak{B}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{i-1}$ , allora dalla definizione di generatori liberi e di inclusione  $\subset$  segue che  $x \subset A_i$  implica  $x = \emptyset$  e  $A_i \subset x$  implica  $x = \mathbf{1}$ .  $\square$

Dal teorema 3.2.14 segue che una  $f$  così definita ammette sempre estensione a misura sull'algebra  $\mathfrak{B}$ .

Basandoci sull'esempio 3.1.1 possiamo identificare gli elementi  $A_i$  con le osservabili dicotomiche che rappresentano delle misure di spin lungo  $n$  direzioni differenti per una particella di spin 1/2 e le  $\{f|_{\mathfrak{B}_i}\}$  con la collezione di misure di probabilità classiche che vengono dalle aspettative della meccanica quantistica. Possiamo quindi affermare che

il teorema 3.2.15 mostra che per  $n$  misure di spin per una particella di spin  $1/2$  esiste sempre una rappresentazione in termini di uno spazio di probabilità classico. Tale risultato era già stato mostrato da Bell in [9] tramite una costruzione esplicita della distribuzione di probabilità, è interessante notare però come tale risultato non sia una “particolarità” dello spin  $1/2$  ma che segua semplicemente dalle proprietà algebriche booleane delle osservabili.

Vediamo ora un altro esempio in cui le misure di probabilità classiche sono date da  $\{f|_{\mathfrak{B}_{i(i+1)}}\}$  e sono definite su sottoalgebre con intersezione non banale, cioè diversa da  $\{\emptyset, \mathbf{1}\}$ .

**Teorema 3.2.16.** *Sia  $\mathfrak{B}$  l'algebra liberamente generata da  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , siano  $\mathfrak{B}_i$  la sottoalgebra generata da  $\{A_i\}$  e  $\mathfrak{B}_{ij}$  la sottoalgebra generata da  $\{A_i, A_j\}$ . Sia  $X = \mathfrak{B}_{12} \cup \mathfrak{B}_{23} \cup \mathfrak{B}_{34} \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{(n-1)n}$  e  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , tale che  $f$  è una misura su  $\mathfrak{B}_{i(i+1)}$  per ogni  $i = 1, \dots, n-1$ , allora  $f$  è una misura parziale su  $X$ .*

**Dimostrazione** Procediamo come per il teorema precedente; partendo dal fatto che  $f|_{\mathfrak{B}_{12}}$  è una misura parziale, vogliamo mostrare che anche  $f|_{\mathfrak{B}_{12} \cup \mathfrak{B}_{23}}$  è una misura parziale. Per il teorema 3.2.12 dobbiamo verificare che per ogni  $x \in \mathfrak{B}_{23} \setminus \mathfrak{B}_{12}$ , indicate  $f_i^{12}(x)$ ,  $f_e^{12}(x)$  le misure interna ed esterna di  $x$  rispetto a  $f|_{\mathfrak{B}_{12}}$ , valga

$$f_i^{12}(x) \leq f(x) \leq f_e^{12}(x). \quad (3.46)$$

Inoltre utilizziamo il fatto che  $\mathfrak{B}_{12}$  è una sottoalgebra e quindi per il teorema 3.2.8 vale

$$f_i^{12}(x) = \sup\{f(y) | y \in \mathfrak{B}_{12}, y \subset x\} \quad (3.47)$$

$$f_e^{12}(x) = \inf\{f(y) | y \in \mathfrak{B}_{12}, x \subset y\}. \quad (3.48)$$

Elenchiamo gli elementi di  $\mathfrak{B}_{23} \setminus \mathfrak{B}_{12}$  su cui dobbiamo verificare la 3.46:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{23} \setminus \mathfrak{B}_{12} = & \{A_3, A_2 \cap A_3, A_2^c \cap A_3, A_2 \cap A_3^c, A_2^c \cap A_3^c, (A_2 \cap A_3)^c \cap (A_2^c \cap A_3^c)^c, \\ & A_3^c, (A_2 \cap A_3)^c, (A_2^c \cap A_3)^c, (A_2 \cap A_3^c)^c, (A_2^c \cap A_3^c)^c, \\ & ((A_2^c \cap A_3)^c \cap (A_2 \cap A_3^c)^c)\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Sono esattamente dodici elementi su cui verificare la 3.46 poiché  $\mathfrak{B}_{23}$  ha sedici elementi a cui abbiamo tolto  $\{\emptyset, A_2, A_2^c, \mathbf{1}\}$ . Notiamo che gli ultimi sei elementi elencati nella 3.49 sono i complementi dei primi sei. Questo ci semplifica il calcolo poiché vale per ogni  $x \in \mathfrak{B}_{23}$   $f(x^c) = 1 - f(x)$  per il fatto che  $f$  è una misura su  $\mathfrak{B}_{23}$ , e inoltre per la (iii) della proposizione 3.2.3  $f_e^{12}(x) = 1 - f_i^{12}(x^c)$  e  $f_i^{12}(x) = 1 - f_e^{12}(x^c)$ . Quindi

$$\begin{aligned} f_i^{12}(x) \leq f(x) \leq f_e^{12}(x) & \iff 1 - f_e^{12}(x^c) \leq 1 - f(x^c) \leq 1 - f_i^{12}(x^c) \\ & \iff f_i^{12}(x^c) \leq f(x^c) \leq f_e^{12}(x^c), \end{aligned}$$

allora basta verificare la 3.46 sui primi sei elementi che compaiono nella 3.49. Ora utilizzando la (ii) della proposizione 3.2.2, abbiamo che

$$\sup\{f(y)|y \in \mathfrak{B}_{12}, y \subset x\} = f(\sup\{y \in \mathfrak{B}_{12}|y \subset x\}), \quad (3.50)$$

$$\inf\{f(y)|y \in \mathfrak{B}_{12}, x \subset y\} = f(\inf\{y \in \mathfrak{B}_{12}|x \subset y\}); \quad (3.51)$$

osserviamo che  $\sup\{y \in \mathfrak{B}_{12}|y \subset x\}$  esiste sempre in  $\mathfrak{B}_{12}$  poiché  $\mathfrak{B}_{12}$  è una sottoalgebra e quindi se  $y, z \in \mathfrak{B}_{12}$  sono tali che  $y \subset x$  e  $z \subset x$ , allora  $y \cup z \subset x$  e  $y \cup z \in \mathfrak{B}_{12}$ ; un ragionamento analogo vale per  $\inf\{y \in \mathfrak{B}_{12}|x \subset y\}$ .

Scriviamo le relazioni di inclusione tra gli elementi  $x \in \mathfrak{B}_{23} \setminus \mathfrak{B}_{12}$  e gli elementi di  $\mathfrak{B}_{12}$  nella forma  $\sup\{y \in \mathfrak{B}_{12}|y \subset x\} \subset x \subset \inf\{y \in \mathfrak{B}_{12}|x \subset y\}$ , che ci serviranno per ottenere le 3.47 e 3.48:

$$\begin{aligned} \emptyset &\subset A_3 \subset \mathbf{1}, \\ \emptyset &\subset A_3 \cap A_2 \subset A_2, \\ \emptyset &\subset (A_3^c \cap A_2) \subset A_2, \\ \emptyset &\subset (A_3 \cap A_2^c) \subset A_2, \\ \emptyset &\subset (A_3^c \cap A_2^c) \subset A_2, \\ \emptyset &\subset (A_2^c \cap A_3)^c \cap (A_2 \cap A_3^c)^c \subset \mathbf{1}, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(A_3) \leq 1, \\ 0 &\leq f(A_3 \cap A_2) \leq f(A_2), \\ 0 &\leq f(A_3^c \cap A_2) \leq f(A_2), \\ 0 &\leq f(A_3 \cap A_2^c) \leq f(A_2^c), \\ 0 &\leq f(A_3^c \cap A_2^c) \leq f(A_2^c), \\ 0 &\leq f((A_2^c \cap A_3)^c \cap (A_2 \cap A_3^c)^c) \leq 1, \end{aligned}$$

che sono soddisfatte poiché  $f|_{\mathfrak{B}_{23}}$  è una misura su  $\mathfrak{B}_{23}$ .

Si può procedere nello stesso modo per mostrare che  $f|_{\mathfrak{B}_{12} \cup \mathfrak{B}_{23} \cup \mathfrak{B}_{34}}$  è una misura parziale, e ripetere così il ragionamento, aggiungendo uno alla volta gli elementi di ogni algebra  $\mathfrak{B}_{i(i+1)}$ , fino a ottenere che  $f$  è una misura parziale su  $\mathfrak{B}_{12} \cup \mathfrak{B}_{23} \cup \mathfrak{B}_{34} \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{(n-1)n}$ .  $\square$

**Osservazione 3.2.4.** Possiamo sostituire nelle ipotesi del teorema  $X = \mathfrak{B}_{12} \cup \mathfrak{B}_{23} \cup \mathfrak{B}_{34} \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{(n-1)n}$  con  $X = \mathfrak{B}_{12} \cup \mathfrak{B}_{13} \cup \mathfrak{B}_{14} \cup \dots \cup \mathfrak{B}_{1n}$ , e imporre che sia una misura  $f|_{\mathfrak{B}_{1i}}$  invece che  $f|_{\mathfrak{B}_{i(i+1)}}$ , e la dimostrazione rimane praticamente identica.

**Osservazione 3.2.5.** Osserviamo inoltre che il teorema precedente nel caso  $n = 3$  coincide con il teorema 3.2.2 dimostrato tramite la tecnica del politopo di correlazione, ed è quindi una sua generalizzazione.

### 3.3 Conclusioni

È utile riassumere i risultati ottenuti in questo capitolo poiché, anche se si tratta sempre di argomenti legati al problema dell'estendibilità delle strutture booleane parziali, tale problema viene affrontato da diversi punti di vista e con diversi metodi.

Abbiamo mostrato che l'estensione da algebra di Boole parziale ad algebra di Boole non è sempre possibile, poiché le “relazioni booleane parziali” non sempre possono essere riprodotte all'interno di un'algebra di Boole; abbiamo inoltre collegato questo fatto con la contraddizione trovata da Kochen e Specker in [13].

L'estensione è però possibile in due casi particolarmente interessanti, in cui cioè le relazioni di compatibilità corrispondono a quelle per un insieme di osservabili di spin per una e per due particelle di spin  $1/2$ . L'esistenza di tale estensione è infatti alla base della successiva discussione della possibilità di estendere la collezione di misure di probabilità classiche e quindi dell'interpretazione classica di un sistema di due particelle di spin  $1/2$ . Questo sistema è infatti centrale nella discussione del lavoro di Bell e in particolare nell'analisi del problema della “località”.

Nella seconda parte del capitolo abbiamo invece presentato due criteri per determinare la possibilità di estensione di una collezione di misure di probabilità classiche ad una misura sull'intera algebra. In particolare dall'analisi di tali criteri risulta chiara l'origine probabilistica delle disuguaglianze alla Bell: non sono altro che condizioni necessarie e sufficienti alla possibilità di estendere una funzione definita su un sottoinsieme di un'algebra di Boole ad una misura sull'intera algebra.

In particolare il criterio del politopo di correlazione ci ha permesso di dimostrare che per tre osservabili, indipendentemente dalle relazioni di compatibilità, è sempre possibile un'interpretazione probabilistica classica; abbiamo visto inoltre che nel caso a quattro osservabili l'esistenza di interpretazioni classiche parziali a tre osservabili coincidenti sull'intersezione è equivalente all'esistenza di un'interpretazione classica per tutte e quattro. Questi due risultati saranno fondamentali per discutere nel capitolo successivo il caso più semplice in cui vengono violate delle disuguaglianze alla Bell e l'origine di tale violazione.

Tramite il criterio della misura parziale abbiamo invece mostrato che la non compatibilità delle osservabili non è sufficiente ad impedirne la rappresentabilità classica, in particolare per  $n$  misure di spin su una particella di spin  $1/2$  esiste un modello classico che riproduce i risultati della meccanica quantistica, risultato già ottenuto da Bell. Si potrebbe pensare che si tratti di un caso particolare dovuto a relazioni di compatibilità

banali (tutti incompatibili), ma abbiamo mostrato due casi di relazioni di compatibilità non banali tra un numero arbitrario di osservabili in cui esiste un'interpretazione probabilistica classica.

Tale risultati sono anche rilevanti per il problema dell'origine della "potenza di calcolo" degli algoritmi quantistici, vediamo in che senso partendo dalle osservazioni di Jozsa e Linden [31]. Il primo a notare le potenzialità di un computer basato sulla meccanica quantistica anziché quella classica è Feynman; nel suo lavoro [32] del 1982, egli nota come la simulazione dell'evoluzione di un sistema quantistico tramite un computer (classico) richieda delle risorse che crescono in maniera esponenziale con la dimensione del sistema. I successivi lavori in questa direzione mostrano come in un certo senso sia vero il viceversa, cioè che un computer "quantistico" è in grado di risolvere alcuni problemi in tempi esponenzialmente più veloci rispetto ad uno "classico". L'esempio più sorprendente è forse l'algoritmo di Shor [33] che è in grado di effettuare la fattorizzazione di un intero di  $n$  cifre in un tempo che cresce in modo polinomiale con  $n$ , mentre il corrispondente algoritmo classico ha un tempo di esecuzione che cresce in maniera esponenziale.

Il problema che sorge immediatamente è quello di caratterizzare questa "non classicità" alla base della potenza di calcolo degli algoritmi quantistici. Jozsa e Linden [31] analizzano da questo punto di vista il ruolo dell'entanglement e si chiedono se esso sia una risorsa chiave per la computazione quantistica. Essi notano che la crescita esponenziale del numero di parametri che descrivono un sistema dovuta all'entanglement rende le simulazioni degli algoritmi quantistici tramite computer classici "esponenzialmente più lente", ma affermano che questo fatto è caratteristico del particolare formalismo che si utilizza e non è una proprietà intrinseca della fisica quantistica.

Più in generale possiamo affermare che il problema dell'origine della "non classicità" della meccanica quantistica andrebbe formulato in termini della struttura delle sue predizioni; infatti in ogni esperimento in cui si misurano un numero finito di osservabili, come è il caso della realizzazione di un algoritmo quantistico, le proprietà legate al formalismo come la presenza di entanglement nello stato iniziale, la non commutatività delle osservabili che si misurano o l'esistenza di relazioni di compatibilità non banali tra di esse, non sono condizioni sufficienti per l'impossibilità di una descrizione classica e non sono quindi sufficienti a garantire una potenza di calcolo superiore.

## Capitolo 4

# Correlazioni attribuibili a osservabili quantistiche non compatibili

### 4.1 Meccanica quantistica, modelli classici, modelli contestuali

Abbiamo visto nel capitolo 1 che i possibili tentativi di interpretazione classica della meccanica quantistica sono vincolati dai risultati di Gleason, Bell e Kochen-Specker. In questo capitolo riprendiamo l'analisi dei risultati di Bell nel caso discusso da Clauser Horne Shimony e Holt (CHSH) in [14]; partendo dai risultati ottenuti nel capitolo precedente “smonteremo” il caso a quattro osservabili in due casi a tre e discuteremo su quali basi è possibile parlare di “influenze non locali”. La motivazione di quest'analisi è la seguente: il risultato di Bell viene solitamente espresso nella forma negativa “non esistono teorie probabilistiche classiche *locali* che riproducono i risultati della meccanica quantistica”; chi afferma la possibilità di un'interpretazione classica della meccanica quantistica afferma che l'ipotesi da abbandonare sia la “località”, cioè ammette l'esistenza di “influenze” che si propagano a velocità maggiore di quella della luce (ed eventualmente infinita) pur di interpretare la meccanica quantistica in termini classici. Vedremo che la scomposizione dell'analisi di Bell in termini di modelli a tre osservabili pone ulteriori vincoli alle possibili interpretazioni classiche della meccanica quantistica e che ci sono casi in cui le ipotesi di propagazione di “influenze” a velocità maggiori di quella della luce non sono sufficienti per costruire un modello probabilistico classico. Ricordiamo che l'obiettivo di una interpretazione classica della meccanica quantistica è quello di descrivere i sistemi fisici se non in maniera *deterministica*, cioè specificando esattamente il valore di ogni quantità fisica rilevante, almeno in termini statistici, cioè specificando i valori medi e tutte le correlazioni tra le quantità fisiche, tramite un modello probabilistico classico che rifletta la nostra “ignoranza” su uno “stato di cose” ben definito del sistema; in generale le predizioni di tali modelli vanno quindi oltre quelle



della meccanica quantistica poiché comprendono anche le correlazioni tra osservabili “incompatibili” secondo la meccanica quantistica.

Vale inoltre la pena di ricordare che il problema fondamentale nell’interpretazione della meccanica quantistica non è la scelta tra una descrizione *deterministica* e una *probabilistica*, come era forse implicito nel dibattito tra Einstein e Bohr, ma piuttosto se sia ammessa una descrizione probabilistica. Cioè prima di porsi il problema della “predicibilità” del valore delle variabili che descrivono un sistema fisico bisogna porsi il problema della loro “assegnabilità”. La questione espressa nella famosa frase di Einstein “Dio non gioca a dadi” deve essere riformulata ed espressa, alla luce dei risultati alla Bell, nella domanda “esistono dadi che riproducono le previsioni della meccanica quantistica?”.

Abbiamo discusso nel capitolo 2 come la meccanica quantistica definisca delle teorie probabilistiche classiche, ristrette però a particolari “contesti”. L’analisi del capitolo 3 ha successivamente mostrato come nelle teorie probabilistiche contestuali sia in alcuni casi possibile ridurre il numero di “contesti” estendendo le strutture booleane parziali di tali teorie. In questo linguaggio possiamo dire che l’obiettivo di ogni tentativo di interpretazione classica della meccanica quantistica è quello di ridurre il numero di “contesti” della teoria probabilistica contestuale definita dalla meccanica quantistica ad uno solo. Mostriamo nella seconda parte del capitolo che in tutti i modelli contestuali che riproducono le previsioni della meccanica quantistica per un sistema di due spin c’è un’influenza della scelta della variabile da misurare su uno degli spin sulle correlazioni *attribuibili ma non sperimentalmente osservabili* tra le diverse componenti dell’altro spin; l’esistenza di tali correlazioni è implicita in ogni interpretazione classica della meccanica quantistica, e la loro attribuzione rappresenta l’unica aggiunta alle previsioni della meccanica quantistica, generata da tali modelli. In particolare discuteremo i modelli a tre e quattro osservabili, procedendo nel seguente modo:

- (1) mostreremo che per quattro osservabili, con le relazioni di compatibilità del caso CHSH discusso nel capitolo 1, sono sufficienti due “contesti” per riprodurre le previsioni della meccanica quantistica tramite un modello contestuale (osserviamo che il modello contestuale definito dalla meccanica quantistica ne utilizza quattro e che il risultato CHSH implica che ne servono almeno due);
- (2) esplicheremo le possibili coppie di “contesti” per tali modelli;
- (3) mostreremo che ogni interpretazione delle “influenze”, che si utilizzano solitamente per spiegare la violazione delle disuguaglianze di Bell da parte delle correlazioni quantistiche, riguarda le correlazioni che tali modelli contestuali definiscono *in aggiunta alle previsioni della meccanica quantistica*;
- (4) discuteremo le implicazioni del punto (3) sull’interpretazione delle disuguaglianze di Bell.

## 4.2 Modelli classici per un sistema a tre osservabili

Utilizzeremo ora il risultato ottenuto nel capitolo 3, cioè il fatto che per tre osservabili esiste sempre un modello probabilistico classico, indipendentemente dalle relazioni di compatibilità, applicabile in particolare al caso in cui due osservabili agiscono in una regione e la terza in un'altra regione distante; analizzando l'intero modello probabilistico, cioè non solo le correlazioni misurabili ma anche quelle attribuibili, sarà chiaro che cosa esattamente viene "influenzato in modo non locale".

Consideriamo un sistema quantistico costituito da due particelle di spin  $1/2$ , siano  $A_1$  e  $A_2$  due osservabili identificate con due proiettori ortogonali sugli stati di spin up lungo due direzioni  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$  per la prima particella, e  $A_3$  un'osservabile identificata invece con il proiettore ortogonale sullo stato di spin up lungo la direzione  $\hat{n}_3$  per la seconda particella. A questo punto le relazioni di compatibilità sono  $A_1 \leftrightarrow A_3$  e  $A_2 \leftrightarrow A_3$ , la loro struttura di algebra parziale può essere immersa nell'algebra di Boole  $\mathfrak{B}$  liberamente generata da  $\{A_1, A_2, A_3\}$  per il discorso fatto nell'esempio (3.1.2) del capitolo 3; inoltre la struttura probabilistica è data dalla collezione di misure di probabilità  $\{f_{|\mathfrak{B}_{13}}, f_{|\mathfrak{B}_{23}}\}$ , dove  $\mathfrak{B}_{ij}$  è l'algebra generata da  $\{A_i, A_j\}$ . Per il teorema (3.2.2) sappiamo che la collezione di misure può essere estesa ad una misura  $m$  sull'intera algebra. Abbiamo quindi un modello probabilistico classico che riproduce i risultati della meccanica quantistica; segue che in questo modello il risultato della singola misura di un'osservabile è assegnato, indipendente dal fatto di misurarla congiuntamente ad un'altra o meno.

Consideriamo ora tre osservabili in particolare. Siano  $\hat{n}_1 = \hat{x}$ ,  $\hat{n}_2 = \hat{z}$  e  $\hat{n}_3 = \frac{\hat{x} + \hat{z}}{\sqrt{2}}$ , le osservabili  $A_1, A_2, A_3$  saranno quindi rappresentate rispettivamente dagli operatori

$$\frac{1 + \sigma_x}{2}, \quad \frac{1 + \sigma_z}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{\tau_x + \tau_z}{2\sqrt{2}}, \quad (4.1)$$

dove le  $\sigma_i$  agiscono sul primo sottosistema e le  $\tau_i$  sul secondo. Scegliamo come stato del sistema lo stato di singoletto  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$  e calcoliamo le aspettative quantistiche:

$$\langle A_1 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (4.2)$$

$$\langle A_2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (4.3)$$

$$\langle A_3 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (4.4)$$

$$\langle A_1 A_3 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad (4.5)$$

$$\langle A_2 A_3 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}. \quad (4.6)$$

In particolare osserviamo che  $\langle A_i A_3 \rangle$  è rappresentata nel modello classico dalla misura  $m(A_i \cap A_3)$ . Cosa possiamo dire della correlazione non misurabile secondo la meccanica quantistica? L'estensione della collezione di misure di probabilità che derivano dalla meccanica quantistica a una misura  $m$  sull'algebra  $\mathfrak{B}$  in generale non è unica, ma la proprietà di misura di  $m$  limita i possibili valori di  $\langle A_1 A_2 \rangle$ . Sicuramente è compresa tra 0 e 1, dato che è una probabilità, in più deve valere:

$$\langle A_1 A_2 \rangle \leq \langle A_1 \rangle, \quad \langle A_1 A_2 \rangle \leq \langle A_2 \rangle. \quad (4.7)$$

Possiamo ricavare anche altre condizioni su  $\langle A_1 A_2 \rangle$ ; per esempio utilizzando  $m(A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c) \geq 0$  abbiamo che

$$\begin{aligned} m(A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c) &= m(A_3 \cap (A_2 \cup A_1)^c) = m(A_3) - m(A_3 \cap (A_2 \cup A_1)) = \\ &= m(A_3) - [m(A_1 \cap A_3) + m(A_2 \cap A_3) - m(A_1 \cap A_2)] = \\ &= m(A_3) - m(A_1 \cap A_3) - m(A_2 \cap A_3) + m(A_1 \cap A_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Segue

$$\langle A_1 A_2 \rangle \geq \langle A_1 A_3 \rangle + \langle A_2 A_3 \rangle - \langle A_3 \rangle, \quad (4.8)$$

che specializzato ai valori (4.2) – (4.6) mi da:

$$\langle A_1 A_2 \rangle \geq \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad (4.9)$$

risultato compatibile con la (4.7).

Disuguaglianze molto simili nella forma alla (4.10) sono state discusse da Bell in [8]; in realtà in quel caso non si tratta di un sistema a tre osservabili, poiché per ottenerle si introduce una quarta osservabile che si ipotizza sia perfettamente anticorrelata con la seconda; inoltre ne viene fatto un uso completamente diverso, infatti in quel caso si tratta di correlazioni tutte confrontabili con quelle previste dalla meccanica quantistica e, in particolare, si mostra che alcune correlazioni quantistiche violano tali disuguaglianze.

In maniera analoga da  $m(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \geq 0$  si può ottenere la disuguaglianza:

$$\langle A_1 A_2 \rangle \leq \langle A_1 \rangle + \langle A_2 A_3 \rangle - \langle A_1 A_3 \rangle \quad (4.10)$$

che specializzata al nostro caso non fornisce nuove informazioni poiché ci dice semplicemente  $\langle A_1 A_2 \rangle \leq \frac{1}{2}$ .

Questo risultato non ha niente a che vedere con influenze “non locali” poiché è un fatto probabilistico vero indipendentemente da ipotesi di separazione space-like; è invece compatibile con la seguente interpretazione: effettuando una misura sul secondo sottosistema abbiamo una maggiore informazione sul sistema completo, per esempio lo stato può essere il risultato di un'interazione avvenuta in passato tra i due sottosistemi, e possiamo quindi ulteriormente restringere l'intervallo dei valori ammissibili per le correlazioni, che in ogni modello classico hanno comunque valori definiti indipendentemente

dal fatto che vengano effettivamente misurate.

Sostituiamo all'osservabile  $A_3$  dell'esempio precedente l'osservabile  $A_4$  definita da:

$$A_4 = \frac{1}{2} + \frac{\tau_x - \tau_z}{2\sqrt{2}}, \quad (4.11)$$

mantenendo le stesse osservabili  $A_1$  e  $A_2$  e lo stesso stato  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$  dell'esempio precedente. Calcoliamo le aspettazioni quantistiche:

$$\langle A_1 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (4.12)$$

$$\langle A_2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (4.13)$$

$$\langle A_4 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (4.14)$$

$$\langle A_1 A_4 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad (4.15)$$

$$\langle A_2 A_4 \rangle = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8}. \quad (4.16)$$

Anche in questo esempio sono valide delle disuguaglianze analoghe alle (4.8) e (4.10) dove si scambia 3 con 4:

$$\langle A_1 A_2 \rangle \geq \langle A_1 A_4 \rangle + \langle A_2 A_4 \rangle - \langle A_4 \rangle, \quad (4.17)$$

$$\langle A_1 A_2 \rangle \leq \langle A_1 \rangle + \langle A_2 A_4 \rangle - \langle A_1 A_4 \rangle \quad (4.18)$$

A questo punto se supponiamo di misurare  $A_3$ , dai risultati elencati in (4.2)-(4.6), per la (4.8) abbiamo:

$$\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{2}}{4} \leq \langle A_1 A_2 \rangle \leq \frac{1}{2} \quad (4.19)$$

Se invece supponiamo di misurare  $A_4$  invece che  $A_3$  sul secondo sottosistema, otteniamo dalle (4.17) e (4.18) che

$$0 \leq \langle A_1 A_2 \rangle \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{4}. \quad (4.20)$$

Risulta quindi che il valore della correlazione  $\langle A_1 A_2 \rangle$  si trova in uno tra due intervalli disgiunti, a seconda che ci si trovi nello spazio di probabilità relativo a  $(A_1, A_2, A_3)$  oppure  $(A_1, A_2, A_4)$ , cioè a seconda che si scelga di misurare sul secondo sottosistema  $A_3$  o  $A_4$ . Ne risulta che assumendo le previsioni della meccanica quantistica per le osservabili compatibili non c'è nessun modo di assegnare un valore definito alla correlazione  $\langle A_1 A_2 \rangle$  indipendentemente dalla scelta della misura da effettuare sul secondo sottosistema.

Riprendendo la discussione dei punti (1) – (4) possiamo dire che :

- a) abbiamo mostrato come due contesti siano sufficienti per un modello contestuale che riproduce le previsioni della meccanica quantistica per le quattro osservabili;
- b) le coppie di contesti possibili sono quindi  $C_a = ((1, 2, 3), (1, 2, 4))$  oppure quello simmetrico per scambio di (12) con (34), cioè  $C_b((1, 3, 4), (2, 3, 4))$ ; possiamo facilmente convincerci di ciò con il seguente ragionamento: per scegliere il primo contesto ho quattro possibilità, corrispondenti ai singoli contesti elencati in  $C_a$  e  $C_b$ , e in questo modo riproduco 2 correlazioni; per riprodurre le altre due l'unica possibilità è scegliere come secondo contesto quello che completa la coppia corrispondente alla prima scelta, poiché qualunque altra scelta non consente di riprodurre tutte le correlazioni quantistiche.

### 4.3 Conseguenze dell'esistenza di modelli classici per tre osservabili sulle interpretazioni della MQ

Prima di analizzare le conseguenze fisiche dei risultati ottenuti è utile aprire una parentesi sulla generalità del modello probabilistico proposto.

Supponiamo esista un modello probabilistico classico che riproduce le aspettative della meccanica quantistica per delle misure di spin su due particelle di spin 1/2; tale modello sarà costituito da un'algebra di Boole  $\mathfrak{B}$ , i cui elementi rappresentano i “test” per le singole osservabili quantistiche e i possibili “test congiunti” (anche quelli “vietati” dalla meccanica quantistica), e una misura di probabilità  $\mu$  su  $\mathfrak{B}$  che rappresenta la probabilità che un certo “test” risponda affermativamente.

Restringere il modello probabilistico a tre osservabili, rappresentate dagli elementi  $A_1, A_2, A_3$ , significa restringere le possibili predizioni a tutti gli esperimenti in cui si misurano singolarmente o congiuntamente le tre osservabili. Tali predizioni sono tutte ottenibili dalla conoscenza degli elementi  $\mu((-1)^{\varepsilon_1} A_1 \cap (-1)^{\varepsilon_2} A_2 \cap (-1)^{\varepsilon_3} A_3)$  per ogni  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ , dove intendiamo che  $-A_i \equiv A_i^c$ . Infatti per ogni coppia di elementi  $A, B$  in  $\mathfrak{B}$  vale  $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c)$ .

Il modello probabilistico ristretto alle tre osservabili è costituito da un'algebra  $\mathfrak{B}_3$ , generata dagli elementi  $\{A_1, A_2, A_3\}$  in generale in modo non libero, e dalla misura di probabilità  $\mu|_{\mathfrak{B}_3}$ . Tale modello è riproducibile da un'algebra libera  $\tilde{\mathfrak{B}}_3$ , generata liberamente dagli elementi  $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3\}$ , e da una misura  $\tilde{\mu}$  tale che

$$\mu((-1)^{\varepsilon_1} A_1 \cap (-1)^{\varepsilon_2} A_2 \cap (-1)^{\varepsilon_3} A_3) = \tilde{\mu}((-1)^{\varepsilon_1} \tilde{A}_1 \cap (-1)^{\varepsilon_2} \tilde{A}_2 \cap (-1)^{\varepsilon_3} \tilde{A}_3)$$

per ogni  $\varepsilon_i$  in  $\{0, 1\}$ .

Avendo a disposizione la sola “preparazione” descritta dalla misura di probabilità  $\mu$  del modello classico discusso precedentemente, e tutti i possibili “test congiunti” delle osservabili rappresentate dagli elementi  $A_1, A_2, A_3$  di  $\mathfrak{B}$ , non possiamo in nessun modo

distinguere le predizioni del modello  $(\mathfrak{B}_3, \mu|_{\mathfrak{B}_3})$  da quelle del modello  $(\tilde{\mathfrak{B}}_3, \tilde{\mu})$ . In questo senso non si perde di generalità nella discussione effettuata precedentemente basata un modello probabilistico classico in cui le osservabili  $A_1, A_2, A_3$  sono dei generatori liberi, cioè in cui si ignorano possibili “relazioni logiche a priori” tra esse.

Possiamo ora affrontare la discussione delle implicazioni dei risultati ottenuti nella sezione precedente sull’interpretazione delle disuguaglianze di Bell.

La descrizione delle variabili  $A_1$  e  $A_2$  con un modello probabilistico classico ammette che su ogni singolo sistema assumano un valore definito, indipendentemente dal fatto di scegliere di misurarle o meno; si ammette perciò, almeno in linea di principio, la possibilità di “conoscere” o di “misurare” congiuntamente  $A_1$  e  $A_2$  su ogni singolo sistema; sarebbe quindi possibile “registrare” la correlazione  $\langle A_1 A_2 \rangle$  su un insieme di sistemi fisici che hanno subito la stessa “preparazione”. Ma se esistesse uno strumento capace di “registrare” tale correlazione, il risultato sarebbe dipendente da una possibile scelta di misurare  $A_3$  oppure  $A_4$ ; tale scelta può essere rimandata ad un futuro arbitrariamente lontano in cui comunque possono essere verificate le corrispondenti correlazioni previste dalla meccanica quantistica.

Si potrebbe obiettare che il problema sta nel fatto che abbiamo scelto la coppia di contesti sbagliati per descrivere tale situazione: invece di scegliere la coppia  $C_a$  e affermare che la scelta futura di misurare  $A_3$  o  $A_4$  influenza i valori di  $A_1$  e  $A_2$ , avremmo dovuto scegliere la coppia  $C_b$  e affermare che i valori di  $A_3$  e  $A_4$  vengono influenzati dalla precedente scelta di misurare  $A_1$  oppure  $A_2$ . Ma questo non è assolutamente il punto. Non ci interessa quale scelta di contesti descrive meglio la situazione a quattro osservabili, *ma se sia possibile attribuire un valore alla correlazione  $\langle A_1 A_2 \rangle$  in accordo con le correlazioni che coinvolgono le osservabili  $A_1$  e  $A_2$  previste dalla meccanica quantistica.*

Per chiarire il confronto con il caso CHSH discusso nel capitolo 1, potremmo dire che il risultato CHSH afferma che non esiste una teoria probabilistica classica per le quattro osservabili dichiarate precedentemente che non sia contestuale, cioè non esiste una teoria ad un unico “contesto” che descrive le previsioni della meccanica quantistica per le quattro osservabili; tale affermazione è simmetrica per scambio delle coppie  $(A_1, A_2)$  e  $(A_3, A_4)$ , e questa simmetria permette di ipotizzare che l’origine della contestualità stia in “influenze” che si propagano a velocità  $v > c$  (eventualmente infinita). Infatti una possibile spiegazione della violazione delle disuguaglianze CHSH da parte della meccanica quantistica è che la scelta delle misure da effettuare in una regione influenzi i risultati delle misure che vengono effettuate nell’altra; nell’ipotesi di una separazione time-like questa spiegazione è in accordo con la causalità relativistica se si ipotizza che il risultato della misura successiva sia influenzato da quella precedente, ma nel caso di separazione space-like queste influenze devono necessariamente propagarsi a velocità maggiore di quella della luce.

La nostra discussione mostra come sia sempre attribuibile un valore alla correlazione

$\langle A_1 A_2 \rangle$  una volta scelta un'osservabile da misurare tra  $A_3$  e  $A_4$ , e come diverse scelte diano origine a attribuzioni incompatibili tra loro. Le previsioni della meccanica quantistica sulle correlazioni osservabili necessitano per essere riprodotte di una teoria con almeno due “contesti”. Ne segue una diversa conclusione rispetto al caso CHSH; i problemi che nascono dall'analisi della compatibilità tra modelli a tre osservabili non sono risolvibili ipotizzando l'esistenza di “influenze” che si propagano a velocità  $v > c$  (eventualmente infinita); la misura di  $A_3$  oppure di  $A_4$  può essere, in linea di principio, effettuata ad un istante arbitrariamente lontano da quello in cui vengono effettuate le misure di  $A_1$  e  $A_2$ , in modo che tale evento appaia *successivo* in qualunque sistema di riferimento, condizione che è anche stabile sotto la possibilità di propagazioni a velocità superiore a quella della luce. La dipendenza dal contesto delle attribuzioni dei loro valori alle osservabili  $A_1$  e  $A_2$  non può perciò essere spiegata con un'“influenza” che si propaga a velocità infinita.

Osserviamo inoltre che l'introduzione delle “influenze” discusse precedentemente può essere formalizzata con l'aggiunta di una variabile che rappresenta la “scelta dello sperimentatore”, e lo “sperimentatore” che effettua la scelta può essere anche uno strumento che “sceglie” in maniera casuale come ad esempio negli esperimenti di verifica della violazione delle disuguaglianze di Bell.

Le “influenze” di cui si ha bisogno per ottenere un modello con un unico “contesto”, possono andare in definitiva in tutte le direzioni e i versi dello spazio-tempo e non hanno nulla a che vedere con la velocità della luce. I modelli che riproducono le previsioni della meccanica quantistica per le quattro osservabili dichiarate precedentemente all'interno di un unico “contesto” violano perciò non solo la “località” (relativistica), ma l'ordinamento causale dello spazio-tempo.

Osserviamo anche che il caso a tre osservabili e il caso a quattro sono strettamente legati, infatti i teoremi (3.2.2) e (3.2.3) implicano che per il caso a quattro osservabili  $A_1, A_2, A_3, A_4$  con le relazioni di compatibilità  $A_i \leftrightarrow A_j$  con  $\{ij\} = \{13\}, \{14\}, \{23\}, \{24\}$  esiste un modello probabilistico classico che riproduce i risultati della meccanica quantistica se e solo se i due modelli classici che sono sempre definibili sulle algebre generate rispettivamente dalle osservabili  $\{A_1, A_2, A_3\}$  e  $\{A_1, A_2, A_4\}$  coincidono sull'intersezione delle due algebre, cioè sull'algebra generata da  $\{A_1, A_2\}$ . Negando entrambe le affermazioni otteniamo che non esiste un modello probabilistico classico per quattro osservabili con le relazioni di compatibilità dichiarate precedentemente, cioè sono violate le disuguaglianze CHSH, se e solo se i due modelli a tre osservabili non coincidono sull'intersezione, cioè se i valori attribuibili alla correlazione  $\langle A_1 A_2 \rangle$  dai modelli classici a tre osservabili presentano le “influenze all'indietro nel tempo” discusse precedentemente. Quindi la violazione delle disuguaglianze di CHSH avviene *in tutti e soli i casi* a quattro osservabili, con le relazioni di compatibilità discusse precedentemente, in cui possiamo anche ottenere delle “influenze all'indietro nel tempo” sulle correlazioni attribuibili ma non direttamente misurabili nei modelli a tre osservabili.

Può essere interessante confrontare i risultati ottenuti in questo capitolo con il dibattito tra Stapp e Mermin sulla possibilità di “influenze all’indietro nel tempo”, si vedano ad esempio [34] e [35].



# Appendice A

## Algebre di Boole

In questa appendice sono raccolti alcuni risultati sulle algebre di Boole necessari per comprendere gli argomenti trattati nei capitoli 2 e 3. La fonte di questi risultati è [36], ma per semplicità di esposizione alcuni teoremi generali sono stati riderivati nel caso più semplice delle algebre finite.

### A.1 Definizione e proprietà fondamentali

Un'algebra di Boole è un insieme non vuoto  $\mathfrak{B}$  su cui sono definite due operazioni binarie  $\cup, \cap$  e una operazione unaria  $^c$ , che hanno le stesse proprietà dell'unione, l'intersezione e il complemento nella teoria degli insiemi. Per ogni  $A, B$  in  $\mathfrak{B}$   $A \cup B$  e  $A \cap B$  sono elementi di  $\mathfrak{B}$  unicamente determinati da  $A$  e  $B$  chiamati rispettivamente *unione* e *intersezione* di  $A$  e  $B$ , per ogni  $A$  in  $\mathfrak{B}$   $A^c$  è un elemento di  $\mathfrak{B}$  unicamente determinato da  $A$  detto il *complemento* di  $A$ . Esistono insiemi di assiomi equivalenti che caratterizzano queste operazioni, noi considereremo i seguenti:

$$(A_1) \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$$

$$(A_2) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C,$$

$$(A_3) \quad (A \cap B) \cup B = B, \quad (A \cup B) \cap B = B,$$

$$(A_4) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$(A_5) \quad (A \cap A^c) \cup B = B, \quad (A \cup A^c) \cap B = B.$$

Vediamo ora alcune conseguenze di questi assiomi. Dagli assiomi  $(A_1)$  e  $(A_2)$  ricaviamo che le operazioni  $\cup$  e  $\cap$  sono commutative e associative quindi gli elementi

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad (A.1)$$

sono ben definiti e non dipendono dall'ordine degli elementi. Si verifica inoltre che per ogni  $A \in \mathfrak{B}$  vale

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A. \quad (\text{A.2})$$

Queste identità sono chiamate *proprietà di idempotenza*, l'assioma  $(A_4)$  *proprietà distributiva*, e l'assioma  $(A_3)$  *proprietà di assorbimento*. Da quest'ultima segue che le uguaglianze

$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B \quad (\text{A.3})$$

sono equivalenti. Se vale (A.3) diciamo che  $A$  è un *sottoelemento* di  $B$  o che  $A$  è *contenuto* in  $B$  o che  $B$  *contiene*  $A$  e lo indichiamo con

$$A \subset B, \quad \text{o} \quad B \supset A. \quad (\text{A.4})$$

La relazione  $\subset$  è detta *inclusione booleana*. Si verifica facilmente che è una relazione d'ordine parziale cioè che dati  $A, B$  e  $C$  in  $\mathfrak{B}$  vale:

$$A \subset A; \quad (\text{A.5})$$

$$\text{se } A \subset B \text{ e } B \subset A, \text{ allora } A = B; \quad (\text{A.6})$$

$$\text{se } A \subset B \text{ e } B \subset C, \text{ allora } A \subset C. \quad (\text{A.7})$$

Inoltre segue immediatamente dall'assioma  $(A_5)$  che per ogni  $A$  e  $B$  vale

$$A \cap A^c \subset B \quad \text{e} \quad B \subset A \cup A^c. \quad (\text{A.8})$$

Sostituendo  $B$  con  $B \cap B^c$  e  $B \cup B^c$  in (A.8) e successivamente scambiando il ruolo di  $A$  e  $B$  otteniamo che

$$A \cap A^c = B \cap B^c, \quad \text{e} \quad A \cup A^c = B \cup B^c. \quad (\text{A.9})$$

Quindi l'elemento  $A \cap A^c$ , che è indipendente dalla scelta di  $A$  sarà chiamato *elemento zero* dell'algebra e indicato col simbolo  $\emptyset$  o  $\emptyset_{\mathfrak{B}}$ , mentre l'elemento  $A \cup A^c$ , sempre indipendente dalla scelta di  $A$ , col simbolo  $\mathbf{1}$  o  $\mathbf{1}_{\mathfrak{B}}$ . L'assioma  $(A_5)$  si può riscrivere quindi nella forma

$$\emptyset \cup B = B, \quad \mathbf{1} \cap B = B \quad (\text{A.10})$$

o nella forma

$$\emptyset \subset A, \quad A \subset \mathbf{1}, \quad (\text{A.11})$$

per ogni  $A \in \mathfrak{B}$ . Abbiamo detto che le operazioni  $\cap$ ,  $\cup$  e  $^c$  hanno le stesse proprietà delle corrispondenti operazioni nella teoria degli insiemi. Questo fatto non è una conseguenza diretta degli assiomi, ma verrà da un teorema di rappresentazione che vedremo più avanti. Ora dedurremo solo alcune proprietà che ci saranno utili.

Possiamo osservare che gli operatori  $\cap$  e  $\cup$  hanno un ruolo simmetrico all'interno degli

assiomi  $(A_1)$ - $(A_5)$ , cioè rimangono invariati sostituendo dovunque  $\cap$  con  $\cup$  e  $\cup$  con  $\cap$ . Quindi una qualsiasi proposizione vera per un'algebra di Boole formulata in termini di  $(\cap, \cup, ^c)$  rimane vera se scambiamo ovunque  $\cap$  con  $\cup$  e viceversa. La proposizione così ottenuta è detta *duale*. Dobbiamo fare attenzione però che scambiando  $\cup$  con  $\cap$  scambiamo il ruolo dello zero e dell'unità e dei simboli  $\subset$  e  $\supset$ . Per ottenere un'affermazione duale dovremo quindi scambiare anche questi simboli, questo metodo generale è detto *principio di dualità*.

Vediamo che

$$\text{se } A \subset C \text{ e } B \subset D, \quad \text{allora } A \cup B \subset C \cup D. \quad (\text{A.12})$$

Infatti  $A \cup C = C$  e  $B \cup D = D$  allora  $(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D) = C \cup D$   
Per dualità otteniamo da questa che

$$\text{se } C \subset A \text{ e } D \subset B \quad \text{allora } C \cap D \subset A \cap B \quad (\text{A.13})$$

Segue immediatamente che

$$\text{se } A \subset C \text{ e } B \subset C \quad \text{allora } A \cup B \subset C \quad (\text{A.14})$$

e per dualità

$$\text{se } C \subset A \text{ e } C \subset B \quad \text{allora } C \subset A \cap B. \quad (\text{A.15})$$

Abbiamo anche che

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B \quad \text{e le duali } A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B. \quad (\text{A.16})$$

Segue da (A.14) e (A.16) che l'unione  $A \cup B$  può essere definita in termini della relazione d'ordine  $\subset$  nel senso che  $A \cup B$  è il minimo elemento di  $\mathfrak{B}$  tale che  $A$  e  $B$  sono sottoelementi. Allo stesso modo da (A.15) e (A.16) si può definire  $A \cap B$  come il massimo sottoelemento di  $A$  e  $B$  contemporaneamente.

Osserviamo inoltre che per ogni  $A \in \mathfrak{B}$

$$A \cap \mathbf{1} = A, \quad A \cup \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad (\text{A.17})$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset. \quad (\text{A.18})$$

Vediamo ora che il complemento  $A^c$  di  $A$  è completamente caratterizzato dalla definizione di  $\emptyset$  e  $\mathbf{1}$ , nel senso che

$$\text{se } A \cap C = \emptyset \text{ e } A \cup C = \mathbf{1}, \quad \text{allora } C = A^c \quad (\text{A.19})$$

Infatti dalla (A.17), dalla (A.18) e dall'assioma  $(A_4)$  risulta che

$$C = \emptyset \cup C = (A \cap A^c) \cup C = (A \cup C) \cap (A^c \cup C) = \mathbf{1} \cap (A^c \cup C) = A^c \cup C \quad (\text{A.20})$$

cioè  $A^c \subset C$ . Ma

$$C = \mathbf{1} \cap C = (A \cup A^c) \cap C = (A \cap C) \cup (A^c \cap C) = \emptyset \cup (A^c \cap C) = A^c \cap C \quad (\text{A.21})$$

cioè  $C \subset A^c$  quindi  $C = A^c$ . Da questa proprietà insieme all'assioma di commutatività ( $A_1$ ) risulta che

$$A = (A^c)^c \quad (\text{A.22})$$

Otteniamo quindi che

$$A = B \iff A^c = B^c \quad (\text{A.23})$$

Dimostriamo ora le seguenti identità che prendono il nome di *regole di de Morgan*:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (\text{A.24})$$

Infatti se definiamo  $C = A^c \cap B^c$  soddisfa

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap A^c \cap B^c) \cup (B \cap A^c \cap B^c) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \quad (\text{A.25})$$

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup B \cup A^c) \cap (A \cup B \cup B^c) = \mathbf{1} \cup \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (\text{A.26})$$

Quindi  $C = (A \cup B)^c$ . La seconda identità si ottiene per dualità. Da queste identità otteniamo che

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \quad e \quad A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, \quad (\text{A.27})$$

possiamo quindi definire l'unione a partire dall'intersezione e il complemento, oppure possiamo definire l'intersezione a partire dall'unione e il complemento.

Sostituendo  $B$  con  $A^c$  nelle due espressioni precedenti otteniamo

$$\mathbf{1} = \emptyset^c, \quad \emptyset = \mathbf{1}^c. \quad (\text{A.28})$$

Possiamo definire *differenza* di  $A$  e  $B$  l'elemento  $A \cap B^c \equiv A \setminus B$ . Osserviamo che

$$A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset \quad (\text{A.29})$$

Infatti se  $A \subset B$ , allora  $A \cap B^c = A \cap B \cap B^c = A \cap \emptyset = \emptyset$ . Viceversa se  $A \cap B^c = \emptyset$  allora  $A = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap B \cup \emptyset = A \cap B$  cioè  $A \subset B$ .

Dati due elementi  $A$  e  $B$  diremo che sono *disgiunti* se

$$A \cap B = \emptyset \quad (\text{A.30})$$

Osserviamo che, dati due qualsiasi  $A$  e  $B$ , gli elementi  $A$  e  $B \setminus A$  sono sempre disgiunti cioè  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ .

Un elemento  $a \neq \emptyset$  di  $\mathfrak{B}$  è detto un *atomo* di  $\mathfrak{B}$  se per ogni  $A \in \mathfrak{B}$  l'inclusione  $A \subset a$  implica:

$$A = \emptyset \quad oppure \quad A = a. \quad (\text{A.31})$$

Se  $a$  è un atomo allora per ogni elemento  $B$  vale

$$a \subset B \quad \text{oppure} \quad a \cap B = \emptyset \quad (\text{A.32})$$

Per verificare basta sostituire nelle espressioni precedenti  $A = a \cap B$ . Viceversa se  $a \neq \emptyset$  e ha la proprietà (A.32) allora  $a$  è un atomo.

Un'algebra di Boole  $\mathfrak{B}$  è detta *atomica* se per ogni  $A \in \mathfrak{B}$  esista un atomo  $a$  tale che  $a \subset A$ .

Dimostriamo ora due lemmi che ci saranno utili nel seguito.

**Lemma A.1.1.** *Ogni algebra di Boole  $\mathfrak{B}$  finita (cioè con un numero finito di elementi) è atomica.*

**Dimostrazione** Consideriamo un generico elemento  $B \in \mathfrak{B}$ , con  $B \neq \emptyset$  e indichiamo con  $N$  il numero di elementi di  $\mathfrak{B}$ . Se  $B$  è un atomo contiene se stesso quindi abbiamo finito. Supponiamo allora che  $B$  non sia un atomo e supponiamo per assurdo che  $B$  non contenga un atomo. Se  $B$  non è un atomo esisterà  $A_1 \subset B$  tale che  $A_1 \neq \emptyset$  e  $A_1 \neq B$  e non contiene un atomo perché  $A_1 \subset B$ .

Ora posso applicare lo stesso ragionamento fatto per  $B$  a  $A_1$ , cioè posso trovare  $A_2 \neq \emptyset$  tale che  $\emptyset \subsetneq A_2 \subsetneq A_1 \subsetneq B$ . Posso ripetere questo ragionamento  $k$  volte (prendiamo  $k > N$ ) e ottengo:

$$\emptyset \subsetneq A_k \subsetneq \dots \subsetneq A_1 \subsetneq B \quad (\text{A.33})$$

Ma in questo modo, per ogni  $k$ , ottengo  $k$  elementi distinti in contraddizione con l'ipotesi che  $\mathfrak{B}$  abbia  $N$  elementi.  $\square$

**Lemma A.1.2.** *Data un algebra di Boole finita  $\mathfrak{B}$ , con  $N$  elementi, per ogni elemento  $B \neq \emptyset$  esistono  $a_1, \dots, a_k$  atomi ( $k \leq N$ ) tali che  $B = \bigcup_{i=1}^k a_i$  dove l'unione è disgiunta.*

**Dimostrazione** Se  $B$  è un atomo abbiamo finito, supponiamo quindi che non lo sia. Allora per il lemma precedente esiste  $a_1$  atomo contenuto in  $B$  tale che  $\emptyset \subsetneq (B \setminus a_1) \subsetneq B$ , dove le inclusioni sono ovvie, e il fatto che sono distinti viene dall'ipotesi che  $B$  non sia un atomo.

Ora possiamo ripetere il ragionamento per  $B \setminus a_1$ , o è un atomo, in tal caso abbiamo finito, oppure contiene un atomo  $a_2$  tale che  $\emptyset \subsetneq (B \setminus a_1) \setminus a_2 \subsetneq B \setminus a_1$ . Come nel lemma precedente possiamo ripetere il ragionamento al più  $N$  volte quindi esisterà  $k \leq N$  tale che

$$\emptyset = (\dots (B \setminus a_1) \setminus \dots) \setminus a_k \subsetneq \dots \subsetneq B \setminus a_1 \subsetneq B \quad (\text{A.34})$$

Quindi  $B \subset \bigcup_{i=1}^k a_i$ , ma  $a_i \subset B \quad \forall i$  perciò  $\bigcup_{i=1}^k a_i \subset B$  e vale quindi l'uguaglianza. Inoltre l'unione è disgiunta perché dati due atomi o sono disgiunti o coincidono.  $\square$

**Osservazione A.1.1.** Da questo lemma ricaviamo che se  $\mathfrak{B}$  ha  $N$  elementi allora contiene  $n$  atomi e vale  $N = 2^n$ . Infatti preso un elemento  $A$  si può scrivere in modo unico come unione disgiunta di atomi poiché dato l'atomo  $i$ -esimo  $a_i$  o  $a_i \subseteq A$  oppure  $a_i \not\subseteq A$ , ci sono quindi  $2^n$  combinazioni possibili.

A partire da questi due lemmi possiamo dimostrare il seguente:

**Teorema A.1.1.** *Data un'algebra di Boole finita  $\mathfrak{B}$  con  $N = 2^n$  elementi ( $n$  atomi) questa è isomorfa all'algebra di Boole dei sottinsiemi di un insieme  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  con le operazioni  $\cup, \cap, ^c$  intese come unione, intersezione e complemento di sottinsiemi di  $X$ .*

**Dimostrazione** Siano  $\{a_1, \dots, a_n\}$  gli atomi di  $\mathfrak{B}$ , costruiamo l'isomorfismo in questo modo :

$$a_i \mapsto x_i \quad e \quad quindi \quad \forall A \quad \bigcup_{i \in I_A} a_i = A \mapsto X_A = \bigcup_{i \in I_A} x_i \quad con \quad I_A \subset \{1, \dots, n\}.$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che  $A$  si scrive come unione disgiunta di atomi in modo unico, cioè per ogni  $A$  esiste unico  $I_A$  tale che  $A = \bigcup_{i \in I_A} a_i$ . Da questa definizione si vede facilmente che questa mappa conserva le relazioni algebriche ed è quindi un omomorfismo, l'iniettività segue dall'unicità di  $I_A$  e la surgettività dal fatto che  $X$  ha esattamente  $N = 2^n$  sottinsiemi.  $\square$

## A.2 Misure

Una funzione  $m : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *misura* se:

(a)  $0 \leq m(A) \leq \infty$  per ogni  $A \in \mathfrak{B}$ , e esiste  $A_0$  tale che  $m(A_0) < \infty$

(b)  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$  se  $A \cap B = \emptyset$   $A, B \in \mathfrak{B}$

Verifichiamo che una misura ha le seguenti proprietà:

(c)  $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$ ;

(d) se  $A \subset B$ , allora  $m(A) \leq m(B)$ ;

(e)  $m(\emptyset) = 0$ .

Sia  $A_0$  l'elemento tale che  $m(A_0) < \infty$  segue da (b) che

$$m(A_0) = m(A_0 \cup \emptyset) = m(A_0) + m(\emptyset)$$

. Dato che  $m(A_0)$  è finito otteniamo (e). Ora se  $A \subset B$  allora

$$m(A) \leq m(A) + m(A \setminus B) = m(B)$$

perché  $m$  è positiva e  $A$  e  $A \setminus B$  sono disgiunti e l'unione da  $B$ , questo prova (d). Utilizzando questo fatto e il fatto che  $(B \setminus A) \subset B$  otteniamo

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A) \leq m(A) + m(B)$$

Definiamo *misura normalizzata* o *misura di probabilità* una misura  $\mu$  su  $\mathfrak{B}$  tale che  $0 \leq \mu(A) \leq 1$  e  $\mu(\mathbf{1}) = 1$ , in particolare vale che  $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$ . E definiamo *misura a due valori* o *misura moltiplicativa* una misura normalizzata  $\mu$  tale che per ogni  $A \in \mathfrak{B}$  con  $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbf{1}$  vale  $\mu(A) = 0$  o  $1$ . In particolare notiamo che una misura a due valori soddisfa  $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$  per ogni  $A, B \in \mathfrak{B}$ , da cui deriva appunto il nome misura moltiplicativa. Infatti se una delle due è zero è ovvio perché dalla relazione di inclusione segue  $m(A \cap B) \leq m(A)$  e  $m(A \cap B) \leq m(B)$ , invece nel caso in cui siano entrambe 1 utilizziamo il fatto che  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ , che implica  $m(A \cap B) = 1 - m(A^c \cup B^c)$  ma  $m(A^c \cup B^c) \leq m(A^c) + m(B^c) = 0$ .

**Lemma A.2.1.** *Sia  $\mathfrak{B}$  un'algebra di Boole con  $n$  atomi  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , allora per ogni atomo  $a_i$  esiste una misura moltiplicativa  $m_i$  tale che  $m_i(a_i) = 1$  e le misure moltiplicative sono tutte e sole quelle che si costruiscono in questo modo, sono quindi esattamente  $n$ .*

**Dimostrazione** Consideriamo l'atomo  $a_i$  e costruiamo  $m_i : \mathfrak{B} \rightarrow \{0, 1\}$  tale che, per ogni  $A$ ,  $m_i(A) = 1$  se  $a_i \subset A$  e zero altrimenti. Verifichiamo che è una misura moltiplicativa. Dalla definizione  $0 \leq m_i(A) \leq 1$ , e se  $A \cap B = \emptyset$  vale  $m_i(A \cup B) = m_i(A) + m_i(B)$  infatti se  $A$  e  $B$  sono disgiunti ci sono tre possibilità :  $a_i \subset A$  oppure  $a_i \subset B$  oppure  $a_i \subset (A \cup B)^c$  in tutti e tre i casi la proprietà è soddisfatta. Quindi  $m_i$  è una misura normalizzata, verifichiamo che è anche moltiplicativa cioè che  $m_i(A \cap B) = m_i(A)m_i(B)$ . Di nuovo si verifica che è soddisfatta controllando i quattro casi possibili cioè che  $a_i \subset (A \setminus B)$ ,  $a_i \subset (B \setminus A)$ ,  $a_i \subset (A \cap B)$  oppure  $a_i \subset (A^c \cup B^c)$ . Vediamo che non ce ne possono essere altre. Supponiamo che esista  $m$  tale che  $m(a_i) = 0$  per ogni  $i$ , ma allora  $m(\mathbf{1}) = m(\bigcup_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n m(a_i) = 0$  in contraddizione con la definizione di misura normalizzata. L'altra possibilità è che esista  $m$  che fa 1 su più di un atomo, per esempio che esistano  $i$  e  $j$  tali che  $m(a_i) = m(a_j) = 1$  ma allora  $m(a_i \cup a_j) = m(a_i) + m(a_j) = 2$  in contraddizione col fatto che  $m$  sia a valori in  $\{0, 1\}$ .  $\square$

**Lemma A.2.2.** Sia  $\mathfrak{B}$  un'algebra di Boole finita con  $n$  atomi  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  e sia  $m : \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$ .

Allora

$$m \text{ è una misura normalizzata} \iff m = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i},$$

dove  $\delta_{a_i}$  è la misura moltiplicativa che fa 1 su  $a_i$  e i  $\lambda_i$  soddisfano  $\lambda_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

**Dimostrazione** [ $\implies$ ] Per il lemma (A.1.2) abbiamo che dato  $A \in \mathfrak{B}$  esso è unione disgiunta di atomi cioè,

$$A = \bigcup_{i \in I} a_i \quad , \quad \text{con} \quad I \subset \{1, \dots, n\}, \implies m(A) = \sum_{i \in I} m(a_i) = \sum_{i \in I} m(a_i) \delta_{a_i}(a_i)$$

Quindi

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(a_i) \delta_{a_i}(A) \quad \forall A \tag{A.35}$$

Con  $m(a_i) \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^n m(a_i) = m(\bigcup_{i=1}^n a_i) = m(\mathbf{1}) = 1$

[ $\impliedby$ ] Viceversa data  $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}$  dobbiamo verificare che è una misura normalizzata. Per ogni  $A$  vale  $0 \leq m(A) \leq n$  che verifica la proprietà **a**, per la **b** notiamo che se  $A$  e  $B$  sono disgiunti, dato che le  $\delta_{a_i}$  sono misure, sarà

$$m(A \cup B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}(A \cup B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}(A) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}(B) = m(A) + m(B).$$

quindi  $m$  è una misura inoltre  $m(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{a_i}(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , per la proprietà **(d)** della misura vale allora  $0 \leq m(A) \leq m(\mathbf{1}) = 1$ .  $\square$

Introduciamo ora il concetto di generatori e di algebra libera.

Un sottinsieme non vuoto  $\mathfrak{B}_\circ$  di un'algebra booleana  $\mathfrak{B}$  è detto una *sottoalgebra* di  $\mathfrak{B}$  se è chiuso sotto le operazioni  $\cup$ ,  $\cap$  e  $^c$ . cioè se vale

1. se  $A, B \in \mathfrak{B}_\circ$  allora  $A \cup B \in \mathfrak{B}_\circ$
2. se  $A, B \in \mathfrak{B}_\circ$  allora  $A \cap B \in \mathfrak{B}_\circ$
3. se  $A \in \mathfrak{B}_\circ$  allora  $A^c \in \mathfrak{B}_\circ$

In realtà per le regole di de Morgan basta l'ultima e una delle prime due di queste condizioni perché sia soddisfatta anche la rimanente.

Per ogni insieme  $\mathcal{G}$  di elementi di un'algebra booleana  $\mathfrak{B}$  esiste una sottoalgebra minima



(nel senso dell'inclusione)  $\mathfrak{B}_\circ$  tale che  $\mathcal{G}$  è un sottinsieme di  $\mathfrak{B}_\circ$ .  $\mathfrak{B}_\circ$  può essere definita come l'intersezione di tutte le sottoalgebre che contengono  $\mathcal{G}$ , si dice allora che  $\mathfrak{B}_\circ$  è l'algebra *generata* dall'insieme  $\mathcal{G}$ .

Se  $\mathcal{G}$  è vuoto allora  $\mathfrak{B}_\circ$  contiene solo  $\emptyset$  e  $\mathbf{1}$ . Supponiamo  $\mathcal{G}$  non vuoto, allora  $A \in \mathfrak{B}$  appartiene a  $\mathfrak{B}_\circ$  se e solo se si può scrivere nella forma:

$$A = (A_{1,1} \cap \dots \cap A_{1,r_1}) \cup (A_{2,1} \cap \dots \cap A_{2,r_2}) \cup \dots \cup (A_{s,1} \cap \dots \cap A_{s,r_s}) \quad (\text{A.36})$$

dove per ogni  $m, n$  o  $A_{m,n} \in \mathcal{G}$  oppure  $A_{m,n}^c \in \mathcal{G}$ .

Infatti gli elementi di questa forma soddisfano la condizione (1) e, dato un elemento di questa forma, per la regola di de Morgan e la distributività il suo complemento ha ancora questa forma, per cui è soddisfatta anche la condizione (3). Viceversa gli elementi di questa forma appartengono ad ogni sottoalgebra che contiene  $\mathcal{G}$  quindi appartengono a  $\mathfrak{B}_\circ$ .

Per dualità possiamo anche vedere che la condizione (A.36) è equivalente alla condizione:

$$A = (A_{1,1} \cup \dots \cup A_{1,r_1}) \cap (A_{2,1} \cup \dots \cup A_{2,r_2}) \cap \dots \cap (A_{s,1} \cup \dots \cup A_{s,r_s}) \quad .$$

Un insieme di generatori  $\mathcal{G}$  è detto insieme di *generatori liberi* di un'algebra booleana  $\mathfrak{B}$  se ogni mappa  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{B}'$ , con  $\mathfrak{B}'$  un'altra algebra booleana, può essere estesa in maniera automaticamente unica a un omomorfismo  $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ . Un'algebra booleana è detta *libera* se contiene un insieme  $\mathcal{G}$  di generatori liberi.

**Lemma A.2.3.** *Data un'algebra booleana  $\mathfrak{B}$  con  $n$  generatori liberi  $\mathcal{G} = \{A_1, \dots, A_n\}$ , questa contiene  $2^n$  atomi che sono dati dalle possibili combinazioni  $\bigcap_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_i} A_i$  con  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ .*

**Dimostrazione** Cominciamo col notare che una misura moltiplicativa non è altro che un omomorfismo tra  $\mathfrak{B}$  e l'algebra di Boole data dall'insieme  $\{0, 1\}$  con l'identificazione, per ogni  $x, y \in \{0, 1\}$ ,  $x \cap y \equiv x \cdot y$  e  $x^c \equiv 1 - x$  e l'unione ricavata dalla regola di de Morgan. Dalla definizione di algebra libera sappiamo che ogni mappa  $f$  da  $\mathcal{G}$  in un'altra algebra di Boole  $\mathfrak{B}'$  può essere estesa ad un omomorfismo.

Quindi consideriamo tutte le possibili mappe  $f_\varepsilon : \mathcal{G} \rightarrow \{0, 1\}$ . Queste sono indicizzate da  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$  cioè abbiamo una corrispondenza biunivoca tra le  $f$  e le  $\varepsilon$  data da  $f_\varepsilon(A_i) = \varepsilon_i$ . Dato che ogni mappa si estende in maniera unica ad una misura moltiplicativa abbiamo una corrispondenza biunivoca tra gli  $\varepsilon \in \{0, 1\}^n$  e gli atomi di  $\mathfrak{B}$ . Vediamo come sono fatti questi atomi:  $f_\varepsilon$  si estende a  $m_\varepsilon$  tale che  $m_\varepsilon(A_i) = \varepsilon_i$  che si può scrivere anche come  $m_\varepsilon((-1)^{1-\varepsilon_i} A_i) = 1$  da cui risulta che  $m_\varepsilon(\bigcap_{i=1}^n (-1)^{1-\varepsilon_i} A_i) = 1$ . Se verifichiamo che  $\bigcap_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_i} A_i$  sono atomi e che sono tutti distinti abbiamo finito perché dalla corrispondenza biunivoca sappiamo che sono in numero giusto.

Verifichiamo che sono disgiunti:  $\bigcap_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon_i} A_i \cap \bigcap_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon'_i} A_i = \emptyset$  se  $\varepsilon \neq \varepsilon'$  infatti se

$\varepsilon_i \neq \varepsilon'_i$  ad un certo punto avremo  $A_i \cap A_i^c = \emptyset$ .

Consideriamo ora un generico  $a_{\varepsilon'}$  e vediamo che  $\forall B \in \mathfrak{B}$  o  $a_{\varepsilon'} \subset B$  oppure  $B \cap a_{\varepsilon'} = \emptyset$ . Dalla definizione di generatori per ogni  $B$  possiamo scrivere  $B = \bigcup_{j=1}^k \bigcap_{i \in I_j} (-1)^{\varepsilon_i^j} A_i$ , dove  $\varepsilon_i^j \in \{0, 1\}$  e  $I_j \subset \{1, \dots, n\}$ . Ora fissato  $j$ , o  $\varepsilon'_i = \varepsilon_i^j$  per ogni  $i \in I_j$  allora  $a_{\varepsilon'} \subset (\bigcap_{i \in I_j} (-1)^{\varepsilon_i^j} A_i)$ , oppure esiste  $i$  tale che  $\varepsilon'_i \neq \varepsilon_i^j$  e allora  $a_{\varepsilon'} \cap (\bigcap_{i \in I_j} (-1)^{\varepsilon_i^j} A_i) = \emptyset$ . Ripetendo il ragionamento per ogni  $j$  otteniamo che o  $a_{\varepsilon'}$  è incluso in almeno uno degli  $(\bigcap_{i \in I_j} (-1)^{\varepsilon_i^j} A_i)$  e quindi in  $B$ , oppure ha intersezione uguale a  $\emptyset$  con tutti e quindi  $a_{\varepsilon'} \cap B = \emptyset$ .  $\square$



# Bibliografia

- [1] I. Pitowsky, Quantum Probability Quantum Logic, (Springer, Berlin, 1989)
- [2] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935)
- [3] G. Birkhoff and J. Von Neumann, Ann. Math. , (1936)
- [4] G. Mackey, The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, (Benjamin, New York, 1963)
- [5] J.M. Jauch, Foundations of Quantum Mechanics, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1968)
- [6] C. Piron, Foundations of Quantum Physics, (Benjamin, Reading, MA, 1976)
- [7] J.M. Jauch and C. Piron, Helv. Phys. Acta 36, 827 (1963)
- [8] J.S. Bell, Physics 1, 195 (1964)
- [9] J.S. Bell, Rev. Mod. Phys. 38, 447 (1966)
- [10] G. Boole, Philos. Trans. R. Soc. London 152, 225 (1862)
- [11] I. Pitowsky, Brit. J. Philos. Sci. 45, 95 (1994)
- [12] A.M. Gleason, J. Math. and Mech. 6, 885 (1957)
- [13] S. Kochen E.P. Specker, J. Math. and Mech. 17, 59 (1967)
- [14] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969)
- [15] D. Bohm, Quantum Theory, (Prentice-Hall, New York, 1951)
- [16] A. Peres, Quantum Theory: Concepts and Methods, (Kluwer Academic, Dordrecht, 1993)
- [17] I. Pitowsky, arXiv:quant-ph/0208121v1 (2002)

- [18] I. Pitowsky, arXiv:quant-ph/0510095v1 (2005)
- [19] E. Hrushovski and I. Pitowsky, arXiv:quant-ph/0307139v1 (2003)
- [20] N.D. Mermin, Rev. Mod. Phys. 65, 803 (1993)
- [21] N.D. Mermin, Phys. Rev. Lett. 65, 3373 (1990)
- [22] A. Peres, J. Phys. A 24, L175 (1991)
- [23] M. Kernaghan, J. Phys. A 27, L829 (1994)
- [24] A. Cabello, J. Estebarez and G. Garcia-Alcaine, Phys. Lett. A 212, 183 (1996)
- [25] I. Pitowsky, J. Math. of Phys. 27, 1556 (1986)
- [26] H. De Raedt, K. Hess and K. Michielsen, arXiv:0901.2546v1 (2009)
- [27] H. De Raedt, K. Hess and K. Michielsen, arXiv:0907.0767v1 (2009)
- [28] S. Filipp and K. Svozil, arXiv:quant-ph/0105083v1 (2001)
- [29] A. Horn and A. Tarski, Trans. Am. Math. Soc. 64, 467 (1948)
- [30] A. Fine, Phys. Rev. Lett. 48, 291 (1982)
- [31] R. Jozsa and N. Linden, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 459, 2011 (2003)
- [32] R.P. Feynman, Int. J. Theor. Phys. 21, 467 (1982)
- [33] P. Shor, SIAM J.Sci.Statist.Comput. 26, 1484 (1997)
- [34] H.P. Stapp, Am. J. Phys. 65, 300 (1997)
- [35] N. D. Mermin, arXiv:quant-ph/9711052v1 (1997)
- [36] R. Sikorski, Boolean algebras, (Springer-Verlag, Berlin, 1964)