



**Università di Pisa**  
**Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e  
Naturali**

**Corso di Laurea Specialistica  
in Matematica**

Anno Accademico 2008/2009

Tesi di Laurea Specialistica

**TRASFORMATA DI FOURIER  
E PROBLEMI  
DI AMBIGUITÀ**

Candidato

**Paolo Lodone**

Relatore

**Prof.  
Paolo Acquistapace**

# Indice

Introduzione	2
<b>1 Trasformata di Fourier: spettro, polinomi di Hermite</b>	<b>4</b>
1.1 Definizione e principali proprietà	4
1.1.1 $\mathcal{F}$ in $L^1(\mathbb{R})$	4
1.1.2 $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$	5
1.2 Spettro e polinomi di Hermite	9
1.3 Il teorema di Paley e Wiener	11
1.4 Il teorema di fattorizzazione di Hadamard	15
1.5 Relazioni di indeterminazione	25
1.5.1 La disuguaglianza di Heisenberg	26
1.5.2 Altre forme di indeterminazione	28
<b>2 Unicità di Pauli</b>	<b>36</b>
2.1 Elementi di Meccanica Quantistica	36
2.1.1 Stati e osservabili di un sistema fisico	36
2.1.2 Rappresentazioni e funzioni d'onda	40
2.1.3 Indeterminazione in Meccanica Quantistica	42
2.2 Origine del problema	43
2.3 Esempio di non unicità	43
2.4 Conclusioni	45
<b>3 Phase retrieval</b>	<b>47</b>
3.1 Origine del problema	48
3.2 Caso a supporto compatto	49
3.2.1 Studio dell'ambiguità	49
3.2.2 Costruzione esplicita di partner non banali	51
3.2.3 Ricostruzione	51
3.3 Caso a supporto non compatto	54

---

3.3.1	Supporto su una semiretta . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Radar Ambiguity</b>	<b>56</b>
4.1	Origine del problema . . . . .	57
4.2	Esempi di ambiguità . . . . .	59
4.3	Caso a supporto compatto . . . . .	61
4.3.1	Uso di tecniche provenienti dal Phase Retrieval . . . . .	61
4.4	Un caso “discreto” . . . . .	67
4.4.1	Indeterminazione per la funzione di ambiguità . . . . .	68
4.4.2	Stabilità delle funzioni di Hermite . . . . .	73
4.4.3	Unicità . . . . .	74
	<b>Bibliografia</b>	<b>82</b>

# Introduzione

In questa tesi si richiama la nozione di trasformata di Fourier, insieme ad alcuni importanti fatti ad essa collegati, come le relazioni di indeterminazione e il teorema di Paley e Wiener. Successivamente si applicano tali risultati allo studio di alcuni famosi “problemi di ambiguità”: l’unicità di Pauli, il Phase Retrieval, e il Radar Ambiguity problem.

Il primo problema è strettamente correlato con la Meccanica Quantistica, e corrisponde al domandarsi se una funzione di  $L^2(\mathbb{R})$  sia univocamente determinata (a meno di una fase) conoscendo il suo modulo ed il modulo della sua trasformata di Fourier. Nel caso del Phase Retrieval si vuole invece cercare di ricostruire una funzione  $f$  in  $L^2(\mathbb{R})$  conoscendo solo il modulo della sua trasformata di Fourier. Chiaramente  $f$  avrà sempre dei “partner” banali, ossia funzioni che differiscono da  $f$  per costanti moltiplicative unitarie o per traslazioni nella variabile indipendente, ma è interessante andare a studiare quali funzioni possono avere partner non banali. Il Radar Ambiguity problem sorge nella teoria dei segnali e consiste nel chiedersi quali funzioni di  $L^2(\mathbb{R})$  hanno lo stesso modulo della “funzione di ambiguità”, che è ciò che in realtà viene misurato dal radar.

I risultati riportati si trovano in gran parte in letteratura; il contributo originale di questa tesi consiste prevalentemente nel lavoro di sintesi, in alcune precisazioni, e nella costruzione di alcuni esempi (come le sezioni 3.2.2 e 4.2).

# Capitolo 1

## Trasformata di Fourier: spettro, polinomi di Hermite

In questo primo capitolo introduco brevemente la trasformata di Fourier richiamandone alcune importanti proprietà. Lo scopo è studiarne lo spettro, le autofunzioni, e alcune proprietà di analiticità.

### 1.1 Definizione e principali proprietà

Considero per semplicità il caso di funzioni su  $\mathbb{R}$ ; l'estensione a  $\mathbb{R}^n$  è immediata.

#### 1.1.1 $\mathcal{F}$ in $L^1(\mathbb{R})$

**Definizione:** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . La sua *trasformata di Fourier*  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  è data da:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x) dx. \quad (1.1)$$

**Osservazione:** La  $\mathcal{F}$  così definita è un operatore lineare e continuo da  $L^1(\mathbb{R})$  a  $L^\infty(\mathbb{R})$  con norma uguale a  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , inoltre  $\hat{f}$  è uniformemente continua su  $\mathbb{R}$  e vale (Teorema di Riemann-Lebesgue):

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0. \quad (1.2)$$

**Dimostrazione:**

- La linearità segue dalla linearità dell'integrale di Lebesgue; per la continuità prendendo il modulo della (1.1):

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1. \quad (1.3)$$

Inoltre con  $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  si ha  $\hat{g}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ , per cui:

$$\|g\|_1 = \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi} \|\hat{g}\|_\infty,$$

e quindi  $\|\mathcal{F}\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

- Per  $h \in \mathbb{R}$  vale:

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi) \right| &= \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)(e^{ihx} - 1)e^{i\xi x} dx \right|}{\sqrt{2\pi}} \\ &\leq \frac{\|f(\cdot)(e^{ih\cdot} - 1)\|_1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

e l'uniforme continuità segue dal teorema della convergenza dominata.

- Cambiando variabile vale:

$$\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi(x+\frac{\pi}{\xi})} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y - \frac{\pi}{\xi})e^{i\xi y} dy,$$

da cui:

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}(\xi) \right| &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(y) - f(y - \frac{\pi}{\xi}))e^{i\xi y} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \|f(\cdot) - f(\cdot - \frac{\pi}{\xi})\|_1 \end{aligned}$$

e la tesi segue per  $|\xi| \rightarrow \infty$  dalla continuità di  $L^1(\mathbb{R})$  rispetto alle traslazioni.

□

### 1.1.2 $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$

**Definizione:** Lo *spazio di Schwartz*  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è definito da:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \mid x \mapsto x^\alpha D^\beta \phi(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}\} \quad (1.4)$$

**Osservazione:** Per  $p \in [1, \infty[$  vale che:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ è denso in } L^p(\mathbb{R}) \quad (1.5)$$

**Dimostrazione:** Dalla definizione si vede immediatamente che  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è sottospazio di  $L^p(\mathbb{R})$  per ogni  $p \in [1, \infty[$ . Inoltre  $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e l'inclusione

è propria perché la funzione  $f(x) = e^{-x^2}$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  e non ha supporto compatto. Segue la tesi da questa inclusione e dalla densità di  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  in  $L^p(\mathbb{R})$  per ogni  $p \in [1, \infty[$ .  $\square$

**Osservazione:** Nello spazio di Schwartz  $\mathcal{F}$  scambia la derivazione con la moltiplicazione per monomi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(D^\alpha \phi)(\xi) &= (-i)^\alpha \xi^\alpha \mathcal{F}(\phi)(\xi) \\ D^\alpha \mathcal{F}(\phi)(\xi) &= i^\alpha \mathcal{F}(x^\alpha \phi(x))(\xi)\end{aligned}\tag{1.6}$$

**Dimostrazione:** La prima si ottiene integrando per parti  $\alpha$  volte nella definizione di  $\mathcal{F}(D^\alpha \phi)$ : i termini ‘di bordo’ scompaiono grazie alla definizione (1.4). La seconda segue derivando  $\alpha$  volte sotto il segno di integrale, e ciò è possibile per la convergenza dominata perché dalla (1.4) si ha che  $x^\alpha \phi(x)$  è sommabile per ogni  $\alpha$ .  $\square$

**Lemma:** La trasformata di Fourier manda  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in sé:

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})\tag{1.7}$$

**Dimostrazione:** Siano  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ . Allora per le (1.6):

$$\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi) = i^\alpha i^\beta \mathcal{F}(D^\alpha(x^\beta \phi(x)))(\xi),$$

da cui per la (1.3):

$$\left| \xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| D^\alpha(x^\beta \phi(x)) \|_1 < \infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

$\square$

**Lemma:** Per ogni  $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e  $x \in \mathbb{R}$  si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(u) \phi(x+u) du.\tag{1.8}$$

**Dimostrazione:** La funzione:

$$(y, \xi) \mapsto \phi(y) \psi(\xi) e^{i\xi y} e^{-i\xi x}$$

appartiene a  $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ , pertanto è possibile applicare il teorema di Fubini scambiando l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \left[ \int_{\mathbb{R}} \phi(y) e^{i\xi y} dy \right] e^{-i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) e^{i\xi(y-x)} d\xi \right] \phi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(y-x) \phi(y) dy, \end{aligned} \tag{1.9}$$

e la tesi segue tramite il cambiamento di variabile  $u = y - x$ .

□

**Teorema: (Formula di inversione)** Se  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  allora vale:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui si ha che  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  è bigettiva.

**Dimostrazione:** Sia:

$$\psi_{\epsilon}(x) = e^{-\frac{\epsilon^2 x^2}{2}}, \quad \hat{\psi}_{\epsilon}(\xi) = \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon^2}}.$$

Dalla (1.8) si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_{\epsilon}(\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi &= \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2\epsilon^2}} \phi(x+u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \phi(x+\epsilon y) dy. \end{aligned}$$

Operando il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , dalla convergenza dominata e da  $\psi_0 \equiv 1$  si ha infine:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \sqrt{2\pi} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] \phi(x) = \sqrt{2\pi} \phi(x).$$

□

**Teorema: (Identità di Parseval)** Per ogni  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  vale:

$$(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = (f, g)_{L^2(\mathbb{R})} \tag{1.10}$$

e in particolare:

$$\| \hat{f} \|_{L^2(\mathbb{R})} = \| f \|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.11}$$



**Dimostrazione:** Applicando la (1.8) con  $x = 0$ :

$$(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)^*(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathcal{F}(\mathcal{F}(g)^*)(u) du.$$

Qui e nel seguito  $*$  indica la coniugazione complessa. D'altra parte usando la formula di inversione:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(g)^*) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g^*(\xi) e^{-i\xi \cdot} d\xi\right) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g^*)) = g^*,$$

per cui:

$$(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(u) g^*(u) du = (f, g)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□

**Osservazione:** La trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  è quindi un isomorfismo isometrico dello spazio normato  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})})$  in sé. Di conseguenza grazie a (1.5) la  $\mathcal{F}$  si può estendere in modo unico, per densità, ad un isomorfismo di  $L^2(\mathbb{R})$  in sé.

**Teorema: (*Trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$* )** La trasformata di Fourier definita in (1.1) si estende in modo unico da  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  ad un isomorfismo di  $L^2(\mathbb{R})$  in sé. Di conseguenza valgono le formule di Parseval e di inversione:

$$(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = (f, g)_{L^2(\mathbb{R})} \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.12)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi) \quad \text{q.o. in } \mathbb{R} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.13)$$

Inoltre per quanto riguarda il calcolo esplicito di trasformate di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$  è comodo usare la densità di  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , realizzata con le funzioni “troncate”.

**Dimostrazione:**

- Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , considero una successione  $\{\phi_n\}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  convergente a  $f$  in  $L^2$ . Sia  $\hat{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\phi}_n$ , che esiste grazie a (1.11) in quanto:

$$\|\hat{\phi}_n - \hat{\phi}_m\|_2 = \|\phi_n - \phi_m\|_2 \rightarrow 0.$$

Inoltre tale limite non dipende dalla successione, infatti presa un'altra  $\psi_n \xrightarrow{L^2} f$  si ha:

$$\|\hat{\phi}_n - \hat{\psi}_n\|_2 = \|\phi_n - \psi_n\|_2 \leq (\|\phi_n - f\|_2 + \|\psi_n - f\|_2) \rightarrow 0.$$

Ma allora definendo in questo modo  $\mathcal{F}$  tramite successioni, dalla continuità del prodotto scalare rispetto a  $\| \cdot \|_2$  e dalla (1.10) segue la (1.12).

Allo stesso modo la (1.13) si ottiene estraendo da  $\{\phi_n\}$  una sottosuccessione convergente a  $f$  quasi ovunque.

- La densità di  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  in  $L^2(\mathbb{R})$  si realizza concretamente ponendo, per  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x) & |x| \leq n \\ 0 & |x| > n \end{cases}$$

Chiaramente  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$  e inoltre  $f_n \xrightarrow{L^2} f$  poiché:

$$\| f - f_n \|_2^2 = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx = \| f \|_2^2 - \int_{-n}^n |f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ripetendo l'argomento del punto precedente (e usando (1.12)) si vede che  $\{\hat{f}_n\}$  converge ad una  $\hat{f}$  che non dipende dalla successione scelta, quindi questo procedimento può essere usato per definire  $\hat{f} = \mathcal{F}f$ .

□

## 1.2 Spettro e polinomi di Hermite

Seguiamo principalmente [7], in parte [12] e [13]. L'obiettivo è studiare la teoria spettrale della trasformata di Fourier, cioè trovarne autovalori e autovettori. Per quanto riguarda gli autovalori, basta osservare che, usando (1.1) e (1.13):

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi y} \hat{f}(\xi) d\xi = f(-y)$$

da cui segue immediatamente che:

**Osservazione:** Gli *autovalori di  $\mathcal{F}$*  appartengono a  $\{1, -1, i, -i\}$ , in quanto  $\mathcal{F}^4 = 1$ . Inoltre chiaramente gli autovettori corrispondenti a  $\pm 1$  dovranno essere funzioni pari, quelli corrispondenti a  $\pm i$  funzioni dispari.

Questo già fornisce importanti informazioni, tuttavia si può dire molto di più: è infatti possibile esibire un sistema ortonormale completo di  $L^2(\mathbb{R})$  costituito da autofunzioni di  $\mathcal{F}$ .

**Definizione:** I *polinomi di Hermite* sono  $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  definiti come:

$$h_n(x) = e^{x^2/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}. \tag{1.14}$$

Si noti che  $h_n$  è un polinomio di grado  $n$  moltiplicato per  $e^{-x^2/2}$ .

Il risultato che ci interessa è il:

**Teorema:** I polinomi di Hermite (1.14) sono *autovettori di  $\mathcal{F}$* :

$$\mathcal{F}(h_n) = \hat{h}_n = i^n h_n \quad (1.15)$$

**Dimostrazione:** Derivando la definizione si ottiene  $h'_n(x) = xh_n(x) + h_{n+1}(x)$ , cioè:

$$\begin{cases} h_{n+1}(x) = h'_n(x) - xh_n(x) \\ h_0(x) = e^{-x^2/2} \end{cases}$$

e si osservi che questa potrebbe essere presa come definizione delle  $h_n$  in alternativa alla (1.14). Prendiamo adesso la trasformata di Fourier di questa ricorsione. Usando le (1.6) si ha  $\hat{h}_{n+1}(\xi) = -i\xi\hat{h}_n(\xi) + i\hat{h}'_n(\xi)$ , cioè:

$$(-i)^{n+1}\hat{h}_{n+1}(\xi) = (-i)^n\hat{h}'_n(\xi) - \xi(-i)^n\hat{h}_n(\xi).$$

Dunque  $h_n$  e  $(-i)^n\hat{h}_n$  soddisfano la stessa relazione di ricorsione con stessa condizione iniziale (infatti  $\mathcal{F}(e^{-x^2/2}) = e^{-\xi^2/2}$ ), quindi sono uguali. □

Per completezza dimostriamo anche il noto risultato:

**Teorema:** I polinomi di Hermite (1.14) sono un *sistema ortogonale completo in  $L^2(\mathbb{R})$* . In particolare possiamo scrivere, per  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n, f) i^n e_n \quad , \quad e_n = \frac{h_n}{\|h_n\|_2} = \frac{h_n}{\pi^{1/4} 2^{n/2} (n!)^{1/2}} \quad (1.16)$$

**Dimostrazione:**

- Per provare l'ortogonalità si costruisce l'operatore su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ :

$$L : f(x) \mapsto -f''(x) + x^2 f(x).$$

Si vede immediatamente che  $L$  è autoaggiunto su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Inoltre poiché:

$$D^n x f(x) = n D^{n-1} f(x) + x D^n f(x)$$

la sua azione sulle  $h_n$  è data da:

$$\begin{aligned} h_n''(x) &= D[xh_n(x) + h_{n+1}(x)] \\ &= h_n(x) + x^2 h_n(x) + xh_{n+1}(x) + xh_{n+1}(x) + h_{n+2}(x) \\ Lh_n(x) &= -e^{x^2/2} [D^n + 2xD^{n+1} + D^{n+2}] e^{-x^2} \\ &= -e^{x^2/2} [D^n + (D^{n+1}2x - 2(n+1)D^n) + D^{n+2}] e^{-x^2} \\ &= -e^{x^2/2} [D^n + (-D^{n+2} - 2(n+1)D^n) + D^{n+2}] e^{-x^2} \\ &= (2n+1)e^{x^2/2} D^n e^{-x^2} \stackrel{\text{def}}{=} (2n+1)h_n \end{aligned}$$

L'ortogonalità segue quindi da:

$$(2n + 1)(h_n, h_m) = (Lh_n, h_m) = (h_n, Lh_m) = (2m + 1)(h_n, h_m).$$

- Per la completezza osserviamo innanzitutto che, essendo  $h_n(x)$  un polinomio di grado  $n$  moltiplicato per  $e^{-x^2/2}$ :

$$\text{Span}\{h_n(x)\} = \text{Span}\{x^n e^{-x^2/2}\}.$$

Vogliamo mostrare quindi che  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , se ortogonale a  $x^n e^{-x^2/2}$  per ogni  $n$ , è identicamente nulla. Sia dunque  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tale che:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-x^2/2} dx = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Sviluppando in serie la trasformata di Fourier di  $f(x)e^{-x^2/2}$  si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x)e^{-x^2/2})(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi x)^n}{n!} dx \\ (\text{conv. dominata}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-x^2/2} dx = 0, \end{aligned}$$

e allora per il teorema (1.13) sulla bigettività di  $\mathcal{F}$  si ha  $f(x)e^{-x^2/2} \equiv 0$ , e quindi  $f \equiv 0$ . L'ultimo passaggio segue dalla convergenza dominata nel senso:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^N \frac{(i\xi x)^n}{n!} e^{-x^2/2} f(x) \right| &\leq \sum_{n=0}^N \frac{|\xi x|^n}{n!} e^{-x^2/2} |f(x)| \\ &\leq e^{|\xi x|} e^{-x^2/2} |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

### 1.3 Il teorema di Paley e Wiener

Riportiamo adesso un importante risultato sulle proprietà di analiticità della trasformata di Fourier che sarà utile nei prossimi capitoli (seguiamo principalmente [19]). Cominciamo con una definizione e un lemma:

**Definizione:** Una funzione intera  $f$  (cioè olomorfa su tutto il piano complesso) si dice **di ordine finito** se esiste un numero reale positivo  $A$  tale che per  $|z| \rightarrow \infty$  valga  $f(z) = O(e^{|z|^A})$ . Il limite inferiore  $\rho$  di tali  $A$  si dice **ordine** della funzione  $f$ , cioè se  $f$  è di ordine  $\rho$  allora vale:

$$f(z) = O(e^{|z|^{\rho+\epsilon}}) \quad , \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.17)$$

per ogni  $\epsilon > 0$  ma non per  $\epsilon < 0$ . Le funzioni di ordine 1 sono anche dette **di tipo esponenziale**.

**Lemma:** Sia  $F \in L^2(0, \infty)$  e  $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  il semipiano superiore. Allora:

$$f(z) = \int_0^\infty F(t)e^{itz} dt \quad \text{è olomorfa in } \Pi_+ \quad (1.18)$$

**Dimostrazione:** Se  $z = x + iy$  è in  $\Pi_+$ , allora  $|e^{itz}| = e^{-yt}$  e quindi l'integrale esiste. Più precisamente, per quanto visto nella sezione 1.1.2 la trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$  è definita con un procedimento di approssimazione e non è sempre calcolabile usando direttamente la definizione. Ma il "fattore di convergenza"  $e^{-yt}$  fa sì che in questo caso ciò sia possibile.

Inoltre:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i \int_0^\infty tF(t)e^{it(x+iy)} dt = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

che è la condizione di Cauchy - Riemann per l'olomorfia di  $f$ . Quest'ultimo integrale esiste perché  $te^{-yt}$  è ancora un fattore di convergenza.

□

Veniamo quindi al:

**Teorema: (Paley-Wiener)** Siano  $A, C$  costanti positive. Una funzione con restrizione all'asse reale che sia  $L^2(\mathbb{R})$  è intera e di tipo esponenziale (o di ordine 1) se e solo se è la trasformata di Fourier con argomento complesso di una funzione  $L^2$  a supporto compatto, cioè:

$$\begin{aligned} & f \text{ funzione intera tale} \\ & \text{che: } |f(z)| \leq Ce^{A|z|} \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \int_{-A}^A F(x)e^{ixz} dx \\ & \forall z \in \mathbb{C}, \text{ e inoltre:} \quad \text{con } F \in L^2(-A, A). \\ & \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty \end{aligned} \quad (1.19)$$

**Dimostrazione:** [ $\Leftarrow$ ]: Sia  $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-A}^A F(t)e^{itz} dt$  con  $0 < A < \infty$ , e chiamiamo  $z = x + iy$ . Chiaramente:

$$|f(z)| \leq \int_{-A}^A |F(t)| e^{-ty} dt \leq e^{A|y|} \int_{-A}^A |F(t)| dt \leq \|F\|_1 e^{A|z|},$$

grazie al fatto che  $A < \infty$ . Per quanto riguarda l'olomorfia basta osservare che:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i \int_{-A}^A t F(t) e^{it(x+iy)} dt = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

e l'integrale ovviamente esiste perché:

$$\left| \int_{-A}^A t F(t) e^{itz} dt \right| \leq \int_{-A}^A A |F(t)| e^{A|z|} dt \leq A \|F\|_1 e^{A|z|}.$$

Il fatto che  $f|_{\mathbb{R}}$  sia in  $L^2(\mathbb{R})$  segue poi dalla (1.12).

[ $\Rightarrow$ ]: Sia  $f_\epsilon(x) = f(x)e^{-\epsilon|x|}$  per  $\epsilon > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Basta provare che:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x) e^{-itx} dx = 0 \quad (t \in \mathbb{R}, |t| > A). \quad (1.20)$$

Infatti per la convergenza dominata  $\|f_\epsilon - f\|_2 \rightarrow 0$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ma allora grazie alla (1.12) si ha che la trasformata di Fourier di  $f_\epsilon$  converge in  $L^2$  alla restrizione all'asse reale della trasformata  $F$  di  $f$ . Pertanto la (1.20) implica che la  $F$  si annulla fuori da  $[-A, A]$ .

- Per  $\alpha$  reale definiamo il cammino  $\Gamma_\alpha(s) = s e^{i\alpha}$ , con  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq s < \infty$ . Definiamo inoltre la regione:

$$\Pi_\alpha = \{w : \operatorname{Re}(w e^{i\alpha}) > A\}$$

e per  $w \in \Pi_\alpha$  sia:

$$\Phi_\alpha(w) = \int_{\Gamma_\alpha} f(z) e^{-wz} dz = e^{i\alpha} \int_0^\infty f(se^{i\alpha}) \exp[-w s e^{i\alpha}] ds.$$

Per ipotesi il modulo dell'integrando è maggiorato da:

$$C \exp\{-[\operatorname{Re}(w e^{i\alpha}) - A]s\}$$

e quindi argomentando come sopra si vede che la funzione  $\Phi_\alpha$  è olomorfa in  $\Pi_\alpha$ .

- La regione di olomorfia può essere ulteriormente estesa nel caso di  $\alpha = 0, \pi$ , cioè possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \Phi_0(w) &= \int_0^\infty f(x) e^{-wx} dx && (\text{olomorfa in } \operatorname{Re}(w) > 0) \\ \Phi_\pi(w) &= - \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-wx} dx && (\text{olomorfa in } \operatorname{Re}(w) < 0) \end{aligned}$$

invece di limitarci a  $(\operatorname{Re}(w) > A)$  per  $\alpha = 0$  e  $(\operatorname{Re}(w) < A)$  per  $\alpha = \pi$ . Ciò è possibile grazie all'ipotesi  $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$ , per cui gli integrali di sopra sono ben definiti e funzioni olomorfe grazie al lemma (1.18).

- A questo punto si osserva che:

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\epsilon}(x) e^{-itx} dx = \Phi_0(\epsilon + it) - \Phi_{\pi}(-\epsilon + it) \quad (1.21)$$

quindi basta dimostrare che il membro destro tende a zero per  $\epsilon \rightarrow 0$  se  $|t| > A$ .

- Dimostriamo che due funzioni  $\Phi_{\alpha}$  e  $\Phi_{\beta}$  coincidono sempre sul loro dominio di definizione, e sono pertanto continuazione analitica l'una dell'altra. Una volta fatto questo, basterà sostituire al posto di  $\Phi_0$  e  $\Phi_{\pi}$  nella (1.21) rispettivamente  $\Phi_{\pi/2}$  se  $t < -A$ ,  $\Phi_{-\pi/2}$  se  $t > A$ , e la differenza tenderà chiaramente a zero per la continuità delle  $\Phi$ . Ciò è lecito in quanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[i(\pm\epsilon + it)] &> A && \text{per } t < -A \\ \operatorname{Re}[-i(\pm\epsilon + it)] &> A && \text{per } t > A \end{aligned}$$

- Supponiamo  $0 < \beta - \alpha < \pi$ , e siano:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \eta = \cos \frac{\beta - \alpha}{2} > 0.$$

Se  $w = |w| e^{-i\gamma}$ , allora:

$$\operatorname{Re}(we^{i\alpha}) = \eta |w| = \operatorname{Re}(we^{i\beta}),$$

e quindi  $w \in \Pi_{\alpha} \cap \Pi_{\beta}$  se  $|w| > A/\eta$ .

Sia  $\Gamma$  il cammino (chiuso) di integrazione formato dai segmenti che uniscono l'origine ai punti  $re^{i\alpha}$  e  $re^{i\beta}$ , e inoltre dall'arco  $\zeta(t) = re^{it}$ ,  $\alpha < t < \beta$ . Vogliamo adesso usare il teorema di Cauchy per l'integrale:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} f(z) e^{-wz} dz \\ &= \int_{\Gamma_{\alpha}(|z|<r)} f(z) e^{-wz} + \int_{\zeta} f(z) e^{-wz} - \int_{\Gamma_{\beta}(|z|<r)} f(z) e^{-wz} \\ (\lim_{r \rightarrow \infty}) &\rightarrow \Phi_{\alpha}(w) - \Phi_{\beta}(w) + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(re^{it}) \exp[-wre^{it}] ire^{it} dt. \end{aligned}$$

Ma poiché su  $\zeta$  vale  $\operatorname{Re}(-wz) = -|w|r \cos(t - \gamma) \leq -|w| r \eta$ , il modulo dell'ultimo integrale è maggiorato per ipotesi da:

$$(\beta - \alpha) C r \exp[-(|w| \eta - A)r]$$

che tende a zero per  $r \rightarrow \infty$  se  $|w| > A/\eta$ .

Abbiamo quindi dimostrato che  $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\beta(w)$  se  $w = |w|e^{-i\gamma}$  e  $|w| > A/\eta$ , che è un insieme avente punti di accumulazione. Per l'olomorfia ciò implica che le due funzioni coincidono nell'intersezione degli insiemi di definizione, e segue la tesi.

□

## 1.4 Il teorema di fattorizzazione di Hadamard

Nel seguito sarà più volte utile un risultato generale di analisi complessa sulla fattorizzazione delle funzioni intere (seguiamo [21]).

Le funzioni intere più semplici sono i polinomi, che si possono sempre fattorizzare nella forma (supponendo  $p(z)$  polinomio con  $p(0) \neq 0$ ):

$$p(z) = p(0) \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

dove  $\{z_i\}_{i=1..n}$  sono gli zeri di  $p(z)$ . Nel caso di una generica funzione intera invece gli zeri possono non essere in numero finito, ed il prodotto  $\prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$  può non essere convergente. È quindi necessario considerare fattori meno semplici di  $\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ .

**Definizione:** Le espressioni:

$$E(u, 0) = 1 - u \quad , \quad E(u, p) = (1 - u)e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}} \quad (1.22)$$

si dicono **fattori primari**.

**Lemma:** Sia  $k \in \mathbb{R}, k > 1$ . Allora se  $u \in \mathbb{C}$  e  $|u| \leq \frac{1}{k}$  vale:

$$|\log E(u, p)| \leq \frac{k}{k-1} |u|^{p+1} \quad (1.23)$$

**Dimostrazione:** Per  $|u| < 1$  si ha:

$$\log(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}$$



pertanto:

$$\log E(u, p) = -\frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{u^{p+2}}{p+2} - \dots = -\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{u^n}{n}$$

da cui:

$$|\log E(u, p)| \leq |u|^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} |u|^n \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} |u|^{p+1}$$

e segue la tesi. □

**Teorema: (*Fattorizzazione di Weierstrass*)**

1. Data una sequenza  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  il cui unico punto di accumulazione è all'infinito, esiste una funzione intera  $h(z)$  che si annulla in tutti e soli questi punti.
2. Se  $f(z)$  è una funzione intera e  $f(0) \neq 0$ , allora è possibile scrivere:

$$f(z) = f(0)P(z)e^{g(z)} \tag{1.24}$$

dove  $P(z)$  è un prodotto di fattori primari e  $g(z)$  è una funzione intera. Nel caso  $f(z)$  abbia uno zero di ordine  $m$  in  $z = 0$  basta aggiungere un fattore  $z^m$ .

**Dimostrazione:**

1. Supponiamo di aver ordinato gli  $\{z_n\}$  con modulo non decrescente.
  - Scegliamo una successione di interi positivi  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tali che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n}$$

sia convergente per ogni valore di  $r \in \mathbb{R}$ . Ciò è sempre possibile, in quanto  $|z_n| \rightarrow \infty$  (altrimenti la successione avrebbe un punto di accumulazione non all'infinito), quindi basta prendere  $p_n = n$  in quanto:

$$\left( \frac{r}{|z_n|} \right)^n < \frac{1}{2^n} \quad \text{per } |z_n| > 2r$$

e la serie è convergente.

- Per la (1.23) vale, nel caso  $|z_n| > 2|z|$ :

$$\left| \log E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right) \right| \leq 2 \left( \frac{|z|}{|z_n|} \right)^{p_n}$$

quindi è convergente per  $|z| \leq R$  la serie:

$$\sum_{|z_n| > 2R} \log E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right),$$

cioè lo è per  $|z| \leq R$  il prodotto:

$$\prod_{|z_n| > 2R} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right).$$

- Ma allora possiamo porre:

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p_n - 1\right).$$

Evidentemente tale  $h(z)$  si azzera in tutti e soli i punti  $\{z_n\}$ , inoltre  $h(z)$  è regolare per  $|z| < R$  grazie al punto precedente. Segue la tesi in quanto  $R$  è grande a piacere.

2. Prendiamo come  $P(z)$  la funzione costruita dagli zeri di  $f(z)$  definita come la  $h(z)$  del punto 1. Sia:

$$\phi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

Tale  $\phi(z)$  è una funzione intera, in quanto i poli dei due termini si cancellano a vicenda. Pertanto possiamo definire la funzione (intera):

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z \phi(\zeta) d\zeta = \log f(z) - \log f(0) - \log P(z)$$

e la tesi segue esponenziando.

□

Chiaramente la funzione  $h(z)$  del punto 1 del teorema non è univocamente determinata dagli zeri  $\{z_n\}$ , in quanto c'è ampia scelta nei numeri  $\{p_n\}$ . Allo stesso modo non è unica la fattorizzazione del punto 2, e in generale si può dire poco sulla funzione  $g(z)$ . Per questo motivo la (1.24) non risulta essere di

grande utilità nel caso di una funzione intera qualsiasi. L'affermazione diventa invece molto più precisa nel caso in cui la funzione da fattorizzare abbia ordine finito (vedi (1.17)).

**Definizione:** Indichiamo in generale con  $n(r)$  il **numero degli zeri** della funzione  $f(z)$  nella regione  $|z| \leq r$ .

**Lemma: (formula di Jensen)** Sia  $f(z)$  una funzione analitica in  $|z| < R$  con  $f(0) \neq 0$ . Allora vale:

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| \quad (1.25)$$

**Dimostrazione:** Supponiamo di avere ordinato gli zeri di  $f(z)$  con modulo crescente.

- Se  $r \in ]|z_n|, |z_{n+1}|[$  abbiamo che la derivata del membro sinistro della (1.25) è  $n(r)/r$ , mentre quella del membro destro è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dr} \log |f(re^{i\theta})| &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} [\log f(re^{i\theta}) + \log f^*(re^{i\theta})] d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} e^{i\theta} + \frac{f'^*(re^{i\theta})}{f^*(re^{i\theta})} e^{i\theta} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2r} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(r)} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{f'^*(z)}{f^*(z)} dz \right] \\ &= \frac{n(r)}{r} \end{aligned}$$

dove  $C(r) = \{|z| = r\}$  e l'ultimo passaggio segue dal fatto che il residuo della funzione  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  in uno zero di  $f(z)$  è dato dall'ordine di tale zero.

Abbiamo quindi provato che le derivate delle due espressioni coincidono in tutti gli intervalli  $r \in ]|z_n|, |z_{n+1}|[$ .

- Chiaramente la (1.25) è vera per  $r = 0$ . Quindi basta provare che entrambe le espressioni sono continue quando  $r$  assume un valore  $|z_n|$ . Per il membro sinistro ciò è ovvio, per il membro destro consideriamo lo zero  $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ . Se lo zero è di ordine  $N$  possiamo scrivere:

$$\log |f(re^{i\theta})| = N \log \left| 1 - \frac{r}{r_n} e^{i(\theta - \theta_n)} \right| + \psi(r, \theta)$$

dove  $\psi(r, \theta)$  è continua in un intorno di  $r = r_n$ . Basta quindi mostrare la continuità in  $r = r_n$  dell'integrale:

$$\int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{r}{r_n} e^{i\theta} \right| d\theta.$$

- Basta verificare la continuità di:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \log \left| 1 - \frac{r}{r_n} e^{i\theta} \right| d\theta .$$

con  $\delta > 0$  arbitrariamente piccolo, in quanto il resto dell'integrale è chiaramente continuo. Per  $r/r_n < 2$  vale:

$$\begin{aligned} 3 &\geq \left| 1 - \frac{r}{r_n} e^{i\theta} \right| = \sqrt{1 - 2\frac{r}{r_n} \cos \theta + \frac{r^2}{r_n^2}} \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta + \left( \cos \theta - \frac{r}{r_n} \right)^2} \geq |\sin \theta| \end{aligned}$$

e quindi se  $\delta < \pi$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \log \left| 1 - \frac{r}{r_n} e^{i\theta} \right| d\theta \right| &< \int_{-\delta}^{\delta} [\log 3 + |\log |\sin \theta||] d\theta \\ &< \int_{-\delta}^{\delta} [A + |\log |\theta||] d\theta \\ &< A\delta \log \frac{1}{\delta} \end{aligned} \tag{1.26}$$

dove  $A = \log 3 + \log \sin \delta$ , e si è usato il fatto che:

$$0 < a < x < b \quad \rightarrow \quad |\log x| < |\log a| + |\log b| .$$

Ma la (1.26) tende a zero per  $\delta \rightarrow 0$ , quindi segue la tesi. □

**Lemma:** Sia  $f(z)$  una funzione intera di ordine  $\rho$ , e supponiamo  $f(0) \neq 0$ . Allora:

$$n(r) = O(r^{\rho+\epsilon})$$

per ogni  $\epsilon > 0$ . Ciò significa che maggiore è l'ordine della funzione, maggiore è il numero di zeri che possono essere in una data regione.

**Dimostrazione:** Per la definizione (1.17) sappiamo che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $K \in \mathbb{R}$  tale che:

$$\log |f(re^{i\theta})| < Kr^{\rho+\epsilon}$$

e quindi usando la formula di Jensen (1.25):

$$\int_0^{2r} \frac{n(x)}{x} dx < Kr^{\rho+\epsilon} .$$

Poiché  $n(r)$  è non decrescente possiamo scrivere:

$$\int_r^{2r} \frac{n(x)}{x} dx \geq n(r) \int_r^{2r} \frac{dx}{x} = n(r) \log 2$$

e quindi:

$$n(r) \leq \frac{1}{\log 2} \int_0^{2r} \frac{n(x)}{x} dx < \frac{K}{\log 2} r^{\rho+\epsilon}.$$

□

**Lemma:** Siano  $r_1, r_2, \dots$  i moduli degli zeri di  $f(z)$ , funzione intera di ordine  $\rho$ . Allora:

$$\sum_n r_n^{-\alpha} < \infty \quad \text{se } \alpha > \rho \quad (1.27)$$

**Dimostrazione:** Sia  $\rho < \beta < \alpha$ . Per il lemma precedente esiste  $A \in \mathbb{R}$  tale che  $n(r) < Ar^\beta$ , quindi in particolare:

$$n < Ar_n^\beta \quad \forall n.$$

Ma allora:

$$r_n^{-\alpha} < A^{\alpha/\beta} \frac{1}{n^{\alpha/\beta}}$$

e segue la tesi.

□

**Definizione:** Chiamiamo *esponente di convergenza degli zeri* il limite inferiore  $\rho_1$  dei numeri positivi  $\alpha$  tali che  $\sum_n r_n^{-\alpha}$  è convergente. La (1.27) mostra che  $\rho_1 \leq \rho$  (può succedere che  $\rho_1 < \rho$ , ad esempio per  $e^z$  si ha  $\rho = 1$  e  $\rho_1 = 0$  in quanto non ci sono zeri).

Quanto visto ha un'importante conseguenza:

**Osservazione:** Siano  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gli zeri di una funzione  $f(z)$  di ordine finito. Allora esiste un intero  $p$  tale che:

$$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \quad (1.28)$$

è convergente per ogni valore di  $z$ .

**Dimostrazione:** Dalla (1.23) segue che tale prodotto è convergente se converge la serie:

$$\sum_n \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}, \quad (1.29)$$

ma questo per definizione è vero se  $p + 1 > \rho_1$ , e pertanto è certamente vero se  $p + 1 > \rho$ .

□

**Definizione:** Se  $p$  è il minimo intero per cui (1.29) è convergente, allora (1.28) è detto il **prodotto canonico** formato con gli zeri di  $f(z)$ , inoltre  $p$  è detto **genere** di  $f$ . Si noti che, in generale:

$$p \leq \rho_1 \leq \rho.$$

Nella dimostrazione del teorema di Hadamard serviranno alcuni fatti generali di analisi complessa:

**Teorema: (Principio del massimo modulo)** Sia  $f(z)$  una funzione analitica in una regione aperta  $D$  e sul suo bordo  $\partial D$ , che supponiamo essere una curva semplice chiusa. Se  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in \partial D$ , allora:

$$|f(z)| < M \quad \forall z \in D \tag{1.30}$$

a meno che non sia ovunque  $|f| = M$ .

**Dimostrazione:** Innanzitutto bisogna osservare che, ovviamente, il modulo di una funzione olomorfa è una funzione continua, e ciò garantisce tra l'altro che  $|f(z)|$  abbia effettivamente massimo in  $D \cup \partial D$ .

Supponiamo che tale massimo sia realizzato in un punto  $z_0$  interno a  $D$ . Dal teorema di Cauchy segue che per ogni contorno circolare  $\Gamma$  di raggio  $r$ , centrato in  $z_0$ , e contenuto in  $D$ , si ha:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Possiamo scrivere:

$$z - z_0 = r e^{i\theta} \quad , \quad \frac{f(z)}{f(z_0)} = \rho(\theta) e^{i\phi(\theta)}$$

ove per ipotesi  $\rho(\theta) \leq 1$  per ogni  $\theta$ , e si ha:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta) e^{i\phi(\theta)} d\theta.$$

Prendendo i moduli si ha in definitiva:

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta) d\theta \\ \rho(\theta) \leq 1 \quad \forall \theta \end{cases}$$

il che implica  $\rho \equiv 1$ , e quindi poiché  $r$  è arbitrario  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$ . Ciò significa che il massimo del modulo può essere raggiunto nella parte interna  $D$  solo se  $f(z)$  ha modulo costante, altrimenti tale massimo deve essere raggiunto sul confine  $\partial D$ .

□

**Lemma: (di Schwarz)** Se  $f(z)$  è una funzione analitica per  $|z| \leq R$ ,  $|f(z)| \leq M$  per  $|z| = R$ , e  $f(0) = 0$ , allora:

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{R} M \quad \text{per } |z| < R. \quad (1.31)$$

**Dimostrazione:** Sia  $\phi(z) = f(z)/z$ . Chiaramente  $\phi(z)$  è regolare per  $|z| \leq R$  e inoltre per  $|z| = R$  vale:

$$|\phi(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Ma allora per il principio del massimo modulo (1.30) la stessa disuguaglianza vale per  $|z| < R$ , e la tesi segue da:

$$|\phi(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|}.$$

□

**Lemma: (Borel - Carathéodory)** Sia  $f(z)$  una funzione analitica per  $|z| \leq R$ , e siano  $M(r)$  e  $A(r)$  i massimi di  $|f(z)|$  e  $|\operatorname{Re} f(z)|$  per  $|z| = r$ . Allora per  $0 < r < R$  vale:

1.

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \quad (1.32)$$

2.

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leq \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}} [A(R) + |f(0)|] \quad (1.33)$$

**Dimostrazione:**

1. Se  $f(z)$  è costante l'affermazione è ovvia.

Se non è costante supponiamo per ora che sia  $f(0) = 0$ . Poniamo:

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}.$$

Allora  $\phi(z)$  è regolare per  $|z| \leq R$  in quanto la parte reale del denominatore non può annullarsi, e  $\phi(0) = 0$ . Inoltre, posto  $f = u + iv$ , si ha:

$$|\phi|^2 \leq \frac{u^2 + v^2}{[2A(R) - u]^2 + v^2} \leq 1,$$

pertanto il lemma di Schwarz (1.31) implica che:

$$|\phi(z)| \leq \frac{r}{R}.$$

Da ciò segue che:

$$|f(z)| \leq |2A(R) - f(z)| \frac{r}{R} \quad \rightarrow \quad |f(z)| \leq \frac{2A(R)r}{R - r}$$

che equivale alla tesi.

Se invece  $f(0) \neq 0$  basta applicare il risultato precedente a  $f(z) - f(0)$  e si ottiene:

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2A(R)r}{R - r} [A(R) + |f(0)|]$$

da cui segue ancora la tesi.

2. Sul cerchio  $C$  centrato in  $w = z$  di raggio  $\delta = \frac{1}{2}(R - r)$  vale:

$$|w| \leq r + \frac{1}{2}(R - r) = \frac{1}{2}(R + r)$$

e il punto 1 dà:

$$\max_C |f(w)| \leq \frac{R + \frac{1}{2}(R + r)}{R - \frac{1}{2}(R + r)} [A(R) + |f(0)|] < \frac{4R}{R - r} [A(R) + |f(0)|].$$

Ma:

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

per cui:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{\delta^n} \frac{4R}{R - r} [A(R) + |f(0)|] = \frac{2^{n+2}n!R}{(R - r)^{n+1}} [A(R) + |f(0)|].$$

□



Possiamo adesso dimostrare il risultato principale di questa sezione:

**Teorema: (*Fattorizzazione di Hadamard*)** Se  $f(z)$  è una funzione intera di ordine  $\rho$  avente zeri in  $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , con<sup>1</sup>  $f(0) \neq 0$ , allora:

$$f(z) = e^{Q(z)}P(z) \quad (1.34)$$

dove  $P(z)$  è il prodotto canonico formato con gli zeri di  $f(z)$  e  $Q(z)$  è un polinomio di grado al più uguale a  $\rho$ .

**Dimostrazione:**

- Fattorizzando  $f(z)$  secondo la (1.24) e scegliendo i fattori primari di grado pari al genere  $p$  di  $f(z)$ , sappiamo che possiamo sempre scrivere la (1.34) e che  $Q(z)$  è una funzione intera. Rimane solo da dimostrare che in realtà è un polinomio di grado al più  $\rho$ .
- Sia  $\nu$  la parte intera inferiore di  $\rho$ . Differenziando  $\nu + 1$  volte il logaritmo della (1.34) e usando il fatto che  $\nu \geq p$  si ha:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^\nu \frac{f'(z)}{f(z)} = Q^{(\nu+1)}(z) - \nu! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}}.$$

Dobbiamo provare che  $Q^{(\nu+1)}(z) \equiv 0$ .

- Sia:

$$g_R(z) = \frac{f(z)}{f(0)} \prod_{z_n \leq R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{-1}.$$

poiché  $|1 - z/z_n| \geq 1$  per  $|z| \geq 2|z_n|$ , sicuramente per  $|z| \geq 2R$  vale:

$$|g_R(z)| \leq \left| \frac{f(z)}{f(0)} \right| = O(e^{(2R)^{\rho+\epsilon}})$$

per ogni  $\epsilon > 0$ . Ma  $g_R(z)$  è una funzione intera, quindi per il principio del massimo modulo (vedi (1.30)) essendo  $|g_R(z)| = O(e^{(2R)^{\rho+\epsilon}})$  per  $|z| = 2R$ , ciò vale anche per  $|z| < 2R$ .

- Sia  $h_R(z) = \log g_R(z)$ , determinato in modo che  $h_R(0) = 0$ . Si noti che  $h_R(z)$  è regolare per  $|z| \leq R$ , e inoltre per il punto precedente si ha che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $K \in \mathbb{R}$  tale che:

$$\operatorname{Re}\{h_R(z)\} < KR^{\rho+\epsilon}$$

<sup>1</sup>In generale per applicare il teorema basterà moltiplicare la funzione per  $z^{-m}$  in caso si abbia uno zero di ordine  $m$  in  $z = 0$ .

Ma allora dal lemma (1.33) abbiamo che:

$$|h_R^{\nu+1}(z)| \leq \frac{2^{\nu+2}(\nu+1)!R}{(R-|z|)^{\nu+2}} K R^{\rho+\epsilon}.$$

- Osserviamo ora che, per  $|z| \leq R$ , vale:

$$\begin{aligned} Q^{(\nu+1)}(z) &= h_R^{(\nu+1)}(z) + \nu! \sum_{|z_n|>R} \frac{1}{(z_n - z)^{\nu+2}} \\ &= O(R^{\rho+\epsilon-\nu-1}) + O\left(\sum_{|z_n|>R} |z_n|^{-\nu-1}\right). \end{aligned}$$

Per  $R \rightarrow \infty$  il primo termine tende a zero se  $\epsilon$  è sufficientemente piccolo in quanto  $\nu + 1 > \rho$ , mentre il secondo termine tende a zero perché  $\sum_n |z_n|^{-\nu-1}$  è convergente, essendo  $\nu + 1 > \rho_1$ . Ma allora, poiché il membro sinistro non dipende da  $R$ , deve essere uguale a zero e segue la tesi.

□

**Osservazione:** (*Caso di ordine*  $\rho = 1$ ) Dal teorema (1.34) segue immediatamente che, se  $f(z)$  è una funzione intera di tipo esponenziale avente zeri in  $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  e uno zero di ordine  $m$  in  $z = 0$ , allora esistono unici  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$  tali che:

$$f(z) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 z} z^m \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n} \quad (1.35)$$

e tale produttoria è convergente.

## 1.5 Relazioni di indeterminazione

La “dualità” tra una funzione e la sua trasformata di Fourier è molto profonda e ricca di conseguenze. Uno degli aspetti più clamorosi è dato dalle relazioni di indeterminazione, che si possono dividere sostanzialmente in due categorie: quelle che esprimono il fatto che  $f$  e  $\hat{f}$  non possono essere entrambe arbitrariamente “concentrate in un punto” (vedi sezione 1.5.1), e quelle che dicono che  $f$  e  $\hat{f}$  non possono entrambe decrescere “troppo rapidamente” all’infinito (vedi sezione 1.5.2). Chiaramente si tratta di due facce della stessa medaglia. Il secondo caso inoltre è particolarmente interessante perché mostra in che senso le funzioni di Hermite siano “estremali” rispetto all’indeterminazione.

### 1.5.1 La disuguaglianza di Heisenberg

Il risultato più famoso è senz'altro il seguente:

**Teorema: (Disuguaglianza di Heisenberg)** Per  $f \in L^2(\mathbb{R})$ :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \times \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\|f\|_2^4}{4} \quad (1.36)$$

**Dimostrazione:** La dimostrazione è immediata per  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ([7]):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ \text{(dalle (1.6) e (1.11))} &= \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |f'(y)|^2 dy \\ \text{(disug. di Schwarz)} &\geq \left[ \int_{\mathbb{R}} |xf^* f'| dx \right]^2 \\ \text{(parte reale)} &\geq \left[ \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{2} (f' f^* + f'^* f) dx \right]^2 \\ &= \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} x (|f|^2)' dx \right]^2 \\ \text{(per parti)} &= \frac{1}{4} \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right]^2. \end{aligned}$$

Nel caso in cui è solo  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , possiamo supporre  $xf(x), \xi \hat{f}(\xi) \in L^2$  (altrimenti non c'è niente da dimostrare). Sia  $\phi \in C_0^\infty(-1, 1)$ , pari, con  $\int_{-1}^1 \phi(x) dx = 1$ . Tramite questa costruiamo:

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \in C_0^\infty(-\epsilon, \epsilon)$$

Chiaramente  $\int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(x) dx = 1$  e inoltre per  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$f * \phi_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(\cdot - y) \phi_\epsilon(y) dy \xrightarrow{L^2} f$$

cioè la convoluzione converge a  $f$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Ora, poiché  $f * \phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , per quanto visto possiamo scrivere:

$$\|x[f * \phi_\epsilon](x)\|_2^2 \| \xi \mathcal{F}[f * \phi_\epsilon](\xi) \|_2^2 \geq \frac{1}{4} \|f * \phi_\epsilon\|_2^4$$

Abbiamo finito se possiamo passare al limite nella disuguaglianza. Per il membro destro è immediato, per quanto riguarda il membro sinistro bisogna dimostrare che, detta  $\tilde{f}(x)$  la funzione  $xf(x)$ , valga  $x[f * \phi_\epsilon](x) \xrightarrow{L^2} \tilde{f}$ . Ma:

$$\begin{aligned} \| x[f * \phi_\epsilon(x)] - \tilde{f} * \phi_\epsilon(x) \|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| x \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\phi_\epsilon(y)dy - \int_{\mathbb{R}} (x-y)f(x-y)\phi_\epsilon(y)dy \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} yf(x-y)\phi_\epsilon(y)dy \right|^2 dx \\ &\leq \epsilon^2 \| f * \phi_\epsilon \|_2^2 \end{aligned}$$

e l'affermazione segue operando il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e osservando che  $\tilde{f} * \phi_\epsilon \xrightarrow{L^2} \tilde{f}$ . Allo stesso modo bisogna provare che  $\xi\mathcal{F}[f * \phi_\epsilon](\xi) \xrightarrow{L^2} \xi\hat{f}(\xi)$ . Ma:

$$F[f * \phi_\epsilon] = \hat{f}\hat{\phi}_\epsilon$$

pertanto:

$$\begin{aligned} \| \xi\mathcal{F}[f * \phi_\epsilon](\xi) - \xi\hat{f}(\xi) \|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \xi\hat{f}(\xi) \right|^2 \left| \hat{\phi}_\epsilon(\xi) - 1 \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \xi\hat{f}(\xi) \right|^2 \left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{i\xi x} \phi_\epsilon(x) dx - 1 \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \xi\hat{f}(\xi) \right|^2 \left| \int_{-1}^1 (e^{i\epsilon\xi x} - 1)\phi(x) dx \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

e segue la tesi nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  dalla convergenza dominata e dal fatto che  $\xi\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ .

□

**Osservazione:** Poiché il passaggio chiave che dà la disuguaglianza è l'applicazione della disuguaglianza di Schwarz all'integrale  $\int_{\mathbb{R}} xf^* f' dx$ , si deduce che il caso di “minima indeterminazione” (uguaglianza) si ha quando  $f' = kxf$ , la cui unica soluzione appartenente a  $L^2$  è la gaussiana.

L'interpretazione che la (1.36) ha in Meccanica Quantistica sarà approfondita nella sezione 2.1.

### 1.5.2 Altre forme di indeterminazione

Le relazioni di indeterminazione di questo tipo scaturiscono storicamente da una osservazione di Wiener secondo cui “le funzioni  $f$  e  $\hat{f}$  non possono essere entrambe troppo piccole”. Seguendo principalmente [3], definiamo:

**Definizione:** Si dicono *funzioni di Hermite* le funzioni della forma:

$$f(x) = P(x) e^{-x^2/2} \quad (1.37)$$

dove  $P(x)$  è un polinomio. Ovviamente una funzione di Hermite è una combinazione lineare finita di polinomi di Hermite.

Il suggerimento di Wiener fu sviluppato da Hardy, a cui si deve il seguente teorema (vedi [8]) che dà un’idea molto precisa della situazione:

**Teorema: (Hardy)** Siano  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\hat{f}(x)$  entrambe  $O(|x|^m e^{-x^2/2})$  per grandi  $x$  e per qualche  $m \in \mathbb{N}$ . Allora:

1. Sono entrambe funzioni di Hermite.
2. In particolare se  $m = 0$  allora  $f = \hat{f} \propto e^{-x^2/2}$ .
3. Se  $f$  oppure  $\hat{f}$  è anche  $o(e^{-x^2/2})$ , allora  $f = \hat{f} = 0$ .

Il risultato che vogliamo dimostrare è una generalizzazione di un’idea di Hörmander (vedi [9]) riportata in [3]. A questo scopo premettiamo<sup>2</sup> una generalizzazione del principio del massimo modulo (1.30):

**Lemma: (Teorema di Phragmén e Lindelöf)** Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa nel settore angolare  $S = \{re^{i\beta} : r \geq 0, \beta_0 \leq \beta \leq \beta_0 + \frac{\pi}{\alpha}\}$ . Supponiamo inoltre che, all’interno di tale settore, la  $f$  sia di ordine finito strettamente minore di  $\alpha$ , cioè che esista  $\beta < \alpha$  tale che:

$$|f(z)| = O(e^{|z|^\beta}) \quad \text{per } |z| \rightarrow \infty, z \in S.$$

Allora:

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \partial S \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in S. \quad (1.38)$$

dove il “contorno”  $\partial S$  è costituito dalle due semirette che partono dall’origine con angoli  $\beta_0$  e  $\beta_0 + \alpha$ .

**Dimostrazione:** Senza perdere di generalità possiamo supporre  $\beta_0 = 0$ . Siano  $\epsilon > 0$  e  $\gamma$  tale che  $\beta < \gamma < \alpha$ , e scriviamo  $z = |z| e^{i\theta}$ . Consideriamo la funzione:

$$F(z) = e^{-\epsilon z^\gamma} f(z) \quad , \quad |F(z)| = e^{-\epsilon |z|^\gamma \cos(\gamma\theta)} |f(z)|.$$

---

<sup>2</sup>Seguiamo principalmente [21].

L'osservazione importante è che, poiché  $\gamma < \alpha$ , sulle linee  $\theta = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$  vale  $\cos(\gamma\theta) > 0$ , e quindi su queste linee:

$$|F(z)| \leq |f(z)| \leq M.$$

Sull'arco di raggio  $|z| = R$  e  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$  sappiamo invece che:

$$|F(z)| \leq e^{-\epsilon R^\gamma \cos(\frac{\gamma\pi}{2\alpha})} |f(z)| = O(e^{R^\beta - \epsilon R^\gamma \cos(\frac{\gamma\pi}{2\alpha})}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (1.39)$$

ove l'ultimo passaggio segue dalla disuguaglianza stretta  $\beta < \gamma < \alpha$ .

Consideriamo quindi la regione  $D(R)$  delimitata dalle due semirette e dall'arco centrato nell'origine e di raggio  $R$ . La (1.39) ci assicura che per  $R$  sufficientemente grande sarà  $|F(z)| \leq M$  sull'arco oltre che sulle semirette. Ma allora per il teorema del massimo modulo (1.30) sappiamo che la maggiorazione vale anche in  $D(R)$ , e poiché  $R$  è arbitrariamente grande vale in definitiva in tutto il settore  $S$ .

Segue la tesi osservando che:

$$|f(z)| \leq e^{\epsilon |z|^\gamma} |F(z)|$$

e operando il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

□

**Osservazione:** Ad esempio se  $f(z)$  è una funzione intera di ordine 2, allora l'affermazione del teorema è vera solo per settori angolari di apertura *strettamente* minore di  $\frac{\pi}{2}$ .

Veniamo dunque al:

**Teorema: (Indeterminazione di tipo Beurling - Hörmander)** Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e  $N \geq 0$ . Allora:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|f(x)| |\hat{f}(y)|}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{|xy|} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = P(x) e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \quad (1.40)$$

dove  $\alpha \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re}\alpha = a > 0$ , e  $P(x)$  è un polinomio di grado minore di  $\frac{N-1}{2}$ .

**Dimostrazione:** [ $\Leftarrow$ ]: Si vede immediatamente che:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |P(x)| e^{-a \frac{x^2}{2}} \\ |\hat{f}(y)| &= |Q(y)| e^{-\frac{y^2}{2a}} \end{aligned}$$

dove  $Q(y)$  è un opportuno polinomio di grado pari a quello di  $P(x)$ . Ma:

$$-a \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2a} + |xy| \leq 0$$

pertanto:

$$\frac{|f(x)| |\hat{f}(y)|}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{|xy|} \leq \frac{|P(x)Q(y)|}{(1 + |x| + |y|)^N}$$

e l'integrale è evidentemente finito per  $N > 2\deg P + 1$ .

[ $\Rightarrow$ ]: Assumiamo che  $f \neq 0$ .

- Sia  $f$  che  $\hat{f}$  sono in  $L^1(\mathbb{R})$ . Infatti per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}$ :

$$|\hat{f}(y)| \int_{\mathbb{R}} dx \frac{|f(x)|}{(1 + |x|)^N} e^{|xy|} < \infty$$

e sappiamo che  $\hat{f}$  non è identicamente nulla. Ma per qualunque  $y \neq 0$  esiste  $C \in \mathbb{R}$  tale che:

$$(1 + |x|)^N \leq C e^{|xy|},$$

e quindi:

$$\|f\|_1 \leq C \int_{\mathbb{R}} dx \frac{|f(x)|}{(1 + |x|)^N} e^{|xy|} < \infty.$$

La dimostrazione per  $\hat{f}$  è del tutto analoga.

- Sia  $g$  definita da:  $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-y^2/2}$ . Valgono le seguenti proprietà (con  $C, C'$  che dipendono solo da  $f$ ):

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(y)| e^{\frac{y^2}{2}} dy < \infty$$

$$|\hat{g}(y)| \leq C e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (1.41)$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|g(x)| |\hat{g}(y)|}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{|xy|} < \infty \quad (1.42)$$

$$\int_{|x| \leq R} dx \int_{\mathbb{R}} dy |g(x)| |\hat{g}(y)| e^{|xy|} < C'(1 + R)^N. \quad (1.43)$$

Infatti la prima segue dal fatto che  $\hat{f}$  è in  $L^1(\mathbb{R})$ , la (1.41) dal fatto che  $\hat{f}$  è limitata grazie alla (1.3) in quanto  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

Per quanto riguarda la (1.42), poiché:

$$|g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} dt f(t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \right| \leq \int_{\mathbb{R}} dt |f(t)| e^{-\frac{(x-t)^2}{2}},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|g(x)| |\hat{g}(y)|}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{|xy|} \\
 \leq & \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dt \frac{|f(t)| |\hat{f}(y)|}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{|xy|} e^{-\frac{(x-t)^2}{2} - \frac{y^2}{2}} \\
 = & \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}} dy |f(t)| |\hat{f}(y)| \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{|xy| - \frac{(x-t)^2}{2} - \frac{y^2}{2}}}{(1 + |x| + |y|)^N} \\
 \leq & \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}} dy |f(t)| |\hat{f}(y)| e^{|ty|} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{|xy| - \frac{x^2 + y^2}{2}}}{(1 + |x + t| + |y|)^N}.
 \end{aligned}$$

Grazie all'ipotesi del teorema per concludere basta provare che esiste una costante  $\tilde{C} \in \mathbb{R}$  tale che:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{|xy| - \frac{x^2 + y^2}{2}}}{(1 + |x + t| + |y|)^N} \leq \tilde{C} \frac{1}{(1 + |t| + |y|)^N}. \quad (1.44)$$

Chiaramente vale:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{|xy| - \frac{x^2 + y^2}{2}}}{(1 + |x + t| + |y|)^N} \\
 < & \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}}{(1 + |x + t| + |y|)^N} \\
 & + \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}}{(1 + |x + t| + |y|)^N} = I_1 + I_2,
 \end{aligned}$$

e basta provare la disuguaglianza ad esempio per il primo termine (il secondo è legato al primo dalla trasformazione  $y \rightarrow -y$ ). Sia  $0 < c < 1$ ,  $B = 1 + |t| + |y|$ ; possiamo scrivere:

$$I_1 = \int_{|x+y| > cB} dx e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} + \int_{|x+y| \leq cB} dx \frac{e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}}{(1 + |x + t| + |y|)^N}$$

e si vede subito che per il primo termine vale una maggiorazione del tipo (1.44), in quanto:

$$\int_{|x| > cB} dx e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \sqrt{2\pi} e^{-\frac{c^2}{2}(1+|t|+|y|)^2}.$$



Per il secondo termine la stessa conclusione segue dal fatto che:

$$\begin{aligned}
 |t| &= |t + x - x + y - y| \leq |x + t| + |x + y| + |y| \\
 \Rightarrow 2|x + t| + 2|y| &\geq |t| + |y| - |x + y| \\
 \Rightarrow 1 + |x + t| + |y| &\geq 1 + \frac{1}{2}[|t| + |y| - |x + y|] \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2}[|t| + |y| - c(1 + |t| + |y|)] > \frac{(1 - c)}{2}(1 + |t| + |y|).
 \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo dimostrato la (1.42).

Per dimostrare invece la (1.43) fissiamo  $c > 2$  e osserviamo che, usando la (1.41) e la (1.42), si ha:

$$\begin{aligned}
 &\int_{|x| \leq R} dx \left[ \int_{|y| > cR} dy |g(x)| |\hat{g}(y)| e^{|xy|} + \int_{|y| \leq cR} dy |g(x)| |\hat{g}(y)| e^{|xy|} \right] \\
 &\leq \int_{|x| \leq R} dx |g(x)| \left[ \int_{|y| > cR} dy C e^{-\frac{y^2}{2}} e^{|xy|} + \int_{|y| \leq cR} dy |\hat{g}(y)| e^{|xy|} \right] \\
 &\leq \int_{|x| \leq R} dx |g(x)| \left[ \int_{|y| > cR} dy C e^{-\frac{y^2}{2}(1 - \frac{2}{c})} + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|y| \leq cR} dy |\hat{g}(y)| \frac{e^{|xy|}(1 + (1 + c)R)^N}{(1 + |x| + |y|)^N} \right] \\
 &\leq C_1 \|g\|_1 + C_2(1 + R)^N \\
 &\leq C'(1 + R)^N
 \end{aligned}$$

con  $C_1$ ,  $C_2$ , e  $C'$  opportune costanti reali. Abbiamo pertanto provato la (1.43).

- *La funzione  $g$  ammette estensione olomorfa di ordine 2. Inoltre esiste un polinomio  $R$  tale che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  valga  $g(z)g(iz) = R(z)$ .*

Infatti se  $z = x + iy$ :

$$\frac{\partial g(z)}{\partial x} = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt t e^{-it(x+iy)} e^{-\frac{t^2}{2}} \hat{f}(t) e = -i \frac{\partial g(z)}{\partial y}$$

e l'integrale è finito in quanto  $\hat{f}$  è in  $L^1(\mathbb{R})$ . Inoltre per la (1.41):

$$\begin{aligned}
 |g(z)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt e^{ty} |\hat{g}(t)| \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt e^{ty} C e^{-\frac{t^2}{2}} \\
 &= C e^{\frac{y^2}{2}}
 \end{aligned}$$

e quindi  $g(z)$  è una funzione intera di ordine 2.

Definiamo adesso la funzione:

$$G(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z d\zeta g(\zeta)g(i\zeta) \quad z \in \mathbb{C}.$$

Per costruzione anche  $G(z)$  è una funzione intera di ordine 2, e vogliamo dimostrare che in realtà  $G$  è un polinomio. Per far questo usiamo il principio di Phragmén - Lindelöf (1.38), per cui se una funzione intera di ordine 2 ha crescita polinomiale (per esempio  $\leq C(1 + |z|)^N$ ) su due semirette che partono dall'origine e formano un angolo minore di  $\frac{\pi}{2}$ , allora la crescita deve essere al più polinomiale in tutto il settore da esse delimitato.

Ma per  $x \in \mathbb{R}$  e  $|e^{i\theta}| = 1$  si ha:

$$|g(x e^{i\theta})| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy |\hat{g}(y)| e^{|xy|}$$

e sulla semiretta  $\Gamma_\alpha(t) = e^{i\alpha t}$ ,  $t > 0$ , si ha:

$$\begin{aligned} |G(z)| &= \left| \int_0^{|z|} e^{i\alpha t} dt g(te^{i\alpha})g(te^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}) \right| \\ &\leq \int_{-|z|}^{|z|} dt \int_{\mathbb{R}} dy |g(te^{i\alpha})| |\hat{g}(y)| e^{|ty|} \end{aligned}$$

quindi la stima cercata si ottiene dalla (1.43), per esempio per  $\alpha = 0$  si ha  $|G(z)| \leq C'(1 + |z|)^N$  e la stessa stima è immediatamente ottenibile per  $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$  e per  $\alpha = \pi$ .

Tuttavia ciò non è sufficiente per applicare il principio di Phragmén - Lindelöf, in quanto per una funzione di ordine due abbiamo bisogno di settori di apertura strettamente minore di  $\frac{\pi}{2}$ . Si costruisce quindi la funzione:

$$G^\beta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z d\zeta g(e^{-i\beta}\zeta)g(i\zeta) \quad z \in \mathbb{C}$$

e si vede immediatamente che per questa la (1.43) garantisce una crescita al più polinomiale sulle rette  $\Gamma_\alpha$  con  $\alpha = \beta, \pi+\beta, \pm\frac{\pi}{2}$ . Pertanto se  $\beta \neq 0$  in almeno due settori il principio (1.38) è applicabile. Ma osserviamo che la maggiorazione data dalla (1.43) vale uniformemente in  $\beta$  e inoltre  $G^\beta(z)$  è una funzione continua di  $\beta$ , quindi abbiamo concluso.

Infine se  $G(z)$  è un polinomio chiaramente lo sarà anche  $\frac{\partial G}{\partial z}$ , quindi in definitiva abbiamo mostrato che:

$$g(z)g(iz) = R(z) \quad (1.45)$$

dove  $R(z)$  è un polinomio in  $z$  e  $g(z)$  è una funzione intera di ordine 2.

- $f$  e  $\hat{f}$  sono funzioni di Hermite della forma (1.40). Infatti il teorema di fattorizzazione di Hadamard (1.34) implica che una funzione intera  $g(z)$  di ordine due si possa scrivere (in modo unico) come:

$$g(z) = P(z)e^{Q(z)}$$

dove  $P(z)$  e  $Q(z)$  sono polinomi in  $z$  e  $Q$  è al più di grado 2. Inoltre l'equazione (1.45) implica che  $Q(z) + Q(iz) = 0$  e quindi  $Q$  deve essere un polinomio omogeneo di grado 2. Pertanto possiamo scrivere, per  $x \in \mathbb{R}$ :

$$g(x) = P(x)e^{-\frac{\gamma}{2}x^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(x) = e^{-\frac{1}{2\gamma}x^2} \tilde{P}(x)$$

dove  $\tilde{P}(x)$  è ancora un polinomio,  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}\gamma > 0$  per la (1.41), e inoltre per definizione:

$$\hat{f}(x) = \hat{g}(x)e^{\frac{x^2}{2}} = \tilde{P}(x)e^{(-\frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{2})x^2}.$$

Il fatto che la  $\hat{f}$  sia limitata e in  $L^1(\mathbb{R})$  implica infine che:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{2} > 0,$$

e quindi  $f$  e  $\hat{f}$  sono della forma voluta. □

Un analogo principio di indeterminazione è dato da:

**Teorema: (Indeterminazione di tipo Cowling - Price)** Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e  $N \geq 0$ . Se:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N} e^{a\frac{x^2}{2}} < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|\hat{f}(y)|}{(1+|y|)^N} e^{b\frac{y^2}{2}} < \infty \quad (1.46)$$

con  $ab = 1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , allora<sup>3</sup>  $f(x) = P(x)e^{-a\frac{x^2}{2}}$  per qualche polinomio  $P(x)$ .

<sup>3</sup>In realtà si può anche dimostrare che, nelle ipotesi (1.46),  $ab > 1$  implica  $f \equiv 0$ .

**Dimostrazione:** Il risultato segue immediatamente dal teorema precedente. Infatti:

$$|xy| = \left| (x\sqrt{a})(y\sqrt{b}) \right| \leq \frac{ax^2 + by^2}{2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } ab = 1$$

$$(1 + |x| + |y|)^M \geq (1 + |x|)^{M/2} (1 + |y|)^{M/2}$$

e quindi le ipotesi (1.46) implicano quelle del teorema (1.40) in quanto:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{|f(x)|}{(1 + |x|)^N} e^{a\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|\hat{f}(y)|}{(1 + |y|)^N} e^{b\frac{y^2}{2}} \geq$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|f(x)| |\hat{f}(y)|}{(1 + |x| + |y|)^{2N}} e^{|xy|}$$

□

**Osservazione:** Le relazioni di indeterminazione di Heisenberg (1.36), di Beurling - Hörmander (1.40), e di Cowling - Price (1.46) si generalizzano facilmente al caso di funzioni definite su  $\mathbb{R}^n$ , come mostrato in [3].

# Capitolo 2

## Unicità di Pauli

Il primo dei problemi di ambiguità che consideriamo è la cosiddetta “unicità di Pauli” (Pauli uniqueness), che consiste nel seguente:

**Problema:** (*Unicità di Pauli*) È possibile determinare  $f \in L^2(\mathbb{R})$  conoscendo il suo modulo ed il modulo della sua trasformata di Fourier? Cioè:

$$|f(q)|, |\mathcal{F}f(p)| \xrightarrow{?} f(q) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.1)$$

**Definizione:** Due funzioni  $f_1$  e  $f_2$  si dicono *partner banali* rispetto al problema (2.1) se  $f_1(q) = cf_2(q)$  con  $|c| = 1$ . In tal caso infatti vale ovviamente  $|f_1| = |f_2|$  e  $|\mathcal{F}f_1| = |\mathcal{F}f_2|$ , ma si tratta di una “ambiguità” non interessante.

Ciò che ci interessa è sapere se esistono funzioni che ammettono partner non banali.

### 2.1 Elementi di Meccanica Quantistica

Come dice il nome stesso (Pauli), il problema non può che provenire dalla Meccanica Quantistica. Per spiegare l’origine del problema è quindi necessaria una breve introduzione ai concetti di stato e funzione d’onda in un sistema quantistico.

#### 2.1.1 Stati e osservabili di un sistema fisico

La differenza tra la descrizione di un sistema classico e quella di uno quantistico è molto profonda, e parte dal concetto stesso di stato fisico.

Nel caso classico un sistema (hamiltoniano) è caratterizzato da coordinate canoniche  $\{p_i, q_i\}_{i \in I}$  che descrivono lo spazio delle fasi  $\Gamma$ , ed una *osservabile classica* è una funzione  $f(p_i, q_i)$  definita su  $\Gamma$ . Intuitivamente si potrebbe

pensare che lo stato di tale sistema sia dato dalla specificazione di un punto nello spazio delle fasi  $\Gamma$ . Una osservabile  $g$  misurata in un certo stato sarebbe quindi la funzione  $g(p_i, q_i)$  calcolata nel punto corrispondente. In realtà come spiegato in dettaglio in [20], questo punto di vista è limitativo e ha dei problemi, primo fra tutti il fatto che è fisicamente impossibile misurare con infinita precisione la “posizione” del sistema in  $\Gamma$ . Diciamo quindi più in generale che lo **stato classico**  $\omega$  di un sistema hamiltoniano è dato da un funzionale sullo spazio delle osservabili:

$$\omega : \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

cosicché il valore di aspettazione della osservabile  $f$  nello stato  $\omega$  è dato da  $\omega(f)$ . Si noti che il punto di vista precedente è contenuto in questo, infatti una misura infinitamente precisa corrisponde al funzionale “valutazione in un punto”.

Questa pittura si chiarisce se facciamo qualche ulteriore ipotesi:

1. Lo spazio delle fasi  $\Gamma$  è compatto.
2. Le osservabili sono funzioni continue, cioè in  $C^0(\Gamma)$ .
3. Gli stati sono funzionali lineari e positivi.

Si osservi che queste ipotesi sono fisicamente piuttosto ragionevoli, infatti i possibili valori delle posizioni  $q_i$  saranno in pratica limitati, così come quelli dei momenti  $p_i$  dato che l’energia sarà sempre limitata superiormente. La continuità delle osservabili come funzioni delle coordinate canoniche non è una grossa perdita di generalità, così come non lo sono la linearità e positività degli stati:

$$\begin{cases} \omega(f_1 + f_2) = \omega(f_1) + \omega(f_2) & \forall f_1, f_2 \in C^0(\Gamma) \\ \omega(f) \geq 0 & \forall f \in C^0(\Gamma). \end{cases}$$

In queste ipotesi la “matematizzazione” del sistema (classico) è chiarificata dal teorema di Riesz-Markov (cfr [18], pag. 107):

**Teorema: (Riesz - Markov)** Sia  $\Gamma$  uno spazio compatto e  $\omega$  un funzionale lineare positivo su  $C^0(\Gamma)$ . Allora esiste unica una misura boreliana regolare  $\mu_\omega$  su  $\Gamma$  tale che, per  $f \in C^0(\Gamma)$ :

$$\omega(f) = \int_{\Gamma} f d\mu_\omega$$

È chiaro che questa misura  $\mu_\omega$  è la “funzione di distribuzione” del sistema nel senso della Meccanica Statistica, che risulta quindi esplicitamente inclusa in questa visione della Meccanica Classica. In definitiva possiamo dire che:

$$\{\text{Stati di un sistema classico}\} \leftrightarrow \{\text{Misure sullo spazio delle fasi}\} \quad (2.2)$$

In Meccanica Quantistica la situazione è molto diversa. Un sistema è caratterizzato innanzitutto da uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , e il suo *stato quantistico* è dato da un vettore  $S \in \mathcal{H}$ . Ciò realizza il “Principio di Sovrapposizione”, secondo il quale<sup>1</sup>: “Ogniqualvolta il sistema si trovi in uno stato definito, esso può venire considerato come facente parte contemporaneamente di due o più altri (...) in un numero infinito di modi. Viceversa, due o più stati possono venir sovrapposti per formarne uno nuovo”.

Usando la notazione bra-ket di Dirac, chiamiamo i vettori connessi agli stati del sistema “*vettori ket*” e li indichiamo con il simbolo  $|\cdot\rangle$ . Per esempio lo stato  $S$  sarà indicato con  $|S\rangle$ . Ora, poiché vogliamo che uno stato “sovrapposto con sé stesso” rimanga lo stato di partenza, deve valere:

$$\alpha|S\rangle + \beta|S\rangle = (\alpha + \beta)|S\rangle \quad \sim \quad |S\rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha + \beta \neq 0,$$

cioè se il vettore ket corrispondente ad uno stato viene moltiplicato per un numero complesso non nullo, il ket risultante corrisponde allo stesso stato. Abbiamo quindi, a differenza della (2.2):

$$\{\text{Stati di un sistema quantistico}\} \leftrightarrow \{\text{Raggi in uno spazio di Hilbert}\}$$

Tutto ciò è giustificato da salde argomentazioni fisiche, e la teoria così costruita risolve i paradossi della cosiddetta “crisi della fisica classica” (come ampiamente spiegato in [17]). Un approccio alternativo e più algebrico per giustificare queste assunzioni si può trovare per esempio in [20].

È comodo chiamare “*vettori bra*” gli elementi dello spazio duale di  $\mathcal{H}$  (cioè i funzionali lineari e continui su  $\mathcal{H}$ ) e indicarli con  $\langle \cdot |$ . Questa notazione sottintende il teorema di rappresentazione di Riesz, nel senso che dati  $A, B \in \mathcal{H}$  abbiamo per il loro prodotto scalare:

$$(A, B) = \langle A | B \rangle = \langle B | A \rangle^*$$

dove  $\langle A |$ ,  $\langle B |$  sono i funzionali rappresentati rispettivamente dai vettori  $A, B \in \mathcal{H}$ , cioè da  $|A\rangle, |B\rangle$ . Il prodotto scalare è quindi indicato con il “braket”  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , e la convenzione usuale è:

$$(A, \alpha B) = \langle A | (\alpha |B\rangle) = \alpha \langle A | B \rangle = (\alpha^* \langle A |) |B\rangle = (\alpha^* A, B) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Si noti che, mentre  $\langle A | B \rangle$  è un numero complesso,  $|A\rangle \langle B|$  è un operatore lineare da  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}$  che agisce come:  $(|A\rangle \langle B|) |S\rangle = (\langle B | S \rangle) |A\rangle$ .

Le *variabili dinamiche* in questo contesto si identificano con gli operatori lineari su  $\mathcal{H}$ . Una differenza cruciale rispetto alla fisica classica è quindi che in questo caso il prodotto fra variabili dinamiche è in generale non commutativo.

<sup>1</sup>Citiamo direttamente [6], pag 16.

Postulato fondamentale della Meccanica Quantistica è che la *misura* di una variabile dinamica  $\hat{A}$  sullo stato  $|S\rangle$  consista nella proiezione di  $|S\rangle$  su un autovettore di  $\hat{A}$ . È importante osservare che non è noto a priori su quale autovettore verrà proiettato il sistema. Più precisamente, indichiamo<sup>2</sup> un autovettore con l'autovalore corrispondente, scrivendo per esempio  $\hat{A}|A\rangle = A|A\rangle$ , ove l'operatore è distinto dal suo autovalore grazie al simbolo<sup>3</sup>  $\hat{\cdot}$ . Il risultato della misura è l'autovalore  $A$  corrispondente all'autovettore  $|A\rangle$  su cui si è proiettato il sistema, e la probabilità di ottenere tale risultato è data da:

$$\text{Probabilità di ottenere } A \text{ misurando } \hat{A} \text{ su } |S\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\langle A|S\rangle|^2}{\langle A|A\rangle \langle S|S\rangle}.$$

Si noti che abbiamo abbandonato il determinismo della fisica classica. Possiamo quindi parlare solo di *valor medio* della variabile dinamica  $\hat{A}$  sullo stato  $|S\rangle$  (ove la media è fatta su molte misure), e in base all'interpretazione probabilistica appena vista abbiamo:

$$\text{Valor medio di } \hat{A} \text{ su } |S\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle S|(\hat{A}|S\rangle)}{\langle S|S\rangle} \quad (2.3)$$

Ora, in generale la (2.3) è un numero complesso in quanto:

$$[\langle S|(\hat{A}|S\rangle)]^* = (\hat{A}S, S) = (\langle S|\hat{A})|S\rangle = \langle S|(\hat{A}^\dagger|S\rangle)$$

ove  $\hat{A}^\dagger$  indica l'operatore aggiunto di  $\hat{A}$ . Possiamo però decomporre  $\hat{A}$  come:

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) + \frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)$$

ove il primo termine ha valor medio reale, il secondo ha valor medio immaginario. È fisicamente ovvio che una misura dia come risultato un numero reale, quindi si potrebbe pensare di misurare prima la parte reale e poi la parte immaginaria di una certa variabile dinamica. Ma ciò implicherebbe due misure di variabili dinamiche che in generale non commutano, per cui come spiegato nella sezione 2.1.3 la misura della prima perturberebbe inevitabilmente la misura della seconda. In definitiva conviene considerare soltanto *variabili dinamiche reali*, ossia operatori lineari autoaggiunti su  $\mathcal{H}$ . Si noti che in questo caso possiamo scrivere senza ambiguità:

$$\text{Valor medio di } \hat{A} \text{ su } |S\rangle, \text{ con } \hat{A} = \hat{A}^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle S|\hat{A}|S\rangle}{\langle S|S\rangle},$$

<sup>2</sup>Questa è la usuale convenzione dei fisici.

<sup>3</sup>Dal contesto non sarà difficile distinguere questo simbolo da quello usato per indicare la trasformata di Fourier.



e si vede che la notazione di Dirac è costruita per essere conveniente proprio nel caso di operatori autoaggiunti.

Veniamo infine alla definizione di *osservabile quantistica*, ossia vediamo quali condizioni deve soddisfare una variabile dinamica reale per essere effettivamente osservabile. Per quanto visto, la misura di  $\hat{A}$  su uno stato  $|S\rangle$  consiste nella proiezione su un autostato<sup>4</sup>  $|A\rangle$  di  $\hat{A}$ , e ciò avviene con probabilità proporzionale a  $|\langle A|S\rangle|^2$ . Affinché le varie probabilità sommino a 1, è chiaramente necessario che per ogni stato  $|S\rangle$  esista almeno un autostato  $|A\rangle$  di  $\hat{A}$  tale che  $\langle A|S\rangle \neq 0$ . Ciò è equivalente a dire che una osservabile in Meccanica quantistica è un *operatore lineare autoaggiunto su  $\mathcal{H}$  che ammetta un sistema completo di autovettori*. Tale sistema completo non è necessariamente discreto, ma può esserci una parte continua dello spettro. In generale pertanto questa completezza si scrive, per una osservabile  $\hat{A}$  con autovalori discreti  $\{a_n\}_{n \in M}$  più uno spettro continuo  $I$ :

$$1 = \sum_{n \in M} |a_n\rangle \langle a_n| + \int_I da |a\rangle \langle a| \quad (2.4)$$

**Osservazione:** In pratica può essere molto complicato dimostrare che certe variabili dinamiche, utili nello studio di determinati problemi, siano effettivamente delle osservabili (prima fra tutte l'energia, cioè la hamiltoniana  $\hat{H}$ ). Ciò che si fa spesso è quindi “supporre” che certe variabili dinamiche abbiano un sistema completo di autovettori se ci sono “ragioni fisiche” per ritenere che siano osservabili (vedi [6], pag 51).

**Osservazione:** Ci si può domandare se, data una osservabile, è sempre possibile misurarla effettivamente. In linea di principio la risposta sarebbe affermativa, ma in pratica la misura di certe osservabili può essere molto ardua se non del tutto impensabile, e ciò è all'origine di alcuni dei più famosi “paradossi” della Meccanica Quantistica. Tutte le contraddizioni scompaiono nell'impostazione più “realista” in cui si impone in aggiunta che per ogni osservabile sia possibile costruire uno strumento in grado di effettuarne la misura (vedi [17], capitolo 17).

### 2.1.2 Rappresentazioni e funzioni d'onda

Quanto visto finora è del tutto generale ed astratto. Nella pratica per studiare un sistema quantistico conviene “rappresentare” uno stato tramite le sue componenti rispetto a un sistema completo. Consideriamo per semplicità

<sup>4</sup>Così si chiamano normalmente gli autovettori, essendo vettori nello spazio degli stati  $\mathcal{H}$ .

un sistema unidimensionale, e rappresentiamo uno stato tramite gli autostati dell'operatore posizione  $\hat{x}$ . Questi saranno:

$$|x\rangle \quad \text{tali che} \quad \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

e lo spettro sarà ovviamente continuo ( $\mathbb{R}$ ). La relazione di completezza (2.4) implica che:

$$\int_{\mathbb{R}} |x\rangle dx \langle x| = 1,$$

ma operando con questa su  $|y\rangle$  abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} |x\rangle dx \langle x|y\rangle = |y\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x|y\rangle = \delta(x-y)$$

ove  $\delta(x-y)$  è la famosa delta di Dirac<sup>5</sup>. Si vede quindi che gli autovettori corrispondenti ad autovalori della parte continua dello spettro di una osservabile non possono essere normalizzabili. Si parla infatti di “autovettori impropri”, e si usano perché significativi dal punto di vista fisico e utili nel semplificare i calcoli<sup>6</sup>.

Uno stato fisico  $|\psi\rangle$  invece sarà sempre normalizzabile, cioè possiamo sempre imporre:

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle\psi|x\rangle dx \langle x|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |\langle\psi|x\rangle|^2$$

Lo stato  $|\psi\rangle$  di un sistema unidimensionale è quindi rappresentato da una  $\langle x|\psi\rangle = \psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ . Questa  $\psi$  si interpreta probabilisticamente dicendo che la probabilità di “trovare il sistema” tra  $x = a$  e  $x = b$  è data da:

$$\int_a^b \langle\psi|x\rangle \langle x|\psi\rangle dx = \int_a^b \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

ove abbiamo imposto la normalizzazione  $\|\psi\|_2 = 1$ . Il valor medio di una osservabile  $\hat{A}$  sullo stato  $\psi$  si può scrivere come:

$$\langle A \rangle_{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\psi|A|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \psi^*(x) \langle x|A|y\rangle \psi(y).$$

Per esempio nella rappresentazione delle posizioni l'osservabile posizione  $\hat{x}$  è rappresentata all'operatore “moltiplicazione per  $x$ ”, cioè  $\langle x|\hat{x}|y\rangle = x\delta(x-y)$ , per cui:

$$\langle x|(\hat{x}|\psi\rangle) = \int_{\mathbb{R}} dy \langle x|\hat{x}|y\rangle \langle y|\psi\rangle = x \langle x|\psi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} x\psi(x).$$

<sup>5</sup>Vedi [6], pagina 79.

<sup>6</sup>In realtà, come mostrato in [17], la cosa può essere giustificata con un procedimento di approssimazione, vedi pagina 114.

Per ragioni fisiche si vede che l'osservabile momento  $\hat{p}$  deve essere invece rappresentata da  $\langle x | \hat{p} | y \rangle = -i\hbar\delta(x-y)\partial_x$ , dove  $\hbar$  è la costante di Planck. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | \psi \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \langle x | \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} | \psi \rangle = (-i\hbar)(x\partial_x - \partial_x x)\psi(x) \\ &= (-i\hbar)(x\partial_x - 1 - x\partial_x)\psi(x) = i\hbar\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x | (i\hbar)1 | \psi \rangle \end{aligned}$$

e poiché ciò vale per ogni stato  $|\psi\rangle$  possiamo concludere che:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

che è la fondamentale relazione di commutazione canonica.

### 2.1.3 Indeterminazione in Meccanica Quantistica

**Definizione:** Una caratterizzazione quantitativa della “*incertezza*” con cui la osservabile  $\hat{A}$  può venire misurata nello stato  $\psi$  è data da:

$$(\Delta\hat{A})^2 = \left\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi)^2 \right\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \psi^* (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi)^2 \psi \quad (2.5)$$

Ora, consideriamo posizione e momento. A meno di traslazioni-ridefinizioni possiamo supporre  $\langle q \rangle = \langle p \rangle = 0$ , e si ha:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{p}\Delta\hat{x} &= \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \psi^* (-\hbar^2 \partial_x^2) \psi dx \right)^{1/2} \\ (\text{per parti}) &= \hbar \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\partial_x \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ (\text{per la (1.6)}) &= \hbar \left( \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ (\text{grazie a (1.36)}) &\geq \frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

il che implica, da un punto di vista fisico, che posizione e momento non possano essere noti *simultaneamente* con precisione arbitraria. In generale si può vedere che per due qualunque osservabili  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , posto  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ , vale:

$$\left\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \right\rangle \times \left\langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2$$

che è la famosa relazione di indeterminazione di Heisenberg.

## 2.2 Origine del problema

Uno stato fisico  $|\psi\rangle$  è dunque univocamente specificato dalla sua rappresentazione nello spazio delle posizioni  $\langle x|\psi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x) \in L^2$ , oppure nello spazio degli impulsi (conviene in realtà considerare gli autovalori e autovettori dell'operatore “vettore d'onda”  $\hat{k} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{p}/\hbar$ ,  $[\hat{x}, \hat{k}] = i$ ):

$$\langle k|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle k|x\rangle dx \langle x|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \psi(x) = \mathcal{F}\psi(k)$$

ove si è usata la (2.4) e inoltre il fatto che, come si può facilmente verificare, gli autostati impropri dell'impulso visti nella rappresentazione delle posizioni sono dati dalle onde piane:  $\langle x|k\rangle = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ .

Dal punto di vista fisico solo i moduli direttamente misurabili, ad esempio  $|\psi(x)|^2$  rappresenta la densità di probabilità di ottenere  $x$  misurando  $\hat{x}$ ; allo stesso modo  $|\mathcal{F}\psi(k)|^2$  corrisponde alla densità di probabilità di ottenere  $\hbar k$  misurando  $\hat{p}$ . Il principio di indeterminazione (2.6) implica però una limitazione nella precisione di misure simultanee di posizione e impulso, per cui le due “distribuzioni” (cioè i due moduli quadri) non possono essere note entrambe con infinita precisione.

C'è quindi una limitazione intrinseca nella determinazione dello stato di un sistema quantistico. Ci si può tuttavia domandare: supponiamo di poter misurare con esattezza entrambe le distribuzioni  $|\psi(q)|$  e  $|\mathcal{F}\psi(p)|$ ; potremmo da queste misure specificare univocamente la funzione d'onda e quindi lo stato fisico? Vedremo che in generale la risposta è no. Storicamente la questione fu sollevata da Pauli in una nota a piè di pagina di [16], e fu poi ripresa da Reichenbach e Bargmann che fornirono i primi esempi di non unicità.

## 2.3 Esempio di non unicità

Questo esempio è dovuto a [2] ed ha il merito di essere particolarmente interessante dal punto di vista fisico, come spiegato di seguito nella sezione (2.4).

Consederiamo il “pacchetto gaussiano”  $f$ :

$$f(x; x_0, k_0) = (2\pi a^2)^{-1/4} e^{-ik_0 x} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a^2}\right]$$

la cui trasformata di Fourier è data da:

$$\begin{aligned}\hat{f}(k; x_0, k_0) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} dx e^{ikx} f(x; x_0, k_0) \\ &= \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{i(k-k_0)x_0} \exp[-a^2(k-k_0)^2].\end{aligned}$$

Fisicamente  $f(\cdot; x_0, k_0)$  rappresenta una particella libera con distribuzione spaziale gaussiana di larghezza  $a$  e centrata in  $x_0$ , e distribuzione negli impulsi ancora gaussiana con larghezza  $\frac{1}{2a}$  e centrata in  $k_0$ . Osserviamo che  $\Delta\hat{x}\Delta\hat{k} = \frac{1}{2}$ , come deve essere per il principio di indeterminazione (2.6), e inoltre  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(k)|^2 dk = 1$ .

L'esempio di non unicità si costruisce considerando sovrapposizioni di due pacchetti:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = c_1 f(x; x_1, k_1) + c_2 f(x; x_2, k_2) \\ \psi_2(x) = c_3 f(x; x_1, k_2) + c_4 f(x; x_2, k_1). \end{cases} \quad (2.7)$$

Prendendo il quadrato dei moduli si ha:

$$\begin{aligned}|\psi_1(x)|^2 &= (2\pi a^2)^{-1/2} \left\{ |c_1|^2 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2a^2}} + |c_2|^2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2a^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2}} e^{-\frac{(x-x_2)^2}{4a^2}} \Re[c_1 c_2^* e^{-i(k_1-k_2)x}] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\psi_2(x)|^2 &= (2\pi a^2)^{-1/2} \left\{ |c_3|^2 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2a^2}} + |c_4|^2 e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2a^2}} + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2}} e^{-\frac{(x-x_2)^2}{4a^2}} \Re[c_3 c_4^* e^{i(k_1-k_2)x}] \right\}\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}|\hat{\psi}_1(k)|^2 &= \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/2} \left\{ |c_1|^2 e^{-2a^2(k-k_1)^2} + |c_2|^2 e^{-2a^2(k-k_2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{-a^2(k-k_1)^2} e^{-a^2(k-k_2)^2} \Re[c_1 c_2^* e^{i(k-k_1)x_1} e^{-i(k-k_2)x_2}] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\hat{\psi}_2(k)|^2 &= \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/2} \left\{ |c_3|^2 e^{-2a^2(k-k_2)^2} + |c_4|^2 e^{-2a^2(k-k_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{-a^2(k-k_1)^2} e^{-a^2(k-k_2)^2} \Re[c_3 c_4^* e^{i(k-k_2)x_1} e^{-i(k-k_1)x_2}] \right\}\end{aligned}$$

Le condizioni per avere  $|\psi_1| = |\psi_2|$  e  $|\hat{\psi}_1| = |\hat{\psi}_2|$  sono pertanto:

$$\begin{cases} |c_1| = |c_2| = |c_3| = |c_4| \\ c_1 c_2^* = c_3^* c_4 \\ c_1 c_2^* = c_3 c_4^* \exp[i(k_1 - k_2)(x_1 + x_2)]. \end{cases}$$

Quindi basta prendere:

$$c_j = \frac{e^{i\theta_j}}{\sqrt{2}} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

con:

$$\theta_4 - \theta_3 = \theta_1 - \theta_2 = \theta_3 - \theta_4 + (k_1 - k_2)(x_1 + x_2) \quad (\text{modulo } 2\pi),$$

e questa equazione ha soluzione:

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \\ \theta_2 = -\frac{(k_1 - k_2)(x_1 + x_2)}{2} + \alpha \\ \theta_3 = -\frac{(k_1 - k_2)(x_1 + x_2)}{2} + \beta \\ \theta_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo quindi ottenuto due funzioni  $\psi_1$  e  $\psi_2$  che sono distinte per  $x_1 \neq x_2$  e  $k_1 \neq k_2$ , e che tuttavia hanno  $|\psi_1| = |\psi_2|$  e  $|\hat{\psi}_1| = |\hat{\psi}_2|$ , cioè forniscono un controesempio all'unicità di Pauli (2.1).

## 2.4 Conclusioni

L'esempio appena visto dimostra dunque il:

**Teorema:** Il problema (2.1) non ha in generale soluzione unica.

$$|f(q)|, |\mathcal{F}f(p)| \not\rightarrow f(q) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.8)$$

**Osservazione:** Un aspetto interessante di questo esempio è che l'ambiguità ha luogo tra funzioni che rappresentano stati aventi un'interpretazione fisica molto diretta e quindi in un certo senso "effettivamente realizzabili". Inoltre è chiaro che l'evoluzione temporale di particella libera permetterebbe di distinguerli, cioè l'ambiguità c'è solo in un preciso istante e non "prima" né "dopo" (nel senso dell'evoluzione temporale in Meccanica Quantistica). Questo è importante perché c'è chi si è domandato, interrogandosi sui fondamenti della Meccanica Quantistica, se l'ambiguità (2.8) non indicasse la necessità di

ripensamento del concetto di “stato fisico”. Ad esempio in [22] si suggeriscono due possibilità: la prima è che si potrebbe dover allargare il concetto di funzione d’onda identificando le funzioni che hanno uguale distribuzione rispetto a tutte le osservabili rilevanti; la seconda che certe funzioni aventi partner non banali rispetto al problema (2.1) potrebbero non rappresentare alcuno stato fisico effettivamente realizzabile. Quanto esposto nella sezione (2.3) è quindi in un certo senso un semplice controesempio ad entrambe queste possibilità: più precisamente l’ambiguità di Pauli si può manifestare in situazioni in cui non c’è nessuna ragione per abbandonare la nozione di stato della Meccanica Quantistica.

# Capitolo 3

## Phase retrieval

Uno dei più famosi e studiati problemi di ambiguità è dato senz'altro dal:

**Problema:** (*Phase retrieval*) È possibile determinare  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sapendo il modulo della sua trasformata di Fourier?

$$|\mathcal{F}f| \stackrel{?}{\longrightarrow} f \in L^2(\mathbb{R})$$

A noi interessa in particolare studiare quali funzioni sono “ambigue” e quali no, cioè data  $f \in L^2(\mathbb{R})$  vogliamo trovare tutte le  $g \in L^2(\mathbb{R})$  aventi stesso modulo della trasformata di Fourier:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow g \in L^2(\mathbb{R}) \text{ t.c. } |\mathcal{F}f| = |\mathcal{F}g| \quad ? \quad (3.1)$$

**Definizione:**  $f_1$  e  $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  sono *partner banali* rispetto al problema (3.1) se:

1.  $f_1(x) = cf_2(x)$  con  $|c| = 1$
2.  $f_1(x) = f_2(x - a)$  con  $a \in \mathbb{R}$
3.  $f_1(x) = f_2^*(-x)$

o composizione di queste.

Vedremo che per funzioni che soddisfano determinate proprietà ci sono solo ambiguità banali, mentre in generale l'insieme delle soluzioni di (3.1) è più complesso.



### 3.1 Origine del problema

Il problema è del phase retrieval (3.1) si presenta in ogni esperimento in cui si usi radiazione elettromagnetica per determinare la struttura di un oggetto tramite diffrazione.

Il caso più semplice è quello della diffrazione di Fraunhofer: supponiamo di porre uno schermo opaco con una o più aperture davanti ad una sorgente monocromatica, e di avere oltre lo schermo un piano sul quale osserviamo la radiazione incidente. Il limite di Fraunhofer è quello in cui la lunghezza d'onda della radiazione e la dimensione delle aperture dello schermo opaco sono molto minori rispetto alle distanze sorgente-schermo e schermo-piano, e si può dimostrare che in questa situazione il fronte d'onda diffratto è proporzionale alla trasformata di Fourier (bidimensionale) delle aperture dello schermo. Ma della radiazione si può misurare sperimentalmente solo l'intensità, che è data dal modulo quadro di questa trasformata di Fourier, quindi l'informazione sulla fase viene perduta ed è necessario ricostruirla se vogliamo, tramite la misura, ottenere informazioni sulla forma delle aperture dello schermo. Per esempio consideriamo il caso di una fenditura sottile (che supponiamo molto lunga, in modo da ridurre il problema a una dimensione). La forma dell'apertura è:

$$\text{apertura} = \chi_{[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]}$$

e l'intensità della luce che si misura su uno schermo distante  $L$  dal piano, a distanza  $x$  dalla congiungente sorgente-apertura, è proporzionale a:

$$I \propto \left| \frac{\sin y}{y} \right|^2 \quad y = \frac{\pi d x}{\lambda L}$$

che è proprio il modulo quadro della trasformata di Fourier dell'apertura.

Il caso semplice della diffrazione di Fraunhofer fa capire per quale motivo il problema (3.1) sorga nella pratica. È chiaro che in tutte le moderne applicazioni dell'ottica<sup>1</sup> il problema si manifesta invariabilmente, richiedendo efficienti metodi di soluzione. Una delle applicazioni più moderne è ad esempio il "lensless imaging", in cui si usano algoritmi opportuni per risolvere il problema del phase retrieval ricombinando numericamente (anzichè otticamente) la luce diffusa da oggetti illuminati. In questo modo si ottengono immagini prive delle limitazioni causate dalla diffrazione e dalle aberrazioni; in compenso la difficoltà è trasferita dal fabbricare buone lenti al progettare algoritmi efficienti (vedi per esempio [15]).

In quanto segue ci occuperemo del phase retrieval solo come problema matematico "astratto".

---

<sup>1</sup>La cui descrizione va ben oltre gli scopi di questo lavoro di tesi.

## 3.2 Caso a supporto compatto

Cominciamo considerando il caso di funzioni a supporto compatto. Il caso generale sarà considerato nella sezione 3.3.

### 3.2.1 Studio dell'ambiguità

Seguiamo principalmente [10] e [14]. I teoremi del capitolo 1 forniscono importanti informazioni su  $\mathcal{F}f$  nel<sup>2</sup> *caso in cui  $f$  ha supporto compatto*. Infatti il teorema (1.19) ci assicura che in tal caso  $\mathcal{F}f$  può essere estesa su  $\mathbb{C}$  ad una funzione intera di tipo esponenziale. D'altra parte per il teorema (1.35) ciò implica che tale estensione  $\mathcal{F}f(z)$  può essere fattorizzata in termini dei suoi zeri  $\{z_k\}$ :

$$\mathcal{F}f(z) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 z} z^m \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n} \quad (3.2)$$

ed è quindi univocamente determinata da  $\alpha_0, \alpha_1, m, \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Il fatto notevole è che molta di questa informazione può essere ricavata dal solo modulo quadro, come spiegato nel seguente:

**Lemma:** I numeri  $m, \operatorname{Re}(\alpha_0), \operatorname{Re}(\alpha_1), \operatorname{Re}(z_n), |\operatorname{Im}(z_n)|$  nell'equazione (3.2) sono univocamente determinati da  $|\mathcal{F}f(k)| = |\hat{f}(k)|, k \in \mathbb{R}$ .

**Dimostrazione:** Sia  $G$  la funzione di autocorrelazione:

$$G(x) = f * f^*(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) f^*(x-t) dt. \quad (3.3)$$

Chiaramente anche  $G$  è ben definita ed ha supporto compatto, quindi per (1.19)  $\hat{G}$  può essere estesa ad una funzione intera e inoltre:

$$\hat{G}(z) = \hat{f}(z) \hat{f}^*(z^*) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

In particolare per  $k \in \mathbb{R}$  vale:

$$\hat{G}(k) = |\hat{f}(k)|^2.$$

Ma allora per continuazione analitica la  $\hat{G}(z)$  è univocamente specificata da  $|\mathcal{F}f(k)|$ , e in particolare lo sono i suoi zeri cioè:

$$|\mathcal{F}f(k)| \rightarrow z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \hat{f}(z) = 0 \text{ oppure } \hat{f}(z^*) = 0$$

---

<sup>2</sup>Caso che ovviamente copre la maggior parte delle applicazioni pratiche.

il che equivale alla tesi (per quanto riguarda gli zeri  $\{z_n\}$ ).

Inoltre il numero  $m$  è semplicemente l'ordine dello zero in  $z = 0$ , e l'informazione su  $\operatorname{Re}(\alpha_0)$  e  $\operatorname{Re}(\alpha_1)$  non viene perduta facendo il modulo quadro, quindi è tutto univocamente fissato. □

Ora, poiché  $\operatorname{Im}(\alpha_0)$  e  $\operatorname{Im}(\alpha_1)$  corrispondono rispettivamente ad una fase globale e ad una traslazione (ambiguità banale), il lemma precedente implica che l'unica vera ambiguità nella ricostruzione della  $f$  viene dall'impossibilità di determinare la parte immaginaria degli zeri di  $\hat{f}$ , cioè  $\operatorname{Im}(z_n)$ .

Abbiamo quindi dimostrato il seguente:

**Teorema: (Walter)** Siano  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  a supporto compatto. Estendiamo entrambe le trasformate a funzioni intere su  $\mathbb{C}$  come da (1.19), fattorizziamo  $\mathcal{F}f(z)$  e  $\mathcal{F}g(z)$  come in (3.2), ordinando gli zeri (contati con molteplicità) in entrambi i casi con modulo crescente. Allora  $|\mathcal{F}f(k)| = |\mathcal{F}g(k)|$  per ogni  $k \in \mathbb{R}$  se e solo se esistono  $c \in \mathbb{C}$ ,  $|c| = 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , e una scelta  $\zeta_n \in \{z_n, z_n^*\}$  tali che:

$$\mathcal{F}g(z) = ce^{iaz} e^{\alpha_0 + \alpha_1 z} z^m \prod_n \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) e^{z/\zeta_n} \quad (3.4)$$

Da questo segue il seguente riassuntivo teorema sul phase retrieval nel caso a supporto compatto:

**Teorema: (Ambiguità nel phase retrieval a supporto compatto)**  
Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$  a supporto compatto. Allora:

- Il problema (3.1) per  $f$  ha ambiguità non banale solo se  $\hat{f}(z)$  ha almeno due zeri non reali, e in generale con  $N$  zeri non reali di  $\hat{f}$  abbiamo al più  $2^N - 1$  possibili scelte non banali per la ricostruzione.

Tale ambiguità può essere in certi casi risolta se abbiamo *informazioni aggiuntive* sulla  $f$ , per esempio:

- Se sappiamo che  $f$  è a valori reali, simmetrica o antisimmetrica rispetto a  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  è univocamente determinata da  $|\hat{f}|$ .

e in generale abbiamo l'unicità se possiamo assicurarci che la  $\hat{f}(z)$  abbia zeri solo in un semipiano.

**Dimostrazione:**

- Segue dal teorema di Walter (3.4) e dal fatto che la scelta  $\zeta_n = z_n^*$  per ogni  $n$  corrisponde a  $\hat{f} \rightarrow \hat{f}^*$ , cioè all'ambiguità banale  $f(x) \rightarrow f^*(-x)$ .

- Se  $f$  è reale allora  $\hat{f}^*(z) = \hat{f}(-z^*)$ , quindi l'insieme degli zeri deve essere simmetrico rispetto all'asse immaginario. Inoltre la simmetria (risp. antisimmetria) rispetto a  $x_0$  implica  $\hat{f}(z) = \hat{f}(-z)$  (risp.  $\hat{f}(z) = -\hat{f}(-z)$ ), cioè l'insieme degli zeri deve essere anche simmetrico rispetto all'origine. Ma questo per il teorema di Walter fissa  $f$  senza ambiguità (non banale).

□

### 3.2.2 Costruzione esplicita di partner non banali

Il teorema di Walter (3.4) suggerisce una procedura molto semplice per costruire partner non banali rispetto al problema (3.1). Sia  $h \in L^2(\mathbb{R})$  per cui valga:

$$\nexists c \in \mathbb{C}, |c| = 1 \text{ t.c. } \hat{h}^* = c\hat{h}. \quad (3.5)$$

Definiamo:

$$f(x) = \left( i \frac{\partial}{\partial x} - z_1 \right) h(x) \quad , \quad g(x) = \left( i \frac{\partial}{\partial x} - z_2 \right) h(x)$$

con  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Usando le (1.6) si ha:

$$\hat{f}(k) = (k - z_1)\hat{h}(k) \quad , \quad \hat{g}(k) = (k - z_2)\hat{h}(k) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Per avere  $f \neq g$  e  $|\hat{f}| = |\hat{g}|$  basta prendere  $z_2 = z_1^*$  (ovviamente dovrà essere  $z_1 \neq z_1^*$ ). Affinché non siano partner banali basta verificare che non sia  $\hat{f} = c\hat{g}^*$  per un qualche  $c \in \mathbb{C}$  con  $|c| = 1$  (che significherebbe  $f(x) = cg^*(-x)$ ). Ma ciò è garantito dall'ipotesi iniziale (3.5) su  $h$ .

Abbiamo dunque costruito due partner non banali rispetto al problema del phase retrieval (3.1). In questo esempio inoltre si realizza esplicitamente quanto affermato dal teorema di Walter (3.4) sulla “forma” generale di questo tipo di ambiguità.

### 3.2.3 Ricostruzione

Seguiamo principalmente [14]. I teoremi della sezione 3.2.1 “risolvono” l'ambiguità del problema (3.1), ma lasciano completamente aperto il problema pratico di *ricostruire  $f$  sapendo  $|\hat{f}|$* . A questo scopo non è conveniente cercare di passare tramite la continuazione analitica, cioè risulta essere numericamente instabile la mappa:

$$\left| \hat{f}(k) \right| \quad \rightarrow \quad \{z_n\} = \{\text{zeri di } \hat{f}(z)\}.$$

È invece molto più conveniente la mappa:

$$|\hat{f}(k)| \rightarrow \arg(\hat{f}(k)),$$

tramite la quale è possibile ottenere addirittura formule esplicite (infatti ricostruire  $\arg(\hat{f})$  equivale chiaramente a ricostruire  $f$ ).

Per quanto riguarda l'ambiguità caratterizzata dal teorema di Walter (3.4) la scelta che si fa è molto semplice: ci proponiamo di ottenere per esempio la soluzione per la quale  $\hat{f}$  **non ha zeri nel semipiano superiore** (potevamo equivalentemente scegliere il semipiano inferiore). Così facendo l'ambiguità è scomparsa, e inoltre la funzione:

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log |f(z)| + i\phi(z),$$

dove  $\phi$  è una qualche determinazione di  $\arg(\hat{f})$ , è anch'essa analitica nel semipiano superiore, che chiameremo  $U$ .

Ciò che sfruttiamo è allora il classico risultato:

**Teorema: (Relazioni di Kramers-Kronig)** Sia  $\gamma(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$  analitica nel semipiano superiore  $U$  e continua in  $\bar{U}$  (chiusura). Sia inoltre  $\gamma$  limitata in  $U$  e  $\lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in U} \gamma(z) = 0$ . Allora sull'asse reale  $\alpha$  e  $\beta$  sono la trasformata di Hilbert l'una dell'altra, cioè  $\forall k \in \mathbb{R}$ :

$$\alpha(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta(\zeta)}{k - \zeta} d\zeta \quad \beta(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\zeta)}{k - \zeta} d\zeta \quad (3.6)$$

dove gli integrali sono intesi in parte principale.

**Dimostrazione:** Sia  $k \in \mathbb{R}$ , consideriamo l'integrale:

$$\oint \frac{\gamma(\zeta)}{k - \zeta} d\zeta$$

calcolato lungo il contorno in  $U$  costituito dai segmento  $[k - R, k - \epsilon]$  e  $[k + \epsilon, k + R]$  dell'asse reale e due semicerchi in  $U$  centrati in  $\zeta = k$  di raggi  $\epsilon$  e  $R$ . L'integrale è zero per l'ipotesi di analiticità in  $U$ , inoltre la limitatezza e le proprietà asintotiche di  $\gamma(\zeta)$  garantiscono che il contributo del semicerchio di raggio  $R$  tenda a zero per  $R \rightarrow \infty$ . Resta solo il contributo del semicerchio di raggio  $\epsilon$ , che tende a  $i\pi\gamma(k)$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ . In definitiva operando i due limiti si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\zeta)}{k - \zeta} d\zeta = -i\pi\gamma(k)$$

che equivale alla tesi prendendo parte reale e parte immaginaria.  $\square$

Tutto ciò che dobbiamo fare per garantire la ricostruzione della fase è imporre alla  $\hat{f}$  condizioni sufficienti affinché valgano le (3.6). In realtà, nel nostro caso, il teorema precedente applicato direttamente è di scarsa utilità in quanto, ad esempio, se  $f(x) = 0$  per  $x < 0$ , vale  $\hat{f}(\zeta) \rightarrow 0$  per  $|\zeta| \rightarrow \infty$  in  $U$ , e quindi  $|\Gamma(\zeta)| \rightarrow \infty$ . Possiamo tuttavia estendere le (3.6) a casi in cui il comportamento all'infinito di  $\Gamma$  sia sufficientemente controllato.

**Teorema: (Ricostruzione della fase)** Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$  a supporto compatto e tale che, dopo aver esteso  $\hat{f}$  sul piano complesso come da (1.19):

1.  $\hat{f}(\zeta) \neq 0$  per  $\text{Im}(\zeta) > 0$
2.  $\hat{f}(\zeta) = \frac{C}{\zeta^n}(1 + o(1))e^{iL\zeta}$  per  $\zeta \rightarrow \infty$  in  $U$ , per opportuni  $C \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $L \in \mathbb{R}$ .

Allora se  $k \in \mathbb{R}$  e  $\hat{f}(k) \neq 0$ , una determinazione di  $\arg(\hat{f})$  è data da:

$$\arg \hat{f}(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \left| \hat{f}(\zeta) \right|}{k - \zeta} d\zeta + Lk - \arg C + \frac{n\pi}{2} \quad (3.7)$$

ove l'integrale è inteso in parte principale.

**Osservazione:** Come già visto la prima ipotesi del teorema possiamo sempre supporla vera grazie ai teoremi della sezione 3.2.1, a meno di cambiare "rappresentante". La seconda ipotesi vale per esempio se  $f(x) = 0$  per  $x < L$ ,  $f \in C^n(L, \infty)$ ,  $f \in C^{n-1}(-\infty, \infty)$ ,  $f^{(n-1)}(L^+) \neq 0$ ,  $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Infatti integrando per parti  $n$  volte e usando il teorema (1.2):

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_L^{\infty} e^{ikx} f(x) dx = \frac{(-1)^n}{(ik)^n} \left[ f^{(n-1)}(L^+) e^{ikL} - \int_L^{\infty} e^{ikx} f^{(n)}(x) dx \right] \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{i^n f^{(n-1)}(L^+)}{k^n} [1 + o(1)] e^{ikL} \end{aligned}$$

Osservare inoltre che le costanti  $C$  e  $L$  nella (3.7) corrispondono rispettivamente a una fase globale e ad una traslazione della  $f$ , per cui rispetto al problema (3.1) sono irrilevanti.

**Dimostrazione:** (Ricostruzione della fase) Sia  $\log \left| \hat{f} \right| + i\phi$  una determinazione di  $\log(e^{-iL\zeta} \hat{f}(\zeta))$  analitica in  $U$ . Sarà quindi  $\arg \hat{f}(k) = \phi(k) + Lk$ . Procedendo in modo del tutto analogo alla dimostrazione di (3.6), valutiamo l'integrale:

$$\oint \frac{\log(e^{-iL\zeta} \hat{f}(\zeta))}{k - \zeta} d\zeta$$

sul contorno in  $U$  costituito dai segmento  $[k - R, k - \epsilon]$  e  $[k + \epsilon, k + R]$  dell'asse reale e due semicerchi in  $U$  centrati in  $\zeta = k$  di raggi  $\epsilon$  e  $R$ .

Operando i limiti sui raggi dei semicerchi e prendendo la parte reale si ottiene:

$$\phi(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \left| \hat{f}(z) \right|}{k - z} dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(k + R e^{i\theta}) d\theta.$$

Usiamo adesso l'andamento asintotico, per il quale:

$$\phi(\zeta) = \arg C - n \arg(\zeta) + o(1) \quad |\zeta| \rightarrow \infty \pmod{2\pi}$$

e segue la tesi dal fatto che  $\arg(k + R e^{i\theta}) = \theta$ .

□

**Osservazione:** Questo risultato (che è ovviamente possibile generalizzare per comprendere più casi) mostra che le relazioni di Kramers - Kronig e simili sono uno strumento fondamentale per la ricostruzione esplicita della fase.

### 3.3 Caso a supporto non compatto

Finora si è considerato il caso di funzioni  $f$  a supporto compatto. Vediamo adesso brevemente cosa succede rilassando questa restrizione, seguendo [14]. In generale, non essendo  $\hat{f}$  di tipo esponenziale, non vale il teorema di fattorizzazione di Hadamard (1.35), e la stessa funzione di autocorrelazione (3.3) non è più ben definita; è quindi inutile cercare di generalizzare il teorema di Walter (3.4). Ciò è chiarito dalla seguente:

**Osservazione:** Mentre nel caso a supporto compatto il grado di non unicità nel problema (3.1) per  $f$  è dato dal numero  $M$  di zeri non reali di  $\hat{f}$ , cioè l'ambiguità è al più  $2^M$ , se  $f$  non è a supporto compatto ***c'è sempre una infinità non numerabile di partner*** per il problema del phase retrieval.

**Dimostrazione:** Se non c'è la restrizione di  $f$  a supporto compatto, che per il teorema (1.19) è equivalente a dire  $\hat{f}$  intera, possiamo moltiplicare la  $\hat{f}$  per un fattore del tipo:

$$\hat{f}(\zeta) \rightarrow \hat{g}(\zeta) = \frac{\zeta - z^*}{\zeta - z} \hat{f}(\zeta) \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

Il modulo sull'asse reale è rimasto lo stesso, e si è introdotto un polo in  $\zeta = z$  per cui  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{g})$  non può essere a supporto compatto. Chiaramente  $z$  è un numero complesso arbitrario, quindi l'ambiguità non può essere numerabile.

□

**Osservazione:** In particolare se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ha supporto compatto e  $g \in L^2(\mathbb{R})$  è partner di  $f$ , in generale non è detto che anche  $g$  abbia supporto compatto. Inoltre  $f$  ha sempre partner non banali a supporto non compatto, infatti basta moltiplicare la trasformata di Fourier  $\hat{f}$  per un fattore del tipo (3.8) e “antitrasformare”.

### 3.3.1 Supporto su una semiretta

Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $f(x) = 0$  per  $x < 0$ . Chiaramente  $\hat{f}$  non sarà più intera, ma rimarrà comunque analitica nel semipiano superiore  $U$ . Supponiamo anche che  $\hat{f}$  non abbia zeri in  $U$ . Ciò significa che tali zeri, se presenti e di ordine finito, vengono “rimossi” moltiplicando la  $\hat{f}$  per fattori del tipo (3.8) (cioè si cambia rappresentante rimanendo nella stessa classe di ambiguità).

Vogliamo vedere sotto quali condizioni possiamo usare la formula (3.7) per ricostruire la fase. Il teorema della sezione precedente può fallire solo se  $\hat{f}$  ha uno zero di ordine infinito (per cui la trasformata di Hilbert di  $\log|\hat{f}|$  non è ben definita) oppure se ci sono singolarità essenziali sull’asse reale. A parte questi casi, se  $\hat{f}$  non ha zeri in  $U$  la dimostrazione è ancora valida. Abbiamo quindi provato il:

**Teorema: (Ricostruzione fase per supporto su semiretta)** Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $f(x) = 0$  per  $x < 0$ , e valgano:

1.  $\hat{f}(\zeta) \neq 0$  per  $\text{Im}(\zeta) > 0$
2.  $\hat{f}(\zeta) = \frac{C}{\zeta^n} (1 + o(1)) e^{iL\zeta}$  per  $\zeta \rightarrow \infty$  in  $U$ , per opportuni  $C \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $L \in \mathbb{R}$
3.  $\hat{f} \in C(\overline{U})$ , in particolare non ha singolarità essenziali in  $\overline{U}$
4. Gli zeri di  $\hat{f}$  sono isolati e di ordine finito.

Allora  $\hat{f}$  è univocamente determinata da  $|\hat{f}|$ , e vale la formula (3.7).

**Osservazione: (Informazioni extra)** In questo modo si ricostruisce la soluzione non avente zeri in  $U$ . Se oltre a  $|\hat{f}|$  abbiamo in qualche modo informazioni sulla posizione degli zeri  $\{z_j\}$  di  $\hat{f}$  nel piano complesso, allora per avere la “vera” soluzione basterà moltiplicare la  $\hat{f}(\zeta)$  ottenuta dalla (3.7) per  $\prod_j \frac{\zeta - z_j}{\zeta - \bar{z}_j}$  e antitrasformare.



# Capitolo 4

## Radar Ambiguity

Questo problema proviene dalla teoria dei radar. Dato un “segnale”  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , in approssimazione di “banda stretta” (“narrow band”, vedi sezione 4.1 di seguito), un radar misura il modulo della **funzione di ambiguità**:

$$A(u)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t + \frac{x}{2}\right) u^*\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{iyt} dt. \quad (4.1)$$

In generale per  $u, w \in L^2(\mathbb{R})$  possiamo definire:

$$A(u, w)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t + \frac{x}{2}\right) w^*\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{iyt} dt.$$

L’ambiguità da studiare è quindi:

**Problema:** (*Narrow band Radar Ambiguity problem*) Data  $u \in L^2(\mathbb{R})$ , quali sono le  $v \in L^2(\mathbb{R})$  aventi stesso modulo della funzione di ambiguità? Cioè:

$$u \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow v \in L^2(\mathbb{R}) \text{ t.c. } |A(u)(x, y)| = |A(v)(x, y)| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} ? \quad (4.2)$$

**Definizione:**  $f_1$  e  $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  sono **partner banali** rispetto al problema (4.2) se:

1.  $f_1(x) = cf_2(x)$  con  $|c| = 1$
2.  $f_1(x) = e^{ikx}f_2(x)$  con  $k \in \mathbb{R}$
3.  $f_1(x) = f_2(x - a)$  con  $a \in \mathbb{R}$
4.  $f_1(x) = f_2(-x)$

o composizione di queste.

## 4.1 Origine del problema

Per completezza andiamo a vedere<sup>1</sup> concretamente da dove sorge il problema (4.2). Supponiamo di avere il nostro radar nell'origine delle coordinate, e sia  $X$  l'oggetto "bersaglio" avente, al tempo  $t$ , **posizione**  $r(t)$  e **velocità**  $v(t)$ . Ciò che si fa è inviare un'onda elettromagnetica o **impulso**  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  con supporto in  $[-T, T]$ , e vogliamo ricavare  $r(0)$  e  $v(0)$  dall'analisi dell'**eco**  $e(t)$ .

Supponiamo l'impulso  $s(t)$  reale cosicché  $\hat{s}^*(k) = \hat{s}(-k)$ , ossia  $s(t)$  è completamente determinato dalla parte positiva del suo spettro (chè è la parte fisicamente osservabile). Definiamo allora l'operatore  $\psi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  come:

$$\psi : s(t) \mapsto \psi s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{s}(k) e^{-ikx} dk.$$

Poiché  $s$  ha supporto compatto, il teorema di Paley - Wiener (1.19) garantisce che  $\psi s(z)$  con  $z \in \mathbb{C}$  sia una funzione intera di  $z$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\psi s(x)) &= \frac{\psi s(x) + (\psi s(x))^*}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^\infty \hat{s}(k) e^{-ikx} dk + \int_0^\infty \hat{s}(-k) e^{ikx} dk \right] = \frac{s(x)}{2} \end{aligned}$$

quindi possiamo scrivere:

$$\psi s(x) = \frac{s(x) + i\sigma(x)}{2}$$

e usando le relazioni di Kramers - Kronig (3.6):

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s(t)}{x-t} dt \quad x \in \mathbb{R}$$

ove l'integrale è inteso in parte principale. In definitiva  $\psi s(x)$  è completamente determinabile a partire dalla parte positiva dello spettro di  $s(t)$ .

Supponiamo inoltre di aver scelto il segnale  $s(t)$  in modo che:

1.  $\int_{\mathbb{R}} x |\psi s(x)|^2 dx < \infty$
2.  $\int_{\mathbb{R}} k |\mathcal{F}\psi s(k)|^2 dk < \infty$ .

Possiamo allora definire l'**epoca**  $t_0$  e la **frequenza portante**  $f_0$  come:

$$t_0 = \frac{\int_{\mathbb{R}} x |\psi s(x)|^2 dx}{\|\psi s\|_2^2} \quad f_0 = \frac{\int_{\mathbb{R}} k |\mathcal{F}\psi s(k)|^2 dk}{\|\psi s\|_2^2}$$

<sup>1</sup>Seguiamo prevalentemente [10].

Si definisce quindi:

**Definizione:** La **forma d'onda**  $u_s(t)$  dell'impulso  $s(t)$  è data da:

$$u_s(t) = e^{-if_0(t+t_0)}\psi_s(t+t_0).$$

Chiaramente  $u_s \in L^2(\mathbb{R})$  in quanto  $\|u_s\|_2 = \|\psi_s\|_2$ , inoltre la forma d'onda ha per costruzione lo spettro centrato intorno alla frequenza nulla.

Facciamo ora le seguenti ipotesi fisiche semplificative:

1. C'è un solo bersaglio.
2. La sezione d'urto radar del bersaglio non dipende dalla frequenza.
3. La distanza del bersaglio dal radar è molto maggiore della lunghezza d'onda tipica  $c/f_0$ , dove  $c$  è la velocità della luce.
4. Le riflessioni multiple sono trascurabili.
5. La funzione  $r(t)$  è approssimativamente lineare per  $-T < t < T$ .
6. La velocità del bersaglio  $v(t)$  è molto minore di  $c$ .
7. (**Banda stretta**) La regione di frequenze in cui  $\mathcal{F}s$  è sostanzialmente diversa da zero è piccola rispetto allo spostamento Doppler dovuto al movimento del bersaglio. In questa approssimazione l'effetto Doppler corrisponde semplicemente ad una traslazione dello spettro.

Se queste assunzioni sono fisicamente valide, allora si può vedere che l'eco è dato da  $e(t) = \frac{1}{2}\text{Re}\{\psi e(t)\}$ , con:

$$\psi e(t) = e^{-if_0x_0}u_s(t-t_0-x_0)e^{i(f_0-y_0)t}$$

dove:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{2}{c}r(0) \quad \text{è il } \mathbf{ritardo\ temporale} \text{ dell'eco,} \\ y_0 &= \frac{2f_0}{c}v(0) \quad \text{è lo } \mathbf{spostamento\ Doppler} \text{ dell'eco.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

In particolare la determinazione di  $x_0$  e  $y_0$  equivale alla misura di  $r(0)$  e  $v(0)$ .

Per stimare  $x_0$  e  $y_0$  si usa il seguente metodo. Si definisce:

$$\psi_{xy}(t) = e^{-if_0x}u_s(t-t_0-x)e^{i(f_0-y)t}$$

e si considera:

$$\begin{aligned}
I(x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_{\mathbb{R}} \psi e(t) \psi_{xy}^*(t) dt \right|^2 \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{if_0(x-x_0)} e^{it(y-y_0)} u_s(t-t_0-x_0) u_s^*(t-t_0-x) dt \right|^2 \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{it(y-y_0)} u_s\left(t - \frac{x_0-x}{2}\right) u_s^*\left(t + \frac{x_0-x}{2}\right) dt \right|^2 \\
&= |A(u_s)(x_0-x, y_0-y)|^2.
\end{aligned}$$

Ora, poiché:

$$I(x, y) \leq I(x_0, y_0) = \|u_s\|_2^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

se ad esempio rappresentiamo  $I(x, y)$  su uno schermo, il punto più luminoso corrisponderà a  $(x_0, y_0)$ , e da questi tramite le (4.3) ricaviamo la posizione  $r(0)$  e la velocità  $v(0)$  dell'oggetto bersaglio.

Il problema della Radar Ambiguity (4.2) sorge quindi nella teoria dei segnali non tanto per poter permettere il funzionamento del radar, quanto per una questione di principio. Inoltre la cosa può essere di un certo interesse nel momento in cui si cerca il segnale “migliore” nel senso della massimizzazione della precisione di misura.

## 4.2 Esempi di ambiguità

Vediamo innanzitutto una semplice procedura per costruire esempi di ambiguità, seguendo principalmente [10].

**Teorema:** (*Partner non banali rispetto al problema (4.2)*) Sia  $\{A_j\}_{j \geq 1}$  un insieme di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  con misura positiva tali che:

1. la famiglia  $\{A_i - A_j\}_{i \neq j}$  è disgiunta,
2. se  $i \neq j$  allora  $A_i - A_j$  è disgiunto da  $A_k - A_k$  per ogni  $k$ .

Sia  $(u_i)_{i \geq 1}$  un insieme di funzioni tali che  $u_i$  ha supporto incluso in  $A_i$ , e tali che  $\sum_{i \geq 1} u_i \in L^2(\mathbb{R})$ . Siano inoltre  $(c_i)_{i \geq 1}$  numeri complessi di modulo 1. Allora:

$$\sum_{i \geq 1} u_i \quad \text{e} \quad \sum_{i \geq 1} c_i u_i$$

sono in generale partner non banali rispetto a (4.2). Stessa cosa vale se per le  $(u_i)_{i \geq 1}$  si ha che  $\mathcal{F}u_i$  ha supporto in  $A_i$ .

**Dimostrazione:** Basta provarlo per due funzioni, dall'argomento sarà chiaro che il risultato si estende ad un numero arbitrario di esse. Siano  $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{R})$  con supporto rispettivamente  $A_1, A_2$ , e  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  di modulo unitario. In generale la (4.1) si può vedere come una forma quadratica, e vale chiaramente:

$$A(c_1 u_1 + c_2 u_2) = |c_1|^2 A(u_1) + |c_2|^2 A(u_2) + c_1 c_2^* A(u_1, u_2) + c_2 c_1^* A(u_2, u_1).$$

Se  $A_1, A_2$  sono tali che  $A(u_1) + A(u_2), A(u_1, u_2), A(u_2, u_1)$  hanno a due a due supporto disgiunto, allora abbiamo:

$$|A(c_1 u_1 + c_2 u_2)| = |A(u_1) + A(u_2)| + |A(u_1, u_2)| + |A(u_2, u_1)| = |A(u_1 + u_2)|.$$

Per avere ciò, basta osservare che il supporto di:

$$t \mapsto u_1 \left( t + \frac{x}{2} \right) u_2^* \left( t - \frac{x}{2} \right)$$

è incluso in  $(A_1 + \frac{x}{2}) \cap (A_2 - \frac{x}{2})$ , e in particolare tale mappa è identicamente nulla se  $x \notin (A_1 - A_2)$ . Questo significa che il supporto di  $A(u_1, u_2)(x, y)$  è incluso in  $(A_1 - A_2) \times \mathbb{R}$ , e da ciò segue la tesi.

L'ultima affermazione segue osservando che  $A(\mathcal{F}u)(x, y) = A(u)(-y, x)$  e ripetendo la dimostrazione con  $x \rightarrow -y$ .

□

**Osservazione:** La procedura è molto generale, ed include alcuni tra gli esempi di ambiguità più famosi. Costruiamo per esempio quello proposto da de Buda in [5]. Si prendano  $A_1 = [-4n, -2n]$  e  $A_2 = [2n, 4n]$ . Chiaramente soddisfano le ipotesi del teorema, in quanto  $A_2 - A_1 = [4n, 8n]$ ,  $A_1 - A_2 = [-8n, -4n]$ ,  $A_1 - A_1 = A_2 - A_2 = [-2n, 2n]$ . Prendiamo  $\mathcal{F}u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \chi_{A_1}$ ,  $\mathcal{F}u_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \chi_{A_2}$ . Poiché si ha:

$$u_1(x) = \frac{\sin(nx)}{2x} e^{3inx} \quad , \quad u_2(x) = \frac{\sin(nx)}{2x} e^{-3inx} ,$$

possiamo scrivere  $f = (u_1 + u_2)$ ,  $g = (-iu_1 + iu_2)$ , e si hanno i partner non banali:

$$f(x) = \frac{\sin(2nx)}{x} \cos(3nx) \quad , \quad g(x) = \frac{\sin(2nx)}{x} \sin(3nx).$$

### 4.3 Caso a supporto compatto

Il seguente lemma mostra che c'è una differenza molto importante rispetto al problema del Phase Retrieval (3.1):

**Lemma:** Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$  a supporto compatto, e sia  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tale che  $|A(f)(x, y)| = |A(g)(x, y)| \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Allora anche  $g$  ha supporto compatto. Inoltre se  $f$  ha supporto contenuto in un intervallo di lunghezza  $l$ , allora il supporto di  $g$  è anch'esso contenuto in un intervallo di lunghezza  $l$ .

**Dimostrazione:** A meno di traslazioni possiamo supporre  $f$  avente supporto in  $[-a, a]$  per un qualche  $a \in \mathbb{R}$ . Dunque:

$$f\left(t + \frac{x}{2}\right) f^*\left(t - \frac{x}{2}\right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{per } |x| > 2a.$$

Pertanto  $A(f)(x, y)$  come funzione di  $y$  è identicamente nulla se  $|x| > 2a$ , e ciò vale per ipotesi anche per  $A(g)(x, y)$ . Ma allora per il teorema (1.13) sulla bigettività della trasformata di Fourier si ha che, a meno di traslazioni nella definizione di  $g$ ,  $g\left(t + \frac{x}{2}\right) g^*\left(t - \frac{x}{2}\right)$  per  $|x| > 2a$  è identicamente nulla come funzione di  $t$ . E ciò significa che il supporto di  $g$  è contenuto in un intervallo di lunghezza  $2a$ .

□

Nel caso del problema del Phase Retrieval (3.1) invece, come spiegato nella sezione 3.3, si ha che una funzione a supporto compatto ammette sempre una quantità non numerabile di partner a supporto non compatto.

#### 4.3.1 Uso di tecniche provenienti dal Phase Retrieval

Vediamo cosa possiamo dire sul problema in esame se ripetiamo il procedimento che nel capitolo 3 è stato usato per lo studio del problema del Phase Retrieval. Possiamo osservare che il teorema di Paley - Wiener (1.19) ci assicura che, per  $u \in L^2(\mathbb{R})$  a supporto compatto, la  $A(u)(x, y)$  si estende ad una funzione intera di tipo esponenziale nella variabile  $y$ . Inoltre se  $u, v \in L^2(\mathbb{R})$  sono partner rispetto alla Radar Ambiguity (4.2), poiché  $A(u)(x, y)A^*(u)(x, y) = A(v)(x, y)A^*(v)(x, y)$ , possiamo definire le funzioni di autocorrelazione (3.3) per le  $A$  come funzioni di  $y$ , e ragionando analogamente a quanto visto possiamo scrivere, per continuazione analitica:

$$A(u)(x, z)A^*(u)(x, z^*) = A(v)(x, z)A^*(v)(x, z^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Ciò significa che, per  $x$  fissato, se  $z$  è uno zero di  $A(u)(x, \cdot)$  allora  $z$  oppure  $z^*$  è uno zero di  $A(v)(x, \cdot)$ .

D'altra parte grazie al teorema di fattorizzazione di Hadamard (1.35) sappiamo che una funzione intera di tipo esponenziale  $f(z)$  è determinata dai suoi zeri a meno di un fattore  $e^{\alpha_0 + \alpha_1 z}$ , con  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ . Inoltre, come nel caso del Phase Retrieval, sapendo che  $|A(u)(x, y)| = |A(v)(x, y)|$  rimarrà solo l'ambiguità banale su  $\text{Im}(\alpha_0), \text{Im}(\alpha_1)$ . Possiamo dunque separare il problema in due problemi di ambiguità distinti:

1. Ambiguità sulla *parte immaginaria degli zeri di*  $A(u)(x, \cdot)$ . Questo problema è in linea di principio già risolto, cioè l'ambiguità è al più  $2^M$  con  $M =$  numero di zeri della  $A(u)(x, \cdot)$ , e le diverse possibilità sono collegate da riflessione di uno o più zeri rispetto all'asse reale. Si sottintende che la funzione di ambiguità (4.1) sia scritta nella forma "fattorizzata" (1.35).
2. Ambiguità residua sulla  $v$  sapendo che  $A(u)(x, \cdot)$  e  $A(v)(x, \cdot)$  hanno gli stessi zeri nel piano complesso. Questo problema, chiamato anche "*Restricted Radar Ambiguity*", è studiato in [10], dove si prova il teorema (4.4) che segue.

**Osservazione:** Si noti che esistono partner rispetto al problema (4.2) che non sono partner rispetto al problema radar ristretto. L'esempio più semplice è dato da partner che sono addirittura "banali" rispetto al problema generale:

$$v(x) = u(-x)$$

in quanto in tal caso  $A(v)(x, y) = A^*(x, y^*)$  e quindi gli zeri della funzione di ambiguità come funzione della variabile complessa  $y$  risultano coniugati.

Nello studio del problema ristretto dobbiamo quindi modificare la definizione di partner banali:

**Definizione:**  $f_1$  e  $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  sono *partner banali rispetto alla "Restricted Radar Ambiguity"* se:

1.  $f_1(x) = cf_2(x)$  con  $|c| = 1$
2.  $f_1(x) = e^{ikx}f_2(x)$  con  $k \in \mathbb{R}$
3.  $f_1(x) = f_2(x - a)$  con  $a \in \mathbb{R}$

o composizione di queste.

Premettiamo alcune nozioni di teoria della misura:

**Definizione:** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione misurabile. Un punto  $x \in \mathbb{R}$  si dice *punto di Lebesgue di  $f$*  se:

$$\frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy \xrightarrow{B \rightarrow \{x\}} f(x)$$

dove si intende che il limite è operato sul raggio della palla  $B$  contenente  $x$ . Inoltre un punto  $x \in A \subset \mathbb{R}$  si dice *punto di densità di  $A$*  se:

$$\frac{|A \cap I|}{|I|} \xrightarrow{I \rightarrow \{x\}} 1$$

dove il limite è operato sulla misura dell'intervallo  $I$  contenente  $x$ . In altre parole un punto di densità di  $A$  è un punto di Lebesgue della funzione caratteristica di  $A$ ,  $\chi_A$ .

**Osservazione:** Richiamiamo senza dimostrazione il fatto che se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora quasi ogni punto di  $\mathbb{R}$  è un punto di Lebesgue di  $f$ . In particolare quasi ogni punto di un insieme misurabile  $A \subset \mathbb{R}$  è un punto di densità di  $A$ .

**Teorema: (*Restricted Radar Ambiguity*)** Sia  $u \in L^2(\mathbb{R})$  a supporto compatto e  $v \in L^2(\mathbb{R})$  un partner rispetto al problema ristretto in cui  $A(u)(x, \cdot)$  e  $A(v)(x, \cdot)$  hanno gli stessi zeri nel piano complesso per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Sia  $\Omega = \{x | A(u)(x, \cdot) \text{ non è identicamente nulla}\}$ . Allora esistono  $a, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{C}$  con  $|c| = 1$ ,  $x_0$  appartenente al supporto di  $u$ , ed una funzione localmente costante  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con:

$$\varphi(t_2 - t_1) + \varphi(t_1 - t_0) \equiv \varphi(t_2 - t_0) \quad \text{modulo } 2\pi$$

tali che:

$$v(x) = c e^{i\varphi(x-a-x_0)} e^{i\omega x} u(x-a) \quad (4.4)$$

Inoltre ogni funzione di questa forma è partner di  $u$  rispetto al problema ristretto.

**Dimostrazione:** Seguiamo [10].

- Per il teorema di fattorizzazione di Hadamard (1.35) sappiamo che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  esistono due numeri complessi  $\lambda_x, \mu_x$  tali che, per ogni  $y \in \mathbb{C}$ , si abbia  $A(v)(x, y) = \lambda_x e^{\mu_x y} A(u)(x, y)$ . Inoltre poiché  $|A(v)(x, y)| = |A(u)(x, y)|$  deve essere  $|\lambda_x| = 1$  e  $\mu_x$  immaginario puro. Possiamo quindi scrivere:

$$A(v)(x, y) = e^{i\phi(x) + i\psi(x)y} A(u)(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

dove  $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



- Consideriamo prima  $\psi(x)$ . La (4.5) implica che per ogni  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}|v|^2(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A(v)(0, y) \\
&= e^{i\phi(0)+i\psi(0)y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A(u)(x, y) \\
&= e^{i\phi(0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dt |u(t - \psi(0))|^2 e^{iyt} \\
&= e^{i\phi(0)} \mathcal{F}|T_{\psi(0)}u|^2(y)
\end{aligned}$$

dove  $T_{\psi(0)}u = u(t - \psi(0))$ . Ciò significa che:

$$\begin{cases} |v(t)| = |u(t - \psi(0))| \\ \phi(0) = 0 \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Ma allora  $v(t)$  e  $u(t)$  hanno lo stesso supporto a meno di una traslazione di  $\psi(0)$ , e lo stesso vale quindi per le due funzioni:

$$t \mapsto v\left(t + \frac{x}{2}\right)v^*\left(t - \frac{x}{2}\right) \quad , \quad t \mapsto u\left(t + \frac{x}{2}\right)u^*\left(t - \frac{x}{2}\right). \quad (4.6)$$

D'altra parte per il teorema di Paley e Wiener (1.19) due funzioni aventi stesso supporto devono avere trasformate di Fourier dello stesso tipo esponenziale. Ma le trasformate di Fourier delle (4.6) sono proprio  $A(v)(x, \cdot)$  e  $A(u)(x, \cdot)$ , e per la (4.5) il loro tipo esponenziale differisce esattamente per  $|\psi(x)|$ .

Ciò implica che  $\psi(x) = \psi(0)$  per ogni  $x$ . Inoltre tale  $\psi(0)$  corrisponde ad una traslazione e quindi ad una ambiguità "banale" in base alle nostre definizioni.

- *Notazione.* Consideriamo adesso la funzione  $\phi(x)$ . Possiamo assumere  $\phi(x)$  continua in quanto la funzione di ambiguità è continua, e inoltre  $\phi(0) = 0$ . Poniamo:

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R} : t \mapsto u\left(t + \frac{x}{2}\right)u^*\left(t - \frac{x}{2}\right) \text{ non è } = 0 \text{ q.o.} \right\}$$

Poiché  $A(u)(-x, -y) = A^*(u)(x, y)$  deve essere  $\Omega = -\Omega$ , inoltre essendo un insieme aperto sarà un'unione numerabile di intervalli disgiunti; in definitiva possiamo scrivere:

$$\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} I_k \quad \text{con } 0 \in I_0 \text{ e } I_k = -I_{-k}.$$

Sia poi  $S = \{t \in \mathbb{R} : u(t) \neq 0\}$  il supporto di  $u$ , e definiamo:

$$E_x = \left(S - \frac{x}{2}\right) \cap \left(S + \frac{x}{2}\right)$$

il supporto di  $t \mapsto u(t + \frac{x}{2})u^*(t - \frac{x}{2})$ . Per definizione  $|E_x| > 0$  se e solo se  $x \in \Omega$ .

Assumiamo che ogni punto di  $S$  supporto di  $u$  sia un punto di Lebesgue di  $u$ , e quindi anche un punto di densità del supporto di  $u$  (nel caso generale le affermazioni che seguono sono da intendersi vere quasi ovunque). Ma allora ogni punto di  $E_x$  è punto di densità di  $E_x$ , in particolare  $E_x = \emptyset$  se  $|E_x| = 0$ .

- $\Omega = S - S$ .

[ $\supset$ ]: Infatti se  $x \notin \Omega$  allora  $|E_x| = 0$  e quindi  $E_x = \emptyset$ . Ciò significa  $(S - \frac{x}{2}) \cap (S + \frac{x}{2}) = \emptyset$  e quindi  $x \notin S - S$ .

[ $\subset$ ]: Sia  $x \in \Omega$ ; allora  $|E_x| > 0$  e quindi  $|(S - x) \cap S| > 0$ , il che implica che esistono  $\xi, \eta \in S$  tali che  $\eta - x = \xi$ . Ma allora  $x = \eta - \xi \in (S - S)$ .

- Se  $t_0, t_1, t_2 \in S$  allora:

$$\phi(t_2 - t_1) + \phi(t_1 - t_2) \equiv \phi(t_2 - t_0) \pmod{2\pi}. \quad (4.7)$$

Infatti per l'invertibilità della trasformata di Fourier abbiamo:

$$u(t + \frac{x}{2})u^*(t - \frac{x}{2}) = e^{i\phi(x)}v(t + \frac{x}{2})v^*(t - \frac{x}{2}).$$

Siano  $x, y \in S$ ; possiamo scrivere:

$$\frac{1}{(2\eta)^2} \int_{|t - \frac{x+y}{2}| < \eta} dt \int_{|s - (x-y)| < \eta} ds u(t + \frac{s}{2})u^*(t - \frac{s}{2}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u(x)u^*(y).$$

Se assumiamo che  $x$  e  $y$  siano punti di Lebesgue anche di  $v$ , allora usando la continuità di  $\phi$  si ha:

$$\frac{1}{(2\eta)^2} \int_{|t - \frac{x+y}{2}| < \eta} dt \int_{|s - (x-y)| < \eta} ds e^{i\phi(s)} v(t + \frac{s}{2})v^*(t - \frac{s}{2}) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} e^{i\phi(x-y)} v(x)v^*(y),$$

e quindi:

$$u(x)u^*(y) = e^{i\phi(x-y)} v(x)v^*(y).$$

Applicando la relazione trovata a  $t_2, t_1$  ed a  $t_1, t_0$  e moltiplicando si ha:

$$\begin{aligned} u(t_2)u^*(t_0) |u(t_1)|^2 &= e^{i\phi(t_2-t_1)+i\phi(t_1-t_0)} v(t_2)v^*(t_0) |v(t_1)|^2 \\ &= e^{i\phi(t_2-t_1)+i\phi(t_1-t_0)} e^{-i\phi(t_2-t_0)} u(t_2)u^*(t_0) |v(t_1)|^2 \end{aligned}$$

e la tesi segue dal fatto che  $|u| = |v|$  quasi ovunque, e inoltre dal fatto che  $\phi$  è continua in  $\omega = S - S$ .

- Esiste  $\omega \in \mathbb{R}$  ed una successione  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  tali che:

$$\phi(x) = \omega x + b_k \quad \forall x \in I_k,$$

e inoltre se esistono  $t_0, t_1, t_2 \in S$  tali che  $t_2 - t_1 \in I_k$ ,  $t_1 - t_0 \in I_{k'}$ ,  $t_2 - t_0 \in I_{k''}$ , allora:

$$b_k + b_{k'} = b_{k''} \quad \text{mod } 2\pi. \quad (4.8)$$

Infatti se per  $t_0, t_1, t_2 \in S$  abbiamo  $x, y, x + y \in I_0$ , con  $x = t_2 - t_1$  e  $y = t_1 - t_0$ , allora per il punto precedente si ha:

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad \forall x, y, x + y \in I_0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \omega x \quad \text{per } x \in I_0.$$

per qualche  $\omega \in \mathbb{R}$ , cioè  $\phi$  è lineare su  $I_0$ .

Se invece  $x = t_2 - t_1 \in I_k$ ,  $y = t_1 - t_0 \in I_0$ , e  $x + y = t_2 - t_0 \in I_k$ , allora si ha  $\phi(x + y) = \phi(x) + \omega y$ . Pertanto per ogni  $x \in I_k$  esiste  $b_k$  tale che  $\phi(x) = \omega x + b_k$ . La (4.8) segue infine direttamente dalla (4.7).

- Abbiamo quindi provato che esiste  $t_0 \in S$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , e una successione  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  che soddisfa (4.8) tali che, se  $x \in I_k + t_0$ , allora a meno di traslazioni nella definizione di  $u$ :

$$v(x) = ce^{i\omega x} e^{ib_k} u(x) \quad \text{con } |c| = 1 \quad (4.9)$$

il che equivale alla (4.4).

Inversamente se vale la (4.9) con i  $\{b_k\}$  che soddisfano (4.8), allora fissiamo  $t_0 \in S$  e definiamo  $\phi(x) = \omega x + b_k$  per  $x \in I_k + t_0$ . Definiamo poi  $v(x) = ce^{i\phi(x)} u(x)$  con  $|c| = 1$ .

Sia  $x \in I_k + t_0$ ; per  $t \in \mathbb{R}$  vale  $x = (t + \frac{x}{2}) - (t - \frac{x}{2})$ . Ora, se  $(t + \frac{x}{2})$  e  $(t - \frac{x}{2})$  non sono entrambi in  $S$  allora:

$$v(t - \frac{x}{2})v^*(t + \frac{x}{2}) = u(t - \frac{x}{2})u^*(t + \frac{x}{2}) = 0.$$

Se invece  $(t + \frac{x}{2}) \in (I_{k'} + t_0) \cap S$  e  $(t - \frac{x}{2}) \in (I_{k''} + t_0) \cap S$  allora:

$$v(t - \frac{x}{2})v^*(t + \frac{x}{2}) = e^{i\omega x} e^{ib_k} u(t - \frac{x}{2})u^*(t + \frac{x}{2})$$

quindi possiamo dire che per ogni  $y \in \mathbb{R}$  vale:

$$A(v)(x, y) = e^{i\omega x} e^{ib_k} A(u)(x, y) \quad \text{per } x \in I_k + t_0$$

da cui segue che  $u$  e  $v$  sono partner rispetto al problema radar ristretto. □

Il teorema in sostanza dice che se il supporto di  $u$  è “semplice” (in particolare se è un intervallo) allora anche i partner rispetto al problema radar ristretto sono banali, mentre se il supporto di  $u$  ha molte componenti connesse allora ci sono partner non banali.

**Osservazione:** Tutto ciò in linea di principio descrive l’ambiguità nel problema (4.2) nel caso a supporto compatto. Tuttavia se siamo interessati nella costruzione esplicita (o numerica) dei partner non banali, rimane il problema della costruzione della continuazione analitica. Inoltre non è nota una caratterizzazione delle funzioni  $u \in L^2(\mathbb{R})$  tali che la continuazione analitica di  $A(u)(x, \cdot)$  abbia solo zeri reali o simmetrici rispetto all’asse reale (per cui ci troveremmo automaticamente nel caso ristretto). In definitiva la costruzione dei partner non banali rispetto al problema della ambiguità radar rimane nel caso generale un problema di difficile soluzione.

## 4.4 Un caso “discreto”

Abbiamo dunque visto che il problema della “Radar Ambiguity” (4.2) ammette in generale una ambiguità non banale. Tuttavia possiamo domandarci se è possibile avere unicità restringendo fortemente l’insieme di funzioni che consideriamo. In particolare è di un certo interesse la restrizione del problema al caso “discreto” delle sole funzioni di Hermite, cioè alle sole funzioni della forma:

$$u(x) = P(x) e^{-x^2/2}$$

dove  $P(x)$  è un polinomio.

Seguendo [3] e [4] e sfruttando un principio di indeterminazione, vedremo che un partner di una funzione di Hermite sarà sempre una funzione di Hermite, cioè che queste costituiscono una classe “stabile” rispetto all’ambiguità del problema (4.2). Vedremo inoltre che in questo caso discreto i partner sono “quasi sempre” banali, dove il “quasi” sta per quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue se identifichiamo i polinomi di grado fissato  $n$  con  $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ .

### 4.4.1 Indeterminazione per la funzione di ambiguità

Vogliamo applicare la relazione di indeterminazione (1.40) al caso della funzione di ambiguità. Premettiamo alcuni lemmi:

**Lemma:** Siano  $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ . Allora  $A(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  e:

$$\| A(u, v) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2\pi \| u \|_{L^2(\mathbb{R})} \| v \|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (4.10)$$

**Dimostrazione:** Poniamo:

$$h_x(t) = u\left(t + \frac{x}{2}\right)v^*\left(t - \frac{x}{2}\right).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dt |h_x(t)|^2 &= \int_{\mathbb{R}} d\xi |u(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}} d\eta |v(\eta)|^2 \\ &= \| u \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \| v \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

avendo operato il cambiamento di variabile:

$$\xi = t + \frac{x}{2}, \quad \eta = t - \frac{x}{2}.$$

Ma  $A(u, v)(x, y) = \sqrt{2\pi} \hat{h}_x(y)$ , quindi grazie all'identità di Parseval (1.12), che rimane vera anche nel caso di funzioni di più variabili, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy |A(u, v)(x, y)|^2 &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy |h_x(t)|^2 \\ &= 2\pi \| u \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \| v \|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

□

**Lemma:** Siano  $u, v, w \in L^2(\mathbb{R})$ . Allora per ogni  $k_x, k_y \in \mathbb{R}$  vale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy A(u, v)(x, y) A^*(v, w)(x, y) e^{i(xk_x + yk_y)} \\ = A(u, v)(-k_y, k_x) A^*(v, w)(-k_y, k_x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

**Dimostrazione:** Infatti:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^4} dx dy ds dt e^{i(k_x x + k_y y)} u\left(t + \frac{x}{2}\right)v^*\left(t - \frac{x}{2}\right)v^*\left(s + \frac{x}{2}\right)w\left(s - \frac{x}{2}\right)e^{iy(t-s)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx ds e^{ik_x x} u\left(s - k_y + \frac{x}{2}\right)v^*\left(s - k_y - \frac{x}{2}\right)v^*\left(s + \frac{x}{2}\right)w\left(s - \frac{x}{2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} dx ds e^{ik_x x} u\left(s + x - k_y\right)v^*\left(s - k_y\right)v^*\left(s + x\right)w\left(s\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx e^{ik_x x} u\left(x - k_y\right)v^*(x) \int_{\mathbb{R}} ds e^{-ik_x s} v^*(s - k_y)w(s) \end{aligned}$$

ove nel secondo passaggio si è usata l’invertibilità della trasformata di Fourier nel senso:

$$\int_{\mathbb{R}} dy e^{iy(k_y+t-s)} = 2\pi\delta(k_y+t-s),$$

nel terzo si è operato il cambio di variabile  $s \rightarrow s + \frac{x}{2}$ , ed infine  $x \rightarrow x - s$ . Basta ora trasformare:

$$\begin{cases} x \rightarrow x + \frac{k_y}{2} \\ s \rightarrow s + \frac{k_y}{2} \end{cases}$$

e segue la tesi. Si noti che è essenziale che la funzione  $v$  sia la stessa in entrambi i termini.

□

**Lemma:** Siano  $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ . Allora:

$$A^*(u, v)(x, y) = A(v, u)(-x, -y) \quad (4.12)$$

**Dimostrazione:** Infatti:

$$\begin{aligned} A^*(u, v)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} dt u^*\left(t + \frac{x}{2}\right)v\left(t - \frac{x}{2}\right)e^{-ity} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt v\left(t + \frac{(-x)}{2}\right)u^*\left(t - \frac{(-x)}{2}\right)e^{it(-y)} \\ &= A(v, u)(-x, -y). \end{aligned}$$

□

**Lemma:** Sia  $u \in L^2(\mathbb{R})$  non identicamente nulla. Allora:

$$u(x) = P(x)e^{iax - \frac{(x-b)^2}{2}}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $P(x)$  un polinomio, se e solo se:

$$A(u)(x, y) = R(x, y)e^{i(ax+by)}e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \quad (4.13)$$

dove  $R(x, y)$  è un polinomio in  $x$  e  $y$  di grado complessivo pari a  $2\deg P$ .

**Dimostrazione:**  $[\Rightarrow]$  : Per la funzione di Hermite  $u(t)$  si ha:

$$\begin{aligned} A(u)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} P\left(t + \frac{x}{2}\right)P^*\left(t - \frac{x}{2}\right)e^{iax}e^{-(t+\frac{x}{2}-b)^2/2}e^{-(t-\frac{x}{2}-b)^2/2}e^{iyt} dt \\ &= e^{i(ax+by+\frac{xy}{2})} \int_{\mathbb{R}} P(t+x+b)P^*(t+b)e^{-(t+x)^2/2}e^{-t^2/2}e^{iyt} dt \end{aligned}$$

quindi, a parte l'esponenziale a moltiplicare, la funzione di ambiguità è data da una somma di termini del tipo:

$$\begin{aligned}
&\propto \mathcal{F}[t^n x^m e^{-t^2/2} e^{-(t+x)^2/2}](y) \\
&= x^m e^{-x^2/2} (-i)^n \left(\frac{d}{dy}\right)^n \mathcal{F}[e^{-t^2-tx}](y) \\
&= x^m e^{-x^2/4} (-i)^n \left(\frac{d}{dy}\right)^n \mathcal{F}[e^{-(t+\frac{x}{2})^2}](y) \\
&= x^m e^{-x^2/4} (-i)^n \left(\frac{d}{dy}\right)^n [e^{-\frac{xy}{2}} e^{-y^2/4}] \\
&= e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} e^{-\frac{xy}{2}} x^m p(x, y)
\end{aligned}$$

ove  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n + m \leq 2 \deg P$ ,  $p(x, y)$  è un polinomio a coefficienti complessi di grado  $n + m$ , e si è usato il fatto che:

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha t^2}](y) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-y^2/4\alpha}.$$

In definitiva:

$$A(u)(x, y) = e^{i(ax+by)} R(x, y) e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$$

dove  $R(x, y)$  è un polinomio in  $x$  e  $y$  di grado totale  $2 \deg P$ .

[ $\Leftarrow$ ]: Per l'invertibilità della trasformata di Fourier sappiamo che, per ogni  $x, t \in \mathbb{R}$ , vale:

$$u\left(t + \frac{x}{2}\right) u^*\left(t - \frac{x}{2}\right) = P\left(t + \frac{x}{2}\right) P^*\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{iax} e^{-(t+\frac{x}{2}-b)^2/2} e^{-(t-\frac{x}{2}-b)^2/2}$$

e questo è sufficiente per concludere che la funzione  $u$  è della forma voluta (a meno di una fase nella definizione di  $P$ ).

□

Il teorema che vogliamo dimostrare è il:

**Teorema: (Indeterminazione per la funzione di ambiguità)** Sia  $u \in L^2(\mathbb{R})$  non identicamente nulla. Allora esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|A(u)(x, y)|^2}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{\frac{x^2+y^2}{2}} < \infty \quad (4.14)$$

se e solo se  $u$  è della forma:

$$P(x) e^{i\omega x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}$$

con  $a, \omega \in \mathbb{R}$ , e  $P(x)$  un polinomio<sup>2</sup>.

**Dimostrazione:**

[ $\Leftarrow$ ] : È ovvio, grazie al lemma (4.13).

[ $\Rightarrow$ ] : Data  $w \in L^2(\mathbb{R})$ , poniamo:

$$g_w(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} A(u, u)(x, y) A^*(u, w)(x, y).$$

- L'ipotesi del teorema equivale a:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|g_u(x, y)|}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{\frac{x^2+y^2}{2}} < \infty$$

Grazie al lemma (4.11) sappiamo però che per la “doppia” trasformata di Fourier di  $g_w$  vale:

$$\mathcal{F}g_w(k_x, k_y) = g_w(-k_y, k_x)$$

quindi la (4.14) a meno di un cambio di variabili implica anche:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \frac{|\hat{g}_u(x, y)|}{(1 + |x| + |y|)^N} e^{\frac{x^2+y^2}{2}} < \infty.$$

Ma allora possiamo usare il principio di indeterminazione di Cowling - Price (1.46) per concludere che:

$$A(u)(x, y) A^*(u)(x, y) = P(x, y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad (4.15)$$

dove  $P(x, y)$  è un polinomio in entrambe le variabili  $x$  e  $y$ . In realtà qui abbiamo una funzione di  $x$  e  $y$ , quindi servirebbe la versione bidimensionale del teorema (dimostrata per esempio in [3]). Tuttavia per i nostri scopi basta applicare il teorema separatamente nelle due variabili, vedendo  $g_u(x, y)$  prima come funzione solo di  $x$  e poi come funzione solo di  $y$ , e segue la (4.15).

- Per completare la dimostrazione basta provare che  $A(u)(x, y)$  si estende a una funzione intera di ordine 2 su  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Infatti, argomentando come nella dimostrazione del teorema (1.40), il teorema di fattorizzazione di Hadamard (1.34) implicherebbe che:

$$A(u)(x, y) = R(x, y) e^{Q(x, y)}$$

---

<sup>2</sup>In [3] si dimostra un risultato leggermente più generale, con  $A(u, v)$  anziché  $A(u)$ , ma per i nostri scopi questo è sufficiente.



dove  $R(x, y)$  e  $Q(x, y)$  sono polinomi in entrambe le variabili e  $Q$  è al più di grado 2. La (4.15) implica allora che:

$$Q(x, y) + Q^*(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2}$$

inoltre per il lemma (4.12) vale  $A^*(u)(x, y) = A(u)(-x, -y)$ , quindi deve essere:

$$Q(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{4} + i\alpha x + i\beta y$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (il termine costante del polinomio  $Q$  non è importante, in quanto riassorbibile nella definizione di  $R$ ).

Ma allora abbiamo finito grazie al lemma (4.13).

- Bisogna dunque dimostrare<sup>3</sup> che  $A(u)(x, y)$  si estende a una funzione intera di ordine 2 in  $\mathbb{C}^2$ . Possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\|u\|_2 = 1$

Cominciamo col provare che  $g_w(x, y)$  si estende a una funzione intera di ordine 2. Poiché, come appena visto, a meno di un cambio di variabile  $g_w$  coincide con la sua trasformata di Fourier, grazie a (1.46) è sufficiente mostrare che:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy |g_w(x, y)| e^{\frac{x^2+y^2}{8}} < \infty.$$

Ma questa disuguaglianza segue dal fatto che  $|g_w| \leq |A(u)| \|w\|$  e dall'ipotesi su  $A(u)$ . Abbiamo quindi la stima:

$$|g_w(z, \zeta)| \leq C \|w\|_2 e^{2(z^2+\zeta^2)} \quad (4.16)$$

per ogni  $z, \zeta \in \mathbb{C}$ , dove  $C$  è una costante che non dipende da  $w$ .

Per concludere è sufficiente mostrare che per ogni  $z, \zeta \in \mathbb{C}$  esiste una  $w_{z,\zeta} \in L^2(\mathbb{R})$  tale che:

$$|A(w_{z,\zeta}, u)(z, \zeta)| \geq C^{-1} e^{-C(z^2+\zeta^2)} \quad (4.17)$$

e inoltre:

$$\|w_{z,\zeta}\| \leq C^{-1} e^{C(z^2+\zeta^2)}. \quad (4.18)$$

Ora, per la densità delle funzioni di Hermite sappiamo che possiamo scegliere un polinomio  $P_0$  tale che:

$$\int_{\mathbb{R}} P_0(t) v^*(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

---

<sup>3</sup>Seguiamo [3].

Definiamo allora:

$$w_{z,\zeta}(t) = P_0(t-z) e^{t(z-i\zeta)} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Dalla scelta di  $P_0$  abbiamo:

$$A(w_{z,\zeta}, u)(z, \zeta) = e^{\frac{z^2 - iz\zeta}{2}}$$

Ma allora le equazioni (4.17) e (4.18) seguono da un calcolo diretto. Inoltre poiché  $A(u)A^*(u, w_{z,\zeta})$  si estende a una funzione analitica per ogni  $z, \zeta \in \mathbb{C}$ , e poiché il secondo fattore è anche intero e diverso da zero in un intorno di  $(-z, -\zeta) \in \mathbb{C}^2$ , segue che  $A(u)$  si estende ad una funzione intera. Il fatto che sia di ordine due segue poi dalle equazioni (4.16), (4.17) e (4.18). □

#### 4.4.2 Stabilità delle funzioni di Hermite

Usando il principio di indeterminazione per la funzione di ambiguità (4.14) dimostrato nella sezione precedente possiamo ottenere la stabilità della classe delle funzioni di Hermite rispetto al problema dell'ambiguità radar (4.2).

**Teorema: (Stabilità delle funzioni di Hermite)**

Sia  $u(t) = P(t)e^{-t^2/2}$  ove  $P(t)$  è un polinomio. Allora a meno di trasformazioni banali ogni partner  $v$  di  $u$  rispetto al problema (4.2) è della forma:

$$v(t) = Q(t)e^{-t^2/2} \tag{4.19}$$

dove  $Q(t)$  è un polinomio di grado uguale a  $P(t)$ .

**Dimostrazione:** Per la funzione di Hermite  $u(t)$  si ha, grazie al lemma (4.13):

$$A(u)(x, y) = \tilde{P}(x, y)e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$$

dove  $\tilde{P}(x, y)$  è un polinomio in  $x$  e  $y$  di grado totale  $2 \deg P$ .

Da ciò segue che:

$$|A(v)(x, y)|^2 = |A(u)(x, y)|^2 = \left| \tilde{P}(x, y) \right|^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

e grazie al principio di indeterminazione (4.14) possiamo concludere che esistono  $\omega, a \in \mathbb{R}$  e un polinomio  $Q(t)$  tali che  $v(t) = Q(t)e^{i\omega t}e^{-(t-a)^2/2}$ . L'uguaglianza dei gradi di  $Q(t)$  e  $P(t)$  segue dal fatto che, posto:

$$|A(v)(x, y)|^2 = \left| \tilde{Q}(x, y) \right|^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \left| \tilde{P}(x, y) \right|^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

si ha:  $\deg Q = \frac{\deg \tilde{Q}}{2} = \frac{\deg \tilde{P}}{2} = \deg P$ .

□

Abbiamo quindi dimostrato che un partner di una funzione di Hermite rispetto al problema della Radar Ambiguity (4.2) è sempre una funzione di Hermite. In questo senso le funzioni di Hermite costituiscono una classe di funzioni “stabile” rispetto al problema (4.2). Possiamo però domandarci quale sia l’ambiguità residua all’interno di tale classe di funzioni.

### 4.4.3 Unicità

In questa ultima sezione dimostreremo seguendo [4] che un partner di una funzione di Hermite rispetto al problema dell’ambiguità radar (4.2) non solo è anch’esso una funzione di Hermite, ma è anche esattamente la stessa funzione a meno di trasformazioni banali. La dimostrazione è un po’ tecnica e la riportiamo per completezza. Sarà valida per polinomi “generici” secondo la seguente:

**Definizione:** Un *polinomio generico*  $P(x)$  è un polinomio avente solo radici semplici e non simmetriche, cioè  $P(x) = 0 \Rightarrow P(-x) \neq 0$ .

Chiaramente i polinomi sono “quasi sempre” generici nel senso della misura di Lebesgue sui coefficienti, se identifichiamo i polinomi di grado fissato  $n$  con  $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ . Nel seguito faremo uso della seguente notazione:

**Definizione: (Notazioni)** Sia  $P(z) \in \mathbb{C}_n[z]$  un polinomio di grado  $n$  in  $z$  a coefficienti complessi. Allora poniamo:

- $P^*(z) = P^*(z^*)$
- $\tilde{P}(z) = (-1)^n P(-z)$ . Notare che  $(P')^\sim = (\tilde{P})'$ , quindi possiamo scrivere  $\tilde{P}'$  senza ambiguità.
- $\{P, Q\}_- = P\tilde{Q} - \tilde{P}Q$       $\{P, Q\}_+ = P\tilde{Q} + \tilde{P}Q$  , dove  $Q \in \mathbb{C}_m[z]$ .

**Definizione:** Il *polinomio di ambiguità*  $A_P$  del polinomio  $P \in \mathbb{C}_n[z]$  è definito come:

$$A_P(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} P^{(m)}(z) P^{*(m)}(w)$$

Per convenienza chiamiamo:

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2})$$

i polinomi di Hermite senza il fattore esponenziale  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

**Definizione:** Poiché gli  $\{H_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  sono una base per lo spazio dei polinomi  $\mathbb{C}[x]$ , possiamo definire la mappa lineare  $\mathcal{B} : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[Z]$  (*trasformata di Bergmann*) come:

$$\mathcal{B}(H_k(x)) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{k}{2}} Z^k$$

ed estenderla per linearità su tutti i polinomi. Inoltre è evidente che tale mappa è invertibile.

Il primo passaggio sarà dimostrare che il problema della ambiguità radar (4.2) nel caso delle funzioni di Hermite è riducibile al seguente problema “algebrico”:

**Problema: (Algebraic Ambiguity problem)** Dato un polinomio  $P(z)$ , trovare tutti i polinomi  $Q(z)$  tali che:

$$A_P(z, w)A_P(-z, -w) = A_Q(z, w)A_Q(-z, -w) \quad (4.20)$$

**Lemma: (Equivalenza tra i due problemi)** Siano  $Q(t), P(t)$  due polinomi. Allora  $P(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$  e  $Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$  sono partner rispetto all’ambiguità radar se e solo se  $\mathcal{B}(P)$  e  $\mathcal{B}(Q)$  sono partner rispetto al problema algebrico, cioè:

$$\begin{aligned} P(t)e^{-\frac{t^2}{2}}, Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ sono partner risp. a (4.2)} \\ \Leftrightarrow \\ \mathcal{B}(P), \mathcal{B}(Q) \text{ sono partner risp. a (4.20)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

**Dimostrazione:** Tramite un calcolo diretto si può mostrare che:

$$A\left(H_j(t)e^{-\frac{t^2}{2}}, H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\right)(x, y) = \mathcal{L}_{jk}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} e^{i\frac{xy}{2}}$$

dove  $\mathcal{L}_{jk}$  è il polinomio di Laguerre definito da:

$$\mathcal{L}_{jk}(x, y) = \sqrt{\pi} 2^{j+k} j! k! \sum_{m=0}^{\min(k,l)} \frac{(x+iy)^{j-m} (-x+iy)^{k-m}}{(j-m)!(k-m)!m!}.$$

Ma allora definendo  $z = x + iy$  possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & A\left(H_j(t)e^{-\frac{t^2}{2}}, H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\right)(x, y) \\ &= \sqrt{\pi} j! k! \left( \sum_{m=0}^{\min(k,l)} \frac{2^m}{m!} \frac{z^{j-m} (-z^*)^{k-m}}{(j-m)!(k-m)!} \right) e^{-\frac{|z|^2}{4}} e^{i\frac{xy}{2}} \\ &= \sqrt{\pi} j! k! \left( \sum_{m=0}^{\min(k,l)} \frac{2^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \left( \frac{t^j}{j!} \right) \Big|_{t=z} \frac{d^m}{dt^m} \left( \frac{t^k}{k!} \right) \Big|_{t=-z^*} \right) e^{-\frac{|z|^2}{4}} e^{i\frac{xy}{2}}. \end{aligned}$$

Se espandiamo  $P$  e  $Q$  in termini dei polinomi di Hermite abbiamo:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=0}^n \alpha_j H_j \quad \rightarrow \quad \mathcal{P} = \mathcal{B}(P) \sum_{j=0}^n \alpha_j 2^{\frac{j}{2}} Z^j \\ Q &= \sum_{j=0}^n \beta_j H_j \quad \rightarrow \quad \mathcal{Q} = \mathcal{B}(Q) \sum_{j=0}^n \beta_j 2^{\frac{j}{2}} Z^j \end{aligned} \quad (4.22)$$

quindi usando la bilinearità della funzione di ambiguità si ottiene:

$$|A(u)(x, y)| = \sqrt{\pi} \left| \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{P}^{(m)}(z\sqrt{2}) \mathcal{P}^{*(m)}(-z\sqrt{2}) \right| e^{-\frac{|z|^2}{4}}$$

e pertanto il fatto che  $u$  e  $v$  siano partner rispetto all’ambiguità (4.2) è equivalente a:

$$\left| \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{P}^{(m)}(z) \mathcal{P}^{*(m)}(-z) \right|^2 = \left| \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{Q}^{(m)}(z) \mathcal{Q}^{*(m)}(-z) \right|^2$$

per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Basta infine osservare che due polinomi in due variabili complesse  $(z, w)$  coincidono ovunque se coincidono per  $z = -w^*$ , e si ha che l’ultima identità è equivalente a:

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{P}^{(m)}(z) \mathcal{P}^{*(m)}(w) \right) \left( \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{P}^{(m)}(-z) \mathcal{P}^{*(m)}(-w) \right) \quad (4.23) \\ &= \left( \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{Q}^{(m)}(z) \mathcal{Q}^{*(m)}(w) \right) \left( \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \mathcal{Q}^{(m)}(-z) \mathcal{Q}^{*(m)}(-w) \right) \end{aligned}$$

in cui riconosciamo il problema algebrico (4.20).

□

Dunque abbiamo visto (lemma (4.21)) che se due polinomi  $P$  e  $Q$  sono partner rispetto al problema dell’ambiguità radar (4.2), allora  $\mathcal{P} = \mathcal{B}(P)$  e  $\mathcal{Q} = \mathcal{B}(Q)$  sono partner rispetto al problema algebrico (4.20). Ma allora grazie all’invertibilità della trasformata di Bergmann  $\mathcal{B}$  per concludere basta provare che due polinomi  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  partner rispetto al problema algebrico sono necessariamente partner banali. Ciò è il contenuto del seguente conclusivo:

**Teorema:** (*Soluzione algebraic ambiguity problem*)

Supponiamo che il polinomio  $\mathcal{P}$  sia generico di grado  $n$ , e che  $\mathcal{Q}$  sia un partner di  $\mathcal{P}$  rispetto al problema di ambiguità algebrico (4.20). Allora  $\mathcal{Q}$  è un partner banale, cioè esiste una costante unimodulare  $c$  tale che:

$$\mathcal{Q} = c\mathcal{P} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{Q} = c\tilde{\mathcal{P}}. \quad (4.24)$$

**Dimostrazione:** Per questa dimostrazione, un po' tecnica, seguiamo [4]. Innanzitutto osserviamo che il coefficiente di massimo grado nella (4.23) dà  $|\alpha_n|^4 = |\beta_n|^4$  e quindi  $|\alpha_n| = |\beta_n|$ . Ma essendo  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  i coefficienti di grado massimo di  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ , vedi (4.22), segue che possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  siano monici, cioè  $\alpha_n = \beta_n = 1$ .

Dividiamo la dimostrazione in due parti: nella prima ricaviamo alcune informazioni su  $\mathcal{Q}$ , nella seconda giungeremo ad una contraddizione supponendo che  $\mathcal{Q}$  sia un partner non banale.

1. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Z) &= Z^n + p_1 Z^{n-1} + \dots + p_{n-1} Z + p_n \\ \mathcal{Q}(Z) &= Z^n + q_1 Z^{n-1} + \dots + q_{n-1} Z + q_n, \end{aligned}$$

e l'equazione (4.23) può essere riscritta:

$$A_{\mathcal{P}} A_{\tilde{\mathcal{P}}} = A_{\mathcal{Q}} A_{\tilde{\mathcal{Q}}}.$$

Se consideriamo  $A_{\mathcal{P}} \in \mathbb{C}[Z, W]$  come un polinomio in  $W$  a coefficienti in  $\mathbb{C}[Z]$  abbiamo:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{P}} &= \mathcal{P}W^n + (p_1^* \mathcal{P} + n\mathcal{P}')W^{n-1} + \\ &+ \left( p_2^* \mathcal{P} + (n-1)p_1^* \mathcal{P}' + \frac{n(n-1)}{2} \mathcal{P}'' \right) W^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

dove i termini restanti sono di grado minore in  $W$ . Dal coefficiente di  $W^{2n}$  nella (4.23) abbiamo quindi:

$$\mathcal{P}\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{Q}} \quad (4.25)$$

e, usando la derivata prima e seconda di questa equazione, dal coefficiente di  $W^{2n-2}$  nella (4.23) si ottiene:

$$n\mathcal{P}'\tilde{\mathcal{P}}' + p_1^*(\mathcal{P}\tilde{\mathcal{P}}' - \tilde{\mathcal{P}}\mathcal{P}') = n\mathcal{Q}'\tilde{\mathcal{Q}}' + q_1^*(\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{Q}}' - \tilde{\mathcal{Q}}\mathcal{Q}'). \quad (4.26)$$

Il coefficiente di  $Z^{2n-1}$  in questa equazione dà  $|p_1| = |q_1|$ .

Dalla (4.25) deduciamo che esistono due polinomi monici  $A$  e  $B$  tali che:

$$\mathcal{P} = AB \quad \mathcal{Q} = A\tilde{B}. \quad (4.27)$$

Scriviamo:

$$A(Z) = Z^k + a_1 Z^{k-1} + \dots + a_k \quad B(Z) = Z^l + b_1 Z^{l-1} + \dots + b_l.$$

Allora  $p_1 = a_1 + b_1$  e  $q_1 = a_1 - b_1$ , quindi  $|p_1| = |q_1|$  è equivalente a:

$$a_1 b_1^* + a_1^* b_1 = 0.$$

Si noti che, usando le notazioni introdotte, la (4.26) può essere riscritta come:

$$2a_1^* A\tilde{A}\{B', B\}_- + 2b_1^* B\tilde{B}\{A', A\}_- + n\{A', A\}_-\{B', B\}_- = 0 \quad (4.28)$$

Inoltre la condizione  $\{A', A\}_- = 0$ , che può essere riscritta  $\frac{A'}{A} = \frac{\tilde{A}'}{\tilde{A}}$ , è equivalente a  $\tilde{A} = A$ . Ora nel caso in cui è  $a_1 = 0$  ci sono due possibilità: o  $\{A', A\}_- = 0$  (nel qual caso  $\mathcal{Q} = \tilde{\mathcal{P}}$ ), oppure  $2b_1^* B\tilde{B} + n\{B', B\}_- = 0$ . Ma quest'ultima è possibile solo se  $b_1 = 0$  e quindi  $\{B', B\}_- = 0$  (cioè  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ ). In definitiva se  $a_1 = 0$  oppure  $b_1 = 0$  abbiamo concluso.

Consideriamo adesso il caso in cui sia  $a_1$  che  $b_1$  sono diversi da zero, ricordando che per ipotesi  $\mathcal{P}$  è generico. I polinomi  $A$  e  $B$  non possono avere zeri multipli o simmetrici, quindi  $A\tilde{A}$  e  $\{A', A\}_-$  devono essere primi tra loro (e allo stesso modo devono esserlo  $B\tilde{B}$  e  $\{B', B\}_-$ ). Inoltre gli zeri di  $A\tilde{A}$  e  $B\tilde{B}$  sono diversi. Ma allora segue dalla (4.28) che  $2b_1^* B\tilde{B} + n\{B', B\}_-$  può essere diviso per  $A\tilde{A}$ , e allo stesso modo  $2a_1^* A\tilde{A} + n\{A', A\}_-$  può essere diviso per  $B\tilde{B}$ . Pertanto  $A$  e  $B$  devono avere stesso grado, ed abbiamo già una contraddizione se  $n$  è dispari (cioè se  $n$  è dispari abbiamo concluso).

Assumiamo quindi che  $n = 2k$ . Dai termini di grado massimo nella (4.28) abbiamo:

$$n\{B', B\}_- = 2b_1^*(A\tilde{A} - B\tilde{B}), \quad (4.29)$$

e differenziando questa:

$$2b_1^*(\{A', A\}_+ - \{B', B\}_+) = n\{B'', B\}_-. \quad (4.30)$$

Scambiando  $A$  con  $B$  in queste ultime due equazioni otteniamo anche:

$$b_1^*\{A', A\}_- + a_1^*\{B', B\}_- = 0. \quad (4.31)$$

2. Supponiamo quindi  $a_1 \neq 0$ ,  $b_1 \neq 0$ , e  $n = 2k$ ; mostreremo che c'è una contraddizione, e da ciò seguirà che la fattorizzazione (4.27) deve essere “banale”, ossia che  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  sono partner banali.

Lavoriamo adesso con polinomi in due variabili, e per  $R \in \mathbb{C}[Z, W]$  definiamo  $\tilde{R}$  come prima, intendendo come grado di  $R$  il grado complessivo. Abbiamo allora:

$$A_{\mathcal{P}}\tilde{A}_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{Q}}\tilde{A}_{\mathcal{Q}}$$

e sappiamo che pertanto esiste una fattorizzazione, con due polinomi  $C, D \in \mathbb{C}[Z, W]$  in due variabili, tale che:

$$A_{\mathcal{P}} = CD \quad , \quad A_{\mathcal{Q}} = C\tilde{D} . \quad (4.32)$$

Consideriamo  $C$  e  $D$  come polinomi nella variabile  $W$  a coefficienti in  $\mathbb{C}[Z]$ , e scriviamo:

$$C = C_0W^\alpha + \dots \quad , \quad D = D_0W^\beta + \dots$$

dove sono stati omissi termini di grado inferiore in  $W$ . Allora:

$$\mathcal{P} = C_0D_0 \quad , \quad \mathcal{Q} = \epsilon C_0\tilde{D}_0$$

dove  $\epsilon = (-1)^{\deg D + \deg D_0 + \beta}$ . Il fatto che  $\mathcal{P}$  è generico implica che abbiamo unicità nella fattorizzazione (4.27), quindi a meno di costanti moltiplicative  $A$  è uguale a  $C_0$  e  $B$  è uguale a  $D_0$ . Ma allora  $\alpha = \beta = k$ , e segue che  $\epsilon = 1$ . Inoltre possiamo supporre che  $C_0$  e  $D_0$  siano monici, per cui in definitiva:

$$C_0 = A \quad , \quad D_0 = B .$$

Queste considerazioni ci permettono di scrivere:

$$C(Z, W) = A(Z)A^*(W) + C_1(Z)W^{k-1} + \dots \quad D(Z, W) = B(Z)B^*(W) + D_1(Z)W^{k-1} + \dots$$

dove sono stati omissi termini di grado minore in  $W$ , e  $C_1$  e  $D_1$  hanno grado al più  $k - 1$ . Scrivendo  $A_{\mathcal{P}}$  come prodotto abbiamo:

$$A_{\mathcal{P}}(Z, W) = \mathcal{P}(Z)\mathcal{P}^*(W) + [A(Z)D_1(Z) + C_1(Z)B(Z)]W^{n-1} + \dots$$

e d'altra parte usando  $\mathcal{P} = AB$  con un calcolo diretto si trova:

$$A_{\mathcal{P}}(Z, W) = \mathcal{P}(Z)\mathcal{P}^*(W) + n[A(Z)B'(Z) + A'(Z)B(Z)]W^{n-1} + \dots$$

dove in entrambi i casi sono stati omissi termini di grado minore in  $W$ . Confrontando le due espressioni abbiamo:

$$(nA' - C_1)B + (nB' - D_1)A = 0 .$$



Dall’assunzione sugli zeri di  $\mathcal{P}$  sappiamo però che  $A$  e  $B$  sono primi tra loro, pertanto usando l’informazione sui gradi di  $C_1$  e  $D_1$  abbiamo:

$$C_1 = nA' \quad D_1 = nB'.$$

Si può quindi vedere che:

$$\begin{aligned} C(Z, W) &= A(Z)A^*(W) + 2A'(Z)A'^*(W) + C_2(Z)W^{k-2} + \dots \\ D(Z, W) &= B(Z)B^*(W) + 2B'(Z)B'^*(W) + D_2(Z)W^{k-2} + \dots \end{aligned}$$

dove sono stati omissi termini di grado minore in  $W$ . Inoltre  $C_2$  e  $D_2$  hanno grado al più  $k - 2$ . Segue pertanto che:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{P}}(Z, Z) &= \mathcal{P}(Z)\mathcal{P}^*(W) + \mathcal{P}'(Z)\mathcal{P}'^*(W) + \{A(z)[(a_1^* - b_1^*)B'(Z) \\ &\quad + D_2(Z)] + B(Z)[(b_1^* - a_1^*)A'(Z) + C_2(Z)]\} W^{n-2} + \dots \\ &= \mathcal{P}(Z)\mathcal{P}^*(W) + \mathcal{P}'(Z)\mathcal{P}'^*(W) + \frac{n(n-1)}{2} \times \\ &\quad \times \{A''(Z)B(Z) + 2A'(Z)B'(Z) + A(Z)B''(Z)\} W^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

e quindi:

$$(a_1^* - b_1^*)(AB' - A'B) + AF + BE + nA'B' = 0, \quad (4.33)$$

dove:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} C_2 - \frac{n(n-1)}{2}A'' \quad F \stackrel{\text{def}}{=} D_2 - \frac{n(n-1)}{2}B''.$$

Dalle espressioni ottenute per  $A_{\mathcal{P}}$ , scambiando  $B$  con  $\tilde{B}$  (e quindi  $b_1^*$  con  $-b_1$  e  $F$  con  $\tilde{F}$ ), si ha:

$$(a_1^* + b_1^*)(A\tilde{B}' - A'\tilde{B}) + A\tilde{F} + \tilde{B}E + nA'\tilde{B}' = 0. \quad (4.34)$$

Moltiplicando la (4.33) per  $\tilde{B}$  e la (4.34) per  $B$  e sottraendo si ha:

$$A(a_1^*\{B', B\}_- - b_1^*\{B', B\}_+ + \{F, B\}_-) + A'(2b_1^*B\tilde{B} + n\{B', B\}_+) = 0.$$

Usando le (4.29) e (4.31) possiamo allora scrivere:

$$A'(2b_1^*B\tilde{B} + n\{B', B\}_+) = 2b_1^*AA'\tilde{A} = A(b_1^*\{A', A\}_+ - a_1^*\{B', B\}_-).$$

Ma allora usando la (4.30) si ha:

$$\{F + kB'', B\}_- = 0$$

e, poiché  $B$  e  $B'$  sono primi tra loro per ipotesi, ciò significa che  $F = -kB''$ . Allo stesso modo si prova che  $E = -kA''$ .

Ma allora dal coefficiente del termine di grado massimo della (4.33) abbiamo:

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 + n = 0$$

il che è assurdo. Ciò conclude la dimostrazione, in quanto segue che  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  devono essere partner banali rispetto al problema algebrico (4.20).

□

# Bibliografia

- [1] P. Acquistapace, *Appunti di Analisi Funzionale* (2007), <http://www.dm.unipi.it/acquistp/anafun.pdf> .
- [2] M. S. Ashbaugh, *An example showing the non-uniqueness of a wavefunction given its position and momentum distribution*, Inverse Problems 2 (1986), Letter to the editor L47-L49.
- [3] A. Bonami, B. Demange, P. Jaming, *Hermite functions and uncertainty principles for the Fourier and the windowed Fourier transforms*, Rev. Mat. Iberoamericana 19 (2003) 23-55.
- [4] A. Bonami, G. Garrigos, P. Jaming, *Discrete radar ambiguity problems*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 23 (2007) 388-414.
- [5] R. De Buda, *Signals that can be calculated from their ambiguity function*, IEEE Trans. Information Theory, IT16:195-202 (1970).
- [6] P. A. Dirac, *I principi della Meccanica Quantistica*, Bollati Boringhieri 1971.
- [7] H. Dym, H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, 1972.
- [8] G. H. Hardy, *A theorem concerning Fourier transforms*, Journal of London Mathematical Society, vol. 8, 227-231 (1933).
- [9] L. Hörmander, *A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs*, Ark. Mat. 29, 237-240 (1991).
- [10] P. Jaming, *Phase retrieval techniques for Radar Ambiguity Problems*, (2005), [arXiv:ccsd-00005818].
- [11] V. Katsnelson, R. Machluf, *The truncated Fourier operator. I*, (2009), [arXiv:0901.2555v1].

- 
- [12] V. Katsnelson, R. Machluf, *The truncated Fourier operator. II*, (2009), [arXiv:0902.2709v1].
- [13] V. Katsnelson, R. Machluf, *The truncated Fourier operator. III*, (2009), [arXiv:0902.0568v2].
- [14] M. V. Klivanov, P. E. Sacks, A. V. Tikhonravov, *The phase retrieval problem*, Inverse Problems 11 (1995) 1-28.
- [15] S. Marchesini, *A unified evaluation of iterative projection algorithms for phase retrieval*, (2008), [arXiv:physics.optics/0603201v3].
- [16] W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Handbuch der Physik, Zweite Auflage, vol. XXIV, Berlin: Springer (1932) 83-272 (footnote on page 98).
- [17] L. E. Picasso, *Lezioni di Meccanica Quantistica*, Edizioni ETS, Pisa, 2000.
- [18] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, revised and enlarged edition, Academic Press (London) 1980.
- [19] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- [20] F. Strocchi, *An introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*, Advanced Series in Mathematical Physics - Vol.27, World Scientific, 2005.
- [21] E. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, 1939.
- [22] A. Vogt, *Position and momentum distributions do not determine the quantum mechanical state*, Mathematical Foundations of Quantum Theory, ed. Marlow - New York: Academic (1978) 365-372.