



UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

Opzioni con Barriera

CANDIDATO:

Lorenzo Balducci

RELATORE:

Prof. Maurizio Pratelli

CONTRORELATORE:

Prof. Giorgio Letta

ANNO ACCADEMICO 2008/2009

Indice

Introduzione	5
1 Elementi di Finanza Matematica	9
1.1 Portafogli, Pricing e Copertura	9
1.2 Il Modello di Black & Scholes	13
1.2.1 Il Teorema di Girsanov e la probabilità Risk-Neutral	13
1.2.2 Il Pricing e l'Hedging nel modello di Black & Scholes	15
1.2.3 Le Greche	16
1.3 I Modelli a Volatilità Locale	18
1.4 I Modelli a Volatilità Stocastica	19
1.4.1 Il modello di Heston	20
2 Il calcolo di Malliavin	21
2.1 La Derivata di Malliavin	21
2.2 L'Integrale di Skorohod	24
2.3 Equazioni Differenziali Stocastiche	26
2.3.1 Esistenza ed unicità delle equazioni differenziali stocastiche	26
2.3.2 Differenziabilità della diffusione nel senso di Malliavin	27
2.3.3 Differenziabilità della diffusione rispetto al dato iniziale	28
3 Pricing di opzioni con barriera	33
3.1 Il pricing nel modello di Black & Scholes	33
3.1.1 Richiami e Preliminari	35
3.1.2 Espressione analitica del prezzo del contratto 'down-and-out'	36
3.1.3 Espressione analitica dei prezzi dei contratti 'up-and-out', 'down-and-in' e 'up-and-in'	39
3.1.4 Esempi e Applicazioni	40
3.2 Una correzione per il pricing di alcune opzioni con barriera discreta	43
3.3 Un approccio numerico per il pricing di opzioni con barriere continue	44

3.3.1	Il caso di barriere dipendenti dal tempo nel modello di Black & Scholes	46
3.3.2	Generalizzazione a modelli più complessi	49
3.3.3	Risultati Numerici	50
4	Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin	53
4.1	Le greche nel caso unidimensionale: modelli a volatilità locale	54
4.1.1	Ipotesi, Definizioni e Risultati Preliminari	55
4.1.2	Il calcolo di Δ e Γ	59
4.1.3	Costruzione di alcuni processi dominanti	68
4.2	Le greche nel caso multidimensionale: modelli con matrice di volatilità costante	76
4.2.1	Preliminari	77
4.2.2	Il calcolo delle greche e la scelta di processi dominanti.	79
5	Le greche di opzioni con barriere discrete	81
5.1	Variazioni dei Parametri	82
5.1.1	Variazioni del coefficiente di drift	83
5.1.2	Variazione delle condizioni iniziali	84
5.1.3	Variazioni del coefficiente di volatilità	87
5.2	Applicazione al modello di Heston	90
5.2.1	Il calcolo di Rho	92
5.2.2	Il calcolo di Delta	94
5.2.3	Il calcolo di $Vega^{v_0}$	95
5.2.4	Il calcolo di $Vega^\theta$	95
5.2.5	Il calcolo di $Vega^{v_t}$	96
5.2.6	Il calcolo di Gamma	100
5.3	Risultati Numerici	103

Introduzione

Nella presente tesi verranno trattati alcuni problemi finanziari legati ad una specifica classe di derivati: le opzioni con barriera.

Supponiamo assegnata un'opzione Z di payoff $\Phi(S.)$, dove $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ è il processo di prezzi di un attivo (o sottostante) assegnato. Sia fissato un tempo $T > 0$, un insieme di tempi $I \subset [0, T]$ e due funzioni $U, L : I \rightarrow [0, +\infty]$ tali che $L(0) < S_0 < U(0)$. Allora, detto $\tau = \inf\{t \in I \mid S_t \notin (L(t), U(t))\}$, si definisce l'opzione Z^o , detta la versione *out* di Z con barriere U e L nell'insieme di monitoraggio I , come l'opzione di payoff

$$\Phi(S.)I_{\{\tau > T\}}.$$

Intuitivamente si controlla se il prezzo del sottostante abbia oltrepassato la barriera superiore U o la barriera inferiore L in un istante appartenente all'insieme I . Se tale istante esiste allora l'opzione *out* non ha più validità, altrimenti Z^o ha lo stesso payoff dell'opzione di partenza Z .

In maniera analoga è possibile definire la versione *in* di Z , detta Z^i , come l'opzione di payoff

$$\Phi(S.)I_{\{\tau \leq T\}}.$$

Le opzioni con barriera hanno un ruolo centrale nella finanza moderna e sono scambiate ogni giorno nei mercati. Il successo di tali derivati è dovuto al fatto che le versioni con barriera hanno un prezzo inferiore del prezzo della relativa opzione senza barriera.

Nell'ambito della finanza matematica è molto interessante studiare le proprietà e le caratteristiche di questa classe di derivati. Le difficoltà che sorgono nello studio delle opzioni con barriera sono principalmente dovute al fatto che i loro payoff sono *path dependent*, ossia dipendono dall'intera traiettoria del processo di prezzi.

Lo scopo della tesi è quello di discutere e risolvere alcuni problemi relativi al *pricing* e al *calcolo delle greche* di opzioni con barriera.

Il problema del *pricing* consiste nella ricerca di un sistema di prezzi per le opzioni che non consenta possibilità di arbitraggio nel mercato. Dimostriamo che in alcuni casi particolarmente semplici, lavorando nel modello di Black & Scholes, è possibile ricavare delle espressioni analitiche per il prezzo di opzioni con barriera.

In generale, quando si esaminano modelli più avanzati o si tolgono delle ipotesi di regolarità sulle funzioni di barriera o sull'insieme di monitoraggio I , il prezzo non è più calcolabile analiticamente e si ricorre a delle simulazioni numeriche. Utilizzando i risultati degli articoli [5] e [12] esporremo alcuni risultati, ottenuti come correzioni dei metodi Monte Carlo, che approssimano in maniera accurata il prezzo di molte opzioni con barriera.

Il secondo problema di cui ci occuperemo è quello del *calcolo delle greche*. Le greche di un'opzione Z di payoff Φ sono definite come le derivate della funzione prezzo dell'opzione rispetto ad alcuni parametri del modello considerato. È possibile dimostrare che, se il processo dei prezzi segue delle dinamiche del tipo

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = x, \end{cases} \quad (1)$$

allora il prezzo dell'opzione $\Pi(Z)$ è calcolabile come una speranza, ossia

$$\Pi(Z) = E^Q [\Phi(S.)e^{-rT}],$$

dove r è il tasso di interesse e Q è un'opportuna misura di probabilità, detta probabilità *Risk-Neutral*. Considerato un parametro λ del modello è interessante calcolare la greca Λ relativa a λ , ossia la quantità

$$\Lambda = \frac{\partial \Pi(Z)}{\partial \lambda}.$$

Nei rari casi in cui sia possibile trovare un'espressione analitica del prezzo $\Pi(Z)$, il calcolo delle greche si riduce a fare una derivata. Se non si hanno formule chiuse per il prezzo è necessario ricorrere nuovamente a delle simulazioni numeriche.

Il metodo tradizionalmente usato per il calcolo delle greche è quello delle differenze finite che, nel migliore dei casi, ha una velocità di convergenza dell'ordine di $n^{-1/3}$. Tale velocità diminuisce notevolmente quando si considerano funzioni payoff discontinue, come per esempio accade per la gran parte delle opzioni con barriera. Nel 1999 venne pubblicato il famoso articolo [17], nel quale veniva presentato un nuovo metodo per il calcolo delle greche che faceva uso la teoria del calcolo di Malliavin. Con l'approccio di questo articolo, utilizzando una formula di integrazione per parti, è possibile rappresentare Λ nella forma

$$\Lambda = E^Q [\Phi(S.)e^{-rT} H], \quad (2)$$

dove H è un'opportuna variabile aleatoria, la stessa per ogni funzione payoff Φ . Utilizzando una procedura Monte Carlo sulla formula (2) si ottiene un metodo alternativo per il calcolo della greca Λ , che ha velocità di convergenza indipendente dal payoff Φ , dell'ordine di $n^{-1/2}$. Di conseguenza questo

metodo di calcolo si rivela particolarmente utile quando si ha a che fare con payoff discontinui e dipendenti dalla traiettoria del prezzo, come avviene nel caso di opzioni con barriera.

Nella tesi vengono ricavate delle formule per le principali greche di opzioni con barriera nei modelli a volatilità locale e nel modello di Heston.

Nel dettaglio la tesi è suddivisa nel modo seguente: nel primo capitolo vengono richiamati i risultati fondamentali di finanza matematica e vengono definiti e descritti i principali modelli utilizzati all'interno della tesi.

Nel secondo capitolo viene definita la derivata di Malliavin ed il suo operatore aggiunto, l'integrale di Skorohod. Vengono poi esibite le principali formule di integrazione per parti e le formule di calcolo per le derivate di Malliavin e per gli integrali di Skorohod. Infine vengono esposti dei risultati sull'esistenza, unicità e differenziabilità delle soluzioni di equazioni differenziali stocastiche.

Nel terzo capitolo viene affrontato il problema del pricing per opzioni con barriera. Si ricavano esplicitamente le formule per il pricing di T -contratti con barriera unica, costante e continuamente monitorata nel modello di Black & Scholes. Viene poi presentato un risultato di Broadie, Glasserman e Kou che permette di ottenere il prezzo di alcune opzioni con barriera discretamente monitorata se si possiedono delle formule analitiche per le stesse opzioni con barriera continuamente monitorata. Infine viene enunciato un risultato di Baldi, Caramellino e Iovino che fornisce una correzione del metodo Monte Carlo tradizionale, in modo da compensare l'errore dovuto alla discretizzazione dei tempi.

Nel quarto capitolo si utilizza il calcolo di Malliavin per ottenere delle formule per il calcolo delle greche di opzioni con barriera continuamente monitorata nei modelli a volatilità locale. Si analizza prima il caso unidimensionale, ossia in cui l'opzione dipenda dal processo di prezzi di un unico sottostante, e poi si generalizza al caso multidimensionale con matrice di volatilità costante.

Nel quinto ed ultimo capitolo si enunciano e dimostrano i Teoremi principali dell'articolo [17]. Poi si applicano questi risultati alle opzioni con barriere discretamente monitorate nel modello di Heston.

Capitolo 1

Elementi di Finanza Matematica

In questo capitolo richiamiamo alcuni elementi di finanza matematica a tempi continui. I risultati e la teminologia di questo capitolo ci saranno utili nei capitoli 3 e 4, quando applicheremo i risultati generali al caso particolare di opzioni con barriera. Si suppone che il lettore abbia già familiarità con l'integrazione stocastica nel caso Wiener e con alcuni concetti di base di finanza e probabilità.

1.1 Portafogli, Pricing e Copertura

In tutto ciò che segue chiameremo $\tau = [0, T]$ l'insieme dei tempi, con $T \in \mathbb{R}^+$. Assumeremo fissato un insieme Ω , che rappresenterà l'insieme di tutti i possibili stati del mercato, una filtrazione \mathcal{F} e una misura di probabilità $P : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow [0, 1]$; lavoreremo sempre sullo spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{F}, P) . Ogni volta che avremo a che fare con processi di Wiener sull'intervallo $[0, T]$ sottointenderemo che tali processi siano adattati rispetto a una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ tale che $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Inoltre supporremo che esista un tasso di interesse continuamente composto r , che assumeremo costante nel tempo.

Nella nostra modellizzazione del mercato sarà presente un attivo senza rischio, o bond, che indicheremo con B , che sia la soluzione (deterministica) dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt \\ B_0 = 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Inoltre nel mercato sarà possibile scambiare un numero finito d di attivi con rischio, i cui prezzi saranno indicati con S_t^i , per $i = 1, \dots, d$. Tali prezzi andranno intesi come elementi di un vettore di processi stocastici $\{S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)\}_{t \in [0, T]}$, adattato rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t^{\otimes d}\}_{t \in [0, T]}$.

Definizione 1.1. Una strategia di portafoglio (o portafoglio) è un processo $(d + 1)$ -dimensionale, $\{h_t = (h_t^0, \tilde{h}_t)\}_{t \in [0, T]}$, adattato rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t^{\otimes(d+1)}\}_{t \in [0, T]}$, tale che \tilde{h} sia integrabile rispetto a S .
Il valore del portafoglio è il processo stocastico $\{V_t\}_{t \in [0, T]}$ definito da

$$V_t = h_t^0 B_t + \tilde{h}_t \cdot S_t.$$

Il portafoglio è detto autofinanziato se è soddisfatta la relazione differenziale

$$dV_t = h_t^0 dB_t + \tilde{h}_t \cdot dS_t.$$

I termini h_t^i del portafoglio indicano la quantità dell' i -esimo sottostante posseduta all'istante t . Un portafoglio autofinanziato è un portafoglio in cui tutti i guadagni vengono reinvestiti nel portafoglio e tutte le perdite vengono compensate da un riassetto delle posizioni, in modo che non esistano flussi di denaro in entrata o in uscita dal portafoglio.

Molto spesso si parlerà di *prezzi scontati* (o *prezzi attualizzati*). Il processo di prezzi scontati $\{\tilde{S}_t = (\tilde{S}_t^1, \dots, \tilde{S}_t^d)\}_{t \in [0, T]}$ è definito dalla relazione

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = \left(1, \frac{S_t^1}{B_t}, \dots, \frac{S_t^d}{B_t}\right).$$

Definizione 1.2. Un arbitraggio è una strategia di portafoglio autofinanziata con $V_0 = 0$ e tale che esista $t \in [0, T]$ per cui $P(V_t > 0) > 0$.

Un arbitraggio è un'operazione che permette di ottenere certamente un profitto senza disporre di alcun capitale iniziale. Ogni buon modello finanziario deve supporre che gli arbitraggi siano assenti nel mercato:

Ipotesi 1.3. (NA) Nel mercato non esistono opportunità di arbitraggio.

Osservazione 1.4. È noto che nei mercati reali esistono delle possibilità di arbitraggio. Tuttavia tali occasioni sono rare, difficili da trovare e durano per una quantità molto ristretta di tempo. Inoltre, di solito, è possibile ottenere solamente piccoli guadagni dagli arbitraggi dovuti a situazioni reali. Per tutti questi motivi è ragionevole modellizzare mercati in cui non vi siano arbitraggi.

Infine definiamo un'opzione (o derivato) come un contratto, che è possibile comprare o vendere, il cui valore nel tempo dipende dal valore di uno o più attivi con rischio (detti sottostanti).

Nei principali modelli finanziari si pongono altre ragionevoli ipotesi che permettano di trattare il problema con strumenti matematici. Generalmente si assume che il mercato sia *privo di attriti*, ossia che non esistano costi legati alle transazioni. Inoltre si suppone possibile la *vendita allo scoperto* sia del sottostante che del derivato e si suppone che sia possibile scambiare frazioni arbitrariamente piccole di ogni titolo sul mercato. Esattamente

come nel caso di NA, queste ipotesi non sono completamente soddisfatte nei mercati reali, ma costituiscono una buona approssimazione, tale da poter dar vita ad un modello matematico verosimile ed utilizzabile in pratica. D'ora in avanti daremo per soddisfatte queste ipotesi, senza ricordarle di volta in volta.

I problemi di maggiore interesse in finanza matematica sono sostanzialmente tre: il *pricing* di opzioni, l'*hedging* (copertura) di opzioni e il *calcolo delle greche*; il problema del pricing consiste nel riuscire a trovare dei prezzi di opzioni in maniera coerente con le ipotesi del modello, in particolare senza violare l'ipotesi di assenza di arbitraggio. Il problema dell'*hedging* invece si occupa di stabilire una strategia di portafoglio, consistente nell'acquisto e nella vendita di uno o più sottostanti, che replichi il valore nel tempo di una o più opzioni. Infine il calcolo delle greche è un problema strettamente legato alla strategia di copertura di opzioni e verrà spiegato nel dettaglio in seguito.

A volte, in casi molto semplici, è possibile stabilire il prezzo di alcune opzioni servendosi solamente dell'ipotesi NA.

Esempio 1.5. *Sia fissata una scadenza $T > 0$ e si consideri un sottostante con processo di prezzi dato da $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$. Sia inoltre fissato un valore di strike $K > 0$. È dunque possibile definire un'opzione di payoff*

$$\Phi(S_T) = S_T - K,$$

ossia un contratto che, a scadenza, vale una quantità di denaro pari alla differenza tra il prezzo del sottostante e lo strike fissato (tale valore può essere anche negativo). Dato il prezzo iniziale del sottostante S_0 siamo interessati a scoprire il prezzo equo iniziale a cui questo derivato può essere acquistato o venduto.

Utilizzando solamente l'ipotesi di assenza di arbitraggio è possibile dire che l'unico prezzo di non arbitraggio dell'opzione, $\Pi(\Phi)$, è dato da

$$\Pi(\Phi) = S_0 - Ke^{-rT}. \tag{1.2}$$

Per dimostrarlo procediamo per assurdo. Supponiamo che il contratto sia scambiato, all'istante $t = 0$, ad un prezzo $Q > \Pi(\Phi)$. È dunque possibile agire sul mercato nel seguente modo:

- *all'istante $t = 0$ si vende un contratto Φ e si incassa la quantità Q di denaro. Inoltre si prende in prestito la quantità $S_0 - Q$ di denaro dalla banca (se tale quantità è negativa vuol dire che si stanno prestando soldi alla banca) e si investe, insieme al ricavato della vendita del contratto, per acquistare uno stock di sottostante, pagando S_0 .*
- *Al tempo $t = T$ si estingue il debito con la banca, restituendo i soldi presi in prestito con l'aggiunta degli interessi, per un totale di $(S_0 -$*

$Q)e^{rT}$. Si vende lo stock al prezzo S_T e si esercita il contratto, pagando la quantità di denaro $S_T - K$.

- Avendo restituito tutti i soldi alla banca e non avendo usato capitale iniziale, abbiamo costruito un portafoglio autofinanziato con valore iniziale nullo, ossia $V_0 = 0$. Inoltre abbiamo pagato $(S_0 - Q)e^{rT}$ alla banca e $S_T - K$ al sottoscrittore del contratto e abbiamo guadagnato S_T dalla vendita dello stock. Ne segue che il valore finale del portafoglio è dato da:

$$\begin{aligned} V_T &= S_T - (S_T - K) - (S_0 - Q)e^{rT} \\ &= e^{rT}(Q - S_0 - Ke^{-rT}) = e^{rT}(Q - \Pi(\Phi)) > 0. \end{aligned}$$

Nel caso $Q > \Pi(\Phi)$, abbiamo costruito un arbitraggio. Nel caso $Q < \Pi(\Phi)$ si può costruire un portafoglio a costo zero prendendo le stesse posizioni del caso precedente, ma di segno opposto. È facile verificare che tale strategia produce nuovamente un ritorno V_T strettamente positivo indipendentemente dal valore S_T , ossia un arbitraggio. Dunque l'unico prezzo possibile di non arbitraggio è dato da (1.2).

Definizione 1.6.

- Un'opzione Call di scadenza T e strike K è un'opzione di payoff

$$\Phi(S_T) = (S_T - K)^+.$$

- Un'opzione Put di scadenza T e strike K è un'opzione di payoff

$$\Phi(S_T) = (K - S_T)^+.$$

Grazie all'ovvia relazione $a = a^+ + (-a)^+$, possedere una Call e aver venduto una Put a strike K (o, come si dice in gergo finanziario, il lungo di una Call e il corto di una Put) equivale a possedere un contratto Φ descritto nell'esempio (1.5) di strike K . Dalla relazione (1.2) e dalla linearità dell'operatore prezzo segue la prossima Proposizione, chiamata *Put-Call parity*:

Proposizione 1.7. (Put-Call Parity) Siano P e C i prezzi rispettivamente di una Put e di una Call di scadenza T e strike K . Allora vale

$$C - P = S_0 - Ke^{-rT}.$$

In generale però non è possibile determinare in maniera univoca il prezzo di un'opzione a partire solamente dall'ipotesi NA. Infatti se cercassimo delle formule analitiche per il prezzo di una Call o di una Put potremmo trovare diversi livelli di prezzi di non arbitraggio, tutti tali da rispettare la Put-Call

parity. È dunque necessario aggiungere delle ipotesi e dei vincoli al modello per ottenere questi prezzi. Il modo usato in finanza per risolvere questo problema è quello di definire le dinamiche dei prezzi, ossia di descrivere il comportamento dei prezzi dei sottostanti attraverso un'equazione differenziale stocastica (per approfondimenti sulle SDE si veda la fine del prossimo capitolo). Generalmente l'introduzione di un modello consente di trovare esplicitamente delle strategie di copertura e, di conseguenza, di ricavare i prezzi delle opzioni.

Definizione 1.8. *Un modello è detto completo se ogni opzione è replicabile, ossia se data un'opzione esiste una strategia di portafoglio che, per ogni tempo $t \in [0, T]$, abbia lo stesso valore dell'opzione.*

Nei prossimi paragrafi definiremo ed esamineremo i principali modelli usati generalmente in finanza: il modello di Black & Scholes, i modelli a volatilità locale e i modelli a volatilità stocastica. Questi modelli verranno definiti ed esaminati ma, in generale, non verranno date delle dimostrazioni dei Teoremi. Tutte le dimostrazioni possono essere trovate, ad esempio, nel libro di Bjork [9].

1.2 Il Modello di Black & Scholes

Nel modello di Black & Scholes si suppone che esista un unico sottostante con rischio, con processo di prezzi $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$, che soddisfi l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = x, \end{cases} \quad (1.3)$$

dove μ e σ sono delle costanti reali, $\sigma > 0$ e $\{W_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ è un processo di Wiener standard unidimensionale. Sostanzialmente si suppone che il prezzo futuro del sottostante sia determinato da una componente deterministica, che cresce nel tempo con coefficiente dipendente da μ , e da una componente aleatoria, data da un rumore bianco (il processo di Wiener) con varianza determinata dal parametro σ . I parametri μ e σ sono chiamati rispettivamente *drift* e *volatilità*.

Passando al logaritmo in (1.3) si trova una soluzione esplicita dell'equazione. Tale soluzione è data, per ogni $t \in [0, T]$, da

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right). \quad (1.4)$$

1.2.1 Il Teorema di Girsanov e la probabilità Risk-Neutral

Per lo studio del modello di Black & Scholes è di fondamentale importanza il Teorema di Girsanov, di cui diamo l'enunciato.

Teorema 1.9. (Girsanov) *Sullo spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{F}, P) sia $\{\vartheta_t\}_{t \in [0, T]}$ un processo adattato tale che $\int_0^T \vartheta_s^2 ds < +\infty$ quasi certamente. Sia L_t l'unica soluzione dell'equazione differenziale stocastica*

$$\begin{cases} dL_t = L_t \vartheta_t dW_t \\ L_0 = 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

ossia $L_t = \exp\left(\int_0^t \vartheta_s dW_s - \int_0^t \frac{\vartheta_s^2}{2} ds\right)$, per ogni $t \in [0, T]$. Supponiamo, inoltre, che valga $E^P[L_T] = 1$. Allora, definita la nuova misura di probabilità Q come $Q = L_T \cdot P$, si ha che sotto Q il processo

$$\left\{ W_t - \int_0^t \vartheta_s ds \right\}_{t \in [0, T]}$$

è un processo di Wiener standard unidimensionale.

Inoltre per ogni probabilità Q' equivalente a P esiste un processo $\{\vartheta'_t\}_{t \in [0, T]}$ con le proprietà sopra enunciate tale che, detta L'_t la soluzione di

$$\begin{cases} dL'_t = L'_t \vartheta'_t dW_t \\ L'_0 = 1, \end{cases} \quad (1.6)$$

si ha che $Q' = L'_T \cdot P$.

Osservazione 1.10. *Spesso la condizione $E^P[L_T] = 1$ del Teorema di Girsanov non è facile da verificare. Molto spesso, nella pratica, si controlla che sia verificata la **condizione di Novikov**, ossia che valga*

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \vartheta_s^2 ds \right) \right] < +\infty. \quad (1.7)$$

La condizione di Novikov è sufficiente ma non necessaria affinché sia vero che $E^P[L_T] = 1$ (ossia esistono casi in cui la condizione di Novikov non è verificata ma il Teorema di Girsanov è comunque applicabile).

Utilizzando il Teorema di Girsanov è possibile trovare una misura di probabilità equivalente a P sotto la quale il processo di prezzi scontati $\{\tilde{S}_t\}_{t \in [0, T]}$ sia una martingala. Questa nuova misura di probabilità denotata con Q , è detta *probabilità Risk-Neutral* o anche *probabilità martingala*. Questa misura di probabilità è di estrema importanza in finanza matematica, in quanto rappresenta lo strumento pratico con cui è possibile effettuare delle simulazioni numeriche per ottenere i prezzi. Inoltre, sotto Q , le dinamiche (1.3) diventano

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = x, \end{cases} \quad (1.8)$$

dove r è il tasso di interesse costante. È molto interessante notare che, sotto la probabilità Risk-Neutral, le dinamiche dei prezzi sono indipendenti dai loro coefficienti di drift. Sostanzialmente succede che tutti gli attivi rischiosi crescono, in media, come un bond; questa crescita è però disturbata dal processo di Wiener moltiplicato per la volatilità, che quindi determina il livello di rischio legato al processo di prezzi del sottostante. Questo è il motivo per cui, in finanza, il coefficiente di drift non riveste particolare importanza, mentre la volatilità è di importanza cruciale sia per lo sviluppo della teoria che per l'utilizzo pratico.

1.2.2 Il Pricing e l'Hedging nel modello di Black & Scholes

Nel modello di Black & Scholes vale il seguente importante Teorema:

Teorema 1.11. (Teorema di Valutazione Risk-Neutral) *Sia $h \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Allora esiste uno ed un solo portafoglio autofinanziato replicante tale che $V_T = h$. Inoltre, per ogni $t \in [0, T]$, si ha che*

$$V_t = E^Q \left[\frac{h}{e^{r(T-t)}} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

In particolare $V_0 = E^Q \left[\frac{h}{e^{rT}} \right]$.

Il Teorema di valutazione Risk-Neutral è importante per due motivi: come prima cosa dice che il modello di Black & Scholes è completo. La seconda informazione utile che dà è il valore del portafoglio replicante all'istante $t = 0$. Dunque, usando l'ipotesi NA, si deduce che il valore V_0 deve coincidere con il prezzo dell'opzione rappresentata da h all'istante $t = 0$. Il Teorema fornisce uno strumento *pratico* per il calcolo di tale prezzo, in quanto è sufficiente calcolare (o approssimare) la speranza di una variabile aleatoria di cui si conoscono le dinamiche (infatti i derivati hanno valore che è una funzione del prezzo del sottostante).

Inoltre, nel modello di Black & Scholes, i prezzi di molti derivati possono essere calcolati in maniera più esplicita, attraverso delle formule analitiche che dipendono solamente da parametri noti del modello.

Teorema 1.12. *Supponiamo che $h = \Phi(S_T)$ e sia $V_t = F(t, S_t)$ il valore all'istante t del portafoglio che replica h . Allora, per ogni Y una variabile normale standard unidimensionale, si ha*

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{\Omega} \Phi \left(x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma Y \sqrt{T-t} \right) \right) dQ.$$

Inoltre, se $F \in C^{1,2}$, si ha che la quantità di sottostante posseduta nel portafoglio autofinanziato replicante all'istante t , quando $S_t = x$, è pari a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x).$$

Il Teorema precedente risolve il problema dell'hedging nel modello di Black & Scholes: il portafoglio replicante si ottiene attraverso la strategia del *delta hedging*, ossia possedendo in ogni istante una quantità di sottostante pari alla derivata della funzione prezzo del derivato rispetto al prezzo del sottostante. Ovviamente questo portafoglio replicante non è perfettamente utilizzabile in pratica. Infatti, per avere una copertura del rischio perfetta, sarebbe necessario effettuare scambi in maniera continua nel tempo, senza pagare alcun costo di transazione. Il seguente Corollario del Teorema (1.12) fornisce le formule analitiche per il calcolo del prezzo di Call e Put:

Corollario 1.13. *Siano fissati un tempo $T > 0$ e uno strike $K > 0$. Allora, detti $C(t, x)$ e $P(t, x)$ i prezzi di una Call e una Put di scadenza T e strike K al tempo t e con livello di prezzo $S_t = x$, si ha:*

- $C(t, x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$
- $P(t, x) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - xN(-d_1),$

dove

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria normale standard e

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

È interessante notare come il prezzo di tali opzioni sia indipendente dal livello del coefficiente di drift. La volatilità invece gioca un ruolo fondamentale in queste formule.

1.2.3 Le Greche

Data un'opzione con funzione payoff Φ di scadenza $T > 0$, vogliamo studiare come cambia il prezzo dell'opzione per piccole variazioni di uno dei parametri del modello. In particolare, nel modello di Black & Scholes, i parametri interessanti sono quattro: il tasso di interesse r , il prezzo iniziale del sottostante S_0 , la volatilità σ e il tempo t . Si può calcolare la derivata parziale del prezzo dell'opzione rispetto a ognuno di questi parametri; tali derivate vengono dette *greche* (in quanto spesso vengono indicate con una lettera greca).

Definizione 1.14. *Sia $\Pi(\Phi)(r, S_0, \sigma)$ il prezzo dell'opzione con payoff Φ al tempo $t = 0$, con tasso di interesse costante r , volatilità σ e valore del sottostante pari a S_0 . Allora definiamo:*

- il **Delta** dell'opzione come $\Delta = \frac{\partial \Pi(\Phi)}{\partial S_0}(r, S_0, \sigma);$

- il **Gamma** dell'opzione come $\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi(\Phi)}{\partial S_0^2}(r, S_0, \sigma)$;
- il **Rho** dell'opzione come $\rho = \frac{\partial \Pi(\Phi)}{\partial r}(r, S_0, \sigma)$;
- il **Vega** dell'opzione come $\mathcal{V} = \frac{\partial \Pi(\Phi)}{\partial \sigma}(r, S_0, \sigma)$;
- il **Theta** dell'opzione come $\Theta = \frac{\partial \Pi(\Phi)}{\partial t}(r, S_0, \sigma)$;

È possibile definire molte altre greche, considerando le derivate di ordini superiori. Inoltre, vista la definizione di Δ , si capisce perché la strategia di copertura del paragrafo precedente era stata battezzata *delta hedging*.

Le greche sono molto importanti da un punto di vista pratico, in quanto aiutano il *trader* (ossia colui che gestisce posizioni con rischio ed opzioni per una società o una banca) a quantificare gli errori che si commettono nel considerare costanti alcuni parametri del modello. Infatti, anche se fosse possibile avere una copertura teorica perfetta attraverso il delta hedging, non si avrebbe nessuna garanzia o copertura se il tasso di interesse (costante nel modello) dovesse subire un piccolo cambiamento o se la volatilità del sottostante non fosse costantemente uguale a σ .

Se si possiede una formula analitica per il prezzo dei derivati (come, ad esempio, nel Corollario (1.13)), il calcolo delle greche consiste nel fare delle derivate. Nella maggior parte dei modelli utilizzati in finanza però non vi sono formule esplicite per il prezzo delle opzioni; di conseguenza è necessario trovare soluzioni alternative, facendo uso solamente della espressione del prezzo data dal Teorema di valutazione Risk-Neutral (1.11). I problemi riguardanti il calcolo delle greche verranno ripresi e ampiamente discussi all'interno del capitolo 4.

Osservazione 1.15. *Una generalizzazione del modello di Black & Scholes si ottiene supponendo che il drift e la volatilità possano essere funzioni deterministiche del tempo sufficientemente regolari, ossia*

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t \\ S_0 = x. \end{cases} \quad (1.9)$$

In questo caso tutta la teoria sviluppata sino ad ora rimane valida, a patto di sostituire in tutte le formule analitiche i termini dipendenti dal tempo con degli integrali. Ad esempio, in questo modello, la formula (1.4) diventa

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \right).$$

1.3 I Modelli a Volatilità Locale

Come visto nel paragrafo precedente, nel modello di Black & Scholes si assume che la volatilità del sottostante considerato sia un numero reale, costante nel tempo e indipendente dal livello di prezzo del sottostante stesso. Purtroppo tale ipotesi è piuttosto inverosimile: nella realtà, infatti, si nota che il coefficiente di volatilità tende a cambiare nel tempo e, generalmente, ad innalzarsi quando il prezzo del sottostante subisce significativi cambiamenti. Questo fenomeno, chiamato *effetto di asimmetria* (o *skewness*), suggerisce l'introduzione di modelli più sofisticati, che riescano a modellizzare una superficie di volatilità non costante. La prima, e più semplice, soluzione a questo problema consiste nell'introduzione dei modelli a volatilità locale. Un modello è detto a volatilità locale se il processo di prezzi $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ segue le dinamiche

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = x, \end{cases} \quad (1.10)$$

dove $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ è un processo di Wiener standard unidimensionale e

$$\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Sotto opportune ipotesi è possibile garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione di (1.10) (si veda il paragrafo 2.3.1).

Applicando il Teorema di Girsanov (1.9) si ottiene una nuova misura di probabilità Q , la probabilità Risk-Neutral, sotto la quale i prezzi scontati dei sottostanti sono delle martingale. Inoltre tale probabilità è unica e, sotto Q , le dinamiche del prezzo (1.10) hanno coefficiente di drift costante e pari al tasso di interesse r .

Anche per questi modelli è possibile dimostrare che vale il Teorema di valutazione Risk-Neutral (1.11). Pertanto, per ogni $h \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, esiste un unico portafoglio autofinanziato replicante tale che

$$V_t = e^{-r(T-t)} E^Q [h | \mathcal{F}]. \quad (1.11)$$

Non esiste un analogo del Teorema (1.12) che fornisca esplicitamente delle formule di pricing e delle strategie di copertura. In questa situazione un buon modo per approssimare il prezzo dell'opzione di payoff $\Phi(S_T)$ è quello di utilizzare una simulazione Monte Carlo: per calcolare il prezzo $\Pi(\Phi) = V_0$ si simula al computer il prezzo del sottostante per molte volte, si calcola il valore che avrebbe l'opzione al tempo T con i prezzi simulati e si moltiplicano i risultati ottenuti per e^{-rT} . Si considera poi la media aritmetica di

tutti i valori ottenuti e, per la Legge di Grandi Numeri, questa converge a $E^Q[e^{-rT}\Phi(S_T)] = V_0$.

Attraverso simulazioni Monte Carlo di questo tipo si ottengono risultati piuttosto affidabili, con una velocità di convergenza dell'ordine di $n^{-1/2}$.

Osserviamo che le greche Δ , il Γ , il ρ e il Θ continuano ad essere ben definite mentre \mathcal{V} non è più definibile come fatto in precedenza, in quanto non ha senso derivare rispetto alla funzione di volatilità. Il \mathcal{V} a cui siamo interessati corrisponde alla variazione del prezzo dell'opzione quando si effettua uno spostamento parallelo dell'intera superficie di volatilità. Inoltre per i modelli a volatilità locale, dove non abbiamo scritture analitiche dei prezzi delle opzioni, le greche non possono essere più ottenute mediante il calcolo di una derivata. Ne segue che, anche in questo caso, le tecniche da usare sono differenti da quelli presentate nel modello di Black & Scholes. Queste verranno presentate più nel dettaglio all'interno del quarto capitolo.

1.4 I Modelli a Volatilità Stocastica

Un'altra classe di modelli che risolve il problema della *skew* della superficie di volatilità è quella dei modelli a volatilità stocastica, in cui si suppone che anche la volatilità del sottostante considerato sia un processo stocastico, definito da un'equazione differenziale stocastica. Si suppone di avere un sottostante con processo dei prezzi $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ e con processo di volatilità $\{\sigma_t\}_{t \in [0, T]}$, che seguano le dinamiche

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t, \sigma_t)dt + \lambda(t, S_t, \sigma_t)dW_t^1 \\ d\sigma_t = \nu(t, S_t, \sigma_t)dt + \zeta(t, S_t, \sigma_t)dW_t^2, \end{cases} \quad (1.12)$$

dove W_t^1 e W_t^2 sono due processi di Wiener unidimensionali con coefficiente di correlazione costante ρ . Inoltre si suppone di conoscere i valori iniziali del prezzo e della volatilità, S_0 e σ_0 rispettivamente. Scegliendo diverse funzioni μ , λ , ν e ζ si ottengono modelli differenti, che in letteratura vengono chiamati con nomi differenti.

I modelli a volatilità stocastica sono sensibilmente più complessi dei modelli esaminati in precedenza e bisogna procedere con molta cautela quando li si studia. Infatti, già nei casi più semplici, le proprietà di base di esistenza e unicità della soluzione non sono facili da trattare e dimostrare. Inoltre i modelli a volatilità stocastica non sono completi; intuitivamente questo accade poiché, avendo fornito alla volatilità una propria fonte aleatoria, si ha un eccesso di casualità nel modello e non è più possibile costruire portafogli replicanti.

Ci occuperemo solamente del modello di Heston, probabilmente il più usato nella pratica.

1.4.1 Il modello di Heston

Nel modello di Heston il prezzo S e la volatilità v seguono le dinamiche

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \nu \sqrt{v_t} d\tilde{W}_t, \end{cases} \quad (1.13)$$

dove $\{W_t^1\}_{t \in [0, +\infty)}$ e $\{\tilde{W}_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ sono due processi di Wiener standard correlati, con coefficiente di correlazione pari a ρ . I parametri che caratterizzano il modello di Heston sono cinque: il valore iniziale della volatilità, v_0 , detto *volatilità di breve*, il *coefficiente di correlazione* ρ , il termine θ , detto *volatilità di lungo*, il parametro κ , chiamato *coefficiente di mean reversion* e la costante ν , la cosiddetta *vol of vol*. Ognuno di questi cinque parametri gioca un ruolo fondamentale nel modello e contribuisce a determinare la forma della superficie di volatilità.

Anche per il modello di Heston, come per i modelli a volatilità locale, non esistono delle formule analitiche per il calcolo dei prezzi. Generalmente si ricorre a metodi Monte Carlo, simulando dapprima il processo di volatilità e, successivamente, il processo di prezzi.

Infine, anche in questo modello, alcune greche richiedono una nuova definizione: infatti si può ancora dare senso alle greche Δ , Γ , ρ e Θ , ma ci si trova in difficoltà se si vuole dare un senso alla derivata rispetto alla volatilità. Quello che si fa in pratica è definire diverse greche che, in modi differenti, prendono il ruolo della \mathcal{V} nel modello di Black & Scholes.

Definizione 1.16. Sia $\Pi(\Phi)$ il prezzo dell'opzione con payoff Φ al tempo $t = 0$, con tasso di interesse costante r , volatilità di breve v_0 , volatilità di lungo θ e valore del sottostante pari a S_0 . Allora definiamo:

- il \mathcal{V}^{v_0} dell'opzione come $\mathcal{V}^{v_0} = \frac{\partial \Pi(\Phi)}{\partial v_0}$;
- il \mathcal{V}^θ dell'opzione come $\mathcal{V}^\theta = \frac{\partial \Pi(\Phi)}{\partial \theta}$;

Inoltre vorremmo definire un'ulteriore quantità legata alla volatilità. Tale quantità, chiamata \mathcal{V}^{v_t} , verrà definita nel paragrafo (5.2.5).

Capitolo 2

Il calcolo di Malliavin

In questo capitolo verranno esposti alcuni dei risultati principali della teoria del calcolo di Malliavin. Il calcolo di Malliavin è un ramo della probabilità avanzata nato piuttosto di recente, con lo scopo di estendere alcune idee e risultati della teoria dell'integrazione stocastica di Itô. Ben presto però ci si rese conto che alcuni risultati di tale teoria, ed in particolare alcune formule di integrazione per parti, potessero essere usati in differenti contesti di tipo pratico. In particolare ci si rese conto che l'uso della derivata di Malliavin e dell'integrale di Skorohod, di cui tratteremo in questo capitolo, potesse essere di grande aiuto per ottenere delle nuove formule per il calcolo delle greche di opzioni.

Nei prossimi paragrafi daremo alcune definizioni ed enunceremo importanti risultati di tale teoria. Per le dimostrazioni si rimanda al libro di Nualart [28].

2.1 La Derivata di Malliavin

Lo scopo di questa sezione è quello di definire una nuova derivata su un opportuno sottoinsieme di $L^2(\Omega)$. D'ora in avanti, considerato un elemento $h \in L^2([0, T])$, useremo la notazione

$$W(h) = \int_0^T h(s) dW_s.$$

Definizione 2.1. $F \in L^2(\Omega)$ è una funzione liscia se esistono $h_1, \dots, h_n \in L^2([0, T])$ e una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tali che, per ogni $\omega \in \Omega$,

$$F(\omega) = \varphi(W(h_1)(\omega), \dots, W(h_n)(\omega)).$$

Inoltre si richiede che, per ogni vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, esistano delle costanti reali e positive c_α e b_α tali che sia soddisfatta

$$|\partial_\alpha \varphi(x)| \leq c_\alpha \exp(b_\alpha |x|).$$

2. Il calcolo di Malliavin

Data $h \in L^2([0, T])$ e F funzione liscia denoteremo con D_h il termine

$$D_h F = \int_0^T D_s F h(s) ds.$$

Denotiamo con \mathcal{L} l'insieme di tutte le funzioni lisce.

Osservazione 2.2. Si noti che data $F \in \mathcal{L}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $p \in [1, +\infty)$ si ha

$$\partial_\alpha F = \partial_\alpha \varphi(W(h_1)(\omega), \dots, W(h_n)(\omega)) \in L^p(\Omega).$$

Definizione 2.3. Definiamo l'operatore D sull'insieme delle funzioni lisce \mathcal{L} ,

$$D : \mathcal{L} \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T])$$

in modo che, data $F(\omega) = \varphi(W(h_1)(\omega), \dots, W(h_n)(\omega)) \in \mathcal{L}$, si abbia

$$(DF)_t(\omega) = D_t F(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(W(h_1)(\omega), \dots, W(h_n)(\omega)) h_i(t).$$

È importante notare che l'operatore D trasforma variabili aleatorie in processi stocastici. Inoltre dalla definizione risulta evidente che, per ogni $h \in L^2([0, T])$, si ha

$$D_t(W(h))(\omega) = h(t).$$

Dunque sugli elementi deterministici di $L^2([0, T])$ l'operatore D agisce come l'inverso dell'integrale stocastico di Itô.

Esempio 2.4. Per ogni $t, s \in [0, T]$ vale

$$D_s(W_t) = I_{[0, t]}(s).$$

Infatti $W_t = \int_0^t dW_s = W(I_{[0, t]})$.

Ci interessa cercare di estendere l'operatore D a una classe di funzioni più ampia delle semplici funzioni lisce. A tal proposito diamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.5. Dati due spazi topologici X, Y , l'operatore $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ si dice chiuso se il suo grafico

$$\Gamma = \{(x, A(x)) \in X \times Y \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$$

è chiuso nella topologia prodotto di $X \times Y$.

L'operatore A è detto chiudibile se esiste un'estensione chiusa di A .

La chiusura di A è la minima estensione chiusa di A , corrispondente alla chiusura del grafico Γ .

Vale il seguente importante Teorema:

Teorema 2.6. *L'operatore D è chiudibile.*

Lo strumento fondamentale per la dimostrazione del Teorema (2.6) è il seguente Teorema, detto di Gaveaux-Trauber, che fornisce un'utile formula di integrazione per parti:

Teorema 2.7. (Gaveaux-Trauber) *Siano $F, G \in \mathcal{L}$ e $h \in L^2([0, T])$. Allora vale la formula*

$$E[(D_h F)G] = -E[FD_h G + FGW(h)].$$

Siamo finalmente in grado di dare la definizione di derivata di Malliavin:

Definizione 2.8. *Il dominio della chiusura dell'operatore D definito in (2.3) verrà denotato con il simbolo $\mathbb{D}^{1,2}$. È possibile munire l'insieme $\mathbb{D}^{1,2}$ della norma*

$$\|F\|_{1,2} = \left(\int_{\Omega} F^2 dP + \int_{\Omega} dP \int_0^T (D_t F)^2 dt \right)^{1/2}.$$

La chiusura dell'operatore D (che continueremo a denotare con la lettera D)

$$D : \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T])$$

*è detta **derivata di Malliavin**.*

È importante osservare che lo spazio $\mathbb{D}^{1,2}$ munito della norma $\|\cdot\|_{1,2}$ è completo. Dunque la coppia $(\mathbb{D}^{1,2}, \|\cdot\|_{1,2})$ è uno spazio di Banach. Nella scrittura $\mathbb{D}^{1,2}$ il primo indice dell'apice indica che stiamo parlando di funzioni derivabili una volta, mentre il secondo ci ricorda che il dominio è contenuto in $L^2(\Omega)$.

Osservazione 2.9. *Lo spazio $\mathbb{D}^{1,2}$ non è un'algebra. Infatti non è detto che prodotto di elementi di $\mathbb{D}^{1,2}$ sia ancora in $\mathbb{D}^{1,2}$.*

È possibile ripetere tutta la costruzione fatta fino ad ora lavorando, al posto che in $L^2(\Omega)$, in $L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$. In questo modo si ottiene l'insieme $\mathbb{D}^{1,p}$ e la derivata

$$D : \mathbb{D}^{1,p} \subset L^p(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T]).$$

L'insieme $\mathbb{D}^{1,p}$ può essere munito della norma

$$\|F\|_{1,p} = \left(\int_{\Omega} |F|^p dP + \int_{\Omega} dP \left(\int_0^T (D_t F)^2 dt \right)^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Inoltre è possibile definire derivate di ordine superiore al primo in maniera induttiva, partendo dalla definizione di derivata prima appena data. Si

2. Il calcolo di Malliavin

avranno dunque, per ogni $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$, dei domini $\mathbb{D}^{q,p}$ e degli operatori chiusi

$$D^q : \mathbb{D}^{q,p} \subset L^p(\Omega \times [0, T]^{(q-1)}) \rightarrow L^2(\Omega \times [0, T]^q).$$

Si noti che ogni derivata successiva introduce un nuovo parametro temporale.

Torniamo ora ad occuparci dell'insieme $\mathbb{D}^{1,2}$, che sarà lo spazio su cui otterremo i risultati principali. Uno strumento molto importante per calcolare le derivate di Malliavin è il seguente Teorema, detto *regola della catena*:

Teorema 2.10. (Regola della Catena) *Siano $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{D}^{1,2}$ e sia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ con derivate prime limitate. Allora $\varphi(F_1, \dots, F_n) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e si ha*

$$D_t \varphi(F_1, \dots, F_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F_1, \dots, F_n) D_t F_i.$$

Concludiamo questo paragrafo enunciando due proposizioni che ci torneranno utili in futuro.

Proposizione 2.11. *Sia F una funzione \mathcal{F}_t -misurabile che appartenga a $\mathbb{D}^{1,2}$. Allora $D_s F$ è \mathcal{F}_t -misurabile e $D_s F = 0$ se $s > t$.*

Proposizione 2.12. *Sia $(F_n)_{n \geq 1}$ una successione di elementi di $\mathbb{D}^{1,2}$. Supponiamo che $F_n \rightarrow F$ in $L^2(\Omega)$ e che la successione $(DF_n)_{n \geq 1}$ sia limitata in $L^2(\Omega \times [0, T])$. Allora $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e DF_n converge debolmente a DF in $L^2(\Omega \times [0, T])$.*

2.2 L'Integrale di Skorohod

Utilizzando gli strumenti definiti nel paragrafo precedente siamo in grado di definire un nuovo operatore, detto integrale di Skorohod, che estenderà l'integrale stocastico di Itô ad una classe di processi non adattati. Il modo corretto per definire tale operatore è quello di vederlo come l'operatore aggiunto della derivata di Malliavin:

Definizione 2.13. *Il processo $Z \in L^2(\Omega \times [0, T])$ appartiene a $\text{Dom}(\delta)$ se l'applicazione*

$$F \mapsto E \left[\int_0^T D_s F Z_s ds \right]$$

definita su $\mathbb{D}^{1,2}$ è tale che esista una costante $c \in \mathbb{R}$ per cui valga

$$\left| E \left[\int_0^T D_s F Z_s ds \right] \right| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'operatore (o integrale) di Skorohod è la funzione

$$\delta : \text{Dom}(\delta) \subset L^2(\Omega \times [0, T]) \rightarrow L^2(\Omega)$$

definita, per ogni processo $Z \in \text{Dom}(\delta)$, dalla relazione

$$\langle F, \delta(Z) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle DF, Z \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])}. \quad (2.1)$$

Adotteremo la convenzione

$$\delta(Z) = \int_0^T Z_s \delta W_s,$$

per ogni $Z \in \text{Dom}(\delta)$.

È facile mostrare che l'operatore di Skorohod è ben definito ed è un operatore chiuso. La relazione (2.1) va intesa nel senso

$$\langle F, \delta(Z) \rangle_{L^2(\Omega)} = E[F\delta(Z)] = E\left[\int_0^T D_s F Z_s ds\right] = \langle DF, Z \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])}.$$

Si noti che, mentre la derivata di Malliavin trasforma variabili aleatorie in processi stocastici, l'integrale di Skorohod riduce un processo stocastico ad una singola variabile aleatoria.

Il seguente Teorema afferma che l'operatore di Skorohod è un'estensione dell'integrale di Itô ai processi non adattati.

Teorema 2.14. *Sia $Z \in L^2(\Omega \times [0, T])$ un processo adattato. Allora $Z \in \text{Dom}(\delta)$ e vale*

$$\delta(Z) = \int_0^T Z_s dW_s.$$

Inoltre abbiamo bisogno di alcuni risultati che ci dicano come calcolare gli integrali di Skorohod nei casi in cui si abbia a che fare con processi non adattati. I due Teoremi che seguono sono molto importanti e verranno spesso usati nei capitoli successivi:

Teorema 2.15. *Supponiamo che $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, che $Z \in \text{Dom}(\delta)$ e che valga la condizione*

$$E\left[F^2 \left(\int_0^T Z_s \delta W_s\right)^2 + \left(\int_0^T D_s F Z_s ds\right)^2\right] < +\infty. \quad (2.2)$$

Allora il processo $FZ \in \text{Dom}(\delta)$ e si ha

$$\int_0^T (FZ_s) \delta W_s = F \int_0^T Z_s \delta W_s - \int_0^T D_s F Z_s ds. \quad (2.3)$$

2. Il calcolo di Malliavin

Questo Teorema ci dice che è necessario prestare attenzione quando si vogliono calcolare gli integrali di Skorohod; infatti anche le variabili aleatorie appartenenti a $\mathbb{D}^{1,2}$ danno un contributo, attraverso le loro derivate di Malliavin, nel calcolo dell'integrale.

Teorema 2.16. *Supponiamo che, per ogni $t \in [0, T]$, $Z_t \in \mathbb{D}^{1,2}$, esista una versione di $D_s Z_t(\omega)$ misurabile su $\Omega \times [0, T]^2$ e che si abbia*

$$\int_0^T \|Z_s\|_{1,2}^2 ds < +\infty.$$

Allora $(\delta(Z)) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e si ha

$$D_t \left(\int_0^T Z_s \delta W_s \right) = Z_t + \int_0^T D_t Z_s \delta W_s. \quad (2.4)$$

Dunque la derivata di Malliavin non si comporta esattamente come l'inverso dell'integrale di Skorohod (e, di conseguenza, dell'integrale di Itô). Il Teorema (2.16) ci dice che gli operatori D e δ sono legati da una relazione del tipo

$$D\delta = \delta D + I,$$

dove il termine I rappresenta l'operatore identità.

2.3 Equazioni Differenziali Stocastiche

In questa sezione enunceremo i risultati principali sull'esistenza, unicità e derivabilità di soluzioni di equazioni differenziali stocastiche.

Definizione 2.17. *Un'equazione differenziale stocastica (SDE) è un'equazione del tipo*

$$\begin{cases} dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \\ X_0 = V, \end{cases} \quad (2.5)$$

dove $\{W_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ è un processo di Wiener standard adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ e V è una variabile aleatoria \mathcal{F}_0 -misurabile. Le soluzioni di una SDE sono dette *diffusioni*.

2.3.1 Esistenza ed unicità delle equazioni differenziali stocastiche

Le equazioni differenziali stocastiche, come le equazioni differenziali ordinarie, sotto opportune ipotesi di regolarità dei coefficienti ammettono una sola soluzione. Infatti gli strumenti standard che si usano nella dimostrazione del Teorema di esistenza e unicità di equazioni differenziali ordinarie, ossia

il Teorema delle contrazioni e il Teorema della approssimazioni successive, sono utilizzabili anche in contesto stocastico (a meno di apportare alcuni opportuni cambiamenti).

Teorema 2.18. (Esistenza e unicità della soluzione) *Supponiamo che esista una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $t \in [0, +\infty)$ e $x, y \in \mathbb{R}$*

$$(1) |a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq |x - y|;$$

$$(2) |a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|);$$

$$(3) Z \in L^2(\Omega).$$

Allora la SDE (2.5) ammette un'unica soluzione sull'intervallo $[0, T]$, per ogni $T \geq 0$. L'unicità si intende nel senso che, se $\{X_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ e $\{Y_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ sono due soluzioni di (2.5), allora, per ogni $t \in [0, T]$, $X_t = Y_t$ P-q.c. Inoltre tale soluzione $\{X_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ soddisfa

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \right] \leq +\infty.$$

La dimostrazione di questo Teorema è fondamentale per tutta la teoria sulle equazioni differenziali stocastiche e può essere trovata su qualsiasi testo che tratti di SDE (si veda, ad esempio, [30]).

Definizione 2.19. *Assegnata una filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, +\infty)}$, definiamo l'insieme*

$$\mathcal{E} = \left\{ \{X_t\}_{t \in [0, T]} \text{ processo } \mathcal{F}_t\text{-adattato e continuo} : E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \right] < +\infty \right\}.$$

Definiamo inoltre

$$\|X\|_{\mathcal{E}} = \left(E \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

È facile verificare che $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ è una norma e che lo spazio $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ è uno spazio di Banach.

Per la dimostrazione di (2.18) si usano il Teorema delle Contrazioni, il Lemma di Gronwall e la disuguaglianza di Doob.

2.3.2 Differenziabilità della diffusione nel senso di Malliavin

Il Teorema enunciato in questo paragrafo garantisce che la soluzione di (2.5), sotto opportune ipotesi, è derivabile secondo Malliavin. Questo risultato sarà di cruciale importanza in seguito quando, al fine di trovare delle espressioni delle greche di opzioni, deriveremo il processo di prezzi secondo la derivata di Malliavin.

Teorema 2.20. (Derivabilità della soluzione secondo Malliavin) *Sia $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ una soluzione di (2.5), tale che i coefficienti $a(x, t)$ e $b(x, t)$ siano di classe C^1 rispetto a x ed abbiano derivata limitata. Allora $X_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ per ogni $t \in [0, T]$. Inoltre, per ogni $t < s$, la derivata $D_s X_t$ soddisfa q.c.*

$$D_s X_t = b(s, X_s) + \int_s^t \frac{\partial a}{\partial x}(u, X_u) D_s X_u du + \int_s^t \frac{\partial b}{\partial x}(u, X_u) D_s X_u dW_u$$

e, per $s \geq t$, $D_s X_t = 0$ q.c.

La dimostrazione di questo Teorema si basa sul metodo delle approssimazioni successive. Per una dimostrazione si veda [28].

2.3.3 Differenziabilità della diffusione rispetto al dato iniziale

Prendiamo in considerazione la SDE (2.5) e, fissato un valore reale x , poniamo la variabile aleatoria V identicamente uguale a x . Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi di regolarità del Teorema (2.18) e chiamiamo X_t^x l'unica soluzione dell'equazione differenziale stocastica, ossia

$$X_t^x = x + \int_0^t a(s, X_s^x) ds + \int_0^t b(s, X_s^x) dW_s.$$

Siamo interessati a capire se la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ x &\longmapsto X_t^x \end{aligned}$$

è derivabile. Per fare questo utilizzeremo il seguente Lemma.

Lemma 2.21. *Sia B uno spazio di Banach e sia data una funzione continua*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times B &\rightarrow B \\ (x, X) &\mapsto F(x, X), \end{aligned}$$

tale che

$$(1) \exists K \in [0, 1) \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in B,$$

$$\|F(x, X) - F(x, Y)\|_B \leq K \|X - Y\|_B;$$

$$(2) \exists F_x : \mathbb{R} \times B \rightarrow B \text{ continua e } F_X : \mathbb{R} \times B \rightarrow \mathcal{L}(B, B) \text{ continua tale che, } \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in B \text{ vale}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + hy, X + hY) - F(x, X)}{h} = F_x(x, X)y + F_X(x, X)Y.$$

(3) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $X, Y \in B$, la funzione

$$\begin{aligned} & [0, 1] \rightarrow B \\ & \xi \mapsto F((1 - \xi)x + \xi y, (1 - \xi)X + \xi Y) \end{aligned}$$

è differenziabile con continuità e vale, $\forall \xi \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} F((1 - \xi)x + \xi y, (1 - \xi)X + \xi Y) &= \\ &= F_x((1 - \xi)x + \xi y, (1 - \xi)X + \xi Y)(y - x) \\ &\quad + F_X((1 - \xi)x + \xi y, (1 - \xi)X + \xi Y)(Y - X). \end{aligned}$$

Allora, detto X^x il punto fisso di $X \rightarrow F(x, X)$, l'applicazione $x \rightarrow X^x$ è differenziabile e si ha

$$\frac{\partial X^x}{\partial x} = F_x(x, X^x) + F_X(x, X^x) \frac{\partial X^x}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Osservazione 2.22. Il punto fisso di $X \rightarrow F(x, X)$ esiste grazie al punto (1) del Teorema precedente e al Teorema delle Contrazioni.

Per la dimostrazione di questo fatto si veda [14]
Ritorniamo ora al nostro caso, cioè a dimostrare la derivabilità di

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ x &\longmapsto X_t^x. \end{aligned}$$

A questo scopo consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ (x, X) &\mapsto x + \int_0^t a(s, X_s^x) ds + \int_0^t b(s, X_s^x) dW_s. \end{aligned}$$

Nella dimostrazione del Teorema (2.18) si prova che, scelto un tempo T_1 sufficientemente piccolo, la funzione F è una contrazione nella seconda variabile. Dunque, scelto $B = \mathcal{E}$, possiamo applicare il Lemma (2.21) alla nostra funzione F (non è difficile verificare che le altre ipotesi sono soddisfatte).

Ne segue che, lavorando sull'intervallo $[0, T_1]$, l'applicazione $x \rightarrow X^x$ è derivabile come funzione in \mathcal{E} e, posto

$$Y_t^x = \frac{\partial X^x}{\partial x},$$

si ha

$$Y_t^x = 1 + \int_0^t \frac{\partial a}{\partial X}(s, X_s^x) Y_s^x ds + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial X}(s, X_s^x) Y_s^x dW_s. \quad (2.7)$$

2. Il calcolo di Malliavin

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto sugli intervalli $[iT_1, (i+1)T_1]$, per ogni $i \in \mathbb{N}$. Dunque il processo Y_t^x è ben definito su tutto l'intervallo $[0, T]$ e verifica la relazione (2.7). D'ora in avanti il processo Y_t^x verrà chiamato *processo di variazione prima*.

Per semplificare le notazioni eviteremo di scrivere l'apice 'x' quando è evidente dal contesto quale sia il punto iniziale considerato.

Proposizione 2.23. *Il processo di variazione prima Y_t è invertibile.*

Dimostrazione. Definiamo il processo $\{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ come la soluzione di

$$Z_t = 1 - \int_0^t Z_s \left[\frac{\partial a}{\partial X}(s, X_s) - \left(\frac{\partial b}{\partial X}(s, X_s) \right)^2 \right] ds - \int_0^t Z_s \frac{\partial b}{\partial X}(s, X_s) dW_s.$$

Utilizzando la formula di Itô si ha

$$\begin{aligned} Z_t Y_t &= 1 + \int_0^t Z_s \frac{\partial b}{\partial X}(s, X_s) Y_s dW_s + \int_0^t Z_s \frac{\partial a}{\partial X}(s, X_s) Y_s ds \\ &\quad - \int_0^t Z_s \frac{\partial b}{\partial X}(s, X_s) Y_s dW_s - \int_0^t Z_s \left(\frac{\partial b}{\partial X}(s, X_s) \right)^2 Y_s ds \\ &\quad - \int_0^t Z_s \left[\frac{\partial a}{\partial X}(s, X_s) - \left(\frac{\partial b}{\partial X}(s, X_s) \right)^2 \right] Y_s ds, \end{aligned}$$

che dimostra $Z_t Y_t = 1$. Dunque Y_t è invertibile e Z_t è il suo inverso. \square

Teorema 2.24. *Siano a e b di classe C^1 con derivata limitata e sia X la soluzione di (2.5). Allora, per ogni $0 \leq s \leq t$ vale*

$$D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} b(s, X_s). \quad (2.8)$$

Dimostrazione. Dal Teorema (2.20) abbiamo che

$$D_s X_t = b(s, X_s) + \int_s^t \frac{\partial a}{\partial X}(u, X_u) D_s X_u du + \int_s^t \frac{\partial b}{\partial X}(u, X_u) D_s X_u dW_u.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} Y_t Y_s^{-1} b(s, X_s) &= b(s, X_s) + \int_s^t \frac{\partial a}{\partial X}(u, X_u) Y_u Y_s^{-1} b(s, X_s) du \\ &\quad + \int_s^t \frac{\partial b}{\partial X}(u, X_u) Y_u Y_s^{-1} b(s, X_s) dW_u. \end{aligned}$$

Dunque i processi $\{D_s X_t\}_{t \in [0, T]}$ e $\{Y_t Y_s^{-1} b(s, X_s)\}_{t \in [0, T]}$ soddisfano la stessa equazione differenziale stocastica con stesse condizioni iniziali. Quindi è sufficiente fare uso del Teorema (2.18) per ottenere la tesi. \square

Osservazione 2.25. *Tutti i risultati esposti sulle soluzioni di SDE possono essere estesi al caso multidimensionale. I risultati sono molto simili, si complicano le notazioni ma le idee usate nelle dimostrazioni sono le stesse. Nel caso d -dimensionale il processo di variazione prima Y_t è una matrice quadrata d -dimensionale e soddisfa*

$$dY_t = a'(t, X_t)Y_t dt + \sum_{i=0}^d b'_i(t, X_t)Y_t dW_t^i,$$

dove a' denota la matrice Jacobiana del vettore a e b'_i denota lo Jacobiano della i -esima colonna della matrice b . Inoltre $Y_0 = I_d$, dove I_d denota la matrice identità d -dimensionale.

Capitolo 3

Pricing di opzioni con barriera

Lo scopo di questo capitolo è quello di discutere alcuni problemi relativi al pricing di opzioni con barriera.

3.1 Il pricing nel modello di Black & Scholes

In questo paragrafo ricaveremo esplicitamente il prezzo di opzioni con barriera nel caso più semplice possibile, ossia nel modello di Black & Scholes. Supponiamo dunque di avere un sottostante, i cui prezzi sono dati dal processo $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ che segue le dinamiche

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = x, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove μ , σ e x sono delle costanti reali e $\sigma > 0$.

Supponiamo inoltre che esista un 'riskless asset' B_t , tale che

$$\begin{cases} dB_t = r B_t dt \\ B_0 = 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

dove la costante r è il tasso di interesse.

Definiamo un T -contratto come un'opzione il cui payoff dipende solamente dal prezzo del sottostante al tempo di esercizio T .

Consideriamo dunque un T -contratto Z della forma

$$Z = \Phi(S_T).$$

Inoltre denotiamo con $F(t, s; T, \Phi)$ il prezzo di Z al tempo t , quando $S_t = s$.

3. Pricing di opzioni con barriera

Diamo ora una definizione formale della versione *down-and-out continua* di Z .

Innanzitutto definiamo cosa è un *hitting time*:

Definizione 3.1. Sia $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ un processo stocastico reale a traiettorie continue e sia $y \in \mathbb{R}$. L' *hitting time* di X a y è definito come la variabile aleatoria

$$\tau_y(\omega) = \inf \{t \geq 0 \mid X_t(\omega) = y\}.$$

Il processo assorbito a y è definito come

$$X_t^{(y)} = X_{t \wedge \tau_y}.$$

Fissiamo un numero reale $L < x$, che rappresenta una barriera inferiore, e definiamo Z_{LO} la versione *down-and-out continua* del contratto Z nel seguente modo:

$$Z_{LO} = Z I_{\{\tau_L > T\}},$$

dove τ_L rappresente l' *hitting time* del processo $\{S_t\}_{t \in [0, \infty)}$ alla barriera L e $I_{\{\tau_L > T\}}$ è la funzione indicatrice dell'insieme $\{\tau_L > T\}$.

In termini intuitivi, il contratto *down-and-out continuo* ha il payoff esattamente uguale a Z nel caso in cui il prezzo del sottostante rimanga al di sopra della barriera L durante tutto l'intervallo di tempo $[0, T]$. Invece il contratto cessa di esistere se la barriera viene raggiunta in un qualsiasi istante precedente alla scadenza del contratto.

Nella scrittura ' Z_{LO} ' la lettera 'O' sta per 'contratto out', la lettera 'L' indica il livello di barriera e il fatto che le lettere siano scritte a pedice denota il fatto che la barriera sia di tipo 'down'. Inoltre la barriera è di tipo continuo in quanto il monitoraggio del prezzo avviene in tutto l'intervallo temporale $[0, T]$.

Analogamente può essere definita la versione *down-and-in continua* di Z con barriera L come

$$Z_{LI} = Z I_{\{\tau_L \leq T\}}.$$

Questo contratto viene attivato nel momento in cui il prezzo del sottostante colpisce la barriera L , in un qualsiasi istante $t \in [0, T]$. Il suo valore è invece nullo se la barriera non viene mai raggiunta.

Allo stesso modo l'opzione *up-and-out continua* relativa a Z , con barriera $U > x$, è definita come

$$Z^{UO} = Z I_{\{\tau_U > T\}}.$$

Infine la versione *up-and-in continua* di Z con barriera $U > x$ è data da

$$Z^{UI} = Z I_{\{\tau_U \leq T\}}.$$

Lo scopo di questa sezione è quello di fornire un prezzo $F_{LO}(t, s; T, \Phi)$ alla versione *down-and-out continua* dell'opzione conoscendo la funzione di prezzo $F(t, s; T, \Phi)$ dell'opzione di partenza.

Osservazione 3.2. È evidente che possedere un'opzione Z_{LI} e un'opzione Z_{LO} è equivalente a possedere un'opzione Z . Grazie a questa osservazione ci sarà sufficiente calcolare il prezzo dell'opzione down-and-out per ottenere il prezzo della opzione down-and-in. Infatti, grazie alla linearità dell'operatore 'prezzo' e alla conoscenza del prezzo di Z , si ha che il prezzo dell'opzione down-and-in, $F_{LI}(t, s; T, \Phi)$, è dato da

$$F_{LI}(t, s; T, \Phi) = F(t, s; T, \Phi) - F_{LO}(t, s; T, \Phi),$$

per ogni $L < x$.

La stessa osservazione è valida per i contratti di tipo up.

Osservazione 3.3. All'interno dei prossimi paragrafi le barriere verranno sempre intese come continuamente monitorate in $[0, T]$, tranne quando esplicitamente specificato.

3.1.1 Richiami e Preliminari

In questo paragrafo richiamiamo alcuni concetti preliminari su alcune distribuzioni di probabilità legate alle opzioni con barriera.

Definizione 3.4. Dato un processo reale $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$, i processi di massimo e di minimo relativi ad X sono definiti rispettivamente, per ogni $t \in [0, +\infty)$, come:

$$M_t^{(X)} = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s,$$

$$m_t^{(X)} = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s.$$

L'apice X verrà soppresso nelle situazioni in cui risulterà evidente il processo considerato.

Osservazione 3.5. Nel nostro caso, in cui il processo considerato è il prezzo S_t , il limite superiore e inferiore possono essere sostituiti rispettivamente con il massimo e il minimo. Questo poiché le traiettorie nel modello di Black & Scholes sono continue.

Denotiamo con $\varphi(x; \mu, \sigma)$ la densità di una variabile aleatoria normale di media μ e varianza σ^2 , ossia

$$\varphi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Per comodità la densità della variabile normale standard $\varphi(x; 0, 1)$ sarà denotata semplicemente con $\varphi(x)$ e la sua funzione di ripartizione sarà denotata con $N(x)$, ossia

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

3. Pricing di opzioni con barriera

Consideriamo ora un processo di Itô uscente dal punto α e definito dalle dinamiche

$$\begin{cases} dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \\ X_0 = \alpha. \end{cases} \quad (3.3)$$

Fissato un valore reale β , siamo interessati a conoscere la distribuzione del processo $\{X_t^{(\beta)}\}_{t \in [0, \infty)}$, ossia del processo X_t assorbito a β .

Certamente la legge di $X_t^{(\beta)}$ non è diffusa: infatti il punto $x = \beta$ ha una massa non nulla, pari alla probabilità che la variabile aleatoria X_t abbia colpito il valore β in un qualsiasi momento precedente a t . Oltre l'atomo $x = \beta$, la distribuzione ha una densità, con supporto $(\beta, +\infty)$ se $\alpha > \beta$ o supporto $(-\infty, \beta)$ se $\alpha < \beta$.

La Proposizione seguente, riguardante la densità del processo assorbito, è il risultato principale di questa sezione.

Proposizione 3.6. *La densità $f^{(\beta)}(x; t, \alpha)$ del processo assorbito $X_t^{(\beta)}$, dove X_t è definito dalle dinamiche 3.3, è data da*

$$f^{(\beta)}(x; t, \alpha) = \varphi(x; \mu t + \alpha, \sigma \sqrt{t}) - \exp\left\{-\frac{2\mu(\alpha - \beta)}{\sigma^2}\right\} \varphi(x; \mu t - \alpha + 2\beta, \sigma \sqrt{t}).$$

Il supporto di questa densità è l'intervallo $(\beta, +\infty)$ se $\alpha > \beta$ e l'intervallo $(-\infty, \beta)$ se $\alpha < \beta$.

Per una dimostrazione di questa proposizione si veda il [11].

3.1.2 Espressione analitica del prezzo del contratto 'down-and-out'

Al fine di trovare il prezzo $F_{LO}(t, s; T, \Phi)$ del contratto Z_{LO} , introduciamo la funzione $\Phi_L(x) = \Phi(x)I_{(L, +\infty)}(x)$.

È evidente che tale operazione è lineare, ossia per ogni α, β reali e per ogni coppia di T -contratti Φ e Ψ si ha

$$(\alpha\Phi + \beta\Psi)_L = \alpha\Phi_L + \beta\Psi_L.$$

Siamo ora in grado di poter enunciare e dimostrare il risultato principale di questa sezione, che fornisce un'espressione analitica per il prezzo dei contratti di tipo down-and-out:

Teorema 3.7. *Sia $Z = \Phi(S_T)$ un T -contratto. Allora la funzione di prezzo F_{LO} del corrispondente contratto down-and-out continuo Z_{LO} con barriera L è dato, da*

$$F_{LO}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi_L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi_L\right), \quad (3.4)$$

per ogni $s > L$, dove $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo porre $t = 0$. Assumiamo dunque che $S_0 = s > L$ e ricordiamo che il processo $S^{(L)}$ denota il processo S con possibile assorbimento alla barriera L .

Calcolando il prezzo come speranza scontata del payoff sotto la probabilità risk neutral Q , si ha

$$\begin{aligned} F_{LO}(0, s; \Phi) &= e^{-rT} E^Q [Z_{LO}] \\ &= e^{-rT} E^Q [\Phi(S_T) I_{\{\tau_L > T\}}] \\ &= e^{-rT} E^Q [\Phi_L(S_T^{(L)})]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'ultima identità segue dal fatto che possedere un contratto down-and-out è equivalente ad avere un contratto di payoff $\Phi_L(S_T^{(L)})$; infatti, nel caso in cui il prezzo non abbia mai raggiunto la barriera L , $S_T^{(L)} = S_T$ e $\Phi_L(S_T) = \Phi(S_T)$. Invece, nel caso in cui esista $t \leq T$ tale che $S_t = L$, si ha che $S_T^{(L)} = L$ e $\Phi_L(S_T^{(L)}) = \Phi_L(L) = 0$.

Per avere la tesi ci rimane da calcolare l'ultima speranza, ossia

$$E^Q [\Phi_L(S_T^{(L)})] = \int_L^\infty \Phi_L(x) h(x) dx,$$

dove h è la funzione densità della variabile aleatoria $S_T^{(L)}$.

Il prezzo S_t segue le dinamiche (3.1) del modello di Black & Scholes, dunque da (1.4) si ha

$$S_T = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right\}$$

↓

$$S_T = \exp \{ \ln s + \tilde{r}T + \sigma W_T \} = e^{X_T},$$

dove il processo X è definito dalle equazioni

$$\begin{cases} dX_t = \tilde{r}dt + \sigma dW_t \\ X_0 = \ln s. \end{cases} \quad (3.6)$$

Dunque si ha

$$S_t^{(L)} = (\exp X)_t^{(L)} = \exp \{ X_t^{(\ln L)} \}$$

da cui, detta f la densità della variabile $X_T^{(\ln L)}$,

$$E^Q [\Phi_L(S_T^{(L)})] = \int_{\ln L}^\infty \Phi_L(e^x) f(x) dx.$$

3. Pricing di opzioni con barriera

Dalla Proposizione (3.6), con $\beta = \ln L$, segue che la densità f è data da

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) \\ &\quad - \exp\left\{-\frac{2\tilde{r}(\ln s - \ln L)}{\sigma^2}\right\} \varphi\left(x; \tilde{r}T - \ln s + 2\ln L, \sigma\sqrt{T}\right) \\ &= \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln\left(\frac{L^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right). \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} E^Q[\Phi_L(S_T^{(L)})] &= \int_{\ln L}^{\infty} \Phi_L(e^x) f(x) dx \\ &= \int_{\ln L}^{\infty} \Phi_L(e^x) \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) dx \\ &\quad - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} \int_{\ln L}^{\infty} \Phi_L(e^x) \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln\left(\frac{L^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_L(e^x) \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) dx \\ &\quad - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_L(e^x) \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln\left(\frac{L^2}{s}\right), \sigma\sqrt{T}\right) dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Il termine $\varphi(x; \tilde{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T})$ è la densità di $\ln(S_T)$ sotto la misura di probabilità Q , con $S_0 = s$. Dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_L(e^x) \varphi\left(x; \tilde{r}T + \ln s, \sigma\sqrt{T}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_L(S_T) dQ = E^Q[\Phi_L(S_T)]. \tag{3.8}$$

Analogamente, la densità del secondo integrale di (3.7) è la densità sotto Q di $X_T = \ln(S_T)$, con punto iniziale $S_0 = \frac{L^2}{s}$. Inserendo quest'ultima espressione e (3.8) nella formula (3.7), e sostituendo in (3.5), si ha

$$F_{LO}(0, s; \Phi) = F(0, s; \Phi_L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(0, \frac{L^2}{s}; \Phi_L\right),$$

che è esattamente la nostra tesi. \square

Dal Teorema (3.7) segue immediatamente il seguente Corollario:

Corollario 3.8. *Per ogni coppia di T -contratti Φ e Ψ e per ogni coppia di numeri reali α e β , vale la relazione*

$$F_{LO}(t, s; \alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha F_{LO}(t, s; \Phi) + \beta F_{LO}(t, s; \Psi).$$

Il contenuto del Teorema (3.7) è molto interessante: al fine di calcolare il prezzo di un'opzione con barriera sarà sufficiente calcolare il prezzo di ordinari T -contratti senza barriera.

3.1.3 Espressione analitica dei prezzi dei contratti 'up-and-out', 'down-and-in' e 'up-and-in'

Gli argomenti usati nel paragrafo precedente per trattare le opzioni down-and-out possono essere facilmente adattati al caso di opzioni up-and-out. A tal proposito definiamo $\Phi^U(x) = \Phi(x)I_{(-\infty, U)}(x)$; è dunque possibile enunciare il seguente Teorema, che ha dimostrazione quasi identica a quella di (3.7):

Teorema 3.9. *Sia $Z = \Phi(S_T)$ un T -contratto. Allora la funzione di prezzo F^{UO} del corrispondente contratto down-and-out continuo Z^{UO} con barriera U è dato, da*

$$F^{UO}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi^U) - \left(\frac{U}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{U^2}{s}; \Phi^U\right), \quad (3.9)$$

per ogni $U > s$, dove $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Infine è immediato scrivere le formule analitiche per i prezzi di opzioni di tipo 'in':

Teorema 3.10. *Il prezzo F_{LI} della versione down-and-in di Z e il prezzo F^{UI} della versione up-and-in di Z sono dati dalle formule:*

$$F_{LI}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi^L) + \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi^L\right), \quad (3.10)$$

$$F^{UI}(t, s; \Phi) = F(t, s; \Phi_U) + \left(\frac{U}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{U^2}{s}; \Phi_U\right), \quad (3.11)$$

per ogni $U > s$ e $L < s$, dove $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Dimostrazione. La dimostrazione, per la versione down-and-in del contratto, segue subito dall'osservazione (3.2); infatti, utilizzando la linearità della funzione prezzo, il Teorema (3.7) e l'identità $\Phi = \Phi_L + \Phi^L$, si ha che:

$$\begin{aligned} F_{LI}(t, s; T, \Phi) &= F(t, s; T, \Phi) - F_{LO}(t, s; T, \Phi) \\ &= F(t, s; T, \Phi_L + \Phi^L) - F(t, s; T, \Phi^L) + \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi^L\right) \\ &= F(t, s; T, \Phi_L) + \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; \Phi^L\right). \end{aligned}$$

La formula (3.11) si ottiene con gli stessi passaggi applicati alle opzioni di tipo 'in'. \square

3.1.4 Esempi e Applicazioni

In questa sezione forniamo le formule esplicite per calcolare il prezzo delle più comuni opzioni con barriera. Lo scopo è quello di mostrare come le formule del paragrafo precedente possano essere usate in pratica, quando l'opzione Z è un dato T -contratto.

Cominciamo introducendo alcune notazioni.

Definizione 3.11. *Siano fissati una scadenza T , uno strike K e una barriera L , tutti strettamente positivi. Definiamo i seguenti T -contratti:*

- *Forward con scadenza T :*

$$ST(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+; \quad (3.12)$$

- *Zero coupon bond con scadenza T :*

$$BO(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+; \quad (3.13)$$

- *Opzione digitale:*

$$H(x; L) = I_{(L, +\infty)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+; \quad (3.14)$$

- *Opzione Call europea:*

$$C(x, K) = (x - K)^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.15)$$

Con facili argomenti di assenza di arbitraggio e attraverso l'uso del Teorema di valutazione Risk-Neutral (1.11), è molto semplice calcolare il payoff delle opzioni appena definite.

Proposizione 3.12. *I prezzi dei contratti (3.12)-(3.15) al tempo t sono dati dalle funzioni*

$$ST(t, s) = s;$$

$$BO(t, s) = e^{-r(T-t)};$$

$$H(t, s; L) = e^{-r(T-t)} N \left[\frac{\tilde{r}(T-t) + \ln(s/L)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right];$$

$$C(t, s; K) = sN[d_1] - Ke^{-r(T-t)}N[d_2];$$

dove d_1 e d_2 sono definiti come

$$d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}.$$

Cominciamo calcolando il prezzo di un forward down-and-out con barriera L :

Proposizione 3.13. *Il prezzo di un forward down-and-out con barriera L e scadenza T è dato dalla formula*

$$\begin{aligned} ST_{LO}(t, s) = & L \cdot \mathbf{H}(t, s; L) - L \cdot \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} \mathbf{H}\left(t, \frac{L^2}{s}; L\right) \\ & + \mathbf{C}(t, s; L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} \mathbf{C}\left(t, \frac{L^2}{s}; L\right). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal Teorema (3.7) segue che

$$F_{LO}(t, s; ST) = F(t, s; ST_L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; ST_L\right). \quad (3.16)$$

È immediato convincersi che ST_L , ossia il payoff di un forward troncato al di sotto del livello L , è equivalente alla somma di una quantità L di opzioni digitali con barriera L e di una Call di strike L . Dunque

$$ST_L(x) = L \cdot H(x; L) + C(x; L). \quad (3.17)$$

Inserendo (3.17) in (3.16) si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{ST}_{LO}(t, s) = & F_{LO}(t, s; ST(\cdot)) \\ = & F(t, s; L \cdot H(\cdot, L) + C(\cdot, L)) \\ & - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; L \cdot H(\cdot, L) + C(\cdot, L)\right) \\ = & L \cdot F(t, s; H(\cdot, L)) - L \cdot \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; H(\cdot, L)\right) \\ & + F(t, s; C(\cdot, L)) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; C(\cdot, L)\right). \end{aligned}$$

che è la tesi. □

Siamo dunque in grado di calcolare il prezzo di un forward down-and-out avendo a disposizione solamente i prezzi della Proposizione (3.12).

Esaminiamo ora il caso del prezzo di una Call europea, sempre di tipo down-and-out continuo, di barriera L e strike K . Dovremo trattare separatamente i due casi $K \geq L$ e $K < L$.

Proposizione 3.14. *Il prezzo di una Call europea down-and-out con scadenza T è dato da:*

3. Pricing di opzioni con barriera

- per $L \leq K$:

$$C_{LO}(t, s; K) = C(t, s; K) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} C\left(t, \frac{L^2}{s}; K\right) \quad (3.18)$$

- per $L > K$:

$$C_{LO}(t, s; K) = C(t, s; L) + (L - K)H(t, s; L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} \left\{ C\left(t, \frac{L^2}{s}; L\right) + (L - K)H\left(t, \frac{L^2}{s}; L\right) \right\}. \quad (3.19)$$

Dimostrazione. Esaminiamo prima il caso $L \leq K$.

$$C(x, K) = (x - K)^+ = (x - K)^+ I_{(L, \infty)}(x) = C_L(x).$$

Quindi, dal Teorema (3.7), si ha

$$C_{LO}(t, s; K) = F(t, s; C(\cdot; K)) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} F\left(t, \frac{L^2}{s}; C(\cdot, K)\right),$$

che prova (3.18).

Passiamo ora al caso $L > K$. Si verifica facilmente che possedere un contratto di payoff $(x - K)^+ I_{[L, +\infty)}(x)$ è equivalente a possedere una Call di strike L e $L - K$ opzioni digitali di barriera L , ovvero

$$C_L(x; K) = C(x; L) + (L - K)H(x; L).$$

Inserendo quest'ultima espressione in (3.16) e usando la linearità della funzione prezzo abbiamo la tesi. \square

Enunciamo e dimostriamo la seguente semplice proposizione, che ci fornisce il prezzo di un bond down-and-out:

Proposizione 3.15. *Il prezzo B_{LO} di un bond down-and-out di maturità T e barriera inferiore L è:*

$$B_{LO}(t, s) = H(t, s; L) - \left(\frac{L}{s}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} H\left(t, \frac{L^2}{s}; L\right). \quad (3.20)$$

Dimostrazione. Per ottenere la tesi è sufficiente utilizzare (3.7) e osservare che

$$BO_L(x) = I_{(L, +\infty)} = H(x, L), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

\square

Concludiamo questo paragrafo osservando che esiste una relazione tra il prezzo delle Call e il prezzo delle Put con barriera, analoga alla Put-Call parity (1.7). Tale relazione è detta *Put-Call parity per le opzioni con barriera*.

Proposizione 3.16. *Il prezzo della Put europea down-and-out P_{LO} di strike K e scadenza T è dato dalla funzione:*

$$P_{LO}(t, s; K) = K \cdot B_{LO}(t, s) - ST_{LO}(t, s) + C_{LO}(t, s; K), \quad (3.21)$$

dove B_{LO} , ST_{LO} e C_{LO} sono dati rispettivamente dalle proposizioni (3.15), (3.13) e (3.14).

Dimostrazione. Dalla relazione $y = y^+ - (-y)^+$, valida per ogni y reale, segue che

$$\begin{aligned} P(x; K) &= (K - x)^+ = K - x + (x - K)^+ \\ &= K \cdot BO(x) - ST(x) + C(x; K). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Per ottenere la tesi è dunque sufficiente applicare la funzione prezzo al primo e all'ultimo termine di (3.22), usare la linearità della funzione prezzo e il Corollario (3.8). \square

3.2 Una correzione per il pricing di alcune opzioni con barriera discreta

Nel paragrafo precedente siamo stati in grado di trovare delle formule analitiche per prezzare opzioni con barriera continuamente monitorate nel modello di Black & Scholes. Nella realtà però accade molto spesso di dover fornire dei prezzi per delle opzioni con barriera monitorate giornalmente o settimanalmente. Ovviamente in questi casi, in cui il monitoraggio avviene in un insieme finito di tempi, le formule esplicite di pricing ricavate per barriere continue non possono essere utilizzate. Inoltre alcuni esperimenti numerici, come quelli fatti da Chance (1994), Fleasaker (1992) e Kat-Verdonk (1995), mostrano che il prezzo di un'opzione con barriera monitorata giornalmente può differire sensibilmente dal prezzo della stessa opzione con barriera monitorata continuamente. È dunque necessario trovare soluzioni alternative per ricavare i prezzi di opzioni con barriere discrete.

Probabilmente il metodo migliore, nonché quello generalmente usato, è quello di effettuare una simulazione di tipo Monte Carlo, simulando il prezzo del sottostante ad ogni istante di monitoraggio e confrontando tale valore con il livello della barriera.

In questa sezione enuncieremo un Teorema che fornisce un metodo alternativo per prezzare alcune opzioni con barriera discreta nel caso del modello di Black & Scholes. Supponiamo dunque che il processo di prezzi $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ segua le dinamiche

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

con μ e σ costanti reali e positive. Sia inoltre fissato un valore iniziale S_0 e una barriera costante $H \neq S_0$ (se $S_0 > H$ avremo una barriera inferiore,

altrimenti avremo una barriera superiore). Supponiamo inoltre di avere $m + 1$ istanti di monitoraggio della barriera, $\{0 = t_0 < t_1 \cdots < t_m = T\}$, tali che $t_i - t_{i-1} = T/M$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Teorema 3.17. *Sia $\Pi(H)$ il prezzo di un'opzione Call down-and-in o down-and-out oppure di un'opzione Put up-and-in o up-and out di barriera H continuamente monitorata. Sia $\Pi_m(H)$ il prezzo della stessa opzione monitorata nell'insieme discreto di tempi $\{t_1 < \cdots < t_m = T\}$. Allora*

$$\Pi_m(H) = \Pi\left(H e^{\pm\beta\sigma\sqrt{T/m}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

dove il $+$ si usa quando $H > S_0$ e il $-$ quando $H < S_0$. Il termine β è definito come $\beta = -\frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,5826$, dove ζ è la funzione Zeta di Riemann.

Il Teorema dice che per utilizzare il prezzo dell'opzione continuamente monitorata come un'approssimazione del prezzo dell'opzione con monitoraggio discreto è necessario spostare la barriera del fattore $\exp\left(\beta\sigma\sqrt{T/m}\right)$, in modo da compensare parzialmente l'errore. Pertanto, come era prevedibile, si ha un'approssimazione tanto migliore quanto più fitto è l'insieme di tempi di monitoraggio.

La dimostrazione di questo risultato è piuttosto tecnica e verrà omessa. Per i dettagli si veda l'articolo di Broadie-Glasserman-Kou [12].

Osservazione 3.18. *È importante notare che il prezzo di un'opzione con barriera discretamente monitorata, nel modello di Black & Scholes, può essere espresso in forma chiusa in termini di probabilità normali multivariate. Purtroppo però la dimensione della normale multivariata coincide con il numero di monitoraggi m . Se il numero delle osservazioni è grande (come spesso accade nella pratica, nei casi di monitoraggi giornalieri), questo metodo diventa inapplicabile per problemi numerici.*

3.3 Un approccio numerico per il pricing di opzioni con barriere continue

Nella sezione (3.1) si è visto come, nel caso del modello di Black & Scholes unidimensionale, sia possibile ricavare delle espressioni analitiche per i prezzi di opzioni con una barriera costante. In un articolo del 1992 Kunimoto ed Ikeda trovarono una formula analitica per calcolare il prezzo di opzioni con doppia barriera costante (una superiore ed una inferiore), sempre nel modello di Black & Scholes, riuscendo ad esprimere tale prezzo come somma di una serie numerica (si veda [25]).

Tuttavia nei mercati reali vengono anche scambiate opzioni con barriere più sofisticate, come ad esempio barriere dipendenti dal tempo. Inoltre per derivati con valore dipendente dal livello di volatilità, tra cui le opzioni con

3.3 Un approccio numerico per il pricing di opzioni con barriere continue

barriera, per il pricing vengono usati dei modelli più avanzati di quello di Black & Scholes, come i modelli a volatilità locale o stocastica, in modo da tener conto del problema della 'skew' nella superficie di volatilità.

È pertanto inutile illudersi di poter trovare delle formule analitiche che risolvano il problema del pricing in ogni modello e con ogni tipo di barriera. Dunque, come spesso si fa in finanza, è preferibile cercare dei metodi numerici che approssimino i prezzi in maniera sufficientemente precisa. Nella pratica i metodi più comunemente usati sono quelli di tipo Monte Carlo. Purtroppo però, essendo le opzioni con barriera dei derivati *path dependent*, tali simulazioni non sempre si rivelano accurate quanto si vorrebbe.

Supponiamo ad esempio di voler ricavare il prezzo di un'opzione Φ up-and-out, continuamente monitorata sull'intervallo $[0, T]$, di barriera $U > S_0$. Come è noto, il prezzo di questa opzione sarà dato dalla speranza scontata del payoff sotto la misura di probabilità Risk-Neutral. Supponiamo dunque di voler calcolare tale speranza con un metodo Monte Carlo, ossia simulando molte volte il valore scontato del payoff alla scadenza T ed approssimando la speranza con una media aritmetica dei valori ottenuti (facendo dunque uso della legge dei grandi numeri). Per fare ciò dovremmo essere in grado di controllare se la traiettoria di prezzi da noi considerata, $\{S_t(\omega)\}_{t \in [0, T]}$, ha colpito la barriera U in un qualsiasi istante precedente a T . Ovviamente non è possibile simulare l'intera traiettoria di S nell'intervallo $[0, T]$; sarà dunque necessario considerare un sottoinsieme discreto di tempi $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ e controllare se $S_{t_i} < U$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Una volta posto uguale a zero il valore delle opzioni relative alle traiettorie che hanno superato la barriera in un certo $t \in \{t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$, è possibile effettuare la procedura Monte Carlo.

Tuttavia può succedere che la traiettoria $\{S_t(\omega)\}_{t \in [0, T]}$ abbia raggiunto e superato la barriera anche se $S_{t_i}(\omega) < U$ per ogni indice $i = 1, \dots, n$. Quindi il metodo Monte Carlo sovrapprezzerà l'opzione Φ , in quanto attribuirà un valore non nullo ai payoff di traiettorie che hanno intercettato la barriera U . È evidente che, se consideriamo il problema di un'opzione $\tilde{\Phi}$ di tipo 'in', il problema viene rovesciato e $\tilde{\Phi}$ viene sottoprezzata dal metodo Monte Carlo standard.

Una possibile strada per risolvere questo problema è quella di calcolare le probabilità $p_i(\omega)$ che il prezzo del sottostante abbia oltrepassato la barriera nell'intervallo (t_i, t_{i+1}) , conoscendo già il valore di $S_{t_i}(\omega)$ e di $S_{t_{i+1}}(\omega)$. Questo approccio è già stato preso in considerazione da Andersen e Brotherton-Ratcliffe ([2]) e da Beaglehole, Dybvig e Zhou ([7]). La loro idea fu quella di utilizzare la legge del massimo e del minimo di un ponte browniano (Brownian Bridge) per calcolare le probabilità p_i . Purtroppo però questo procedimento può essere usato solamente nel caso in cui le leggi siano esplicitamente conosciute, il che esclude molti casi interessanti, come ad esempio le barriere doppie.

Tuttavia i termini $\{p_i\}_{i=0, \dots, n-1}$, anche se non sempre calcolabili esatta-

mente, possono essere numericamente approssimati. Una volta ottenuta questa approssimazione è possibile introdurre un termine correttivo nella procedura di calcolo Monte Carlo che compensi l'errore di discretizzazione dell'intervallo di partenza $[0, T]$.

Il risultato presentato di seguito, tratto da un articolo di Baldi, Caramellino e Iovino, segue esattamente questo approccio per fornire una procedura alternativa di calcolo. I risultati che verranno presentati si basano sullo *Sharp Large Deviation Principle*, un risultato piuttosto avanzato della teoria delle grandi deviazioni. A causa della notevole quantità di prerequisiti necessari per comprendere a fondo le dimostrazioni, ci limiteremo a dare gli enunciati dei principali risultati e a commentare quanto ottenuto. Per le dimostrazioni si rimanda a [5].

3.3.1 Il caso di barriere dipendenti dal tempo nel modello di Black & Scholes

Supponiamo di avere un sottostante il cui processo di prezzi $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ sia guidato dalle dinamiche del modello di Black & Scholes, ossia

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S_0 = s_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

dove μ , σ e s_0 sono delle costanti positive e $\{W_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ è un processo di Wiener standard unidimensionale.

Sia Φ un T -contratto e supponiamo di avere due barriere dipendenti dal tempo, $\tilde{U}, \tilde{L} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, tali che $\tilde{U}(t) > \tilde{L}(t)$ per ogni $t \in [0, T]$. Siamo interessati a trovare il prezzo Π della versione 'out' di Φ con doppia barriera \tilde{L} e \tilde{U} , ossia (la speranza è calcolata sotto la misura di probabilità Risk-Neutral)

$$\Pi = E^{s_0} [e^{-rT} \Phi(S_T) I_{\{\Sigma > T\}}],$$

dove r denota il tasso di interesse (supposto costante) e

$$\Sigma(\omega) = \inf\{t \in [0, T] : S_t(\omega) = \tilde{L}(t) \text{ o } S_t(\omega) = \tilde{U}(t)\}.$$

Discretizziamo l'intervallo di tempi $[0, T]$, ossia scegliamo un insieme finito di tempi $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ tale che $t_i - t_{i-1} = \epsilon$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Poichè stiamo lavorando nel modello di Black & Scholes, da (1.4) è noto che, sotto la misura di probabilità Risk-Neutral

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \epsilon + \sigma (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right\}, \quad (3.24)$$

per ogni indice $i = 0, \dots, n - 1$.

Consideriamo il processo $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ tale che $X_t = \ln S_t$, per ogni $t \in [0, T]$,

3.3 Un approccio numerico per il pricing di opzioni con barriere continue

e definiamo le funzioni ausiliarie $U, L : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $L(t) = \ln \tilde{L}(t)$ e $U(t) = \ln \tilde{U}(t)$. È evidente che la probabilità che il processo S colpisca una barriera \tilde{L} (rispettivamente \tilde{U}) è uguale alla probabilità che X colpisca L (rispettivamente U).

Supponiamo di aver effettuato una simulazione del prezzo agli istanti $\{t_0 < t_1 \cdots < t_n\}$ e siano $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ i logaritmi dei prezzi ottenuti rispettivamente agli istanti $\{t_i\}_{i=1, \dots, n}$. Siamo interessati a calcolare le probabilità condizionate

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = P[\exists t \in (t_i, t_{i+1}) : X_t \in \{L(t), U(t)\} | X_{t_i} = x_i, X_{t_{i+1}} = x_{i+1}],$$

per ogni $i = 0, \dots, n-1$.

Come già osservato non è possibile dare un'espressione esplicita dei termini p_i^ϵ ; tuttavia è possibile descriverne il comportamento asintotico quando ϵ tende a 0.

Teorema 3.19. *Supponiamo che le funzioni U e L siano continue con derivate continue e Lipschitziane e supponiamo che $x_i, x_{i+1} \in (L(t_i), U(t_i))$. Definiamo i termini:*

$$Q(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}(U(t_i) - x_i)(U(t_i) - x_{i+1}) & \text{se } x_i + x_{i+1} > U(t_i) + L(t_i) \\ \frac{2}{\sigma^2}(x_i - L(t_i))(x_{i+1} - L(t_i)) & \text{se } x_i + x_{i+1} < U(t_i) + L(t_i) \end{cases} \quad (3.25)$$

e

$$R(x_i, x_{i+1}) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}(U(t_i) - x_i)U'(t_i) & \text{se } x_i + x_{i+1} > U(t_i) + L(t_i) \\ -\frac{2}{\sigma^2}(x_i - L(t_i))L'(t_i) & \text{se } x_i + x_{i+1} < U(t_i) + L(t_i). \end{cases} \quad (3.26)$$

Allora

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = \exp \left\{ -\frac{Q(x_i, x_{i+1})}{\epsilon} - R(x_i, x_{i+1}) \right\} (1 + O(\epsilon)).$$

Inoltre, se $x_{i+1} \in (U(t_i), U(t_{i+1}))$ oppure $x_{i+1} \in (L(t_{i+1}), L(t_i))$, allora

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = 1 + O(\epsilon). \quad (3.27)$$

Osservazione 3.20. *Il comportamento asintotico di $p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1})$ nel caso $x_i + x_{i+1} = U(t_i) + L(t_i)$ è più delicato da descrivere. Per i dettagli si veda la sezione 5 di [5].*

Il Teorema (3.19) è enunciato per opzioni con doppia barriera, indipendentemente dal fatto che esse siano di tipo 'in' o di tipo 'out'. Ovviamente, per ottenere la versione del Teorema (3.19) con barriera singola superiore è sufficiente porre $L(t) = -\infty$ (ossia $\tilde{L} = 0$), mentre per avere una barriera singola inferiore basta porre $U(t) = +\infty$ (ossia $\tilde{U} = +\infty$).

3. Pricing di opzioni con barriera

Esempio 3.21. *Nel caso particolare di una barriera superiore singola e costante U si ha*

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2 \epsilon} (U - x_i)(U - x_{i+1}) \right\} (1 + O(\epsilon)), \quad (3.28)$$

mentre nel caso di una barriera inferiore singola e costante L

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2 \epsilon} (L - x_i)(L - x_{i+1}) \right\} (1 + O(\epsilon)). \quad (3.29)$$

È interessante notare che in realtà il termine $(1 + O(\epsilon))$ può essere omissso in (3.28) e in (3.29). Infatti, in questo particolare caso, le probabilità p_i^ϵ possono essere calcolate esplicitamente (si veda [3]) e le stime del Teorema (3.19) risultano essere esatte.

Esempio 3.22. *Nel caso di una barriera singola superiore e lineare nel tempo, della forma $U(t) = U_1 + U_2 t$, si ha*

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2} (U_1 + U_2 t_i - x_i) \left[\frac{U_1 + U_2 t_i - x_{i+1}}{\epsilon} + U_2 \right] \right\} (1 + O(\epsilon)). \quad (3.30)$$

mentre nel caso di una barriera singola inferiore e lineare nel tempo, della forma $L(t) = L_1 + L_2 t$,

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2} (x_i - L_1 - L_2 t_i) \left[\frac{x_{i+1} - L_1 - L_2 t_i}{\epsilon} - L_2 \right] \right\} (1 + O(\epsilon)). \quad (3.31)$$

Anche in questo caso le probabilità (3.30) e in (3.31) sono esatte e il termine $(1 + O(\epsilon))$ può essere omissso.

Cerchiamo infine di capire come l'approssimazione della probabilità p_i^ϵ data dal Teorema (3.19) ci possa fornire il termine correttivo nella simulazione Monte Carlo. Prendiamo nuovamente in considerazione il T -contratto Φ e supponiamo di voler prezzare la sua versione 'out' con doppia barriera $\tilde{L}(t)$ e $\tilde{U}(t)$. Usando la (3.24) facciamo una simulazione numerica e troviamo i valori $\{S_{t_1}, \dots, S_{t_n}\}$.

Se esiste un indice i tale che $S_{t_i} \notin (L(t_i), U(t_i))$ sospendiamo la simulazione e poniamo a zero il valore dell'opzione.

Se invece $S_{t_i} \in (L(t_i), U(t_i))$ per ogni i , consideriamo i termini

$$p_i^\epsilon = \exp \left\{ -\frac{Q(\ln S_{t_i}, \ln S_{t_{i+1}})}{\epsilon} - R(\ln S_{t_i}, \ln S_{t_{i+1}}) \right\}. \quad (3.32)$$

Al passo i -esimo della simulazione con probabilità p_i^ϵ sospendiamo la simulazione e poniamo a zero il valore dell'opzione e con probabilità $1 - p_i^\epsilon$

3.3 Un approccio numerico per il pricing di opzioni con barriere continue

continuiamo normalmente la simulazione. Se dopo aver fatto questo procedimento per tutti gli n passi la simulazione non si è fermata, allora diamo all'opzione il valore

$$e^{-rT} \Phi(S_T)$$

e procediamo da capo con una nuova simulazione. Infine calcoliamo la media dei dati ottenuti per stimare il prezzo dell'opzione Π .

Questa nuova procedura di calcolo fornisce uno stimatore Monte Carlo non-distorto, utilizzabile in pratica per prezzare opzioni con barriera continue.

3.3.2 Generalizzazione a modelli più complessi

La procedura presentata nel paragrafo precedente può essere estesa in modo da essere adattata a modelli più generali, come ad esempio i modelli a volatilità locale. Supponiamo dunque che il prezzo S del sottostante abbia drift e volatilità dipendenti dal tempo e dal livello prezzo del sottostante stesso, ossia

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \\ S_0 = s_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

dove μ e σ soddisfano le ipotesi del Teorema (2.18) di esistenza e unicità della soluzione.

Come nel paragrafo precedente fissiamo un insieme di tempi $\{0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = T\}$ tale che $t_i - t_{i-1} = \epsilon$, per ogni $i = 1, \dots, n$, e siano $U(t)$ e $L(t)$ due barriere dipendenti dal tempo.

In questo contesto non è possibile esprimere S_t in una forma esplicita simile a (3.24). Tuttavia si può approssimare il processo $\{S_t\}_{t \in (t_i, t_{i+1})}$ con il processo di Eulero $\{S_t^\epsilon\}_{t \in (t_i, t_{i+1})}$ definito da

$$S_t^\epsilon = S_{t_i}^\epsilon + \mu(t, S_{t_i}^\epsilon)(t - t_i) + \sigma(t, S_{t_i}^\epsilon)(W_t - W_{t_i}).$$

A questo punto vorremmo ricavare un'espressione delle probabilità condizionali che S abbia colpito una barriera durante l'intervallo (t_i, t_{i+1}) date le osservazioni $S_{t_i} = s_i$, $S_{t_{i+1}} = s_{i+1}$. Poiché questa probabilità non è calcolabile nel caso generale di barriere doppie dipendenti dal tempo, una buona soluzione è quella di rimpiazzare la distribuzione condizionale di S in $[t_i, t_{i+1}]$ con la distribuzione di S^ϵ con coefficienti costanti $\mu_0 = \mu(t_i, s_i)$, $\sigma_0 = \sigma(t_i, s_i)$ e $S_{t_i}^\epsilon = s_i$.

In questo modo ci siamo ricondotti al caso del paragrafo precedente e possiamo usare il Teorema (3.19). In particolare possiamo utilizzare le stime delle probabilità di uscita date da

$$p_i^\epsilon(x_i, x_{i+1}) = \exp \left\{ -\frac{Q(x_i, x_{i+1})}{\epsilon} - R(x_i, x_{i+1}) \right\} (1 + O(\epsilon)),$$

dove Q ed R sono definiti rispettivamente da (3.25) e (3.26) con σ sostituito da σ_0 .

Si osservi che la procedura di calcolo sviluppata in questa sezione può essere applicata anche a barriere con un numero finito di discontinuità. Per fare ciò è sufficiente scegliere una partizione in modo che in ogni intervallo (t_i, t_{i+1}) le barriere non abbiano punti di discontinuità.

Osservazione 3.23. *A prima vista si potrebbe pensare che scegliere un ϵ molto piccolo quando le osservazioni sono molto vicine a una barriera possa ridurre l'errore complessivo dovuto all'approssimazione. Purtroppo però questo tipo di errore decade molto lentamente quindi, scegliendo un passo molto piccolo, si rischia solamente di commettere errori di stabilità numerica.*

Inoltre dalle simulazioni si vede come le approssimazioni siano sempre soddisfacenti, anche con passi di discretizzazione piuttosto grandi.

Osservazione 3.24. *È interessante osservare che se nel Teorema (3.19) si trascura il termine R (che corrisponde al termine di grande deviazione), ci si riduce ad avere un'approssimazione costante a tratti della barriera. Dunque il calcolo di R può essere tralasciato nel caso in cui le barriere abbiano un'inclinazione prossima allo zero. Se invece si ha a che fare con delle barriere con derivate significative non si può trascurare il contributo di R (che, peraltro, è piuttosto semplice da calcolare).*

Osservazione 3.25. *Tutte le tecniche di calcolo presentate in questa sezione possono essere generalizzate al caso multidimensionale. In questo caso, detta D la regione delimitata dalle barriere, è possibile approssimare le probabilità p_i^ϵ usando le distribuzioni di ponti browniani multidimensionali. Inoltre le probabilità p_i^ϵ possono essere calcolate esattamente nel caso in cui D sia un iperpiano.*

3.3.3 Risultati Numerici

Concludiamo questo capitolo presentando alcuni risultati numerici ottenuti utilizzando le procedure di pricing ricavate nei paragrafi (3.1) e (3.3).

Nelle simulazioni vengono calcolati i prezzi di opzioni Call e Put con barriera singola continua nel modello di Black & Scholes. In questo caso è possibile utilizzare le formule analitiche ottenute in (3.1.4) per ottenere delle espressioni esatte del prezzo dell'opzione con barriera. Una volta ottenuto tale prezzo è interessante confrontarlo con le approssimazioni dei prezzi ottenute con il metodo Monte Carlo standard e con il metodo Monte Carlo corretto esposto in (3.3.1).

Occupiamoci dapprima del caso di un'opzione *Call down-and-out*. La Proposizione (3.14) dice che, se la barriera inferiore L è minore dello strike K ,

3.3 Un approccio numerico per il pricing di opzioni con barriere continue

il prezzo di tale opzione può essere ottenuto analiticamente come

$$\mathbf{C}_{LO}(S_0; K) = \mathbf{C}(S_0; K) - \left(\frac{L}{S_0}\right)^{2\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}} \mathbf{C}\left(\frac{L^2}{S_0}; K\right), \quad (3.34)$$

dove S_0 è il prezzo iniziale del sottostante e $\tilde{r} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$.

Inoltre è possibile approssimare il prezzo con una simulazione Monte Carlo standard, monitorando il prezzo in un insieme di tempi $I = \{0 = t_0 < \dots < t_N = T\}$, contenuto in $[0, T]$.

Infine, per ogni $i = 1, \dots, N$, detto $\epsilon_i = t_{i+1} - t_i$ sia

$$p_i^{\epsilon_i}(x_i, x_{i+1}) = \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2\epsilon_i}(L - x_i)(L - x_{i+1})\right\}.$$

Dall'esempio (3.21) segue che p_i è la probabilità che il prezzo colpisca la barriera L nell'intervallo (t_i, t_{i+1}) , dati i valori $x_i = \ln(S_{t_i})$ e $x_{i+1} = \ln(S_{t_{i+1}})$. È dunque possibile effettuare la procedura Monte Carlo corretta descritta nel paragrafo (3.3.1) per ottenere un'ulteriore approssimazione del prezzo.

Nelle simulazioni sono fissati i seguenti valori: $\sigma = 0.25$, $r = 0.03$, $T = 1$ anno e $S_0 = 100$. I tempi di discretizzazione $\{0 = t_0 < \dots < t_{365} = 1\}$ sono scelti equidistanti e corrispondono ad un monitoraggio giornaliero del prezzo del sottostante. Le stime Monte Carlo sono ottenute con 200000 simulazioni.

Call down-and-out	$K = 110, L = 90$	$K = 100, L = 90$	$K = 110, L = 50$
Prezzo Esatto	5.67499	8.30322	7.2557
MC Standard	5.86086	8.60858	7.24982
MC Corretto	5.66727	8.28424	7.24982

Dalla tabella precedente risulta evidente che il metodo Monte Carlo standard fornisce prezzi sensibilmente distanti dal prezzo corretto dell'opzione. Tale errore arriva a superare il 3% del prezzo dell'opzione quando la barriera L non dista troppo dal prezzo di partenza S_0 . Si nota invece che il metodo Monte Carlo corretto fornisce delle approssimazioni del prezzo molto migliori, utilizzabili nella pratica.

Nella tabella seguente, invece, sono riportati i prezzi di alcune *Put down-and-in* (σ, r, T e il numero di simulazioni sono gli stessi del caso precedente).

Put down-and-in	$K = 90, L = 80$	$K = 100, L = 80$	$K = 90, L = 50$
Prezzo Esatto	4.13894	7.19776	0.217503
MC Standard	4.09635	7.04618	0.208326
MC Corretto	4.13349	7.17888	0.226151

3. Pricing di opzioni con barriera

Anche in questo caso si nota che il metodo Monte Carlo corretto fornisce risultati molto migliori del metodo Monte Carlo standard.

Capitolo 4

Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Supponiamo di avere un'opzione con barriera Z di payoff Φ e, scelto un modello di riferimento, sia λ un parametro di tale modello. Detto $\Pi(Z, \lambda)$ il prezzo dell'opzione, supponiamo di essere interessati a calcolare la derivata del prezzo rispetto a λ , ossia cerchiamo

$$\Lambda = \frac{\partial \Pi(Z, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

Il Teorema di valutazione Risk-Neutral (1.11) dice che, detta Q la probabilità Risk-Neutral, vale

$$\Pi(Z, \lambda) = E^Q [\Phi(S., \lambda) e^{-rT}].$$

Dunque, scelto un $h \in \mathbb{R}$ sufficientemente piccolo, si ha

$$\Lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi(Z, \lambda + \epsilon) - \Pi(Z, \lambda)}{\epsilon} \simeq E^Q \left[e^{-rT} \frac{\Phi(S., \lambda + h) - \Phi(S., \lambda)}{h} \right]. \quad (4.1)$$

È possibile effettuare delle simulazioni Monte Carlo utilizzando la formula (4.1) per ottenere un'approssimazione di Λ . Questo metodo è detto *metodo delle differenze finite* ed è il metodo tradizionalmente usato per il calcolo delle greche. In alcune situazioni, ad esempio quando si hanno payoff discontinui o quando si ha a che fare con derivate di ordine superiore al primo, il metodo delle differenze finite ha una velocità di convergenza piuttosto lenta. Dunque si cercano metodi alternativi per il calcolo delle greche.

In questo e nel prossimo capitolo ci occuperemo di ricavare delle rappresentazioni delle greche utilizzando le formule di integrazioni per parti della

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

teoria del calcolo di Malliavin. Attraverso tali formule riusciremo a scrivere Λ nella forma

$$\Lambda = E^Q [e^{-rT} \Phi(S., \lambda) H], \quad (4.2)$$

dove H è una variabile aleatoria che non dipende dal payoff Φ . Simulando il processo dei prezzi e la variabile aleatoria H è possibile effettuare delle simulazioni Monte Carlo che approssimino Λ utilizzando la formula (4.2).

4.1 Le greche nel caso unidimensionale: modelli a volatilità locale

In questa sezione descriveremo un metodo per calcolare le greche di opzioni con barriera nei modelli a volatilità locale. Ricordiamo che un modello è detto a volatilità locale se le dinamiche del prezzo del sottostante sono governate da un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dW_t \\ S_0 = \tilde{x}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Il fatto che il coefficiente di drift sia uguale al tasso di interesse r vuol dire che lavoreremo direttamente sotto la misura di probabilità risk neutral P . Il Teorema (2.18) ci assicura che, se scegliamo una funzione $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che esista un valore reale C per cui siano soddisfatte le due condizioni

$$\begin{aligned} \sigma(t, x)x &\leq C(1 + |x|) && \forall x, t \in \mathbb{R}^+ \\ |\sigma(t, x_1)x_1 - \sigma(t, x_2)x_2| &\leq C|x_1 - x_2| && \forall x_1, x_2, t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (4.4)$$

allora (4.3) ha un'unica soluzione.

Scegliamo dunque una funzione di volatilità che possenga tali proprietà, in modo da poter lavorare tranquillamente con la soluzione di (4.3).

Ovviamente tutti i risultati che otterremo per modelli a volatilità locale saranno validi anche per modelli più semplici, come il modello di Black & Scholes e i modelli a coefficienti deterministici.

Osservazione 4.1. *Di primo impatto potrebbe sembrare strano assumere che la superficie di volatilità debba soddisfare alcune condizioni di regolarità. Infatti in finanza si utilizza sempre la superficie di volatilità implicita, ossia ricavata direttamente dai dati osservabili sul mercato reale. Quindi, a priori, non ci sarebbe alcun buon motivo per supporre che tale superficie debba soddisfare le condizioni (4.4).*

Il problema però non si pone se si considera che i dati ricavabili dai prezzi di mercato sono sempre in quantità finita. Dunque non è possibile ricavare un'unica superficie di volatilità a partire solamente dai prezzi di mercato. Per risolvere il problema è quindi sufficiente interpolare i punti della superficie di volatilità, ricavati dai dati reali, con una funzione continua e sufficientemente regolare.

In questa sezione ci occuperemo solamente del caso unidimensionale, ossia di un mercato senza costi di transazione in cui sia presente un solo bene scambiabile. Il caso multidimensionale, in cui sono commerciabili un numero finito di sottostanti, eventualmente correlati tra di loro, verrà discusso in seguito.

I risultati che otterremo saranno piuttosto generali; ci occuperemo infatti di opzioni con payoff della forma

$$\tilde{\Phi} \left(\max_{s \in I} S_s, \min_{s \in I} S_s, S_T \right), \quad (4.5)$$

per un generico insieme di tempi $I \subset [0, T]$. Sicuramente tutte le versioni con barriera singola di T -contratti appartengono a questa famiglia di opzioni, sia se considerate con monitoraggio continuo (caso $I = [0, T]$), sia se considerate con monitoraggio discreto (caso $I = \{t_1, \dots, t_n\}$). Inoltre anche le opzioni con barriera doppia, le opzioni *lookback* ed altre opzioni usate in ambito finanziario rientrano nella classe di payoff della forma (4.5).

Il nostro scopo sarà quello di calcolare il Δ e il Γ di tali opzioni, in quanto queste due greche sono legate alle strategie di copertura. Per fare ciò svilupperemo alcune formule di integrazione per parti a partire dalla teoria del calcolo di Malliavin.

4.1.1 Ipotesi, Definizioni e Risultati Preliminari

In questo paragrafo verranno introdotti alcuni concetti preliminari che torneranno utili in seguito. Inoltre aggiungeremo alcune ipotesi sulle dinamiche dei prezzi, sulla classe di payoff considerati e sulla derivabilità di alcuni processi ausiliari; tali ipotesi, per lo più di tipo tecnico, non saranno comunque molto limitative e ci permetteranno di trattare il problema in tutta la sua generalità.

Il nostro primo scopo è quello di trasformare le dinamiche dei prezzi, descritte dal sistema (4.3), in modo da eliminare alcuni problemi riguardanti i coefficienti di diffusione.

A tal proposito consideriamo la funzione

$$A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.6)$$

$$(t, y) \mapsto A(t, y) = \int_1^y \frac{du}{u\sigma(t, u)}. \quad (4.7)$$

Dalla stretta positività della superficie di volatilità segue immediatamente che la funzione A è strettamente crescente in y , dunque è invertibile in y se ristretta alla sua immagine.

Prima di procedere ricordiamo una versione della formula di Itô (per la dimostrazione si veda, ad esempio, [26]):

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Teorema 4.2. (Formula di Itô) *Sia dato un processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ che segua delle dinamiche del tipo:*

$$dY_t = a(t, Y_t)dt + b(t, Y_t)dW_t.$$

Sia inoltre data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 nella prima variabile e di classe C^2 nella seconda. Allora il processo $F(t, Y_t)$ soddisfa le dinamiche

$$\begin{aligned} dF(t, Y_t) = & \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}(t, Y_t) + a(t, Y_t) \frac{\partial F}{\partial y}(t, Y_t) + \frac{1}{2} b^2(t, Y_t) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, Y_t) \right\} dt \\ & + b(t, Y_t) \frac{\partial F}{\partial y}(t, Y_t) dW_t, \end{aligned} \quad (4.8)$$

Definiamo $X_t = A(t, S_t)$ e denotiamo $x = A(0, S_0)$. Al fine di applicare la formula di Itô al processo X_t notiamo che, affinché la funzione A sia di classe $C^{1,2}$ è sufficiente che σ sia di classe $C^{1,1}$. Ipotizziamo dunque che la volatilità abbia le derivate prime continue. Otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t}(t, y) &= \int_1^y -\frac{1}{\sigma^2(t, u)} \partial_t \sigma(t, u) \frac{du}{u}, \\ \frac{\partial A}{\partial y}(t, y) &= \frac{1}{y \sigma(t, y)}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}(t, y) &= -\frac{\partial_y(y \sigma(t, y))}{y^2 \sigma^2(t, y)}. \end{aligned}$$

Possiamo applicare ad A la formula di Itô (4.8) (scritta in forma integrale)

$$\begin{aligned} X_t = x + & \int_0^t \left[\int_1^{S_s} -\frac{1}{\sigma^2(s, u)} \partial_t \sigma(s, u) \frac{du}{u} + \frac{r S_s}{S_s \sigma(s, S_s)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{S_s^2 \sigma^2(s, S_s)}{S_s^2 \sigma^2(s, S_s)} \frac{\partial(S_s \sigma(s, S_s))}{\partial S_s} \right] ds + \int_0^t \frac{S_s \sigma(s, S_s)}{S_s \sigma(s, S_s)} dW_s, \end{aligned}$$

da cui, semplificando, si ottiene la scrittura

$$X_t = x + \int_0^t \tilde{h}(s, S_s) ds + W_t, \quad (4.9)$$

dove la funzione \tilde{h} è definita come

$$\tilde{h}(s, S_s) = - \int_1^{S_s} \frac{1}{\sigma^2(s, u)} \partial_t \sigma(s, u) \frac{du}{u} + \frac{r}{\sigma(s, S_s)} - \frac{1}{2} \frac{\partial(S_s \sigma(s, S_s))}{\partial S_s}.$$

Infine, considerando la funzioni $A_t(\cdot) = A(t, \cdot)$, che sono invertibili per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, e detta $h(t, y) = \tilde{h}(t, \cdot) \circ A_t^{-1}(y)$, si ottengono le dinamiche

$$\begin{cases} dX_t = h(t, X_t)dt + dW_t \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (4.10)$$

D'ora in avanti supporremo che h sia di classe C_b^∞ . Lavorare con il processo X_t è ben più vantaggioso che usare il processo S_t ; infatti nelle equazioni (4.10) il coefficiente di volatilità è costante ed unitario. Per far sparire il coefficiente di drift h sarà sufficiente applicare il Teorema di Girsanov (1.9) in maniera opportuna.

Osservazione 4.3. *La trasformazione $A(t, y)$ nel modello di Black & Scholes corrisponde al consueto passaggio al logaritmo, normalizzato rispetto alla volatilità.*

Denotiamo i processi di massimo e di minimo relativi a X con

$$M_t = \max_{s \leq t, s \in I} X_s,$$

$$m_t = \min_{s \leq t, s \in I} X_s.$$

Sempre per la monotonia dell'operatore A rispetto alla variabile 'prezzo', è evidente che ogni payoff $\tilde{\Phi}$ del tipo (4.5) può essere riscritto nella forma $\Phi(M_T, m_T, X_T)$. Dunque il passaggio alle dinamiche (4.10) non altera la classe di funzioni di nostro interesse.

D'ora in avanti supporremo che i payoff Φ considerati siano di quadrato integrabile. Inoltre è necessario imporre una condizione sul supporto di tali payoff:

Ipotesi 4.4. *Esiste un valore reale $a > 0$ tale che la funzione $\Phi(M, m, z)$ non dipenda dalla coppia (M, m) per ogni (M, m, z) tale che $0 \leq M - x \leq a$ o $0 \leq x - m \leq a$.*

È importante notare che le opzioni con barriera (singola o doppia) e le opzioni lookback soddisfano l'ipotesi (4.4). Ad esempio, per un'opzione con barriera up-and-out di barriera $U > x$ è sufficiente scegliere $a > U - x$; per un'opzione con barriera down-and-in di barriera $L < x$ si può invece prendere $a > x - L$. Infine per un'opzione di tipo 'in' con barriera doppia $U > x > L$, si sceglie $a = \max\{U - x, x - L\}$.

Introduciamo ora lo strumento che sarà fondamentale per il calcolo dei pesi di Malliavin:

Definizione 4.5. *Assegnato un processo $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$, si dice che il processo $\{Y_t\}_{t \in [0, \infty)}$ domina X in $I \subset [0, T]$ (o, alternativamente, che Y è un processo dominante) se:*

- (i) Y è adattato e non decrescente;
- (ii) Y è continuo a destra;
- (iii) $|X_t - x| \leq Y_t \quad \forall t \in I$.

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Quello che faremo in seguito sarà enunciare e dimostrare un teorema che esprime le greche Δ e Γ nella forma $E[\Phi(M_T, m_T, X_T)H]$, dove H è una funzione, che non dipende dal payoff scelto Φ , di un processo dominante delle dinamiche X . Una volta ottenuto questo risultato dovremo essere in grado di costruire dei processi dominanti, relativamente all'insieme di tempi I che stiamo considerando (infatti è evidente che un processo dominante rispetto ad un certo insieme di tempi possa non essere dominante rispetto ad altri insiemi temporali).

Per poter lavorare con i processi dominanti abbiamo bisogno che siano soddisfatte altre ipotesi tecniche di regolarità:

Ipotesi 4.6. *Esiste una funzione positiva $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che:*

- (i) $\lim_{q \rightarrow +\infty} \alpha(q) = +\infty$
- (ii) $E(Y_t^q) \leq C_q t^{\alpha(q)} \quad \forall q \geq 1, \forall t \in [0, T].$

Sostanzialmente con l'ipotesi (4.6) chiediamo che tutti i momenti del processo dominante abbiano crescita temporale dominata da un monomio. È importante osservare che, da questa ipotesi, segue che $Y_0 = 0$.

Inoltre vorremmo avere un processo dominante che sia differenziabile nel senso di Malliavin. A tal proposito scegliamo una funzione $\gamma \in C_b^\infty$, $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$, tale che $\gamma(x) = 1$ nell'intervallo $[0, a/2]$ e $\gamma(x) = 0$ in $[a, +\infty)$ (la costante a è quella che appare nell'ipotesi (4.4)).

Ipotesi 4.7. *Diremo che Y soddisfa l'ipotesi (4.7) di parametro $q \in \mathbb{N}^*$ se:*

- (i) $\gamma(Y_t) \in \mathbb{D}^{q, \infty}, \quad \forall t \in [0, T];$
- (ii) $\forall j \in \{1, \dots, q\}, \forall p \geq 1$

$$\sup_{r_1, \dots, r_j \in [0, T]} E \left(\sup_{r_1 \vee \dots \vee r_j \leq t \leq T} \|D_{r_1, \dots, r_j} \gamma(Y_t)\|^p \right) \leq C_p;$$

- (iii) *Per ogni $q \geq 2$, le $q - 1$ derivate di $\gamma(Y_t)$ rispetto a x esistono e soddisfano le stime in (ii).*

Riprendiamo ora in considerazione le dinamiche (4.10).

Costruiamo una nuova misura di probabilità Q , a partire dalla misura di probabilità risk-neutral P , definendo la densità di passaggio da Q a P nel seguente modo:

$$Z_T = \frac{dP}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(\int_0^T h(s, X_s) dV_s - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(s, X_s) ds \right), \quad (4.11)$$

dove il processo $\{V_t\}_{t \in [0, \infty)}$ è definito come $V_t = X_t - x$.

L'ipotesi che h sia di classe C_b^∞ assicura che la condizione di Novikov (1.7)

sia soddisfatta, ossia che $E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T h^2(s, X_s) ds \right) \right] < \infty$.

È possibile dunque applicare il Teorema di Girsanov (1.9) per dedurre, oltre alla buona definizione di Q , che il processo $\{V_t\}_{t \in [0, \infty)}$ è un processo di Wiener sotto Q . Inoltre

$$E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T)] = E^Q \left[\Phi \left(\max_{s \leq T, s \in I} V_s + x, \min_{s \leq T, s \in I} V_s + x, V_T + x \right) Z_T \right].$$

Dunque le formule per le greche verranno calcolate sotto la misura di probabilità Q e poi potranno essere riportate sotto la probabilità originale P . Per non appesantire le scritture, in seguito lasceremo le formule espresse sotto Q .

4.1.2 Il calcolo di Δ e Γ

In questa sezione esporremo il risultato principale per il calcolo delle greche di opzioni con barriera per modelli a volatilità locale. Prima di introdurre questo risultato abbiamo bisogno di qualche altro strumento, al fine di garantire la derivabilità secondo Malliavin dei processi di massimo e di minimo.

Coerentemente con le notazioni usate precedentemente, fissato un valore reale $b > 0$ e considerato un processo di Wiener standard $\{V_t\}_{t \in [0, \infty)}$, definiamo τ_b come:

$$\tau_b(\omega) = \inf \{t \geq 0 \mid V_t(\omega) > b\}.$$

Per ogni tempo t vale l'ovvia relazione:

$$P[\tau_b < t] = P[\tau_b < t, V_t > b] + P[\tau_b < t, V_t < b] + P[\tau_b < t, V_t = b]. \quad (4.12)$$

L'evento $\{\tau_b < t, V_t = b\}$ è contenuto nell'evento trascurabile $\{V_t = b\}$, dunque l'ultimo termine del membro di destra di (4.12) è nullo. Per quanto riguarda il primo termine si ha, ovviamente, che $P[\tau_b < t, V_t > b] = P[V_t > b]$. Esaminiamo cosa succede a $P[\tau_b < t, V_t < b]$. Se $\tau_b(\tilde{\omega}) < t$, allora la traiettoria $\tilde{\omega}$ ha raggiunto il livello b in un istante inferiore a t ; inoltre, poiché $V_t(\tilde{\omega}) < b$, la traiettoria $\tilde{\omega}$ deve aver raggiunto un certo punto $c < b$ all'istante t . Ma, data la 'simmetria' di un moto Browniano, la probabilità di una traiettoria che abbia viaggiato da b a c nell'intervallo $[\tau_b, t]$ deve essere uguale alla probabilità di una traiettoria che abbia viaggiato da b a $2b - c$ nello stesso intervallo di tempo. Dunque

$$\begin{aligned} P[\tau_b < t, V_t < b] &= P[\tau_b < t, V_t > b] = P[V_t > b] \\ &\Downarrow \\ P[\tau_b < t] &= 2P[V_t > b]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Generalmente ci si riferisce a (4.13) con il nome di *principio di riflessione del moto Browniano*.

Ovviamente l'argomento usato nelle righe precedenti per giustificare (4.13) non ha alcuna validità come dimostrazione matematica. Infatti non ha molto senso parlare di 'probabilità di una traiettoria che viaggia da un punto a un altro', visto che tale probabilità è nulla. Per avere una dimostrazione formale del principio di riflessione è necessario introdurre degli altri strumenti probabilistici, come le famiglie forti di Markov, che esulano dagli scopi di questa tesi. Per una dimostrazione formale di (4.13) si veda [23].

Per mezzo del principio di riflessione siamo in grado di trovare facilmente le densità $\{l_t(x)\}_{t \in [0, \infty]}$ delle variabili aleatorie componenti il processo di massimo del moto Browniano, $M_t = \sup_{s \leq t} V_t$. Indichiamo con $\varphi(x; 0, \sqrt{t})$ la densità di una variabile aleatoria normale di media 0 e varianza t . Si ha:

$$\begin{aligned}
 P[M_t < b] &= P[\tau_b > t] = 1 - P[\tau_b < t] \\
 &= 1 - 2P[V_t > b] = 1 - 2 \int_b^{+\infty} \varphi(x; 0, \sqrt{t}) dx \\
 &= 2 \int_0^{+\infty} \varphi(x; 0, \sqrt{t}) dx - 2 \int_b^{+\infty} \varphi(x; 0, \sqrt{t}) dx \\
 &= 2 \int_0^b \varphi(x; 0, \sqrt{t}) dx. \\
 &\quad \downarrow \\
 l_t(x) &= 2\varphi(x; 0, \sqrt{t})I_{[0, +\infty)}(x). \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Dunque il processo di massimo è composto da variabili aleatorie con legge diffusa.

Risultati analoghi possono essere trovati anche per il processo di minimo, con piccole variazioni rispetto agli argomenti usati per il processo di massimo.

Proposizione 4.8. *Considerato un insieme $I \subset [0, T]$, la probabilità che il processo di Wiener $\{V_t\}_{t \in I}$ raggiunga il massimo in un unico punto è pari ad uno.*

Dimostrazione. Definiamo l'insieme

$$G = \left\{ \omega : \sup_{t \in I} V_t(\omega) = V_{t_1}(\omega) = V_{t_2}(\omega), t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2 \right\}.$$

La nostra tesi è equivalente a dimostrare che G è trascurabile.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, sia $J_n = \{[(j-1)2^{-n}T, j2^{-n}T], j = 1, \dots, 2^n\}$. Vale l'inclusione

$$G \subset \bigcup_{n \geq 1} \left(\bigcup_{A, B \in J_n, A \neq B} \left\{ \sup_{t \in A} V_t = \sup_{t \in B} V_t \right\} \right).$$

Il membro di destra di questa relazione è unione numerabile di insiemi. Dunque, per mostrare che G è trascurabile, sarà sufficiente mostrare che tutti gli insiemi delle unioni del membro di destra sono trascurabili. Scegliamo $0 \leq a < b < c < d \leq T$ e siano:

$$\tilde{X} = \sup_{t \in [a,b]} V_t = V_a + \sup_{t \in [a,b]} (V_t - V_a) = V_a + X,$$

$$\tilde{Y} = \sup_{t \in [c,d]} V_t = V_c + \sup_{t \in [c,d]} (V_t - V_c) = V_c + Y.$$

Sappiamo che X e Y sono indipendenti e che la coppia (X, Y) ha una densità. Detta $Q(x, y)$ la legge della coppia (V_a, V_c) si ha

$$P(\tilde{X} = \tilde{Y}) = \int_{\Omega} P(\tilde{X} = \tilde{Y} | V_a = x, V_b = y) dQ(x, y). \quad (4.15)$$

Inoltre

$$P(\tilde{X} = \tilde{Y} | V_a = x, V_b = y) = P(X = Y + (y - x) | V_a = x, V_b = y) = 0, \quad (4.16)$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che stiamo integrando la funzione di densità congiunta di (X, Y) su una retta di \mathbb{R}^2 .

La tesi segue immediatamente inserendo la (4.16) in (4.15). \square

Possiamo dunque enunciare il lemma che ci garantisce la derivabilità secondo Malliavin dei processi di massimo e di minimo.

Lemma 4.9. *Siano assegnati un processo di Wiener standard V_t , una funzione reale integrabile f e un insieme di tempi $I \subset [0, T]$. Sia*

$$V_t^f = V_t + \int_0^t f(s) ds.$$

Allora le variabili aleatorie $\min_{s \in I} V_s^f$ e $\max_{s \in I} V_s^f$ appartengono a $\mathbb{D}^{1, \infty}$. Inoltre siano τ^m e τ^M i tempi aleatori definiti dalle relazioni $V_{\tau^m}^f = \min_{s \in I} V_s^f$ e $V_{\tau^M}^f = \max_{s \in I} V_s^f$. Allora, per ogni $t \in [0, T]$, vale

$$D_t \left(\min_{s \in I} V_s^f \right) = I_{\{t \leq \tau^m\}}, \quad D_t \left(\max_{s \in I} V_s^f \right) = I_{\{t \leq \tau^M\}}.$$

Osservazione 4.10. *I tempi aleatori τ^m e τ^M sono ben definiti grazie alla Proposizione (4.8).*

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per il processo di massimo (la dimostrazione per il processo di minimo è del tutto analoga.)

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Costruiamo un'approssimazione discreta del processo $M = \max_{s \in I} V_s^f$; scegliamo un arbitrario sottoinsieme $\{t_n\}_{n \geq 1}$ denso e numerabile di $I \subset [0, T]$ e sia

$$M_n(\omega) = \max\{V_{t_1}^f(\omega), \dots, V_{t_n}^f(\omega)\}, \quad \forall n \geq 1.$$

Considerata la funzione

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \max\{x_1, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

si ha che $M_n = \phi \circ (V_{t_1} + \int_0^{t_1} f(s)ds, \dots, V_{t_n} + \int_0^{t_n} f(s)ds)$. Quindi, grazie alla regola della catena (2.10), si ha

$$D_t M_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \left(V_{t_1} + \int_0^{t_1} f(s)ds, \dots, V_{t_n} + \int_0^{t_n} f(s)ds \right) D_t \left(V_{t_i} + \int_0^{t_i} f(s)ds \right). \quad (4.17)$$

Dall'esempio (2.4) segue che $D_t(V_{t_i}) = I_{[0, t_i]}(t)$. Inoltre

$$D_t \left(V_{t_i} + \int_0^{t_i} f(s)ds \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = I_{\{x_i \geq \max\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}\}}.$$

Inserendo queste ultime due espressioni in (4.17) si ha

$$D_t M_n = \sum_{i=1}^n I_{\{V_{t_i} \geq \max\{V_{t_1}, \dots, V_{t_{i-1}}, V_{t_{i+1}}, \dots, V_{t_n}\}\}} I_{[0, t_i]}(t). \quad (4.18)$$

Detto $\tau_n^M = \max\{V_{t_1}, \dots, V_{t_n}\}$, sostituendo in (4.18), si ottiene

$$D_t M_n(\omega) = I_{[0, \tau_n^M(\omega)]}(t). \quad (4.19)$$

Quello che ci resta da fare ora è mandare n all'infinito e passare dall'approssimazione discreta al caso continuo.

Come prima cosa osserviamo che, in virtù della continuità delle traiettorie del moto Browniano, la successione di tempi aleatori τ_n^M converge quasi certamente a τ^M . Inoltre, grazie della Proposizione (2.12), si ha che la successione di derivate DM_n converge a DM nella topologia debole di $L^2([0, T] \times \Omega)$. Prima di applicare la Proposizione (2.12) dobbiamo però essere sicuri di essere nelle ipotesi, ossia dobbiamo verificare che:

- (a) M_n converge a M in $L^2(\Omega)$,
- (b) $\sup_n E \left[\|DM_n\|_{L^2(0, T)}^2 \right] < +\infty$.

È facile mostrare che l'ipotesi (b) è soddisfatta; infatti, da (4.19), si ha

$$\begin{aligned} E \left(\|DM_n\|_{L^2(0, T)}^2 \right) &= \int_{\Omega} \left(\int_0^T I_{[0, \tau_n^M(\omega)]}(t) dt \right) dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \tau_n^M(\omega) dP(\omega) \leq T. \end{aligned}$$

Mostriamo ora che siamo nell'ipotesi (a), ossia che (M_n) converge a M in $L^2(\Omega)$. Usando il Teorema di Beppo-Levi, essendo l'integrando decrescente, abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|M - M_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \sup_{t \in I} V_t^f(\omega) - \sup_{t \in \{t_1, \dots, t_n\}} V_t^f(\omega) \right|^2 dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sup_{t \in I} V_t^f(\omega) - \sup_{t \in \{t_1, \dots, t_n\}} V_t^f(\omega) \right|^2 dP(\omega). \end{aligned}$$

Per la continuità delle traiettorie del Browniano e per la densità dell'insieme di tempi scelto si ha che $|\sup_{t \in I} V_t^f(\omega) - \sup_{t \in \{t_1, \dots, t_n\}} V_t^f(\omega)|$ tende a zero per quasi ogni ω ; Dunque anche l'ipotesi (a) è soddisfatta.

A questo punto abbiamo che $\tau_n^M \rightarrow \tau^M$ quasi certamente e $DM_n \rightarrow DM$ debolmente; da questo vogliamo ricavare la nostra tesi, ossia che $D_t M(\omega) = I_{[0, \tau^M(\omega)]}(t)$. Dunque basta mostrare che $I_{[0, \tau_n^M]}$ converge debolmente a $I_{[0, \tau^M]}$ ed usare l'unicità del limite debole in $L^2(\Omega \times [0, T])$.

Per dimostrare la convergenza debole dobbiamo dimostrare che, per ogni $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, I_{[0, \tau_n^M]} \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])} = \langle u, I_{[0, \tau^M]} \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])}. \quad (4.20)$$

Poiché $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$, allora $u \in L^1(\Omega \times [0, T])$, e $|u|$ domina le funzioni $u I_{[0, \tau_n^M]}$, per ogni n . Dunque, applicando il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, I_{[0, \tau_n^M]} \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_0^T u(\omega, t) I_{[0, \tau_n^M(\omega)]}(t) dt dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T u(\omega, t) \lim_{n \rightarrow \infty} I_{[0, \tau_n^M(\omega)]}(t) dt dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \int_0^T u(\omega, t) I_{[0, \tau^M(\omega)]}(t) dt dP(\omega) \\ &= \langle u, I_{[0, \tau^M]} \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])}, \end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio è vero grazie alla convergenza quasi certa di τ_n^M a τ^M . Dunque la (4.20) è vera e il lemma è dimostrato. \square

Finalmente siamo in grado di enunciare il risultato fondamentale di questa sezione.

Nel Teorema che segue le funzioni $\delta(\cdot)$ sono degli integrali di Skorohod.

Teorema 4.11. *Sia Y un processo dominante del processo X definito da (4.10) e sia Φ un payoff della forma (4.5), tali che siano soddisfatte le ipotesi (4.4) e (4.6).*

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

(a) Se Y soddisfa l'ipotesi (4.7) di parametro 1, posto

$$H_1 = \delta \left(\frac{Z_T}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \gamma(Y) \right) + \partial_x Z_T, \quad (4.21)$$

si ha

$$\partial_x E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T)] = E^Q [\Phi(M_T, m_T, X_T) H_1].$$

(b) Se Y soddisfa l'ipotesi (4.7) di parametro 2, posto

$$H_2 = \delta \left(\frac{H_1}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \gamma(Y) \right) + \partial_x H_1, \quad (4.22)$$

si ha

$$\partial_{xx}^2 E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T)] = E^Q [\Phi(M_T, m_T, X_T) H_2].$$

Osservazione 4.12. Per ottenere la greca Δ è sufficiente prendere l'espressione della derivata del payoff rispetto al dato iniziale del Teorema (4.11) e scontarla rispetto al fattore e^{-rT} . La stessa cosa è valida per il Γ dell'opzione.

Dimostrazione. Dimostriamo il punto (a). Per mezzo di argomenti standard di densità possiamo supporre che il payoff Φ sia differenziabile e con derivate limitate. Passando sotto la misura di probabilità Q , portando la derivata sotto il segno di integrale e usando la regola di Leibniz si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T)] &= \frac{\partial}{\partial x} E^Q \left[\Phi \left(\max_{s \in I} V_s + x, \min_{s \in I} V_s + x, V_T + x \right) Z_T \right] \\ &= E^Q \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \left(\max_{s \in I} V_s + x, \min_{s \in I} V_s + x, V_T + x \right) \right) Z_T \right. \\ &\quad \left. + \Phi \left(\max_{s \in I} V_s + x, \min_{s \in I} V_s + x, V_T + x \right) \frac{\partial}{\partial x} Z_T \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Per brevità denotiamo il vettore $(\max_{s \in I} V_s + x, \min_{s \in I} V_s + x, V_T + x)$ con il simbolo G . Vogliamo calcolare $\frac{\partial}{\partial x} (\Phi(G))$ e $\frac{\partial}{\partial x} Z_T$, in modo da sostituirli in (4.23).

Essendo $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la sua derivata rispetto al dato iniziale x è uguale a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi(G)) &= \nabla (\Phi(G)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} (\max_{s \in I} V_s + x), \frac{\partial}{\partial x} (\min_{s \in I} V_s + x), \frac{\partial}{\partial x} (V_T + x) \right) \\ &= \nabla (\Phi(G)) \cdot (1, 1, 1) = \text{div } \Phi(G) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la derivata di Z_T abbiamo (h' è la derivata di h rispetto alla seconda variabile):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} Z_T &= \frac{\partial}{\partial x} \exp \left(\int_0^T h(s, X_s) dV_s - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(s, X_s) ds \right) \\ &= Z_T \left(\int_0^T h'(s, x + V_s) dV_s - \frac{1}{2} \int_0^T 2h(s, x + V_s) h'(s, x + V_s) ds \right). \\ &\quad \downarrow \\ \frac{\partial}{\partial x} Z_T &= Z_T \left(\int_0^T h'(s, x + V_s) (dV_s - h(s, x + V_s) ds) \right).\end{aligned}$$

Mettiamo momentaneamente da parte queste espressioni e andiamo a vedere che forma hanno le derivate di Malliavin di $\Phi(G)$.

$$\begin{aligned}D_t(\Phi(G)) &= \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial M}(G) D_t(\max_{s \in I}(V_s + x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial m}(G) D_t(\min_{s \in I}(V_s + x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(G) D_t(V_T + x) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial M}(G) I_{[0, \tau^M]}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial m}(G) I_{[0, \tau^m]}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(G),\end{aligned}\tag{4.24}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal lemma (4.9) e dall'ovvia relazione $D_t(V_T + x) = 1$.

A questo punto della dimostrazione è cruciale osservare che, grazie alle scelta della funzione γ e all'ipotesi (4.4), vale la relazione

$$D_t \Phi(G) \gamma(Y_t) = \operatorname{div} \Phi(G) \gamma(Y_t).\tag{4.25}$$

Per mostrare (4.25) scriviamo Ω come unione di A e A^c , dove

$$A = A_1 \cup A_2 = \left\{ \omega : \max_{s \in I} V_s(\omega) \leq a \right\} \cup \left\{ \omega : \min_{s \in I} V_s(\omega) \geq -a \right\}.$$

Mostriamo (4.25) su A_1 .

$$\tilde{\omega} \in A_1 = \left\{ \omega : \max_{s \in I} V_s(\omega) \leq a \right\} = \left\{ \omega : M - x \leq a \right\}.$$

Dunque, grazie all'ipotesi (4.4), Φ dipende esclusivamente dalla terza componente z . Ne segue che

$$D_t \Phi(G)(\tilde{\omega}) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(G)(\tilde{\omega}) = \operatorname{div} \Phi(G)(\tilde{\omega}).$$

Moltiplicando il primo e l'ultimo membro dell'ultima equazione per $\gamma(Y_t)$ si ottiene esattamente (4.25) su A_1 .

Su A_2 la situazione è del tutto analoga; infatti

$$\tilde{\omega} \in A_2 = \left\{ \omega : \min_{s \in I} V_s(\omega) \geq -a \right\} = \left\{ \omega : x - m \leq a \right\},$$

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

quindi è sufficiente utilizzare la seconda condizione di (4.4) per avere (4.25). Consideriamo ora il caso in cui

$$\tilde{\omega} \in A^c = \left\{ \omega : \max_{s \in I} V_s(\omega) > a \right\} \cap \left\{ \omega : \min_{s \in I} V_s(\omega) < -a \right\}.$$

Per i \tilde{t} tali che $Y_{\tilde{t}}(\tilde{\omega}) \geq a$, dalla scelta di γ si ha $\gamma(Y_{\tilde{t}}(\tilde{\omega})) = 0$, ossia (4.25) si riduce banalmente all'uguaglianza $0 = 0$.

Riduciamoci dunque al caso in cui $Y_{\tilde{t}}(\tilde{\omega}) < a$. Il fatto che $\tilde{\omega}$ appartenga al complementare di A implica che il massimo di V viene raggiunto oltre a , ossia

$$a < \max_{s \in I} V_s(\tilde{\omega}). \quad (4.26)$$

Pertanto, usando la crescenza di Y e il fatto che domini X in I , si ha:

$$\max_{s \leq \tilde{t}, s \in I} V_s(\tilde{\omega}) \leq \max_{s \leq \tilde{t}, s \in I} Y_s(\tilde{\omega}) \leq Y_{\tilde{t}}(\tilde{\omega}) < a < \max_{s \in I} V_s(\tilde{\omega})$$

↓

$$\tilde{t} < \tau_M(\tilde{\omega})$$

↓

$$I_{[0, \tau_M(\tilde{\omega})]}(\tilde{t}) = 1, \quad \forall \tilde{\omega} \in A^c.$$

Un conto analogo per il processo di minimo mostra che

$$I_{[0, \tau_m(\tilde{\omega})]}(\tilde{t}) = 1, \quad \forall \tilde{\omega} \in A^c.$$

Dunque, inserendo queste ultime due espressioni in (4.24) e moltiplicando per $\gamma(Y_t)$, otteniamo che (4.25) è vera per ogni elemento di Ω .

Torniamo ora ad esaminare il primo termine della speranza di (4.23). Utilizzando la definizione di integrale di Skorohod e l'equazione (4.25) si ha

$$\begin{aligned} E^Q \left[\left(\operatorname{div} \Phi(G) \right) Z_T \right] &= E^Q \left[\frac{1}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \left(\operatorname{div} \Phi(G) \right) \int_0^T \gamma(Y_t) dt Z_T \right] \\ &= E^Q \left[\int_0^T D_s \left(\Phi(G) \right) \frac{\gamma(Y_s) Z_T}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} ds \right] \\ &= \left\langle D \cdot \left(\Phi(G) \right), \frac{\gamma(Y \cdot) Z_T}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \right\rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])} \\ &= \left\langle \Phi(G), \delta \left(\frac{\gamma(Y \cdot) Z_T}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \right) \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= E^Q \left[\Phi(G) \delta \left(\frac{\gamma(Y \cdot) Z_T}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

La tesi segue inserendo (4.27) in (4.23).

Ci rimane solamente da mostrare che il termine $\frac{\gamma(Y.)Z_T}{\int_0^T \gamma(Y_t)dt}$ appartiene al dominio di δ . A questo proposito è sufficiente verificare che

$$\left(\int_0^T \gamma(Y_t)dt \right)^{-1} \in L^p(\Omega) \quad (4.28)$$

per ogni $p \geq 1$. Grazie al Lemma 2.3.1 di [28] basta provare che, per ogni $p \geq 1$, $P(\int_0^T \gamma(Y_t)dt < \epsilon) = O(\epsilon^p)$ quando ϵ tende a zero. In virtù dell'ipotesi di non decrescenza di Y , tale probabilità è limitata dall'alto da

$$P\left(\frac{a}{2} < Y_\epsilon\right) \leq \frac{E^P[Y_\epsilon^q]}{(a/2)^q}.$$

Dunque (4.28) segue dall'ipotesi (4.6).

Il punto (a) è quindi dimostrato.

La dimostrazione del punto (b) è simile a quella del punto (a); per ottenere la tesi si usano le stesse idee del punto precedente, a meno di sostituire la variabile liscia Z_T con la variabile liscia H_1 . \square

È interessante notare come il Teorema (4.11) diventi molto più semplice nel caso Black & Scholes. Infatti, in questo modello, la funzione $h(t, X_t)$ è costante ed uguale al drift deterministico μ . Dunque non è necessario applicare il Teorema di Girsanov e passare sotto la misura di probabilità Q . Il Teorema (4.11) si può dunque rinunciare in questa forma:

Corollario 4.13. *Sia Y un processo dominante del processo $X_t = x + W_t + \mu t$ e sia Φ un payoff della forma (4.5), tali che siano soddisfatte le ipotesi (4.4) e (4.6).*

(a) *Se Y soddisfa l'ipotesi (4.7) di parametro 1, posto*

$$H_1 = \delta \left(\frac{1}{\int_0^T \gamma(Y_t)dt} \gamma(Y.) \right), \quad (4.29)$$

si ha

$$\partial_x E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T)] = E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T) H_1].$$

(b) *Se Y soddisfa l'ipotesi (4.7) di parametro 2, posto*

$$H_2 = \delta \left(\frac{H_1}{\int_0^T \gamma(Y_t)dt} \gamma(Y.) \right) + \partial_x H_1, \quad (4.30)$$

si ha

$$\partial_{xx}^2 E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T)] = E^P [\Phi(M_T, m_T, X_T) H_2].$$

Osservazione 4.14. *Il Corollario (4.13) è applicabile ad una classe di modelli ben più ampia del solo modello di Black & Scholes con coefficienti costanti. Infatti, come si legge nelle ipotesi, è sufficiente che le dinamiche (4.10) del processo X abbiano un coefficiente di drift costante.*

4.1.3 Costruzione di alcuni processi dominanti

Il Teorema (4.11) ci fornisce un modo per calcolare le greche una volta fissato un processo dominante Y delle dinamiche del sottostante X su un certo insieme di tempi $I \subset [0, T]$. In questa sezione daremo delle espressioni esplicite di alcuni processi dominanti, sia nel caso continuo $I = [0, T]$, sia nel caso discreto $I = \{t_1, \dots, t_n\}$.

Processi dominanti nel caso continuo $I = [0, T]$.

Il più semplice esempio di processo dominante è probabilmente il *processo degli estremi*, definito come

$$Y_t = \max_{s \leq t} (X_s - x) - \min_{s \leq t} (X_s - x). \quad (4.31)$$

Dalla definizione e dalla continuità delle traiettorie del processo X , è immediato verificare che il processo degli estremi è adattato, continuo e non decrescente. Inoltre, sempre dalla definizione, è evidente che (4.5) è verificata; dunque il processo degli estremi è effettivamente un processo dominante. Inoltre non è difficile verificare che tale processo soddisfa le ipotesi (4.6) e (4.7). Quindi il calcolo di Δ può essere effettuato utilizzando il punto (a) del Teorema (4.11). Purtroppo però il lemma (4.9) ci dice che i processi di massimo e minimo appartengono a $\mathbb{D}^{1,\infty}$, ma non a $\mathbb{D}^{2,p}$. Pertanto questo processo non sarà adatto per il calcolo di Γ o di greche di ordine superiore.

Abbiamo dunque bisogno di un processo dominante più regolare e sofisticato del processo degli estremi per poter calcolare le greche di ordine superiore al primo.

Fissato un numero intero pari θ , definiamo il *processo del modulo di continuità mediato* come

$$Y_t = 8 \left(4 \int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\theta}{|s - u|^{m+2}} ds du \right)^{1/\theta} \frac{m+2}{m} t^{m/\theta}. \quad (4.32)$$

Momentaneamente il parametro m è libero e vorremmo fissarlo in maniera da assicurare la buona definizione quasi certa del processo Y_t nell'intervallo $[0, T]$. Per fare ciò ci sarà molto utile la seguente Proposizione:

Proposizione 4.15. *Per ogni θ naturale esiste $C_\theta \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $s, u \in [0, T]$,*

$$E \left[|X_s - X_u|^\theta \right] \leq C_\theta |s - u|^{\theta/2}.$$

Dimostrazione. Le dinamiche (4.10) ci dicono che

$$X_t = x + W_t + \int_0^t h(t, X_t) dt,$$

dunque, per ogni $\theta \in \mathbb{N}$, si ha

$$E \left[|X_s - X_u|^\theta \right] = E \left[\left| (W_s - W_u) + \int_u^s h(t, X_t) dt \right|^\theta \right].$$

Grazie all'ovvia diseuguaglianza

$$|a - b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),$$

è sufficiente dimostrare separatamente che i due termini $(W_s - W_u)$ e $\int_u^s h(t, X_t) dt$ soddisfano la diseuguaglianza richiesta.

Il termine $(W_s - W_u)$ ha la stessa legge di $(\sqrt{s-u} \cdot Z)$, con $Z \sim N(0, 1)$. Dunque, detto K_p il momento p -esimo di una variabile aleatoria normale standard, si ha

$$E \left[|W_s - W_u|^\theta \right] \leq K_\theta |s - u|^{\theta/2}.$$

Invece, per quanto riguarda il termine $\int_u^s h(t, X_t) dt$, è sufficiente ricordare che $h \in C_b^\infty$, dunque, detto $M = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |h(x, y)|$, si ha

$$E \left[\left| \int_u^s h(t, X_t) dt \right|^\theta \right] \leq E \left[(M|s - u|)^\theta \right] \leq M^\theta T^{\theta/2} |s - u|^{\theta/2},$$

dove l'ultima diseuguaglianza segue dal fatto che stiamo lavorando su un insieme di tempi contenuto in $[0, T]$. Per ottenere la tesi basta porre

$$C_\theta = 2^\theta (K_\theta + M^\theta T^{\theta/2}).$$

□

La Proposizione (4.15) ci assicura che, scegliendo $m \in (0, \frac{\theta}{2} - 2)$, il termine

$$E \left(\int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\theta}{|s - u|^{m+2}} ds du \right) < +\infty,$$

ossia il processo del modulo di continuità mediato (4.32) è quasi certamente ben definito.

Il processo del modulo di continuità mediato è ovviamente adattato, non decrescente e continuo. Al fine di usare il processo Y nel Teorema (4.11), abbiamo bisogno del seguente Teorema:

Teorema 4.16. *Sia Y definito da (4.32), θ un numero intero pari e sia m un numero reale tale che $0 < m < \frac{\theta}{2} - 2$. Allora:*

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

- i) Y è un processo dominante;
- ii) l'ipotesi (4.6) è verificata da Y ;
- iii) l'ipotesi (4.7) di parametro q è verificata da Y per ogni q tale che $1 \leq q \leq \theta - 2(m + 2)$.

Per dimostrare il Teorema (4.16) è necessario qualche risultato preliminare.

Lemma 4.17. (Lemma di Garsia-Rodemich-Rumsey) Sia $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione pari e non decrescente sull'intervallo $[0, +\infty)$; sia inoltre $p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione continua, pari, non decrescente sull'intervallo $[0, 1]$, tale che $p(0) = 0$ e $p(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$. Infine sia definita una funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tale che esista un numero reale B per cui valga:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Psi \left(\frac{f(x) - f(y)}{p(x - y)} \right) dx dy \leq B \quad (4.33)$$

Per ogni $u \geq \Psi(0)$, poniamo

$$\Psi^{-1}(u) = \sup \{v : \Psi(v) \leq u\}.$$

Allora, per ogni $s, r \in [0, 1]$, vale

$$|f(s) - f(r)| \leq 8 \int_0^{|s-r|} \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) dp(u). \quad (4.34)$$

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando la disuguaglianza (4.34) nel caso particolare $|f(1) - f(0)|$. Definiamo

$$I(t) = \int_0^1 \Psi \left(\frac{f(s) - f(t)}{p(s - t)} \right) ds.$$

Il primo membro dell'equazione (4.33) può essere letto come media della funzione $I(t)$ nell'intervallo $(0, 1)$. Dunque, poiché la media è minore o uguale della costante B , deve esistere un valore $t_0 \in (0, 1)$ tale che $I(t_0) \leq B$. Per ogni $u \in [0, p(1)]$ poniamo

$$p^{-1}(u) = \max\{v : p(v) \leq u\}.$$

Per induzione costruiamo una successione $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, strettamente decrescente e convergente a zero, nel seguente modo: dato t_{n-1} sia

$$d_{n-1} = p^{-1} \left(\frac{1}{2} p(t_{n-1}) \right)$$

e scegliamo $t_n \leq d_{n-1}$ in modo che siano soddisfatte

- (1) $I(t_n) \leq \frac{2B}{d_{n-1}}$,
- (2) $\Psi\left(\frac{f(t_n)-f(t_{n-1})}{p(t_n-t_{n-1})}\right) \leq \frac{2I(t_{n-1})}{d_{n-1}}$.

Dobbiamo mostrare che la successione dei t_n si possa effettivamente costruire. Chiamiamo A_1 e A_2 gli insiemi di tempi t_n per cui le condizioni (1) e (2) non sono soddisfatte, ossia

$$A_1 = \left\{ t_n \leq d_{n-1} : I(t_n) > \frac{2B}{d_{n-1}} \right\}.$$

$$A_2 = \left\{ t_n \leq d_{n-1} : \Psi\left(\frac{f(t_n)-f(t_{n-1})}{p(t_n-t_{n-1})}\right) > \frac{2I(t_{n-1})}{d_{n-1}} \right\}.$$

Dobbiamo far vedere che, per ogni n , è sempre possibile scegliere un valore $t_n \in [0, d_{n-1}]$ che soddisfi (1) e (2). In termini matematici dobbiamo mostrare che, detta λ la misura di Lebesgue su \mathbb{R} , si ha $\lambda(A_1 \cup A_2) < d_{n-1}$. Per subadditività sarà sufficiente far vedere che $\lambda(A_i) < \frac{d_{n-1}}{2}$, per $i \in \{1, 2\}$.

Il fatto che la funzione Ψ sia non negativa implica che $I(t) > 0$ per ogni t . Se, per assurdo, A_1 avesse misura di Lebesgue maggiore o uguale a $\frac{d_{n-1}}{2}$, si avrebbe

$$\int_0^1 I(t) dt \geq \int_{A_1} I(t) dt > \frac{2B}{d_{n-1}} \lambda(A_1) \geq B,$$

che è in ovvia contraddizione con (4.33). Dunque $\lambda(A_1) < \frac{d_{n-1}}{2}$.

Supponiamo ora per assurdo che $\lambda(A_2) \geq \frac{d_{n-1}}{2}$. Allora

$$\begin{aligned} I(t_{n-1}) &= \int_0^1 \Psi\left(\frac{f(t)-f(t_{n-1})}{p(t-t_{n-1})}\right) dt \\ &\geq \int_{A_2} \Psi\left(\frac{f(t)-f(t_{n-1})}{p(t-t_{n-1})}\right) dt \\ &> \frac{2I(t_{n-1})}{d_{n-1}} \lambda(A_2) \geq I(t_{n-1}), \end{aligned}$$

che è un assurdo. La successione $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è quindi ben definita. Poiché $d_n \leq d_{n-1}$, la condizione (1) implica, per ogni $n \geq 1$,

$$I(t_n) \leq \frac{2B}{d_n}.$$

Questa diseuguaglianza è banalmente vera per $n = 0$. Dunque dalla condizione (2) e dalla positività di p segue che

$$\begin{aligned} |f(t_n) - f(t_{n-1})| &\leq p(t_{n-1} - t_n) \Psi^{-1}\left(\frac{2I(t_{n-1})}{d_{n-1}}\right) \\ &\leq p(t_{n-1} - t_n) \Psi^{-1}\left(\frac{4B}{d_{n-1}^2}\right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Dalla definizione di d_{n-1} si ha che

$$p(t_{n-1} - t_n) \leq p(t_{n-1}) = 2p(d_{n-1}),$$

inoltre

$$p(d_n) = \frac{1}{2}p(t_n) \leq \frac{1}{2}p(d_{n-1}),$$

da cui segue ovviamente

$$p(t_{n-1} - t_n) \leq 4[p(d_{n-1}) - p(d_n)].$$

Inserendo l'ultima disuguaglianza in (4.35), sommando sui tempi e usando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\begin{aligned} |f(t_0) - f(0)| &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} [p(d_{n-1}) - p(d_n)] \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{d_{n-1}^2} \right) \\ &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{d_n}^{d_{n-1}} \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) dp(u) \\ &\leq 4 \int_0^1 \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) dp(u). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Lavorando in maniera simile con $f(1-t)$ al posto di $f(t)$ si ottiene la stima (4.36) per $|f(t_0) - f(1)|$. Unendo le due stime si ha la nostra tesi nel caso di $|f(1) - f(0)|$.

Notiamo che la nostra tesi è ovvia nel caso in cui l'integrale di (4.34) sia divergente. Senza perdita di generalità possiamo dunque supporre che tale termine sia finito.

Fissati due valori s e t , definiamo le funzioni ausiliarie \bar{f} e \bar{p} nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{t}) &= f(s + \bar{t}(t-s)) \quad \forall \bar{t} \in [0, 1], \\ \bar{p}(u) &= p(u|t-s|). \end{aligned}$$

Restringendo il dominio di integrazione nell'ipotesi (4.33) ed effettuando un cambio di variabili si ottiene la stima

$$\int_0^1 \int_0^1 \Psi \left(\frac{\bar{f}(\bar{s}) - \bar{f}(\bar{t})}{\bar{p}(\bar{s} - \bar{t})} \right) d\bar{s} d\bar{t} \leq \frac{B}{|s-t|^2}$$

A questo punto possiamo ricondurci al caso $(s, t) = (0, 1)$ e dedurre

$$|f(s) - f(t)| = |\bar{f}(1) - \bar{f}(0)| \leq 8 \int_0^1 \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2|s-t|^2} \right) dp(u|s-t|).$$

La tesi segue dall'ultima equazione grazie ad un ulteriore cambio di variabile. \square

Proposizione 4.18. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato, con μ misura finita. Per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$ esiste $\kappa_\alpha \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $X > 0$ e per ogni $S \subset \Omega$ si abbia:*

- (a) $\int_S X^\alpha d\mu \leq \kappa_\alpha \left(\int_S X d\mu\right)^\alpha$, se $\alpha \in (0, 1)$;
 (b) $\int_S X^\alpha d\mu \geq \kappa_\alpha \left(\int_S X d\mu\right)^\alpha$, se $\alpha \in [1, +\infty)$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue quasi immediatamente dalla disuguaglianza di Hölder:

$$\int_A |fg|d\mu \leq \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_A |g|^q d\mu\right)^{1/q},$$

per ogni $p, q \in [1, +\infty]$, tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (si adotta la notazione $\frac{1}{\infty} = 0$). Infatti, per dimostrare (a), basta scegliere $g = 1$, $f = X^\alpha$, $p = \frac{1}{\alpha} > 1$, $A = S$ e $\kappa_\alpha = \mu(S)^{1-\alpha}$.

Invece, per dimostrare (b), si sceglie $g = 1$, $f = X$, $p = \alpha > 1$ e $\kappa_\alpha = \mu(S)^{\alpha/(\alpha-1)}$. \square

Siamo ora pronti per dimostrare il Teorema (4.16):

Dimostrazione. Dimostriamo il punto (i), ossia che Y è un processo dominante rispetto a X . Dobbiamo mostrare che vale la relazione (4.5) per avere la tesi. Applichiamo il lemma di Garsia-Rodemich-Rumsey (4.17) scegliendo $\Psi(x) = x^\theta$, $r = 0$, $p(x) = |x|^{\frac{m+2}{\theta}}$, $f(s) = X_s$ e prendendo una famiglia B_t , parametrizzata dal tempo t , definita come:

$$B_t = \int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\theta}{|s - u|^{m+2}} ds du.$$

Essendo $dp(x) = \left(\frac{m+2}{\theta}\right) x^{\frac{m+2-\theta}{\theta}} dx$, per ogni $s \in [0, t]$ si ha

$$\begin{aligned} |X_s - x| &\leq 8 \int_0^s \left(\frac{4B_t}{u^2}\right)^{1/\theta} \left(\frac{m+2}{\theta}\right) u^{\frac{m+2-\theta}{\theta}} du \\ &= 8(4B_t)^{1/\theta} \left(\frac{m+2}{m}\right) s^{m/\theta} \leq Y_t. \end{aligned}$$

Quindi (4.5) è verificata e (i) è dimostrato.

Proviamo ora il punto (ii), ossia che vale l'ipotesi (4.6). Definendo $K_q = 8^q 4^{q/\theta} \left(\frac{m+2}{m}\right)^q$, si ha

$$E[Y_t^q] \leq K_q t^{\frac{mq}{\theta}} E\left[\left(\int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\theta}{|s - u|^{m+2}} ds du\right)^{\frac{q}{\theta}}\right], \quad \forall q \geq 1. \quad (4.37)$$

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Restringiamoci ora alla verifica dell'ipotesi (4.6) nel caso in cui q sia tale che $\frac{q}{\theta} < 1$. Applicando il punto (a) della Proposizione (4.18) e il Teorema di Fubini-Tonelli, si ottiene:

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\theta}{|s - u|^{m+2}} ds du \right)^{\frac{q}{\theta}} \right] &\leq \kappa_{q/\theta} \left(E \left[\int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\theta}{|s - u|^{m+2}} ds du \right] \right)^{\frac{q}{\theta}} \\ &= \kappa_{q/\theta} \left(\int_0^t \int_0^t \frac{E[|X_s - X_u|^\theta]}{|s - u|^{m+2}} ds du \right)^{\frac{q}{\theta}}. \end{aligned}$$

Inseriamo quest'ultima espressione in (4.37) e applichiamo la Proposizione (4.15) per avere:

$$\begin{aligned} E[Y_t^q] &\leq \kappa_{q/\theta} K_q t^{\frac{mq}{\theta}} \left(\int_0^t \int_0^t \frac{E[|X_s - X_u|^\theta]}{|s - u|^{m+2}} ds du \right)^{\frac{q}{\theta}} \\ &\leq \kappa_{q/\theta} K_q t^{\frac{mq}{\theta}} \left(C_\theta \int_0^t \int_0^t |s - u|^{\frac{\theta}{2} - m - 2} ds du \right)^{\frac{q}{\theta}}; \end{aligned}$$

Grazie all'ipotesi $0 < m < \frac{\theta}{2} - 2$, la funzione $|x|^{\frac{\theta}{2} - m - 2}$ è crescente in x . Ne segue che, nell'ultimo integrale scritto, il termine $|s - u|$ può essere maggiorato da t (infatti tanto s quanto u possono variare tra 0 e t). Pertanto, detta $\tilde{C}_q = \kappa_{q/\theta} C_\theta^{\frac{q}{\theta}} K_q$, abbiamo:

$$\begin{aligned} E[Y_t^q] &\leq \tilde{C}_q t^{\frac{mq}{\theta}} \left(\int_0^t \int_0^t t^{\frac{\theta}{2} - m - 2} ds du \right)^{\frac{q}{\theta}} \\ &= \tilde{C}_q t^{\frac{mq}{\theta}} \left(t^{\frac{\theta}{2} - m} \right)^{\frac{q}{\theta}} \\ &= \tilde{C}_q t^{\frac{mq}{\theta} + \frac{q}{\theta}(\frac{\theta}{2} - m)} \\ &= \tilde{C}_q t^{\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Il primo e l'ultimo termine dell'ultima catena di passaggi danno esattamente la tesi, sempre nel caso $\frac{q}{\theta} < 1$.

Consideriamo ora il caso complementare, $\frac{q}{\theta} \geq 1$. Usando il punto (b) della Proposizione (4.18), chiamando $\tilde{C}_q = \kappa_{q/\theta} K_q C_q$, in maniera analoga a

quanto fatto prima si ha:

$$\begin{aligned}
E[Y_t^q] &= K_q t^{\frac{mq}{\theta}} E \left[\left(\int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^\theta}{|s - u|^{m+2}} ds du \right)^{\frac{q}{\theta}} \right] \\
&\leq \kappa_{q/\theta} K_q t^{\frac{mq}{\theta}} E \left[\int_0^t \int_0^t \frac{|X_s - X_u|^q}{|s - u|^{(m+2)q/\theta}} ds du \right] \\
&= \kappa_{q/\theta} K_q t^{\frac{mq}{\theta}} \int_0^t \int_0^t \frac{E[|X_s - X_u|^q]}{|s - u|^{(m+2)q/\theta}} ds du \\
&\leq \kappa_{q/\theta} K_q C_q t^{\frac{mq}{\theta}} \int_0^t \int_0^t |s - u|^{\frac{q}{\theta}(\frac{\theta}{2} - m - 2)} ds du \\
&\leq \bar{C}_q t^{\frac{mq}{\theta}} \int_0^t \int_0^t t^{\frac{q}{\theta}(\frac{\theta}{2} - m - 2)} ds du \\
&= \bar{C}_q t^{(\frac{q}{2} - \frac{2q}{\theta} + 2)}.
\end{aligned}$$

Dunque, notando che il coefficiente all'esponente di t diverge a $+\infty$ quando $q \rightarrow +\infty$, si ha la tesi anche nel caso $\frac{q}{\theta} \geq 1$. Il punto (ii) è quindi dimostrato.

Occupiamoci infine di dimostrare il punto (iii). Grazie ad alcuni argomenti dimostrati nel capitolo 2.2 di [28], è possibile provare che, per ogni $t \in [0, T]$, si ha che $B_t \in \mathbb{D}^{q, \infty}$ se $q \leq \theta - 2(m + 2)$. Inoltre, per $j = 1, \dots, q$, vale

$$\sup_{r_1, \dots, r_j \in [0, T]} E \left(\sup_{r_1 \vee \dots \vee r_j \leq t \leq T} \|D_{r_1, \dots, r_j} B_t\|^p \right) \leq C_p$$

per ogni $p \geq 1$. Poiché la funzione $x \rightarrow \gamma(8(4x)^{1/\theta}(m + 2/m)t^{m/\theta})$, definita su \mathbb{R}^+ , è di classe C_b^∞ , abbiamo dimostrato che vale la relazione (4.44). In maniera simile è possibile dimostrare che le stesse stime sono soddisfatte dalle derivate di $\gamma(Y_t)$ rispetto al dato iniziale x . □

Processi dominanti nel caso discreto $I = \{t_0, \dots, t_N\}$.

Nel caso discreto $I = \{t_0, \dots, t_N\}$, trovare un processo dominante con delle buone proprietà di regolarità è ben più semplice che nel caso continuo.

Anche in questo caso il *processo degli estremi*

$$Y_t = \max_{0 \leq i \leq N, t_i \leq t} (X_{t_i} - x) - \min_{0 \leq i \leq N, t_i \leq t} (X_{t_i} - x)$$

è adattato, non decrescente, continuo a destra e soddisfa (4.5). Dunque è un processo dominante. Inoltre è facile vedere che anche l'ipotesi (4.6) e l'ipotesi (4.7) di parametro 1 sono soddisfatte. È dunque possibile usare il processo degli estremi per calcolare il Δ di opzioni con barriera.

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Purtroppo, come nel caso continuo, nulla ci assicura che tale processo appartenga a $\mathbb{D}^{2,p}$, dunque dovremo cercare un altro processo dominante per effettuare le simulazioni della greca Γ .

A questo scopo definiamo il processo

$$Y_t = \sqrt{N \sum_{0 \leq i \leq N, t_i \leq t} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}. \quad (4.38)$$

Questo processo è adattato, non decrescente e continuo a destra. Inoltre vale la seguente Proposizione:

Proposizione 4.19. *Sia Y_t il processo definito dall'equazione (4.38). Allora:*

- i) Y domina X nell'insieme $I = \{t_0, \dots, t_N\}$;*
- ii) l'ipotesi (4.6) è verificata da Y ;*
- iii) l'ipotesi (4.7) di parametro q è verificata da Y per ogni $q \geq 1$.*

Dimostrazione. Poiché i punti (ii) e (iii) seguono da argomenti simili a quelli usati nella dimostrazione della Proposizione (4.16), limitiamoci a dimostrare il punto (i). In particolare ci è sufficiente mostrare che (4.5) è soddisfatta.

Dalla convessità della funzione $f(x) = x^2$ segue che, detto $g(t) = \#\{i : 0 \leq i \leq N, t_i \leq t\}$,

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{g(t)} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|}{g(t)} \right)^2 \leq \frac{1}{g(t)} \sum_{i=1}^{g(t)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2.$$

Dunque, grazie alla diseuguaglianza triangolare e al fatto che $g(t) < N$, si ha, per ogni $i = 0, \dots, N$,

$$|X_{t_i} - x| \leq \sum_{i=1}^{g(t_i)} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \leq \sqrt{N \sum_{i=1}^{g(t_i)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2} = Y_{t_i}.$$

□

4.2 Le greche nel caso multidimensionale: modelli con matrice di volatilità costante

In questo paragrafo verranno estesi i risultati della sezione precedente al caso multidimensionale, ossia ad un modello in cui siano presenti d sottostanti, eventualmente correlati tra loro. Ci occuperemo solamente del caso in cui le correlazioni tra i vari sottostanti e le volatilità siano delle costanti, indipendenti dal tempo e dal livello di prezzo dei beni presenti nel mercato.

Supponiamo dunque di avere un sottostante con rischio d -dimensionale $\{S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)\}_{t \geq 0}$ le cui dinamiche, sotto la probabilità Risk-Neutral P , siano date da

$$dS_t^i = S_t^i \left(r dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_t^j \right), \quad (4.39)$$

dove $\{W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)\}_{t \geq 0}$ è un processo di Wiener standard d -dimensionale, r il tasso di interesse e $\sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ la matrice di volatilità, che assumeremo invertibile.

Come nel caso unidimensionale, fissiamo un insieme di tempi $I \subset [0, T]$. Ci occuperemo di payoff della forma

$$\Phi \left(\max_{s \in I} S_s^1, \dots, \max_{s \in I} S_s^d, \min_{s \in I} S_s^1, \dots, \min_{s \in I} S_s^d, S_T^1, \dots, S_T^d \right). \quad (4.40)$$

4.2.1 Preliminari

È noto che, se il vettore di prezzi S_t segue le dinamiche (4.39), allora

$$\ln(S_t^i) = \ln(S_0^i) + \mu^i t + \sigma^i \cdot dW_t,$$

dove $\sigma^i = (\sigma_{i,1}, \dots, \sigma_{i,d})^*$ (il simbolo $*$ come apice di un vettore indica che si sta considerando il vettore trasposto) e $\mu^i = (r - \frac{1}{2} \|\sigma^i\|^2)$.

Denotiamo con $M^i = \max_{s \in I} S_s^i$ e con $m^i = \min_{s \in I} S_s^i$.

Come nel caso unidimensionale abbiamo bisogno di alcune ipotesi aggiuntive sui supporti delle famiglie di payoff (4.40). L'esempio che segue serve a far vedere l'impossibilità di trovare un peso di Malliavin per un generico payoff della forma (4.40).

Esempio 4.20. Sia $\{X_t\}_{t \in [0, \infty)}$ definito da $X_t = x + W_t$, dove $\{W_t\}_{t \in [0, \infty)}$ è un processo di Wiener unidimensionale e $x \in \mathbb{R}$. Supponiamo di avere un payoff della forma $f(\max_{t \in [0,1]} X_t)$ e di essere interessati a una scrittura del suo Δ del tipo

$$\Delta = \partial_x E \left[f\left(\max_{t \in [0,1]} X_t\right) \right] = E \left[f\left(\max_{t \in [0,1]} X_t\right) H \right], \quad (4.41)$$

per una certa variabile aleatoria di quadrato integrabile H .

Dall'equazione (4.14), che fornisce esplicitamente la densità del processo di massimo, segue che

$$\begin{aligned} \partial_x E \left[f\left(\max_{t \in [0,1]} X_t\right) \right] &= \partial_x \int_x^{+\infty} f(y) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2} \right\} dy \\ &= -f(x) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + \int_x^{+\infty} f(y) (y-x) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2} \right\} dy \\ &= -f(x) \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + E \left[\left(f\left(\max_{t \in [0,1]} X_t\right) \right) \left(\max_{t \in [0,1]} X_t - x \right) \right]. \end{aligned}$$

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Dall'ultima espressione risulta evidente che trovare un peso H che soddisfi (4.41) è impossibile in generale se $f(x) \neq 0$.

Ipotesi 4.21. *Esiste una costante $a > 0$ tale che, per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$, la funzione $\Phi(M^1, \dots, M^d, m^1, \dots, m^d, S_T^1, \dots, S_T^d)$ non dipende da M^i (rispettivamente da m^i) se $M^i < S_0^i \exp(a)$ (rispettivamente $m^i > S_0^i \exp(-a)$).*

Procedendo parallelamente a quanto fatto nel caso unidimensionale, cerchiamo di stabilire il grado di derivabilità delle funzioni M^i e m^i . Siano τ_M^i e τ_m^i definiti dalle equazioni

$$\begin{aligned} M^i &= S_{\tau_M^i}^i, \\ m^i &= S_{\tau_m^i}^i. \end{aligned}$$

La Proposizione (4.8) assicura che tali tempi aleatori siano ben definiti.

Vale il seguente lemma:

Lemma 4.22. *Per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$, le variabili aleatorie M^i , m^i e S_T^i appartengono a $\mathbb{D}^{1,\infty}$ e le loro derivate di Malliavin sono date da*

$$D_t M^i = M^i I_{t \leq \tau_M^i} \sigma^i, \quad D_t m^i = m^i I_{t \leq \tau_m^i} \sigma^i, \quad D_t S_T^i = S_T^i \sigma^i \quad \forall t \leq T.$$

La dimostrazione di (4.22) si basa su una generalizzazione al caso multidimensionale del lemma (4.9) della sezione precedente. Infatti è possibile dimostrare che

$$D_t \left(\max_{t \in I} [\mu_t^i + \sigma^i \cdot W_t] \right) = I_{t \leq \tau_M^i} \sigma^i, \quad (4.42)$$

$$D_t \left(\min_{t \in I} [\mu_t^i + \sigma^i \cdot W_t] \right) = I_{t \leq \tau_m^i} \sigma^i, \quad (4.43)$$

(per la dimostrazione si veda l'articolo di Nualart e Vives [29]).

Dunque per dimostrare (4.22) è sufficiente notare che

$$M^i = S_0^i \exp \left(\max_{t \in I} [\mu^i t + \sigma^i \cdot W_t] \right),$$

$$m^i = S_0^i \exp \left(\min_{t \in I} [\mu^i t + \sigma^i \cdot W_t] \right),$$

usare la regola della catena e le espressioni (4.42) e (4.43).

Diamo ora la definizione di processo dominante. A differenza di quanto fatto precedentemente, inseriremo l'ipotesi (4.6) direttamente nella definizione di processo dominante.

Definizione 4.23. *Diremo che il processo $\{Y_t\}_{t \in [0, \infty)}$ è dominante se:*

- (i) Y è adattato, non decrescente e continuo a destra;

$$(ii) \quad |\mu^i t + \sigma^i \cdot W_t| \leq Y_t \quad \forall t \in I, \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

(iii) Esiste una funzione positiva $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, con $\lim_{q \rightarrow +\infty} \alpha(q) = +\infty$, tale che, $\forall q \geq 1$ e $\forall t \in [0, T]$, $E(Y_t^q) \leq C_q t^{\alpha(q)}$.

Scegliamo ora una funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tale che $I_{(-\infty, a/2]}(x) \leq \gamma(x) \leq I_{(-\infty, a]}(x)$ e tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\gamma^{(k)}(x)| \leq C_k/a^k$, per certe costanti $C_k > 0$ (a è la costante che compare nell'ipotesi (4.21)).

Ipotesi 4.24. Diremo che Y soddisfa l'ipotesi (4.24) di parametro $q \in \mathbb{N}^*$ se:

$$(i) \quad \gamma(Y_t) \in \mathbb{D}^{q, \infty}, \quad \forall t \in [0, T];$$

$$(ii) \quad \forall j \in \{1, \dots, q\}, \quad \forall p \geq 1$$

$$\sup_{r_1, \dots, r_j \in [0, T]} E \left(\sup_{r_1 \vee \dots \vee r_j \leq t \leq T} \|D_{r_1, \dots, r_j} \gamma(Y_t)\|^p \right) \leq C_p. \quad (4.44)$$

4.2.2 Il calcolo delle greche e la scelta di processi dominanti.

Sia e^i l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^d . Vale il seguente Teorema:

Teorema 4.25. Sia Y un processo dominante e sia soddisfatta l'ipotesi (4.21). Allora:

(a) se Y soddisfa l'ipotesi (4.24) di parametro 1 si ha, per ogni $1 \leq i \leq d$,

$$\begin{aligned} \Delta^i &= \partial_{S_0^i} E \left(e^{-rT} \Phi(M^1, \dots, M^d, m^1, \dots, m^d, S_T^1, \dots, S_T^d) \right) \\ &= E \left(e^{-rT} \Phi(M^1, \dots, M^d, m^1, \dots, m^d, S_T^1, \dots, S_T^d) H_{\Delta^i} \right), \end{aligned}$$

dove

$$H_{\Delta^i} = \frac{1}{S_0^i} \delta \left(\frac{\gamma(Y)}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \sigma^{-1} \cdot e^i \right).$$

(b) se Y soddisfa l'ipotesi (4.24) di parametro 2 si ha, per ogni $1 \leq i, j \leq d$,

$$\begin{aligned} \Gamma^{i,j} &= \partial_{S_0^i, S_0^j} E \left(e^{-rT} \Phi(M^1, \dots, M^d, m^1, \dots, m^d, S_T^1, \dots, S_T^d) \right) \\ &= E \left(e^{-rT} \Phi(M^1, \dots, M^d, m^1, \dots, m^d, S_T^1, \dots, S_T^d) H_{\Gamma^{i,j}} \right), \end{aligned}$$

dove, indicata con $\delta_{i,j}$ la delta di Kronecker,

$$\begin{aligned} H_{\Gamma^{i,j}} &= \frac{1}{S_0^i S_0^j} \delta \left(\delta \left(\frac{\gamma(Y)}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \sigma^{-1} \cdot e^i \right) \frac{\gamma(Y)}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \sigma^{-1} \cdot e^j \right) \\ &\quad - \frac{1}{(S_0^i)^2} \delta \left(\frac{\gamma(Y)}{\int_0^T \gamma(Y_t) dt} \sigma^{-1} \cdot e^i \right) \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

4. Il calcolo delle greche di opzioni con barriera per mezzo della teoria di Malliavin

Le idee della dimostrazione di questo Teorema sono le stesse usate per la dimostrazione del Teorema (4.11), a meno di adattare alcuni passaggi al caso multidimensionale. Tale dimostrazione verrà quindi omessa. Per i dettagli si veda l'articolo [8].

Infine osserviamo che gli stessi processi dominanti usati nel caso unidimensionale possono essere usati anche in contesto multidimensionale.

Proposizione 4.26. *Nel caso continuo $I = [0, T]$ si ha che:*

(1) *il processo degli estremi*

$$Y_t = \max_{1 \leq i \leq d} \left(\max_{0 \leq s \leq t} [\mu^i s + \sigma^i \cdot W_s] - \min_{0 \leq s \leq t} [\mu^i s + \sigma^i \cdot W_s] \right)$$

è un processo dominante e soddisfa l'ipotesi (4.24) di parametro 1.

(2) *il processo del modulo di continuità mediata*

$$Y_t = 8 \left(4 \int_0^t \int_0^t \frac{\|\mu(s-u) + \sigma(W_s - W_u)\|^\theta}{|s-u|^{m+2}} ds du \right)^{1/\theta} \frac{m+2}{m} t^{m/\theta},$$

dove θ è un numero intero pari e $0 < m < \frac{\theta}{2} - 2$, è un processo dominante e soddisfa l'ipotesi (4.24) di parametro q , per ogni $q \in [1, \theta - 2(m+2)]$.

Proposizione 4.27. *Nel caso discreto $I = \{0 = t_0 < \dots < t_N = T\}$ si ha che:*

(1) *il processo degli estremi*

$$Y_t = \max_{1 \leq i \leq d} \left(\max_{0 \leq j \leq N; t_j \leq t} [\mu^i t_j + \sigma^i \cdot W_{t_j}] - \min_{0 \leq j \leq N; t_j \leq t} [\mu^i t_j + \sigma^i \cdot W_{t_j}] \right)$$

è un processo dominante e soddisfa l'ipotesi (4.24) di parametro 1.

(2) *il processo degli incrementi quadratici mediati*

$$Y_t = \sqrt{N \sum_{1 \leq j \leq N: t_j \leq t} \|\mu(t_j - t_{j-1}) + \sigma \cdot (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\|^2}$$

è un processo dominante e soddisfa l'ipotesi (4.24) di parametro q , per ogni $q \geq 1$.

Anche le dimostrazioni di queste due proposizioni sono del tutto analoghe a quelle del caso unidimensionale, quindi verranno omesse.

Capitolo 5

Le greche di opzioni con barriere discrete

Nelle sezioni precedenti abbiamo sviluppato dei metodi che ci permettono di calcolare le greche di opzioni con barriera continue o discrete, sia nel caso unidimensionale che in quello multidimensionale. Purtroppo però questi risultati non sono utilizzabili quando si stanno usando modelli più sofisticati, come ad esempio i modelli a volatilità stocastica. Supponiamo di avere un sottostante S_t , con volatilità σ_t , che segua le dinamiche

$$\begin{cases} dS_t = \mu(t, S_t, \sigma_t)dt + \lambda(t, S_t, \sigma_t)dW_t^1 \\ d\sigma_t = \nu(t, S_t, \sigma_t)dt + \zeta(t, S_t, \sigma_t)dW_t^2, \end{cases} \quad (5.1)$$

dove W_t^1 e W_t^2 sono due processi di Wiener unidimensionali con coefficiente di correlazione costante ρ .

Il Teorema (3.7), che si limita a fornire un'espressione delle greche per modelli a volatilità deterministica (modelli a volatilità locale), non ci è di aiuto in questa situazione; inoltre molti dei ragionamenti fatti per arrivare alla tesi non possono essere estesi a casi più generali.

Un'idea potrebbe essere quella di vedere la volatilità come un nuovo sottostante, considerare il vettore aleatorio $U_t = (S_t, \sigma_t)$, e notare che le dinamiche seguite da U_t sono

$$dU_t = \beta(t, U_t)dt + \vartheta(t, U_t)dW_t,$$

dove W_t è un processo di Wiener standard bidimensionale e

$$\beta(t, x, y) = \begin{pmatrix} \mu(t, x, y) \\ \nu(t, x, y) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\vartheta(t, x, y) = \begin{pmatrix} \lambda(t, x, y) & 0 \\ \rho\zeta(t, x, y) & \sqrt{1 - \rho^2}\zeta(t, x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Si potrebbe dunque pensare di usare il Teorema (4.25) sul processo bidimensionale U_t . Purtroppo, come si vede da (5.2), tale processo non ha una matrice di volatilità costante, dunque non possiamo applicare (nè tantomeno adattare) i ragionamenti della sezione precedente al nostro caso.

Dunque per poter usare i modelli a volatilità locale dovremo procedere in un altro modo. Di seguito verranno dimostrati dei risultati che ci permetteranno di calcolare le greche nel caso unidimensionale per un generico modello, ma solo nel caso di opzioni con barriera discrete. L'estensione al caso continuo, ossia una sintesi che estenderebbe i risultati esposti in questa tesi, è un problema che dovrebbe essere tuttora aperto.

5.1 Variazioni dei Parametri

In questo paragrafo vedremo come gli strumenti teorici del calcolo di Malliavin presentati nei capitoli precedenti possano essere applicati a problemi finanziari.

I risultati che dimostreremo saranno validi per tutti i payoff dipendenti dal prezzo del sottostante monitorato in una quantità finita di tempi, ossia payoff del tipo

$$\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}).$$

Questo vuol dire che i risultati che otterremo saranno applicabili ad opzioni con barriere discrete, ma non ad opzioni con barriera continuamente monitorata.

Supponiamo di essere in un modello in cui il processo di Itô d -dimensionale $\{X_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ segua le dinamiche

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

dove $\{W_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ è un processo di Wiener standard d -dimensionale e le funzioni μ e σ sono supposte differenziabili con continuità e con derivate Lipschitziane e limitate. Sotto queste ipotesi il Teorema (2.18) ci assicura l'esistenza e l'unicità di un'unica soluzione X e, grazie alla generalizzazione multidimensionale del Teorema (2.20), tale soluzione appartiene a $\mathbb{D}^{1,2}$. Inoltre l'osservazione (2.25) ci dice che il processo di variazione prima associato a X segue le dinamiche

$$\begin{cases} dY_t = \mu'(X_t)Y_t dt + \sum_{i=0}^d \sigma'_i(X_t)Y_t dW_t^i \\ Y_0 = I_d. \end{cases} \quad (5.4)$$

Poiché le funzioni μ' e σ' sono Lipschitziane e limitate, si ha che il processo di variazione prima Y appartiene ad $L^2(\Omega \times [0, T])$ (si veda Karatzas [23], Teorema 2.9). Inoltre abbiamo bisogno di un'ipotesi tecnica aggiuntiva, ossia che la volatilità soddisfi l'ipotesi di uniforme ellitticità.

Ipotesi 5.1. *Esiste un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^d$, la matrice di volatilità soddisfi la condizione*

$$\xi^* \sigma^*(x) \sigma(x) \xi \geq \epsilon |\xi|^2.$$

Grazie a questa ipotesi il processo $\{\sigma^{-1}(X_t) Y_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ appartiene a $L^2(\Omega \times [0, T])$. Inoltre, se γ è una funzione limitata, allora il processo $\{\sigma^{-1}(\gamma(X_t))\}_{t \in [0, +\infty)}$ appartiene a $L^2(\Omega \times [0, T])$ e la funzione $\sigma^{-1}\gamma$ è limitata.

5.1.1 Variazioni del coefficiente di drift

I risultati dimostrati in questo paragrafo sono validi anche per funzioni payoff che dipendono dai prezzi del sottostante nell'intero intervallo temporale $[0, T]$. Supponiamo che il payoff $\Phi : C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ abbia momento secondo limitato. Fissata una funzione limitata $\gamma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ e un parametro reale ϵ , definiamo il processo perturbato $\{X_t^\epsilon\}_{t \in [0, T]}$ che segue le dinamiche

$$dX_t^\epsilon = [\mu(X_t^\epsilon) + \epsilon \gamma(X_t^\epsilon)] dt + \sigma(X_t^\epsilon) dW_t.$$

Per semplicità di notazione denoteremo con X il processo non perturbato, corrispondente a $\epsilon = 0$.

Consideriamo la funzione $u^\epsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$u^\epsilon(x) = E[\Phi(X^\epsilon) \mid X_0^\epsilon = x].$$

Teorema 5.2. *La funzione $\epsilon \mapsto u^\epsilon(x)$ è differenziabile in $\epsilon = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e si ha*

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(x) \right|_{\epsilon=0} = E \left[\Phi(X) \int_0^T \langle \sigma^{-1}(X_t) \cdot \gamma(X_t), dW_t \rangle \mid X_0 = x \right].$$

Dimostrazione. Introduciamo la variabile aleatoria

$$Z_T^\epsilon = \exp \left\{ -\epsilon \int_0^T \langle \sigma^{-1}(X_t) \cdot \gamma(X_t), dW_t \rangle - \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \|\sigma^{-1}(X_t) \cdot \gamma(X_t)\|^2 dt \right\}.$$

Grazie alla limitatezza del termine $\sigma^{-1} \cdot \gamma$, la condizione di Novikov (1.7) è soddisfatta. Dunque $E[Z_T^\epsilon] = 1$ per ogni $\epsilon > 0$. In virtù del Teorema di Girsanov (1.9) la misura di probabilità Q^ϵ definita da

$$\frac{dQ^\epsilon}{dP} = Z_T^\epsilon,$$

è equivalente a P e, sotto Q^ϵ , il processo $\{W_t^\epsilon\}_{t \in [0, T]}$ definito da

$$W_t^\epsilon = W_t + \epsilon \int_0^t \sigma^{-1}(X_s^\epsilon) \cdot \gamma(X_s^\epsilon) dt$$

5. Le greche di opzioni con barriere discrete

è un processo di Wiener standard d -dimensionale.

Sia \tilde{Z}_T^ϵ la densità di passaggio dalla probabilità P alla probabilità Q^ϵ , ossia

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_T^\epsilon &= \frac{dP}{dQ^\epsilon} \\ &= \exp \left\{ -\epsilon \int_0^T \langle \sigma^{-1}(X_t^\epsilon) \cdot \gamma(X_t^\epsilon), dW_t^\epsilon \rangle - \frac{\epsilon}{2} \int_0^T \|\sigma^{-1}(X_t^\epsilon) \cdot \gamma(X_t^\epsilon)\|^2 dt \right\}.\end{aligned}$$

È possibile riscrivere il termine u^ϵ nella forma

$$u^\epsilon(x) = E^{Q^\epsilon} \left[\tilde{Z}_T^\epsilon \Phi(X^\epsilon) \mid X_0^\epsilon = x \right].$$

La legge congiunta della coppia (X^ϵ, W^ϵ) sotto Q^ϵ coincide con la legge congiunta di (X, W) sotto P , e quindi:

$$u^\epsilon(x) = E[Z_T^\epsilon \Phi(X) \mid X_0 = x].$$

Notiamo che vale l'uguaglianza

$$\frac{Z_T^\epsilon - 1}{\epsilon} = \int_0^T Z_t^\epsilon \langle \sigma^{-1}(X_t^\epsilon) \cdot \gamma(X_t^\epsilon), dW_t^\epsilon \rangle$$

e dunque, grazie al Teorema di convergenza dominata,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{Z_T^\epsilon - 1}{\epsilon} = \int_0^T \langle \sigma^{-1}(X_t) \cdot \gamma(X_t), dW_t \rangle, \quad (5.5)$$

dove l'ultima convergenza è in L^2 . Infine, essendo il payoff Φ di quadrato integrabile, è possibile usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}& \left| \frac{1}{\epsilon} (u^\epsilon(x) - u(x)) - E \left[\Phi(X) \int_0^T \langle \sigma^{-1}(X_t) \cdot \gamma(X_t), dW_t \rangle \right] \right| = \\ & \left| E \left[\Phi(X) \left(\frac{1}{\epsilon} (Z_T^\epsilon - 1) - \int_0^T \langle \sigma^{-1}(X_t) \cdot \gamma(X_t), dW_t \rangle \right) \right] \right| \leq \\ & KE \left[\left(\frac{1}{\epsilon} (Z_T^\epsilon - 1) - \int_0^T \langle \sigma^{-1}(X_t) \cdot \gamma(X_t), dW_t \rangle \right)^2 \right]\end{aligned}$$

che, grazie alla convergenza in L^2 data da (5.5), ci fornisce la tesi. \square

5.1.2 Variazione delle condizioni iniziali

In questa sezione ricaveremo un'espressione per la derivata della funzione $u(x)$ rispetto al dato iniziale $x \in \mathbb{R}^d$. A differenza di quanto fatto nel paragrafo precedente restringiamo la nostra attenzione ai payoff che dipendono da un numero finito di istanti di tempo in cui il prezzo del sottostante viene

monitorato. Siano dunque fissati un insieme di tempi $\{t_1, \dots, t_m\}$ e una funzione $\Phi : (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$E [\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})^2] < +\infty.$$

Definiamo la funzione u come

$$u(x) = E [\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \mid X_0 = x]$$

e introduciamo l'insieme

$$H_m = \left\{ a \in L^2([0, T]) : \int_0^{t_i} a(t) dt = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \right\}.$$

Teorema 5.3. *Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $a \in H_m$ vale*

$$\nabla u(x) = E \left[\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t \mid X_0 = x \right],$$

dove Y è il processo di variazione prima relativo a X .

Dimostrazione. Dimostriamo il Teorema nel caso in cui il payoff Φ sia differenziabile con continuità ed abbia gradiente limitato.

Come prima cosa dimostriamo che la derivata di $u(x)$ rispetto a x è ottenuta differenziando sotto l'operatore di speranza. Denotiamo con X^x la soluzione della SDE uscente da x e sia $E^x[\cdot] = E[\cdot \mid X_0 = x]$.

Essendo Φ differenziabile con continuità, si ha che il termine

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|h\|} [\Phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_m}^x) - \Phi(X_{t_1}^{x+h}, \dots, X_{t_m}^{x+h})] \\ & - \frac{1}{\|h\|} \left\langle \sum_{i=1}^m \partial_i^* \Phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_m}^x) Y_{t_i}^x, h \right\rangle \end{aligned} \quad (5.6)$$

converge a zero quasi certamente quando h tende a zero.

Poiché il payoff considerato ha gradiente limitato, il secondo termine di (5.6) è uniformemente integrabile in h . Inoltre, detto M il limite uniforme sulle derivate parziali di Φ , è immediato vedere che il primo termine di (5.6) è maggiorato da

$$M \sum_{j=1}^k \frac{\|X_{t_j}^x - X_{t_j}^{x+h}\|}{\|h\|}. \quad (5.7)$$

Il termine (5.7) è uniformemente integrabile (si veda [30, pag.246]), dunque l'intera espressione (5.6) è uniformemente integrabile. Ne segue, grazie al Teorema di convergenza dominata, che tale termine tende a zero nella norma $L^1(\Omega)$. Dunque si ha

$$\nabla^* u(x) = E^x \left[\sum_{i=1}^m \partial_i^* \Phi(X_{t_1}^x, \dots, X_{t_m}^x) Y_{t_i}^x \right]. \quad (5.8)$$

5. Le greche di opzioni con barriere discrete

Il Teorema (2.20) ci assicura che $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ e, grazie al Teorema (2.24), per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $t \in [0, T]$, vale la relazione

$$\begin{aligned} D_t X_{t_i} &= Y_{t_i} Y_t^{-1} \sigma(X_t) I_{(-\infty, t_i]}(t). \\ &\Downarrow \\ Y_{t_i} I_{(-\infty, t_i]}(t) &= D_t X_{t_i} \sigma^{-1}(X_t) Y_t \\ &\Downarrow \\ Y_{t_i} &= \int_0^T D_t X_{t_i} a(t) \sigma^{-1}(X_t) Y_t dt, \quad \forall a \in H_m. \end{aligned}$$

Inserendo quest'ultima espressione in (5.8) si ottiene (omettiamo l'apice 'x')

$$\nabla^* u(x) = E^x \left[\int_0^T \sum_{i=1}^m \partial_i^* \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) D_t X_{t_i} a(t) \sigma^{-1}(X_t) Y_t dt \right]$$

da cui, usando la regola della catena (2.10)

$$\nabla^* u(x) = E^x \left[\int_0^T D_t \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) a(t) \sigma^{-1}(X_t) Y_t dt \right]. \quad (5.9)$$

Definiamo il processo ausiliario $\{V_t\}_{t \in [0, T]}$ come

$$V_t = a(t) \sigma^{-1}(X_t) Y_t.$$

Essendo a una funzione deterministica, σ^{-1} continua e X e Y processi adattati, si ha che anche il processo V è adattato alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$. Inoltre, grazie all'ipotesi (5.1), tale processo appartiene a $L^2(\Omega \times [0, T])$.

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \nabla^* u(x) &= E^x \left[\int_0^T D_t \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) V_t dt \right] \\ &= \langle D\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}), V \rangle_{L^2(\Omega \times [0, T])} \\ &= \langle \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}), \delta(V) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= E^x \left[\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T a(t) \sigma^{-1}(X_t) Y_t dW_t \right], \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il fatto che V è un processo adattato e il Teorema (2.15).

La tesi si ottiene prendendo i trasposti di ambo i membri.

Esaminiamo ora il caso generale $\Phi \in L^2$. Poiché l'insieme C_K^∞ delle funzioni differenziabili infinite volte e a supporto compatto è denso in L^2 , è possibile

trovare una successione $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_K^\infty$ convergente a Φ in L^2 . Sia $u_n(x) = E^x[\Phi_n(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})]$ e definiamo

$$\varepsilon_n(x) = E^x[\Phi_n(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) - \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})]^2.$$

Ovviamente le funzioni ε_n convergono puntualmente a zero. Fissata una funzione $a \in H_m$, definiamo

$$g(x) = E^x \left[\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t \right].$$

Sappiamo che il Teorema è vero per le funzioni Φ_n e dunque, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, si ha

$$|\nabla u_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon_n(x) E^x \left[\int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t \right]^2.$$

Sia ora K un arbitrario insieme compatto di \mathbb{R}^d . Grazie alla continuità del membro di destra dell'ultima equazione, garantita dall'operatore di speranza, per il Teorema di Weierstrass si ha che esiste $\bar{x} \in K$ tale che

$$\sup_{x \in K} |\nabla u_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon_n(\bar{x}) E^{\bar{x}} \left[\int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t \right]^2.$$

Dunque, facendo tendere n all'infinito e usando la convergenza puntuale di ε_n a zero, si ha che $\nabla u_n(x)$ converge a $g(x)$ uniformemente sui compatti di \mathbb{R}^d .

Inoltre è immediato osservare che, in virtù della convergenza delle Φ_n a Φ in L^2 , le funzioni $u_n(x)$ convergono puntualmente a $u(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Quindi si può concludere che la funzione u è differenziabile con continuità e che $\nabla u = g$. □

5.1.3 Variazioni del coefficiente di volatilità

In questo paragrafo ragioneremo in maniera simile a quanto fatto nella sezione (5.1.1), con la differenza che, al posto di perturbare il coefficiente di drift μ , questa volta esamineremo le variazioni della funzione u quando viene alterata la funzione di volatilità σ .

Supponiamo di avere un payoff $\Phi: (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow \mathbb{R}$ con norma in L^2 finita e siano μ e σ delle funzioni differenziabili con continuità con derivate Lipschitziane e limitate. Introduciamo l'insieme di funzioni deterministiche

$$\tilde{H}_m = \left\{ a \in L^2([0, T]) : \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t) dt = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \right\}.$$

5. Le greche di opzioni con barriere discrete

Fissiamo una funzione $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ differenziabile con continuità e con derivate limitate e sia ϵ un numero reale. Definiamo dunque il processo perturbato $\{X_t^\epsilon\}_{t \in [0, T]}$ come l'unica soluzione della SDE

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = \mu(X_t^\epsilon)dt + [\sigma(X_t^\epsilon) + \epsilon\tilde{\sigma}(X_t^\epsilon)] dW_t \\ X_0^\epsilon = x. \end{cases} \quad (5.10)$$

Abbiamo inoltre bisogno di un'altra ipotesi sulla funzione $\tilde{\sigma}$, analoga all'ipotesi (5.1), che ci assicuri l'uniforme ellitticità della volatilità del processo perturbato:

Ipotesi 5.4. *Esiste un $\eta > 0$ tale che, per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^d$, si abbia*

$$\xi^*(\sigma + \epsilon\tilde{\sigma})^*(x)(\sigma + \epsilon\tilde{\sigma})(x)\xi \geq \eta|\xi|^2.$$

Inoltre introduciamo il processo di variazione Z^ϵ definito dall'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dZ_t^\epsilon = \mu'(X_t^\epsilon)Z_t^\epsilon dt + \tilde{\sigma}(X_t^\epsilon)dW_t + \sum_{i=1}^d [\sigma'_i + \epsilon\tilde{\sigma}'_i](X_t^\epsilon)Z_t^\epsilon dW_t^i \\ Z_0^\epsilon = 0_d, \end{cases} \quad (5.11)$$

dove 0_d rappresenta il vettore nullo di \mathbb{R}^d . Si noti che il processo Z^ϵ è tale che

$$Z_t^\epsilon = \frac{\partial X_t^\epsilon}{\partial \epsilon}.$$

Sia $Z = Z^0$ e definiamo il processo $\{\beta_t\}_{t \in [0, T]}$ come $\beta_t = Y_t^{-1}Z_t$.

Dal momento che sia il processo $\{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ che il processo $\{Y_t^{-1}\}_{t \in [0, T]}$ appartengono a $\mathbb{D}^{1,2}$ (si veda [28], Lemma 2.2.2, pag.104) e poiché i coefficienti μ e σ hanno derivate Lipschitziane e limitate, si ha che anche il processo $\{\beta_t\}_{t \in [0, T]}$ appartiene a $\mathbb{D}^{1,2}$. Vale dunque il seguente Teorema:

Teorema 5.5. *Sotto l'ipotesi (5.4), per ogni $a \in \tilde{H}_m$ si ha*

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(x) \Big|_{\epsilon=0} = E \left[\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \delta \left(\sigma^{-1}(X) Y \tilde{\beta}_T^{(a)} \right) \mid X_0 = x \right], \quad (5.12)$$

dove $\tilde{\beta}_T^{(a)}(t) = \sum_{i=1}^m a(t)(\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}})I_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$.

Dimostrazione. Limitiamoci a provare la tesi per funzioni payoff Φ che siano continuamente differenziabili e con derivate limitate. Il caso generale segue da un argomento di densità simile a quello usato nella dimostrazione precedente.

Sempre in maniera analoga a quanto mostrato in (5.3) è possibile far vedere che la derivata di $u^\epsilon(x)$ rispetto al parametro ϵ si ottiene differenziando sotto l'operatore di speranza. Poiché è possibile scegliere una versione di X^ϵ che sia differenziabile rispetto a ϵ per ogni $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, si ha che

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(x) \right|_{\epsilon=0} = E^x \left[\sum_{i=1}^m \partial_i^* \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) Z_{t_i} \right] \quad (5.13)$$

(per i dettagli si veda [30, pag.250]). Dal Teorema (2.24) segue che, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $t \in [0, T]$,

$$D_t X_{t_i} = Y_{t_i} Y_t^{-1} \sigma(X_t) I_{(-\infty, t_i]}(t).$$

Quindi, moltiplicando a destra ambo i membri per $\sigma^{-1}(X_t) Y_t \tilde{\beta}_T^{(a)}$ e integrando da 0 a T , si ha

$$\begin{aligned} \int_0^T D_t X_{t_i} \sigma^{-1}(X_t) Y_t \tilde{\beta}_T^{(a)} dt &= \int_0^{t_i} Y_{t_i} \tilde{\beta}_T^{(a)} dt \\ &= Y_{t_i} \sum_{k=1}^i \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t) (\beta_{t_k} - \beta_{t_{k-1}}) dt \right) = Y_{t_i} \sum_{k=1}^i (\beta_{t_k} - \beta_{t_{k-1}}) \\ &= Y_{t_i} \beta_{t_i} = Z_{t_i}. \end{aligned}$$

Inseriamo quest'ultima scrittura di Z in (5.13) e otteniamo

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(x) \right|_{\epsilon=0} = E^x \left[\int_0^T \sum_{i=1}^m \partial_i^* \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) D_t X_{t_i} \sigma^{-1}(X_t) Y_t \tilde{\beta}_T^{(a)} dt \right],$$

da cui, usando la regola della catena (2.10),

$$\left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(x) \right|_{\epsilon=0} = E^x \left[\int_0^T D_t \Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \sigma^{-1}(X_t) Y_t \tilde{\beta}_T^{(a)} dt \right]. \quad (5.14)$$

Ora vorremmo applicare la formula (2.1); per fare questo abbiamo bisogno di verificare che il termine $V_t := \sigma^{-1}(X_t) Y_t \tilde{\beta}_T^{(a)}$ appartenga al dominio di δ . Ma il processo $\{\sigma^{-1}(X_t) Y_t\}_{t \in [0, T]}$ appartiene a $L^2(\Omega \times [0, T])$ ed è \mathcal{F}_t -adattato, il termine $\tilde{\beta}_T^{(a)}$ appartiene a $\mathbb{D}^{1,2}$ e V_t è \mathcal{F}_T -adattato. Pertanto, applicando il Teorema (2.15), si ha che V_T appartiene al dominio di δ e, più precisamente, vale

$$\delta(V_t) = \tilde{\beta}_T^{(a)} \int_0^T [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t - \int_0^T D_t \tilde{\beta}_T^{(a)} \sigma^{-1}(X_t) Y_t dt$$

È sufficiente applicare la formula (2.1) al termine (5.14) per ottenere la tesi. \square

5.2 Applicazione al modello di Heston

In questa sezione applicheremo i risultati fin qui ottenuti per avere delle espressioni esplicite per le greche di opzioni con barriera, quando il modello considerato è quello di Heston.

Supponiamo di avere un sottostante, i cui prezzi sono rappresentati dal processo $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$, che segua delle dinamiche del tipo

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \nu \sqrt{v_t} d\tilde{W}_t, \end{cases} \quad (5.15)$$

dove $\{W_t^1\}_{t \in [0, +\infty)}$ e $\{\tilde{W}_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ sono due processi di Wiener standard correlati, con coefficiente di correlazione pari a ρ . Considerato il vettore aleatorio $V_t = (S_t, v_t)^*$, si ha subito che la SDE (5.15) può essere riscritta nella forma

$$dV_t = A(V_t)dt + B(V_t)dW_t, \quad (5.16)$$

dove $\{W_t\}_{t \in [0, +\infty)} = \{(W_t^1, W_t^2)\}_{t \in [0, +\infty)}$ è un processo di Wiener standard bidimensionale e le funzioni A e B sono definite come

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} rx \\ \kappa(\theta - y) \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} x\sqrt{y} & 0 \\ \rho\nu\sqrt{y} & \nu\sqrt{(1-\rho^2)y} \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Purtroppo, come si vede bene osservando i termini (5.17) e (5.18), il Teorema (2.18) di esistenza e unicità, letto nel caso bidimensionale, non può essere applicato al processo V_t . Infatti la funzione B è evidentemente non Lipschitziana (compaiono delle radici quadrate). Dunque, al fine di garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione, sarà necessario enunciare un rafforzamento del Teorema (2.18).

Teorema 5.6. *Siano $\mu(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ due funzioni reali e continue, definite su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, che soddisfano le seguenti condizioni:*

- (1) *Esiste una funzione continua λ definita su $[0, +\infty)$ tale che*

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \lambda(|x - y|), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

dove λ è crescente, $\lambda(0) = 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda^2(z)} dz = +\infty.$$

- (2) *Esiste una costante $K > 0$ tale che*

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(3) Esiste una costante C tale che

$$|\sigma(t, x)| + |\mu(t, x)| \leq C\sqrt{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo la SDE

$$S_t = Z + \int_0^t \mu(s, S_s) ds + \int_0^t \sigma(s, S_s) dW_s. \quad (5.19)$$

Se $E[Z^4] < +\infty$, l'equazione (5.19) ammette un'unica soluzione sull'intervallo $[0, T]$, per ogni $T \geq 0$. L'unicità si intende nel senso che, se $\{X_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ e $\{Y_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ sono due soluzioni di (5.19), allora, per ogni $t \in [0, T]$, $X_t = Y_t$ P-q.c.

Inoltre tale soluzione $\{S_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ soddisfa

$$E \left[\sup_{t \in [0, T]} |S_t|^2 \right] \leq +\infty.$$

Per la dimostrazione di questo risultato si veda [31].

Osservazione 5.7. Si noti che la funzione $\sigma(x) = \sqrt{|x|}$ soddisfa le ipotesi del Teorema con $\lambda(x) = \sqrt{x}$.

Il Teorema (5.6) non può essere applicato alle dinamiche di Heston (5.15), in quanto non esiste una versione multidimensionale di tale Teorema. Però il Teorema (5.6) può essere applicato prima all'equazione differenziale che coinvolge le dinamiche della volatilità (in quanto tale equazione non dipende dalle dinamiche del prezzo S) e poi, dimostrata l'esistenza e unicità del processo di volatilità, alla SDE che definisce le dinamiche del prezzo S . Affinché il processo v soddisfi le ipotesi del Teorema (5.6) è necessario che v sia strettamente positivo. A questo proposito introduciamo la seguente ipotesi, sufficiente a garantire la stretta positività del processo di volatilità (per i dettagli si veda [26])

Ipotesi 5.8. Nel modello di Heston si suppone che

$$2\kappa\theta > \nu^2.$$

Sistemata l'esistenza e unicità della soluzione rimane da risolvere il problema della derivabilità della soluzione di (5.15) nel senso di Malliavin. Infatti, in questo caso, il Teorema (2.20) non è applicabile, sempre a causa delle radici quadrate che non sono derivabili nell'origine. Anche la questione della derivabilità della soluzione nel senso di Malliavin è risolvibile attraverso l'uso di alcuni risultati più generali ed avanzati. L'idea alla base di questi risultati è sempre quella di approssimare i coefficienti irregolari del modello di Heston con termini differenziabili e con derivate Lipschitziane e limitate.

5. Le greche di opzioni con barriere discrete

Purtroppo, molto spesso, questo passaggio al limite non è affatto facile e richiede risultati molto avanzati di probabilità. Dunque in questa tesi ci limiteremo a dire che le soluzioni del modello di Heston sono effettivamente derivabili secondo Malliavin. Per i dettagli si vedano gli articoli [15] e [1].

Ora che ci siamo accertati della regolarità della soluzione, effettuiamo un cambio di variabili, che renderà più snelli i passaggi che faremo in seguito. Definiamo il processo $\{L_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ come $L_t = \ln S_t$. Grazie alla formula di Itô le equazioni (5.15) diventano

$$\begin{cases} dL_t = (r - \frac{1}{2}v_t)dt + \sqrt{v_t}dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \nu\sqrt{v_t}(\varrho dW_t^1 + \sqrt{1 - \varrho^2}dW_t^2). \end{cases} \quad (5.20)$$

Detto $X_t = (L_t, v_t)^*$ si ha

$$dX_t = \beta(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (5.21)$$

dove $\{W_t\}_{t \in [0, +\infty)} = \{(W_t^1, W_t^2)\}_{t \in [0, +\infty)}$ è un processo di Wiener standard bidimensionale e, detta $\mu = \sqrt{1 - \varrho^2}$, β e σ sono

$$\beta(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{1}{2}y \\ \kappa(\theta - y) \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ \varrho\nu\sqrt{y} & \nu\mu\sqrt{y} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

L'equazione (5.4) dice che il processo di variazione prima Y_t relativo a X segue le dinamiche

$$\begin{cases} dY_t = \beta'(X_t)Y_t dt + \sigma'_1(X_t)Y_t dW_t^1 + \sigma'_2(X_t)Y_t dW_t^2 \\ Y_0 = I_2, \end{cases} \quad (5.24)$$

dove I_2 è la matrice identità bidimensionale.

Siamo finalmente pronti per effettuare il calcolo delle greche.

5.2.1 Il calcolo di Rho

Corollario 5.9. *Sia fissato un insieme di tempi $\{t_1, \dots, t_m\}$ e una funzione payoff $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $E[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})^2] < +\infty$. Allora vale*

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\partial}{\partial r} E[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) | S_0 = s] \\ &= E^s \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \left(\int_0^T \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_t^1 - \int_0^T \frac{\varrho}{\mu\sqrt{v_t}} dW_t^2 \right) \right] \\ &\quad - T E^s [e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})], \end{aligned}$$

dove $E^s[\cdot] = E[\cdot | S_0 = s]$

Dimostrazione. Il Teorema (5.2) ci dice che, scelta una funzione γ limitata, considerato il processo bidimensionale perturbato $\{X_t^\epsilon\}_{t \in [0, T]}$ tale che

$$dX_t^\epsilon = [\beta(X_t^\epsilon) + \epsilon\gamma(X_t^\epsilon)]dt + \sigma(X_t^\epsilon)dW_t \quad (5.25)$$

e detta

$$u^\epsilon(s, v_0) = E [\Phi(S_{t_1}^\epsilon, \dots, S_{t_m}^\epsilon) \mid X_0^\epsilon = (s, v_0)]$$

(dove i termini S_t^ϵ rappresentano il numero e elevato alla prima componente del processo perturbato X_t^ϵ), si ha

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(s, v_0) \Big|_{\epsilon=0} = E \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \int_0^T \langle (\sigma^{-1} \cdot \gamma)(X_t), dW_t \rangle \mid X_0 = (s, v_0) \right]. \quad (5.26)$$

La greca ρ , ossia la derivata della funzione prezzo rispetto al tasso di interesse r , verifica

$$\rho = e^{-rT} \frac{\partial}{\partial r} E^s [\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})] - TE^s [e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})]. \quad (5.27)$$

Osservando le dinamiche (5.25) si nota che, per ogni $v_0 \in (0, +\infty)$, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial r} E^s [\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})] = \frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(s, v_0) \Big|_{\epsilon=0}$$

quando si sia scelta come funzione γ il termine costante

$$\gamma(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha

$$\rho = e^{-rT} \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(s, v_0) \Big|_{\epsilon=0} \right) - TE^s [e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})]. \quad (5.28)$$

Notiamo che, quando esiste, l'inversa della matrice di volatilità è

$$\sigma^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 \\ \frac{-\rho}{\mu\sqrt{y}} & \frac{1}{\nu\mu\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando tale matrice per il vettore $\gamma(x, y) = (1, 0)^*$ e valutando in X_t si ha

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle (\sigma^{-1} \cdot \gamma)(X_t), dW_t \rangle &= \int_0^T \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v_t}} \\ \frac{-\rho}{\mu\sqrt{v_t}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{v_t}} dW_t^1 - \int_0^T \frac{\rho}{\mu\sqrt{v_t}} dW_t^2. \end{aligned}$$

Usando l'ultima uguaglianza ottenuta in (5.26) e inserendo il tutto in (5.28) si ottiene la tesi. \square

5.2.2 Il calcolo di Delta

Corollario 5.10. *Nelle ipotesi del Corollario (5.9) vale, per ogni $a \in H_m$,*

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial S_0} E[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) | S_0 = s] \\ &= E^s \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \frac{1}{S_0} \left(\int_0^T \frac{a(t)}{\sqrt{v_t}} dW_t^1 - \int_0^T \frac{a(t)\varrho}{\mu\sqrt{v_t}} dW_t^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il Teorema (5.3) ci dice che, detta u la funzione

$$u(x) = E[\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) | X_0 = x]$$

e scelta un'arbitraria funzione $a \in H_m$, si ha

$$\nabla u(x) = E^x \left[\Phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t \right]. \quad (5.29)$$

Sia v_0 il valore iniziale della volatilità e definiamo $x = (s, v_0)^*$. Allora la (5.29), considerato che il payoff dipende solamente dai valori assunti dal sottostante S_t e non dalla volatilità v_t , diventa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial L_0} E^x [\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})], \frac{\partial}{\partial v_0} E^x [\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})] \right)^* = \\ & = E^x \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \int_0^T a(t) [\sigma^{-1}(X_t) Y_t]^* dW_t \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

A questo punto ci interessa calcolare il termine $\sigma^{-1}(X_t) Y_t$ (dove Y_t è il processo di variazione prima relativo a X_t), scrivendo in maniera esplicita i termini di Y . La componente di posizione (2, 1) delle dinamiche del processo di variazione prima (5.24) segue la SDE

$$\begin{cases} dY_t^{(2,1)} = -\kappa Y_t^{(2,1)} dt + \frac{\nu\varrho}{2\sqrt{v_t}} Y_t^{(2,1)} dW_t^1 + \frac{\nu\mu}{2\sqrt{v_t}} Y_t^{(2,1)} dW_t^2 \\ Y_0^{(2,1)} = 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

È immediato verificare che una soluzione di (5.31) è $Y_t^{(2,1)} = 0$, per ogni $t \in [0, T]$. Dunque, grazie al Teorema di esistenza e unicità (2.18), questa è l'unica soluzione di (5.31).

Allo stesso modo scriviamo le dinamiche del termine in posizione (1, 1)

$$\begin{cases} dY_t^{(1,1)} = 0 \\ Y_0^{(1,1)} = 1, \end{cases} \quad (5.32)$$

ossia $Y_t^{(1,1)} = 1$ per ogni $t \in [0, T]$. Ne segue che

$$(\sigma^{-1}(X_t)Y_t)^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v_t}} & -\frac{\rho}{\mu\sqrt{v_t}} \\ \frac{Y_t^{(1,2)}}{\sqrt{v_t}} & \frac{1}{\nu\mu\sqrt{v_t}}Y_t^{(2,2)} - \frac{\rho}{\mu\sqrt{v_t}}Y_t^{(1,2)} \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Osservando che

$$\frac{\partial}{\partial S_0} = \frac{\partial}{S_0 \partial(\ln S_0)} = \frac{\partial}{S_0 \partial L_0},$$

riscriviamo solamente la prima componente di (5.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L_0} E^x [\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})] &= S_0 \frac{\partial}{\partial S_0} E^x [\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})] = \\ &= E^s \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \left(\int_0^T \frac{a(t)}{\sqrt{v_t}} dW_t^1 - \int_0^T \frac{a(t)\rho}{\mu\sqrt{v_t}} dW_t^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente moltiplicare il secondo e il terzo termine dell'ultima espressione per il fattore $\frac{e^{-rT}}{S_0}$ per ottenere la tesi. \square

5.2.3 Il calcolo di Vega^{v₀}

Corollario 5.11. *Nelle ipotesi del Corollario (5.9) si ha, per ogni $a \in H_m$*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{v_0} = E^s \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \left(\int_0^T \frac{a(t)Y_t^{(1,2)}}{\sqrt{v_t}} dW_t^1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^T \left(\frac{a(t)Y_t^{(2,2)}}{\nu\mu\sqrt{v_t}} - \frac{a(t)\rho Y_t^{(1,2)}}{\mu\sqrt{v_t}} \right) dW_t^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per ottenere la tesi è sufficiente prendere la seconda componente dell'uguaglianza (5.30) e utilizzare l'equazione (5.33). \square

5.2.4 Il calcolo di Vega^θ

Corollario 5.12. *Nelle ipotesi del Corollario (5.9) vale*

$$\mathcal{V}^\theta = E^s \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \left(\int_0^T \frac{\kappa}{\nu\mu\sqrt{v_t}} dW_t^2 \right) \right].$$

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione del Corollario (5.9), questa volta scegliendo il vettore gamma come

$$\gamma(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa \end{pmatrix}.$$

\square

5.2.5 Il calcolo di Vega^{v_t}

Come già detto nel paragrafo (1.4.1) siamo interessati a definire un'ulteriore greca, oltre \mathcal{V}^θ e \mathcal{V}^{v_0} , che quantifichi le variazioni del prezzo di un'opzione rispetto ad un parametro legato alla volatilità. Data un'opzione di funzione payoff $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, per ogni $\epsilon > 0$ consideriamo il processo perturbato $\{S_t^\epsilon\}_{t \in [0, T]}$ definito da

$$\begin{cases} dS_t^\epsilon = rS_t^\epsilon dt + (\sqrt{v_t} + \epsilon)S_t^\epsilon dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \nu\sqrt{v_t}d\tilde{W}_t. \end{cases} \quad (5.34)$$

Definiamo la funzione reale

$$u^\epsilon(x) = E[\Phi(S_{t_1}^\epsilon, \dots, S_{t_m}^\epsilon) \mid S_0^\epsilon = x].$$

Allora la greca \mathcal{V}^{v_t} è definita come

$$\mathcal{V}^{v_t} = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} u^\epsilon(x) \right|_{\epsilon=0}.$$

Si noti che la buona definizione di \mathcal{V}^{v_t} è garantita dal Teorema (5.5).

Per calcolare \mathcal{V}^{v_t} avremo bisogno della versione multidimensionale del Teorema (2.15).

Proposizione 5.13. *Sia V una variabile aleatoria d -dimensionale tale che $V_i \in \mathbb{D}^{1,2}$ per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$ e sia $\{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ una matrice $(d \times d)$ di processi stocastici tali che tutte le colonne $Z^{(j)} \in \text{Dom}(\delta)$, per $j \in \{1, \dots, d\}$. Supponiamo inoltre che, per ogni indice, valga $V_i Z^{(i)} \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$. Allora $Z \cdot V \in \text{Dom}(\delta)$ e vale*

$$\delta(Z \cdot V) = V \cdot \delta(Z^*) - \int_0^T \text{Tr}(D_t V \cdot Z_t) dt.$$

Per la dimostrazione della Proposizione si veda la Proposizione (1.3.3) di [28].

Corollario 5.14. *Nelle ipotesi del Corollario (5.9) vale*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{v_t} = & E \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left[\left(S_0(W_{t_i}^1 - W_{t_{i-1}}^1) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v_t} dt \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{dW_t^1}{S_0 \sqrt{v_t}} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\rho dW_t^2}{S_0 \sqrt{(1-\rho^2)v_t}} \right) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\sqrt{v_t}} dt \right] \right\} \right]. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Consideriamo le SDE perturbate

$$\begin{cases} dS_t^\epsilon = rS_t^\epsilon dt + (\sqrt{v_t} + \epsilon)S_t^\epsilon dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \nu\sqrt{v_t}(\varrho dW_t^1 + \sqrt{1 - \varrho^2}dW_t^2), \end{cases} \quad (5.35)$$

e sia

$$X_t^\epsilon = \begin{pmatrix} S_t^\epsilon \\ v_t \end{pmatrix},$$

con la solita convenzione $X_t = X_t^0$. Notiamo che la (5.35) è esattamente la (5.10) nel caso in cui si sia scelta la funzione $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$\tilde{\sigma}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che, considerato il processo Z_t^ϵ definito nella sezione (5.1.3), vale

$$Z_t^\epsilon = \frac{\partial X_t^\epsilon}{\partial \epsilon}.$$

Poiché la seconda equazione di (5.35) non dipende da ϵ e il termine v_t non dipende da S_t^ϵ , si ha che la seconda componente di Z^ϵ è identicamente nulla, in particolare $Z_t^{(2)} = 0$.

Cerchiamo ora di ricavare un'espressione esplicita del termine $\beta_t = Y_t^{-1}Z_t$. Si noti che il processo Y in questo caso, a differenza di quanto fatto nella dimostrazione del Corollario (5.10), è il processo di variazione prima relativo a X , ossia alle dinamiche (5.15) originarie del modello di Heston (in 5.10 si prendeva il processo di variazione prima dopo il passaggio al logaritmo).

Cominciamo scrivendo esplicitamente la SDE relativa alla componente di posizione (2, 1) delle dinamiche del processo di variazione prima Y :

$$\begin{cases} dY_t^{(2,1)} = -\kappa Y_t^{(2,1)} dt + \frac{\nu\varrho}{2\sqrt{v_t}} Y_t^{(2,1)} dW_t^1 + \frac{\nu\mu}{2\sqrt{v_t}} Y_t^{(2,1)} dW_t^2 \\ Y_0^{(2,1)} = 0, \end{cases} \quad (5.36)$$

da cui si deduce che $Y^{(2,1)}$ è identicamente uguale a zero. Tenendo conto di questo fatto scriviamo le equazioni relative al termine di posizione (1, 1):

$$\begin{cases} dY_t^{(1,1)} = rY_t^{(1,1)} dt + \sqrt{v_t} Y_t^{(1,1)} dW_t^1 \\ Y_0^{(1,1)} = 1. \end{cases} \quad (5.37)$$

Confrontando quest'ultima SDE con la prima equazione di (5.35) si nota che

$$Y_t^{(1,1)} = \frac{S_t}{S_0}, \quad \forall t. \quad (5.38)$$

Di conseguenza si ha

$$Y_t = \begin{pmatrix} \frac{S_t}{S_0} & Y_t^{(1,2)} \\ 0 & Y_t^{(2,2)} \end{pmatrix}, \quad Y_t^{-1} = \begin{pmatrix} S_0/S_t & -\frac{S_0 Y_t^{(1,2)}}{S_t Y_t^{(2,2)}} \\ 0 & \frac{1}{Y_t^{(2,2)}} \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Ne segue

$$\beta_t = Y_t^{-1} Z_t = \begin{pmatrix} S_0/S_t & -\frac{S_0 Y_t^{(1,2)}}{S_t Y_t^{(2,2)}} \\ 0 & \frac{1}{Y_t^{(2,2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_t^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_0 Z_t^{(1)}}{S_t} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

A questo punto ci interessa trovare una scrittura esplicita del termine $Z_t^{(1)}$. Usando la formula di Itô è facile verificare che

$$S_t^\epsilon = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(r - \frac{1}{2}(v_s + 2\epsilon\sqrt{v_s} + \epsilon^2) \right) ds + \int_0^t (\sqrt{v_t} + \epsilon) dW_s^1 \right\},$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} S_t^\epsilon = S_t^\epsilon \left(\int_0^t (-\sqrt{v_s} - \epsilon) ds + W_t^1 \right).$$

Dunque, ponendo $\epsilon = 0$, si ha

$$Z_t^{(1)} = S_t \left(W_t^1 - \int_0^t \sqrt{v_s} ds \right).$$

Inserendo quest'ultima espressione in (5.40) si ottiene

$$\beta_t = \begin{pmatrix} S_0 \left(W_t^1 - \int_0^t \sqrt{v_s} ds \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Siamo ora interessati a calcolare la derivata di Malliavin di β_t . Ovviamente quando $t \geq s$, si ha che $D_t \beta_s = 0$. Riduciamoci dunque al caso in cui $s > t$. Essendo $\beta^{(2)}$ nullo (poiché $Z^{(2)} = 0$), avremo $(D_t \beta_s)^{(2,1)} = (D_t \beta_s)^{(2,2)} = 0$. Invece, detto $(D_t \beta_s)^{(1)} = ((D_t \beta_s)^{(1,1)}, (D_t \beta_s)^{(1,2)})$, utilizzando la (5.41) si ha

$$(D_t \beta_s)^{(1)} = S_0 \left((1, 0) - \int_t^s D_t(\sqrt{v_u}) du \right).$$

Dunque, applicando la regola della catena ad una successione di processi regolari approssimanti il termine $\sqrt{v_t}$, si ha

$$\begin{aligned} (D_t \beta_s)^{(1)} &= S_0 \left((1, 0) - \frac{1}{2} \int_t^s \frac{1}{\sqrt{v_u}} D_t v_u du \right) \\ &= S_0 \left((1, 0) - \frac{1}{2} \int_t^s \nu \frac{\sqrt{v_t} Y_u^{(2,2)}}{\sqrt{v_u} Y_t^{(2,2)}} (\varrho, \sqrt{1 - \varrho^2}) du \right), \end{aligned} \quad (5.42)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il Teorema (2.24).

Sia ora B la matrice di volatilità del modello di Heston, definita da (5.18).

La sua inversa è

$$B^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x\sqrt{y}} & 0 \\ -\frac{\rho}{x\sqrt{(1-\rho^2)y}} & \frac{1}{\nu\sqrt{(1-\rho^2)y}} \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$B^{-1}(X_t)Y_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_0\sqrt{v_t}} & \frac{Y_t^{(1,2)}}{S_t\sqrt{v_t}} \\ -\frac{\rho}{S_0\sqrt{(1-\rho^2)v_t}} & -\frac{\rho Y_t^{(1,2)}}{S_t\sqrt{(1-\rho^2)v_t}} + \frac{Y_t^{(s,2)}}{\nu\sqrt{(1-\rho^2)v_t}} \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Poiché la seconda riga di $D_t\beta(X_t)$ è nulla, si ha che la traccia di $((D_t\beta_s)B^{-1}(X_t)Y_t)$ è uguale all'elemento di posizione (1,1) della matrice stessa. Dunque, utilizzando le espressioni (5.42) e (5.43),

$$Tr((D_t\beta_s)B^{-1}(X_t)Y_t) = \frac{1}{\sqrt{v_t}}I_{(t,+\infty)}(s). \quad (5.44)$$

Per applicare il Teorema (5.5) abbiamo bisogno di calcolare il termine

$$\delta \left(B^{-1}(X.)Y.\tilde{\beta}_T^{(a)}(\cdot) \right) = \delta \left(B^{-1}(X.)Y. \sum_{i=1}^m a(\cdot) (\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}}) I_{[t_{i-1}, t_i]}(\cdot) \right).$$

Come $a(t)$ scegliamo la funzione costante a tratti tale che, per ogni $t \in [0, T]$, vale

$$a(t) = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \quad \text{se } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Quindi, inserendo questa specifica a nell'espressione precedente ed utilizzando la linearità dell'operatore di Skorohod, otteniamo

$$\delta \left(B^{-1}(X.)Y.\tilde{\beta}_T^{(a)}(\cdot) \right) = \sum_{i=1}^m \delta \left(B^{-1}(X.)Y. \frac{(\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}})}{t_i - t_{i-1}} \right).$$

Applicando la Proposizione (5.13) all'ultimo termine e usando il fatto che il processo $B^{-1}(X_t)Y_t$ è adattato si ha

$$\begin{aligned} \delta \left(B^{-1}(X.)Y.\tilde{\beta}_T^{(a)}(\cdot) \right) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{(\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}})}{t_i - t_{i-1}} \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} [B^{-1}(X_t)Y_t]^* dW_t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Tr[D_t(\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}})B^{-1}(X_t)Y_t] dt \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{(\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}})}{t_i - t_{i-1}} \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} [B^{-1}(X_t)Y_t]^* dW_t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{\sqrt{v_t}} dt \right\}, \quad (5.45) \end{aligned}$$

5. Le greche di opzioni con barriere discrete

dove nell'ultimo passaggio si è usata la (5.44), la linearità della derivata di Malliavin e dell'operatore 'traccia' e il fatto che $D_t \beta_{t_{i-1}} = 0$ per ogni $t > t_{i-1}$.

Ricordando che

$$\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}} = \begin{pmatrix} S_0 \left((W_{t_i}^1 - W_{t_{i-1}}^1) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{v_t} dt \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

si può sviluppare il prodotto nel primo integrale di (5.45), usando l'espressione di $B^{-1}(X_t)Y_t$ data da (5.43). Infine è sufficiente inserire l'espressione di $\delta \left(B^{-1}(X_t)Y_t \tilde{\beta}_T^{(a)}(\cdot) \right)$ trovata in (5.12) per ottenere la tesi. \square

5.2.6 Il calcolo di Gamma

Corollario 5.15. *Nelle ipotesi del Corollario (5.9) si ha, per ogni $a \in H_m$,*

$$\begin{aligned} \Gamma = E^s \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \frac{1}{S_0^2} \left(\left(\int_0^T \frac{a(t)}{\sqrt{v_t}} dW_t^1 - \int_0^T \frac{a(t)\varrho}{\mu\sqrt{v_t}} dW_t^2 \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\int_0^T \frac{a(t)}{\sqrt{v_t}} dW_t^1 - \int_0^T \frac{a(t)\varrho}{\mu\sqrt{v_t}} dW_t^2 \right) - \int_0^T \frac{a(t)^2}{\mu^2 v_t} dt \right) \right]. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\Delta = E^s \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \frac{1}{S_0} \int_0^T p(t) \cdot dW_t \right],$$

dove $\mu = \sqrt{1 - \varrho^2}$ e

$$p(t) = \begin{pmatrix} \frac{a(t)}{\sqrt{v_t}} \\ -\frac{\varrho a(t)}{\mu\sqrt{v_t}} \end{pmatrix}.$$

Grazie al fatto che il termine $\int_0^T p(t) \cdot dW_t$ non dipende da S_0 si ha

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} \\ &= E^s \left[e^{-rT} \frac{1}{S_0} \frac{\partial}{\partial S_0} (\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})) \int_0^T p(t) \cdot dW_t \right] \\ &\quad - E^s \left[e^{-rT} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \frac{1}{S_0^2} \int_0^T p(t) \cdot dW_t \right] \\ &= \Gamma_1 + \Gamma_2. \end{aligned}$$

Il termine Γ_2 è già nella forma giusta, quella della nostra tesi. Occupiamoci dunque solamente del caso Γ_1 . Procedendo in maniera da ripercorrere

i passi della dimostrazione del Teorema (5.3) si arriva senza intralci fino all'equazione (5.9), che riscritta nel nostro caso diventa:

$$\begin{aligned}
 \nabla^* u(x) &= E^s \left[\int_0^T D_t(\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m})) a(t) B^{-1}(X_t) Y_t \int_0^T p(t) \cdot dW_t \right] \\
 &= E^s \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \delta \left(a(t) B^{-1}(X_t) Y_t \int_0^T p(t) \cdot dW_t \right) \right] \\
 &= E^s \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \int_0^T p(t) \cdot dW_t \delta(a(t) B^{-1}(X_t) Y_t) \right] \\
 &+ E^s \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \int_0^T D_t \left(\int_0^T p(t) \cdot dW_t \right) a(t) B^{-1}(X_t) Y_t dt \right] \\
 &= \nabla^* u_1(x) + \nabla^* u_2(x).
 \end{aligned}$$

Si osservi che il termine Γ_1 coincide esattamente con la prima componente del trasporto di ∇u , opportunamente moltiplicato per e^{-rT}/S_0 , ossia

$$\Gamma_1 = \frac{e^{-rT}}{S_0} (\nabla u(x))^{(1)} = \frac{e^{-rT}}{S_0} ((\nabla^* u_1(x))^*)^{(1)} + \frac{e^{-rT}}{S_0} ((\nabla^* u_2(x))^*)^{(1)}.$$

Inoltre, usando i conti fatti nella dimostrazione del Corollario (5.9), si ottiene facilmente

$$\frac{e^{-rT}}{S_0} ((\nabla^* u_1(x))^*)^{(1)} = E^s \left[\frac{e^{-rT}}{S_0^2} \Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \left(\int_0^T p(t) \cdot dW_t \right)^2 \right],$$

che è un altro dei tre elementi che compongono la scrittura di Γ della nostra tesi.

Dunque rimane solamente da mostrare che

$$((\nabla^* u_1(x))^*)^{(1)} = E^s \left[-\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \int_0^T \frac{a(t)^2}{S_0 \mu^2 v_t} dt \right]. \quad (5.46)$$

Calcoliamo la derivata di Malliavin $D_t \left(\int_0^T p(t) \cdot dW_t \right)$; detto

$$J(t, s) = -\frac{a(s) Y_s^{(2,2)}}{2v_s \sqrt{v_s} Y_t^{(2,2)}} \nu \sqrt{v_t},$$

grazie alla relazione $D\delta = I + \delta D$ e al fatto che p è adattato si ha

$$D_t \left(\int_0^T p(s) \cdot dW_s \right) = p(t) + \delta(D_t(p(\cdot))) = p(t) + \int_0^T D_t(p(s)) \cdot dW_s.$$

↓

$$\begin{aligned}
 D_t \left(\int_0^T p(s) \cdot dW_s \right) &= p(t) + \int_t^T \left(\frac{-a(s)}{2v_s\sqrt{v_s}} D_t v_s \right)^* \cdot dW_s \\
 &= p(t) + \int_t^T \begin{pmatrix} \varrho & -\frac{\varrho^2}{\mu} \\ \mu & -\varrho \end{pmatrix} J(t, s) \cdot dW_s \\
 &= p(t) + \int_t^T \begin{pmatrix} \varrho J(t, s) dW_t^1 - \frac{\varrho^2}{\mu} J(t, s) dW_t^2 \\ \mu J(t, s) dW_t^1 - \varrho J(t, s) dW_t^2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

(abbiamo usato la regola della catena e l'espressione della derivata di Malliavin di v già usata in (5.42)).

Infine, andiamo ad inserire quest'ultima espressione all'interno di ∇u_2 :

$$\begin{aligned}
 (\nabla u_2(x))^{(1)} &= ((\nabla^* u_2(x))^*)^{(1)} = \\
 &= E^s \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \int_0^T \left(\left[D_t \left(\int_0^T p(t) \cdot dW_t \right) a(t) B^{-1}(X_t) Y_t \right]^* \right)^{(1)} dt \right] \\
 &= E^s \left[\Phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_m}) \int_0^T a(t) \left([B^{-1}(X_t) Y_t]^* \cdot \left[D_t \left(\int_0^T p(t) \cdot dW_t \right) \right] \right)^{(1)} dt \right].
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Utilizzando l'espressione (5.43) si ha:

$$a(t) \left[(B^{-1}(X_t) Y_t)^* \cdot p(t) \right]^{(1)} = \frac{a(t)^2}{S_0 v_t} + \frac{\varrho^2 a(t)^2}{S_0 \mu^2 v_t} = \frac{a(t)^2}{S_0 \mu^2 v_t}, \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}
 &a(t) \left[(B^{-1}(X_t) Y_t)^* \cdot \int_t^T \begin{pmatrix} \varrho J(t, s) dW_t^1 - \frac{\varrho^2}{\mu} J(t, s) dW_t^2 \\ \mu J(t, s) dW_t^1 - \varrho J(t, s) dW_t^2 \end{pmatrix} \right]^{(1)} = \\
 &= \int_t^T \frac{\varrho a(t)}{S_0 \sqrt{v_t}} J(t, s) dW_t^1 - \int_t^T \frac{\varrho^2 a(t)}{S_0 \mu \sqrt{v_t}} J(t, s) dW_t^2 \\
 &\quad - \int_t^T \frac{\varrho a(t)}{S_0 \sqrt{v_t}} J(t, s) dW_t^1 + \int_t^T \frac{\varrho^2 a(t)}{S_0 \mu \sqrt{v_t}} J(t, s) dW_t^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

A questo punto è sufficiente inserire (5.48) e (5.49) in (5.47) per ottenere l'equazione (5.46). Il Corollario è dunque dimostrato. \square

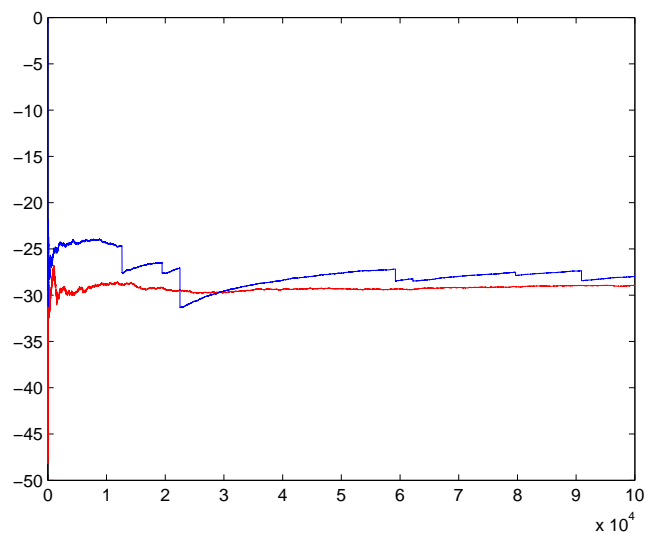
5.3 Risultati Numerici

In quest'ultima sezione presentiamo alcuni risultati numerici, ottenuti con l'aiuto del calcolatore, sull'approssimazione delle greche di opzioni con barriera con metodi Monte Carlo. Lo scopo è quello di confrontare la convergenza del metodo delle differenze finite con la convergenza dei metodi presentati nei paragrafi precedenti.

Abbiamo simulato le greche di una *Put down-and in* nel modello di Heston. La scadenza dell'opzione è un anno dopo la data di sottoscrizione ($T=1$) e la barriera è monitorata giornalmente (si suppone che i prezzi si muovano tutti i giorni dell'anno, dunque $t_i - t_{i-1} = 1/365$ per ogni $i = 1, \dots, 365$). La barriera inferiore L è costante e pari a 80, lo strike della Put è $K = 90$ e il prezzo iniziale del sottostante è $S_0 = 100$. Gli altri parametri del modello sono stati scelti in questo modo: $r = 0.03$, $v_0 = 0.0625$, $\kappa = 0.1$, $\nu = 0.05$, $\theta = 0.0625$ e $\varrho = 0.1$ (si noti che tali parametri soddisfano l'ipotesi (5.8)).

Per ottenere i grafici riportati di seguito sono state effettuate $N = 100000$ simulazioni delle traiettorie dei prezzi. Sull'asse delle ascisse è riportato il numero n delle simulazioni e sull'asse delle ordinate è riportata la media aritmetica $m(n)$ dei valori a scadenza dell'opzione nelle prime n simulazioni.

Figura 5.1: Rho: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte Carlo con il peso calcolato nel Corollario (5.9) (in rosso) e con il metodo delle differenze finite (in blu).



5. Le greche di opzioni con barriere discrete

Figura 5.2: Delta: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte Carlo con il peso calcolato nel Corollario (5.10) (in rosso) e con il metodo delle differenze finite (in blu).

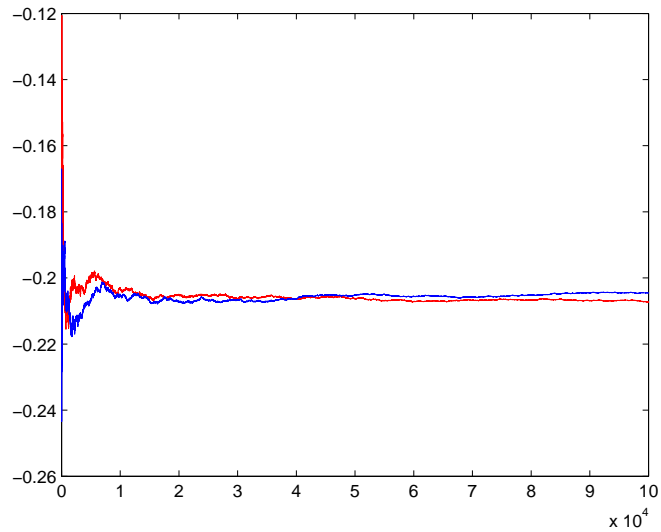


Figura 5.3: Gamma: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte Carlo con il peso calcolato nel Corollario (5.15) (in rosso) e con il metodo delle differenze finite centrate (in blu).

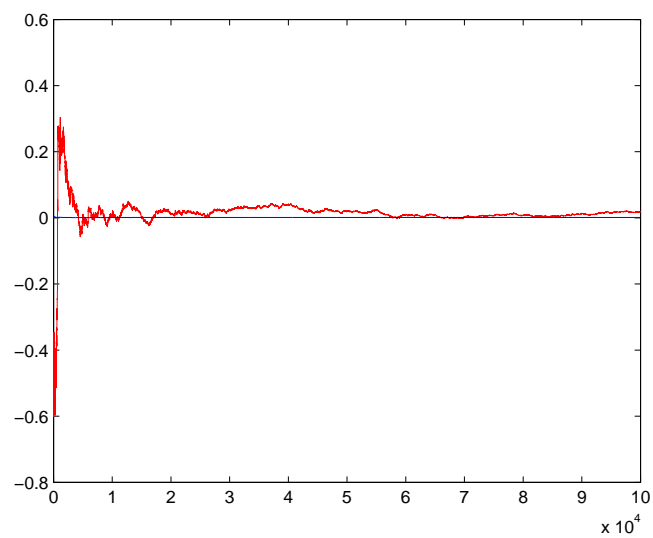


Figura 5.4: Vega^{v₀}: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte Carlo con il peso calcolato nel Corollario (5.11) (in rosso) e con il metodo delle differenze finite (in blu).

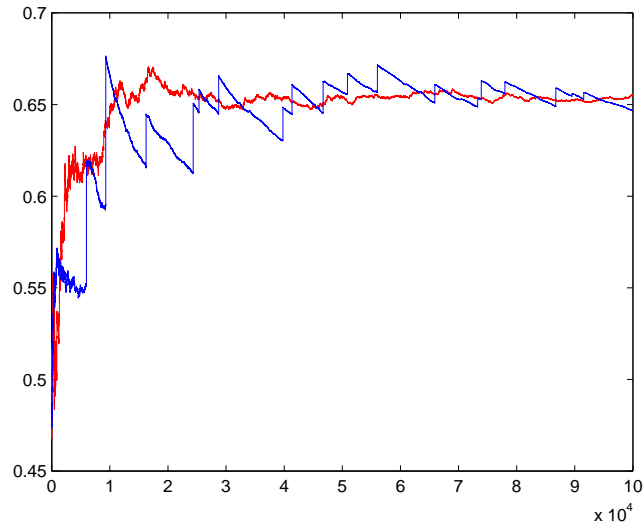


Figura 5.5: Vega^θ: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte Carlo con il peso calcolato nel Corollario (5.12) (in rosso) e con il metodo delle differenze finite (in blu).

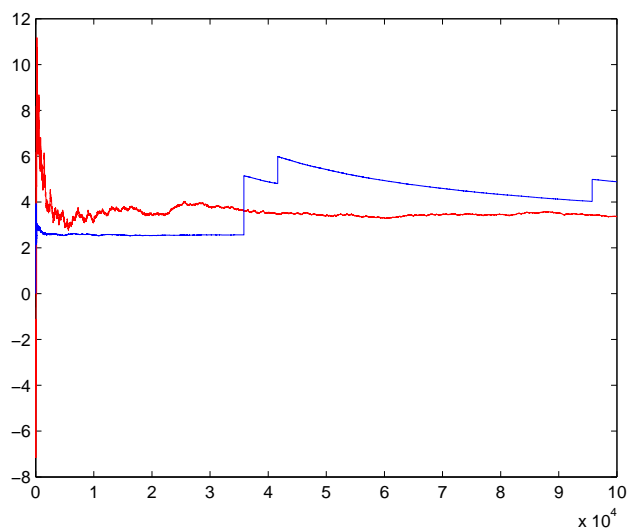
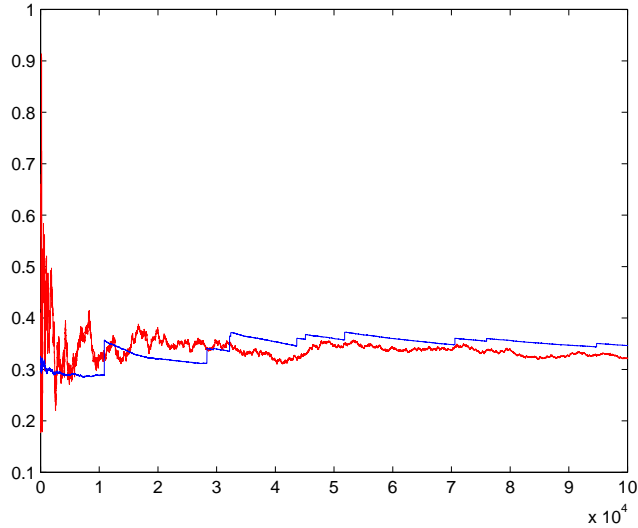


Figura 5.6: Vega^{vt}: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte Carlo con il peso calcolato nel Corollario (5.14) (in rosso) e con il metodo delle differenze finite (in blu).



Come si può vedere dai grafici non è possibile stabilire quale dei due metodi sia il migliore. Infatti per le greche ρ , \mathcal{V}^θ e \mathcal{V}^{v_0} sembra funzionare meglio la procedura che utilizza il calcolo di Malliavin mentre per Γ il metodo delle differenze finite sembra avere una convergenza più veloce. Per le greche Δ e \mathcal{V}^{v_t} la velocità di convergenza sembra essere circa la stessa.

Osservazione 5.16. *Nei Corollari (5.10), (5.15) e (5.11) si ottengono pesi diversi scegliendo diverse funzioni*

$$a(t) \in H_m = \left\{ a \in L^2([0, T]) : \int_0^{t_i} a(t) dt = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m \right\}.$$

Nelle simulazioni il peso $a(t)$ è stato scelto come

$$a(t) = \frac{1}{t_1} I_{[0, t_1]}(t) = 365 \cdot I_{[0, t_1]}(t).$$

È possibile che esistano scelte di $a(t)$ che riducano la varianza della simulazione e che, di conseguenza, migliorino la velocità di convergenza.

Bibliografia

- [1] Alos E., Ewald C.-O. (2007), *Malliavin Differentiability of the Heston Volatility and Applications to Options Pricing*, University of S.Andrews Economics.
- [2] Andersen L., Brotherton-Ratcliffe R. (1996), *Exact Exotics*, Risk 9, 85-89.
- [3] Baldi P. (1995), *Exact Asymptotics for the Probability of Exit from a Domain and Applications to Simulations*, Ann. Probab., 23, 1644-1670.
- [4] Baldi P. (1997), *Large Deviations*, Scuola Matematica Interuniversitaria, Cortona.
- [5] Baldi P., Caramellino L. Iovino M. G. (1999), *Pricing general barrier options: a numerical approach using sharp large deviations*, Mathematical Finance, Vol.9, No. 4, 293-322.
- [6] Bally V. (2003), *An Elementary Introduction to Malliavin Calculus*, Rapport de recherche no. 4718, INRIA 2003.
- [7] Beaglehole D.R., Bybvig P.H., Zhou G. (1997), *Going to Extremes: Correcting Simulations Bias in Exotic Option Valutation*, Financial Anal., 53, 62-68.
- [8] Bernis G., Gobet E., Kohatsu-Higa A. (2003), *Monte Carlo evaluation of Greeks for multidimensional barrier and lookback options*, Mathematical Finance, Vol.13, No. 1, 99-113.
- [9] Bjork T. (2004), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford Press, 2nd ed.
- [10] Black F., Scholes M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, 637-659.
- [11] Borodin A., Salminen P. (1997), *Handbook of Brownian Motion*, Birkhauser Verlag, Basel.
- [12] Broadie M., Glasserman P., Kou S. (1997), *A Continuity Correction for Discrete Barrier Options*, Mathematical Finance, 7, 325-349.

BIBLIOGRAFIA

- [13] Chance D. M. (1994), *The Pricing and Hedging of Limited Exercise Caps and Spreads*, Financial Res., 17, 561-584.
- [14] Da Prato G. (2007), *Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin calculus*, Edizioni della Normale.
- [15] De Marco S. (2009), *Smoothness of densities and Tail Estimates for SDEs with Locally Smooth Coefficients and Applications to Square-Root Type Diffusions*.
- [16] Flesaker B. (1992), *The Design and Valuation of capped Stock Index Options*, working paper, Department of Finance, University of Illinois, Champaign, IL.
- [17] Fournié E., Lasry J.-M., Lebuchoux J., Lions P.-L., Nizar T. (1999), *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance*, Finance and Stochastic, 3, 391-412.
- [18] Garsia A. M., Rodemich E., Rumsey H.Jr. (1970), *A real variable lemma and the continuity of paths of some gaussian processes*, Indiana University Mathematics Journal, 20(6), 565-578.
- [19] Gatheral J. (2006), *The Volatility Surface: a Practitioner's Guide*, Wiley Finance.
- [20] Gobet E., Kohatsu-Higa A. (2003), *Computation of Greeks for Barrier and Lookback Options using Malliavin Calculus*, Electronic Communications in Probability, 8, 51-62.
- [21] Heston S. L. (1992), *A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, The Review of Financial Studies, 6, 327-343.
- [22] Hörfelt P. (2003), *Extension of the corrected barrier approximation by Broadie, Glasserman and Kou*, Finance Stochastic, 7, 231-242.
- [23] Karatzas I., Shreve S.E. (1988), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [24] Kat H., Verdonk L. (1995), *Tree Surgery*, RISK, 8, 53-56.
- [25] Kunimoto N., Ikeda M. (1992), *Pricing options with curved boundaries*, Mathematical Finance 2, 275-297.
- [26] Lamberton D., Lapeyre B. (1997), *Introduction to Stochastic calculus applied to Finance*, Chapman & Hall.
- [27] Malliavin P. (1997), *Stochastic Analysis (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 313)*, Springer, Berlin Heidelberg New York.

- [28] Nualart D. (2005), *The Malliavin calculus and related Topics*, Springer, 2nd ed.
- [29] Nualart D., Vives J. (1988), *Absolute continuity of the law of the maximum of a continuous process*, C.R. Acad. Sci. Paris 307(7), 349-354.
- [30] Protter P. (1990), *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Berlin Heidelberg New York.
- [31] Revuz D., Yor M. (1994), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 2nd ed. Berlin.