

Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2007/2008

Tesi di Laurea Specialistica

Eventi di rinnovo e risposta lineare nella turbolenza debole dei cristalli liquidi nematici

Candidato
Ludovico Silvestri

Relatore
Chiar.mo Prof. Leone Fronzoni

Indice

1	Introduzione	1
2	Eventi cruciali e processi di rinnovo non poissoniani	4
2.1	Generalità sui processi di rinnovo	4
2.2	Un modello dinamico per i processi di rinnovo	7
2.3	Rottura dell'ergodicità	11
2.4	Invecchiamento	14
2.5	NPR dicotomici	17
3	Risposta lineare in un sistema dominato dagli eventi	19
3.1	Un teorema di fluttuazione e dissipazione per sistemi complessi	20
3.2	Risposta a un segnale a gradino	23
3.3	Risposta ad un onda sinusoidale	23
3.4	Rilassamento da uno stato di non equilibrio e rottura del principio di Onsager	24
3.5	Risposta ad un segnale complesso: <i>complexity matching effect</i> (CME)	25
4	Cristalli liquidi	27
4.1	Cristalli liquidi nematici (CLN): generalità	27
4.2	Nematici in campi elettrici	29
4.3	I cristalli liquidi nematici e la complessità	34
5	Metodi sperimentali	36
5.1	Apparato sperimentale	36
5.2	Stabilizzazione della lampada	37
5.3	Effetti di saturazione	40
5.4	Analisi del filmato	43

6	Metodi di analisi dati	45
6.1	<i>Standard Deviation Analysis</i> (SDA)	46
6.2	<i>Detrended Fluctuation Analysis</i> (DFA)	48
6.3	Entropia di Diffusione (DE)	49
6.4	Spettro di potenza	50
6.5	Funzione di autocorrelazione	52
6.6	Il teorema di Wiener-Kintchine e gli spettri $1/f$	53
7	Risultati sperimentali	55
7.1	Caratterizzazione degli eventi di rinnovo	55
7.2	Ergodicità, stazionarietà e omogeneità spaziale	60
7.3	Rilassamento all'equilibrio	66
7.4	Risposta a perturbazioni sinusoidali e complesse	77
8	Conclusioni e prospettive	90
A	Codice sorgente per il programma di analisi del filmato	92
	Bibliografia	98

Capitolo 1

Introduzione

La complessità è una delle sfide più importanti per la scienza contemporanea. Sistemi complessi sono ovunque intorno a noi: dai sistemi biologici a quelli economici, dalla turbolenza debole al clima, dalle reti informatiche al cervello. Tutti sono caratterizzati da un accurato bilancio di ordine e casualità che si manifesta nella nascita di strutture auto-organizzate.

Uno dei paradigmi teorici fondamentali dell'emergente campo dei sistemi complessi è che la dinamica di questo tipo di strutture è *universale*, vale a dire non dipende dai dettagli del sistema sotto indagine. In realtà è più corretto parlare di classe di universalità, in cui si possono racchiudere fenomeni estremamente diversi ma accomunati dal tipo di dinamica complessa. Il tipo di interazione e la natura delle unità elementari che costituiscono il sistema decide quindi a che classe questo vada assegnato, ma non lo caratterizzano *da sole*. Questo concetto è lo stesso che si usa nella teoria dei fenomeni critici, dove la dinamica microscopica non determina da sola le caratteristiche macroscopiche (gli indici critici), che sono invece legati a proprietà più universali come il tipo di simmetria.

Nonostante il campo della complessità abbia attirato negli ultimi decenni l'interesse e le ricerche di una grande comunità di scienziati, non esiste ancora una teoria unificata per questo tipo di sistemi. Sono tuttavia nati una serie di modelli che riescono in qualche modo a cogliere alcuni aspetti del problema. Alcuni di questi cercano di spiegare l'emergenza di strutture auto-organizzate a partire da principi primi, altri invece studiano il problema in modo più fenomenologico, cercando però di predire la dinamica di queste strutture.

In questa tesi ci riferiremo ad un modello di questo secondo tipo, vale a dire quello dei processi di rinnovo non poissoniani, che modella la dinamica del sistema come un alternarsi di momenti di intensa attività in cui viene cancellata la memoria del sistema (detti eventi di rinnovo) e di intervalli di relativa calma (detti zone laminari). La complessità in questo modello viene introdotta assumendo che la distribuzione dei tempi di attesa tra un evento e l'altro non sia poissoniana, come invece si avrebbe se il tasso di "produzione" degli eventi fosse costante, ma abbia una forma a potenza inversa.

Naturalmente questo modello è, come detto sopra, fenomenologico e quindi non ci dice *perché* esistano tali eventi nè come mai non siano poissoniani: ciononostante permette di derivare interessanti proprietà per sistemi di questo tipo. È inoltre da osservare che un comportamento prodotto da eventi di rinnovo, come quello descritto nel paragrafo precedente, è presentato da diversi sistemi dinamici teorici così come da numerosi sistemi reali. Uno degli scopi di questa tesi è di indicare come tra questi ultimi possa essere inserita anche la turbolenza debole.

Un ottimo sistema in cui può essere studiato questo tipo di turbolenza è costituito dai cristalli liquidi nematici. Infatti ponendo un campione di nematico tra due piastre di vetro ed applicando ai loro capi una differenza di potenziale si osserva, quando il voltaggio supera un valore critico, un'instabilità elettroconvettiva analoga a quella di Rayleigh-Bénard. Nel pattern formato dai rulli di convezione nascono poi strutture localizzate note come difetti, che interagendo tra di loro e con il pattern danno origine ad una dinamica complessa. Questo sistema mostra quindi una grande ricchezza di comportamenti dinamici, ed allo stesso tempo è facilmente accessibile dal punto di vista sperimentale. Queste caratteristiche rendono le instabilità elettroconvettive dei cristalli liquidi nematici particolarmente interessanti per lo studio della complessità.

Lo studio sperimentale di questo sistema è consistito nell'osservare la risposta del sistema a stimoli esterni, confrontandola con le sue proprietà in assenza di perturbazione. In meccanica statistica tradizionale questi due aspetti sono collegati dalla teoria della risposta lineare, nota anche come teorema di fluttuazione e dissipazione. Per un sistema complesso la validità di questa teoria non è però garantita. Recentemente è stato infatti proposto un nuovo teorema di fluttuazione e dissipazione, basato sul modello dei

processi di rinnovo non poissoniani. Le previsioni di questo teorema offrono un possibile banco di prova per la verifica sperimentale dell'intera teoria.

In questa tesi si è dunque deciso di studiare il legame tra fluttuazioni e risposta in un campione di cristalli liquidi nematici in un regime di turbolenza debole utilizzando tre diversi tipi di perturbazione: una costante, una sinusoidale e una “complessa”, vale a dire un segnale caratterizzato da proprietà di scala. I risultati ottenuti sono stati poi confrontati con quanto previsto dalla teoria dei processi di rinnovo, ottenendo un buon accordo.

La tesi è organizzata come segue: nel cap. 2 viene presentata la teoria dei processi di rinnovo non poissoniani con le sue caratteristiche più importanti, come l'invecchiamento delle distribuzioni; nel cap. 3 è brevemente esposta la teoria della risposta lineare per un sistema governato da eventi di rinnovo. Nel cap. 4 vengono poi riportate le caratteristiche principali dei cristalli liquidi nematici e del loro comportamento in presenza di campi elettrici. Successivamente, nei cap. 5 e 6 sono presentati, rispettivamente, i metodi sperimentali e di analisi dati utilizzati in questo lavoro. Nel cap. 7 sono, infine, esposti i risultati sperimentali. Nel cap. 8 sono riportate le conclusioni.

Capitolo 2

Eventi cruciali e processi di rinnovo non poissoniani

La natura presenta numerosi sistemi in cui è possibile individuare degli *eventi cruciali*, cioè momenti di intensa attività, preceduti e seguiti da periodi di relativa calma, chiamati *zone laminari*. Esempi di questo comportamento intermittente si trovano sperimentalmente nei fenomeni di turbolenza e nelle reti neurali [28]. Non solo, ma anche svariati sistemi dinamici di interesse teorico quali la mappa logistica, la mappa di Manneville [30], la *Self Organized Criticality* (SOC) [12], producono in modi diversi una dinamica di questo tipo.

La presenza di eventi in un numero così grande di sistemi complessi suggerisce che questi siano in qualche modo un indice della complessità e che abbiano a che fare con le proprietà che emergono da fenomeni collettivi. Una possibile interpretazione, proposta in numerosi lavori in letteratura e seguita in questa tesi, è quella di vedere gli eventi come dinamiche veloci legate alla nascita e alla morte delle strutture auto-organizzate che governano le proprietà macroscopiche di un sistema complesso.

2.1 Generalità sui processi di rinnovo

In che cosa consista specificatamente l'evento è chiaramente una domanda la cui risposta varia da sistema a sistema; eventi possono essere il *firing* in un sistema di neuroni [28], i *crash* in un mercato finanziario, l'accensione della fluorescenza in un quantum dot, o la nascita (e la morte) di un difetto

in un pattern di turbolenza, come nel sistema oggetto di questo lavoro. Nonostante questa grande diversità tutti i sistemi dominati da eventi mostrano proprietà che dipendono unicamente dalla natura di questi ultimi, in particolare da come sono distribuiti nel tempo e dalle loro (eventuali) proprietà di *rinnovo*.

Un *evento di rinnovo* è un evento che comporta la cancellazione della memoria del sistema, nel senso che il successivo evento è completamente scorrelato da quello presente.

Apparentemente questa definizione può non sembrare molto buona per creare un modello con l'ambizione di spiegare la fenomenologia di molti sistemi complessi, una caratteristica dei quali è la lunga persistenza della memoria. Sono quindi necessarie alcune precisazioni:

1. la perdita di memoria si ha a cavallo di un evento e non tra un evento e l'altro. Nella zona laminare il sistema è fortemente correlato e presenta una forte memoria;
2. in un sistema complesso *reale* si hanno vari processi di rinnovo dislocati spazialmente¹, cosicché la probabilità di un reset **totale** del sistema (cioè di un evento di rinnovo contemporaneo a tutti i processi) tende rapidamente a zero;
3. la perdita di memoria intesa in questo contesto è relativa solo ai processi che portano agli eventi cruciali e non ad altre caratteristiche del sistema: da un punto di vista matematico rinnovo vuol dire *solo* che i tempi di attesa prima di eventi consecutivi sono scorrelati, $\psi(t_1, t_2) = \psi(t_1)\psi(t_2)$ ².

In ogni caso i processi di rinnovo sono un modello fenomenologico la cui validità va verificata in ultima istanza per via sperimentale.

Per caratterizzare statisticamente gli eventi introduciamo innanzitutto la funzione $\psi(t)$, che rappresenta la probabilità che il tempo trascorso tra due eventi consecutivi giaccia nell'intervallo $[t, t + \Delta t)$. Naturalmente questa

¹si potrebbe obiettare, a ragione, che i vari processi non sono indipendenti: infatti sono proprio le correlazioni spaziali a dare origine a molti tipi di struttura. Ciononostante si può modellizzare un sistema esteso in maniera locale, assumendo la presenza di eventi in maniera fenomenologica. Questo modo di ragionare è simile a quello dell'equazione di Langevin, in qui si isola un solo grado di libertà del sistema e si modellizzano gli altri con il termine di drift e di diffusione.

² $\psi(t)$ è la distribuzione dei tempi di attesa tra un evento e l'altro, definita subito dopo.

distribuzione di probabilità soddisfa la condizione di normalizzazione

$$\int_0^{\infty} \psi(t) dt = 1 . \quad (2.1)$$

A partire dalla ψ si definisce la probabilità che, avendo un evento al tempo $t = 0$ non se ne abbiano altri fino al tempo t , cioè che le strutture auto-organizzate *sopravvivano* fino al tempo t . Questa *survival probability* è data da:

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t \psi(t') dt' = \int_t^{\infty} \psi(t') dt' , \quad (2.2)$$

e soddisfa alla relazione $\Psi(0) = 1$, come discende immediatamente dalla condizione di normalizzazione. Dall'eq. 2.2 segue anche, derivando entrambi i membri rispetto al tempo,

$$\psi(t) = -\Psi'(t) . \quad (2.3)$$

Altra funzione fondamentale è il tasso di produzione di eventi, cioè la probabilità che, avendo un evento al tempo $t = 0$, il sistema non produca eventi fino al tempo t per poi generarne uno nell'intervallo $[t, t + \Delta t)$; questa non è altro che la probabilità di avere due eventi consecutivi distanziati di t condizionata dal fatto che il sistema sia sopravvissuto fino a tale momento³:

$$g(t) = \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} = -\frac{d \ln \Psi}{dt} , \quad (2.4)$$

dove si è usata l'eq. 2.3; si noti che in linea di principio g dipende dal tempo trascorso dall'ultimo evento.

La forma della funzione ψ è quindi determinante per stabilire le proprietà statistiche del sistema; sebbene ogni distribuzione che soddisfi l'eq. 2.1 sia in principio accettabile, in pratica esistono alcune scelte particolarmente significative. Nel seguito verranno brevemente presentate due di queste. In generale comunque la maggior parte delle proprietà e degli effetti interessanti sono dovuti alle proprietà asintotiche delle ψ .

³Apparentemente la definizione di g sembra un giro di parole: la probabilità di avere il primo evento al tempo t è ψ ! In realtà si guardano le cose da due punti di vista diversi: la ψ ci dà, *al tempo 0* la probabilità di dover aspettare fino a t per vedere un evento; la g la probabilità *al tempo t* che si abbia un evento immediatamente. Il concetto è lo stesso dei numeri ritardatari del lotto: la probabilità *a priori* che un numero non esca per tre anni è molto bassa, ciononostante passati tre anni in cui il numero non è uscito la probabilità di estrazione è sempre la stessa: 1/90.

Nel contesto della meccanica statistica ordinaria, i possibili eventi sono causati esclusivamente da fluttuazioni random e non da una dinamica sottostante; quindi la probabilità (per unità di tempo) di avere un evento (cioè la $g(t)$) deve essere costante. Indicando questa costante con $1/\tau$ possiamo integrare l'eq. 2.4 e successivamente l'eq. 2.3 ottenendo

$$\psi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.5)$$

e cioè la ben nota distribuzione di Poisson per i tempi.

Se dunque nel caso di sistemi **non** complessi la ψ risulta essere esponenziale, è normale pensare che la complessità modifichi sostanzialmente questo comportamento, dando luogo a **processi di rinnovo non poissoniani** (*Non-Poisson Renewal Processes*, NPR). Numerosi modelli (la già citata SOC, la teoria delle code, l'intermittenza della mappa di Manneville) suggeriscono che una buona scelta è rappresentata dall'andamento a potenza inversa:

$$\psi(t) = (\mu - 1) \frac{T^{\mu-1}}{(t + T)^{\mu}}, \quad (2.6)$$

dove T è un parametro che indica il tempo oltre il quale si osserva l'andamento a potenza inversa. Il fattore $(\mu - 1)T^{\mu-1}$ al numeratore viene dalla normalizzazione. Questo tipo di legge mostra un decadimento molto lento ed è adatto a spiegare le lunghe correlazioni presenti in molti sistemi complessi. L'esponente μ permette poi una caratterizzazione quantitativa di queste correlazioni.

Per questo tipo di distribuzione la survival probability risulta:

$$\Psi(t) = \left(\frac{T}{t + T} \right)^{\mu-1}, \quad (2.7)$$

e la $g(t)$:

$$g(t) = \frac{\mu - 1}{t + T}. \quad (2.8)$$

2.2 Un modello dinamico per i processi di rinnovo

É utile ai fini della comprensione della teoria introdurre un *toy-model* che mostri un comportamento di tipo NPR: a questo scopo in letteratura viene ormai da anni usata una versione idealizzata della mappa di Manneville

[30, 2]. Il sistema dinamico originale, introdotto nel 1980 proprio per modellizzare l'intermittenza osservata nei fenomeni di turbolenza, è una mappa discreta della forma

$$x_{n+1} = x_n + x_n^z \pmod{1} \quad (z \geq 1), \quad (2.9)$$

come illustrato in fig. 2.1. Con questa legge di evoluzione si hanno due dinamiche totalmente differenti a seconda che x sia minore o maggiore del punto in cui il secondo membro dell'eq. 2.9 vale 1, indicato con A (vedi fig. 2.1). Nel primo caso la mappa si comporta in modo regolare (zona laminare), altrimenti si ha una immediata reimmissione nella regione $x < A$ in maniera estremamente sensibile alle condizioni iniziali (e quindi un comportamento caotico).

Sebbene questo sistema dinamico sia stato ampiamente studiato, sia in termini degli esponenti di Lyapounov, sia per quanto riguarda la sua entropia (nella definizione di Kolmogorov–Sinai), la sua natura discreta non permette di determinare in modo semplice i tempi che intercorrono tra un *burst* e l'altro. Per questo motivo è conveniente usare un sistema dinamico continuo nel tempo, in cui la zona laminare è formata dall'intervallo $(0, 1)$ e la zona caotica è ridotta al solo punto 1. In pratica per $x \in (0, 1)$ l'evoluzione è data da:

$$\dot{x} = \alpha x^z, \quad (2.10)$$

e per $x = 1$ il valore all'istante successivo viene estratto con eguale probabilità nell'intervallo $(0, 1)$ ⁴. Due grafici di serie temporali costruite con queste prescrizioni sono riportati in fig. 2.2.

Per visualizzare in maniera più intuitiva il comportamento di questo sistema dinamico si può pensare ad una particella di massa trascurabile immersa in un fluido con viscosità $\gamma = 1$ che, sotto l'effetto del campo gravitazionale, cade lungo un profilo dato dalla funzione $y = \alpha \frac{1-x^{z+1}}{z+1}$. Infatti con queste ipotesi l'equazione del moto diventa⁵

$$0 \simeq m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{1-x^{z+1}}{z+1} \right) \quad \text{da cui}$$

⁴Si può notare come la mappa di Manneville nella regione laminare non sia altro che la mappa standard di questo sistema dinamico continuo.

⁵assumendo che l'accelerazione di gravità g sia uguale a 1.

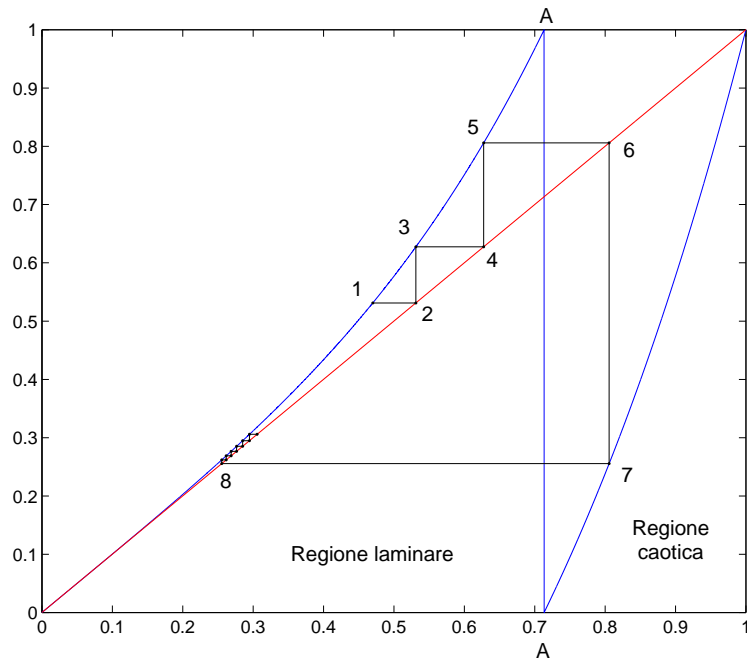
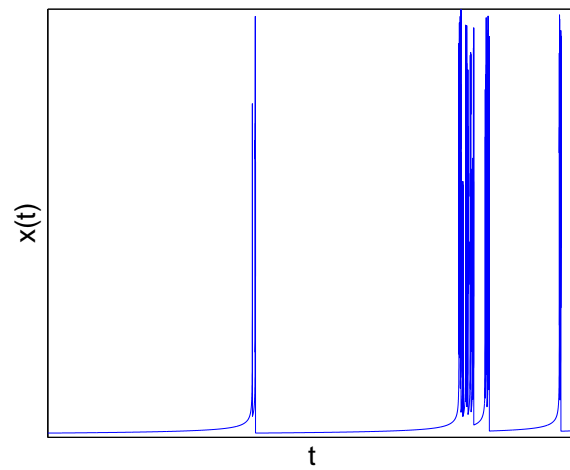
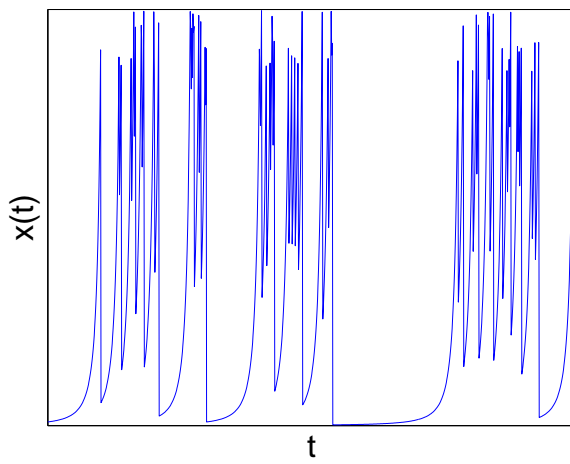


Figura 2.1: Mappa di Manneville. La traiettoria in neretto è una schematizzazione dell'evoluzione dinamica della variabile x . Infatti partendo da $x = x(1)$, $y = y(1)$, si effettua prima una trasformazione “orizzontale” ($x(1) \rightarrow x(2) = y(1)$, $y(1) \rightarrow y(2) = y(1)$) e poi una “verticale” ($x(2) \rightarrow x(3) = x(2)$, $y(2) \rightarrow y(3) = f(x(2))$). Questa rappresentazione è resa possibile dalla forma ricorsiva dell'eq. 2.9. L'aggettivo “caotica” per la regione $x > A$ è giustificato dal fatto che una traiettoria che entra in tale regione esce allo step immediatamente successivo mostrando un'estrema sensibilità alle condizioni iniziali [30]. Al contrario nella regione laminare la dinamica è più lenta e traiettorie inizialmente vicine restano tali.



(a)



(b)

Figura 2.2: Serie temporali generate secondo le prescrizioni dell'eq. 2.10 con $z = 3.7$ (a) e $z = 1.5$ (b).

$$\dot{x} \simeq \alpha x^z ,$$

dove si è usato il fatto che la massa è stata scelta trascurabile e la viscosità uguale a 1.

Per vedere che questo tipo di sistema produce eventi di rinnovo non poissoniani basta integrare l'eq. 2.10 e successivamente invertirla per trovare il tempo di permanenza nella zona laminare in funzione della posizione iniziale x_0 . Questo risulta essere

$$\tau = \frac{1}{\alpha(z-1)} \left(\frac{1}{x_0^{z-1}} - 1 \right) . \quad (2.11)$$

A questo punto si opera il cambiamento di variabili passando dalla densità di probabilità delle x_0 (scelte, come detto, con uguale probabilità nell'intervallo $(0, 1)$) e quella per i tempi utilizzando lo Jacobiano:

$$\psi(t) = P(x_0) \left| \frac{dx_0}{dt} \right| = \frac{(1/(\alpha(z-1)))^{\frac{z}{z-1}}}{(t + 1/(\alpha(z-1)))^{\frac{z}{z-1}}} = (\mu - 1) \frac{T^{\mu-1}}{(t + T)^\mu} , \quad (2.12)$$

dove $\mu = z/(z-1)$, $T = 1/\alpha(z-1)$. Quindi gli eventi generati dal sistema (cioè le reiniezioni della particella nell'intervallo $(0, 1)$, che sono un'idealizzazione del comportamento della mappa di Manneville nella sua regione caotica) seguono la legge a potenza di eq. 2.6.

Notiamo *en passant* che questo modello fornisce anche un utile algoritmo per ottenere da una distribuzione piatta di numeri in un intervallo, accessibile alla maggior parte dei calcolatori, una legge a potenza inversa mediante la trasformazione 2.12. Ad ogni modo sarà di aiuto alla comprensione della teoria dei NPR applicare alcuni concetti generali a questo sistema dinamico specifico.

2.3 Rottura dell'ergodicità

Ritorniamo ora all'eq. 2.6: questa definisce una distribuzione di probabilità per i tempi di attesa tra un evento e l'altro che è normalizzata (e quindi definita) solo per $\mu > 1$. Supponiamo di utilizzare questi tempi per generare un processo stocastico in cui gli eventi corrispondano ad una dinamica

random mentre le zone laminari sono deterministiche⁶.

Volendo studiare le proprietà asintotiche di questo processo possiamo cominciare analizzando i momenti della distribuzione ψ , in particolare la varianza e la media. La prima è definita solo per $\mu > 3$ e diverge altrimenti: questo implica che per $\mu < 3$ il processo non obbedisce al teorema del limite centrale e quindi non è asintoticamente gaussiano. In effetti in questa regione la distribuzione limite è di Lévy, secondo quanto previsto del Teorema del Limite Centrale Generalizzato [18, 6]; questo tipo di distribuzione presenta leggi di scala inusuali che riflettono il carattere anomalo del processo⁷.

Osservando successivamente il comportamento della media si nota un'anomalia ancora maggiore: per $\mu < 2$ questa diverge (laddove per $\mu > 2$ vale $\frac{T}{\mu-2}$). Questo fatto ha conseguenze molto profonde. Per comprenderle ricordiamo che l'ipotesi ergodica, uno dei fondamenti della meccanica statistica tradizionale, asserisce che il valor medio di un osservabile calcolato su un ensemble di Gibbs e la sua media temporale valutata su un singolo sistema sono uguali nel limite in cui il tempo di osservazione sia molto più grande dei tempi caratteristici della dinamica del sistema. Intuitivamente è quindi chiaro che se questi tempi divergono l'ipotesi non è più valida e le due medie portano a risultati diversi: in formule

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \neq \langle f(x) \rangle . \quad (2.13)$$

Questo risultato è stato dimostrato, in questo contesto, da Bel e Barkai [13], utilizzando come modello di processo il Continuous Time Random Walk di Montroll e Weiss [31].

Da un punto di vista fisico questa rottura dell'ergodicità comporta che le osservabili collegate al sistema sono non stazionarie e che risulta impossibile misurare in maniera univoca il loro valor medio, avendo a disposizione un'unica copia del sistema.

⁶per esempio si può generare un Continuous Time Random Walk [31] su reticolo, in cui gli eventi corrispondono a salti casuali del camminatore (in un punto adiacente), che altrimenti rimane fermo. Questo modello è quello presentato da Bel e Barkai [13]. Il modello spesso utilizzato da Grigolini e collaboratori, che verrà utilizzato in questa tesi, è invece quello di un segnale dicotomico [11].

⁷un processo gaussiano (o di Wiener) verifica asintoticamente $p(x, t) = 1/t^\delta p(x/t^\delta)$ con $\delta = 0.5$. Nel caso di distribuzioni di Lévy δ può assumere altri valori. Comunque torneremo meglio su questo punto nel capitolo dedicato ai metodi di analisi dati.

Nella tabella 2.1 si riassume il comportamento del sistema al variare del parametro di controllo μ .

Parametro di controllo	$\mu < 2$	$2 < \mu < 3$	$\mu > 3$
Ergodico	No	Sì	Sì
Gaussiano (asintoticamente)	No	No	Sì

Tabella 2.1: Caratteristiche del processo stocastico generato tramite eventi al variare di μ .

Cerchiamo di capire meglio i concetti sopra esposti mettendoli in relazione al sistema dinamico presentato nel paragrafo 2.2 (ricordiamo che $1 < \mu < 2$ è equivalente a $2 < z < \infty$).

In questo caso la stazionarietà è legata all'esistenza di una distribuzione invariante nello spazio delle fasi e l'ergodicità alla possibilità di raggiungere questa distribuzione in tempo finito mediante l'evoluzione naturale dettata dalla mappa.

Per trovare la forma di questa distribuzione è necessario risolvere l'equazione che descrive l'evoluzione temporale delle densità di probabilità nello spazio delle fasi per il sistema dinamico in questione [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} x^z p(x, t) + \alpha p(1, t), \quad (2.14)$$

ponendo il termine a sinistra uguale a zero.

Così facendo si ottiene:

$$p_{inv}(x, t) = \frac{2-z}{x^{z-1}}, \quad (2.15)$$

nel caso $z < 2$ (e quindi $\mu > 2$) mentre non esiste distribuzione invariante per $z > 2$ ($\mu < 2$). All'aumentare di z (cioè al diminuire di μ) la densità di probabilità p_{inv} diventa sempre più piccata fino a diventare una delta di Dirac per $z = 2$ (vedi fig. 2.3).

In questo *toy-model* la rottura di ergodicità corrisponde dunque alla perdita della distribuzione invariante: il sistema continua ad evolvere indefinitamente verso la distribuzione a delta.

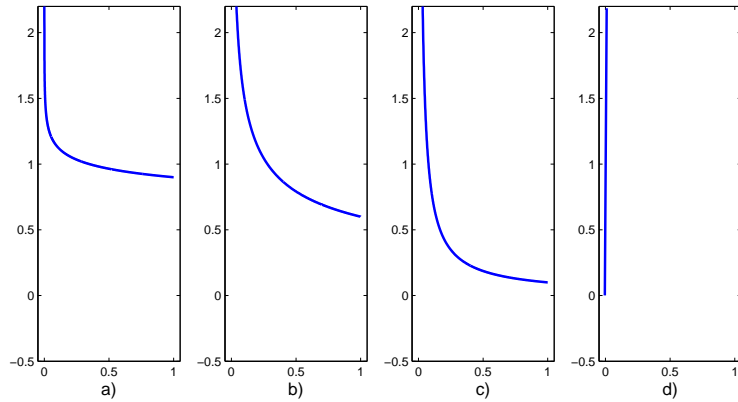


Figura 2.3: Distribuzione invariante per la mappa di Manneville modificata (eq. 2.10) per diversi valori di z (μ): 1.1 (11) in (a), 1.4 (3.5) in (b), 1.9 (2.1) in (c), $z > 2$ ($\mu < 2$) in (d).

2.4 Invecchiamento

L'eq. 2.8 mostra una caratteristica importante degli NPR: il tasso di produzione di eventi *non* è stazionario. In pratica più tempo passa dall'ultimo evento meno probabile diventa la produzione immediata del successivo. Questo comportamento non stazionario delle probabilità viene definito “invecchiamento” (*aging*), nel senso che le proprietà statistiche cambiano con il passare del tempo. In questo caso particolare si parla di “negative aging” perché la probabilità di avere eventi decresce al passare del tempo; la situazione opposta è quella di “positive aging” (vedi fig. 2.4).

Questo fenomeno ha conseguenze molto forti nella statistica degli NRP. Consideriamo infatti un ensemble di processi preparati al tempo $t = 0$ (cioè un ensemble in cui al tempo 0 si ha un evento in ogni sistema) come quello rappresentato in fig. 2.5. I tempi di attesa per il primo evento in ogni elemento dell'ensemble sono distribuiti secondo la $\psi(t)$ in quanto questa è la distribuzione dei tempi di attesa tra un evento e l'altro e all'istante iniziale si ha un evento in *tutti* i sistemi.

Se però iniziamo ad osservare l'ensemble (preparato al tempo 0) ad un istante successivo $t' > 0$, le cose cambiano (vedi fig. 2.5). Infatti nell'istante in cui inizia l'osservazione non si ha un evento in ogni sistema, ed i tempi di attesa per il primo evento (*dall'inizio dell'osservazione*) non sono più

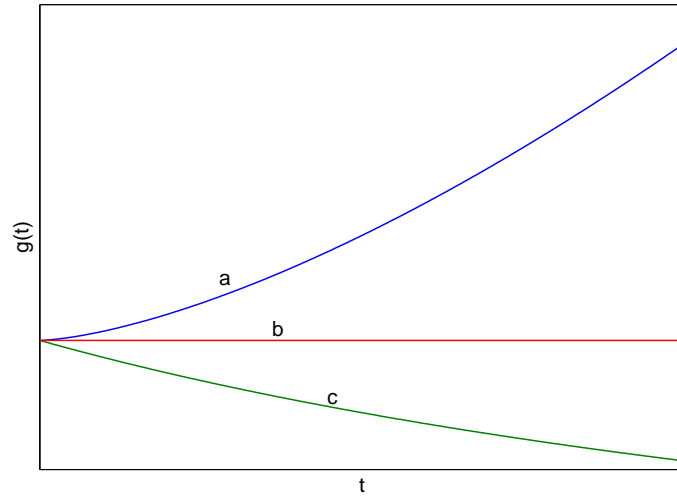


Figura 2.4: Tre diversi comportamenti per il rate di produzione di eventi: *positive aging* (a), nessun invecchiamento (b), *negative aging* (c).

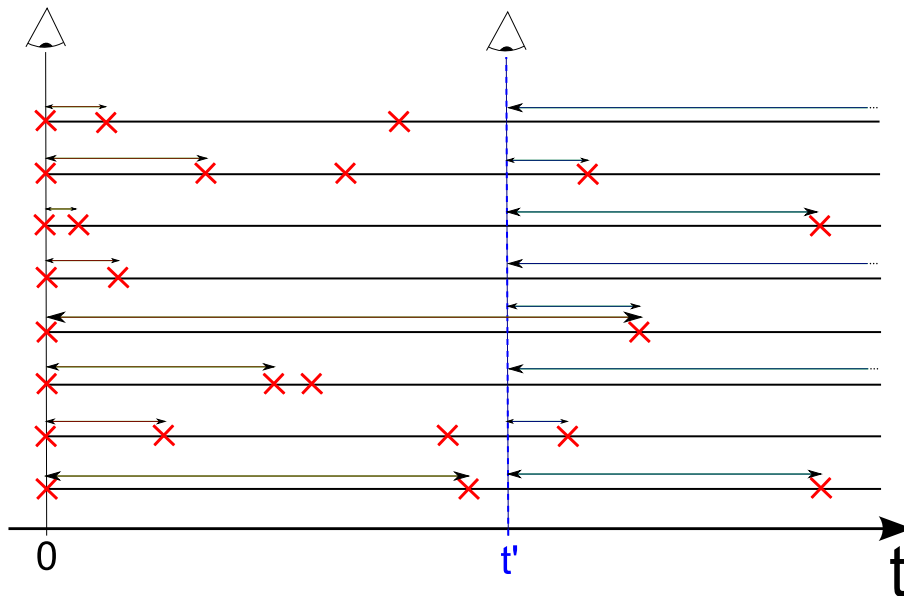


Figura 2.5: Invecchiamento in un processo di rinnovo. Se l'osservazione inizia con la preparazione del sistema, la distribuzione dei tempi di attesa (indicati schematicamente con dei segmenti neri) per il primo evento è data dalla $\psi(t)$. Se invece l'osservazione inizia successivamente questi tempi (indicati schematicamente con dei segmenti blu) sono distribuiti secondo la legge 2.16 (vedi testo).

distribuiti secondo la $\psi(t)$, ma con un'altra legge [21]:

$$\psi(t, t') = \psi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t'} dt'' \psi_n(t'') \psi(t - t''), \quad (2.16)$$

dove $\psi_n(t)$ è la probabilità di osservare n eventi di cui l'ultimo al tempo t avendo preparato il sistema al tempo 0. Questa formula può essere spiegata così: la probabilità di vedere un evento al tempo t , senza sapere quanti ce ne sono stati prima dell'inizio dell'osservazione (t'), è data dalla convoluzione tra la probabilità di avere avuto n eventi prima di t' e la distribuzione dei tempi di attesa tra due eventi successivi (che è esattamente la definizione di ψ , vedi par. 2.1). Tutto questo va poi sommato su n in quanto prima di t' posso avere un numero arbitrario di eventi. A questo termine va aggiunta la $\psi(t)$, che tiene conto del caso in cui prima dell'inizio dell'osservazione non ci sono stati eventi. L'eq. 2.16 fondamentalmente afferma che la probabilità di osservare il primo evento dopo t' si trova sommando su tutte le possibili "storie" del sistema prima di tale istante, e da questo punto di vista è simile alla nota equazione di Chapman–Kolmogorov–Smoluchovski⁸ in teoria dei processi stocastici.

Grigolini *et al.* [21] hanno poi dimostrato che per $\mu > 2$ e $t' \rightarrow \infty$ la distribuzione di eq. 2.16 dipende solo dalla differenza tra t e t' e diventa:

$$\psi(t, t' \rightarrow \infty) = \psi_{\infty}(t - t' \equiv \tau) = (\mu - 2) \frac{T^{\mu-2}}{(\tau + T)^{\mu-1}}. \quad (2.17)$$

Questa distribuzione è chiamata distribuzione *invecchiata*.

Il termine invecchiamento significa proprio questo: preparando un ensemble di sistemi in modo che tutti abbiano un evento di rinnovo al tempo 0, si osservano eventi (i *primi* di ogni sistema) nell'ensemble con probabilità data dall'eq. 2.6. Se però si lascia evolvere l'ensemble e si ritorna ad osservarlo dopo un po' di tempo gli eventi che si vedono sono distribuiti con la ψ_{∞} data dall'eq. 2.17. Dunque le proprietà statistiche dell'ensemble variano con il tempo e si può parlare di ensemble (e quindi distribuzioni) *giovani* e *invecchiati*, dove i primi sono quelli in cui tutti i processi si rinnovano contemporaneamente al tempo 0, mentre gli altri sono quelli in cui si è raggiunto un regime statistico stazionario.

⁸chiaramente non uguale. In quel caso si ha a che fare con distribuzioni spaziali, qui con distribuzioni dei tempi di attesa.

Quanto detto finora riguarda il caso $\mu > 2$. Per $1 < \mu < 2$ non esiste il limite per $t' \rightarrow \infty$ dell'eq. 2.16 e quindi la condizione di invecchiamento non viene mai raggiunta (come è giusto che sia, dato che questa è una condizione stazionaria mentre in questo caso il processo non è stazionario) ma la distribuzione cambia continuamente, dando luogo ad una evoluzione infinita delle probabilità definita *perennial aging*.

Anche in questo caso è utile visualizzare in pratica quanto detto mediante la mappa di Manneville idealizzata.

Se prepariamo il sistema al tempo 0 si ha una distribuzione uniforme nello spazio delle fasi (la distribuzione con la quale la particella viene reimpressa nell'intervallo $(0, 1)$). La probabilità dei tempi per i primi eventi è data, tramite il calcolo fatto precedentemente, dall'eq: 2.6. Al passare del tempo però il sistema raggiunge (quando gli è possibile, cioè per $\mu > 2$) la distribuzione invariante (vedi fig. 2.3): per calcolare adesso la distribuzione dei tempi di attesa osservati bisogna rifare gli stessi passaggi svolti nel paragrafo 2.2, ma prendendo come distribuzione delle x_0 la distribuzione invariante e non più quella uniforme⁹; con questo procedimento si trova esattamente l'espressione 2.17.

Il modello dinamico in questo caso insegna anche qualcos'altro: poiché l'invecchiamento della distribuzione dei tempi è legato all'invecchiamento della distribuzione nello spazio delle fasi (sia che questa raggiunga la distribuzione invariante sia che evolva senza fine generando il *perennial aging*) anche le proprietà medie dell'ensemble sono diverse a seconda che questo sia giovane o vecchio. Non solo, per $\mu < 2$ queste mutano continuamente dando luogo al già visto fenomeno della non stazionarietà.

2.5 NPR dicotomici

Tutte le proprietà elencate fino ad ora sono, come specificato all'inizio del capitolo, del tutto generali e legate esclusivamente alla presenza di eventi di rinnovo. In un sistema fisico reale però molto dipenderà dal tipo di eventi e dalla natura delle zone laminari, in sostanza da come “appare” l'evoluzione dinamica di una variabile relativa ad un NPR.

⁹questo perché la probabilità di osservare un evento è legata a come sono distribuiti gli elementi dell'ensemble, infatti il tempo a cui si raggiunge $x = 1$ e si ha il rinnovo è determinato dalla posizione iniziale.

Si possono fare diverse scelte, tutte in linea di principio corrette. Se però abbiamo in mente il problema della turbolenza (che è l'oggetto di questa tesi) è naturale pensare alle zone laminari come periodi in cui le proprietà globali non variano apprezzabilmente e agli eventi come bruschi cambiamenti nello stato del sistema. Questo comportamento intermittente è riportato in fig. 2.6.

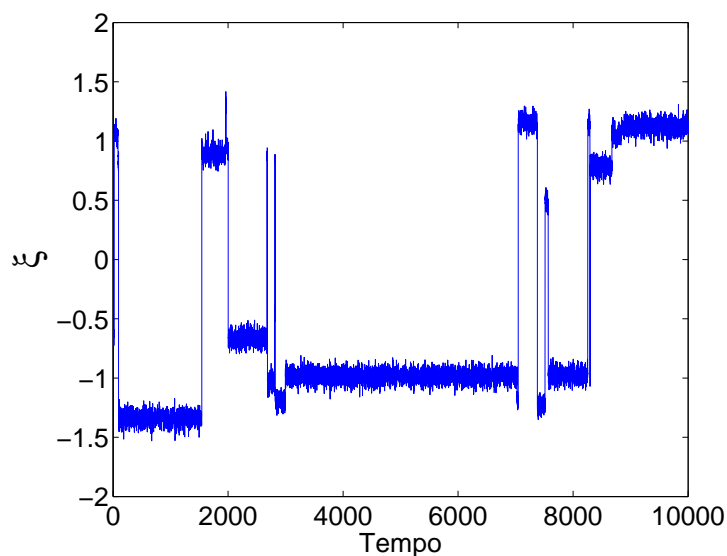


Figura 2.6: Simulazione di processo intermittente che può essere modellizzato come dicotomico. I tempi di attesa tra un salto e l'altro sono stati estratti dalla distribuzione di eq. 2.6 con $\mu = 1.5$ e $T = 10$.

Per semplificare ulteriormente le cose, si può fare l'ipotesi che il sistema sia *grossolanamente* a due stati¹⁰ “+” e “-”. Associando un numero positivo (1) allo stato “+” e il suo opposto (-1) allo stato “-” si ottiene un processo noto in letteratura come *NPR dicotomico*.

Molti risultati teorici a cui verrà fatto riferimento sono basati sull'assunzione che il processo sia di questo tipo: questo verrà giustificato nel cap. 6.

¹⁰questa scelta è sensata in quanto lo spettro degli stati visitati da un sistema fisico reale è comunque limitato

Capitolo 3

Risposta lineare in un sistema dominato dagli eventi

Il teorema di fluttuazione e dissipazione è uno dei capisaldi della meccanica statistica. Derivato per la prima volta da Einstein nel suo celeberrimo lavoro sul moto Browniano [16], è stato successivamente generalizzato da Kubo nella cosiddetta teoria della risposta lineare¹ [27]. Questo teorema mette in relazione le fluttuazioni stazionarie del sistema con la sua risposta alle perturbazioni esterne (la *dissipazione* dell'energia immessa da fuori), collegando elementi microscopici (le fluttuazioni) con aspetti macroscopici (il rilassamento): si capisce quindi l'estrema importanza teorica di questa relazione.

Supponiamo di iniziare a perturbare il sistema al tempo 0 con una perturbazione del tipo $\varepsilon \xi_P(t)$; imponendo che $\langle \xi_P^2 \rangle = 1$ la quantità ε dà una misura dell'intensità della perturbazione. Se andiamo a studiare la risposta osservando una variabile globale ($\xi_S(t)$) mediata sull'ensemble, il teorema di

¹in letteratura c'è un po' di confusione per quanto riguarda la nomenclatura. Kubo chiamò la relazione da lui scoperta teorema di fluttuazione e dissipazione di tipo 1, in quanto più generale di quello di Einstein (che ne è una conseguenza). Spesso invece il teorema di tipo 1 viene considerato quello di Einstein, poiché precedente. Questi due tipi di nomenclatura (quella "epistemologica" e quella "storica") hanno creato non poche incomprensioni. In questa tesi scegliamo di chiamare teorema del tipo 1 quello di Kubo.

fluttuazione e dissipazione del tipo 1 ci dice che questa è data da:

$$\langle \xi_S(t) \rangle = -\varepsilon \int_0^t \chi(t, t') \xi_P(t') , \quad (3.1)$$

dove la funzione a due variabili $\chi(t, t')$ è detta *funzione di risposta lineare*. In meccanica statistica ordinaria questa funzione è stazionaria, nel senso che dipende solo dalla differenza dei tempi, e vale [27]:

$$\chi(t - t') = \frac{d}{dt'} \langle \xi_S(t) \xi_S(t') \rangle . \quad (3.2)$$

Sebbene questa relazione sia incredibilmente importante in casi di fluttuazione ordinaria, niente ci dice quale sia la funzione di risposta lineare in un sistema complesso, sia stazionario che non stazionario. Inoltre ci si può anche chiedere se il teorema stesso valga anche in queste condizioni.

3.1 Un teorema di fluttuazione e dissipazione per sistemi complessi

Consideriamo un processo dominato da eventi di rinnovo come quello presentato nel par. 2.2: cosa vuol dire “perturbare” un sistema di questo tipo? Si possono distinguere fondamentalmente due tipi di influenze esterne (a causa della natura *renewal* del sistema): una che agisca solo durante gli eventi e una che agisca durante le zone laminari (cioè quando la dinamica del sistema è regolare e non caotica, vedi par. 2.2), modificando il tempo di attesa per l’evento successivo. Nel caso della mappa di Manneville modificata (vedi par. 2.2), una perturbazione del primo tipo equivarrebbe per esempio a “truccare” la reimmissione della particella nell’intervallo $(0, 1)$ con una distribuzione non uniforme, mentre una del secondo tipo potrebbe essere una variazione del coefficiente α di eq. 2.10. I due tipi di perturbazione sono detti in letteratura rispettivamente *modello fenomenologico* e *modello dinamico*.

Recentemente Allegrini *et al.* hanno proposto una nuova teoria di risposta lineare per NPR dicotomici² [9], ritrovando la relazione 3.1, ma con una

²questa è quindi una teoria esattamente applicabile solo a questo particolare tipo di NPR. É comunque plausibile (e in fin dei conti tocca agli esperimenti chiarire questo punto) che alcune proprietà siano del tutto generali per sistemi guidati da eventi di rinnovo

χ dipendente dal tipo di perturbazione. Nel caso fenomenologico si ha [9]:

$$\chi(t, t') = P(t')\Psi(t - t') , \quad (3.3)$$

dove $P(t')$ è la probabilità che, avendo preparato il sistema al tempo 0, si osservi un evento qualsiasi (non necessariamente il primo, come accade invece per la $\psi(t)$) al tempo t' . Questa è indipendente dal tempo (quando $t \rightarrow \infty$) nel caso ergodico e vale $P(t) = 1/\langle\tau\rangle$, dove $\langle\tau\rangle$ è il tempo medio di attesa tra un evento e l'altro, mentre nel caso non ergodico mostra l'andamento asintotico $P(t) \propto 1/t^{2-\mu}$.

Cerchiamo di dare una spiegazione intuitiva di questo risultato (per una dimostrazione rigorosa rimandiamo a [9]).

Nel modello fenomenologico le uniche “finestre” in cui è possibile interagire col sistema sono gli eventi, quindi la risposta *adesso* dipende da un evento accaduto in precedenza, uno qualsiasi: per questo è presente il termine $P(t')$. Inoltre gli eventi sono di rinnovo, quindi il sistema sente adesso l'effetto di eventi passati *solo se* non ce ne sono stati altri: questo spiega la necessità di inserire anche la *survival probability* (vedi par. 2.1).

Riassumendo: il sistema sente al tempo t l'effetto di un evento accaduto al tempo t' ($P(t')$) solo se non ne sono accaduti altri da allora ($\Psi(t - t')$).

Nel caso dinamico l'eq. 3.3 assume la forma [9]:

$$\chi(t, t') = \psi(t, t') , \quad (3.4)$$

dove $\psi(t, t')$ è la probabilità di osservare per la prima volta un evento in un sistema preparato al tempo 0, ma la cui osservazione inizia al tempo t' . Come già visto nel par. 2.4, questa funzione mostra un'evoluzione (invecchiamento) che nel caso ergodico porta ad una distribuzione “infinitamente invecchiata” stazionaria, e che altrimenti non termina *mai*. La risposta del sistema è quindi veramente “complessa” in quanto dipende non solo dalla perturbazione esterna, ma anche dalla storia precedente del sistema stesso.

In questo caso è più difficile dare una spiegazione intuitiva del risultato.

Si può ragionare così: un eventuale bias nel sistema è dovuto al fatto che alcuni eventi (per esempio quelli nello stato “-”, che possono

farmi passare a “+”) accadono prima e altri (quelli che da “+” possono portarmi a “-”) dopo. L’effetto di una perturbazione si fa dunque sentire (al primo ordine) in prossimità del punto in cui il sistema imperturbato avrebbe il *primo* evento, in quanto quello è il momento in cui ci sono nell’ensemble più elementi in “+” e meno nell’altro stato: i salti “-” → “+” sono infatti già avvenuti (la perturbazione come detto li anticipa) mentre quelli opposti devono sempre esserci (vengono ritardati).

Quindi avverto in t l’effetto di una perturbazione che agisce in t' **solo se** il sistema imperturbato ha il suo primo evento (indipendentemente dalla sua “storia” prima di t') in t : questa è proprio la $\psi(t, t')$ di eq. 3.4.

Osserviamo che per $\mu > 2$ le funzioni di risposta lineare possono essere scritte per un sistema infinitamente invecchiato, diventando [9]:

$$\chi(t, t') = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \left(\frac{T}{T+t} \right)^{\mu-1} = (\mu-2) \frac{T^{\mu-2}}{(t+T)^{\mu-1}} \quad (3.5)$$

nel modello fenomenologico e

$$\chi(t, t') = \psi_{\infty}(t-t') = (\mu-2) \frac{T^{\mu-2}}{(t+T)^{\mu-1}} \quad (3.6)$$

nel modello dinamico. Quindi se il sistema è ergodico e infinitamente invecchiato le due prescrizioni danno funzioni di risposta identiche. Notiamo ancora che in questa situazione vale anche l’eq. 3.2, poiché la funzione di autocorrelazione stazionaria per un sistema dominato da eventi non è altro che la survival probability³ *invecchiata*.

Se questa generalizzazione del teorema di fluttuazione e dissipazione di tipo I al caso complesso è già un risultato importante da un punto di vista teorico, forse lo è ancor di più da un punto di vista sperimentale: permette infatti di andare a studiare varie proprietà del sistema (che spesso non sono misurabili direttamente e con precisione) ossevando la sua risposta a stimoli esterni, facilmente controllabili. In questo lavoro viene presentato proprio uno studio di un sistema complesso (la turbolenza debole in un campione di cristalli liquidi nematici) per mezzo delle sue risposte a stimoli esterni.

³infatti l’occorrenza di un evento di rinnovo resetta la memoria del sistema e le variabili globali prima e dopo un evento sono statisticamente scorrelate (+1 e -1), mentre in una regione laminare sono esattamente le stesse.

È quindi importante capire come un sistema complesso risponde a varie tipologie di stimolo.

3.2 Risposta a un segnale a gradino

Nel caso di un segnale a gradino la risposta è data dall'integrazione della $\chi(t, t')$, un calcolo non banale che viene svolto in trasformata di Laplace, andando a vedere l'andamento asintotico di $\Pi(t) = \langle \xi_S(t) \rangle$.

Il modello fenomenologico porta [9] a:

$$\Pi(t) = \varepsilon(1 - \Psi(t)) , \quad (3.7)$$

mentre quello dinamico implica:

$$\Pi(t) = \varepsilon(\mu - 1) \left[1 - \frac{T}{\mu - 1} P(t) \right] . \quad (3.8)$$

Quindi nel caso fenomenologico il sistema rilassa seguendo la survival probability mentre nel dinamico seguendo la probabilità che avvenga un evento qualsiasi. Uno specchio delle potenze di t nei vari casi è riportato in tab. 3.1.

Parametro di controllo	$\mu < 2$	$2 < \mu < 3$
Fenomenologico	$1/t^{\mu-1}$	$1/t^{\mu-1}$
Dinamico	$1/t^{2-\mu}$	$1/t^{\mu-2}$

Tabella 3.1: Andamenti asintotici della risposta ad un segnale a gradino nei due modelli e per diversi valori di μ .

3.3 Risposta ad un onda sinusoidale

Nel caso di una perturbazione sinusoidale il nuovo teorema di fluttuazione e dissipazione per sistemi dominati da eventi porta a uno dei suoi risultati più sorprendenti, per $\mu < 2$. Infatti in questo caso è stato dimostrato [4] che la risposta a $\xi_P(t) = \cos(\omega t)$ è asintoticamente:

$$\Pi(t) \simeq \varepsilon \left(\frac{A}{t^{\mu-1}} + \frac{B \cos\left(\frac{\pi\mu}{2} + \omega t\right)}{t^{2-\mu}} \right) \quad (3.9)$$

nel modello fenomenologico e:

$$\Pi(t) \simeq \varepsilon \frac{A' \cos\left(\frac{\pi\mu}{2} + \omega t\right)}{t^{2-\mu}} \quad (3.10)$$

nel modello dinamico. In ogni caso il termine sinusoidale della risposta è smorzato con $1/t^{2-\mu}$, vale a dire che il sistema asintoticamente “non si accorge” più della perturbazione.

Per $\mu > 2$ non si osserva uno smorzamento totale del segnale e il sistema “risponde” sempre a perturbazioni sinusoidali.

3.4 Rilassamento da uno stato di non equilibrio e rottura del principio di Onsager

Nel 1931 Lars Onsager enunciò un principio generale [32] secondo cui il rilassamento all’equilibrio di un sistema segue la funzione di autocorrelazione stazionaria del sistema stesso.

La teoria qui esposta da un lato generalizza ulteriormente questo principio e dall’altro comporta una sua violazione. Infatti l’eq. 3.7 mostra come il rilassamento nel modello fenomenologico segua la survival probability *giovane*. Questa **non** è la funzione di autocorrelazione stazionaria del sistema (che sarebbe la survival invecchiata). Il principio di Onsager viene in questo caso generalizzato [3], in quanto il rilassamento segue una funzione di autocorrelazione *non stazionaria*.

La rottura del principio di Onsager è invece dovuta al fatto che nel modello dinamico si ha un rilassamento che va come la $P(t)$, che **non** è la funzione di autocorrelazione del sistema.

Per potere interpretare meglio alcuni esperimenti è necessario chiarire però un punto: quanto esposto finora si applica nel caso in cui il sistema sia all’equilibrio nel momento in cui la perturbazione inizia a farsi sentire. In realtà si ha spesso a che fare con rilassamenti da stati che non sono all’equilibrio. Per tenere conto di questo bisogna inserire la survival probability (con la sua “età”).

In conclusione l’andamento di $\Pi(t)$ in un processo di rilassamento è il seguente:

$$\Pi(t) = A + \frac{B}{t^n} + C\Psi(t, t'), \quad (3.11)$$

dove A , B e C sono costanti, i valori di n sono riportati nella tab. 3.1 e l'ultimo termine si ha se il sistema rilassa da uno stato di non-equilibrio.

3.5 Risposta ad un segnale complesso: *complexity matching effect* (CME)

Come abbiamo visto nel par. 3.3 un sistema complesso non ergodico, guidato da eventi di rinnovo, non risponde a perturbazioni sinusoidali. Questo fatto, già di per sè molto interessante, lo diventa ancora di più se visto alla luce di un nuovissimo risultato teorico. Infatti Allegrini *et al.* hanno dimostrato ([8] nel modello fenomenologico, [7] nel dinamico) che un sistema complesso con $\mu_S < 2$ ⁴, che pure non “sente” una perturbazione semplice, è in grado di rispondere ad una perturbazione complessa, vale a dire ad una $\xi_P(t)$ dotata anch'essa di proprietà di rinnovo e di un suo parametro di scala μ_P . In particolare, il sistema eredita in parte le proprietà frattali della perturbazione e se $\mu_P < \mu_S$ le leggi di scala della perturbazione diventano dominanti su tempi lunghi, in quanto la sua legge di scala ha le “code” più grandi.

Nel caso di $\mu > 2$ si ottengono risultati analoghi, che però non sono altrettanto sorprendenti in quanto il sistema risponde sempre anche a stimoli non complessi (vedi par. 3.3). Per questi motivi questa condizione non è stata molto studiata anche se sarebbe interessante capire “quanto” il sistema risponda a stimoli complessi (cioè quanto siano correlati statisticamente ξ_S e ξ_P) piuttosto che a stimoli sinusoidali: questo potrebbe essere ragionevole in quanto il CME può essere visto come una risonanza a tutte le scale (quindi più forte di una risonanza ad una frequenza specifica).

In fig. 3.1 vediamo infine un interessante e recente risultato teorico [20]: la cross-correlation tra il sistema e la perturbazione, nel caso in cui entrambi siano complessi, al variare di μ_P e μ_S . Questo risultato è stato ottenuto usando il modello dinamico (vedi par. 3.1). Si può notare come un sistema non ergodico ($\mu_S < 2$) non “senta” assolutamente una perturbazione ergodica ($\mu_P > 2$), e al contrario come un sistema con $\mu_S > 2$ segua fedelmente una perturbazione con $\mu_P < 2$. È interessante inoltre l'andamento lungo la retta $\mu_P = \mu_S$: se il sistema e la perturbazione hanno le stesse

⁴in questo paragrafo indicheremo l'esponente μ del sistema con μ_S , per non confonderlo con quello della perturbazione.

proprietà statistiche la cross-correlation ha un massimo per $\mu_S = \mu_P = 2$ che corrisponderebbe (vedi par. 6.4) ad uno spettro delle fluttuazioni del tipo $1/f$.

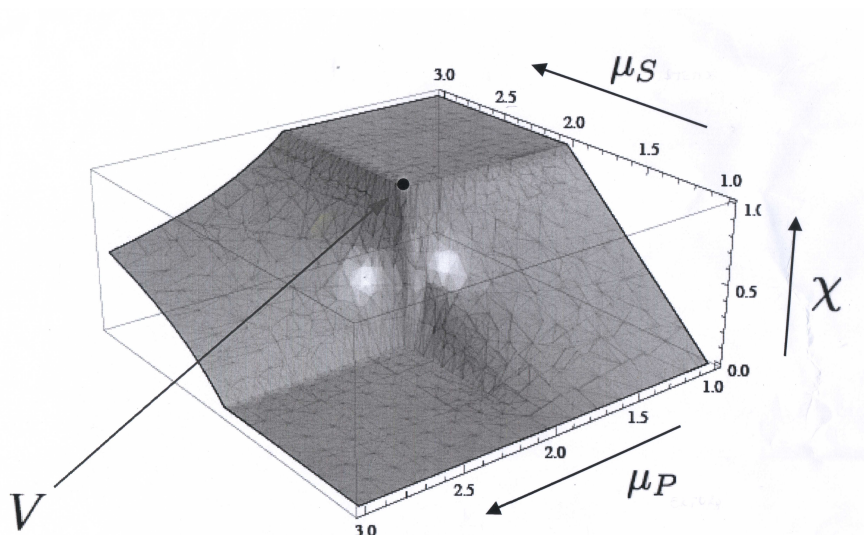


Figura 3.1: Complexity matching. È mostrata la cross-correlation (χ) tra perturbazione e fluttuazioni del sistema per valori di μ_S e μ_P tra 1 e 3. Si può notare che per $2 < \mu_S < 3$ e $1 < \mu_P < 2$ (cioè sistema ergodico e perturbazione non ergodica) la correlazione è massima e quindi un sistema ergodico risponde fortemente ad una perturbazione che non lo è. Nel caso opposto ($1 < \mu_S < 2$ e $2 < \mu_P < 3$, vale a dire sistema non ergodico e perturbazione ergodica) la correlazione è nulla, cioè un sistema non ergodico non “sente” una perturbazione ergodica. È interessante notare che riducendoci al caso $\mu_S = \mu_P$ la cross-correlation non è monotona ma ha un massimo definito quando $\mu_S = \mu_P = 2$, indicato dalla lettera V .

È da sottolineare come i risultati esposti **brevemente** in questo capitolo siano estremamente recenti e quindi la loro interpretazione sia ancora incerta. Questa tesi si muove nella direzione di uno studio sperimentale della risposta a stimoli esterni di un sistema complesso e vorrebbe in qualche modo contribuire a chiarire le conoscenze anche teoriche in questo campo.

Capitolo 4

Cristalli liquidi

I cristalli liquidi sono macromolecole che, a causa della loro particolare conformazione, si possono presentare in natura in mesofasi con proprietà di simmetria intermedie tra quelle di un liquido e quelle di un cristallo. Per esempio la fase nematica è caratterizzata dalla presenza di una direzione privilegiata (il *direttore*) che rompe la simmetria orientazionale, mentre i centri di massa delle molecole sono liberi di scorrere come in un liquido (vedi fig. 4.1a). Altre fasi notevoli sono quella smettica, in cui si ha libero scorrimento delle molecole solo in due direzioni (il cristallo liquido si organizza in piani perpendicolari alla direzione del direttore, vedi fig. 4.1b) e la colesterica, in cui si osserva una rotazione del direttore in una direzione a lui perpendicolare (vedi fig. 4.1c). La transizione tra una fase e l'altra può essere regolata dalla temperatura (comportamento termotropico) o dalla concentrazione delle molecole quando sciolte in un solvente (comportamento liotropico).

Negli esperimenti qui presentati è stato utilizzato un cristallo liquido termotropico (MBBA) che a temperatura ambiente si presenta in fase nematica. In questo capitolo saranno quindi brevemente descritte le proprietà e le caratteristiche principali di questa mesofase; per una trattazione approfondita rimandiamo a [15].

4.1 Cristalli liquidi nematici (CLN): generalità

La fase nematica di un cristallo liquido è, come detto sopra, caratterizzata dalla rottura di simmetria orientazionale dovuta all'allineamento dell'asse

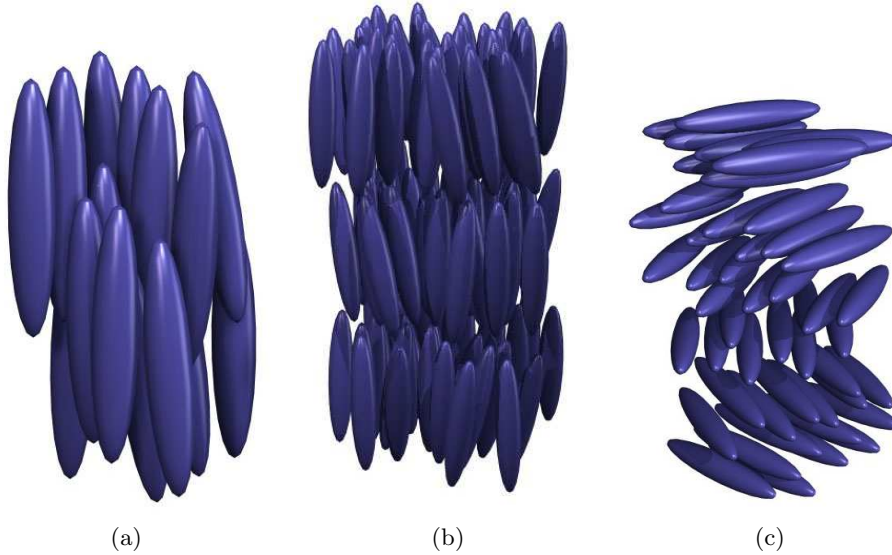


Figura 4.1: Tre possibili mesofasi di un cristallo liquido: in (a) la fase nematica, in (b) la smettica e in (c) la colesterica.

principale delle molecole lungo una direzione privilegiata, il direttore, che di seguito indicheremo con \hat{n} .

L'orientazione di \hat{n} dipende dalle condizioni al contorno: per esempio mettendo il cristallo liquido tra due lastre piane parallele è possibile, mediante una opportuna preparazione delle loro superfici, “forzare” il sistema ad un orientamento planare (in cui il direttore è allineato parallelamente al piano delle lastre) o omeotropico (in cui il direttore è orientato perpendicolarmente), come mostrato in fig. 4.2.

L'anisotropia orientazionale della fase nematica ha conseguenze interessanti per quanto riguarda le proprietà elettriche e ottiche, in quanto si hanno valori diversi della costante dielettrica nella direzione parallela (ε_{\parallel}) e perpendicolare (ε_{\perp}) a quella del direttore; lo stesso accade per quanto riguarda la conducibilità (si ha infatti $\sigma_{\parallel} \neq \sigma_{\perp}$). Il tensore dielettrico e quello della conducibilità devono quindi essere scritti così:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\perp} \delta_{ij} + \varepsilon_a \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{\perp} \delta_{ij} + \sigma_a \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad (4.2)$$

dove $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ e $\sigma_a = \sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}$. Valori tipici per l'MBBA sono $\varepsilon_{\parallel} \simeq 4.7$,

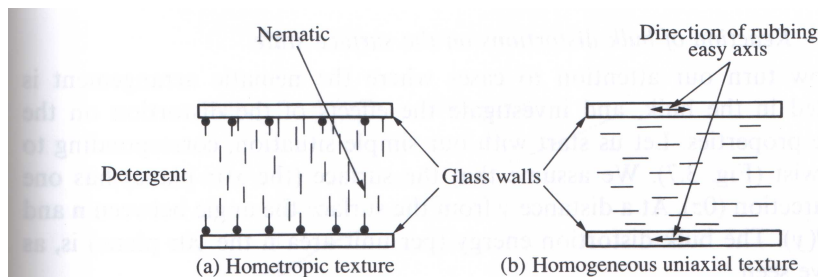


Fig. 3.5. Two types of nematic single crystals obtained between parallel glass walls

Figura 4.2: Orientamento omeotropico e planare di un cristallo liquido nematico posto tra due lastre di vetro. Immagine tratta da [15]

$\varepsilon_{\perp} \simeq 5.4$, $\sigma_{\perp} \approx 10^{-9} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$, $\sigma_{\parallel} \approx 1.5 \times 10^{-9} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ [15]. Il CLN è quindi un materiale birifrangente e a motivo di questa sua caratteristica è usuale osservare il campione nematico con luce polarizzata e poi filtrare la radiazione trasmessa dal cristallo con un altro polaroid. Così facendo l'intensità luminosa osservata è, trascurando gli effetti dovuti alla diffrazione, legata all'orientazione locale del direttore¹. L'osservazione del pattern della luce trasmessa dal CLN tramite un microscopio polarizzatore dà quindi informazioni sul campo di orientazione locale del direttore, che a sua volta è collegato² al campo idrodinamico di velocità del fluido [15].

4.2 Nematici in campi elettrici

Come detto nel paragrafo precedente, in condizioni di equilibrio il direttore assume una direzione unica in tutto il cristallo e quindi il pattern ottico risultante è omogeneo. L'applicazione di un campo elettrico può portare a moti macroscopici nel campione e quindi alla rottura dell'ordine nematico a lungo raggio con conseguente disomogeneità ottica.

Per analizzare meglio gli effetti di un campo elettrico su un CLN ci riduciamo in questo paragrafo ad una geometria specifica (quella adoperata sperimentalmente) e cioè quella di un sottile strato di nematico posto tra

¹questo effetto è utilizzato nei comuni schermi LCD, in cui si usa il campo elettrico (vedi par.4.2) per modificare localmente l'orientamento delle molecole

²chiaramente il campo di orientazione dipende anche da altri fattori, come la presenza di campi magnetici od elettrici esterni: questo permette di avere anche distorsioni locali dell'orientazione in assenza di moti idrodinamici.

due elettrodi piani “infiniti”³ in configurazione planare. Consideriamo inoltre l’applicazione di una differenza di potenziale alternata i cui parametri caratteristici sono l’ampiezza V e la frequenza f .

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, le costanti dielettriche misurate per campi paralleli al direttore e perpendicolari ad esso sono diverse: questo indica che la molecola del cristallo liquido è dotata di un dipolo elettrico permanente che può essere parallelo all’asse principale della molecola (nel qual caso si ha $\varepsilon_{\parallel} > \varepsilon_{\perp}$) o perpendicolare a questo (che implica $\varepsilon_{\perp} > \varepsilon_{\parallel}$). L’applicazione di un campo elettrico costante o di bassa frequenza porterà quindi le molecole ad allinearsi rispettivamente in direzione parallela o perpendicolare al campo stesso.

Il campo poi non si limita a distorcere localmente l’ordine nematico ma comporta la nascita di correnti elettriche all’interno del CLN che, a causa dell’anisotropia di σ , non sono necessariamente parallele alle linee di forza del campo stesso. In particolare se $\sigma_{\perp} > \sigma_{\parallel}$ la corrente viene deviata in direzione perpendicolare al direttore mentre se $\sigma_{\parallel} > \sigma_{\perp}$ in direzione parallela. Nel caso di un CLN con orientazione planare questo ultimo effetto, unito all’allineamento dei dipoli associati alle molecole, può portare (quando si ha $\varepsilon_{\perp} > \varepsilon_{\parallel}$ e $\sigma_{\parallel} > \sigma_{\perp}$, che è proprio il caso del MBBA) alla nascita di instabilità convettive simili a quelle di Rayleigh–Bénard.

Cerchiamo di capire meglio questo fenomeno con l’aiuto di fig. 4.3. Supponiamo che una fluttuazione casuale nell’orientamento delle molecole porti localmente ad una configurazione come in fig. 4.3a: l’anisotropia di σ porta ad un accumulo di carica positiva (negativa) in A (B) che tende a muoversi verso l’alto (il basso) per effetto del campo esterno (vedi fig. 4.3b) ed inoltre cambia ulteriormente (per effetto dei dipoli) l’orientazione delle molecole circostanti (vedi fig. 4.3c). Questo effetto auto-sostenuto è contrastato dalle forze elastiche che tendono a distruggere le fluttuazioni: al di sopra però di una certa soglia⁴ V_c queste non sono più in grado di riportare il sistema all’equilibrio e si formano dei rulli di convezione, noti come domini di Williams (WD) dal nome del loro scopritore [39] (l’interpretazione teorica riportata è invece di Helfrich [23]). Questi *rolls*, la cui larghezza è dell’ordine della distanza tra le lastre, visti dall’alto formano un pattern regolare (vedi fig.

³nel senso che la larghezza degli elettrodi è molto più grande della distanza tra loro.

⁴ V_c dipende chiaramente sia dalla frequenza del campo che dai parametri caratteristici del sistema, come la distanza tra le lastre, la temperatura, ecc.

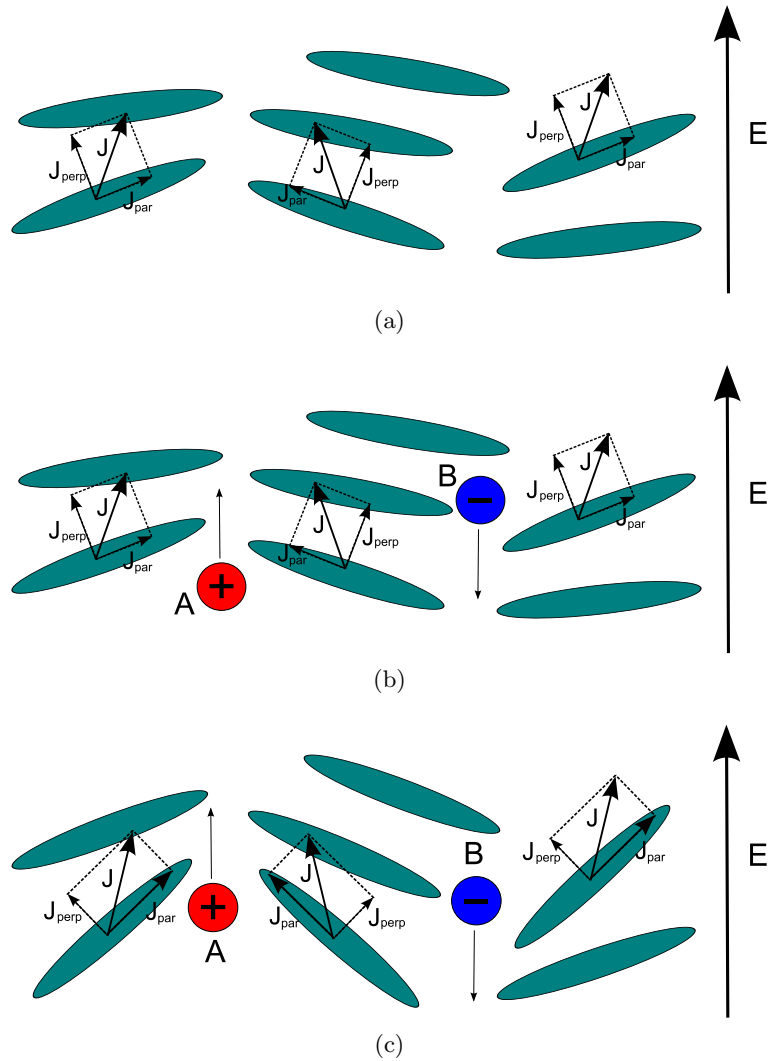


Figura 4.3: Nascita delle instabilità elettroconvettive in un cristallo liquido nematico: in (a) una fluttuazione casuale che, a causa dell'anisotropia della conducibilità porta (b) all'accumulo di cariche. Queste (c) modificano ulteriormente l'orientazione delle molecole, creando così un effetto auto-sostenuto.

4.4a).

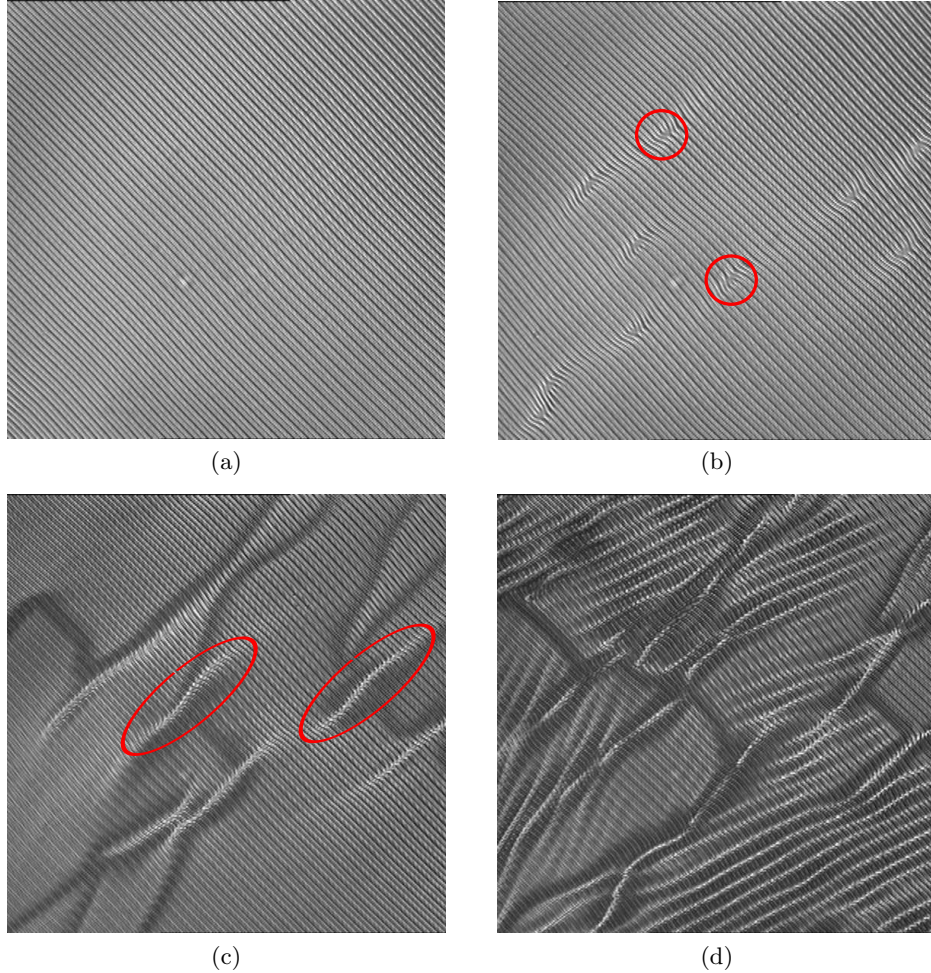


Figura 4.4: Alcuni patterns di elettroconvezione in un CLN. In (a) sono mostrati i domini di Williams, in (b) lo stesso pattern con alcuni difetti (due di essi sono cerchiati). In (c) è possibile vedere i domini di Williams fluttuanti e la distorsione a cui sono sottoposti i difetti. Gli stessi FWD sono raffigurati in (d), dove si osserva un numero sempre maggiore di “multidifetti”.

Poco al di sopra di V_c nel pattern convettivo si formano dei difetti (noti anche come *dislocazioni*), corrispondenti a punti in cui due rulli si “fondono” diventando uno solo (vedi fig. 4.4b): queste dislocazioni non sono statiche, ma si possono muovere in direzione parallela (*gliding*) o perpendicolare (*climbing*) all’asse dei *rolls* e si può osservare la loro “nascita” e la loro “morte”. É inoltre possibile associare ad ogni difetto una carica topologica, definita come la circuitazione del vettore d’onda locale del pattern \vec{k} .

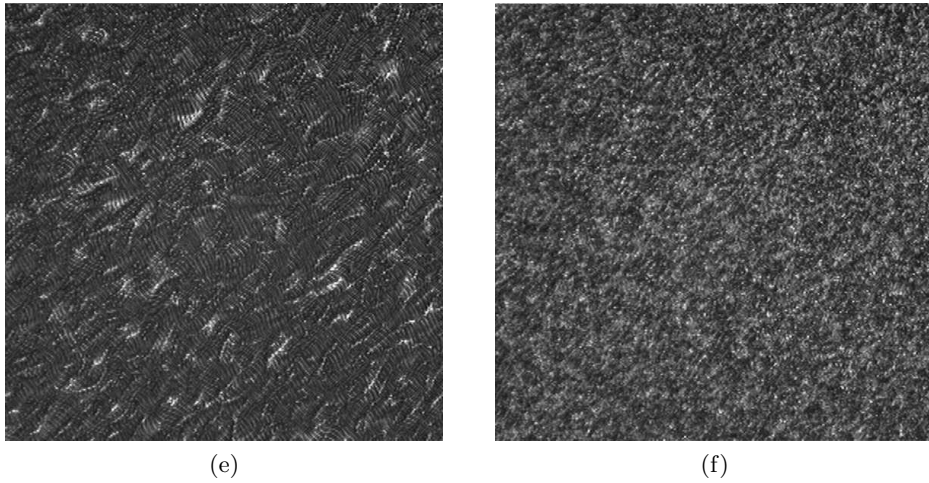


Figura 4.4: Altri pattern di elettroconvezione: in (e) si può vedere il pattern relativo al DSM1 e in (f) quello relativo al DSM2; si noti come nel primo caso esistano sempre alcune strutture (i *rolls*) mentre nel secondo la turbolenza è completamente sviluppata. L'immagine in (f) è stata schiarita al computer per rendere meglio visibile il pattern.

Per voltaggi leggermente superiori i domini di Williams non sono più statici ma cominciano a fluttuare (*Fluctuating Williams Domains*, FWD) e i difetti si distorcono fino a diventare multi-difetti, cioè clusters di più dislocazioni (vedi fig. 4.4c e 4.4d). Il loro moto diventa sempre più complicato e il tasso di nascita/morte aumenta.

A voltaggi ancora superiori si osserva una netta transizione ad uno stato turbolento caratterizzato dalla veloce nascita e morte di un grande numero di difetti e dal moto caotico di questi. Il CLN adesso dà luogo ad un intenso scattering della luce e, per questo motivo, tale stato viene definito come *Dynamic Scattering Mode* (DSM1). Seppur percorso da moti di carattere turbolento, il CLN conserva ancora delle strutture convettive anisotrope (vedi fig. 4.4e); la rottura definitiva di ogni struttura e la transizione ad una turbolenza completamente sviluppata si ha aumentando ulteriormente il campo, nel cosiddetto DSM2 (vedi fig. 4.4f).

Quanto detto finora si applica nel caso in cui la differenza di potenziale applicata sia alternata e a bassa frequenza; oltre una frequenza critica f_c (tipicamente si ha $f_c \approx 100$ Hz) si osserva invece un comportamento diverso, detto “dielettrico” (mentre per $f < f_c$ si parla di regime “conduttivo”).

Al di sopra della soglia V_c si creano ancora dei rulli convettivi, più piccoli però di quelli già discussi, e aumentando la tensione il sistema va incontro ad una serie di transizioni in stati analoghi ma diversi da quelli visti precedentemente.

Il lavoro svolto in questa tesi riguarda tuttavia il caso conduttivo per cui non verranno descritti gli stati di turbolenza debole dielettrica: per un approfondimento su questi e in generale sulle instabilità elettroidrodinamiche rimandiamo a [25, 38].

4.3 I cristalli liquidi nematici e la complessità

Nel vasto panorama della complessità, le instabilità elettroconvettive dei CLN possono sembrare un problema secondario se paragonato, per esempio, allo studio di altri processi fisici o anche di sistemi biologici, economici, climatici, ecc. In realtà questo sistema è particolarmente interessante, in quanto alcune sue proprietà sono legate all'emergenza di strutture auto-organizzate e non dipendono dai dettagli dinamici: l'analisi di queste può quindi fornire informazioni non legate solo all'elettroidroconvezione, ma *universali* (o meglio, relative di una determinata *classe di universalità*).

Il sistema presenta poi numerosi vantaggi pratici da un punto di vista sperimentale:

- il parametro di controllo delle instabilità (V) è facilmente controllabile dall'esterno;
- gli altri fattori esterni (come la temperatura) possono essere monitorati;
- l'osservazione del *pattern* è facilitata dalla birifrangenza dei CLN (non si è quindi costretti ricorrere a tecniche di imaging più sofisticate, come invece avviene nello studio della convezione alla Rayleigh-Bénard);
- si può misurare senza difficoltà la quantità di energia immessa nel sistema per unità di tempo (in quanto non è altro che VI).

Per tutte queste ragioni l'elettroconvezione è un *toy-system* straordinariamente versatile e ricco, che permette di verificare *sperimentalmente*

e su un *sistema fisico reale* le predizioni teoriche di vari modelli di complessità, chiarendo il legame della teoria con la realtà fisica (cosa che *non* si può fare, se non limitatamente, per mezzo di simulazioni).

Quest'idea ha guidato numerosi lavori sperimentali sui sistemi complessi [25, 37, 14, 19, 36] ed è alla base di questa tesi.

Capitolo 5

Metodi sperimentali

Gli esperimenti presentati in questa tesi sono orientati a studiare la risposta a modulazioni esterne di un cristallo liquido nematico in uno stato di turbolenza debole (elettroidroconvezione) mediante l'analisi di una sua proprietà globale, cioè l'intensità luminosa trasmessa integrata su una porzione del campione.

Si è usato un campione di *N*-(4-Methoxybenzilidene)-4-butylaniline (MB-BA) 98 % contenuto in una celletta di vetro di $(1.00 \pm 0.05 \text{ cm}) \times (1.00 \pm 0.05 \text{ cm})$, spessa $(10 \pm 1) \mu\text{m}$, con un *aspect ratio* di 1000 ± 100 . Le pareti interne sono state rivestite di ossido di indio per renderle conduttrici e preparate in modo da favorire l'orientazione planare del cristallo lungo un asse prestabilito. Alla celletta sono poi stati saldati dei contatti elettrici per controllare la tensione fra le piastre.

5.1 Apparato sperimentale

Per effettuare le misure di intensità luminosa trasmessa da un campione di cristallo liquido (LC) sono necessari alcuni accorgimenti sperimentali.

Anzitutto è necessario controllare al meglio i parametri caratteristici del sistema, come la temperatura e la tensione in ingresso. Per realizzare il primo punto è stata accostata al campione di LC una cella Peltier controllata mediante un calcolatore, che per tutte le misure riportate ha mantenuto la temperatura a $18.000 \pm 0.004 \text{ }^\circ\text{C}$; si è monitorata continuamente la temperatura tramite il medesimo computer. Questa precisione della Peltier è possibile solo mettendo l'altro lato a contatto con un bagno termico a tem-

peratura abbastanza diversa; per realizzarlo si è usata una pompa Julabo MH-F10 che ha mantenuto una temperatura di 8.00 ± 0.01 °C esternamente alla cella.

Per pilotare la tensione da porre ai capi della celletta di LC è stato utilizzato il generatore di funzione Tektronics AFG 3021 (ampiezza massima picco-picco 20 V, impedenza d'uscita 50 Ω). Questo segnale veniva amplificato da un trasformatore per raggiungere le tensioni ($\sim 20 \div 30$ V) necessarie ad attivare la turbolenza nel campione. L'uscita del trasformatore è stata poi collegata ai contatti elettrici della celletta ed all'analizzatore di forme d'onda Data Precision DATA 6100 così da avere un continuo controllo del segnale. Inoltre il segnale non amplificato è stato registrato su un calcolatore mediante il canale audio della scheda di acquisizione per i filmati.

Per la misura dell'intensità luminosa si è posta la celletta in un microscopio polarizzatore e illuminata con una lampada stabilizzata in luminosità (vedi par. 5.2); sono stati registrati dei filmati mediante un Charge Coupled Device (CCD) collegata ad un computer.

L'apparato sperimentale nella sua interezza è mostrato in fig. 5.1.

5.2 Stabilizzazione della lampada

Dovendo studiare l'intensità luminosa trasmessa dal LC, sia come andamento in risposta ad una perturbazione, sia come fluttuazioni in uno stato stazionario, si è resa necessaria una stabilizzazione della lampada con cui veniva illuminato il campione. Infatti ciò che viene registrato dalla CCD è, al primo ordine, il prodotto di vari contributi:

$$I(x, y, t) \simeq I_0(t) \mathcal{T}_{opt}(x, y) \mathcal{T}(x, y, t) , \quad (5.1)$$

dove $I_0(t)$ è l'intensità luminosa entrante nel microscopio, $\mathcal{T}_{opt}(x, y)$ una trasmittività (costante) legata alle disomogeneità ottiche dell'apparato e $\mathcal{T}(x, y, t)$ la trasmittività del LC. Nella prossima sezione verrà spiegato il metodo utilizzato per rimuovere il secondo termine; per quanto riguarda il primo si è utilizzato un meccanismo di feedback in luminosità al fine di renderlo il più possibile costante.

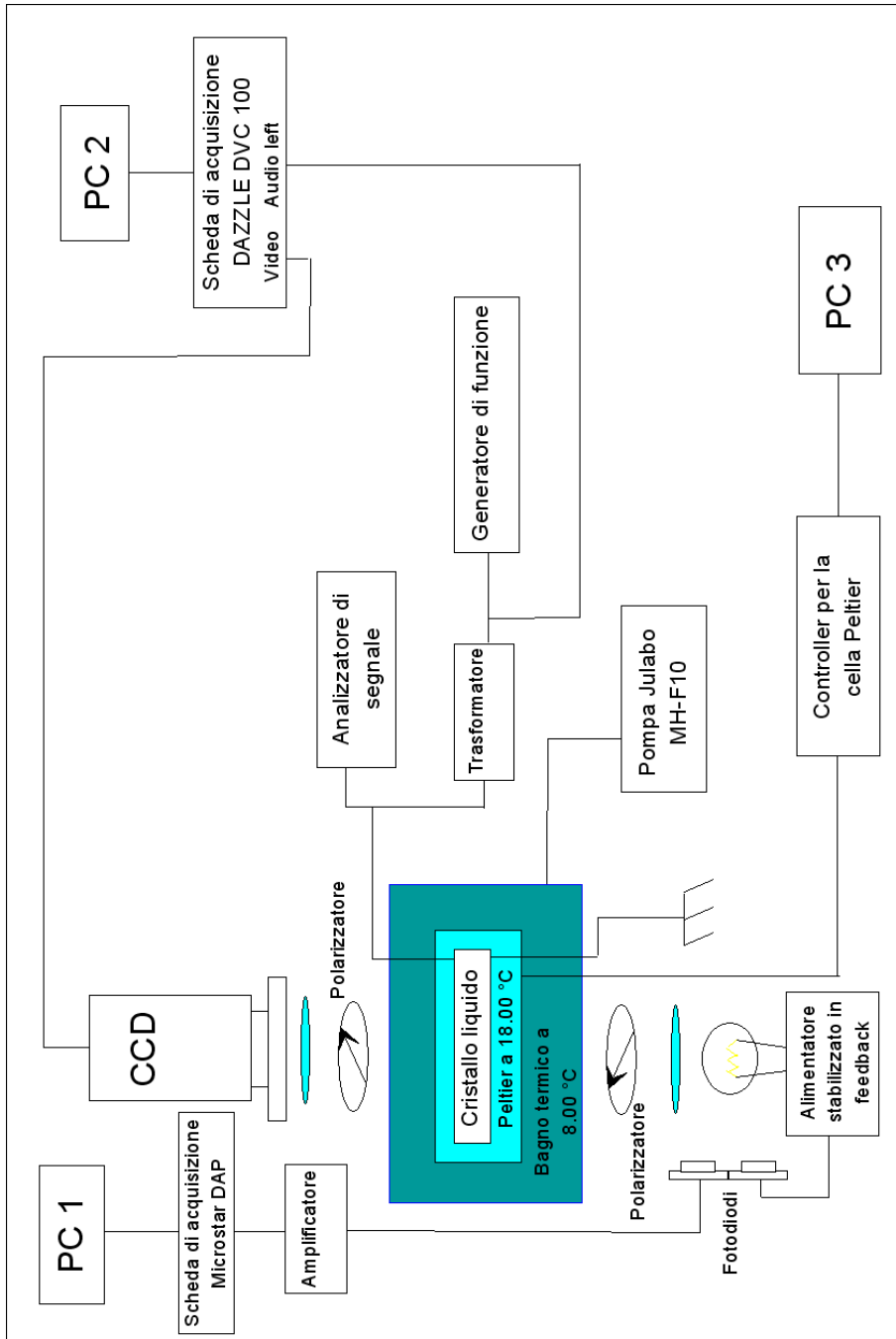


Figura 5.1: Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale.

Un fotodiodo registrava la luce emessa e il circuito di fig. 5.2 inseguiva il suo segnale, pilotando l'alimentatore in corrente della lampada. Per questo motivo è stato necessario effettuare le misure avendo cura di mantenere la stanza buia in modo da non falsare il segnale registrato dal fotodiodo. Inoltre l'intero circuito di feedback è leggermente sensibile alle variazioni di temperatura quindi è realmente stabile solo dopo circa un'ora dall'accensione, quando si è termalizzato con l'ambiente. Si è quindi fatto passare questo tempo tra l'accensione dell'apparato e l'inizio delle misure. Con questi accorgimenti è stato possibile stabilizzare la lampada a meno dell'1 per mille per tempi dell'ordine dell'ora. Per registrazioni ancora più lunghe si sono talvolta osservate delle piccole variazioni probabilmente dovute ai drift termici dei componenti del circuito.

Per controllare e registrare la luce emessa dalla lampada è stato utilizzato un altro fotodiodo collegato alla scheda di acquisizione digitale di un computer. In fig. 5.3 è mostrato il segnale registrato dal fotodiodo in condizioni ottimali.

5.3 Effetti di saturazione

Il dispositivo di acquisizione dei filmati (CCD) è naturalmente soggetto ad effetti di saturazione, cioè non è sensibile per intensità troppo elevate. Per eludere tali problemi si è agito in questo modo: acquisita un'immagine (in scala di grigi a 8 bit), si è fatto l'istogramma delle intensità registrate in ogni pixel, quindi si è andati a vedere se la coda verso le alte intensità aveva un picco improvviso nel massimo valore registrabile (255, vedi fig. 5.4). In caso affermativo si è regolato il circuito di feedback (spostando il fotodiodo) fino ad eliminare quest'effetto.

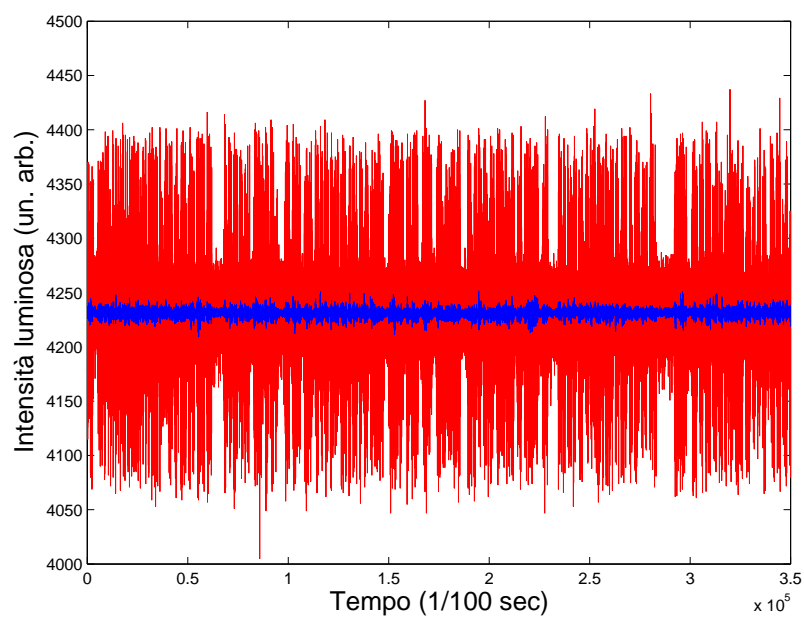
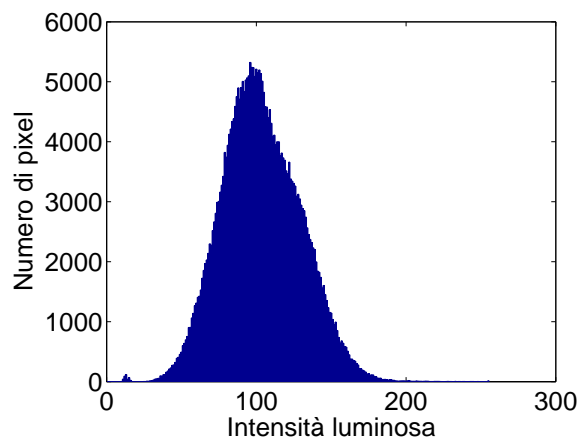
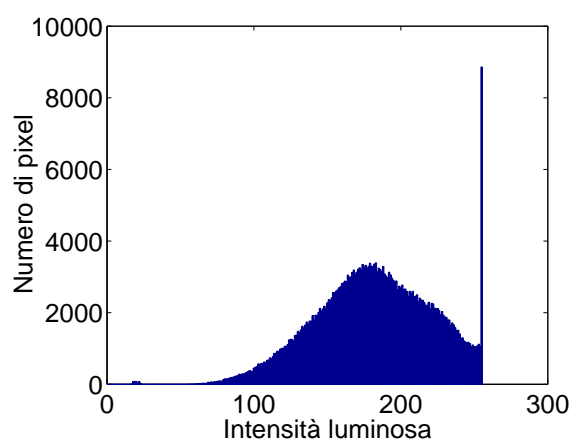


Figura 5.3: Fluttuazioni della lampada: in rosso il segnale registrato con il fotodiodo, in blu lo stesso segnale filtrato con una media mobile lunga 2 secondi per tagliare le alte frequenze (ricordiamo che in questo lavoro siamo interessati alle basse frequenze). Per il segnale non filtrato si ha $\sigma_\xi/\langle\xi\rangle = 5.7 \times 10^{-3}$ mentre per il segnale filtrato $\sigma_\xi/\langle\xi\rangle = 7.6 \times 10^{-4}$



(a)



(b)

Figura 5.4: Due istogrammi delle intensità luminose misurate nei singoli pixel: in (a) un istogramma corrispondente ad una buona illuminazione e in (b) un istogramma che mostra chiari effetti di saturazione.

5.4 Analisi del filmato

Le immagini registrate dalla CCD sono state acquisite tramite una scheda di acquisizione Dazzle DVC 100¹ con una frequenza di 25 Hz² e convertite in matrici 576×720 di numeri interi da 0 (nero) a 255 (bianco). I filmati ottenuti come successioni di tali matrici sono stati salvati nel formato compresso *lossless .avi* e successivamente elaborate su una potente macchina *Sun X4600* a 16 processori. Il codice C del programma utilizzato per l'analisi del filmato è riportato in appendice A; di seguito esponiamo i passi principali dell'analisi.

Per poter rimuovere le disomogeneità dovute alle imperfezioni ottiche dello strumento veniva prima registrato un breve filmato del campione senza alcuna tensione applicata, corrispondente a:

$$I_{bias}(x, y) \simeq I_0 \mathcal{T}_{opt}(x, y) \mathcal{T}_0, \quad (5.2)$$

dove \mathcal{T}_0 è la trasmittività del cristallo liquido senza tensione applicata (che si assume uniforme e costante); notiamo che I_0 è costante grazie al dispositivo di feedback esposto nel paragrafo precedente. Dividendo l'eq. 5.1 per la 5.2 si ottiene:

$$I_{rel}(x, y, t) \simeq \frac{\mathcal{T}(x, y, t)}{\mathcal{T}_0}, \quad (5.3)$$

che è, a meno di una costante, la trasmittività del LC.

Quindi il programma per prima cosa divideva pixel a pixel le immagini registrate per un'immagine tratta dal filmato senza tensione applicata, in modo da ottenere proprio il valore riportato nell'eq. 5.3. Successivamente l'intensità luminosa trasmessa veniva integrata sul quadrato centrale 576×576 ottenendo così il segnale da analizzare con i metodi descritti nel cap. 6.

Il programma riportato in appendice produce anche altri output che non sono stati utilizzati in questo lavoro: l'intensità luminosa trasmessa

¹si tratta di una scheda di acquisizione commerciale. Il principale difetto di tali schede è che la frequenza di campionamento non è stabile in quanto ogni campionamento avviene dopo un segnale di conferma da parte del calcolatore. Questo problema rende inaffidabile tale strumento sulle alte frequenze (vicino a quella di Nyquist), ma non crea problemi in quelle basse, che sono proprio quelle che ci interessano.

²la frequenza di campionamento non è molto alta ma la CCD filtra già le alte frequenze. Questo filtraggio è importante per evitare l'insorgere di problemi legati alla discretizzazione, che nascono quando la frequenza di campionamento è più piccola di alcune frequenze presenti nel segnale. Per un'analisi dettagliata di problemi di questo tipo, noti col nome di *aliasing*, rimandiamo a [34].

localmente in 9 punti diversi (corrispondente al segnale relativo ad un singolo pixel) e lo spettro spaziale mediato su tutti i fotogrammi. Proprio per facilitare il calcolo di quest'ultimo si è scelto di analizzare la regione quadrata al centro del video.

Capitolo 6

Metodi di analisi dati

In questo capitolo vengono descritti i metodi di analisi dati utilizzati in questa tesi. Si tratta di metodi che mettono in risalto, in modi diversi, eventuali proprietà di scala del segnale sotto esame e sono quindi interessanti di per sé, al di là della teoria con cui si modella il processo fisico studiato. Tuttavia l'interpretazione che ne viene data in questa tesi si muove nel contesto della teoria dei processi di rinnovo per cui, dopo aver spiegato il funzionamento di ogni metodo, viene riportato il risultato che si ottiene nel caso di NPR dicotomici (vedi par.2.5).

Cerchiamo a questo punto di capire meglio perché si è scelto di usare proprio questo particolare tipo di NPR per modellizzare il problema della turbolenza debole nei cristalli liquidi nematici. Come visto nel cap. 4, nel pattern di turbolenza dei cristalli liquidi nematici nascono e muoiono dei difetti. A questi ultimi è associabile un'energia ed è una convinzione diffusa in letteratura (vedi per esempio [37, 38, 25]) che molte caratteristiche dello stato turbolento siano collegate proprio ai difetti (si parla infatti di *Defect mediated turbulence*). È naturale quindi pensare che la nascita o morte dei difetti sia un evento cruciale per il sistema. Poiché la presenza di un difetto è caratterizzata localmente da una maggiore o minore luminosità rispetto al pattern sottostante a seconda della luminosità media di quest'ultimo (vedi fig. 4.4c) la sua nascita o morte corrisponde ad una **brusca** variazione della luminosità. Questo tipo di eventi porta quindi localmente ad un segnale pseudo-dicotomico¹ e globalmente ad una somma di processi di questo tipo.

¹“pseudo” in quanto l'aumento o la diminuzione locale di luminosità associato ad un

Il segnale “locale” rimane tuttavia inaccessibile, in quanto i difetti derivano e oscillano spazialmente (vedi par. 4.2) e la scrittura di un programma che “segua” i difetti, ne riconosca la morte e ne individui la nascita è un problema computazionale arduo: in questa tesi si è scelto di andare ad osservare il segnale globale facendo l’ipotesi semplificatrice che le nascite e le morti dei difetti siano spazialmente scorrelate.

Quest’ultima ipotesi, insieme a quella altrettanto importante che gli eventi in questione siano di rinnovo, è chiaramente opinabile e soltanto la prova sperimentale può optare a favore o contro.

6.1 *Standard Deviation Analysis (SDA)*

Questo metodo consiste nel creare delle traiettorie di diffusione dal segnale e nell’osservare l’andamento asintotico della deviazione standard del processo diffusivo così generato. Nel seguito si assumerà che il segnale sia a media nulla, quindi in pratica, per utilizzare questa tecnica, è necessario anzitutto sottrarre alla serie temporale il suo valor medio.

Per ottenere le traiettorie di diffusione si integra localmente il segnale, vale a dire che se ξ_n è l’ n -esimo valore della serie, la m -esima traiettoria al “tempo” t vale:

$$x^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^t \xi_{m+i}. \quad (6.1)$$

Quindi per ogni t si hanno $N - t + 1$ traiettorie di diffusione e di questo ensemble si va a misurare il momento secondo $\langle x^2(t) \rangle$. Poiché le ξ_i sono a media nulla anche il loro integrale lo è, e la radice del momento secondo è esattamente la deviazione standard del processo. Il metodo SDA va ad osservare proprio come evolve questa quantità in funzione della lunghezza delle traiettorie di diffusione (il “tempo” di eq. 6.1).

Fondamentalmente con questo metodo si studiano le leggi di scala del processo stocastico governato dalla seguente equazione di Langevin:

$$\dot{x}(t) = \xi(t), \quad (6.2)$$

in cui la variabile registrata nella serie temporale svolge il ruolo di forza difetto non è sempre uguale.

stocastica. Le proprietà frattali della serie si riversano quindi nella $x(t)$ che, a differenza della ξ , diffonde, cioè non è limitata².

Questo metodo è collegato nel caso ergodico alla funzione di autocorrelazione stazionaria, infatti integrando la 6.2 si ha:

$$x(t) = \int_0^t \xi(t') dt' . \quad (6.3)$$

Il momento secondo delle x è dato così da:

$$\langle x(t)x(t) \rangle = \langle \int_0^t \xi(t') dt' \int_0^t \xi(t'') dt'' \rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle \xi(t') \xi(t'') \rangle , \quad (6.4)$$

dove l'ultimo termine è proprio la funzione di autocorrelazione (non normalizzata) delle ξ . L'andamento asintotico (per $t \rightarrow \infty$) della $\langle x^2(t) \rangle$ ci fornisce quindi utili indizi su quale sia la natura delle fluttuazioni del sistema. Per esempio se queste sono completamente aleatorie la loro funzione di autocorrelazione è una delta di Dirac e la doppia integrazione di eq. 6.4 porta alla legge di scala:

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^{2H} , \quad (6.5)$$

con $H = 0.5$; la lettera H deriva da Hurst, che fu uno dei primi [24] ad utilizzare metodi di analisi frattale delle serie temporali. Deviazioni di questo parametro dal valore browniano di 0.5 indicano una diversa legge di scala nel processo diffusivo e quindi nella forza stocastica (cioè nel segnale sotto esame). L'interpretazione dei valori di H misurati richiede naturalmente dei *guess* sulla natura delle fluttuazioni del sistema (in particolare sulla loro autocorrelazione); per un NPR dicotomico il legame tra H e μ è dato [35] da:

$$H = \frac{4 - \mu}{2} , \quad (6.6)$$

per $\mu > 2$. Per $\mu < 2$ il processo non è ergodico e le medie sull'ensemble non sono più accessibili (in quanto diverse da quelle sulla serie) per cui il metodo non funziona più, dando sempre $H = 1$, vale a dire un'andamento balistico.

Se il segnale è una somma di NPR dicotomici con $\mu > 2$, indipendenti e con le stesse proprietà statistiche, il metodo funziona sempre in quanto il

²è chiaro che ogni segnale misurato sperimentalmente ha sempre un range finito di valori.

momento secondo totale è semplicemente la somma dei momenti secondi dei processi dicotomici ed eredita quindi le loro proprietà di scala.

6.2 *Detrended Fluctuation Analysis (DFA)*

L'analisi del momento secondo vista sopra è molto semplice e intuitiva, ma anche delicata; infatti la presenza di trend locali nella serie (dovuti per esempio ad artefatti o ad una dinamica deterministica a cui non si è interessati) falsa completamente i risultati di questo metodo. Per questo motivo, nel 1994 Peng *et al.* [33] hanno proposto un nuovo metodo di analisi dati chiamato *Detrended Fluctuation Analysis (DFA)*.

Il funzionamento della DFA è molto semplice: anzitutto si integra la serie (così da trasformare le fluttuazioni in un random walk) ottenendo il cosiddetto *profilo*:

$$X(t) = \sum_{n=0}^t \xi_n . \quad (6.7)$$

Successivamente si divide la nuova serie temporale in finestre ***non sovrapposte*** di lunghezza l . In ogni nuova finestra viene effettuato un fit ai minimi quadrati per approssimare localmente la funzione con una retta e successivamente si calcola lo scarto quadratico medio dal trend locale:

$$F(L) = \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (X(i) - X_{trend}(i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (6.8)$$

dove $X_{trend}(i)$ è il valore al punto i -esimo della retta ottenuta mediante il fit. La $F(L)$ viene infine mediata su tutte le finestre.

Se nel sistema sono presenti leggi di scala, l'andamento asintotico della $F(L)$ è dato [33] da:

$$F(L) \propto L^H , \quad (6.9)$$

dove H è proprio l'esponente di Hurst trovato con il metodo SDA, che nel caso di NPR è legato a μ dalla relazione 6.6. Sebbene i due metodi portino allo stesso risultato, vale la pena di sottolineare alcune differenze:

- la DFA ottiene uno scaling compatibile con quello ottenuto dallo spettro di potenza (e, per gli NPR, con l'eq. 6.6) ***sempre*** [26], vale a dire anche per $\mu < 2$, dove la SDA fallisce. Questo risultato non è ancora

stato compreso con chiarezza a livello teorico in quanto il collegamento tra DFA e spettro è tradizionalmente mediato dal teorema di Wiener-Kintchine (vedi par. 6.6) e quindi dall'esistenza di una funzione di autocorrelazione stazionaria [26].

- La DFA è molto solida rispetto a trend nella serie ma fragile in presenza di sinusoidi: la loro presenza altera pesantemente i risultati di questo metodo, portando ad un H più elevato di quello effettivo. Questo problema è stato studiato dal nostro gruppo di ricerca e risulta che per tempi molto più lunghi del periodo delle oscillazioni la DFA porta comunque al risultato corretto.

6.3 Entropia di Diffusione (DE)

Questo metodo va ad analizzare il processo diffusivo generato dalla serie temporale sotto esame (secondo le prescrizioni dell'eq. 6.1) dal punto di vista dell'entropia di Shannon. Questa è definita come:

$$S(t) = - \int p(x, t) \ln [p(x, t)] dx \quad (6.10)$$

nel caso continuo o come

$$S(t) = - \sum_{i=1}^n p(i, t) \ln [p(i, t)] \quad (6.11)$$

nel caso discreto. In pratica si fa una distribuzione empirica della probabilità connessa al processo diffusivo e si applica l'eq. 6.11.

Quando il processo sotto esame ha delle proprietà di scaling temporale vale la relazione:

$$p(x, t) = \frac{1}{t^\delta} F \left(\frac{x}{t^\delta} \right), \quad (6.12)$$

dove δ è detto coefficiente di scaling. Quest'equazione, sostituita nella 6.10 implica:

$$S(t) = A + \delta \ln(t), \quad (6.13)$$

dove A è una costante.

Andando quindi a plottare $S(t)$ vs. $\ln(t)$ si può facilmente ottenere il valore del coefficiente di scaling δ . È interessante notare come questo metodo

sia l'unico a fornire questo valore: infatti la SDA e la DFA forniscono H , che è diverso [35] da δ tranne nel caso di fluttuazioni gaussiane.

Nel caso di NPR dicotomici vale la relazione [35]:

$$\delta = \frac{1}{\mu - 1} \quad (6.14)$$

per $\mu > 2$, mentre per $\mu < 2$ la DE non funziona e dà sempre $\delta = 1$.

Se sommiamo vari NPR dicotomici la distribuzione di probabilità della somma è la convoluzione delle distribuzioni dei singoli. Poiché queste sono idealmente stabili (in quanto di Lévy, vedi [5]) la loro convoluzione è identica in forma a quella del singolo ed ha lo stesso scaling δ .

Questo metodo è particolarmente interessante, in quanto è indipendente dagli altri metodi sopra discussi. Infatti, per $\mu > 2$, la SDA, la DFA e lo spettro non sono, come vedremo, metodi indipendenti e proprio il fatto che il μ dedotto dalla DE e quello dedotto, per esempio, dalla DFA siano uguali è un importante indizio circa la natura dicotomica (o pseudo-dicotomica) del segnale.

6.4 Spettro di potenza

Un metodo di analisi di segnale universalmente conosciuto è quello dello spettro di potenza, che come è noto è il modulo quadro della trasformata di Fourier del segnale stesso.

È noto che molti sistemi in natura presentano fluttuazioni con uno spettro a potenza inversa:

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\eta}, \quad (6.15)$$

con $\eta \approx 0.5 \div 1.5$. Il rumore $1/f$ è stato negli ultimi decenni, ed è ancora, uno dei problemi più profondi della struttura della materia e ha dato origine ad una letteratura sterminata (per un'abbondante bibliografia sull'argomento vedi [29, 22]). Si osserva rumore $1/f$ nei circuiti elettronici, nella turbolenza, nei mercati finanziari, nel linguaggio umano, in sistemi biologici e in molti altri contesti: l'universalità di questa legge di scala è realmente un fatto molto interessante, che non è stato ancora compreso fino in fondo.

Nei sistemi complessi l'esponente η può variare abbastanza (mentre per esempio i circuiti elettronici presentano $\eta \simeq 1$) e il suo valore può caratterizzare quantitativamente le proprietà del sistema. Nel caso di NPR dicotomici

[21] si ha:

$$\eta = 3 - \mu \quad (6.16)$$

per $\mu < 3$, $\eta = 0$ altrimenti. Gli NPR dicotomici con $\mu < 3$ producono quindi uno spettro del tipo $1/f^\eta$, mentre quelli con $\mu > 3$ danno origine ad uno spettro bianco.

Lo spettro di una somma di segnali *qualunque*, fra loro indipendenti, non è altro che la somma degli spettri. Se quindi sommiamo tanti NPR dicotomici (con lo stesso μ) lo spettro totale è ancora del tipo $1/f^\eta$, con η data dalla relazione 6.16.

Per un segnale discreto e finito (come le serie temporali qui analizzate) quella che viene calcolata è una trasformata di Fourier discreta, tramite l'algoritmo della *Fast Fourier Transform* (FFT). In fig. 6.1a è riportato un tipico spettro di potenza ottenuto dai dati sperimentali (l'interpretazione fisica di tale spettro verrà spiegata nel cap. 7). Come si può notare dalla figura, lo spettro è disturbato dalla presenza di rumore e per questo motivo si è utilizzato anche un altro procedimento, che consiste nell'uso di finestre mobili lungo la serie: per ogni posizione della finestra viene calcolato (mediante FFT) lo spettro e poi tutti gli spettri ottenuti vengono mediati. Secondo una tecnica nota nell'analisi di segnale digitale (vedi per esempio [34]) le finestre sono prese *half-overlapped*, vale a dire che l'inizio della finestra successiva viene posto a metà di quella attuale e così via, in modo da ridurre le correlazioni tra una finestra e l'altra. In questa tesi sono state utilizzate finestre da 4096, 8192 e 16384 punti (2^{12} , 2^{13} e 2^{14}). In fig. 6.1 sono riportati esempi di spettri ottenuti con questi tre tipi di finestre sul segnale a cui si riferisce la fig. 6.1a.

Naturalmente queste operazioni di smoothing non portano ad alcun guadagno di informazione, infatti più grandi sono le finestre (al limite lunghe quanto la serie) meno se ne hanno a disposizione (al limite una sola): quindi si passa da spettri con meno punti e meno rumorosi a spettri con più punti e più rumorosi.

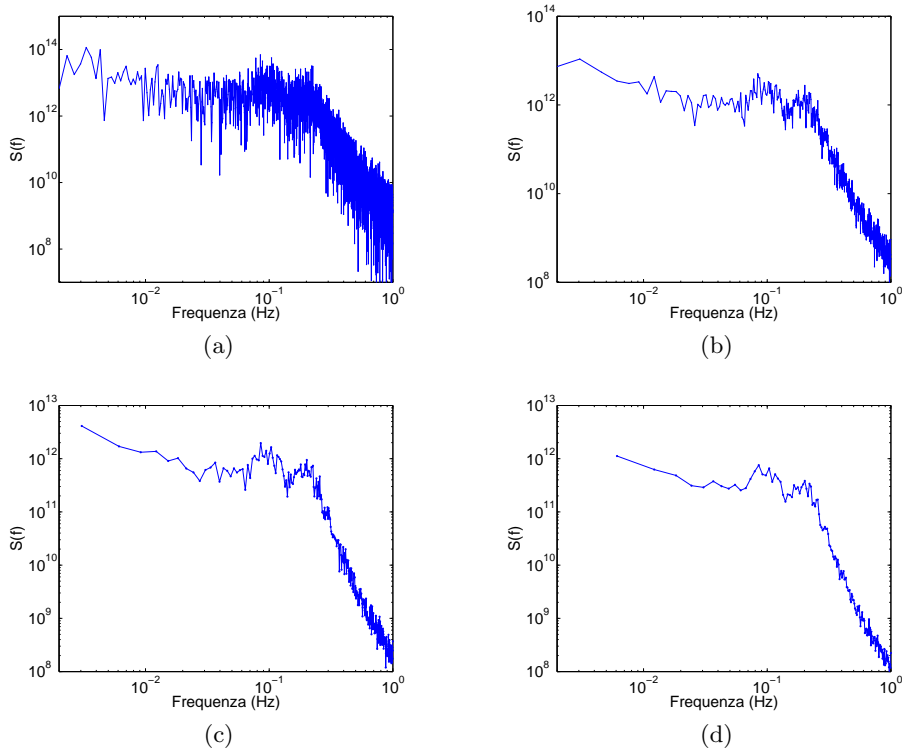


Figura 6.1: Spettro di potenza del segnale nativo (a) e calcolato mediante finestra mobile lunga 16384 (b), 8192 (c) e 4096 punti (d).

6.5 Funzione di autocorrelazione

Come è noto, l'autocorrelazione di una variabile $\xi(t)$ è una funzione a due variabili:

$$C(t_1, t_2) = \frac{\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle}{\sigma_\xi^2}, \quad (6.17)$$

che nel caso il segnale sia stazionario dipende solo dal modulo della differenza dei tempi:

$$C(|t_2 - t_1| \equiv \tau) = \frac{\langle \xi(0)\xi(\tau) \rangle}{\sigma_\xi^2}, \quad (6.18)$$

ed è l'unica che in pratica può essere calcolata da dati sperimentali (infatti per fare questo è necessario che le medie sull'ensemble siano uguali alle medie nel tempo). Come dice il nome stesso, questa funzione ci dice quanto le fluttuazioni ad un certo istante dipendono da quelle all'istante precedente, dandoci una misura della memoria del sistema.

Notiamo ancora che se quella che osserviamo è la somma di vari processi

dicotomici indipendenti la funzione di autocorrelazione totale non è altro che la somma di quelle dei singoli (in quanto le correlazioni tra i processi sono nulle), quindi obbedisce alle stesse leggi di scala di queste ultime.

L'importanza di questo metodo risiede nel fatto che è complementare allo spettro di potenza (vedi par. successivo). Naturalmente, poiché la funzione di autocorrelazione è definita nel dominio dei tempi mentre lo spettro in quello delle frequenze, le regioni di interesse sono “rovesciate”: se vogliamo studiare il limite $f \rightarrow 0$ dovremo guardare la $C(\tau)$ per $\tau \rightarrow \infty$. Se siamo invece interessati alle alte frequenze la nostra analisi dovrà concentrarsi su tempi molto brevi³.

6.6 Il teorema di Wiener-Kintchine e gli spettri $1/f$

Uno dei risultati più importanti della teoria dei processi stocastici è il legame profondo tra spettro di potenza e funzione di autocorrelazione **stazionaria**, sancito dal teorema di Wiener-Kintchine. Questo afferma che le due grandezze suddette (**quando esistono**) sono l'una la trasformata di Fourier (reale) dell'altra, vale a dire:

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (6.19)$$

e

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos(2\pi f\tau) df . \quad (6.20)$$

Quindi conoscendo la funzione di autocorrelazione si può risalire allo spettro e viceversa; per esempio un segnale delta-correlato è caratterizzato da uno spettro piatto (*white noise*) mentre se, più realisticamente, la correlazione decade esponenzialmente, lo spettro è lorentziano (*brown noise*).

Qual'è la funzione di autocorrelazione per uno spettro $1/f^\eta$ (*pink noise*)? La questione è molto delicata, in quanto per $\eta > 1$ l'integrale di eq. 6.20 diverge! Il problema è che, come abbiamo già visto nel par. 2.3, in questa situazione è violata la condizione ergodica e **non esiste** una funzione di autocorrelazione stazionaria, per cui il teorema non vale più.

³queste considerazioni si applicano chiaramente volendo mettere in relazione allo spettro anche gli altri tre metodi (SDA, DFA, DE) sopra esposti, che lavorano nel dominio dei tempi.

Per $\eta < 1$ l'eq. 6.20 può invece essere risolta facilmente mediante il cambio di variabili $f \rightarrow z = f\tau$ [21]:

$$\int_0^\infty \frac{1}{f^\eta} \cos(2\pi f\tau) df = \tau^{\eta-1} \int_0^\infty \frac{1}{z^\eta} \cos(2\pi z) dz \propto \frac{1}{\tau^{1-\eta}}, \quad (6.21)$$

in quanto l'integrale in dz al secondo membro è una costante.

A conclusione del capitolo, riportiamo in una tabella le relazioni tra gli esponenti di scala collegati ai vari metodi ed il μ per i processi di rinnovo non poissoniani.

Metodo	Andamento	Relazione con μ	Range di validità
SDA	t^H	$\mu = 4 - 2H$	$2 < \mu < 3$
DFA	t^H	$\mu = 4 - 2H$	$1 < \mu < 3$
DE	t^δ	$\mu = 1 + 1/\delta$	$2 < \mu < 3$
Spettro di potenza	$1/f^\eta$	$\mu = 3 - \eta$	$1 < \mu < 3$
Autocorrelazione	$1/t^\beta$	$\mu = \beta + 2$	$2 < \mu < 3$

Tabella 6.1: Andamenti asintotici per $t \rightarrow \infty$ (o $f \rightarrow 0$) degli output dei vari metodi di analisi e legame con μ .

Capitolo 7

Risultati sperimentali

In questo capitolo verranno presentati i risultati sperimentali che costituiscono il cuore di questa tesi e che si articolano principalmente in tre parti.

Anzitutto sono state caratterizzate, per diversi valori del voltaggio applicato, le proprietà frattali delle fluttuazioni dell'intensità luminosa trasmessa dal cristallo liquido in regime di turbolenza debole, utilizzando i metodi di analisi presentati nel cap. 6. I risultati forniti da questi metodi sono coerenti con l'ipotesi fatta che la dinamica del sistema sia guidata da eventi di rinnovo non poissoniani, ma non la dimostrano. Per avere una migliore verifica di questa ipotesi si è quindi osservato come il sistema rilassa verso una nuova condizione di equilibrio a seguito di un brusco cambiamento del voltaggio, trovando un buon accordo con le previsioni teoriche del par. 3.4. Come ultimo punto si è studiata la risposta del sistema a modulazioni sinusoidali e complesse.

7.1 Caratterizzazione degli eventi di rinnovo

Per analizzare le fluttuazioni dell'intensità luminosa trasmessa dal cristallo liquido si sono registrati filmati da un'ora circa per diversi valori dell'ampiezza del voltaggio applicato. Nel seguito, secondo una notazione comune in letteratura [37, 19, 14], col termine parametro di controllo si intenderà una grandezza adimensionale, cioè il voltaggio normalizzato $\varepsilon = V/V_0 - 1$, dove V_0 è la soglia oltre la quale nascono i domini di Williams (vedi par. 4.2).

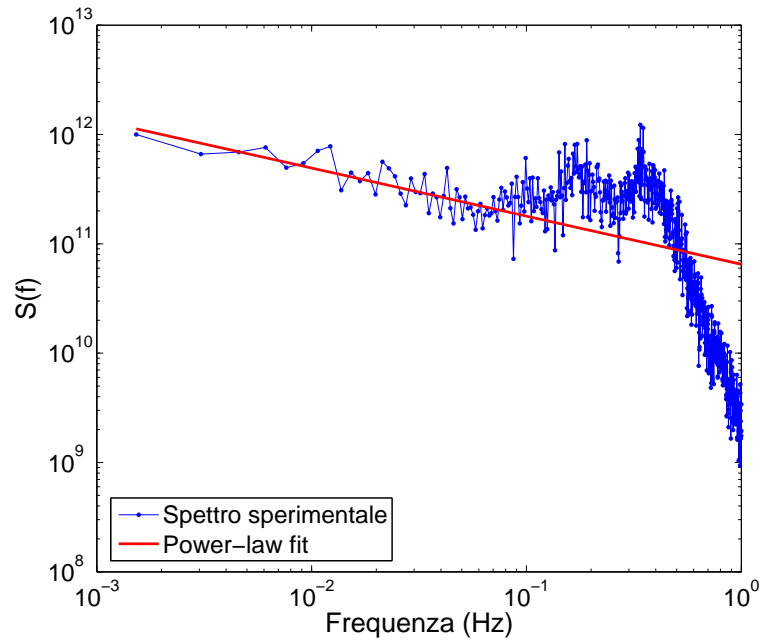
I filmati registrati sono stati poi processati con i metodi descritti nel par. 5.4 per ottenere la serie temporale dell'intensità luminosa trasmessa. A questa serie temporale sono state applicate le tecniche presentate nel cap. 6.

In fig. 7.1a è mostrato un tipico spettro di potenza per le fluttuazioni del segnale. Si può notare come questo possa essere diviso in tre regioni: una ad alte frequenze in cui è presente un taglio, una regione centrale con due picchi, e un andamento $1/f^n$ a basse frequenze. I due picchi si trovano a frequenze in rapporto circa 1:2, il che suggerisce che ci siano oscillazioni coerenti originate dallo stesso processo e che i picchi siano le due armoniche principali. Queste oscillazioni hanno una frequenza caratteristica (quella del picco di maggior intensità) che aumenta all'aumentare del parametro di controllo [38]. Sia l'origine di queste oscillazioni che lo spostamento della loro frequenza al variare di ε non sono stati ancora bene compresi. La loro presenza, comunque, ha l'effetto negativo di rendere impossibile lo studio della funzione di autocorrelazione, che è caratterizzata dalla persistenza di oscillazioni fino a tempi molto lunghi (vedi fig. 7.1b).

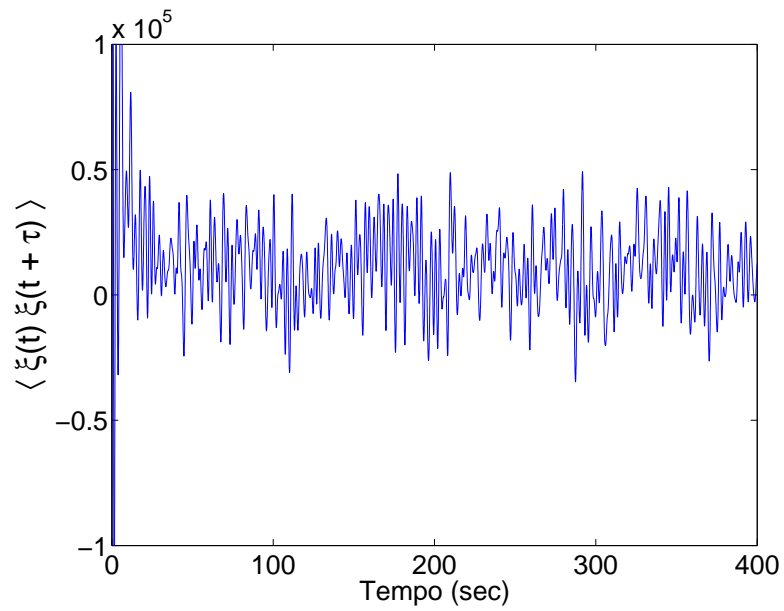
In fig. 7.1c, 7.1d e 7.1e sono illustrati i risultati, per lo stesso segnale a cui si riferisce lo spettro di fig. 7.1a, della DE, della SDA e della DFA, rispettivamente. Si vede che questi tre metodi mostrano nello stesso range di tempi un andamento indicativo della presenza di leggi di scala nel sistema; questo intervallo temporale coincide poi con l'intervallo di frequenze per cui si osserva lo spettro $1/f^n$. Gli indici ottenuti mediante questi metodi si riferiscono quindi alle stesse proprietà frattali e possono essere confrontati fra loro; secondo le prescrizioni della tab. 6.1 questi stessi indici possono poi essere collegati al parametro μ , che caratterizza la distribuzione dei tempi di attesa per gli eventi cruciali del sistema (vedi par. 2.1 e eq. 2.6). I valori di μ ottenuti in questo modo sono tra loro consistenti entro l'errore sperimentale. Quest'ultimo è stato valutato come la semidispersione dei parametri ottenuti ripetendo il fit su intervalli leggermente diversi di punti¹; l'incertezza data dalla procedura di fit, fissato l'intervallo, è trascurabile rispetto all'errore così ottenuto.

In tab. 7.1 sono riportati, al variare del parametro di controllo, gli indici relativi ai vari metodi di analisi (vedi cap. 6), il μ derivante da questi

¹come detto poco sopra, le proprietà frattali si manifestano solo in un certo intervallo temporale.

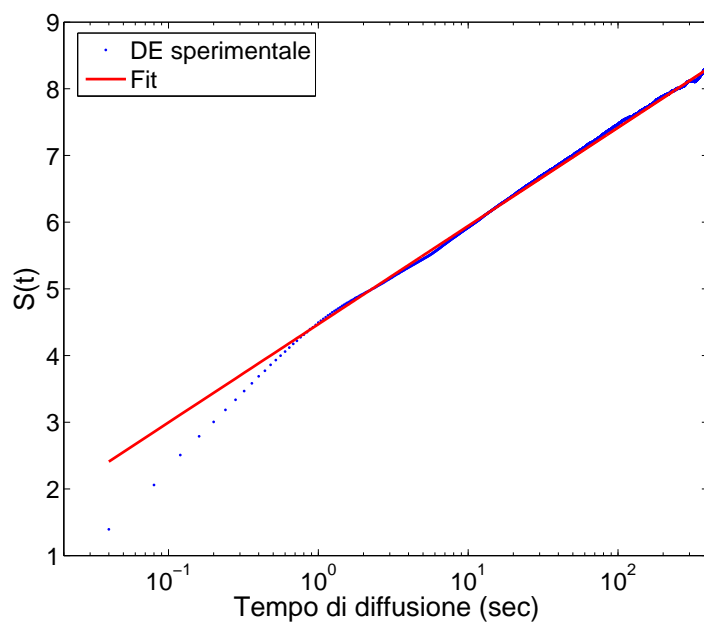


(a)

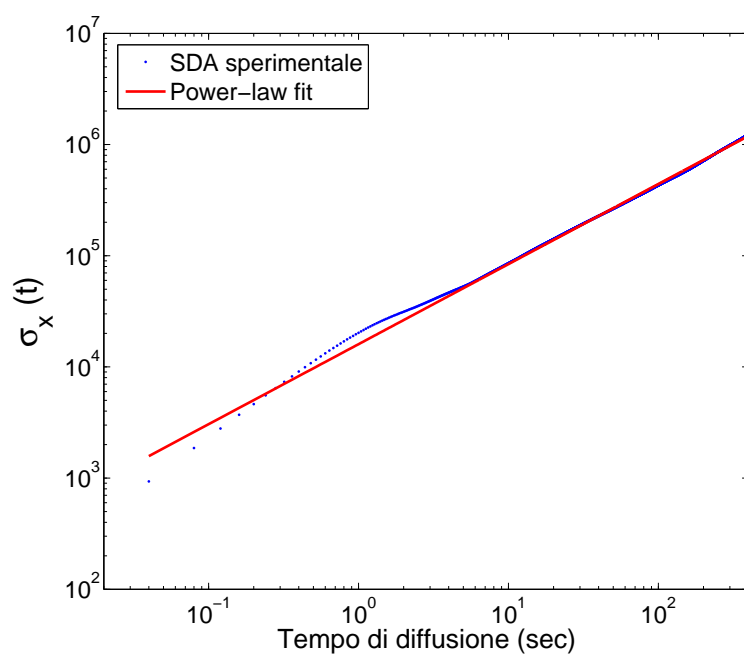


(b)

Figura 7.1: Analisi del segnale: in (a) è riportato lo spettro di potenza e in (b) la funzione di autocorrelazione.

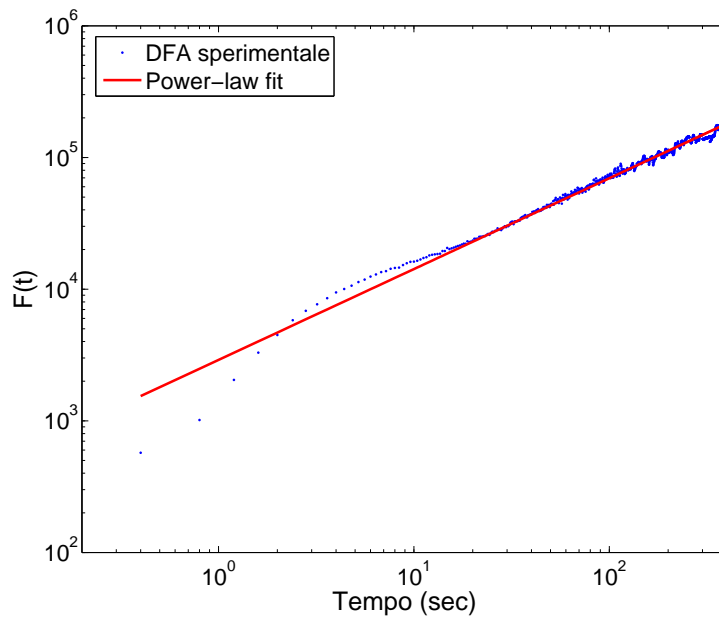


(c)



(d)

Figura 7.1: Analisi del segnale: in (c) è riportata l'entropia di diffusione e in (d) la SDA (vedi cap. 6).



(e)

Figura 7.1: Analisi del segnale: in (e) è riportata la DFA (vedi cap. 6).

e il μ medio. Quest'ultima grandezza è graficata in funzione di ε in fig. 7.2. Si nota come per bassi valori del voltaggio applicato il sistema si trova nella condizione $\mu < 2$ che, come detto nel par. 2.3, equivale ad uno stato non ergodico. Successivamente, a $\varepsilon_c = 0.21 \pm 0.02$ ² si osserva una brusca transizione verso un regime con $\mu > 2$, quindi ergodico; questa transizione verrà analizzata con più cura nel paragrafo successivo.

A voltaggi ancora superiori ($\varepsilon \approx 0.9$) si osserva che lo spettro diventa piatto alle basse frequenze, mentre la frequenza di taglio diminuisce (vedi fig. 7.3): sembra quindi che per grandi valori del parametro di controllo le fluttuazioni abbiano uno spettro lorentziano con un tempo caratteristico (definito come l'inverso della frequenza di cut-off) molto grande. Quindi anche in questo caso il sistema presenta una forte correlazione che sembra però guidata da processi *poissoniani*. Questi processi non sono necessariamente di rinnovo né legati ai difetti, ma possono avere un'origine diversa.

Il restringimento della regione spettrale con andamento $1/f^\eta$ ha come effetto deleterio il fatto che i metodi DFA, SDA e DE non funzionano più.

²questa grandezza è stata valutata interpolando linearmente la curva tra il primo punto sperimentale con $\mu < 2$ e il primo con $\mu > 2$

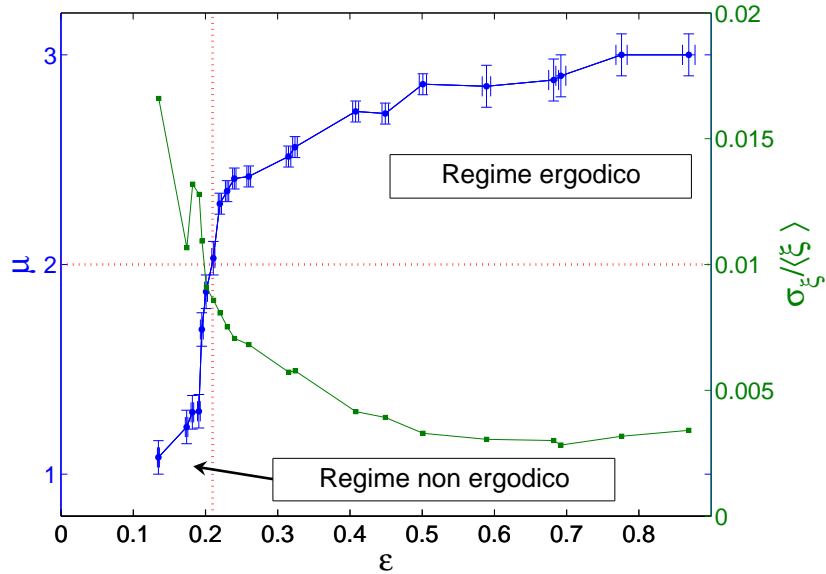
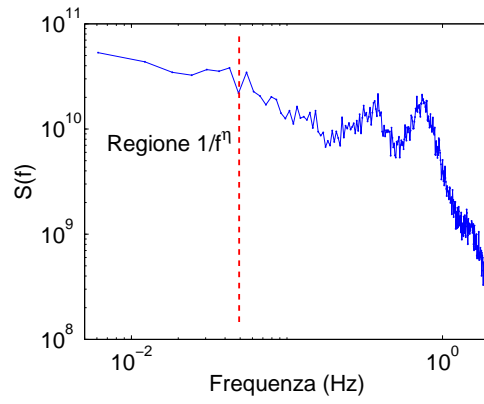


Figura 7.2: In blu: andamento di μ al variare del parametro di controllo ε . In verde: deviazione standard delle fluttuazioni normalizzata con il valor medio dell'intensità luminosa trasmessa, per diversi valori di ε .

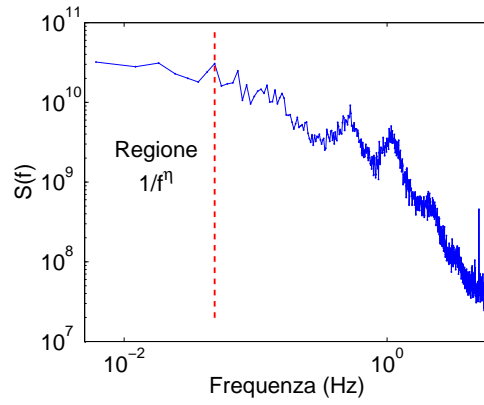
Infatti l'intervallo di frequenze per cui si vede lo scaling $1/f^\eta$ si restringe verso il basso e conseguentemente l'intervallo di tempi in cui si osservano le analoghe leggi di scala si sposta verso valori più grandi. Purtroppo per tempi molto lunghi questi metodi non hanno sufficiente statistica per funzionare, almeno per quanto riguarda le serie temporali analizzate (che durano circa un'ora). Si sarebbe potuto registrare filmati di durata molto superiore, ma la loro analisi avrebbe richiesto tempi computazionali eccessivamente lunghi.

7.2 Ergodicità, stazionarietà e omogeneità spaziale

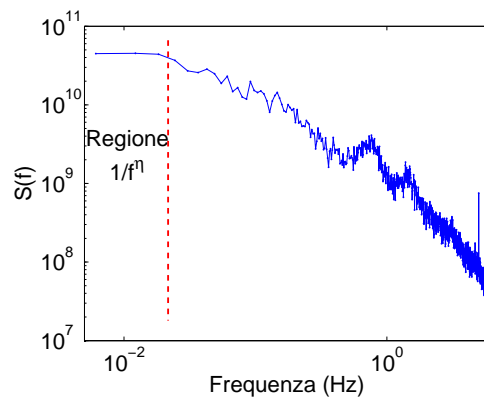
Ritorniamo alla transizione netta mostrata in fig. 7.2 tra un regime non ergodico ($\mu < 2$) ed uno ergodico ($\mu > 2$). Per quanto detto nel par. 2.3 l'ergodicità è collegata alla stazionarietà del sistema, cioè alla possibilità per il sistema stesso di raggiungere uno stato di equilibrio dinamico in cui sia possibile definire una funzione di autocorrelazione stazionaria. In fig. 7.4 si può confrontare il segnale registrato a $\mu = 2.56 \pm 0.05$ (regime ergodico)



(a)



(b)



(c)

Figura 7.3: Spettro delle fluttuazioni ad alti voltaggi: in (a) per $\varepsilon = 0.449 \pm 0.004$, in (b) per $\varepsilon = 0.589 \pm 0.006$ e in (c) per $\varepsilon = 0.776 \pm 0.008$. Si nota come il taglio lorentziano si avvicina sempre più allo zero, riducendo la zona in cui è possibile osservare l'andamento $1/f$.

ε	η	$\mu(\eta)$	H_{SDA}	$\mu(H_{SDA})$	δ	$\mu(\delta)$	H_{DFA}	$\mu(H_{DFA})$	μ_{medio}
0.125 ± 0.001	1.95 ± 0.1	1.05 ± 0.1	1.01 ± 0.04	non def.	0.89 ± 0.04	non def.	1.45 ± 0.04	1.10 ± 0.08	1.08 ± 0.08
0.174 ± 0.002	1.75 ± 0.1	1.25 ± 0.1	0.99 ± 0.04	non def.	0.90 ± 0.04	non def.	1.40 ± 0.05	1.20 ± 0.1	1.225 ± 0.08
0.182 ± 0.002	1.7 ± 0.3	1.3 ± 0.3	1.00 ± 0.04	non def.	0.87 ± 0.04	non def.	1.355 ± 0.04	1.29 ± 0.08	1.295 ± 0.08
0.191 ± 0.002	1.7 ± 0.2	1.3 ± 0.2	0.98 ± 0.04	non def.	0.91 ± 0.04	non def.	1.33 ± 0.04	1.34 ± 0.08	1.33 ± 0.08
0.195 ± 0.002	1.35 ± 0.3	1.65 ± 0.3	0.99 ± 0.04	non def.	0.90 ± 0.04	non def.	1.15 ± 0.04	1.70 ± 0.08	1.69 ± 0.08
0.201 ± 0.002	1.1 ± 0.1	1.9 ± 0.1	0.95 ± 0.04	non def.	0.87 ± 0.04	non def.	1.08 ± 0.04	1.84 ± 0.08	1.87 ± 0.08
0.211 ± 0.002	0.9 ± 0.2	2.1 ± 0.2	0.92 ± 0.04	non def.	0.83 ± 0.04	non def.	1.04 ± 0.04	1.92 ± 0.08	2.03 ± 0.08
0.220 ± 0.002	0.7 ± 0.2	2.3 ± 0.2	0.84 ± 0.04	2.32 ± 0.08	0.77 ± 0.04	2.30 ± 0.07	0.87 ± 0.04	2.26 ± 0.08	2.29 ± 0.05
0.230 ± 0.002	0.7 ± 0.2	2.3 ± 0.2	0.805 ± 0.04	2.39 ± 0.08	0.74 ± 0.04	2.35 ± 0.07	0.84 ± 0.04	2.32 ± 0.08	2.35 ± 0.05
0.240 ± 0.002	0.7 ± 0.2	2.3 ± 0.2	0.78 ± 0.04	2.44 ± 0.08	0.72 ± 0.04	2.39 ± 0.08	0.80 ± 0.04	2.40 ± 0.08	2.41 ± 0.05
0.261 ± 0.003	0.75 ± 0.3	2.25 ± 0.3	0.80 ± 0.04	2.40 ± 0.08	0.70 ± 0.04	2.43 ± 0.08	0.78 ± 0.04	2.44 ± 0.08	2.42 ± 0.05
0.315 ± 0.003	0.65 ± 0.3	2.35 ± 0.3	0.72 ± 0.04	2.56 ± 0.08	0.67 ± 0.04	2.49 ± 0.08	0.74 ± 0.04	2.52 ± 0.08	2.515 ± 0.05
0.324 ± 0.003	0.5 ± 0.3	2.5 ± 0.3	0.72 ± 0.04	2.56 ± 0.08	0.64 ± 0.04	2.56 ± 0.08	0.715 ± 0.04	2.57 ± 0.08	2.56 ± 0.05
0.408 ± 0.004	0.3 ± 0.2	2.7 ± 0.2	0.64 ± 0.04	2.72 ± 0.08	0.57 ± 0.03	2.75 ± 0.08	0.635 ± 0.04	2.73 ± 0.08	2.73 ± 0.05
0.449 ± 0.004	0.3 ± 0.2	2.7 ± 0.2	0.63 ± 0.04	2.74 ± 0.08	0.59 ± 0.03	2.69 ± 0.08	0.65 ± 0.04	2.70 ± 0.08	2.72 ± 0.05
0.501 ± 0.005	0.1 ± 0.2	2.9 ± 0.2	0.57 ± 0.04	2.86 ± 0.08	0.54 ± 0.03	2.85 ± 0.08	0.56 ± 0.04	2.88 ± 0.08	2.87 ± 0.05
0.589 ± 0.006	0.15 ± 0.1	2.85 ± 0.1	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	2.85 ± 0.1
0.682 ± 0.007	0.1 ± 0.1	2.9 ± 0.1	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	2.9 ± 0.1
0.692 ± 0.007	0.1 ± 0.1	2.9 ± 0.1	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	2.9 ± 0.1
0.776 ± 0.008	0.0 ± 0.1	3.0 ± 0.1	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	3.0 ± 0.1
0.869 ± 0.009	0.0 ± 0.1	3.0 ± 0.1	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	non def.	3.0 ± 0.1

Tabella 7.1: Parametri relativi alle proprietà frattali delle fluttuazioni per diversi valori del parametro di controllo. Il modo in cui vengono calcolati, il loro significato e il legame con la teoria degli NPR è riportato nel cap. 6. Per $\mu < 2$ la SDA e la DE non funzionano (vedi cap. 6). Anche per $\varepsilon = 0.211$, per cui si trova $\mu = 2.03$ (molto vicino a 2), si è preferito non riferirci a questi metodi, che pure danno risultati coerenti. Per voltaggi superiori, come spiegato nel testo, l'unico metodo affidabile è lo spettro.

con quello a $\mu = 1.33 \pm 0.08$ (regime non ergodico); si noti la differenza qualitativa tra i due.

L'impossibilità di definire una funzione di autocorrelazione stazionaria è invece mostrata in fig. 7.5, dove sono riportate le funzioni di autocorrelazione ottenute da tre parti diverse dello stesso segnale³. Si vede come nel caso $\mu > 2$ le tre funzioni praticamente coincidono, mentre per $\mu < 2$ sono molto diverse tra loro; quest'ultimo fatto è indice della non esistenza di una funzione di autocorrelazione stazionaria.

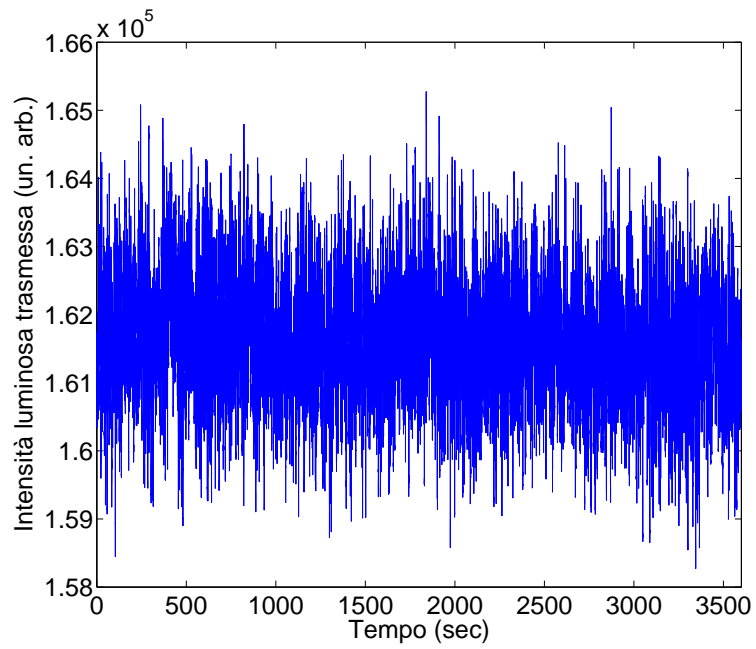
Cerchiamo ora di capire meglio quale sia il significato fisico della transizione nonergodico-ergodico. Si osserva che per gli stessi valori del parametro di controllo il sistema va incontro alla transizione tra lo stato dei domini di Williams fluttuanti (FWD, vedi par. 4.2) e il DSM1. Quindi **questa può essere vista anche come una transizione tra un regime non ergodico ed uno ergodico nella dinamica dei difetti**⁴.

Questi due stati (FWD e DSM1) presentano caratteristiche spaziali molto diverse tra loro: nel primo caso si hanno larghe zone in cui il pattern è assolutamente regolare e stazionario circondate da "clusters" di difetti in cui si concentra l'attività dinamica (vedi fig. 4.4c). Questa forte disomogeneità spaziale non è invece presente nel Dynamic Scattering Mode 1 (vedi fig. 4.4e), in cui l'attività dinamica dei difetti è distribuita in tutto il campione ed il pattern si presenta globalmente omogeneo.

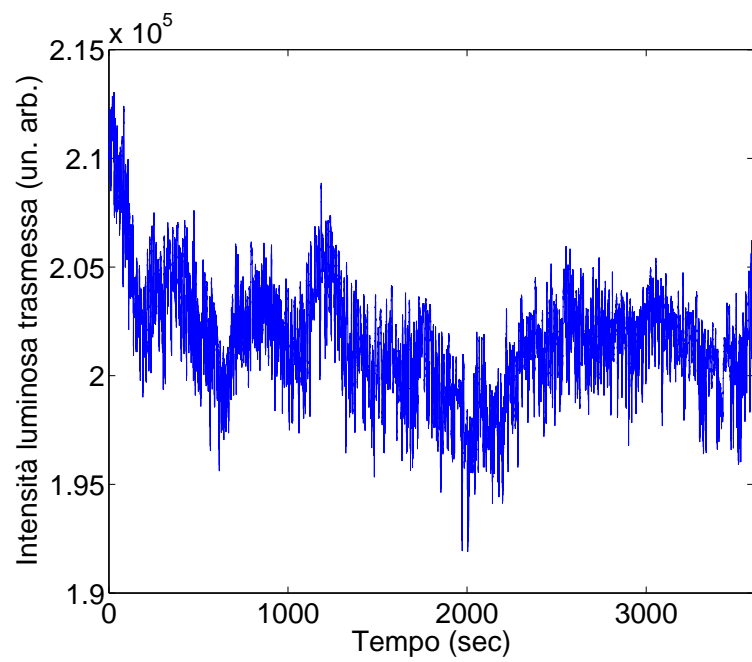
Torniamo ancora alla fig. 7.2. Qui, sovrapposto al grafico di μ vs. ε , è riportata la deviazione standard delle fluttuazioni, normalizzata con la media del segnale. Si può vedere come questa abbia un brusco incremento appena sotto la transizione a ε_c , probabilmente collegato alla perdita di ergodicità. Questo andamento dell'ampiezza delle fluttuazioni è già noto in letteratura [37, 19, 14], sia per quanto riguarda l'intensità luminosa trasmessa che per quanto riguarda la corrente passante per il cristallo liquido, e la teoria dei processi di rinnovo non poissoniani ne fornisce un'interpretazione nuova e coerente.

³in pratica si è divisa la serie temporale in tre sottosequenze di eguale lunghezza e per ognuna di queste si è valutata la funzione di autocorrelazione.

⁴ricordiamo che (vedi par. 4.2) il DSM1 è uno stato turbolento in cui è ancora presente un pattern sottostante con difetti, mentre lo stato di turbolenza completamente sviluppata, in cui si perde ogni struttura, è il DSM2.

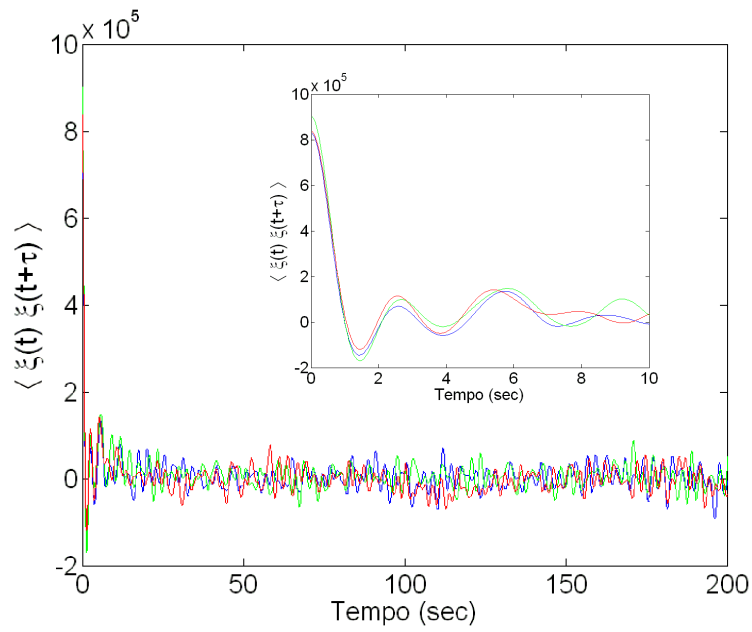


(a)

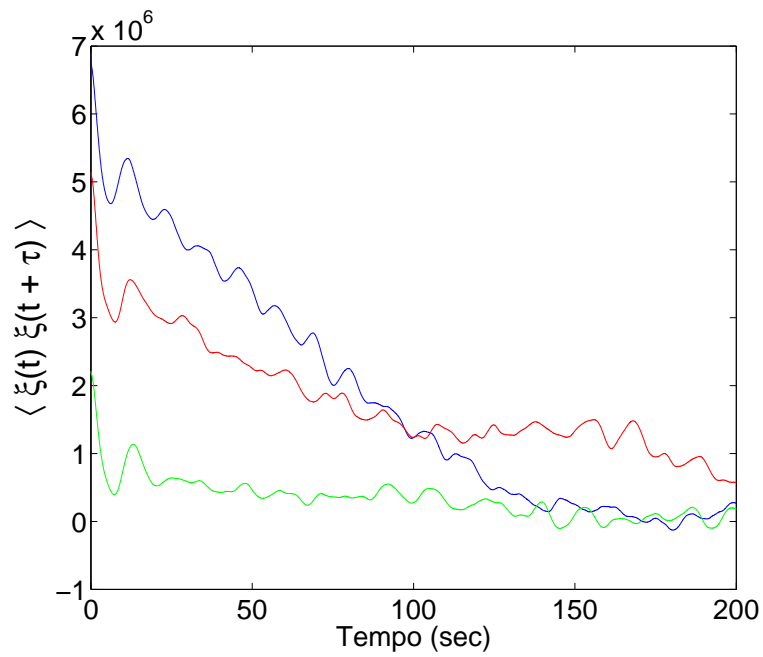


(b)

Figura 7.4: Intensità luminosa trasmessa in uno stato ergodico (a) e in uno non ergodico (b).



(a)



(b)

Figura 7.5: Funzioni di autocorrelazione calcolate su parti diverse dello stesso segnale, in (a) per $\mu = 2.56 \pm 0.05$ e in (b) per $\mu = 1.33 \pm 0.08$; nell'inset di (a) un particolare. Si può vedere come le prime siano quasi coincidenti, a differenza delle seconde.

7.3 Rilassamento all'equilibrio

Il fatto che i diversi metodi di analisi delle fluttuazioni diano risultati coerenti con la teoria dei processi di rinnovo non costituisce, di per sé, una prova indiscutibile che la turbolenza debole sia guidata da tali processi.

Per verificare se le fluttuazioni siano in effetti generate da processi di rinnovo si è quindi scelto di studiare il rilassamento del sistema da una situazione di non equilibrio, andando a confrontarlo con quanto previsto dal modello teorico esposto nel cap. 3 e ottenendo, come vedremo, un buon accordo. Va sottolineato che il teorema di fluttuazione e dissipazione per sistemi dominati da eventi (vedi par. 3.1) porta a conclusioni *diverse* da quelle a cui si giungerebbe secondo le prescrizioni della teoria della risposta lineare tradizionale [27].

Si è osservato il rilassamento dell'intensità luminosa trasmessa dal sistema dopo aver modulato bruscamente il voltaggio da sotto la soglia V_c ad uno stato di cui era noto il coefficiente μ . Come visto in precedenza, per $\mu < 2$ il segnale non è stazionario e non raggiunge mai, nel tempo, un valore di equilibrio. Non è dunque chiaro quale sia il valore limite per il rilassamento. È però possibile definire un valore medio stazionario *sull'ensemble* a cui la media (sempre sull'ensemble) dei "rilassamenti" tende asintoticamente (secondo quanto visto nel cap. 3).

Per connettersi quindi alla teoria si è ripetuto lo stesso esperimento circa 200 volte andando a mediare sulle varie realizzazioni. Questa procedura ha anche l'effetto positivo di ridurre notevolmente le fluttuazioni ed è stata utilizzata anche nel caso $\mu > 2$ dove un valore di equilibrio viene raggiunto anche dal singolo segnale (in quanto ergodico). Questa misura è quindi particolarmente delicata in quanto è necessario mantenere inalterate le condizioni sperimentali per diverse ore (la singola realizzazione dura infatti circa $1 \div 2$ minuti). Inoltre questo comporta un eccessivo aumento di calcolo per l'analisi del filmato.

Ricordiamo che il rilassamento da uno stato di non equilibrio (vedi par. 3.4 ed eq. 3.11) segue una legge che è data dalla somma di due termini:

$$\langle \xi_R(t) \rangle = A\Psi(t) + \frac{B}{t^n} \quad (7.1)$$

dove n è un indice che può assumere valori diversi, riportati nella tab. 3.1, a seconda di avere $\mu < 2$ o $\mu > 2$.

Il primo termine è dovuto alla presenza, subito dopo il brusco cambio nel parametro di controllo, di un numero eccessivo di difetti, ed è proporzionale alla survival probability $\Psi(t)$. L'altro è invece il termine di risposta ad una perturbazione costante previsto dal teorema di fluttuazione e dissipazione per sistemi dominati da eventi di rinnovo (vedi par. 3.1). Si dovrebbero quindi vedere due potenze sovrapposte.

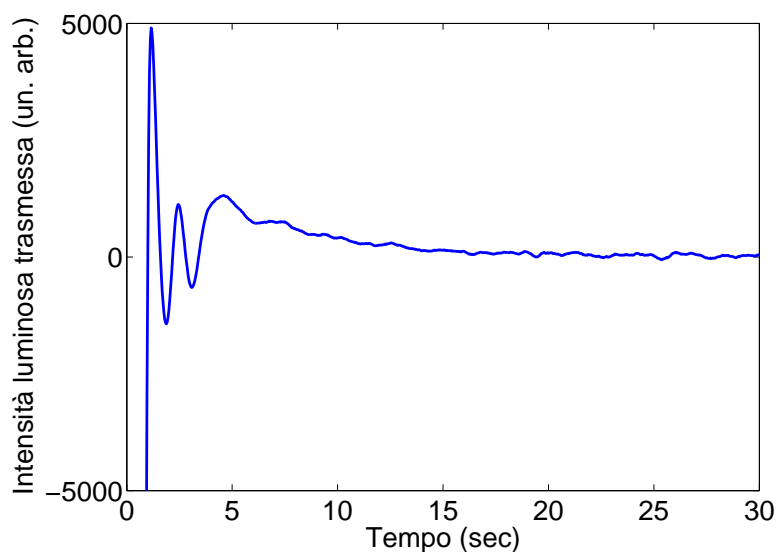


Figura 7.6: Rilassamento dell'intensità luminosa trasmessa ad un valore di equilibrio. Si può vedere come a tempi brevi siano presenti forti oscillazioni, mentre a tempi lunghi si ha un rilassamento lento.

In fig. 7.6 è riportato un tipico esempio di rilassamento: si può vedere come a tempi brevi ($0 \div 4$ sec) il sistema risponda all'improvviso cambio di condizioni con oscillazioni smorzate. Queste sono da attribuirsi, come si vede anche dall'osservazione diretta del sistema, ad una dinamica d'insieme del cristallo e del pattern di turbolenza e non alla dinamica dei difetti, che anzi sono completamente immobili in queste prime fasi. Solo successivamente comincia la loro dinamica, e questa porta ad una lenta regressione, che è proprio quella che si è analizzato.

Questo rilassamento avviene in alcuni casi partendo da sopra il valore di equilibrio, in altri casi da sotto; si è quindi eventualmente "ribaltato" il segnale in modo da avere sempre, per l'analisi dati, un rilassamento "dall'alto".

Inoltre il valore di equilibrio è diverso da zero: per poter stimare questo valore si è proceduto in due modi diversi, nel caso $\mu > 2$ e in quello $\mu < 2$. Nel primo infatti l'intensità luminosa trasmessa raggiunge effettivamente un livello di equilibrio che è possibile valutare direttamente dall'ultimo tratto del segnale. Nel secondo caso invece la questione è molto delicata in quanto la singola realizzazione non raggiunge un valore stazionario e anche la media decresce molto lentamente, rendendo incompatibili, per problemi di tempo, la richiesta di fare tante realizzazioni diverse (per poter avere un insieme statistico) e quella di farle lunghe (per vedere il valore finale raggiunto). Per poter avere un criterio oggettivo nella stima del valore asintotico si è così utilizzata la seguente tecnica: all'inizio questo è stato fissato arbitrariamente e, successivamente, lo si è alzato o abbassato fino a rendere il grafico rettilineo su scala bilogarithmica.

In fig. 7.7 sono riportati i rilassamenti (mediati) ottenuti portando bruscamente il sistema da $\varepsilon < 0$ ($V < V_c$) al voltaggio corrispondente a $\mu = 2.87 \pm 0.05$ e $\mu = 2.515 \pm 0.05$, rispettivamente. Si è plottata solo la zona oltre le oscillazioni. Insieme ai punti sperimentali è stata graficata una legge a potenza $\propto 1/t^{\mu-1}$, proporzionale quindi alla survival probability giovane (vedi eq. 2.7). Da notare il buon accordo con i dati sperimentali.

In fig. 7.8 è riportato il rilassamento dallo stato non turbolento a quello caratterizzato da $\mu = 1.225 \pm 0.08$, insieme ad una legge a potenza $\propto 1/t^{\mu-1}$ (proporzionale alla survival probability). Anche in questo caso si osserva un buon accordo.

Sembrirebbe quindi che il rilassamento sia dominato dalla “distruzione” delle strutture che si creano subito dopo il brusco salto nel parametro di controllo. In effetti si può vedere in fig. 7.9 come il numero di difetti all'istante successivo al cambiamento di ε sia notevolmente superiore a quello che si può osservare dopo parecchio tempo. Questo è segno di un effettivo “surplus” di strutture autoorganizzate.

Vale la pena notare che la survival probability giovane **non** è la funzione di autocorrelazione stazionaria del sistema (che per $\mu < 2$ non è definibile e per $\mu > 2$ è data dalla survival invecchiata) ma è la funzione di autocorrelazione di un ensemble di sistemi preparati (vedi par. 2.4) all'istante iniziale. Quindi l'invecchiamento delle distribuzioni, caratteristico dei processi di rinnovo non poissoniani (vedi par. 2.4), si manifesta in una violazione

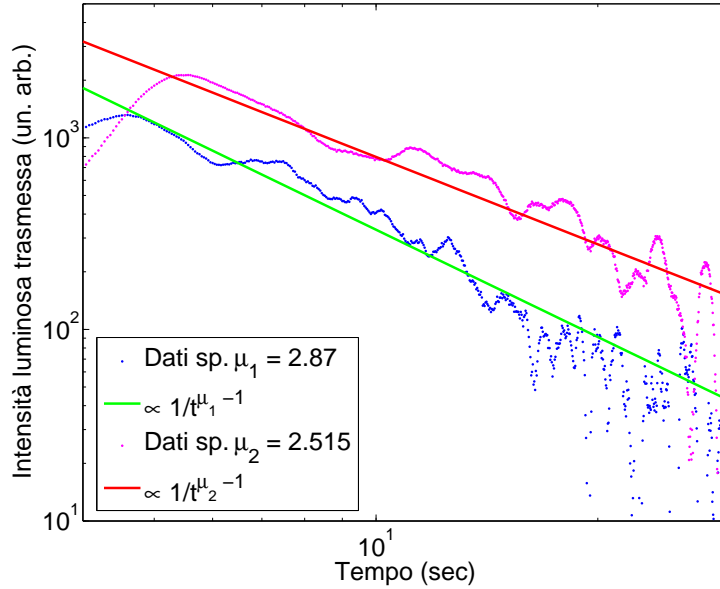


Figura 7.7: Rilassamento dell'intensità luminosa trasmessa quando il sistema è bruscamente portato da $V_1 < V_c$ a $V_2 > V_c$. Sono riportati risultati per due diversi valori di V_2 (e quindi del μ dello stato di arrivo).

del principio di Onsager nella sua accezione più semplice⁵, ovvero il sistema non rilassa seguendo la funzione di autocorrelazione stazionaria.

Come detto sopra, la teoria prevede che il rilassamento sia dato dalla somma di due leggi a potenza. I grafici di fig. 7.7 e di fig. 7.8 sembrano mostrare però un andamento che segue una sola potenza, data dalla $\Psi(t)$. L'altro termine può tuttavia non essere visibile semplicemente perché si ha $A \gg B$ (vedi eq. 7.1). Per verificare la presenza di un'altra legge a potenza si è quindi sottratto al rilassamento totale il termine proporzionale alla survival probability. Dall'eq. 7.1 segue che questa differenza va proprio come l'altra potenza:

$$\langle \xi_R(t) \rangle - A\Psi(t) = \frac{B}{t^n}. \quad (7.2)$$

In fig. 7.10 è riportata la differenza tra il rilassamento osservato e la legge a potenza $1/t^{\mu-1}$ per $\mu = 1.225 \pm 0.08$. Nello stesso grafico è mostrata una legge a potenza $\propto 1/t^{2-\mu}$, corrispondente alla risposta lineare

⁵questo principio è in un senso più ampio rispettato perché la survival è una funzione di autocorrelazione, seppur non quella stazionaria.

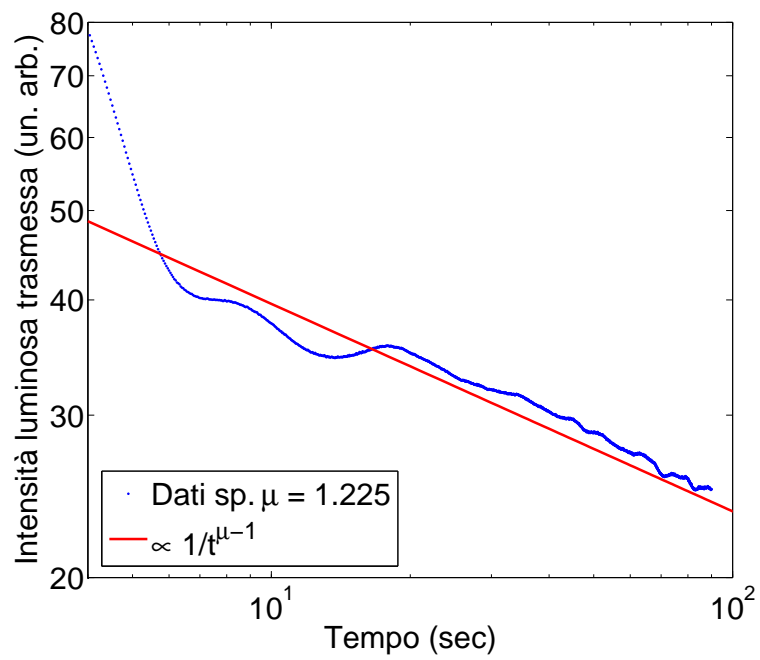
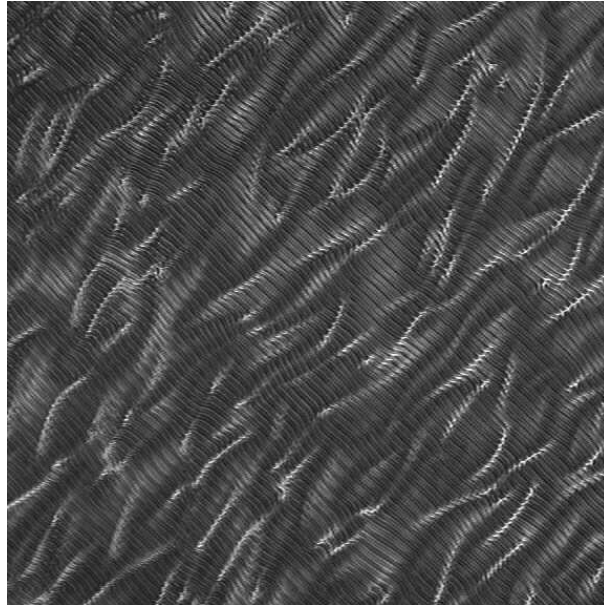
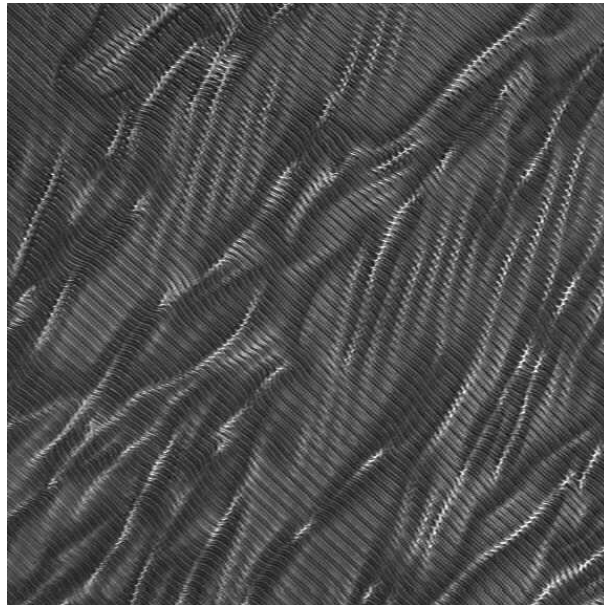


Figura 7.8: Rilassamento dell'intensità luminosa trasmessa quando il sistema è bruscamente portato da $V_1 < V_c$ a $V_2 > V_c$.

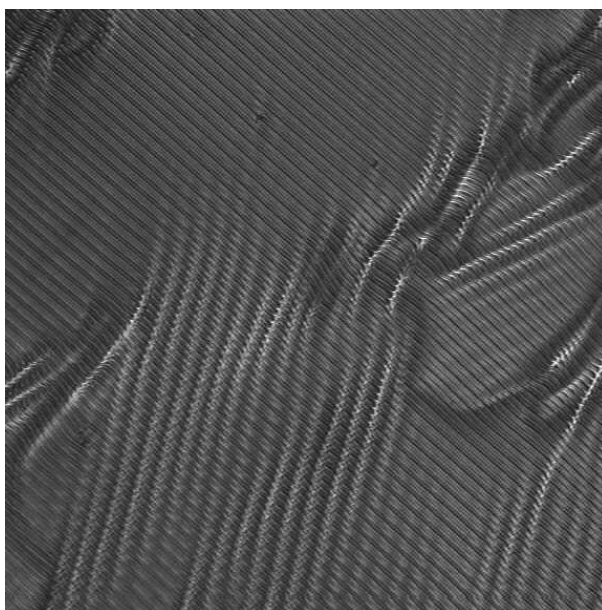


(a)



(b)

Figura 7.9: Due fotogrammi che mostrano come, dopo la brusca variazione di campo, nella turbolenza ci sia un “surplus” di difetti. In (a) il pattern fotografato subito dopo il salto del voltaggio, in (b) il pattern fotografato circa 10 minuti dopo.



(c)

Figura 7.9: Questo fotogramma mostra il sistema dopo circa 30 minuti dalla brusca variazione di campo.

nel modello dinamico. Si nota un discreto accordo tra questa curva e i dati sperimentali. Da questa figura si deduce che il termine legato alla risposta ad una perturbazione costante è presente, ma è molto più piccolo dell'altro. Questo implica che il principio di Onsager è *completamente* violato, non solo nella sua accezione più semplice, in quanto questo andamento $1/t^{2-\mu}$ non ha niente a che vedere con l'autocorrelazione del sistema.

Si è fatto lo stesso tipo di analisi per $\mu > 2$, ma le fluttuazioni sulla misura non consentono di verificare la presenza del termine $\propto 1/t^{\mu-2}$. La presenza di questa potenza è anche compatibile con un'analisi in cui si è diminuita l'ampiezza delle fluttuazioni del segnale tramite una procedura di smoothing. I risultati di questa analisi non sono tuttavia riportati qui.

L'altro esperimento di rilassamento è sostanzialmente simile a quello finora descritto, con la differenza che il parametro di controllo viene bruscamente portato ad un valore definito partendo non da sotto soglia, ma da un voltaggio $V > V_c$. Anche in questo caso sono state effettuate circa 200 realizzazioni della regressione in modo da poter disporre di un ensemble su cui mediare. In pratica in questo caso si è modulata l'ampiezza del

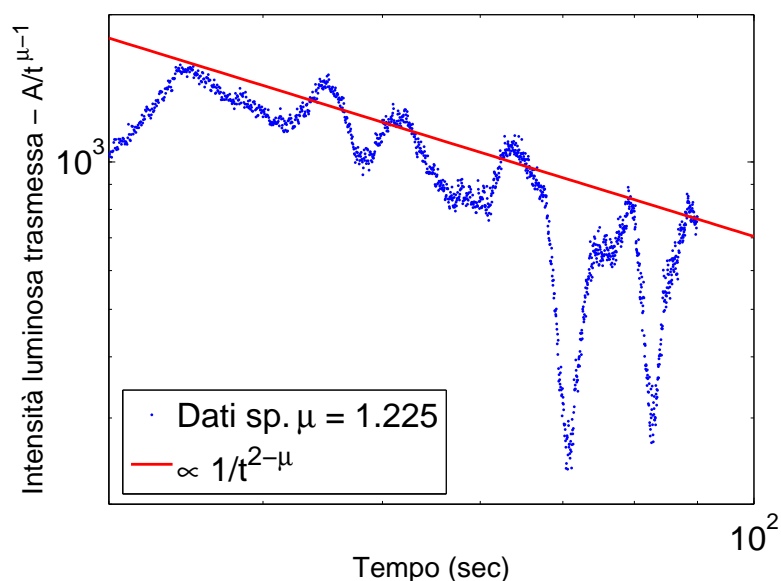


Figura 7.10: Differenza tra il rilassamento osservato e la legge a potenza $1/t^{\mu-1}$. La linea continua è una legge a potenza $\propto 1/t^{2-\mu}$, che dimostra che il rilassamento è dato dalla somma dei due termini previsti dalla teoria.

voltaggio con un'onda quadra di periodo 100 secondi. Questa modulazione simmetrica tra due valori del parametro di controllo (ε_1 e ε_2) ha il vantaggio di permettere lo studio contemporaneo dei due rilassamenti.

Un esperimento di questo tipo è possibile solo se per entrambi i valori di ε il sistema è ergodico ($\mu > 2$). Infatti se, per esempio, si avesse $\mu(\varepsilon_1) < 2$ il sistema non raggiungerebbe mai un valore di equilibrio e quindi i successivi rilassamenti a ε_2 partirebbero tutti da condizioni iniziali diverse e l'esperimento non sarebbe ripetibile⁶. A maggior ragione è da escludere un esperimento in cui entrambi i valori del voltaggio corrispondono a stati non ergodici.

In fig. 7.11 sono riportate le regressioni osservate sperimentalmente. Si vede che passando da μ_1 a μ_2 , con $\mu_1 > \mu_2$, la regressione è sempre guidata dal termine dominante $1/t^{\mu_2-1}$ dato dalla survival probability giovane, proprio come per i rilassamenti dallo stato non turbolento. Passando invece da μ_2 a μ_1 (sempre ipotizzando $\mu_1 > \mu_2$) il rilassamento va come $1/t^{\mu_1-2}$. Questo termine può essere dato sia dalla risposta lineare che dalla survival

⁶naturalmente si potrebbe invece studiare la regressione da ε_2 a ε_1 .

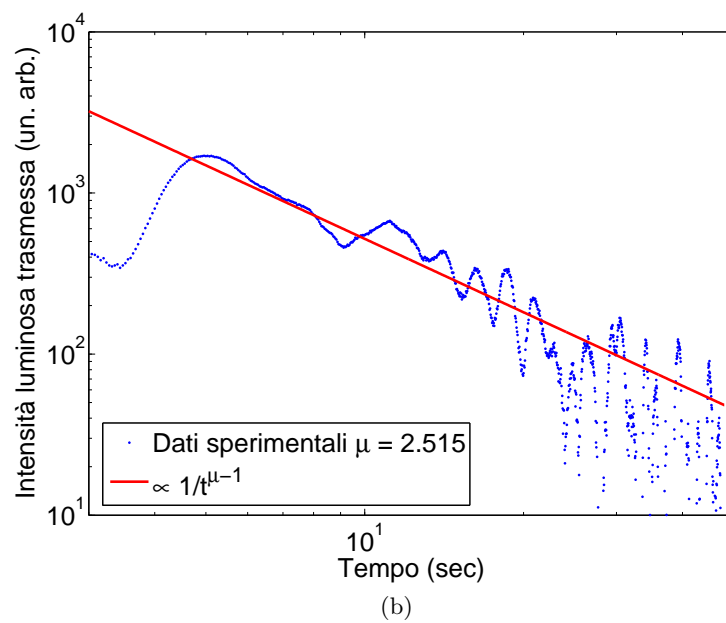
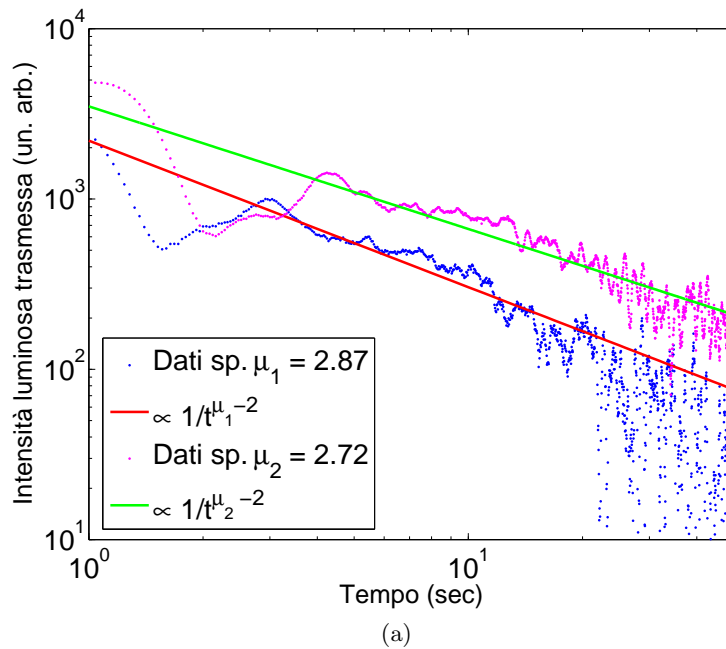


Figura 7.11: Rilassamento del sistema da uno stato di turbolenza debole ad un altro. In (a) rilassamenti con $\mu_{partenza} < \mu_{arrivo}$, che seguono la survival probability invecchiata, in (b) un rilassamento con $\mu_{arrivo} < \mu_{partenza}$, in cui il sistema rilassa come se fosse giovane.

probability “vecchia”; è ragionevole comunque supporre che anche in questo caso il contributo dominante sia il secondo.

Il fatto che il rilassamento da uno stato non turbolento evolva con la survival giovane è comprensibile: infatti il sistema è realmente “giovane” in quanto tutte le strutture nascono al tempo $t = 0$. Quando invece la regressione parte da un regime che è già di turbolenza debole il problema è più delicato. La dinamica del sistema nello stato 1 è mediamente più veloce di quella nello stato 2, come si può vedere confrontando i tempi medi di attesa tra un evento e l’altro (che sono dati da $\tau_{1,2} = T/\mu_{1,2} - 2$ come visto nel par. 2.3). I difetti formati nello stato 1 sono quindi mediamente più “giovani” di quelli dello stato 2 e, passando bruscamente da 1 a 2, il sistema si comporta come se fosse stato appena preparato. Nel caso opposto (cioè quando si passa da 2 a 1) il sistema è “vecchio” rispetto alla nuova dinamica e il rilassamento è guidato dalla survival probability invecchiata. Questo è coerente con quanto osservato sperimentalmente e riportato in fig. 7.11a.

Questo fatto può essere capito meglio riferendosi ancora una volta al toy-model teorico della mappa di Manneville modificata (vedi par. 2.2). Poiché siamo nel caso ergodico, possiamo assumere che il sistema, quando avviene la modulazione, abbia già raggiunto la distribuzione invariante. Questa è più piccata nello stato 2 e più piatta in quello 1 perché $\mu_1 > \mu_2$ (vedi par. 2.3). Quindi vista dallo stato 2 la distribuzione invariante di 1 è fondamentalmente piatta e quindi simile alla distribuzione “giovane” del sistema (che è *esattamente* piatta, vedi par. 2.3). Il rilassamento dalla distribuzione invariante di 1 a quella di 2 sarà quindi quasi identico a quello in cui il sistema viene preparato al tempo $t = 0$ e poi fatto rilassare allo stato 2.

Viceversa, la distribuzione invariante di 2 è più piccata rispetto a quella di 1 e non porta a questo apparente “ringiovanimento”. Il sistema già invecchiato (in quanto ha raggiunto la distribuzione invariante) rimane vecchio e la regressione è quindi guidata dalla survival probability invecchiata.

In tab. 7.2 sono riassunti i risultati ottenuti dagli esperimenti di regressione allo stato stazionario e confrontati con la previsione data dalla tradizionale teoria della risposta lineare, secondo la quale il sistema rilassa con la funzione di autocorrelazione stazionaria. Questa è collegata allo spettro delle fluttuazioni dal teorema di Wiener-Kintchine (vedi par. 6.6). Si

vede come la tradizionale teoria non sia compatibile con i risultati ottenuti, che invece sono in buon accordo con il teorema di fluttuazione e dissipazione per un sistema dominato da eventi di rinnovo, presentato nel par. 3.1. Questo indica che i processi di rinnovo non poissoniani sono un buon modello per descrivere la turbolenza debole.

μ	$\eta = 3 - \mu$	LRT	EDFDT	Sperimentale
< 2	> 1	non def.	$A/t^{2-\mu} + B/t^{\mu-1}$	$A/t^{2-\mu} + B/t^{\mu-1}$
> 2 giovane	< 1	$A/t^{\mu-2}$	$A/t^{\mu-2} + B/t^{\mu-1}$	$A/t^{\mu-1}$
> 2 vecchio	< 1	$A/t^{\mu-2}$	$A/t^{\mu-2}$	$A/t^{\mu-2}$

Tabella 7.2: Andamenti asintotici dei rilassamenti per diverse condizioni del sistema. Si possono confrontare le previsioni della teoria della risposta lineare tradizionale (*Linear Response Theory*, LRT), del teorema di fluttuazione e dissipazione per un sistema dominato da eventi (*Event Dominated Fluctuation Dissipation Theorem*, EDFDT) e gli andamenti trovati sperimentalmente. Sono riportati, per quanto riguarda l'EDFDT, i risultati relativi al modello dinamico. Ricordiamo che per $\eta > 1$ non esiste una funzione di autocorrelazione stazionaria, quindi non si può applicare la teoria della risposta lineare tradizionale. Si vede un buon accordo tra EDFDT e dati sperimentali tranne che nel caso $\mu > 2$ giovane. Va però ricordato che la potenza $1/t^{\mu-2}$ potrebbe avere un prefattore molto più piccolo di quello di $1/t^{\mu-1}$, in analogia a quanto accade per $\mu < 2$, dove si osserva che il prefattore del termine $1/t^{\mu-1}$ è molto più grande dell'altro (si veda comunque la discussione fatta precedentemente). A e B sono costanti.

7.4 Risposta a perturbazioni sinusoidali e complesse

L'ultima parte del lavoro sperimentale è stata dedicata allo studio della risposta a stimoli sinusoidali e "complessi". Con quest'ultimo termine si intende una perturbazione che abbia proprietà di scala legate alla presenza di eventi di rinnovo non poissoniani. In pratica per ottenere un simile segnale si sono usate le fluttuazioni del sistema per diversi valori del parametro di controllo, e quindi per diversi valori dell'indice di scala μ , precedentemente registrate. Le perturbazioni sono state realizzate modulando con il segnale desiderato l'ampiezza del voltaggio a cui era sottoposto il cristallo liquido. La perturbazione sinusoidale è stata scelta molto lenta, $f = 20$ mHz, in modo che la sua frequenza fosse nel range per cui lo spettro delle fluttuazioni del sistema mostra l'andamento $1/f^\eta$.

Prima di proseguire va chiarito un punto. La teoria della risposta lineare per sistemi dominati da eventi di rinnovo è fatta pensando che il parametro di scala μ rimanga costante indipendentemente dalla perturbazione. Nel nostro caso invece si va a modulare il voltaggio a cui, come visto precedentemente, è collegato il μ del sistema. Si può ragionevolmente supporre che se la perturbazione è piccola il sistema venga guidato da un μ medio efficace, mentre quando questa è grande il sistema sia in grado di sentire il μ relativo ai voltaggi raggiunti dalla perturbazione. In ogni caso quest'effetto non può cambiare le proprietà frattali del sistema fuori dal range dei μ relativi ai valori della tensione visitati.

Si sono analizzate due situazioni, vale a dire il caso ergodico ($\mu_S^{imp.} > 2$) e quello non ergodico ($\mu_S^{imp.} < 2$)⁷.

Per prima cosa si è cercato di capire per quali intensità della perturbazione si ha risposta lineare. Per fare questo si è ipotizzato, semplificando, che una parte del sistema risponda con la perturbazione:

$$\xi_R(t) = \xi_S(t) + \alpha \xi_P(t + \tau), \quad (7.3)$$

dove si è indicato con ξ_R (R come "risposta") il segnale ottenuto dal sistema

⁷indichiamo con $\mu_S^{imp.}$ il parametro di scala del sistema imperturbato.

perturbato, con ξ_P la perturbazione e con ξ_S la parte delle fluttuazioni del sistema che non seguono la perturbazione. α è un fattore dimensionale che collega la perturbazione alla variabile osservata, cioè l'intensità luminosa trasmessa. La fase τ è introdotta per un duplice motivo: da una parte ci possono essere tempi di risposta *del sistema* diversi da zero, dall'altra l'accensione della perturbazione e la registrazione del segnale avvenivano tramite due diversi elaboratori e non erano perciò esattamente simultanee.

Il regime lineare può essere scelto come quello per cui α , cioè l'intensità della risposta "in fase", cresce linearmente con l'intensità della perturbazione. Questa definizione è in qualche modo riduttiva, in quanto la risposta del sistema *non* è necessariamente tutta in fase con il segnale, come si vede dall'eq. 3.1. Sperimentalmente però α può essere una buona misura, facilmente accessibile, della linearità della risposta.

L'eq. 7.3 fornisce anche un utile modo per ricavare α e per studiare eventuali effetti "non in fase" della perturbazione. Questi sono riscontrabili dall'analisi delle fluttuazioni $\xi_S(t)$. Per ricavare questo basta usare un piccolo trucco matematico: moltiplicando entrambi i lati di eq. 7.3 per $\xi_P(t + \tau')$ e integrando nel tempo si ottiene:

$$\int \xi_R(t)\xi_P(t + \tau')dt = \int \xi_S(t)\xi_P(t + \tau')dt + \alpha \int \xi_P(t + \tau)\xi_P(t + \tau')dt. \quad (7.4)$$

Si può ragionevolmente supporre che ξ_S e ξ_P siano statisticamente scorrelate, il che annulla il primo termine sulla destra⁸. La scelta di τ' al posto di τ è dovuta al fatto che di quest'ultimo non conosciamo il valore *a priori*. Il secondo termine a destra (e quindi tutto ciò che è a destra) è però massimo quando $\tau' = \tau$. Se quindi consideriamo il termine a sinistra (che è sperimentalmente accessibile) come una funzione di τ' e cerchiamo il massimo di questa funzione, questo si avrà proprio per $\tau' = \tau$. Trovato così il ritardo di fase, a questo punto α si ottiene facilmente:

$$\alpha = \frac{\int \xi_R(t)\xi_P(t + \tau)}{\int \xi_P^2(t + \tau)}, \quad (7.5)$$

e, noti α , τ , ξ_P e ξ_R si può invertire l'eq.7.4 per trovare $\xi_S(t)$.

⁸naturalmente si suppone che ξ_R sia a media nulla.

Riportiamo anzitutto i risultati ottenuti nel caso in cui il sistema imperturbato era in regime ergodico, con $\mu_S^{imp.} = 2.56 \pm 0.04$.

In fig. 7.12 è riportato il parametro di risposta α in funzione dell'ampiezza percentuale della modulazione, valutato sia nel caso di perturbazione sinusoidale che complessa. Si può notare come per $\Delta\varepsilon/\varepsilon \lesssim 0.06$ la risposta del sistema sia approssimativamente lineare, mentre per perturbazioni più forti appaiono deviazioni da questo comportamento. In ogni caso sembra che il sistema risponda nello stesso modo a perturbazioni sinusoidali e complesse; questo è confermato dalla fig. 7.13 in cui è riportata la cross-correlation tra ξ_P e ξ_R in funzione dell'ampiezza della modulazione.

L'incertezza sulla valutazione di α e della cross-correlation, sulla singola realizzazione, è trascurabile. Infatti queste due quantità sono definite (vedi eq. 7.5 e eq. 7.6) come integrali, e su segnali discreti vengono quindi calcolate come somme. È noto infine che l'errore percentuale sulla somma di n variabili decresce come $1/\sqrt{n}$, e le serie analizzate sono costituite da circa $9 \cdot 10^4$ punti. Esiste tuttavia un'incertezza data dalle fluttuazioni del sistema, che può essere valutata solo da un ensemble di realizzazioni. Nello studio qui presentato, nel quale si è analizzata una sola realizzazione, questo tipo di errore rimane ignoto. L'unica cosa che si può dire è che questo sarà molto più grande nel caso non ergodico rispetto a quello ergodico.

Ricordiamo che la cross-correlation tra due segnali ξ_1 e ξ_2 è definita nel seguente modo:

$$\chi(\xi_1, \xi_2) = \frac{\langle \xi_1 \xi_2 \rangle}{\sqrt{\langle \xi_1^2 \rangle \langle \xi_2^2 \rangle}} \quad (7.6)$$

dove le medie sono *sull'ensemble*. Nel nostro caso invece quelle riportate sono medie sul tempo, che coincidono con quelle sull'ensemble solo quando il sistema è ergodico, come in questo caso. Nel caso non ergodico, che verrà analizzato tra poco, è quindi possibile che la media temporale abbia comportamenti “strani”, in quanto dipende dalla “storia” del sistema.

Nel caso di modulazione complessa si sono studiate le proprietà frattali delle fluttuazioni del sistema perturbato. Ricordiamo che la teoria prevede, in questo caso, che il sistema erediti in parte le leggi di scala della perturbazione, dando luogo al fenomeno del Complexity Matching (vedi par. 3.5). In fig. 7.14 sono riportati, in funzione dell'ampiezza della perturbazione, i parametri di scala del sistema perturbato. Sono indicati due coefficienti, uno (μ_R) relativo a tutte le fluttuazioni del sistema (cioè a ξ_R , vedi eq. 7.3)

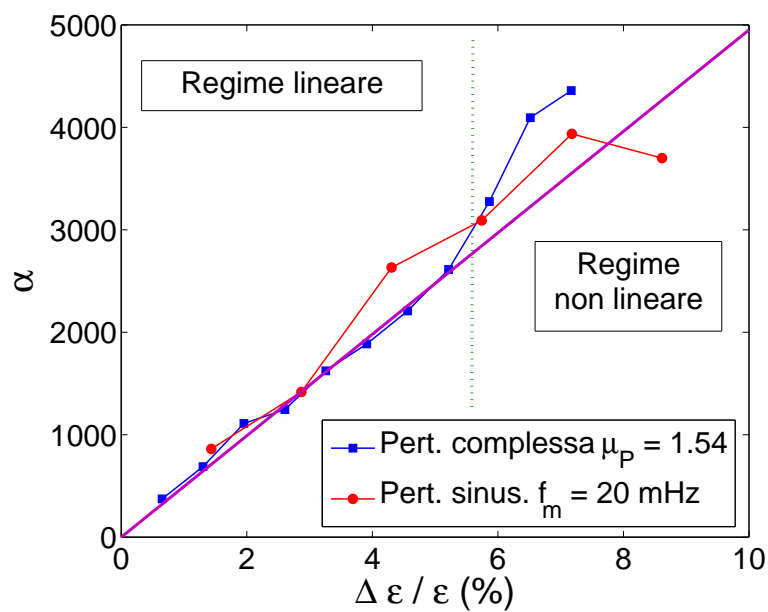


Figura 7.12: Parametro di risposta α in funzione dell'ampiezza percentuale della perturbazione. Con quest'ultima si intende la deviazione standard della modulazione divisa per il valore medio del parametro di controllo. È mostrato l'andamento sia nel caso di modulazione sinusoidale che di modulazione complessa.

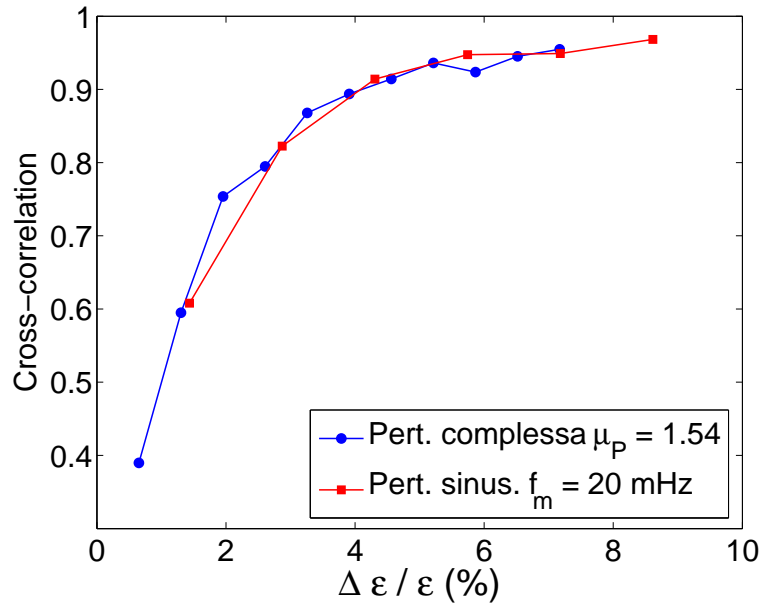


Figura 7.13: Cross-correlation tra la perturbazione ξ_P e le fluttuazioni del sistema perturbato ξ_R in funzione dell'ampiezza percentuale della modulazione.

e uno (μ_S) relativo alle fluttuazioni “non in fase” con la perturbazione (vale a dire ξ_S).

Il primo di questi due coefficienti diventa rapidamente uguale a quello della perturbazione all'aumentare di $\Delta\varepsilon/\varepsilon$. L'altro invece mostra un comportamento diverso: nella zona di risposta lineare ($\Delta\varepsilon/\varepsilon \lesssim 0.06$) rimane vicino al μ del sistema imperturbato, mentre diventa bruscamente uguale a μ_P quando passiamo nella zona di non linearità. Sembra quindi che il sistema nella zona lineare risponda bene a segnali complessi ma non *eredita* globalmente le loro proprietà di scala; queste vengono fatte proprie dal sistema nel regime non lineare.

In fig. 7.15 è riportata invece la cross-correlation tra fluttuazioni del sistema e modulazione complessa per diversi valori di μ_P , avendo fissato $\Delta\varepsilon/\varepsilon \simeq 0.039$. Si può notare come all'aumentare di quest'ultimo indice la correlazione diminuisca, calando inoltre bruscamente per un valore di μ_P molto vicino al parametro di scala del sistema imperturbato, dando luogo ad una specie di “antirisonanza”. Mentre la diminuzione della cross-correlation all'aumentare di μ_P è coerente con la teoria (si veda la fig. 3.1), questa non

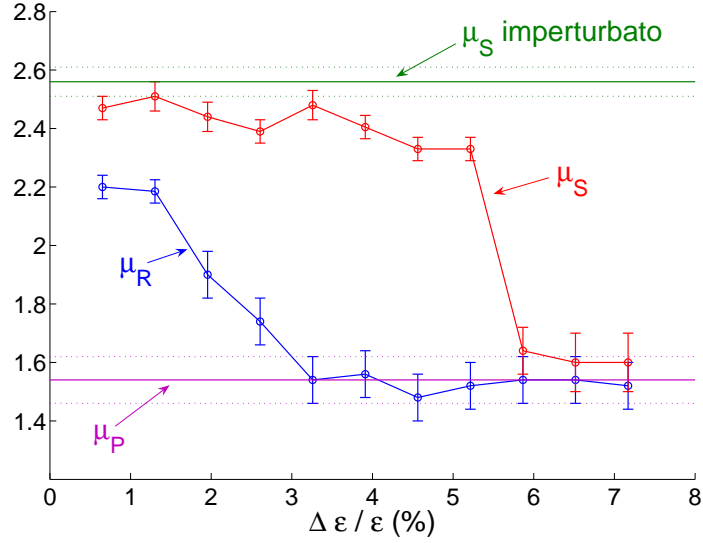


Figura 7.14: Andamento di μ_R (in blu) e μ_S (in rosso) in funzione dell'intensità della perturbazione. Sono inoltre riportati $\mu_P = 1.54 \pm 0.08$ (in viola) e $\mu_S^{imp.} = 2.56 \pm 0.05$ (in verde), con le rispettive barre di errore.

spiega l'origine dell'abbassarsi della correlazione quando i parametri di scala della modulazione e del sistema imperturbato sono vicini.

L'andamento degli indici μ_R e μ_S in funzione di μ_P (sempre per $\Delta\varepsilon/\varepsilon \simeq 0.039$) è invece mostrato in fig. 7.16. Si vede come μ_S rimanga sostanzialmente lo stesso in tutti i casi, vicino al valore imperturbato. μ_R invece è uguale entro l'errore al parametro di scala della perturbazione, tranne che per $\mu_P = 2.87$, quando rimane più basso. Nel regime lineare (dove ci siamo messi), il sistema quindi “trasmette” bene segnali con $\mu_P < \mu_S^{imp.}$, mentre “filtra” gli altri segnali complessi. Non si osservano tuttavia cambiamenti significativi nelle leggi di scala delle fluttuazioni “non in fase”.

Il comportamento fin qui osservato, pur dovendo essere compreso meglio in alcuni aspetti (come per quanto riguarda l'anticorrelazione detta sopra) è abbastanza in linea con la teoria. Quest infatti prevede che nel regime ergodico il sistema risponda a tutti i tipi di stimolo, sia sinusoidali che complessi. Inoltre la risposta a perturbazioni di quest'ultimo tipo è maggiore quanto più μ_P è minore. Se poi si ha $\mu_P > \mu_S^{imp.}$ le proprietà frattali della perturbazione non si osservano quasi più nella risposta, in quanto quelle del sistema diventano dominanti.

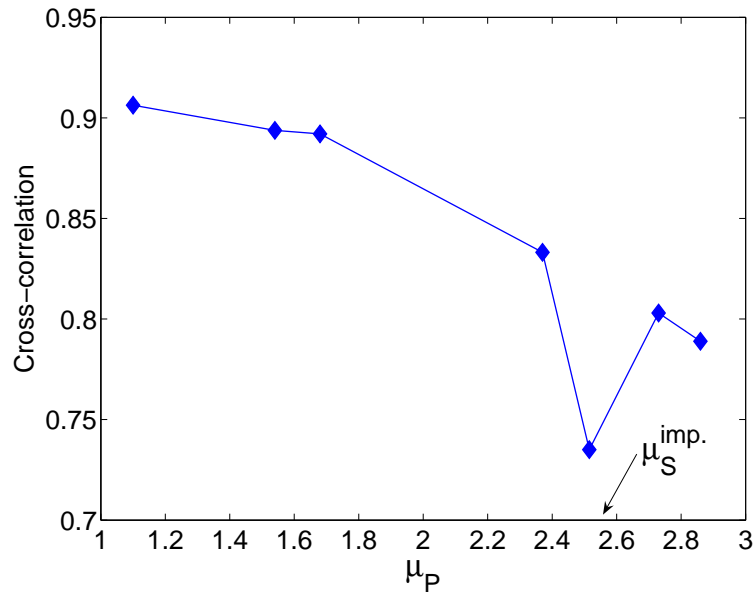


Figura 7.15: Cross-correlation tra la perturbazione e le fluttuazioni del sistema in funzione di μ_P , con $\mu_S^{imp.} = 2.56 \pm 0.05$.

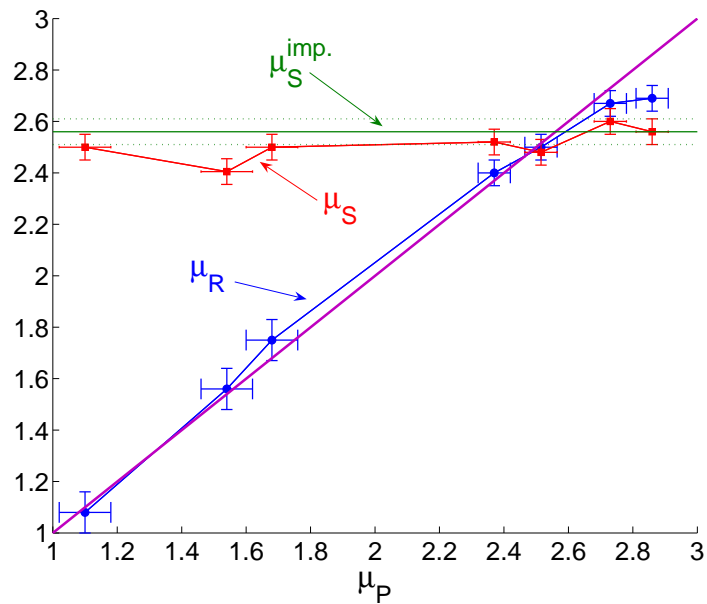


Figura 7.16: μ_R (in blu) e μ_S (in rosso) in funzione di μ_P . In viola è disegnata la bisettrice del I° e III° quadrante, su cui giacciono quasi tutti i punti relativi a μ_R .

Quando la perturbazione agisce sul sistema nel regime non ergodico si osservano comportamenti più anomali, che tuttavia sono in discreto accordo con la teoria.

Tutte le misure riportate di seguito sono state effettuate per $\mu_S^{imp.} = 1.69 \pm 0.08$, avendo cura di iniziare ogni volta con il sistema “giovane”: in pratica si è portato il cristallo liquido nello stato turbolento in contemporanea con l’accensione della perturbazione. Questo accorgimento è stato adottato in modo che le perturbazioni operassero su sistemi uguali (in senso statistico). Infatti la non ergodicità implica il perennial aging (vedi par. 2.3), vale a dire le distribuzioni cambiano continuamente al passare del tempo. Se però ogni volta la perturbazione inizia contemporaneamente alla dinamica del sistema, questa agisce sempre su un sistema giovane. Tutti i sistemi di questo tipo sono poi caratterizzati dalla stessa distribuzione, quella giovane, e le varie misure sono tra loro confrontabili.

In fig. 7.17 è riportato il parametro di risposta α in funzione dell’ampiezza relativa della modulazione. Come previsto (vedi par. 3.3 e 3.5) il sistema risponde di più alla perturbazione complessa che non a quella sinusoidale, dando luogo al fenomeno del *complexity matching*. Tuttavia l’andamento di α , soprattutto per quanto riguarda la perturbazione complessa, non è affatto regolare. Questo è probabilmente dovuto alla non ergodicità, per cui ogni volta il sistema si comporta in modo diverso e solo le medie sull’ensemble seguono un andamento riproducibile.

Le conclusioni sopra dette riguardo alla risposta vengono confermate dall’andamento della cross-correlation, che pure presenta un andamento più regolare (vedi fig. 7.18). Appare comunque chiaro che il sistema risponde di più ad una perturbazione complessa che non ad una sinusoidale, come previsto dalla teoria.

Come nel caso ergodico si sono poi ricavati, al variare dell’intensità della perturbazione, i parametri μ relativi a ξ_R e a ξ_S . Questi sono mostrati in fig. 7.19. Si vede come le fluttuazioni totali e quelle “non in fase” abbiano andamenti simili, in netto contrasto con il caso ergodico. Questo, insieme al comportamento altamente irregolare di α , fa pensare che il modello di eq. 7.3 non sia corretto in questo regime. I risultati legati alla cross-correlation e al comportamento di ξ_R sono tuttavia indipendenti da questo modello.

La cross-correlation tra le fluttuazioni del sistema e una perturbazione

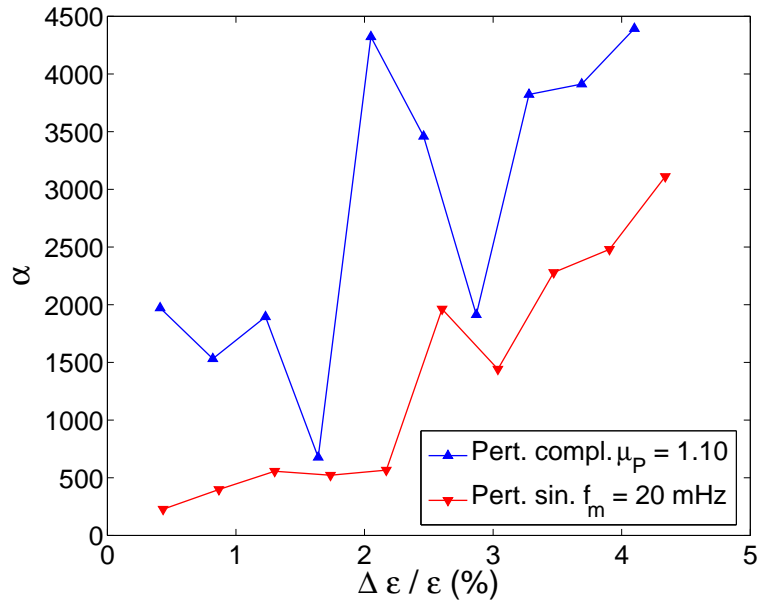


Figura 7.17: Andamento di α in funzione dell'intensità della perturbazione, per una modulazione sinusoidale e per una complessa con $\mu_P = 1.10 \pm 0.08$.

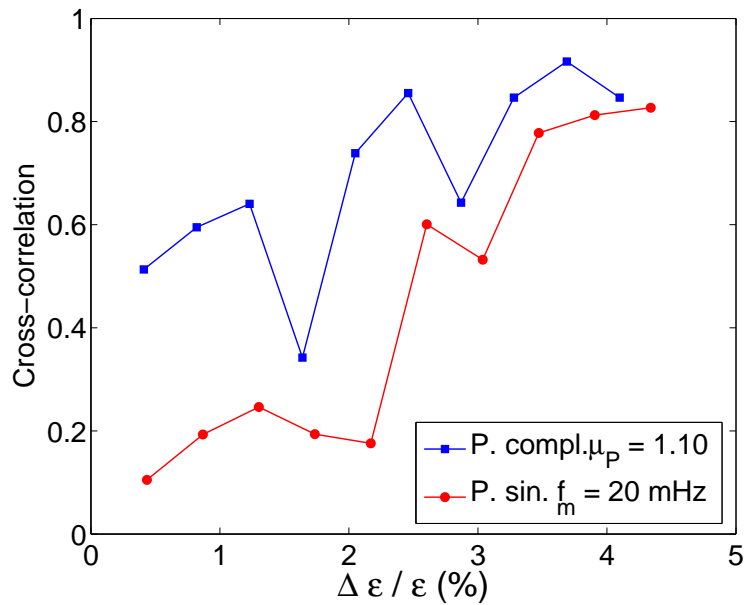


Figura 7.18: Cross-correlation tra fluttuazioni del sistema, sia nel caso in cui questa è complessa che in quello in cui è sinusoidale.

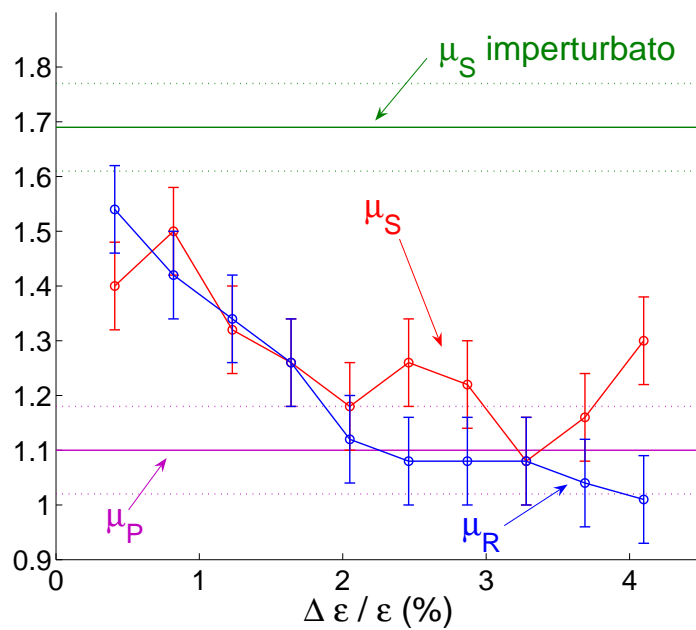


Figura 7.19: Parametri di scala di ξ_R (in blu) e ξ_S (in rosso) per diversi valori dell'intensità della perturbazione. In verde è riportato $\mu_S^{imp.}$ e in viola μ_P , con le rispettive barre di errore.

complessa di intensità $\Delta\varepsilon/\varepsilon \simeq 0.02$ (per valori diversi di μ_P) è riportata in fig. 7.20. Si può notare che la correlazione è più alta quando si ha $\mu_P < \mu_S^{imp.}$ e più bassa altrimenti, in buon accordo con la teoria. Rimane però da capire se la forte scorrelazione, che si osserva per $\mu_P = 2.72 \pm 0.05$, è data dalle fluttuazioni nella misura, legate alla non ergodicità, o ha un suo proprio significato.

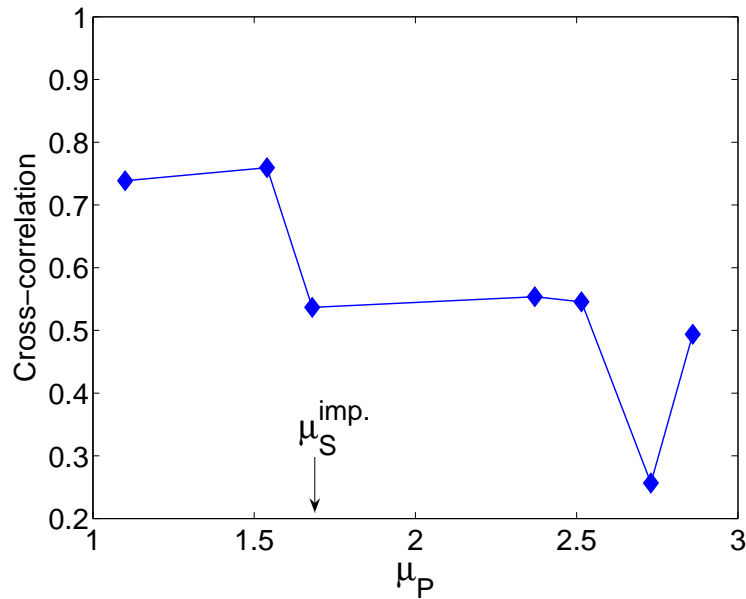


Figura 7.20: Cross-correlation tra fluttuazioni e modulazione complessa al variare di μ_P .

In fig. 7.21 è mostrato l'effetto della perturbazione complessa sulle proprietà di scala del sistema in funzione di μ_P (sempre per $\Delta\varepsilon/\varepsilon \simeq 0.02$). Sono plottati solo i punti relativi a $\mu_P \lesssim \mu_S^{imp.}$, dove il sistema eredita le proprietà di scala della perturbazione. Nel caso di perturbazioni con $\mu_P > \mu_S$ si osservano comportamenti anomali la cui interpretazione non è chiara e che non sono stati riportati. È comunque probabile che anche queste stranezze siano legate al fatto che si è studiata una singola realizzazione in un sistema *non* ergodico.

In conclusione si può dire che nel regime non ergodico le osservazioni sperimentali confermano alcuni aspetti della teoria ma presentano anche deviazioni da questa. Riguardo il rapporto tra l'esperienza e la teoria sono tuttavia necessarie alcune puntualizzazioni:

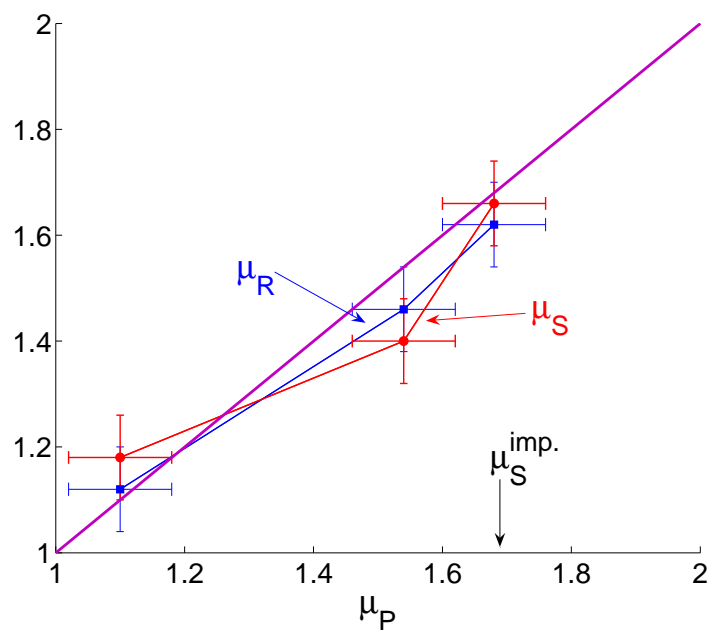


Figura 7.21: μ_S (in rosso) e μ_R (in blu) in funzione di μ_P . In viola è disegnata la bisettrice del I° e III° quadrante, su cui con buona approssimazione giacciono entrambi i parametri riportati. In verde $\mu_S^{imp.}$ con le barre di errore.

- quest'ultima è pensata per perturbazioni che lascino invariato il parametro di scala, cosa che non è garantita nel nostro sistema sperimentale (in cui viene modulato il voltaggio, che a sua volta influenza μ);
- la teoria dà risultati riguardo alle medie di Gibbs: si dovrebbe quindi ripetere la perturbazione molte volte e poi mediare (come si è fatto nel caso dei rilassamenti);
- nel caso di perturbazione complessa, sarebbe necessaria una media anche sull'ensemble delle perturbazioni.

Per la comprensione delle proprietà di risposta del sistema in un regime non ergodico sono quindi necessari ulteriori studi, soprattutto per caratterizzare il sistema non con medie temporali ma con medie sull'ensemble. Questo importante lavoro, che permetterebbe un confronto più quantitativo con la teoria, esula però dalla ricerca svolta in questa tesi. Va comunque ribadito che i risultati qui esposti mostrano in maniera chiara che, nel regime non ergodico, il sistema risponde *molto* di più ad una perturbazione complessa che ad una sinusoidale. Questo fatto è molto significativo e può portare anche ad applicazioni tecnologiche, come filtri “passa-complesso”.

Capitolo 8

Conclusioni e prospettive

In questa tesi si è affrontato il problema della turbolenza debole nel contesto della teoria dei processi di rinnovo non poissoniani. Si è svolto uno studio sperimentale, utilizzando un campione di cristalli liquidi nematici, riguardo il rapporto tra le fluttuazioni del sistema e la sua risposta a stimoli esterni.

Le osservazioni sperimentali hanno evidenziato che, in regime di turbolenza debole, questo rapporto non può essere spiegato dall'usuale teoria della risposta lineare. Le anomalie riscontrate sono tuttavia in buon accordo con un nuovo teorema di fluttuazione e dissipazione, basato sulla teoria dei processi di rinnovo. Questo accordo è un buon indizio del fatto che processi di questo tipo siano alla base dei fenomeni di turbolenza debole.

Come discusso nel cap. 7, inoltre, la teoria dei processi di rinnovo permette di interpretare in modo convincente alcuni comportamenti del sistema. Per esempio la teoria spiega la transizione $FWD \rightarrow DSM1$, la diminuzione del numero di difetti con il tempo, la maggior risposta del sistema ad uno stimolo complesso piuttosto che ad uno sinusoidale.

L'insieme di queste osservazioni permette di dire che la teoria dei processi di rinnovo non poissoniani è un ottimo modello per la turbolenza debole. Questa conclusione è senza dubbio il risultato principale di questa tesi.

L'interazione tra un sistema complesso e un segnale complesso, indicata come *complexity matching*, necessita tuttavia un maggior approfondimento. Le osservazioni sperimentali riguardo a questo fenomeno sono troppo poche per trarre conclusioni quantitative. Qualitativamente si vede un discreto accordo con la teoria, ma c'è ancora bisogno di molto studio.

Dal lavoro fatto si può infine dedurre una considerazione metodologica. Infatti questa ricerca si è svolta nel contesto degli eventi di rinnovo, ma questi eventi, di fatto, non sono mai stati studiati *direttamente*. Ci si è limitati ad osservare le fluttuazioni e le risposte del sistema, due quantità *macroscopiche*, e a confrontarle con il modello. Da questo confronto si sono potute poi trarre conclusioni riguardo ai processi che guidano la dinamica del sistema. Questo tipo di approccio può quindi rivelarsi fruttuoso tutte le volte che la presenza di eventi viene ipotizzata, ma questi non sono direttamente osservabili.

Si può poi leggere il metodo al contrario e chiedersi se alcuni sistemi, in cui si osserva una violazione della tradizionale teoria della risposta lineare, non possano essere guidati da processi di rinnovo.

É molto importante anche un lavoro teorico, che permetta di associare ai numerosi modelli presenti in letteratura relazioni di fluttuazione e dissipazione *osservabili sperimentalmente*.

In conclusione lo studio della risposta a stimoli esterni non è certamente l'unico metodo per lo studio dei sistemi complessi, ma può essere uno strumento molto utile, specialmente da un punto di vista sperimentale.

Appendice A

Codice sorgente per il programma di analisi del filmato

Riporto a conclusione il codice sorgente C per il programma di analisi del filmato che è già stato spiegato brevemente nel par. 5.4. L'applicazione usa le librerie `ffmpeg` [1] e, per la trasformata di Fourier, `FFTW` [17]. Per la compilazione è stato usato `gcc`.

```
/* Xavi2.C */
/* Programma per estrarre da un file video (frame-by-frame) */
/* l'intensità luminosa totale e locale (per 9 pixel su un reticolo 3*3), */
/* e lo spettro spaziale mediato su tutti i frame. */Tutto per un quadrato centrale 576*576) */

/* autore Ludovico Silvestri */

/* Per dettagli sull'utilizzo delle librerie relative a ffmpeg */
/* http://www.dranger.com/ffmpeg/ */
/* Per dettagli sulle librerie fftw della FFT */
/* http://www.fftw.org */

/* Sintassi */
/* Xavi2 [nomefilebias] [nomefiledaanalizzare] [nomefilerisultati] [nomefilespettro]*/

/* File di output */
/* Non ci sono header */
/* Nella prima colonna viene riportata l'intensità luminosa globale, */
/* nelle successive 9 le intensità locali dei pixel */

/* Nel secondo file viene riportata la matrice 576*576 dello spettro */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include <complex.h>
#include <fftw3.h>
#include <libswscale/swscale.h>
```

```

#include <libavcodec/avcodec.h>
#include <libavformat/avformat.h>

int main(int argc, char *argv[]){

    AVFormatContext *pFormatCtx=NULL;
    int i, x, y, j, videoStream, differenza, limsx, limdx, numBytes, frameFinished;
    AVCodecContext *pCodecCtx;
    AVCodec *pCodec;
    AVFrame *pFrame;
    AVFrame *pFrameGRAY;
    uint8_t *buffer, *bias, temp;
    double *immagine, *spettro;
    AVPacket packet;
    double somma, dtemp, dbias;
    double durata;
    double pixel[9];
    FILE *pFile;
    clock_t start, end;
    int64_t numeroframe;
    int sopra = 1;
    struct SwsContext *sCtx;
    fftw_complex *out;
    fftw_plan p;

    /* Inizializzazione della libreria dei codec */
    av_register_all();

    /* Apertura del file di bias */
    if(av_open_input_file(&pFormatCtx, argv[1], NULL, 0, NULL) != 0){
        printf("Errore durante l'apertura del file di bias. Assicurarsi che il file esista e non sia in uso da altra applicazione\n");
        return -1;}

    /* Ricerca delle informazioni sugli stream nel file */
    if(av_find_stream_info(pFormatCtx)<0){
        printf("File di bias non corretto!\n");
        return -1;}

    /* Le informazioni trovate sopra vengono ora stampate */
    dump_format(pFormatCtx, 0, argv[1], 0);

    /* Ricerca del primo stream video presente */
    videoStream = -1;
    for(i=0; i<pFormatCtx->nb_streams; i++){
        pCodecCtx = pFormatCtx->streams[i]->codec;
        if(pCodecCtx->codec_type==CODEC_TYPE_VIDEO) {
            videoStream = i;
            break;}
    }

    if(videoStream==-1){
        printf("Non sono presenti stream validi nel file di bias\n");
        return -1;}

    /* Viene identificato il codec necessario alla decodifica del filmato */

    /* Ricerca del codec nella libreria */
    pCodec = avcodec_find_decoder(pCodecCtx->codec_id);
    if(pCodec==NULL){
        printf("Codec del file di bias non riconosciuto\n");
        return -1;}

    /* Apertura del codec */
    if(avcodec_open(pCodecCtx, pCodec)<0){
        printf("Impossibile aprire il codec per il file di bias\n");
        return -1;}
}

```



```

/* Allocazione delle strutture per memorizzare i frame */
/* Una di queste memorizza i dati in formato nativo (solitamente YUV20) */
/* L'altro in scala di grigi */
pFrame = avcodec_alloc_frame();
pFrameGRAY = avcodec_alloc_frame();
if((pFrame == NULL) || (pFrameGRAY == NULL)){
    printf("Errore durante l'allocazione dei frame\n");
    return -1;}

/* Allocazione dei vettori dove memorizzare i dati in scala di grigio */
/* Non è necessario ripetere l'operazione per i dati nativi */
/* perché viene già fatto dalla funzione avcodec_decode_video */
/* Il vettore buffer serve per la memorizzazione temporanea, bias */
/* invece serve per il confronto successivo con gli altri dati */
numBytes = avpicture_get_size(PIX_FMT_GRAY8, pCodecCtx->width, pCodecCtx->height);
buffer = (uint8_t *)av_malloc(numBytes*sizeof(uint8_t));
avpicture_fill((AVPicture *)pFrameGRAY, buffer, PIX_FMT_GRAY8, pCodecCtx->width, pCodecCtx->height);

/* bias viene allocato come matrice quadrata, va a rappresentare la parte centrale */
/* del filmato. QUESTA PARTE DEL CODICE FUNZIONA SOLO SE LA LARGHEZZA E' */
/* MAGGIORE DELL'ALTEZZA. Vengono poi calcolati gli estremi del quadrato da rappr. */
bias = (uint8_t *)malloc((pCodecCtx->height)*(pCodecCtx->height)*sizeof(uint8_t));

/* Individuazione dei margini della figura quadrata centrale */
differenza = pCodecCtx->width - pCodecCtx->height;
if(differenza<0){
    printf("Filmato di bias con proporzioni non corrette!\n");
    return(-1);}
limsx = differenza/2;
limdx = limsx + pCodecCtx->height;

/* Lettura del Sws Context: servirà per la funzione di riscaldamento tra YUV e GRAYSCALE */
sCtx = (struct SwsContext *)sws_getContext(pCodecCtx->width, pCodecCtx->height, pCodecCtx->pix_fmt,
pCodecCtx->width, pCodecCtx->height, PIX_FMT_GRAY8, 1, NULL, NULL, NULL);

i=0;

/* Lettura dei frame del video di bias */
while(i<2){

    /* Viene intanto letto un pacchetto alla volta */
    av_read_frame(pFormatCtx, &packet);

    /* Se il pacchetto è relativo allo stream video viene convertito */
    if(packet.stream_index==videoStream){
        avcodec_decode_video(pCodecCtx, pFrame, &frameFinished, packet.data, packet.size);

        /* Raggiunta la fine di un frame, viene operata la conversione */
        /* tra il formato nativo e quello in scala di grigi */
        if(frameFinished){
            sws_scale(sCtx, pFrame->data, pFrame->linesize, 0,pCodecCtx->height, pFrameGRAY->data, pFrameGRAY->linesize);
            i++;

        /* Viene memorizzato in bias il secondo frame */
        if(i==2){
            for(y=0; y<(pCodecCtx->height); y++){
                for(x=limsx; x<limdx; x++){
                    temp = *(pFrameGRAY->data[0] + y*(pFrameGRAY->linesize[0] + x*sizeof(uint8_t)));
                    /* Poiché i dati in bias serviranno per dividere gli */
                    /* altri frames, bisogna evitare la presenza di zeri */
                    /* (che solitamente sono 2-3 in tutta l'immagine) */
                    if (temp==0) temp = 1;
                    bias[x-limsx+(y*(pCodecCtx->height))] = temp;
                }
            }
        }
    }
}
}
}
}

```

```

    /* Deallocazione della memoria necessaria al pacchetto */
    av_free_packet(&packet);
}

/* Deallocazione della memoria utilizzata dalle varie strutture */
av_free(buffer);
av_free(pFrameGRAY);
av_free(pFrame);

/* Chiusura del codec e del file di bias */
avcodec_close(pCodecCtx);
av_close_input_file(pFormatCtx);

/* Lettura del file vero e proprio: vengono ripetute */
/* 'mutatis mutandis' le stesse operazioni già fatte */
/* per il file di bias. Per i commenti vedere sopra */
if(av_open_input_file(&pFormatCtx, argv[2], NULL, 0, NULL) != 0){
    printf("Errore durante l'apertura del file. Assicurarsi che il file esista e non sia in uso da altra applicazione\n");
    return -1;}

if(av_find_stream_info(pFormatCtx)<0){
    printf("File non corretto!\n");
    return -1;}

dump_format(pFormatCtx, 0, argv[2], 0);

videoStream = -1;
for(i=0; i<pFormatCtx->nb_streams; i++){
    if(pFormatCtx->streams[i]->codec->codec_type==CODEC_TYPE_VIDEO) {
        videoStream = i;
        break;}

if(videoStream==-1){
    printf("Non sono presenti stream validi nel file\n");
    return -1;}

pCodecCtx = pFormatCtx->streams[videoStream]->codec;

pCodec = avcodec_find_decoder(pCodecCtx->codec_id);
if(pCodec==NULL){
    printf("Codec non riconosciuto\n");
    return -1;}

if(avcodec_open(pCodecCtx, pCodec)<0){
    printf("Impossibile aprire il codec\n");
    return -1;}

pFrame = avcodec_alloc_frame();
pFrameGRAY = avcodec_alloc_frame();
if((pFrame == NULL) || (pFrameGRAY == NULL)){
    printf("Errore durante l'allocazione dei frame\n");
    return -1;}

numBytes = avpicture_get_size(PIX_FMT_GRAY8, pCodecCtx->width, pCodecCtx->height);
buffer = (uint8_t *)av_malloc(numBytes*sizeof(uint8_t));
avpicture_fill((AVPicture *)pFrameGRAY, buffer, PIX_FMT_GRAY8, pCodecCtx->width, pCodecCtx->height);

/* Allocazione della memoria necessaria alla memorizzazione */
/* dell'immagine tolto il bias. Anche questa e' quadrata */
immagine = (double *)fftw_malloc((pCodecCtx->height)*(pCodecCtx->height)*sizeof(double));
if(immagine == NULL){
    printf("Errore di allocazione memoria immagine\n");
    return -1;}

/* Allocazione della memoria necessaria per memorizzare lo spettro spaziale */
out = (fftw_complex *) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex)*(pCodecCtx->height)*((pCodecCtx->height)/2 + 1));

spettro = (double *)malloc((pCodecCtx->height)*((pCodecCtx->height)/2 + 1)*sizeof(double);

```

```

if(spettro == NULL){
    printf("Errore di allocazione memoria spettro\n");
    return -1;}
/* Lettura del Sws Context: servirà per la funzione di riscalamento tra YUV e GRAYSCALE */
sCtx = (struct SwsContext *)sws_getContext(pCodecCtx->width, pCodecCtx->height, pCodecCtx->pix_fmt,
    pCodecCtx->width, pCodecCtx->height, PIX_FMT_GRAY8, 1, NULL, NULL, NULL);

numeroframe = (pFormatCtx->duration);
if(numeroframe == 0){
    printf("nessun frame presente!\n");
    return -1;}

/* Inizializzazione del plan per la trasformata di Fourier: */
/* servirà a calcolarla velocemente */
p = fftw_plan_dft_r2c_2d(pCodecCtx->height, pCodecCtx->height, immagine, out, FFTW_PATIENT);

for(x=0; x<pCodecCtx->height; x++) {
    for(y=0; y<((pCodecCtx->height)/2 +1); y++) {
        spettro[y +x*((pCodecCtx->height)/2 +1)] = 0.0;
    }
}

/* Apertura del primo file dove scrivere i dati in uscita */
pFile = fopen(argv[3], "w");

while(av_read_frame(pFormatCtx, &packet)==0){
    if(packet.stream_index==videoStream){
        avcodec_decode_video(pCodecCtx, pFrame, &frameFinished, packet.data, packet.size);
        if(frameFinished){

/* somma l'intensità relativa totale */
somma = 0.0;
if(sopra==1) start = clock();

sws_scale(sCtx, pFrame->data, pFrame->linesize, 0, pCodecCtx->height, pFrameGRAY->data, pFrameGRAY->linesize);
for(x=limsx; x<limdx; x++){
    for(y=0; y<(pCodecCtx->height); y++){
        temp = *(pFrameGRAY->data[0] + y*(pFrameGRAY->linesize[0] + x*sizeof(uint8_t)));
        dbias = (double)bias[x-limsx+(y*(pCodecCtx->height))];

        /* Guardia per prevenire errori del cast */
        if(dbias == 0.0) dbias = 1.0;

        /* Divisione del pixel 'assoluto' per il pixel del bias */
        dtemp = ((double)temp)/dbias;

        /* Incremento della somma e memorizzazione */
        /* del pixel 'relativo' in immagine */
        if(dtemp>1.6) dtemp=1.6;
        immagine[y + ((x-limsx)*(pCodecCtx->height))] = dtemp;

        /* Memorizzazione dei pixel nel vettore omonimo */
        if (x == 179 && y == 143) pixel[0] = dtemp;
        if (x == 179 && y == 287) pixel[1] = dtemp;
        if (x == 179 && y == 431) pixel[2] = dtemp;
        if (x == 359 && y == 143) pixel[3] = dtemp;
        if (x == 359 && y == 287) pixel[4] = dtemp;
        if (x == 359 && y == 431) pixel[5] = dtemp;
        if (x == 539 && y == 143) pixel[6] = dtemp;
        if (x == 539 && y == 287) pixel[7] = dtemp;
        if (x == 539 && y == 431) pixel[8] = dtemp;

    }
}
}

```

```

/* Calcolo dell'intensità luminosa totale*/
for(j=0; j<((pCodecCtx->height)*(pCodecCtx->height)); j++) somma = somma + immagine[j];

/* Stampa su file dei dati */
fprintf(pFile, "%f ", somma);
for(j=0; j<8; j++) fprintf(pFile, "%f ", pixel[j]);
fprintf(pFile, "%f\n", pixel[8]);

/* La somma viene ridotta a media e sottratta dall'immagine */
somma = somma/((double)((pCodecCtx->height)*(pCodecCtx->height)));
for(j=0; j<((pCodecCtx->height)*(pCodecCtx->height)); j++){
    dtemp = immagine[j]-somma;
    immagine[j] = dtemp;
}

/* esecuzione della FFT */
fftw_execute(p);

/* lo spettro di potenza viene incrementato */
for(x=0; x<pCodecCtx->height; x++) {
    for(y=0; y<((pCodecCtx->height)/2 +1); y++) {
        dtemp = cabs((complex) out[y +x*((pCodecCtx->height)/2 +1)]);
        spettro[y +x*((pCodecCtx->height)/2 +1)] += (dtemp*dtemp)/((double)numeroframe);
    }
}

if(sopra!=0){
    sopra = sopra +1;
    if(sopra == 52){
        end = clock();
        durata = ((double)(end-start))/(50.0*CLOCKS_PER_SEC);
        printf("L'elaborazione richiede approssimativamente %f secondi per frame\n",durata);
        sopra = 0;
    }
}

}
}
}
av_free_packet(&packet);
}

fclose(pFile);

/* Apertura del secondo file dove scrivere i dati in uscita */
pFile = fopen(argv[4], "w");

for(x=0; x<pCodecCtx->height; x++) {
    for(y=0; y<((pCodecCtx->height)/2 +1); y++) {
        fprintf(pFile, "%f ",spettro[y +x*((pCodecCtx->height)/2 +1)]);
    }
    fprintf(pFile, "\n");
}

fclose(pFile);
fftw_destroy_plan(p);
fftw_free(immagine);
av_free(buffer);
av_free(pFrameGRAY);
av_free(pFrame);
avcodec_close(pCodecCtx);
av_close_input_file(pFormatCtx);

return 0;
}

```

Bibliografia

- [1] An ffmpeg and sdl tutorial. <http://www.dranger.com/ffmpeg>.
- [2] P. Allegrini, G. Aquino, P. Grigolini, L. Palatella, and A. Rosa. Generalized master equation via aging continuous-time random walks. *Phys. Rev. E*, 68(5):056123, 2003.
- [3] P. Allegrini, G. Aquino, P. Grigolini, L. Palatella, and A. Rosa. Generalized master equation via aging continuous-time random walks. *Phys. Rev. E*, 68(5):056123, 2003.
- [4] P. Allegrini, G. Ascolani, M. Bologna, and P. Grigolini. Renewal aging and linear response. cond-mat/0602281, submitted to *Phys. Rev. E*, 2006.
- [5] P. Allegrini, J. Bellazzini, G. Bramanti, M. Ignaccolo, P. Grigolini, and J. Yang. Aging induced multifractality. cond-mat/0111517, 2001.
- [6] P. Allegrini, J. Bellazzini, G. Bramanti, M. Ignaccolo, P. Grigolini, and J. Yang. Scaling breakdown: a signature of aging. *Phys. Rev. E*, 66(1):015101, 2002.
- [7] P. Allegrini, M. Bologna, P. Grigolini, and M. Lukovic. Response of complex systems to complex perturbation: Complexity matching. cond-mat/0608341, 2006.
- [8] P. Allegrini, M. Bologna, P. Grigolini, and B.J. West. Response of complex systems to complex perturbation: the complexity matching effect. cond-mat/0612303, 2006.
- [9] P. Allegrini, M. Bologna, P. Grigolini, and B.J. West. Fluctuation-dissipation theorem for event-dominated processes. *Phys. Rev. Lett.*, 99(1):010603, 2007.

- [10] P. Allegrini, P. Grigolini, L. Palatella, A. Rosa, and B.J. West. Non-poisson processes: Regression to equilibrium versus equilibrium correlation functions. *Physica A*, 347:268–288, 2005.
- [11] P. Allegrini, P. Grigolini, L. Palatella, and B.J. West. Non-poisson dichotomous noise: Higher-order correlation functions and aging. *Phys. Rev. E*, 70(4):046118, 2004.
- [12] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59(4):381–384, 1987.
- [13] G. Bel and E. Barkai. Weak ergodicity breaking in the continuous-time random walk. *Phys. Rev. Lett.*, 94(24):240602, 2005.
- [14] F. Bianco, M. Lucchesi, S. Capaccioli, L. Fronzoni, and P. Allegrini. Fluctuations in electrohydrodynamic instability. In *UNSOLVED PROBLEMS OF NOISE AND FLUCTUATIONS: UPoN 2005: Fourth International Conference on Unsolved Problems of Noise and Fluctuations in Physics, Biology, and High Technology*, volume 800 of *AIP Conf. Proc.*, pages 64–69, 2005.
- [15] P.G. de Gennes and J. Prost. *The Physics of Liquid Crystals*. International Series of Monograph on Physics. Clarendon Press, Oxford, second edition, 1993.
- [16] A. Einstein. Über die von molekular-kinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905.
- [17] M. Frigo and S.G. Johnson. The fastest fourier transform in the west. <http://www.fftw.org>.
- [18] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov. *Limit Distributions for Sums of Random Variables*. Addison-Wesley, Cambridge, 1954.
- [19] W.I. Goldburg, Y.Y. Goldschmidt, and H. Kellay. Fluctuation and dissipation in liquid-crystal electroconvection. *Phys. Rev. Lett.*, 87(24):245502, 2001.
- [20] P. Grigolini. Comunicazione privata.
- [21] P. Grigolini. Lecture notes.

- [22] P.H. Handel. Quantum 1/f noise integrated bibliography. <http://www.umsl.edu/~handelp/QuantumBib.html>.
- [23] W.J. Helfrich. Conduction-induced alignment of nematic liquid crystals: Basic model and stability considerations. *J. Chem. Phys.*, 51:4092, 1969.
- [24] H.E. Hurst, R.P. Black, and Y.M. Simaika. *Long-term Storage: an Experimental Study*. Constable & Co., London, 1965.
- [25] S. Kai and W. Zimmermann. Pattern dynamics in the electrohydrodynamics of nematic liquid crystals. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 99: 458–492, 1989.
- [26] A.K. Kalashyan, M. Buiatti, and P. Grigolini. Ergodicity breakdown and scaling from single sequences. *Chaos, Solitons and Fractals*, in press.
- [27] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1991.
- [28] A. Levina, J.M. Herrmann, and T. Geisel. Dynamical synapses causing self-organized criticality in neural networks. *Nature Physics*, 3:857–860, 2007.
- [29] W. Li. A bibliography on 1/f noise. <http://www.nslj-genetics.org/wli/1fnoise/>.
- [30] P. Manneville. Intermittency, self similarity and spectrum in dissipative dynamical systems. *J. Physique*, 41:1235–43, 1980.
- [31] E. W. Montroll and G. H. Weiss. Random walks on lattices. ii. *J. Math. Phys.*, 6:167, 1965.
- [32] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. i. *Phys. Rev.*, 37:405, 1931.
- [33] C.K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Phys. Rev. E*, 49(2):1685–1689, 1994.

- [34] J.G. Proakis and D.K. Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 2006.
- [35] N. Scafetta and P. Grigolini. Scaling detection in time series: Diffusion entropy analysis. *Phys. Rev. E*, 66(3):036130, 2002.
- [36] K.A. Takeuchi, M. Kuroda, H. Chaté, and M. Sano. Directed percolation criticality in turbulent liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 99:234503, 2007.
- [37] T. Tóth-Katona, J.R. Cressman, W.I. Goldberg, and J.T. Gleeson. Persistent global power fluctuations near a dynamic transition in electroconvection. *Phys. Rev. E*, 68(3):030101, 2003.
- [38] T. Tóth-Katona and J.T. Gleeson. Conductive *vs.* dielectric defects and anisotropic *vs.* isotropic turbulence in liquid crystals - electric power fluctuations measurements. *Phys. Rev. E*, 69(1):016302, 2004.
- [39] R. Williams. Domains in liquid crystals. *J. Chem. Phys.*, 39:384, 1963.

Ringraziamenti

Questa tesi è il frutto di un lavoro di ricerca che ha coinvolte molte persone.

Desidero ringraziare anzitutto il mio relatore, il prof. Leone Fronzoni, per la disponibilità con cui mi ha seguito, per la sua sincera curiosità riguardo ai meccanismi della natura e per i suoi dubbi, che mi hanno spinto a cercare sempre una comprensione migliore.

Un'altra persona che voglio ringraziare particolarmente è il dott. Paolo Allegrini, un fisico teorico dalla mentalità molto "sperimentale". Senza tante illuminanti conversazioni con lui questa tesi non sarebbe quella che è.

Un sentito grazie anche al prof. Paolo Grigolini per il suo entusiasmo, al dott. Paolo Paradisi e a tutto il gruppo di ricerca, che mi ha permesso di svolgere questo lavoro in un ambiente molto stimolante.

Ci sono altre due persone il cui apporto è stato determinante per la riuscita di questa tesi, e sono Federico Quaglierini, del centro di calcolo del Dipartimento, e Marco Bianucci, il tecnico dei laboratori. Anche a loro va un grande grazie.

Ai miei genitori va il grazie più grande, anche a nome di tutti quelli che quotidianamente non dico loro, per tutto il sostegno e l'affetto che mi hanno dato, e per ciò che oggi sono.

Ringrazio anche i miei fratelli e tutta la mia famiglia.

Desidero ringraziare anche tutti i miei compagni di studio, che non elenco per mancanza di spazio. Grazie per il loro aiuto e soprattutto per la loro amicizia. Ringrazio tantissimo anche tutti i miei amici.

Un grazie infinito ad Elisabetta, ultima in questa pagina ma prima nel mio cuore, per l'amore e la comprensione oltre ogni limite che mi ha dato in questi anni.