

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

Un nuovo modo di contare l'infinito

CANDIDATO
Lorenzo Luperi Baglini

RELATORE
Prof. Mauro Di Nasso

CONTRORELATORE
Prof. Vieri Benci

ANNO ACCADEMICO 2007/2008

Indice

1	Strumenti Chiave	5
1.1	Assiomi del concetto di grandezza	5
1.2	Cardinali ed Ordinali	9
1.3	Ultrafiltri	14
1.4	Basi della analisi non standard	19
2	Numerosità degli insiemi numerabili	25
2.1	Insiemi indicizzati	25
2.2	L'insieme delle numerosità è un semianello ordinato	29
2.3	Interi non standard come modello delle numerosità	31
2.4	Indipendenza da ZFC	36
2.5	Esempi	37
3	Numerosità degli insiemi finito dimensionali	39
3.1	Spazi finito-dimensionali su rette	39
3.2	Modelli algebrici delle numerosità	45
3.3	Modelli non standard	51
3.4	Estensioni	54
4	Numerosità Ordinali	66
4.1	Ricerca degli assiomi	66
4.2	Proprietà della numerosità	74
4.3	Modelli della numerosità	79
4.4	Metodo alternativo	84
5	Conclusioni	96
5.1	Problemi Aperti	96
5.2	Sviluppi futuri	97
	Bibliografia	99

Introduzione

In matematica, due sono le teorie classiche riguardanti la grandezza degli insiemi definita ‘contando’ il numero di elementi: la teoria delle cardinalità e la teoria degli ordinali. Entrambe, pur consentendo di definire in maniera naturale delle operazioni di somma e prodotto sulle loro classi di grandezze, presentano però dei problemi da un punto di vista algebrico, generati dalle proprietà di assorbimento di queste operazioni. Ad esempio, la somma tra numeri ordinali non soddisfa la legge di cancellazione a destra, mentre per le cardinalità, ogni qual volta si abbiano a, b cardinali infiniti, vale $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$.

In questa tesi si vuol esporre una nuova teoria della grandezza, cui daremo il nome di numerosità, la cui classe delle grandezze presenti proprietà algebriche analoghe a quelle di \mathbb{N} . Inizialmente vengono identificate le proprietà intuitive legate al concetto di ‘grandezza’ di un insieme definita attraverso il numero di elementi. Centrali nella discussione sono le Nozioni Comuni di Euclide, regole formulate dal grande matematico ellenico per poter confrontare le figure geometriche e che, rivisitate in termini moderni, fanno da sfondo a tutte le proprietà che si considerano necessarie per avere una numerosità. In particolare, un principio che si richiede sia sempre verificato è il Principio di Aristotele: l’intero è più grande della parte. Osserviamo che questa proprietà è soddisfatta dalle cardinalità finite ma non da quelle infinite, cioè le cardinalità non sono numerosità. Le altre proprietà che vengono isolate permettono di ottenere sempre dei semianelli positivi parzialmente ordinati come insiemi di rappresentanti delle grandezze.

Si introduce poi il concetto di ultrafiltro su di un insieme, dimostrando il Teorema di Tarski e richiamando la proprietà della intersezione finita; una attenzione particolare è dedicata a due classi di ultrafiltri su \mathbb{N} , precisamente i selettivi e i P-Point. Si fa poi una breve introduzione ai concetti di fondo della analisi non standard, dando le definizioni di universo matematico, superstruttura su di un insieme, mappa star tra universi, principio di transfer ed ultraprodotto di strutture, e si enuncia il Teorema di Los; si definiscono infine i numeri ipernaturali $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$, che rappresentano la classe di strutture da

cui si attinge per ottenere modelli semplici delle numerosità.

Il primo caso che viene affrontato è quello degli insiemi numerabili. L'idea è di contare il numero di elementi per approssimazioni finite: se A è numerabile, si definisce una indicizzazione l_A dei suoi elementi, cioè una funzione finita ad uno che associ ad ogni elemento di A un numero naturale, e si introduce la counting function di A , definita come $\phi_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \phi_A(n) = |\{a \in A \mid l_A(a) \leq n\}|$. Questa successione rappresenta, in un senso che viene ben specificato, la grandezza dell'insieme, e si dimostra che come classe di rappresentanti di queste grandezze può essere presa una iperestensione specifica di \mathbb{N} . Si fa poi vedere l'equivalenza tra esistenza di una funzione numerosità ed esistenza di ultrafiltri selettivi, da cui segue il risultato sorprendente di indipendenza della esistenza delle numerosità da ZFC. Nel capitolo successivo si introduce il concetto di insieme finito dimensionale di punti costruito a partire da una retta base; sfruttando la struttura particolarmente ricca di questa classe di insiemi, si definiscono delle funzioni numerosità soddisfacenti a tutti i principi di Euclide. Si fornisce poi un modello algebrico delle numerosità nel caso particolare degli insiemi costruiti a partire da rette numerabili, utilizzando tecniche simili a quelle del capitolo precedente, e si fa vedere come a ciascuno di questi modelli algebrici possa essere fatta corrispondere una opportuna iperestensione dei numeri naturali del tipo $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$. In particolare, si osserva che gli ultrafiltri necessari per queste costruzioni non debbano più essere necessariamente selettivi, anche se devono verificare una proprietà 'quasi'-selettiva. Infine, si dimostra come sia possibile costruire numerosità su classi sempre più ampie di insiemi partendo da altre definite esclusivamente su parti di queste.

Nell'ultimo capitolo si affronta il problema di definire una funzione numerosità su opportuni sottoinsiemi degli ordinali. Le questioni principali da affrontare sono la determinazione delle isometrie, la definizione di un prodotto tra insiemi che sostituisca il cartesiano (necessaria perchè il prodotto cartesiano di due insiemi di ordinali non è un insieme di ordinali) e la definizione di regole di equinumerosità. Per questo si studiano le proprietà di scrittura dei numeri ordinali: in particolare, si introducono gli ordinali aritmeticamente chiusi, i moltiplicativamente chiusi, i quadrabili e le scritture in forma polinomiale moltiplicativa. Dopo aver isolato le 5 proprietà che definiscono la numerosità per ordinali, si passa alla costruzione di un modello utilizzando le solite tecniche di approssimazione finita; la proprietà centrale di questa costruzione è la possibilità di scrivere ogni numero ordinale come polinomio, a coefficienti ed esponenti naturali, avente come 'variabili' degli ordinali moltiplicativamente chiusi. Infine, sfruttando un ordinamento della retta ordinale costruito a partire dalle forme normali di Cantor, si definisce una numerosità per classi di insiemi indicizzati con indici ordinali, generaliz-

zando quelle definite sulle classi di insiemi numerabili; ci si concentra poi sul comportamento di questa numerosità rispetto ai sottoinsiemi degli ordinali, e si ricercano proprietà che assicurino la coerenza con le numerosità ordinali precedentemente definite.

Nelle conclusioni vengono esposti i possibili sviluppi futuri di questa teoria, e si espongono alcuni dei problemi aperti sfiorati nel corso della tesi.

Vorrei ringraziare particolarmente i professori Vieri Benci, Marco Forti e Mauro Di Nasso: il professor Benci per essere stato il primo a farmi conoscere l'argomento di questa tesi con un suo seminario tenuto presso la scuola estiva di logica 2007 dell'AILA; il professor Forti per alcune spiegazioni illuminanti riguardanti soprattutto le proprietà degli ultrafiltri; il professor Di Nasso per avermi seguito, indirizzato ed aiutato tanto nello sviluppo della tesi triennale quanto di questa tesi specialistica.

Capitolo 1

Strumenti Chiave

In questo primo capitolo si introducono le idee di fondo della tesi. La parte centrale è data dalle nozioni comuni di Euclide, regole formulate dal matematico greco e che riproducono le idee intuitive collegate al concetto di grandezza di un insieme. Si enunciano poi le proprietà delle grandezze, e si ripercorrono velocemente le proprietà delle cardinalità e degli ordinali; infine, si introducono i concetti di analisi non standard e di ultrafiltro su di un insieme, studiando nel dettaglio le formulazioni equivalenti della selettività per ultrafiltri sui naturali.

1.1 Assiomi del concetto di grandezza

Volendo sviluppare una teoria delle grandezze, si deve tener di conto di alcuni principi generali. Questi principi sono presenti già nel libro primo degli Elementi di Euclide. L'intento originario di Euclide era quello di compiere uno studio della geometria, ed uno dei cardini di questo studio avrebbe dovuto essere il confronto fra figure.

Per questo decise di porre, accanto ai postulati riguardanti angoli, punti e rette, dei principi comuni aventi come argomento le grandezze:

- E1) Cose uguali ad una stessa cosa sono pure uguali tra loro;
- E2) Se uguali sono aggiunti ad uguali, i risultanti sono uguali;
- E3) Se uguali sono sottratti da uguali, i rimanenti sono uguali;
- E4) Oggetti che si applichino esattamente l'uno sull'altro hanno stessa grandezza;
- E5) L'intero è più grande della parte.

Euclide mutuò queste idee dalla geometria. Lo stesso Niccolò Tartaglia (soprannome di Niccolò Fontana, 1499 ca-1557, primo traduttore in italiano degli Elementi) nei suoi commenti dà una spiegazione di queste nozioni in termini di confronti fra segmenti e tra angoli. E conclude la discussione affermando che questi concetti, originariamente formulati per la geometria, possono applicarsi ad una qualsiasi nozione di grandezza.

In effetti, consideriamo la grandezza degli insiemi finiti definita tramite il loro numero di elementi. I principi E1 ed E5 appaiono immediatamente come naturali. Lo stesso può dirsi degli E2 ed E3 se si consideri la somma definita tramite unioni disgiunte e la sottrazione definita tramite differenza insiemistica. La nozione E4 merita una discussione approfondita. Infatti, appare immediatamente verificata se si intende l' 'applicarsi esattamente l'una sull'altra' in termini di esistenza di una applicazione bigettiva tra i due insiemi. Questo è, in effetti, il metodo moderno di intendere questa nozione, mentre Euclide formulandola intendeva l'applicarsi esattamente in termini di possibilità di sovrapposizione esatta di due figure. Se vogliamo, in Euclide le trasformazioni rigide del piano (traslazioni e rotazioni) svolgono la stessa funzione di quella che, per noi, fanno le trasformazioni bigettive.

E4 quindi ci dice che oggetti che si possano mettere in corrispondenza tramite una isometria devono avere la stessa grandezza. A seconda della classe di elementi su cui si voglia definire un concetto di grandezza, e a seconda del concetto stesso considerato, si dovranno pure fissare delle applicazioni tra gli oggetti della classe che svolgano il ruolo di isometrie.

Si vede immediatamente che, in generale, non sarà possibile mantenere tutte le bigezioni come isometrie, in maniera analoga a quello che si fa nella teoria delle cardinalità. Avere ogni bigezione come isometria cozza con il principio E5 tanto quanto con il principio E3. Infatti, si supponga di volere dare una grandezza ad un insieme infinito. Essendo questo infinito, potrà essere messo in bigezione con un suo sottoinsieme, quindi avrà stessa grandezza di questo, ed il principio E5 risulta negato. Per negare E3, sia A l'insieme dei numeri naturali dispari, e $B = \{1\}$. Entrambi, pur non avendo evidentemente la stessa grandezza a causa di E5, si ottengono togliendo dai naturali degli insiemi della stessa cardinalità.

Se vogliamo preservare E5, dobbiamo escludere da ogni possibile classe di isometrie tutti gli automorfismi aventi orbita infinita. Infatti, se f è un'applicazione avente un'orbita infinita, diciamo realizzata a partire da un certo x , sia $F_x = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$. F_x è infinito, ed $f(F_x)$ è un suo sottoinsieme proprio, che quindi per E5 deve essere più piccolo di lui. Dunque f non può essere una isometria.

Come vedremo, quello di scegliere le opportune isometrie sarà un problema delicato.

Uno degli intenti di questa tesi è di fornire nozioni di grandezza per opportune classi di insiemi. Per questo, diamo una riformulazione dei principi E1-E5 in termini insiemistici. Indichiamo con $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ la relazione ‘A ha la stessa grandezza di B’. Supponiamo inoltre che ogni grandezza estenda la cardinalità degli insiemi finiti:

FIN) Se F è un insieme finito la sua grandezza coincide con la sua cardinalità.

Il principio E1 si riformula con:

EQ) $A \approx B, B \approx C \Rightarrow A \approx C$.

Facendo la naturale assunzione che $A \approx B \Rightarrow B \approx A$, EQ afferma che \approx è una relazione di equivalenza.

I principi E2 ed E3 parlano di operazioni di somma e differenza. Nel caso degli insiemi, è naturale far corrispondere la somma alla unione disgiunta, la differenza al complemento relativo. Quindi E2 ed E3 si possono riformulare come:

SP) $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2, A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow A_1 \cup B_1 \approx A_2 \cup B_2$,

DF) $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2, B_1 \subseteq A_1, B_2 \subseteq A_2 \Rightarrow A_1 \setminus B_1 \approx A_2 \setminus B_2$.

Del principio E4 si è già parlato, ed una riformulazione sarà fornita a seconda dei casi, se necessaria.

Il principio E5, che chiameremo anche **principio aristotelico**, e denoteremo come AP (da Aristotelian Principle), presuppone la possibilità di dare una comparazione tra le grandezze che sia compatibile con la relazione \approx , e che estenda l’inclusione insiemistica. Denotando con $<$ il preordine tra le grandezze, il principio E5 può riformularsi come

AP) 1) $A_2 \approx A_1 < B_1 \approx B_2 \Rightarrow A_2 < B_2$; 2) $A \subset B \Rightarrow A < B$.

Una richiesta più forte di E5 è

DIFF) $A < B \Leftrightarrow A \approx C \subset B$.

In effetti, la freccia sinistra segue banalmente da AP; per la freccia destra si deve supporre che la relazione \approx soddisfi una condizione aggiuntiva:

$$A \approx B \Rightarrow \forall X \subseteq A \exists Y \subseteq B \mid Y \approx X.$$

Denotiamo con $n(A)$ la classe di equivalenza di A rispetto a \approx . L'idea di Cantor di utilizzare come isometrie tutte le bigezioni può mettersi sotto forma di principio:

CP) (Cantor Principle) $n(A) = n(B) \Leftrightarrow$ esiste una bigezione tra A e B .

Come già osservato, AP e CP sono incompatibili non appena si considerino oggetti di cardinalità infinita. Cantor indebolì il principio AP in

HAP) (Half Aristotelian Principle) $A \subset B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$.

Questa assunzione porta alla classica teoria delle cardinalità, che è la madre di ogni teoria delle grandezze, ma presenta un'aritmetica trivialisata dalla proprietà di assorbimento (torneremo su questo argomento nel prossimo paragrafo). Volendo mantenere AP, si può indebolire CP in

HCP) (Half Cantor Principle) $n(A) = n(B) \Rightarrow$ esiste una bigezione tra A e B .

Passiamo ora agli aspetti algebrici dell'insieme delle grandezze: vorremmo definire una somma e un prodotto. Intuitivamente, vorremmo far corrispondere la somma delle grandezze di due insiemi alla grandezza della loro unione disgiunta, e il prodotto di grandezze alla somma iterata di oggetti uguali. Per questo si considerano i principi SUM e PP:

SUM) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A) + n(B) = n(A \cup B)$;

PP) Siano gli elementi di A insiemi a due a due disgiunti. Allora $n(a) = n(B) \forall a \in A \Rightarrow n(A) \cdot n(B) = n(\bigcup_{a \in A} a)$.

Assumendo CP, si può ricondurre il prodotto di grandezze al prodotto cartesiano:

CPP) (Cantor Product Principle) $n(A) \cdot n(B) = n(A \times B)$.

Va osservato come, se si intenda definire una grandezza sulla classe di tutti gli insiemi, il principio PP non possa venire assunto. Consideriamo infatti un qualsiasi atomo x , e sia $A = \{\{x\}, \{\{x\}\}, \{\{\{x\}\}\}, \dots\}$. A è una famiglia indicizzabile da A stesso di insiemi tutti di misura 1. Ma $\bigcup_{a \in A} a = \{x\} \cup A$,

ed ha quindi grandezza $1 + n(A) > n(A)$, falsificando così PP. Nemmeno il principio più debole CPP rimane verificato: si prenda $a_0 = x$, $a_{n+1} = (x, a_n)$. Sia $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\{x\} \times A$ è un sottoinsieme proprio di A , quindi deve avere grandezza minore di quella di A (a causa di AP), contraddicendo quindi CPP.

Le possibilità per aggirare queste problematiche sono varie: si potrebbe modificare lievemente la condizione PP, sostituendo al prodotto cartesiano un qualche altro tipo di prodotto tra insiemi che non conduca a contraddizioni; si può modificare la classe di insiemi, in maniera da escludere gli insiemi patologici; si può assumere la validità di un qualche assioma fondazionale che di per sé escluda l'esistenza di insiemi del tipo appena descritto. Nei prossimi capitoli, seguiremo ciascuna di queste vie, scegliendo ogni volta la più opportuna alla classe di insiemi sotto studio.

1.2 Cardinali ed Ordinali

Le due più importanti teorie classiche riguardanti la grandezza degli insiemi sono la teoria della cardinalità e la teoria degli ordinali.

Alla base della teoria della cardinalità c'è l'idea di attribuire la stessa grandezza agli insiemi che possano essere messi in corrispondenza biunivoca. Questo permette di definire una relazione di equivalenza sulla classe di tutti gli insiemi. La relazione di equivalenza in questione è quella introdotta da Cantor (che però era già stata pensata, ad esempio da Galileo quando affermò che ci sono tanti numeri quadrati quanti numeri interi), e che si chiama **relazione di equipotenza**.

Diremo che due insiemi A e B sono **equipotenti** se esiste una funzione bigettiva tra di loro. Per semplicità assumiamo che ad ogni classe di equivalenza della relazione di equipotenza sia associato un cardinale, che rappresenta la cardinalità di ciascun elemento della classe: per ogni insieme A , si denota tale cardinale come $|A|$. Gli insiemi aventi la stessa cardinalità dei naturali, che è la più piccola cardinalità infinita, si diranno numerabili. Questa cardinalità si denota con il simbolo \aleph_0 .

Come già osservato precedentemente, questa teoria della grandezza non soddisfa AP per nessun insieme infinito.

Senza voler assolutamente entrare nel merito dei vari risultati profondi riguardanti le cardinalità (ad esempio, l'esistenza di vari livelli di infinito, idea che a noi potrà sembrare del tutto normale ma che era stata pressochè inconcepibile fino alla fine del 1800), mi limiterò a richiamarne le proprietà aritmetiche.

Dati due insiemi A e B , con $A \cap B = \emptyset$, definiamo:

la **somma delle cardinalità** $|A| + |B| = |A \cup B|$;

il **prodotto delle cardinalità** come $|A| \cdot |B| = |A \times B|$;

la **potenza delle cardinalità** $|A|^{|B|} = |A^B|$.

La verifica che le definizioni siano ben poste (cioè che non dipendano dagli insiemi considerati ma solo dalle loro cardinalità) è banale. Ovviamente, sia la somma che il prodotto godono della proprietà commutativa e di quella associativa, e vale anche la distributività del prodotto rispetto alla somma; anche la esponenziazione soddisfa tutte le regole algebriche della usuale esponenziazione dei numeri reali.

Il problema è che tutte queste operazioni soffrono della proprietà di assorbimento dei cardinali: non appena uno tra a, b rappresenti la cardinalità di un insieme infinito, vale che $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$.

Riassumendo, le operazioni tra cardinali quindi godono di buone proprietà algebriche ma di pessime proprietà aritmetiche.

La seconda teoria classica della grandezza è la teoria degli ordinali. Un insieme ordinato $\langle A, \leq \rangle$ si dice **ben ordinato** se ogni suo sottoinsieme non vuoto ammette un elemento minimo.

L'assioma di scelta (AC) ci assicura che ogni insieme possa essere bene ordinato: gli ordinali si possono pensare come rappresentanti dei possibili tipi di ordine di insiemi che siano stati bene ordinati.

Ricordando che un insieme si dice **transitivo** se ogni suo elemento è anche un suo sottoinsieme (in simboli: $a \in b \in A \Rightarrow a \in A$), diremo che:

Definizione 1.2.1. *Un numero ordinale (o, più brevemente, un ordinale) è un insieme α che sia transitivo e ben ordinato dall' \in .*

Avendo definito ogni numero naturale come l'insieme di tutti i numeri più piccoli di lui (ponendo $0 = \emptyset$), si ha che l'insieme dei numeri naturali è un numero ordinale, che denoteremo con ω . Esattamente come si fa il successore in \mathbb{N} , possiamo definire il successore di un numero ordinale α come $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Nel caso in cui α possa essere scritto come $S(\beta)$ per un qualche β ordinale, α verrà chiamato **ordinale successore**; altrimenti sarà detto un **ordinale limite**. Inoltre, si definisce un ordinamento ponendo $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$: questo è un buon ordinamento. Denotiamo con Ord la classe di tutti gli ordinali. Si prendono come isometrie per Ord tutte e solo le bigezioni che conservano l'ordine. Quello che succede è che le uniche funzioni di questo tipo sono le funzioni identità: questo risultato permette di dimostrare che Ord soddisfa AP.

Vogliamo definire le operazioni di somma, prodotto ed esponenziazione su Ord .

Definizione 1.2.2. Dati α, β ordinali, definiamo la **somma di numeri ordinali** $\alpha + \beta$ ricorsivamente così: 1) se $\beta = 0$, $\alpha + \beta = \alpha$; 2) se $\beta = S(\gamma)$, $\alpha + \beta = S(\alpha + \gamma)$; 3) se β è un ordinale limite diverso da 0, $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\}$.

Questa operazione ha molti difetti dal punto di vista aritmetico. Tanto per cominciare, non è commutativa. Ad esempio, $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$; inoltre, vale la legge di cancellazione a sinistra (cioè $a + b = a + c \Rightarrow b = c$), ma non vale la legge di cancellazione a destra: ad esempio, $1 + \omega = 2 + \omega$, ma $1 \neq 2$. La proposizione seguente mostra che si possa definire una ‘quasi inversa’ di questa operazione:

Proposizione 1.2.3.

Se $\alpha \leq \beta$ sono numeri ordinali, esiste un unico ordinale γ con $\alpha + \gamma = \beta$.

Dim: α è un segmento iniziale di β . Sia γ l’ordinale corrispondente al complementare di α in β ordinato tramite $l' \in$. $\alpha + \gamma = \beta$ per costruzione; l’unicità segue dalla legge di cancellazione a sinistra.

Definizione 1.2.4. Per ogni coppia di ordinali α, β , il **prodotto di numeri ordinali** $\alpha \cdot \beta$ vale 1) se $\beta = 0$, $\alpha \cdot \beta = 0$; 2) se $\beta = \gamma + 1$, $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma + \alpha$; 3) se β è un ordinale limite, si pone $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\}$.

- Oss:** 1) $\forall \beta, \forall n \in \mathbb{N}, \beta \cdot n = \overbrace{\beta + \beta + \dots + \beta}^{n \text{ volte}}$;
 2) $1 \cdot \alpha = \alpha \forall \alpha \in Ord$;
 3) $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega$: il prodotto tra ordinali non è commutativo;
 4) Valgono sia la proprietà associativa che la proprietà distributiva rispetto alla somma.

Vogliamo ora dimostrare che per questo prodotto vale un risultato analogo alla divisione euclidea con resto.

Proposizione 1.2.5.

Se $0 < \alpha \leq \beta$, esiste il più grande ordinale γ per il quale $\alpha \cdot \gamma \leq \beta$.

Dim: Si usa la continuità a destra della moltiplicazione. Dato che $\alpha \cdot (\beta + 1) \geq (\beta + 1) > \beta$, esiste un δ per cui $\alpha \cdot \delta > \beta$. Il più piccolo ordinale δ con questa proprietà deve essere un ordinale successore, perchè se fosse un limite la relazione (valida solo per gli ordinali limite) $\alpha \cdot \delta = \sup\{\alpha \cdot \lambda \mid \lambda < \delta\}$ ci darebbe: $\alpha \cdot \lambda \leq \beta \forall \lambda < \delta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta$, il che è assurdo. Dunque esiste γ con $\delta = \gamma + 1$, e γ è l’ordinale cercato.

Basandosi su questa proprietà, si può dimostrare la seguente:

Proposizione 1.2.6.

Dato β ordinale qualsiasi, α ordinale $\neq 0$, esistono unici γ, δ con $\delta < \alpha$ tali che $\beta = \alpha \cdot \gamma + \delta$.

Dim: Sia γ il più grande ordinale con $\alpha \cdot \gamma \leq \beta$, e sia δ l'unico ordinale per cui $\alpha \cdot \gamma + \delta = \beta$.

$\delta < \alpha$, altrimenti $\alpha \cdot (\gamma + 1) \leq \alpha \cdot \gamma + \delta = \beta$, contro la massimalità di γ .

Vediamo che γ e δ sono unici. Sia $\alpha \cdot \gamma_1 + \delta_1 = \alpha \cdot \gamma_2 + \delta_2 = \beta$, e supponiamo $\gamma_1 < \gamma_2$. Allora $\gamma_1 + 1 \leq \gamma_2$, da cui $\alpha \cdot \gamma_1 + (\alpha + \delta_2) = \alpha \cdot (\gamma_1 + 1) + \delta_2 \leq \alpha \cdot \gamma_2 + \delta_2 = \beta$, da cui cancellando a sinistra si ha $\delta_1 \geq \alpha + \delta_2 \geq \alpha$, che è assurdo. Quindi $\gamma_1 = \gamma_2$, da cui segue $\delta_1 = \delta_2$ per l'unicità della differenza tra ordinali (a sinistra).

Definiamo ora l'esponenziazione tra ordinali.

Definizione 1.2.7. Siano α, β ordinali. L'**esponenziale ordinale** α^β vale: 1) se $\beta = 0$, $\alpha^\beta = 1$; 2) se $\beta = \gamma + 1$, $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$; 3) se β è un limite diverso da 0, $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\}$.

- Oss:** 1) se $\beta \in \mathbb{N}$, $\alpha^\beta = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}^{n \text{ volte}}$;
 2) $1^\omega = 1$ ma $n^\omega = \omega$ per ogni $n > 1 \in \mathbb{N}$;
 3) $\omega^\omega > \omega$;
 4) l'esponenziazione tra ordinali e quella tra cardinali sono profondamente diverse: ad esempio, 2^ω ed ω^ω sono ordinali numerabili, mentre 2^{\aleph_0} ed $\aleph_0^{\aleph_0}$ non lo sono;
 5) $(\alpha \cdot \beta)^n \neq \alpha^n \cdot \beta^n$ (ad esempio ponendo $\alpha = \omega$, $\beta = 2$).

Analogamente a quanto mostrato precedentemente riguardo al prodotto, vale la seguente:

Proposizione 1.2.8.

Dati $1 < \alpha \leq \beta$ ordinali, esiste il più grande γ tale che $\alpha^\gamma \leq \beta$.

Dim: Del tutto analoga alla proprietà data per il prodotto, sostituendo esponenziali a prodotti ovunque appaiano all'interno della dimostrazione.

In realtà, quelle appena definite non sono le uniche operazioni di somma e di prodotto usualmente studiate su *Ord*. Un'altra somma ed un altro prodotto vengono definiti a partire dalla espressione degli ordinali nella forma normale di Cantor.

Teorema 1.2.9.

Ogni ordinale $\alpha > 0$ può essere espresso in maniera unica come

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

con $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$, ed i k_i finiti e > 0 .

Alla espressione $\omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ si dà il nome di **forma normale di Cantor** del numero ordinale α .

Dim: Dimostriamo per induzione l'esistenza della forma normale di Cantor per ogni ordinale maggiore di 0.

Se $\alpha = 1$, basta osservare che $1 = \omega^0 \cdot 1$.

Sia ora $\alpha > 1$. Per la proposizione 1.2.8, esiste il più grande β per cui $\alpha \geq \omega^\beta$. Facciamo la divisione con resto di α con ω^β : $\alpha = \omega^\beta \cdot k_1 + \gamma$. Necessariamente deve essere k_1 finito: altrimenti $\alpha \geq \omega^\beta \cdot k_1 \geq \omega^\beta \cdot \omega \geq \omega^{\beta+1}$, contro la massimalità di β . A questo punto, se γ è uguale a zero abbiamo finito; altrimenti per ipotesi induttiva possiamo scrivere l'espressione di γ in forma normale: $\gamma = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$, e l'espressione in forma normale di α sarà $\alpha = \omega^\beta \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$.

Resta l'unicità. Dimostriamo pure questa per induzione: se $\alpha = 1$, chiaramente deve essere $\alpha = \omega^0 \cdot 1$.

Sia allora α qualsiasi e maggiore di 1, e siano $\omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\gamma_1} \cdot h_1 + \dots + \omega^{\gamma_m} \cdot h_m$ due sue forme normali di Cantor. Il lemma sulla esponenziazione forza $\beta_1 = \gamma_1$, mentre la proprietà analoga alla divisione euclidea forza $k_1 = h_1$. Facendo la divisione di α per $\omega^{\beta_1} \cdot k_1$, si ottiene un unico δ per cui $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \delta$, con $\delta < \alpha$. Per ipotesi induttiva, l'espressione in forma normale di Cantor di δ è unica, da cui segue l'uguaglianza dei rimanenti termini delle espressioni di α .

Partendo dalla espressione degli ordinali in forma normale di Cantor, si possono definire due nuove operazioni \oplus, \otimes che corrispondono al pensare le espressioni in forma normale come polinomi formali nella variabile ω . In letteratura, le operazioni \oplus, \otimes sono le operazioni dell'anello degli ordinali quando questi siano visti come numeri surreali di Conway.

Dati α, β ordinali in forma normale di Cantor, con $\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot k_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot k_n$, $\beta = \omega^{\gamma_1} \cdot h_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot h_2 + \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot h_n$ (eventualmente ammettiamo che i k_i e gli h_i siano 0), poniamo

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\gamma_1} \cdot (k_1 + h_1) + \omega^{\gamma_2} \cdot (k_2 + h_2) \dots + \omega^{\gamma_n} \cdot (k_n + h_n)$$

$$\alpha \otimes \beta = \bigoplus_{i,j=1}^n \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j} k_i h_j$$

\oplus e \otimes rendono Ord un semianello commutativo, e godono quindi di tutte le ottime proprietà algebriche delle operazioni dei semianelli commutativi.

1.3 Ultrafiltri

Definizione 1.3.1. Un **filtro** su di un insieme I è una famiglia \mathcal{F} non vuota di sottoinsiemi non vuoti di I tale che: 1) $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$; 2) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

Il filtro più semplice possibile è il filtro banale $\mathcal{F} = \{I\}$. Altri filtri possono essere costruiti così: si fissi un elemento $x \in I$, e sia

$$\mathcal{F}_x := \{A \subseteq I \mid x \in A\}$$

È banale verificare che \mathcal{F}_x è un filtro su I : gli si dà il nome di **filtro principale**. Analogamente, dato un qualsiasi sottoinsieme non vuoto A di I , si può costruire il filtro generato da A : $\mathcal{F}_A := \{B \subseteq I \mid A \subseteq B\}$.

Non tutti i filtri sono di questo tipo: si prenda un I infinito, e si consideri

$$Fr(I) = \{A \subseteq I \mid I \setminus A \text{ finito}\}$$

Anche $Fr(I)$ è un filtro: si dà lui il nome di **filtro di Frèchet** su I .

Fino a questo momento, le richieste per ottenere un filtro sono minime; quello che si può fare è richiedere la massimalità rispetto all'inclusione per ottenerne una famiglia particolare.

Definizione 1.3.2. Un **ultrafiltro** è un filtro massimale rispetto alla inclusione.

Sorprendentemente, ci sono almeno due modi molto semplici per riformulare, in maniera equivalente, la massimalità:

Proposizione 1.3.3.

Sia \mathcal{F} un filtro su I . Sono fatti equivalenti:

- 1) \mathcal{F} è un ultrafiltro su I ;
- 2) $\forall A \subseteq I, A \notin \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
- 3) $\forall A, B \subseteq I, A \cup B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A \in \mathcal{F}) \vee (B \in \mathcal{F})$.

Dim: 1) \Rightarrow 2): Se esistesse un insieme A , con A ed il suo complementare non in \mathcal{F} , si potrebbe estendere \mathcal{F} : basterebbe prendere $\mathcal{F} \cup \{A\}$, e farne il filtro generato, cioè prendere $\mathcal{F}' := \{A \cap B \mid B \in \mathcal{F}\}$ e chiudere \mathcal{F}' per soprainsieme. Questo sarebbe banalmente un filtro che estende \mathcal{F} , contro la sua massimalità.

2) \Rightarrow 3): Se avessi $A \notin \mathcal{F}, B \notin \mathcal{F}$, avrei in \mathcal{F} i loro complementari, e quindi l'intersezione dei loro complementari. Allora avremmo in \mathcal{F} sia $A \cup B$ sia $A^c \cap B^c$, quindi pure $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = \emptyset$, il che è assurdo.
 3) \Rightarrow 1): Supponiamo \mathcal{F} non massimale, e sia X un insieme tale che $X, X^c \notin \mathcal{F}$. Ma $X \cup X^c = I \in \mathcal{F}$, dunque o $X \in \mathcal{F}$ o $X^c \in \mathcal{F}$, assurdo. Quindi \mathcal{F} è massimale.

I filtri principali sono banalmente ultrafiltri. Vedremo che non ogni ultrafiltro però è principale. Vale anche, ovviamente, che non ogni filtro è un ultrafiltro: basta prendere il filtro di Frèchet su di un insieme infinito I e un qualsiasi A sottoinsieme di I che sia infinito e con complementare infinito. Per definizione di $Fr(I)$, nè A nè A^c possono starci.

Una domanda naturale da porsi è se ogni filtro possa essere esteso ad un ultrafiltro per inclusione. Se assumiamo AC, potendo così utilizzare il lemma di Zorn, la risposta sta nel seguente

Teorema 1.3.4 (Tarski). $\forall \mathcal{F}$ filtro su $I, \exists \mathcal{U}$ ultrafiltro con $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Dim: Consideriamo la famiglia H dei filtri che estendono \mathcal{F} : $H := \{\mathcal{G} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}, \mathcal{G} \text{ filtro}\}$. H è evidentemente non vuota, dato che contiene \mathcal{F} . Ordiniamo H ponendo $\mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_2 \Leftrightarrow \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$. Vorremmo dimostrare che ogni catena ammette un maggiorante, in modo da poter applicare il lemma di Zorn. Data una catena $(\mathcal{G}_j \mid j \in J)$ di elementi di H , il suo maggiorante ovvio sarebbe $\bigcup \mathcal{G}_j$. Resta da verificare che $\bigcup \mathcal{G}_j$ sia un elemento di H : che contenga \mathcal{F} è ovvio, dato che \mathcal{F} sta in ogni \mathcal{G}_j ; è chiuso per soprainsieme perchè, se $A \in \bigcup \mathcal{G}_j$, esiste j con $A \in \mathcal{G}_j$, e quindi ogni soprainsieme di A sta in \mathcal{G}_j e dunque in $\bigcup \mathcal{G}_j$; siano poi $A, B \in \bigcup \mathcal{G}_j$, allora esistono indici i, k con $A \in \mathcal{G}_i, B \in \mathcal{G}_k$. Ma deve valere $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{G}_k$ o $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{G}_i$. Supponiamo valga la prima, allora sia A che B appartengono a \mathcal{G}_k , quindi $A \cap B \in \mathcal{G}_k$ e $\bigcup \mathcal{G}_j$ è chiuso per intersezione. Quindi si può applicare il lemma di Zorn determinando un filtro massimale \mathcal{U} che estende \mathcal{F} , ed \mathcal{U} è un ultrafiltro per massimalità.

Questo teorema ci fornisce la descrizione di un ultrafiltro non principale: basta prendere il $Fr(I)$ ed estenderlo ad un ultrafiltro \mathcal{U} . Si ottiene un ultrafiltro non principale perchè, se fosse principale, dovrebbe esistere un elemento $x \in I$ con $\{x\}$ ed $\{x\}^c$ in \mathcal{U} , il che è assurdo. Vale anche una sorta di viceversa: ogni ultrafiltro non principale \mathcal{U} contiene $Fr(I)$. Infatti, se esistesse un insieme cofinito non in \mathcal{U} , avrei un insieme finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ in \mathcal{U} . $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$ quindi, per proprietà di ultrafiltro, uno degli $\{x_i\}$ dovrebbe stare in \mathcal{U} , il che è assurdo.

Definizione 1.3.5. *Sia data una famiglia G di sottoinsiemi di I . Si dirà che G ha la **proprietà della intersezione finita** (detta brevemente **FIP**) se ogni suo sottoinsieme finito $H = \{X_1, \dots, X_n\}$ soddisfa $X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$.*

Teorema 1.3.6.

Se una famiglia $G \subset \wp(I)$ ha la FIP, esiste un filtro \mathcal{F} su I con $G \subset \mathcal{F}$.

Dim: Sia \mathcal{F} l'insieme di tutti i sottoinsiemi X di I per i quali esistono X_1, \dots, X_n in G con $X_1 \cap \dots \cap X_n \subset X$. Dimostriamo che \mathcal{F} è un filtro avente G come sottoinsieme.

\mathcal{F} è un filtro: gli elementi di \mathcal{F} sono tutti non vuoti, ed \mathcal{F} stesso è non vuoto, perchè G ha la FIP; la chiusura per soprainsieme è ovvia: se A sta in \mathcal{F} , A contiene una certa $X_1 \cap \dots \cap X_n$, con gli X_i in G , e questa stessa intersezione è inclusa in ogni soprainsieme di A ; siano poi $A, B \in \mathcal{F}$ con $X_1 \cap \dots \cap X_n \subset A$ e $Y_1 \cap \dots \cap Y_m \subset B$. Allora $X_1 \cap \dots \cap X_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_m \subset A \cap B$, e quindi $A \cap B \in \mathcal{F}$.

\mathcal{F} ammette G come sottoinsieme: ogni elemento di G soddisfa alla condizione che definisce gli elementi di \mathcal{F} .

Questo teorema costituisce un cardine della teoria degli ultrafiltri. Supponiamo infatti di voler dimostrare l'esistenza di un ultrafiltro contenente una certa famiglia di sottoinsiemi. Tutto quello che c'è da fare è dimostrare che tale famiglia ha la FIP. Infatti, deve avere la FIP per essere estendibile ad un ultrafiltro per definizione stessa di filtro; è sufficiente perchè, per la proposizione precedente, la famiglia in questione può estendersi ad un filtro, e questi, per il teorema di Tarski, può essere esteso ad un ultrafiltro.

Resta una domanda a cui rispondere: dato un insieme I , quanti ultrafiltri sono costruibili su I ? Un ultrafiltro è un insieme costituito da parti di I , ed è quindi un elemento di $\wp(\wp(I))$. L'insieme $\wp(\wp(I))$ ha cardinalità 2^{2^κ} , se I ha cardinalità κ . Sicuramente, potendo costruire per ogni sottoinsieme A di I il filtro generato da A , in maniera che a sottoinsiemi distinti corrispondano filtri distinti, si hanno almeno 2^κ filtri su I .

Il risultato non banale è che, se κ è un cardinale infinito, su κ si possono mettere 2^{2^κ} ultrafiltri distinti. Questo risultato va sotto il nome di **Teorema di Pospisil**. Da qui discende ovviamente che anche la cardinalità dell'insieme dei filtri su I è 2^{2^κ} .

Nel caso in cui I sia finito (supponiamo che abbia n elementi), la cardinalità dell'insieme dei filtri scende a 2^n . Infatti, sia \mathcal{U} un filtro su I . Sia A il sottoinsieme di \mathcal{U} di cardinalità minima. Dico che \mathcal{U} è il filtro generato da A . Per dimostrare questo, basta vedere che nessun sottoinsieme di A può stare in \mathcal{U} , e questo è ovvio per come abbiamo caratterizzato A . Dunque,

la corrispondenza tra sottoinsiemi di I e filtri su I è bigettiva, da cui la tesi. Addirittura, la cardinalità dell'insieme degli ultrafiltri su I scende ad n , perchè ogni ultrafiltro su I è principale. Infatti, se $I = \{x_1, \dots, x_n\}$, basta scrivere $I = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$. Per proprietà di ultrafiltro, uno soltanto degli $\{x_i\}$ deve stare in \mathcal{U} , e quindi \mathcal{U} è principale.

Un modo equivalente di definire gli ultrafiltri è quello di parlare di misure a due valori finitamente additive: sia $\mu : \wp(I) \rightarrow \{0, 1\}$ finitamente additiva. Allora l'insieme dei sottoinsiemi di I di misura 1 è un ultrafiltro su I , ed è non principale se, e solo se, μ da massa zero a tutti gli insiemi finiti. Vale anche il viceversa: dato un ultrafiltro, una funzione che mappi in 1 gli elementi dell'ultrafiltro e in 0 gli altri è una misura finitamente additiva.

Adesso, limitando l'attenzione ad \mathbb{N} , introduciamo due classi particolarmente importanti di ultrafiltri.

Sia \mathcal{F} un filtro su \mathbb{N} , e sia A_n una partizione di \mathbb{N} in \aleph_0 parti in modo che nessun A_n stia in \mathcal{F} .

Definizione 1.3.7. \mathcal{F} si dice un **P-point** se, data una qualsiasi partizione $\{A_n\}$ come sopra, $\exists X \in \mathcal{F} \mid X \cap A_n$ è finito per ogni n .

Tre osservazioni: la prima, ovvia, è che ogni filtro P-point che estenda il Frèchet è un ultrafiltro. Sia infatti X con $X \cap A_n$ finito in \mathcal{F} . La partizione $\mathbb{N} = X \cup X^c$ falsifica la condizione di P-point per \mathcal{F} . La seconda è che ogni ultrafiltro principale è un P-point: se \mathcal{F} è il filtro generato da m , basta prendere come X un insieme costruito prendendo un solo elemento da ogni A_n (ad esempio il minimo di ognuno di questi), ed aggiungendovi m . La terza è che non ogni filtro è un P-point. Infatti, sia data A_n come nella definizione di P-point. Sia \mathcal{F} il filtro costituito dagli insiemi X che soddisfano la proprietà seguente: $X \cap A_n$ sia cofinito in A_n per ogni n tranne al più un numero finito di indici. \mathcal{F} è ovviamente un filtro (le verifiche sono banali), e non è un P-point: nessun elemento di \mathcal{F} ha intersezione finita con tutti gli A_n . In alternativa, basta prendere il Frèchet, prendere un X infinito e con complementare infinito e fare il filtro generato dal Frèchet e da questo insieme. Per quanto visto nella prima osservazione, questo non potrà essere un P-point, perchè è un filtro che estende il Frèchet senza essere un ultrafiltro. E' anche da menzionare il fatto, tutt'altro che banale da dimostrare, che esistono pure ultrafiltri che non sono P-Point.

La proprietà di P-point per gli ultrafiltri non principali ammette una riformulazione equivalente immediata:

Proposizione 1.3.8.

\mathcal{U} è un ultrafiltro P-point non principale $\Leftrightarrow \forall \{A_n\}$ successione di elementi

di \mathcal{U} esiste un $X \in \mathcal{U} \mid X^* \subseteq A_n \forall n$, dove $X^* \subseteq A_n$ significa che $X \setminus A_n$ ha cardinalità finita per ogni n .

Dim: Supponiamo \mathcal{U} P-point. Sia $\{A_n\}$ successione di elementi di \mathcal{U} . Consideriamo $B = \bigcap \{A_n\}$. Scrivo $B = \bigcup_{x \in B} \{x\}$. Sia $B_n = A_n^c$. $\bigcup_n B_n = B^c$.

Definiamo poi $C_0 = B_0$, $C_{n+1} = B_{n+1} \setminus \bigcup_{i=0}^n C_i$. $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una partizione di B^c costituita da insiemi non appartenenti ad \mathcal{U} (in quanto ogni $C_n \subset B_n$ e i B_n non stanno in \mathcal{U}). La possiamo completare ad una partizione di \mathbb{N} tramite la relazione $B = \bigcup_{x \in B} \{x\}$, ottenendo ancora una partizione costituita da elementi non in \mathcal{U} . \mathcal{U} P-point, quindi esiste un X che intersechi ognuno degli insiemi di questa partizione in un numero finito di elementi.

Dico che $X^* \subseteq A_n \forall n \in \mathbb{N}$. Questo equivale per definizione ad affermare che $|X \cap A_n^c| < \aleph_0 \forall n \in \mathbb{N}$. Dimostriamola: $A_n^c = B_n \subseteq \bigcup_{i=0}^n C_i$, quindi $|X \cap A_n^c| \leq |X \cap (\bigcup_{i=0}^n C_i)| \leq \sum_{i=0}^n |X \cap C_i|$ che è finita per costruzione di X , essendo finito ciascun addendo di questa somma.

Viceversa, supponiamo ora che (A_n) sia una partizione di \mathbb{N} , con gli A_n non in \mathcal{U} . Per proprietà di ultrafiltro i complementari degli A_n stanno in \mathcal{U} , dunque per ipotesi esiste un X che sia quasi incluso in ognuno di questi complementari, quindi $X \cap A_n$ è finito per ogni n .

Una sottoclasse molto importante dei P-point sono gli ultrafiltri selettivi. In letteratura, questi vengono talvolta chiamati ultrafiltri di Ramsey.

Definizione 1.3.9. *Un ultrafiltro \mathcal{U} si dice **selettivo** se, data una qualsiasi partizione A_n di \mathbb{N} , con gli A_n non vuoti e non appartenenti ad \mathcal{U} , esiste un $X \in \mathcal{U}$ con $|X \cap A_n|=1$ per ogni n .*

Ovviamente, ogni ultrafiltro selettivo è un P-point, ed ogni principale è selettivo. I viceversa sono falsi. Inoltre, la condizione $|X \cap A_n|=1 \forall n \in \mathbb{N}$ può essere indebolita in $|X \cap A_n| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

Fino ad ora non abbiamo ancora risposto a questa domanda: esistono ultrafiltri P-point non principali? Il teorema che segue assicura che, se vale l'ipotesi del continuo, esistono ultrafiltri selettivi non principali, e risponde quindi affermativamente alla domanda precedente.

Teorema 1.3.10.

Se vale CH, esistono ultrafiltri selettivi non principali su \mathbb{N} .

Dim: La proprietà che serve è la seguente: data una famiglia numerabile (Y_n) di insiemi numerabili, tale che per ogni sottofamiglia finita di questi l'intersezione sia numerabile, esiste un insieme Y che sia quasi incluso in ciascuno degli Y_n (cioè tale che $Y \setminus Y_n$ sia finito per ogni n).

CH ci dice che l'insieme delle partizioni di \mathbb{N} ha la cardinalità del continuo. Posso enumerare le partizioni: $\{P_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$. Vogliamo costruire induttivamente una famiglia di insiemi numerabili. Prendiamo P_0 . Se uno degli elementi di P_0 è infinito, chiamiamo X_0 questo elemento. Altrimenti, chiamiamo X_0 un insieme che abbia intersezione di cardinalità ≤ 1 con ognuno degli elementi di P_0 .

Sia poi data $P_{\alpha+1}$. Se esiste un elemento $A_{\alpha+1}$ di $P_{\alpha+1} \mid X_\alpha \cap A_{\alpha+1}$ sia infinito, poniamo $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cap A_{\alpha+1}$. Altrimenti, prendiamo come $X_{\alpha+1}$ un sottoinsieme di X_α che abbia intersezione di cardinalità ≤ 1 con tutti gli elementi di $P_{\alpha+1}$.

Se α è un limite, prendiamo per prima cosa come $X_{0,\alpha}$ un insieme tale che $X_{0,\alpha} \setminus X_\beta$ sia finito per ogni $\beta < \alpha$, la cui esistenza è assicurata dalla proprietà enunciata ad inizio dimostrazione, poichè ogni ordinale minore di ω_1 è numerabile. A questo punto, trattiamo P_α come se fosse la partizione successiva alla scelta dell'insieme $X_{0,\alpha}$, cioè esattamente come al caso precedente. La famiglia $(X_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ ha la FIP, perchè è per costruzione una successione decrescente rispetto alla inclusione, quindi può essere estesa ad un ultrafiltro, che risulta essere un ultrafiltro selettivo. E' non principale perchè tutti gli insiemi presi per generarlo sono infiniti.

1.4 Basi della analisi non standard

In questo paragrafo si intende richiamare brevemente alcuni strumenti di base della analisi non standard (in particolare il principio di transfer e la mappa star), arrivando a definire un modello canonico dei numeri iper-naturali ${}^*\mathbb{N}$.

Informalmente, un universo matematico è una collezione di oggetti sufficientemente grande da contenere al suo interno tutti gli oggetti di studio matematico, in particolare gli insiemi di numeri, e chiusa rispetto alle usuali operazioni insiemistiche. Ovviamente, la collezione di tutti gli oggetti di studio della matematica è un universo matematico, ma si possono avere collezioni più piccole che siano universi.

Formalmente, si dirà che una famiglia \mathbb{U} è un **universo matematico** se:

1. L'insieme dei reali sta in \mathbb{U} ;
2. Se A, B sono insiemi in \mathbb{U} , $A \cap B, A \cup B, A^B, A \times B, \wp(A), A \setminus B$ stanno in \mathbb{U} ;

3. Una n -pla (x_1, \dots, x_n) sta in \mathbb{U} se e solo se ogni a_i sta in \mathbb{U} ;
4. \mathbb{U} è transitivo.

Dato un insieme X che contenga i numeri naturali, od una loro copia isomorfa, si può costruire il più piccolo universo contenente X , a cui si darà il nome di **superstruttura su X** (in simboli $V(X)$). Vedendo gli elementi di X come atomi, $V(X)$ si costruisce come unione di una catena $V_n(X)$ definita induttivamente ponendo $V_0(X) = X$, $V_{n+1}(X) = V_n(X) \cup \wp(V_n(X))$. La proprietà 2 della definizione di universo matematico resta verificata non appena si siano fatte le usuali identificazioni delle coppie di elementi come coppie di Kuratowski, delle funzioni come sottoinsiemi di coppie, e le costruzioni degli insiemi di numeri interi, razionali, reali e complessi a partire dai naturali.

Gli strumenti di base della analisi non standard sono 2: la mappa star e il transfer. Siano \mathbb{U}, \mathbb{V} universi matematici contenenti una copia isomorfa di \mathbb{N} .

Definizione 1.4.1. *Una funzione $*$: $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, che soddisfi $*(n) = n \forall n \in \mathbb{N}$ e $*\mathbb{N} \neq \mathbb{N}$, si dirà **mappa star**.*

Dato un qualsiasi elemento $A \in \mathbb{U}$, la sua immagine tramite $$ sarà denotata con $*A$. Chiameremo inoltre standard gli elementi dell'universo \mathbb{U} , e nonstandard quelli in \mathbb{V} .*

Il secondo strumento fondamentale è il principio di transfer (detto anche principio di Leibniz). Sia fissata una mappa star.

Definizione 1.4.2. *Diremo che la mappa $*$ soddisfa il **principio di transfer** se, data una qualsiasi sentenza elementare $P(a_1, \dots, a_n)$ riguardante gli elementi standard a_1, \dots, a_n , vale $P(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow P(*a_1, \dots, *a_n)$.*

La definizione precisa di sentenza elementare richiederebbe l'introduzione di vari concetti, principalmente di formula del primo ordine. Fondamentalmente, una sentenza elementare è una proprietà $P(a_1, \dots, a_n)$ che contenga come uniche nozioni quelle di funzione, valore di funzione in un punto, relazione, dominio, codominio, n -pla ordinata, componente ordinata ed appartenenza, collegate tra loro dagli usuali connettivi logici (se, se e solo se, non, e, o) in modo che i quantificatori universale \forall e quello esistenziale \exists siano limitati da un qualche insieme, cioè siano della forma $\forall x \in X$ o $\exists x \in X$, con X insieme specificato all'interno dell'universo. Seguendo questa regola, bisogna stare attenti ad utilizzare il transfer in maniera adeguata. Ad esempio, una espressione del tipo $\forall A \subseteq X$ va riformulata come $\forall A \in \wp(X)$ prima di poter essere trasferita via transfer ai corrispondenti elementi non standard.

Se vogliamo, questo è proprio il succo dell'analisi non standard. Infatti, dire che ogni sentenza elementare viene trasferita via mappa standard ci dice che i due universi in questione sono elementarmente equivalenti, e questo ci permette di usarli indifferentemente per dimostrare la validità delle sentenze elementari. Ciò che rende particolarmente interessante questo modo di procedere è che, in generale, una struttura e la sua iperestensione sono non isomorfe.

Diamo quindi la definizione di modello della analisi non standard:

Definizione 1.4.3. *Un modello della analisi non standard è una terna $\langle *; \mathbb{U}; \mathbb{V} \rangle$ in cui \mathbb{U}, \mathbb{V} sono universi matematici e $*$ è una mappa star di \mathbb{U} in \mathbb{V} che soddisfi il principio di transfer.*

Una costruzione standard che viene fatta in questo tipo di ricerche è quella di **ultraprodotto**.

Sia dato un linguaggio L . Sia I un insieme, e sia \mathcal{U} un ultrafiltro su I . Sia data, $\forall i \in I$, una L -struttura \mathbb{M}_i , avente universo M_i . Consideriamo $\prod_{i \in I} M_i$. Ogni suo elemento può essere visto come una funzione f di dominio I tale che $f(i) \in M_i \forall i \in I$. Diremo che due funzioni f, g sono \mathcal{U} -equivalenti se $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Per proprietà di ultrafiltro, quella appena definita risulta una relazione di equivalenza, che denoteremo con $\equiv_{\mathcal{U}}$. Ogni simbolo di costante del linguaggio L viene interpretato come la classe di equivalenza della I -pla avente come componente i -esima l'interpretazione del simbolo nella struttura \mathbb{M}_i ; se F è il simbolo di una funzione n -aria, lo interpretiamo come la funzione $F([f_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [f_n]_{\mathcal{U}}) = [\langle F^{\mathbb{M}_i}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \mid i \in I \rangle]_{\mathcal{U}}$, con $F^{\mathbb{M}_i}$ l'interpretazione di F in \mathbb{M}_i ; se R è un simbolo di relazione n -aria, dico che $([f_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [f_n]_{\mathcal{U}}) \in R \Leftrightarrow \{i \in I \mid (f_1(i), \dots, f_n(i)) \in R^{\mathbb{M}_i}\} \in \mathcal{U}$, con $R^{\mathbb{M}_i}$ l'interpretazione di R in \mathbb{M}_i .

Definizione 1.4.4. *Diremo **ultraprodotto su \mathcal{U} delle L -strutture \mathbb{M}_i** (notazione $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}^I$) la L -struttura avente per universo l'insieme delle classi di equivalenza di $\prod_{i \in I} M_i$ modulo $\equiv_{\mathcal{U}}$, e per interpretazione dei simboli del linguaggio quella appena definita.*

Le definizioni sono ben poste (la verifica che non dipendono dai rappresentanti scelti è banale). Il teorema che spiega la potenza di queste costruzioni è il teorema di Los:

Teorema 1.4.5 (Los). *Sia $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}^I$ l'ultraprodotto delle L -strutture \mathbb{M}_i ; sia $P(x_1, \dots, x_n)$ una L -formula avente x_1, \dots, x_n come uniche variabili libere. Siano $[f_1], \dots, [f_n] \in \mathbb{M}$. Allora $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}^I \models P([f_1], \dots, [f_n]) \Leftrightarrow \{i \in I \mid M_i \models P(f_1, \dots, f_n)\} \in \mathcal{U}$.*

Un caso speciale di questo tipo di costruzione si ha quando le \mathbb{M}_i sono tutte uguali tra loro. In questo caso, all'ultraprodotto su \mathcal{U} della L-struttura \mathbb{M} si dà il nome di **ultrapotenza di \mathbb{M} su \mathcal{U}** . Dal teorema di Los segue immediatamente la seguente

Proposizione 1.4.6.

Una ultrapotenza $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}^I$ soddisfa un enunciato $\phi \Leftrightarrow \mathbb{M} \models \phi$.

Questa proposizione ci fornisce un metodo canonico per costruire iperestensioni di strutture date. Infatti ci assicura la validità del transfer non appena sia definita come mappa star la iniezione diagonale: ad x si associa la sequenza che vale costantemente x .

Si possono quindi costruire delle iperestensioni dei numeri naturali in maniera canonica.

Sia I un insieme, \mathcal{U} ultrafiltro non principale su I . Consideriamo l'insieme delle successioni in \mathbb{N} indicizzate da I : $\{f : I \rightarrow \mathbb{N}\}$. Diremo che $f \equiv_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Chiamiamo l'insieme delle classi di equivalenza di \mathbb{N}^I modulo questa relazione di equivalenza come ${}^*\mathbb{N}$. Muniamo ${}^*\mathbb{N}$ delle operazioni $+$, \cdot definendole componente per componente: $[f] + [g] = [f + g]$, $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Associamo infine ad ogni numero naturale n la funzione che vale costantemente n .

A ${}^*\mathbb{N}$ si darà il nome di numeri **iper-naturali**.

Come detto precedentemente, questa non è altro che una iperestensione di \mathbb{N} : è l'ultrapotenza di \mathbb{N} su I modulo \mathcal{U} . In maniera del tutto analoga si costruiscono iperestensioni standard per gli altri insiemi di numeri: ${}^*\mathbb{Q}$, ${}^*\mathbb{Z}$, ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{C}$.

Per fissare le idee, supponiamo $I = \mathbb{N}$. Come detto, ${}^*\mathbb{N}$ ed \mathbb{N} sono elementariamente equivalenti. Sono isomorfi? Definiamo su ${}^*\mathbb{N}$ l'ordine $<$ ponendo $[\sigma] < [\tau] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < \tau(n)\} \in \mathcal{U}$. Questa è una relazione d'ordine totale: date due successioni, si può partizionare \mathbb{N} nei tre sottoinsiemi costituiti uno dagli interi dove le due sono uguali, uno da quelli in cui la prima è maggiore della seconda, il terzo in cui la seconda è maggiore della prima. Per proprietà di ultrafiltro, uno ed uno solo di questi tre insiemi sta in \mathcal{U} . A seconda di quale di questi stia nell'ultrafiltro, si determina la relazione tra le due successioni. Inoltre, questo ordine estende l'usuale ordinamento sui naturali. Consideriamo ora la funzione identità $1_{\mathbb{N}}$.

Oss: $1_{\mathbb{N}} > n \forall n \in \mathbb{N}$.

Infatti, dato n , l'insieme $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m > n\}$ è cofinito, dunque sta nell'ultrafiltro. Questo dimostra l'osservazione precedente.

Da questo segue che \mathbb{N} e ${}^*\mathbb{N}$ sono non isomorfi: abbiamo appena determinato in ${}^*\mathbb{N}$ un elemento più grande di ogni naturale. Elementi di questo tipo si diranno **infiniti**. Appare chiaro che alcune proprietà di ${}^*\mathbb{N}$ possano dipendere dalla scelta dell'ultrafiltro. Vogliamo ora vedere cosa accade nei casi in cui \mathcal{U} sia un P-point od un selettivo.

Proposizione 1.4.7.

Sono fatti equivalenti: 1) \mathcal{U} è un P-point; 2) $\forall \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid [\sigma] \notin \mathbb{N} \exists \tau \in [\sigma] \mid \tau$ finite-to-1.

Dim: 1) \Rightarrow 2): Sia $[\sigma] \notin \mathbb{N}$. Sia $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) = i\}$. Per le ipotesi fatte su σ , nessun A_i può stare in \mathbb{N} . Inoltre, gli A_i sono ovviamente disgiunti e ricoprono \mathbb{N} . Per proprietà di P-point, esiste un X in \mathcal{U} con $X \cap A_i$ finito per ogni i . Enumeriamo gli elementi nel complementare di X : a_n . Definiamo τ come $\tau(n) = \sigma(n) \forall n \in X$, $\tau(a_n) = n$ altrimenti. $\tau \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$ perchè coincidono su X . Inoltre, τ è finite-to-1: infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \mid \tau(i) = n\} =$ (a meno di al più un elemento) $\{i \in \mathbb{N} \mid i \in X, i \in A_n\} = X \cap A_n$ che è finito per costruzione.

2) \Rightarrow 1): Sia data una partizione infinita di $\mathbb{N} : \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $\sigma(n) = i \Leftrightarrow n \in A_i$. σ non è equivalente a nessuna costante: se σ fosse equivalente ad un qualche n , avremmo $A_n \in \mathcal{U}$, contro le ipotesi. σ quindi soddisfa le ipotesi di 2). Sia $\tau \mid \tau \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$, con τ finite-to-1. Sia $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) = \tau(n)\}$. X sta in \mathcal{U} per equivalenza delle due successioni. $n \in X \cap A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) = \tau(n), \sigma(n) = i\} \Rightarrow \tau(n) = i$. Quindi $X \cap A_i \subseteq \tau^{-1}(i)$ che è finito per costruzione: X è l'insieme cercato.

Ancora più particolare è la situazione nel caso in cui \mathcal{U} sia selettivo.

Proposizione 1.4.8.

Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{U} è selettivo;
2. Ogni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è \mathcal{U} -equivalente ad una funzione costante o ad una bigettiva;
3. Come sopra, con iniettiva al posto di bigettiva;
4. Per ogni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ esiste un elemento X in \mathcal{U} con f che è o costante o strettamente crescente su X ;
5. Ogni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è \mathcal{U} -equivalente ad una funzione non decrescente;

Dim: 1) \Rightarrow 2): Sia data f . Chiamiamo $A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = i\}$. Se uno di questi A_i sta in \mathcal{U} abbiamo finito perchè f è \mathcal{U} -equivalente ad una costante. Altrimenti, la famiglia degli A_i ci dà una partizione di \mathbb{N} . Sia X l'elemento di \mathcal{U} selettivo per questa partizione. La funzione f ristretta ad X è 1-1. Spezziamo X in una unione disgiunta $X_1 \cup X_2$, con entrambi questi insiemi infiniti. Per proprietà di ultrafiltro, uno solo tra X_1 ed X_2 può stare in \mathcal{U} . Sia ad esempio $X_1 \in \mathcal{U}$. f su X_1 continua ad essere 1-1, ed il complementare di X_1 è infinito. Pertanto si può completare f ad una funzione bigettiva g definita su tutto \mathbb{N} . Su X_1 $f = g$, pertanto $f \equiv_{\mathcal{U}} g$.

2) \Rightarrow 3): Ovvio.

3) \Rightarrow 4): Per prima cosa, mostriamo che la condizione 3 implica la selettività (3 \Rightarrow 1). La dimostrazione è semplice: data una partizione come nella definizione di selettività A_1, A_2, \dots , definiamo $f(n) = i \Leftrightarrow n \in A_i$. Per ipotesi, esiste un X in \mathcal{U} con f iniettiva su X . Si vede immediatamente dalla definizione di f che X fa da selettore per la partizione.

Sia ora data una f funzione qualsiasi. Se f è \mathcal{U} -equivalente ad una costante, ci siamo. Altrimenti, esiste un $X \in \mathcal{U}$ con f iniettiva su X . Sia $x_0 = \min X$, e sia $A_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq f(x_0)\}$. Definiamo poi $x_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \in X, k \notin A_i \forall i \leq n\}$, a sia $A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N} \mid f(k) \leq f(x_{n+1}), k \notin A_i \forall i \leq n\}$. L'insieme degli A_n forma una partizione di X . La estendo ad una partizione di \mathbb{N} aggiungendovi X^c . La partizione così ottenuta soddisfa le condizioni della definizione di selettività, quindi esiste un $Y \in \mathcal{U}$ che faccia da selettore. Dico che f è strettamente crescente su $Y \cap X$. Questo è evidente: siano $m > n$ in $Y \cap X$. $m > n \Leftrightarrow \exists k, n \mid n \in A_k, m \in A_{k+n}$, da cui $f(m) > f(n)$ per costruzione.

4) \Rightarrow 5): Ovvio.

5) \Rightarrow 1): Sia $(A_n)_n$ una partizione di \mathbb{N} , con $A_n \notin \mathcal{U} \forall n \in \mathbb{N}$. Definiamo $f(m) = n \Leftrightarrow m \in A_n$. Per ipotesi, si può trovare un insieme X in \mathcal{U} con f ristretta ad X non decrescente. Chiamiamo $X_n = X \cap A_n$. Dico che ogni X_n è finito, altrimenti se fosse X_n infinito avremmo, per non decrescenza di f , $f(k) = n$ per ogni $k \geq \min X_n$, cioè f costante su di un cofinito, quindi \mathcal{U} -equivalente ad una costante, contrariamente alla nostra ipotesi. Sia $X_n = \{x_1^n, \dots, x_{k_n}^n\}$. Definiamo $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ come segue: per ogni n e per ogni $i = 1, \dots, k_n$ si pone $g(x_i^n) = k_n - n$, e $g(n) = 0$ se $n \notin X$. Per ipotesi, si può determinare un Y con $g|_Y$ non decrescente. Notiamo che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y \cap X_n$ ha cardinalità al più 1. Prendendo $Z = X \cap Y$, si è determinato un insieme selettivo per $(A_n)_n$.

Capitolo 2

Numerosità degli insiemi numerabili

In questo capitolo introdurremo una nozione di grandezza soddisfacente agli assiomi E1-E5 per gli insiemi numerabili, che rappresenterà il primo esempio di quel tipo di funzioni di grandezza che chiameremo numerosità. Questo si farà indicizzando gli elementi di questi insiemi con numeri naturali, ed associando loro, a partire da questa indicizzazione, una successione non decrescente di interi. Una opportuna classe di equivalenza di questa successione rappresenterà, in un senso che andrà ben specificato, la grandezza dell'insieme, e vedremo che una classe di rappresentanti di queste grandezze può essere presa come sottoanello parzialmente ordinato di una iper-estensione specifica di \mathbb{N} , nel senso della analisi non standard. Si farà poi vedere che l'esistenza di una funzione numerosità è equivalente a quella degli ultrafiltri selettivi, da cui segue il risultato sorprendente di indipendenza della esistenza delle numerosità da ZFC.

2.1 Insiemi indicizzati

L'idea di attribuire ad ogni elemento di un insieme numerabile un'etichetta intera nasce da questa osservazione banale. Nella pratica, dovendo contare il numero di elementi di un insieme molto grande, ad esempio il numero di prodotti in un supermercato, si divide per prima cosa l'insieme in un certo numero di parti più piccole (nel nostro esempio, possiamo dividere i prodotti raggruppando quelli dello stesso tipo), si conta il numero di elementi di ciascuna di queste parti, e se ne fa infine la somma per ottenere la cardinalità dell'insieme originale.

Se vogliamo applicare questa linea di ragionamento ad un insieme qualsiasi,

dobbiamo per prima cosa definire un metodo per poterne distinguere gli elementi. Per questo diamo a ciascuno di questi un indice, detto anche etichetta. Formalmente, si parla di insiemi indicizzati:

Definizione 2.1.1. *Un insieme indicizzato A è una coppia $\langle A, l_A \rangle$, dove A è un insieme ed $l_A : A \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione finite-to-1, detta **indicizzazione**.*

La funzione l_A etichetta ogni elemento di A con la sua immagine naturale. La condizione di finite-to-1 ci assicura che soltanto un numero finito di elementi ottengano la stessa etichetta. Affinchè sia possibile assumere la condizione di finite-to-1 per le indicizzazioni, è necessario restringere lo studio ai soli insiemi numerabili; in questo capitolo, ogni insieme sarà inteso come al più numerabile.

Attraverso l_A possiamo anche dare una descrizione di A come limite di una sequenza debolmente crescente (rispetto all'inclusione) di suoi sottoinsiemi, precisamente $A = \bigcup_{n \rightarrow +\infty} A_n$, dove $A_n = \{x \in A \mid l_A(x) \leq n\}$. E' banale osservare che $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Supporremo sempre che i numeri naturali ricevano essi stessi come indice, qualsiasi sia l'insieme che li contiene. Da questa definizione segue, in particolare, che ogni sottoinsieme dei numeri naturali ha la funzione identità come indicizzazione. Diamo come indicizzazione ai sottoinsiemi di \mathbb{Z} il valore assoluto, cioè $l_{\mathbb{Z}}(z) = \max\{z, -z\}$. Per questi insiemi l'indicizzazione può dirsi canonica.

L'obiettivo è definire la numerosità di A in relazione alla sequenza degli A_n . Diamo quindi due definizioni:

Definizione 2.1.2. *Diremo **counting function** dell'insieme indicizzato A la successione $n \mapsto |A_n|$; diremo poi che $|A_n|$ è l' **n -sima approssimante** della numerosità di A .*

Dati due insiemi indicizzati \mathbf{A}, \mathbf{B} , diremo:

- **$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$** $\Leftrightarrow A \subset B$ e $l_A = l_B \upharpoonright_A$;
- **Somma $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$** l'insieme indicizzato $\langle A \uplus B, (l_A \oplus l_B) \rangle$, dove $(l_A \oplus l_B)(x) = l_A(x)$ se $x \in A$, $l_B(x)$ se $x \in B$;
- **Prodotto $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$** l'insieme indicizzato $\langle A \times B, (l_A \otimes l_B) \rangle$, con $(l_A \otimes l_B)((a, b)) = \max\{l_A(a), l_B(b)\}$.

Oss: Le definizioni poste sono coerenti con somme e prodotti delle counting functions: le counting functions della somma e del prodotto sono, rispettivamente, la somma e il prodotto delle counting functions. Questo perchè $|\{x \in A \uplus B \mid (l_A \oplus l_B)(x) \leq n\}| = |A_n| + |B_n|$ e $|\{(a, b) \in A \times B \mid (l_A \otimes l_B)((a, b)) \leq n\}| = |A_n| \cdot |B_n|$.

Sarà anche assunto che, per ogni insieme A , se $B \subseteq A$ allora $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, cioè una coerenza tra le indicizzazioni.

Definizione 2.1.3. Denoteremo con L la classe degli insiemi indicizzati.

Definizione 2.1.4. Una **funzione numerosità** è una applicazione $num : L \rightarrow \mathcal{N}$, con \mathcal{N} un insieme linearmente ordinato, che soddisfi:

1. Se $|A_n| \leq |B_n| \forall n \in \mathbb{N}$, allora $num(\mathbf{A}) \leq num(\mathbf{B})$;
2. $\beta < num(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \beta = num(\mathbf{B})$ per un qualche $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$;
3. Se $num(\mathbf{A}_1) = num(\mathbf{A}_2)$ e $num(\mathbf{B}_1) = num(\mathbf{B}_2)$ allora $num(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_1) = num(\mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_2)$ e $num(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1) = num(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2)$.

La prima proprietà ci dice che se la successione approssimante di \mathbf{A} si mantiene sempre sotto quella di \mathbf{B} , la stessa relazione di ordine deve intercorrere tra i loro ‘valori limite’, che sono le numerosità di \mathbf{A} e di \mathbf{B} .

La seconda non solo ci assicura che num soddisfi AP, ma consentirà anche di definire la differenza tra le numerosità.

La terza serve a garantire la coerenza con le operazioni definite su L . In particolare, rende possibile definire una somma ed un prodotto su num , coerenti con le operazioni insiemistiche di unione disgiunta e prodotto cartesiano, in maniera analoga a quanto si fa con le cardinalità: definiamo

Somma di numerosità: $num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})$;

Prodotto delle numerosità: $num(\mathbf{A}) \cdot num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$.

In questo modo, num verifica sia SP che PP.

Osserviamo che tutte le proprietà delle funzioni numerosità, così come quelle della somma e del prodotto, sono facilmente verificate dalle cardinalità degli insiemi finiti. Il problema risiede nel ricercare un metodo che le garantisca pure per le grandezze degli insiemi infiniti.

Dobbiamo definire una classe di isometrie per L . E' chiaro dalla seconda condizione della definizione di num che non possono esser prese come isometrie tutte le bigezioni, ed è altrettanto evidente che ogni possibile isometria per L debba tenere conto delle indicizzazioni fornite. Basandosi su queste due osservazioni, appare naturale la seguente:

Definizione 2.1.5. Una funzione f tra due insiemi indicizzati \mathbf{A} e \mathbf{B} si dirà un **isomorfismo** se $f : A \rightarrow B$ è una bigezione che preserva l'indicizzazione, cioè tale che $l_B \circ f = l_A$.

Nel caso in cui \mathbf{A} e \mathbf{B} siano isomorfi si scriverà $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Proposizione 2.1.6.

1. $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \Leftrightarrow |A_n| = |B_n| \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\langle \{a\}, l_{\{a\}} \rangle \cong \langle \{b\}, l_{\{b\}} \rangle \Leftrightarrow l_{\{a\}}(a) = l_{\{b\}}(b)$;
3. $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \Rightarrow num(\mathbf{A}) = num(\mathbf{B})$;
4. Se $\mathbf{A}_1 \cong \mathbf{A}_2$ e $\mathbf{B}_1 \cong \mathbf{B}_2$ allora $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{B}_1 \cong \mathbf{A}_2 \oplus \mathbf{B}_2$ e $\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1 \cong \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2$.

Dim: 1) Se $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ basta osservare che $|\{a \in A \mid l_A(a) \leq n\}| = |\{a \in A \mid l_B \circ f(a) \leq n\}| = |\{b \in B \mid l_B(b) \leq n\}|$ perchè f è una bigezione. Vicerversa, se $|A_n| = |B_n| \forall n \in \mathbb{N}$, possiamo costruire f isomorfismo ricorsivamente: se $n = 0$, possiamo prendere una f_0 bigezione tra A_0 e B_0 , la cui esistenza è assicurata dalla uguaglianza delle cardinalità; se $n = m + 1$, consideriamo $A_{m+1} \setminus A_m$ e $B_{m+1} \setminus B_m$. Tutti gli insiemi coinvolti in queste differenze sono finiti per le proprietà delle indicizzazioni, quindi l'uguaglianza delle cardinalità nella ipotesi ci dà l'uguaglianza $|A_{m+1} \setminus A_m| = |B_{m+1} \setminus B_m|$. Prendiamo una bigezione f_n tra questi due insiemi. Sia poi $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Per costruzione, f è una bigezione che conserva le indicizzazioni, ed è quindi un isomorfismo di insiemi indicizzati.

2) Segue banalmente da 1; da osservare che ci assicura che due numeri naturali (visti come insiemi indicizzati) sono isomorfi se, e soltanto se, sono uguali.

3) Per proprietà 1 di numerosità, assieme alla condizione 1 di questa proposizione, si hanno le due disuguaglianze $num(\mathbf{A}) \leq num(\mathbf{B})$ e $num(\mathbf{A}) \geq num(\mathbf{B})$, da cui la tesi.

4) Se f_1 realizza l'isomorfismo tra \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 ed f_2 realizza quello tra \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 , basta prendere come isomorfismo per la somma $f_1 \oplus f_2$, dove $(f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x)$ se $x \in A$, $(f_1 \oplus f_2)(x) = f_2(x)$ altrimenti. Per il prodotto invece basta considerare l'isomorfismo $(f_1 \otimes f_2)$, con $(f_1 \otimes f_2)(a, b) = (f_1(a), f_2(b))$. La verifica che i due appena definiti siano isomorfismi di insiemi indicizzati è banale.

2.2 L'insieme delle numerosità è un semianello ordinato

L'obiettivo di questa sezione è studiare le proprietà algebriche dell'insieme \mathcal{N} dotato della somma e del prodotto definiti precedentemente.

Proposizione 2.2.1.

1. \mathcal{N} ha un elemento minimo, corrispondente alla numerosità dell'insieme vuoto, che denoteremo con 0 ;
2. Tutti i singoletti hanno la stessa numerosità, che denoteremo con 1 ;
3. Ogni numerosità λ ha un successore immediato $\lambda + 1$, e se è diversa da zero ammette anche un predecessore immediato $\lambda - 1$.

Dim: 1) Segue in maniera immediata dalla condizione 2 di num che nessuna numerosità può essere più piccola di quella del vuoto, dato che il vuoto non ha sottoinsiemi distinti da lui. Inoltre, ogni altra numerosità è confrontabile (e quindi maggiore) della sua perchè il vuoto è sottoinsieme di qualsiasi altro insieme.

2) Siano, per assurdo, a, b con $num(\{a\}) \neq num(\{b\})$. Diciamo, ad esempio, che $num(\{a\}) < num(\{b\})$; allora dovrebbe esistere un sottoinsieme di $\{b\}$ con numerosità uguale a quella di $\{a\}$; i sottoinsiemi di $\{b\}$ sono soltanto lui stesso ed il vuoto. Lui non ha stessa numerosità di $\{a\}$ per ipotesi assurda, il vuoto non può avere la stessa numerosità di nessun sottoinsieme non vuoto per condizione 2 di numerosità, da cui l'assurdo.

3) Si prenda un qualsiasi singoletto $\{x\}$, con $x \notin A$, e $num(\mathbf{A}) = \lambda$. Vogliamo dimostrare che $num(\mathbf{A} \oplus \{x\}) = \lambda + 1$ è il successore di λ . Evidentemente $\lambda + 1 > \lambda$ perchè $A \subset A \cup \{x\}$. Supponiamo esista μ con $\lambda < \mu < \lambda + 1$. Per la condizione 2 di num deve esistere un sottoinsieme \mathbf{B} di $A \cup \{x\}$ con $\mu = num(\mathbf{B})$. Sia $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$ con $num(\mathbf{C}) = \lambda$, e sia $\{y\}$ un elemento in $\mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$. $num(\mathbf{A}) = num(\mathbf{C}) \Rightarrow num(\mathbf{A} \oplus \{y\}) = num(\mathbf{C} \oplus \{y\})$. Per quanto dimostrato in 2, sfruttando la terza proprietà nella definizione di num si ha $num(\mathbf{A} \oplus \{y\}) = \lambda + 1$; invece, essendo $\mathbf{C} \cup \{y\} \subset \mathbf{B}$, $num(\mathbf{C} \oplus \{y\}) \leq \mu < \lambda + 1$, il che è assurdo. Per il predecessore, basta prendere un qualsiasi elemento a di \mathbf{A} e considerare la numerosità di $\mathbf{A} \setminus \{a\}$.

Una conseguenza di questa proposizione è che in \mathcal{N} abbiamo una copia isomorfa dei naturali, costruita ponendo $0 = num(\emptyset)$, $n + 1 = successore(n)$. Denoteremo con n l' n -simo successore della numerosità 0 .

Proposizione 2.2.2.

Gli insiemi indicizzati finiti hanno come numerosità la loro cardinalità: num soddisfa (fn).

Dim: Per induzione su $|A|$. Se $|A|=0$, A è l'insieme vuoto, avente numerosità 0.

Se $|A| = n + 1$, sia x in A . Per ipotesi induttiva, $num(A \setminus \{x\}) = n$, da cui $num(A) = n + 1$.

Da queste due proposizioni segue che avere stessa numerosità non è una condizione sufficiente per essere isomorfi. Come osservato, ogni singoletto ha numerosità 1, ma non tutti i singoletti sono isomorfi tra loro. Viceversa, essere isomorfi è una condizione sufficiente per avere la stessa numerosità, come dimostrato nel paragrafo precedente. In particolare, si ha che la numerosità soddisfa HCP: infatti due insiemi finiti con stessa numerosità hanno stessa cardinalità, e quindi esiste una bigezione tra loro; gli infiniti sono tutti numerabili, e quindi si ha sempre una bigezione tra due qualsiasi di loro (addirittura non serve supporre che abbiano stessa numerosità). Da qui segue anche che le numerosità degli insiemi infiniti sono infinite, intendendo con questo che sono maggiori delle numerosità di ogni insieme finito.

Un **semianello parzialmente ordinato** è una quaterna $\langle A, +, \cdot, \leq \rangle$, con A insieme, $+$ e \cdot operazioni associative con $+$ commutativo e tali che valga la proprietà distributiva, e per i quali $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ e $x \cdot z \leq y \cdot z \forall x, y, z$. Un semianello parzialmente ordinato si dice positivo se $\forall x, y \mid x \leq y \exists !z \mid y = x + z$.

Teorema 2.2.3.

$\langle \mathcal{N}, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ è un semianello commutativo parzialmente ordinato, positivo e con elementi neutri.

Dim: Si dimostra che $\langle \mathcal{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ è un semianello con elementi neutri sfruttando che insiemi isomorfi hanno stessa numerosità. Infatti: la commutatività segue da $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \cong \mathbf{B} \oplus \mathbf{A}$, ed analogamente per il prodotto; l'associatività segue da $\mathbf{A} \oplus (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}) \cong (\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C}$, ed analogo per il prodotto; la distributività segue da $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} \cong (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \oplus (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$; 0 ed 1 sono elementi neutri perchè $\mathbf{A} \oplus \emptyset \cong \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \otimes \emptyset \cong \emptyset$ e $\mathbf{A} \otimes \{x\} \cong \mathbf{A}$ per ogni \mathbf{A} , $\{x\}$.

Per quanto riguarda l'ordine, siano \mathbf{A} , \mathbf{B} con $num(\mathbf{A}) < num(\mathbf{B})$, e sia dato \mathbf{C} . Sia $\mathbf{A}' \subset \mathbf{B}$ con $num \mathbf{A} = num \mathbf{A}'$. Allora $\mathbf{A}' \oplus \mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} \oplus \mathbf{C}$ e $\mathbf{A}' \otimes \mathbf{C} \subseteq \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$, da cui la compatibilità del \leq con $+$, \cdot .

\mathcal{N} è positivo: siano dati \mathbf{A} , \mathbf{B} ed \mathbf{A}' come sopra. Sia \mathbf{D} il complementare di \mathbf{A}' in \mathbf{B} . Chiaramente, $num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{D}) = num(\mathbf{B})$. Per l'unicità: sia dato \mathbf{E} con $num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{E}) = num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{D})$. Dico che $num(\mathbf{E}) = num(\mathbf{D})$.

Se fosse $num(\mathbf{E}) < num(\mathbf{D})$, esisterebbe $\mathbf{D}' \subset \mathbf{D}$ con $num(\mathbf{E}) = num(\mathbf{D}')$. Allora $num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{E}) = num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{D}') = num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{D}') < num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{D}) = num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{D})$ perchè $\mathbf{A} \oplus \mathbf{D}' \subset \mathbf{A} \oplus \mathbf{D}$, il che è assurdo. Il caso $num(\mathbf{D}) < num(\mathbf{E})$ si fa nello stesso modo.

E' facile vedere che la copia isomorfa dei naturali costituisce un segmento iniziale dell'anello delle numerosità.

La funzione numerosità permette di definire una relazione di equivalenza su L . Precisamente, diremo che due insiemi indicizzati \mathbf{A} e \mathbf{B} sono **equinumerosi** (notazione: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$) se $num(\mathbf{A}) = num(\mathbf{B})$.

2.3 Interi non standard come modello delle numerosità

Vogliamo esplicitare un modello di numerosità per gli insiemi indicizzati. Si vedrà come, partendo dalle indicizzazioni, sia possibile costruire una mappa star dalla soprastruttura su \mathbb{N} in quella su \mathcal{N} (ricordo che la definizione di mappa star è stata data in 1.4.1).

Consideriamo la counting function di un insieme indicizzato. La condizione di non decrescenza della catena dei sottoinsiemi A_n si traduce in una condizione di non decrescenza per le corrispondenti counting functions. Se chiamiamo $Cres = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ è non decrescente}\}$, l'associazione $\mathbf{A} \mapsto \langle |A_n| \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ è una applicazione di L in $Cres$.

Viceversa, data una qualsiasi funzione f in $Cres$, esiste un insieme indicizzato di cui lei sia successione approssimante. Sia g una bigezione di \mathbb{N} con un insieme A . Scriviamo quindi $A = \{g(0), \dots, g(n), \dots\}$. Definiamo $l_A(x) = n \Leftrightarrow x \in [g(f(n-1)), g(f(n))]$ (se $n = 0$, poniamo $g(f(n-1)) = g(0)$). Definiamo \mathbf{A}^f l'insieme indicizzato $\langle A, l_A \rangle$. La counting function di \mathbf{A}^f è, per costruzione, f .

Sapendo che insiemi aventi stessa counting function sono isomorfi, ed hanno quindi stessa numerosità, possiamo definire una applicazione di $Cres$ in \mathcal{N} :

Definizione 2.3.1. Definiamo $\rho : Cres \rightarrow \mathcal{N}$ come $\rho(f) = num(\mathbf{A}^f)$.

La somma e il prodotto in $Cres$ sono definiti componente per componente, e l'ordine è definito puntualmente: $f < g \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} f(n) < g(n)$.

Oss: ρ è un omomorfismo surgettivo di semianelli ordinati.

Dim: ρ è surgettiva perchè, data una qualsiasi numerosità η , possiamo prendere uno qualsiasi degli insiemi indicizzati da cui proviene (diciamo \mathbf{A}), farne la counting function f e poi considerare \mathbf{A}^f , che per costruzione ha numerosità η . Dunque $\eta = \rho(f)$.

Che ρ preservi somme e prodotti si dimostra facendo vedere che $\mathbf{A}^f \oplus \mathbf{A}^g \cong \mathbf{A}^{f+g}$ e $\mathbf{A}^f \otimes \mathbf{A}^g \cong \mathbf{A}^{f \cdot g}$. Facciamo ad esempio la dimostrazione per la somma: l' n -esimo termine della counting function \mathbf{A}^{f+g} è $|A_n \cup B_n| = |A_n| + |B_n|$ (perchè sono insiemi disgiunti) = $f(n) + g(n) = (f + g)(n)$. Analogamente per il prodotto.

ρ preserva l'ordinamento: sia $f < g$. Allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|A_n^f| < |A_n^g|$, da cui $num(\mathbf{A}^f) < num(\mathbf{A}^g)$.

Dati due insiemi indicizzati \mathbf{A} e \mathbf{B} , diremo **equalizzatore** di \mathbf{A} e \mathbf{B} l'insieme

$$E(A, B) = \{n \in \mathbb{N} \mid |A_n| = |B_n|\}$$

Si vede subito che due insiemi hanno come equalizzatore \mathbb{N} se e solo se sono isomorfi.

Sia poi

$$\mathcal{U} = \{E(A, B) \mid num(A) = num(B)\}$$

Vogliamo dimostrare che \mathcal{U} è un ultrafiltro selettivo.

Dato un qualsiasi $A \subseteq \mathbb{N}$, definiamo i_A la funzione tale che $i_A(n) = n$ se $n \in A$, $i_A(n) = n + 1$ altrimenti. Evidentemente, i_A è una funzione non decrescente. Si può quindi considerare $\rho(i_A)$. Sia $\alpha = \rho(i_{\mathbb{N}})$ la numerosità di \mathbb{N} . Il lemma seguente ci da una caratterizzazione alternativa degli elementi di \mathcal{U} .

Lemma 2.3.2.

1) L'insieme vuoto non sta in \mathcal{U} ; 2) Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \rho(i_A) = \alpha$.

Dim: 1) Affermare che il vuoto non sta in \mathcal{U} equivale a dire che qualsiasi coppia di insiemi con equalizzatore vuoto hanno numerosità diversa. Siano \mathbf{A} , \mathbf{B} con $E(A, B)$ vuoto. Se f e g rappresentano le counting functions dei due insiemi indicizzati, si ha $f(n) \neq g(n) \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi $(f(n) - g(n))^2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, cioè $f^2 + g^2 > 2fg$, da cui, poichè ρ è un omomorfismo di semianelli p.o., si ottiene $\rho(f)^2 + \rho(g)^2 > 2\rho(f)\rho(g)$, e quindi $\rho(f) \neq \rho(g)$.

2) Se $\rho(i_A) = \alpha = \rho(i_{\mathbb{N}})$, $A = \{n \in \mathbb{N} \mid i_A(n) = i_{\mathbb{N}}(n)\}$ sta in \mathcal{U} perchè è equalizzatore di A ed \mathbb{N} . Viceversa, siano f e g con $A = E(A^f, A^g)$ Sia h con $h(n) = f(n)$ se $n \in A$, $h(n) = f(n) + 1$ altrimenti. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $h(n) \neq g(n) + 1$ (è ovvio per definizione di A). Da questo, per quanto mostrato in 1), otteniamo che $\rho(h) \neq \rho(g) + 1 = \rho(f) + 1$; per definizione di h vale però anche che $f \leq h \leq f + 1$, da cui $\rho(f) \leq \rho(h) \leq \rho(f) + 1$. Ma

$\rho(f) = \rho(g)$, quindi $\rho(h) = \rho(f)$. Per come è definita h , si ha anche che $h + i_{\mathbb{N}} = f + i_A$, da cui $\rho(h) + \alpha = \rho(f) + \rho(i_A)$, e cancellando $\rho(h)$ e $\rho(f)$ si ha la tesi.

Corollario: $\forall f, g \in Cres, A = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \rho(f) = \rho(g)$.

Dim: Se $\rho(f) = \rho(g)$, la tesi segue per definizione di equalizzatore. Viceversa, sia A in \mathcal{U} , e quindi $\rho(i_A) = \alpha$. Osserviamo che vale questa uguaglianza funzionale: $f \cdot i_{\mathbb{N}} + f + g \cdot i_A = g \cdot i_{\mathbb{N}} + g + f \cdot i_A$. Da qui si ha $\rho(f) \cdot \rho(i_{\mathbb{N}}) + \rho(f) + \rho(g) \cdot \rho(i_A) = \rho(g) \cdot \rho(i_{\mathbb{N}}) + \rho(g) + \rho(f) \cdot \rho(i_A)$. Ponendo $\rho(i_A) = \rho(i_{\mathbb{N}})$ si ottiene $\rho(f) = \rho(g)$.

Proposizione 2.3.3.

\mathcal{U} è un ultrafiltro non principale.

Dim: Che il vuoto non stia in \mathcal{U} lo abbiamo già dimostrato. Restano da vedere la chiusura per soprainsieme, intersezione, la proprietà di esclusione tra complementari e la non principalità.

Siano A, B in \mathcal{U} . $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \mid (i_A \cdot i_B)(n) = n^2\}$. Denotiamo con Q l'insieme dei quadrati di elementi di \mathbb{N} . Per il corollario precedente, è sufficiente far vedere che $\rho(i_Q) = \rho(i_A \cdot i_B)$. $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow \rho(A) = \rho(B) = \alpha$, da cui $\rho(i_A \cdot i_B) = \rho(i_A) \cdot \rho(i_B) = \alpha^2 = \rho(i_Q)$.

Se A sta in \mathcal{U} , ovviamente A^c non può starci altrimenti avremmo il vuoto in \mathcal{U} (basta intersecare A con A^c). Viceversa, osserviamo che (a) $i_A + i_{A^c} = i_{\mathbb{N}} + i_{\mathbb{N}} + 1$. Inoltre, $i_{\mathbb{N}} \leq i_A \leq i_{\mathbb{N}} + 1$. Se $A \notin \mathcal{U}$, si deve avere $\rho(i_A) = \rho(i_{\mathbb{N}}) + 1$, da cui semplificando in (a) si ottiene $\rho(i_{A^c}) = \alpha$, quindi $A^c \in \mathcal{U}$ e la massimalità risulta dimostrata.

Da queste segue la chiusura per soprainsieme: se avessimo $A \in \mathcal{U}, A \subset B, B \notin \mathcal{U}$, dalla massimalità otterremmo che $B^c \in \mathcal{U}$, da cui $B^c \cap A = \emptyset \in \mathcal{U}$, il che è assurdo.

Per vedere che \mathcal{U} è non principale, basta vedere che i singoletti non ci stanno. Per ogni k dato, siano $\mathbf{A} = \langle \{0, x\}, l_A \rangle$ e $\mathbf{B} = \langle \{x\}, l_B \rangle$, con $l_A(x) = k + 1$, $l_B(x) = k$. L'insieme $\{k\}$ è $E(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, ma $2 = num(\mathbf{A}) = \rho(f_A) \neq \rho(f_B) = num(\mathbf{B}) = 1$, quindi $\{k\}$ non sta in \mathcal{U} per il corollario precedente.

Per dimostrare che \mathcal{U} è selettivo, sfruttiamo le equivalenze date nel capitolo precedente. Quel che faremo vedere è che ogni funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è \mathcal{U} -equivalente ad una funzione non decrescente.

Proposizione 2.3.4.

\mathcal{U} è selettivo.

Dim: Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Siano g, h definite come $g(n+1) = h(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$, $g(0) = 0$. g ed h sono evidentemente funzioni non decrescenti, e vale $g + f = h$. $g \leq h \Rightarrow \exists \mathbf{A}, \mathbf{B} | \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e $\rho(g) = \text{num}(\mathbf{A}), \rho(h) = \text{num}(\mathbf{B})$. Sia $\mathbf{C} = \mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$, e siano f_A, f_B, f_C le corrispettive counting functions. Per costruzione, vale che $\rho(f_A) + \rho(f_C) = \rho(f_B)$. Quindi $\rho(g + f_C) = \rho(h)$, da cui otteniamo che $\{n \in \mathbb{N} | g(n) + f_C(n) = h(n)\} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) = f_C(n)\}$ è in \mathcal{U} , quindi f è \mathcal{U} -equivalente ad una funzione non decrescente, ed \mathcal{U} è selettivo.

Ricordando che il simbolo $\mathbb{V}_\infty(\mathbb{N})$ denota la superstruttura su \mathbb{N} , indichiamo con F_∞ l'insieme $\bigcup F_k$, con $F_k = \{f | f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{V}_k(\mathbb{N})\}$. Oltre alla nozione di \mathcal{U} -equivalenza di funzioni, introduciamo la relazione di \mathcal{U} -appartenenza $\in_{\mathcal{U}}$ per le funzioni in F_∞ : diremo che $f \in_{\mathcal{U}} g \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in g(n)\} \in \mathcal{U}$. ρ può essere vista come definita sul livello F_0 , sfruttando che ogni funzione è \mathcal{U} -equivalente ad una non decrescente (cioè che ogni elemento di F_0 è equivalente ad uno in $Cres$). La prossima proposizione afferma che ρ può essere estesa a tutta F_∞ .

Proposizione 2.3.5.

Esiste un'unica funzione $\tau : F_\infty \rightarrow \mathbb{V}_\infty(\mathcal{N})$ che soddisfi le 5 proprietà seguenti:

- 1) $\tau(f) = \rho(f) \forall f \in F_0$: τ estende ρ ;
- 2) Se c_\emptyset è la funzione in F_1 che vale costantemente il vuoto, $\tau(c_\emptyset) = 0$;
- 3) $\tau(f) = \tau(g) \Leftrightarrow f =_{\mathcal{U}} g$;
- 4) $\tau(f) \in \tau(g) \Leftrightarrow f \in_{\mathcal{U}} g$;
- 5) $\tau(F_k) \subseteq \mathbb{V}_k(\mathcal{N})$.

Dim: Costruiamo τ ricorsivamente su ciascun F_k . Se $k = 0$, data una $f \in F_0$ basta prendere una funzione g in $Cres$ che sia \mathcal{U} -equivalente a f e definire $\tau(f) = \rho(g)$. Inoltre, poniamo $\tau(c_\emptyset) = 0$ se c_\emptyset è la funzione che vale costantemente \emptyset . Le proprietà 1-5 sono verificate da ρ , e quindi da τ . Sia $k = n + 1$. Sia $f \in F_{n+1}$. Se esiste $i < n + 1$ con $f \in F_i$, $\tau(f)$ è già stata definita ad un passo precedente. Sia quindi $f \in F_{n+1} | f \notin F_n$. Osserviamo che ogni g che verifichi $g \in_{\mathcal{U}} f$ deve stare in un qualche elemento precedente della superstruttura: $g \in F_n$. Quindi possiamo definire

$$\tau(f) = \{\tau(h) | h \in_{\mathcal{U}} f\}$$

Vediamo che τ così definita soddisfa le proprietà 1-5.

Le proprietà 1 e 2 sono vere per quanto fatto al passo $k = 0$. La proprietà 4 è evidente dalla definizione, ed implica l'unicità di τ .

L'unica proprietà non ovvia è la 3). Se $f =_{\mathcal{U}} g$, $\tau(f) = \tau(g)$ perchè vale $h \in_{\mathcal{U}} f \Leftrightarrow h \in_{\mathcal{U}} g$. Viceversa, se $f \neq_{\mathcal{U}} g$, sia H l'insieme $\{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq g(n)\}$.

H sta in \mathcal{U} . Per ogni $n \in H$, sia x_n un elemento della differenza simmetrica di $f(n)$ con $g(n)$. Sia $h(n) = x_n$. h è stata definita su di un elemento di \mathcal{U} , il che è sufficiente per considerarla definita su tutto \mathbb{N} (basta prolungarla in un modo qualsiasi nel complementare nel suo dominio). Dividiamo H nei due sottoinsiemi $H_f = \{n \in H \mid x_n \in f(n)\}$, $H_g = \{n \in H \mid x_n \in g(n)\}$. Per proprietà di filtro, solo uno di questi due sta in \mathcal{U} . Supponiamo $H_f \in \mathcal{U}$. Allora $h \in_{\mathcal{U}} f$, ma $h \notin_{\mathcal{U}} g$, da cui non può esistere nessun $h' \in_{\mathcal{U}} g$ con $h' =_{\mathcal{U}} h$. Per ipotesi induttiva quindi $\tau(h) \notin \tau(g)$, da cui $\tau(f) \neq \tau(g)$.

Si può adesso definire la mappa star da $\mathbb{V}_{\infty}(\mathbb{N})$ in $\mathbb{V}_{\infty}(\mathcal{N})$.

Definizione 2.3.6. Per ogni $x \in \mathbb{V}_{\infty}(\mathbb{N})$, definiamo $*x = \tau(c_x)$, con c_x la successione che vale costantemente x .

La dimostrazione della proposizione precedente ci fornisce le due proprietà seguenti: $\forall n \in \mathbb{N}, *n = n$; $\forall A \in \mathbb{V}_{\infty}(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}, *A = \{\tau(f) \mid f : \mathbb{N} \rightarrow A\}$.

Teorema 2.3.7.

La mappa $*$: $\mathbb{V}_{\infty}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{V}_{\infty}(\mathcal{N})$ è una immersione nonstandard.

Dim: Per dimostrare la validità del transfer, ci serve la proprietà seguente:

◇) Sia $\sigma(a_1, \dots, a_n)$ una formula limitata nel linguaggio degli insiemi; per ogni $f_1, \dots, f_n \in F_{\infty}$, $\sigma(\tau(f_1), \dots, \tau(f_n)) \Leftrightarrow \{k \mid \sigma(f_1(k), \dots, f_n(k))\} \in \mathcal{U}$.

Questa proprietà si dimostra per induzione sulla costruzione delle formule.

Se σ è del tipo $\tau(f_1) = \tau(f_2)$, dalla proposizione precedente segue $f_1 =_{\mathcal{U}} f_2$, cioè $\{n \in \mathbb{N} \mid f_1(n) = f_2(n)\} \in \mathcal{U}$, e la proprietà è verificata. Analogamente se la formula è del tipo $\tau(f_1) \in \tau(f_2)$, sfruttando questa volta la 4) della proposizione precedente.

Sia σ della forma $(\sigma_1 \vee \sigma_2)(\tau(f_1), \dots, \tau(f_n))$. Per ipotesi induttiva, abbiamo che $\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma_1(f_1(k), \dots, f_n(k))\}$, $\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma_2(f_1(k), \dots, f_n(k))\}$ stanno entrambi in \mathcal{U} . Per proprietà di ultrafiltro quindi abbiamo in \mathcal{U} anche la loro intersezione, e la proprietà ◇ risulta verificata. Del tutto analogo è il caso di $\neg\sigma$, sfruttando la proprietà $A \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{U}$.

Resta da verificare ◇ nel caso di formule che coinvolgono un quantificatore esistenziale. Si assuma quindi $\exists x \in \tau(f)\sigma(x, \tau(f_1), \dots, \tau(f_n))$. Quindi esiste una g con $g \in_{\mathcal{U}} f$ tale che valga $\sigma(\tau(g), \tau(f_1), \dots, \tau(f_n))$. Per ipotesi induttiva, sia $A = \{k \mid g(k) \in_{\mathcal{U}} f(k)\}$ che $B = \{k \mid \sigma(g(k), f_1(k), \dots, f_n(k))\}$ sono in \mathcal{U} , quindi $A \cap B \in \mathcal{U}$, perciò $\{k \mid \exists x \in f(k)\sigma(x, f_1(k), \dots, f_n(k))\} \in \mathcal{U}$.

Viceversa, sia $A = \{k \mid \exists x \in \tau(f)\sigma(x, f_1(k), \dots, f_n(k))\} \in \mathcal{U}$. Per ogni $k \in A$, sia $x_k \in f(k)$ tale che valga $\sigma(x_k, f_1(k), \dots, f_n(k))$. Sia $g \in F_\infty$ con $g(k) = x_k \forall k \in A$. Si ha $g \in_{\mathcal{U}} f$, e per ipotesi induttiva si ha $\sigma(\tau(g), \tau(f_1), \dots, \tau(f_n))$, da cui si ottiene $\exists x \in \tau(f)\sigma(x, \tau(f_1), \dots, \tau(f_n))$.

Prima di affrontare il principio di Leibniz, richiamiamo questo teorema di teoria degli insiemi:

Se $W \subset V$ sono classi transitive (o, meglio, transitive a meno di atomi) e $\sigma(w_1, \dots, w_n)$ è una formula con quantificatori ristretti¹ con i $w_i \in W$, allora $W \models \sigma(w_1, \dots, w_n) \Leftrightarrow V \models \sigma(w_1, \dots, w_n)$.

A noi interessa il caso particolare in cui $W = \mathbb{V}_\infty(\mathbb{N})$ o $W = \mathbb{V}_\infty(\mathcal{N})$, e V è l'universo di tutti gli insiemi. Siano dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{V}_\infty(\mathbb{N})$, $\sigma(x_1, \dots, x_n)$. Grazie al teorema appena enunciato e alla proprietà \diamond , otteniamo:

$$\sigma(*a_1, \dots, *a_n) \Leftrightarrow \mathbb{V}_\infty(\mathcal{N}) \models \sigma(*a_1, \dots, *a_n) \Leftrightarrow \sigma(\tau(c_{a_1}), \dots, \tau(c_{a_n})) \Leftrightarrow \mathbb{V}_\infty(\mathbb{N}) \models \sigma(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \sigma(a_1, \dots, a_n),$$

quindi si ha il transfer.

2.4 Indipendenza da ZFC

Un risultato dovuto a Kenneth Kunen è l'indipendenza della esistenza di ultrafiltri selettivi dagli assiomi di ZFC. In questa sezione, dimostreremo che l'esistenza di ultrafiltri selettivi è però equivalente alla esistenza di funzioni numerosità. In questo modo si ottiene il risultato sorprendente di indipendenza da ZFC della costruzione delle funzioni numerosità.

Teorema 2.4.1.

L'esistenza di una funzione numerosità è equivalente alla esistenza di ultrafiltri selettivi non principali su \mathbb{N} .

Dim: Se num è una funzione numerosità, abbiamo dimostrato nel capitolo precedente che l'ultrafiltro $\mathcal{U} = \{E(A, B) \mid num(\mathbf{A}) = num(\mathbf{B})\}$ è un ultrafiltro non principale selettivo.

Viceversa, assumiamo che \mathcal{U} sia un ultrafiltro selettivo non principale. Dato un insieme A , denotiamo con f_A la sua counting function. Sia $[f_A]_{\mathcal{U}}$ la classe di equivalenza di f_A rispetto alla relazione di equivalenza indotta da \mathcal{U} (ricordo che due funzioni si dicono \mathcal{U} -equivalenti se coincidono su di un elemento

¹Si dice che i quantificatori di una formula sono ristretti se sono delimitati da qualche insieme: una formula del tipo $\exists x\varphi(x)$ non è una formula con quantificatori ristretti, mentre lo è una del tipo $\exists x \in X\varphi(x)$

di \mathcal{U}). L'insieme delle classi di equivalenza modulo \mathcal{U} è l'iperestensione dei naturali denotata come $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$. Definiamo

$$\text{num}(A) = [f_A]_{\mathcal{U}}$$

Resta da vedere che num soddisfi le proprietà 1-2-3 che definiscono una funzione numerosità. Ricordo che, date $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, diciamo $[f_A]_{\mathcal{U}} < [g_A]_{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\} \in \mathcal{U}$.

La proprietà 1 è ovvia, poichè $f_A(n) < f_B(n) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow [f_A]_{\mathcal{U}} < [f_B]_{\mathcal{U}}$, dato che $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

La proprietà 3 è altrettanto semplice, e discende da $[f + g]_{\mathcal{U}} = [f]_{\mathcal{U}} + [g]_{\mathcal{U}}$, $[f \cdot g]_{\mathcal{U}} = [f]_{\mathcal{U}} \cdot [g]_{\mathcal{U}}$.

Per quanto riguarda la proprietà 2, se $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid f_B(n) < f_A(n)\}$ è cofinito in \mathbb{N} (se k è il più piccolo indice per cui esiste un elemento x in A con indice k , ma x non in B , per ogni $n \geq k$ $f_B(n) < f_A(n)$), quindi sta nell'ultrafiltro (perchè per non principalità estende il filtro di Frèchet), quindi $[f_B]_{\mathcal{U}} < [f_A]_{\mathcal{U}}$ ed una delle implicazioni è dimostrata.

L'implicazione inversa invece è più complicata, e richiede la selettività dell'ultrafiltro. Si deve mostrare che, se $[g]_{\mathcal{U}} < [f_A]_{\mathcal{U}}$, esiste un $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ con g \mathcal{U} -equivalente alla counting function di \mathbf{B} . Per selettività di \mathcal{U} , si può assumere senza perdita di generalità che g sia non decrescente. Sia poi X l'insieme su cui $g < f_A$.

Siccome X sta in \mathcal{U} , possiamo considerare la funzione $f_A - g$ a valori in \mathbb{N} ; sempre per selettività di \mathcal{U} , esiste un insieme $Y \in \mathcal{U}$ con $f_A - g$ non decrescente su Y . Se $H = X \cap Y$, $H = \{x_0 < x_1 < \dots\}$, allora, per costruzione, $\forall n \in \mathbb{N}, f_A(x_{n+1}) - g(x_{n+1}) \geq f_A(x_n) - g(x_n)$, quindi $g(x_{n+1}) - g(x_n) \leq f_A(x_{n+1}) - f_A(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Sia $B_0 \subseteq \{a \in A \mid l_A(a) \leq x_0\}$ con $|B_0| = g(x_0)$, e per ogni $n > 0$ sia $B_n \subseteq \{a \in A \mid x_{n-1} < l_A(a) \leq x_n\}$ con $|B_n| = g(x_n) - g(x_{n-1})$. E' possibile costruire la successione dei B_n grazie alla proprietà di H . Sia \mathbf{B} l'insieme indicizzato ottenuto dalla unione dei B_n . Per costruzione, la sua successione approssimante coincide, su K , con g , quindi $\text{num}(\mathbf{B}) = [f_B]_{\mathcal{U}} = [g]_{\mathcal{U}}$, come era da dimostrare.

2.5 Esempi

Dalla dimostrazione del teorema 2.4.1 si capisce che la selettività è necessaria per assicurarci la validità di 2) nella definizione di numerosità, che è la condizione necessaria per avere le buone proprietà aritmetiche di questa nozione di grandezza. Sempre dalla dimostrazione, si capisce anche che l'assegnamento delle numerosità non è univoco: dipende dall'ultrafiltro selettivo

considerato.

Ad esempio, siano P l'insieme dei numeri naturali pari, e D quello dei dispari. Se f_P rappresenta la successione approssimante di P , e f_D quella dei dispari, si ha che $f_P(n) = f_D(n)$ se n è dispari, $f_P(n) = f_D(n)+1$ se n è pari, quindi se $D \in \mathcal{U}$, $num(\mathbf{P})=num(\mathbf{D})$, mentre se $P \in \mathcal{U}$, $num(\mathbf{P})=num(\mathbf{D})+1$. Tenendo a mente che $\alpha = num(\mathbf{P})+num(\mathbf{D})$, si ha che $P \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot num(\mathbf{P})+1$, ed è quindi dispari, viceversa $D \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot num(\mathbf{P})$ è pari.

Un modo per aggirare, almeno parzialmente, queste problematiche, è imporre delle condizioni aggiuntive su α . Ad esempio, potremmo supporre che α sia un multiplo di ogni intero k , il che ci forza a dare a $k\mathbb{N} = \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$ numerosità $\frac{\alpha}{k}$.

Una caratteristica che rimane è la non univocità delle indicizzazioni. Abbiamo visto che ci sono modi canonici per indicizzare \mathbb{N} e \mathbb{Z} . Poniamoci il problema della indicizzazione di $\mathbb{Q}^{\geq 0}$. Ogni elemento di $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ può essere scritto in maniera unica nella forma $n + \frac{a}{b}$, con $0 \leq a < b$, a e b coprimi, $n \in \mathbb{N}$. Definiamo $l_{\mathbb{Q}}(q) = n + b$. $l_{\mathbb{Q}|_{\mathbb{N}}} = l_{\mathbb{N}}$, ed $l_{\mathbb{Q}}^{-1}(n)$ è finito per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi quella appena definita è una indicizzazione ammissibile.

Dato $n \in \mathbb{N}$, vogliamo determinare la cardinalità di $l_{\mathbb{Q}}^{-1}(n)$. Per prima cosa osserviamo che nessun q con $q > n$ può avere indice n , quindi possiamo ricercare gli elementi di questa controimmagine in $[0, n]$. Se $n = 0$, l'unico elemento della sua controimmagine è 0. Altrimenti, $(0, n] = (0, 1) \cup [1, 2) \cup \dots \cup [n-2, n-1) \cup [n-1, n) \cup n$. Si vede subito per definizione di $l_{\mathbb{Q}}$ che, in ogni intervallo $[k, k+1)$, con $k < n-1$, il numero di elementi con label n è $\phi(n-k)$, con ϕ la funzione di Eulero, mentre se ne hanno 0 in $[k-1, k)$. In $(0, n]$ si hanno quindi $\sum_{k=2}^n \phi(k)+1$ elementi di indice n . Da questo si ricava che la counting function di $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ è, per $k \geq 1$ (in 0 vale 1), $k \rightarrow (\sum_{2 \leq i \leq k} (\sum_{j=2}^{j=i} \phi(j) + 1)) + 2$.

Diamo ora una indicizzazione diversa a $\mathbb{Q}^{\geq 0}$. Se $q = \frac{a}{b}$, con a e b coprimi e positivi, dirò $l'_{\mathbb{Q}}(q) = \max\{a, b\}$. Si vede facilmente che $|\{q \in \mathbb{Q}^{\geq 0} \mid l'_{\mathbb{Q}}(q) = n\}| = 2\phi(n)$ se $n \geq 2$, 1 altrimenti. Secondo questa indicizzazione, la counting function di $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ è, sempre per $k \geq 1$ (anche qui in 0 vale 1), $k \rightarrow (\sum_{2 \leq i \leq k} 2\phi(i)) + 2$.

Il confronto tra le due è semplice: dato che $\phi(k) < k$, si vede subito che la prima successione è strettamente maggiore della seconda, quindi la numerosità di $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ è più grande rispetto a $l_{\mathbb{Q}}$ che a $l'_{\mathbb{Q}}$.

Capitolo 3

Numerosità degli insiemi finito dimensionali

In questo capitolo si introdurrà il concetto di insieme finito dimensionale di punti costruito a partire da una retta base. Sfruttando la struttura particolarmente ricca di questa classe di insiemi, si definiranno delle funzioni numerosità soddisfacenti a tutti i principi di Euclide. Si fornirà poi un modello algebrico delle numerosità nel caso particolare degli insiemi costruiti a partire da rette numerabili, utilizzando tecniche simili a quelle del capitolo precedente, e si farà vedere come a ciascuno di questi modelli algebrici possa essere fatta corrispondere una opportuna iperestensione dei numeri naturali del tipo ultrapotenza $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$. In particolare, vedremo come gli ultrafiltri necessari per queste costruzioni non debbano più essere necessariamente selettivi. Infine, si mostrerà come sia possibile costruire numerosità su classi sempre più ampie di insiemi a partire da numerosità definite esclusivamente su parti di queste.

3.1 Spazi finito-dimensionali su rette

Sia fissato un insieme L . Considereremo gli elementi di L come atomi, e L svolgerà la funzione di retta base per tutte le costruzioni. Denotiamo con $\mathbb{E}_n(L)$ l'insieme delle n -ple di elementi di L .

Definizione 3.1.1. Diremo *insieme n -dimensionale di punti* un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{E}_n(L)$. Diremo che X è un insieme **finito dimensionale** se è un insieme n -dimensionale per un qualche $n \in \mathbb{N}$.

Sia $\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \wp(\mathbb{E}_n(L))$. Siamo interessati a definire funzioni numerosità su opportuni sottoinsiemi di \mathbb{U} .

Affrontiamo per prima la questione delle isometrie. Come già più volte osservato, non possiamo accettare come isometrie tutte le bigezioni. Gli insiemi sotto studio sono n -ple ordinate di punti, quindi restringiamo l'attenzione alle bigezioni che abbiano una qualche relazione con questa struttura.

Data una n -pla $a=(a_1, \dots, a_n)$, chiamiamo **supporto** di a l'insieme $Supp(a) = \{a_1, \dots, a_n\}$. E' lecito aspettarsi che le bigezioni che preservano il supporto delle n -ple siano isometrie. In particolare, saranno isometrie sia le permutazioni delle componenti che le iniezioni di n -ple in dimensioni maggiori. Inoltre, anche le sostituzioni di elementi nelle n -ple sono applicazione sufficientemente naturali da dover far parte del nostro insieme di trasformazioni. Data una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ed una n -pla $a = (a_1, \dots, a_n)$, diremo **sostituzione generalizzata di f in a** la trasformazione $\mathbf{S}_f^a: (y_1, \dots, y_m) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$, con $z_j = y_i$ se $i = f(j)$, $z_i = a_i$ altrimenti. Osserviamo che tanto le permutazioni delle componenti quanto le iniezioni in dimensioni maggiori sono esprimibili come sostituzioni generalizzate per scelte opportune di f, a . Sia num una funzione grandezza. Avere esplicitato la classe delle isometrie consente di dare una riformulazione del principio *E4*, esposto nel primo capitolo, in questa forma:

E4.1) Se T è una bigezione che preserva i supporti (cioè tale che $Supp(T(a)) = Supp(a)$ per ogni a nel dominio di T), allora $num(A) = num(T[A])$;

E4.2) Se $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è 1-1, allora $\forall n, m \in \mathbb{N}, f[\{1, \dots, m\}] \subseteq [1, \dots, n] \Rightarrow num(A) = num(S_f^a[A])$ per ogni insieme m -dimensionale A ed ogni n -pla a .

Rimane aperta la possibilità di ampliare la classe I delle isometrie a seconda della retta sotto indagine. Ovviamente, nel caso in cui L sia dotata di una qualche struttura, potremo eventualmente ammettere che le applicazioni che la preservino stiano in I .

Siano $A, B \in \mathbb{U}$, con A insieme n -dimensionale, B m -dimensionale. Identifichiamo il prodotto cartesiano $A \times B$ con l'insieme ottenuto per concatenazione di elementi di A e di B :

$$A \times B = \{(x_1, \dots, x_{n+m}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in A, (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in B\}$$

Questa identificazione non solo consente di vedere il prodotto cartesiano come una applicazione interna ad \mathbb{U} , ma permette anche di osservare che, nel presente contesto, non si presentano le situazioni patologiche espresse nel capitolo 1. In particolare, assicura di poter assumere PP come assioma che regoli il prodotto di numerosità. Non è difficile osservare che anche questa possibilità discende dalla struttura particolarmente 'buona' degli insiemi sotto indagine. Nel seguito, con prodotto cartesiano di X, Y intenderemo

sempre l'insieme ottenuto per concatenazione degli elementi di X, Y .

Infine, data una qualsiasi funzione $f : L \rightarrow L$, diremo **estensione di f ad \mathbb{U}** l'applicazione $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Definizione 3.1.2. Diremo che \mathbb{W} è una **famiglia completa di insiemi finito-dimensionali di punti su L** (brevemente **$Fc(L)$**) se:

- $\forall X \in \mathbb{W} \exists n \in \mathbb{N} \mid X \in \wp(\mathbb{E}_n(L))$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{W}_n = \mathbb{W} \cap \wp(\mathbb{E}_n(L))$ è chiusa per sottoinsieme e unioni finite (chiameremo \mathbb{W}_n **sottospazio n -dimensionale di \mathbb{W}**);
- \mathbb{W} è chiusa rispetto al prodotto cartesiano;
- $X \in \mathbb{W}, T$ che preserva i supporti $\Rightarrow T[X] \in \mathbb{W}$.

Per non avere a che fare con strutture banali, si assumeranno sempre due condizioni aggiuntive: in \mathbb{W} c'è sempre almeno un insieme infinito; in \mathbb{W} si hanno tutti i singoletti. Questa seconda condizione (che ci sarà anche di grandissimo aiuto nel corso delle dimostrazioni) ci assicura che ogni insieme finito stia in \mathbb{W} , condizione tutto sommato intuitiva dato che la grandezza dei finiti è facilmente definibile tramite la loro cardinalità.

Sia fissata una $Fc(L) \mathbb{W}$.

Definizione 3.1.3. Una **relazione di equinumerosità** per \mathbb{W} è una relazione di equivalenza \approx che soddisfi le condizioni seguenti:

- (e1) $X \approx Y \Leftrightarrow X \setminus Y \approx Y \setminus X$;
- (e2) se $X_1 \approx X_2$, allora $X_1 \times Y \approx X_2 \times Y$;
- (e3) $X \approx \{a\} \times X \forall a \in L$;
- (e4) Sia $\delta : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ t.c. $\delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_1, x_2, \dots, x_n)$, e $\sigma_j(x_1, \dots, x_n) = (x_j, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{j-1})$ se $1 \leq j \leq n$, $\sigma_j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ altrimenti. Allora $X \approx \sigma_j(X) \approx \delta(X)$;
- (e5) Vale una ed una sola delle seguenti:

- $X \approx Y$;
- $X \approx X'$ per un qualche $X' \subset Y$;
- $Y \approx Y'$ per un qualche $Y' \subset X$.

(e5) permette di definire un ordine su \mathbb{W} . Dati $X, Y \in \mathbb{W}$, diremo **$X < Y \Leftrightarrow X \approx X'$** per un qualche $X' \subset Y$. Come nel capitolo 1, questa proprietà è il rafforzamento di AP che consente di definire una differenza tra numerosità. Nell'ultima sezione di questo capitolo, quando ricercheremo

delle generalizzazioni della numerosità definibili su $\wp(\mathbb{W})$, vedremo che trovare condizioni che assicurino la validità generale di questo principio è uno dei problemi più complicati da affrontare.

Definizione 3.1.4. *Data una relazione di equinumerosità \approx per una $Fc(L)$ \mathbb{W} , diremo **numerosità** per \mathbb{W} con **insieme di numerosità** \mathcal{N} una funzione surgettiva $num : \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{N}$ tale che $num(X) = num(Y) \Leftrightarrow X \approx Y$.*

Un esempio di funzione numerosità è la proiezione al quoziente $\pi : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}/\approx$. Nel seguito vedremo altri esempi di funzioni numerosità, in particolare con immagini contenute in insiemi dotati di una ben precisa struttura algebrica.

La prima verifica da fare, come per ogni nozione sensata di grandezza, è che per gli insiemi finiti l'equinumerosità equivalga alla equipotenza.

Proposizione 3.1.5.

Siano $A, B \in \mathbb{W}$ insiemi finiti. Allora $A \approx B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

Dim: \Leftarrow) Per induzione su $|A| = |B|$. Se $|A| = |B| = 0$, $A = B = \emptyset$, e chiaramente $A \approx B$ per (e5).

Siano poi $A = \{a\}, B = \{b\}$. Se fosse $B < A$, dovremmo avere un sottoinsieme di A equinumeroso a B . Gli unici sottoinsiemi di A sono il \emptyset ed A stesso e, per ipotesi assurda, B non è equinumeroso ad A . Quindi deve essere $B \approx \emptyset$, ma abbiamo già mostrato che nessun insieme non vuoto può essere equinumeroso al vuoto, perciò non può essere $B < A$. Analogamente si dimostra che non può aversi $A < B$, quindi deve essere $A \approx B$.

Supponiamo ora di aver dimostrato l'affermazione per ogni coppia di insiemi di cardinalità n , e facciamo il caso $|A| = |B| = n + 1$. Se $A \cap B \neq \emptyset$, $|A \setminus B| < n + 1$; ma $|A \setminus B| = |A \setminus (A \cap B)| = |B \setminus (A \cap B)| = |B \setminus A|$, da cui segue per ipotesi induttiva $(A \setminus B) \approx (B \setminus A)$, di cui la tesi per (e1). Se invece $A \cap B = \emptyset$, siano $a \in A, b \in B$. $|A \setminus \{a\}| = |B \setminus \{b\}|$ da cui, per ipotesi induttiva, $A \setminus \{a\} \approx B \setminus \{b\}$; inoltre abbiamo dimostrato che $\{a\} \approx \{b\}$, e da (e1) si ottiene $B \approx B' = B \setminus \{b\} \cup \{a\}$, perchè $B \setminus B' = \{b\} \approx \{a\} = B' \setminus B$. $|B'| = |B| = |A|$, e $B' \cap A \neq \emptyset$, quindi $B' \approx A$, da cui $A \approx B$.

\Rightarrow) Supponiamo $A \approx B$. Se avessimo $|A| > |B|$ (l'altro caso è strettamente analogo), prendiamo un $C \subset A \mid |C| = |B|$. Per quanto appena visto, $B \approx C$, ma questo è assurdo per (e5). Dunque deve essere $|A| = |B|$.

Le proprietà della relazione di equinumerosità consentono di dare una struttura di semianello discretamente ordinato ad \mathcal{N} .

Teorema 3.1.6.

Sia $num : \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{N}$ una funzione numerosità per \mathbb{W} associata alla relazione

di equinumerosità \approx . Allora esistono uniche operazioni di somma e prodotto $+, \cdot$ ed un'unica relazione d'ordine $<$ per \mathcal{N} tali che, $\forall X, Y \in \mathbb{W}$:

(sum) $num(X \setminus Y) + num(Y) = num(X)$ se $Y \subset X$;

(prod) $num(X) \cdot num(Y) = num(X \times Y)$;

(ord) $num(X) < num(Y) \Leftrightarrow X < Y$.

Dim: Per prima cosa, osserviamo che, se $X \in \mathbb{W}$ è un elemento n -dimensionale, è possibile trovare, $\forall m > n \in \mathbb{N}$, elementi m -dimensionali in \mathbb{W} che siano equinumerosi ad X , grazie al principio (e3), alla presenza in \mathbb{W} dei singoletti, e alla chiusura di \mathbb{W} per prodotto cartesiano (semplicemente, preso un elemento x in L , si considerano gli insiemi del tipo $\{x\} \times \dots \times \{x\} \times X$). In particolare, se si vogliono confrontare due qualsiasi insiemi di \mathbb{W} , si può sempre assumere che essi abbiano la stessa dimensione e che siano disgiunti (basta prendere un $y \neq x$ in L per fare la costruzione per il secondo insieme). **(sum):** Siano dati $X, Y \in \mathbb{W}$. Come detto sopra, assumiamo che abbiano la stessa dimensione e che siano disgiunti. Definiamo la somma delle numerosità

$$num(X) + num(Y) = num(X \cup Y)$$

Bisogna verificare che la definizione sia indipendente dalla scelta dei rappresentanti. Siano Z, W disgiunti con $Z \approx X, W \approx Y$. Vediamo che $A \cup B \approx X \cup Y$. Possiamo nuovamente supporre che A, B, Z, W abbiano la stessa dimensione e siano disgiunti, sempre per quanto osservato sopra (basta iniettarli in una dimensione più grande di quella di tutti). A questo punto, $Z \cup W \approx Z \cup Y$ segue da (e1), perchè $Z \cup Y \approx Z \cup W \Leftrightarrow (Z \cup Y) \setminus (Z \cup W) \approx (Z \cup W) \setminus (Z \cup Y)$, e $(Z \cup Y) \setminus (Z \cup W) = Y$, $(Z \cup W) \setminus (Z \cup Y) = W$. In maniera del tutto analoga si mostra che $Z \cup Y \approx X \cup Y$, e questo dimostra $X \cup Y \approx Z \cup W$. Quindi la somma è ben definita, e soddisfa la proprietà (sum).

(prod): sia il prodotto come in (prod):

$$num(X) \cdot num(Y) = num(X \times Y)$$

Nuovamente, l'unica cosa da verificare è l'indipendenza dalla scelta dei rappresentanti. Siano X, Y, Z, W come sopra. Da (e2) si ottiene $X \times Y \approx Z \times Y$; da (e4) $Z \times Y \approx Y \times Z$, perchè si può passare dall'uno all'altro semplicemente con permutazioni delle componenti dei loro elementi; nuovamente da (e2) $Y \times Z \approx W \times Z$, da cui $X \times Y \approx Z \times W$ ancora per (e4).

(ord): Evidentemente, le proprietà del $<$ su \mathcal{N} discendono da (e5). Il $<$ definito da (ord) su \mathcal{N} soddisfarà le stesse proprietà del $<$ su \mathbb{W} . L'irriflessività segue da (e5). Per la transitività, siano $A < B < C$. $A < B \Rightarrow \exists A_1 \subset B \mid A_1 \approx A$; analogamente, $\exists B_1 \subset C \mid B \approx B_1$. Dico che $A_1 < B_1$:

infatti non può essere $A_1 \approx B_1$, perchè altrimenti otterremo, da $B_1 \approx B$, che $A_1 \approx B$, cosa impossibile perchè A_1 è un sottoinsieme proprio di B , ed (e5) esclude che possa esserci una relazione di equinumerosità tra un insieme ed un suo sottoinsieme proprio. Analogamente, non può aversi $B_1 < A_1$, altrimenti avremmo $B < A_1$, ed (e5) lo vieta. Quindi $A_1 < B_1$, perciò esiste A_2 con $A_2 \subset B_1$, $A_2 \approx A_1 \approx A$, e $A_2 \subset C$, da cui $A < C$. Quindi $<$ definito su \mathbb{W} è un preordine, e il $<$ su \mathcal{N} è l'ordine corrispondente.

Restano da studiare le proprietà di queste operazioni. La somma è evidentemente commutativa e associativa, dato che l'unione soddisfa queste proprietà. L'elemento neutro (che denoteremo con 0) è, chiaramente, la numerosità del \emptyset . Da (e5) otteniamo anche che, date α, β numerosità, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \exists \gamma \mid \alpha + \gamma = \beta$. In particolare, questo assicura la monotonia della somma rispetto al $<$, da cui si ottiene pure la legge di cancellazione $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$.

Il prodotto è evidentemente commutativo grazie ad (e4), e la sua associatività discende dalla identificazione fatta ad inizio capitolo tra prodotto cartesiano e concatenazione di n -ple. (e3) ci dice che la numerosità dei singoletti, che denoteremo con 1, fa da elemento neutro. Vale anche la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, dato che prodotto cartesiano ed unioni disgiunte la soddisfano. Inoltre, $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ o $\beta = 0$.

\mathbb{N} può essere preso come segmento iniziale di \mathcal{N} rispetto a $<$. Mettendo insieme tutte queste osservazioni, si dimostra che:

Teorema 3.1.7.

$\langle \mathcal{N}, +, \cdot, < \rangle$ è un la parte positiva di un dominio di integrità commutativo discretamente ordinato.

Quali nozioni comuni euclidee sono soddisfatte dalla equinumerosità? La risposta è contenuta nel prossimo:

Teorema 3.1.8.

Una relazione di equinumerosità per una $Fc(L)$ \mathbb{W} soddisfa sia i principi di euclide che PP.

Dim: L'unico principio di cui vada dimostrata la validità è (E4). Infatti, nelle notazioni del capitolo 1, \approx relazione di equivalenza implica (EQ), (SP) è (sum) (ed in questo contesto ha senso soltanto quando X, Y siano insiemi disgiunti della stessa dimensione), (DF) è (e1), (AP) è soddisfatto addirittura nella sua forma forte, e (PP) segue da (prod).

Nella riespressione datane in questo capitolo, E4 consiste delle parti E4.1 ed E4.2. Affrontiamo la prima.

Siano X d_1 -dimensionale, $T(X)$ d_2 -dimensionale, e sia $S = \{Supp(x) \mid x \in X\} =$

$\{Supp(y) \mid y \in T(X)\}$. Per ipotesi, (1) ogni $s \in S$ è supporto dello stesso numero finito di elementi in X ed in $T(X)$. X ha dimensione d_1 , quindi ogni elemento di S ha cardinalità al più d_1 . Si può partizionare X in insiemi X_i in modo che tutti gli elementi di X_i abbiano supporto della stessa cardinalità, diciamo n , e ogni supporto corrisponda ad una sola d_1 -pla. Questo si può fare perchè, fissato un supporto di cardinalità n , in X si hanno al più n^{d_1} elementi con quel supporto, quindi un numero finito. Dato un supporto s di cardinalità n , sia y^s una n -pla con $supp(y^s)=s$, e sia $Y = \{y^s \mid s \in S\}$. $supp(x)=s$, quindi è possibile trovare una τ combinazione finita di applicazioni di tipo σ, δ con $\tau(y^s) = x$. Il fatto notevole è che esistono soltanto un numero finito di τ distinte di questo tipo (precisamente, non più di n^{d_1}). Dunque possiamo partizionare sia X che Y in X_τ, Y_τ al variare di τ tra tutte le possibili applicazioni di questo tipo. Per (e4), $X_\tau \approx Y_\tau \forall \tau$, da cui per (sum) ricaviamo $X \approx Y$. Ma, grazie ad (1), possiamo ripercorrere la costruzione appena fatta per dimostrare che $T(X) \approx Y$, quindi $X \approx T(X)$.

La validità di E4.2 è più semplice da verificare. Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ 1-1, } f[\{1, \dots, m\}] \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dimostriamo la validità di E4.2 facendo vedere che S_f^a si può ottenere a partire da δ, σ_j in un numero finito di passi: data $x = (x_1, \dots, x_m)$, poniamo all'inizio di x le componenti a_i di a con $i \notin f[\{1, \dots, m\}]$, e poi permutiamo sino ad ottenere $S_f^a(x)$. A livello di insiemi X , S_f^a equivale quindi a moltiplicare all'inizio per dei singoletti e poi a fare delle permutazioni, quindi (e3) ed (e4) ci assicurano $X \approx S_f^a(X)$.

3.2 Modelli algebrici delle numerosità

Tenendo come fondamento quanto fatto nel paragrafo precedente, vogliamo occuparci della definizione esplicita di funzioni numerosità per famiglie complete costruite a partire da rette numerabili. Inoltre, supporremo che le rette base siano dotate di una **altezza**, cioè di una funzione $H : L \rightarrow \mathbb{N}$ che sia finite-to-1. Assumeremo anche, senza perdita di generalità, che H sia surgettiva. Questa svolgerà un ruolo simile a quello delle indicizzazioni del capitolo precedente. La differenza fondamentale è che qua si impone una condizione di ‘coerenza di indicizzazioni’ ben più forte di quella per insiemi numerabili non strutturati: ogni n -pla otterrà come indicizzazione il massimo tra le altezze delle sue componenti. Ci si è quindi ridotti dalla massa di tutte le possibili indicizzazioni, che nel contesto del capitolo precedente venivano tutte realizzate, ad una costruzione ‘canonica’ di indicizzazione per il nostro universo. Questo ha una conseguenza particolare: vedremo che come modello delle numerosità potremo prendere nuovamente una iperestensione dei naturali, ma l’aver delimitato le possibili indicizzazioni degli insiemi ci

condurrà ad una riduzione delle condizioni di ultrafiltro.

Inoltre, in un certo senso, la nozione di altezza sorge in maniera più naturale rispetto a quella di indicizzazione: in effetti, sia ad esempio A un anello numerabile su cui sia definita una altezza H (esempi tipici sono $A=\mathbb{Z}$ con H il valore assoluto, o $A = \mathbb{Q}$ ed H una delle indicizzazioni di \mathbb{Q} mostrate nel capitolo precedente). Possiamo estendere H all'anello dei polinomi di A , ponendo $H(\sum_{i \leq n} a_i x^i) = \max\{i, H(a_1), \dots, H(a_n)\}$, e se A è un campo possiamo estendere H alla sua chiusura algebrica prendendo come altezza di ogni elemento di questa chiusura l'altezza del suo polinomio minimo. Questi sono soltanto due dei molti esempi che si possono dare di situazioni in cui, fissata la retta numerabile, una nozione di altezza sorge in maniera del tutto naturale.

Dato un elemento $X \in \mathbb{W}$, diremo **filtrazione** di X generata da H la successione $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, con $X_n = \{(x_1, \dots, x_d) \in X \mid H(x_i) \leq n \text{ per } 1 \leq i \leq d\}$. E' l'analogo delle counting functions del capitolo precedente (definendo l'indice di una n -pla con il massimo delle altezze delle sue componenti, la counting function di X , nel senso del capitolo precedente, altro non è che la successione delle cardinalità degli elementi della filtrazione di X).

Definizione 3.2.1. *Definiamo counting function di X come $f_X(n) = |X_n|$; diremo poi sequenza ipercubica la successione $h = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $h_n = |\{x \in L \mid H(x) \leq n\}|$.*

Evidentemente, la sequenza ipercubica ci fornisce limitazioni per le counting functions. Sia infatti X un insieme d -dimensionale. Quanti possono essere al più gli elementi di X_n ? Una d -pla sta in X_n se e solo se tutte le sue componenti hanno altezza minore o uguale ad n , e il numero di elementi di altezza minore o uguale ad n in L è h_n . Risulta quindi dimostrata la seguente:

Proposizione 3.2.2.

Sia X un insieme d -dimensionale. Allora $\forall n \in \mathbb{N} f_X(n) \leq h_n^d$, il che equivale a dire $f_X \leq h^d$ nello spazio delle successioni con l'ordinamento definito puntualmente.

Questo fatto merita di essere sottolineato. Nel secondo capitolo, le counting functions non erano costrette da nessuna limitazione: anzi, avevamo addirittura dimostrato che qualsiasi funzione crescente poteva svolgere il ruolo di counting function di un qualche insieme numerabile. Quindi non c'erano ordini di crescita proibiti; nel contesto degli insiemi finito dimensionali di punti, invece, abbiamo una limitazione indotta da H : ogni counting function

è polinomialmente limitata dalla sequenza ipercubica, nel senso delineato dalla proposizione precedente.

Il lemma seguente fornisce delle caratterizzazioni delle counting functions in termini di sottoinsiemi delle successioni $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Lemma 3.2.3.

Date una retta numerabile L ed una altezza H , siano

- $A_h = \{s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid \exists k, d \in \mathbb{N} \forall n \geq k \ |s_n| \leq h_n^d\};$
- $B_h = \{s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid \exists d \in \mathbb{N} \ |s| \leq h^d\};$
- $C_h = \{s \in B_h \mid 0 \leq s_n \leq s_{n+1}\}.$

Allora C_h è l'insieme delle counting functions di elementi di \mathbb{W} , B_h è l'insieme delle differenze di elementi di C_h e A_h è il sottoanello di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ generato da C_h .

Inoltre, vale che $A_h = \{f_X - f_Y + s \mid X, Y \in \mathbb{W}, s \text{ definitivamente nulla}\}.$

Dim: Ogni counting function deve stare in C_h perchè è evidentemente crescente per definizione (ogni valore delle counting function è la cardinalità di un insieme, e la successione di questi insiemi è crescente rispetto alla inclusione); viceversa, sia $s \in C_h$, e sia d il minimo intero per cui $|s| \leq h^d$. Costruiamo induttivamente un insieme avente s come counting function: se $n=0$, prendiamo X_0 un insieme d -dimensionale costituito da $s(0)$ elementi aventi tutte componenti di altezza 0; prendiamo poi come X_{n+1} un insieme d -dimensionale di cardinalità $s(n+1) - s(n)$ i cui elementi abbiano una componente di altezza $n+1$ e le altre di altezza minore od uguale ad $n+1$. Tutti gli X_i sono disgiunti; la loro unione è un insieme d -dimensionale avente per counting sequence s . L'ipotesi $|s| \leq h^d$ ci assicura che si possano costruire i vari X_i .

La differenza di due successioni polinomialmente limitate da h è polinomialmente limitata da h , quindi le differenze di elementi di C_h stanno necessariamente in B_h . Viceversa, sia s in B_h . In maniera del tutto analoga a quanto fatto per C_h , costruiamo due insiemi X, Y tali che $f_X - f_Y = s$. Sia d il minimo intero per cui $|s| \leq h^d$. Per $n = 0$, sia Z_0 un insieme $d+1$ dimensionale costituito esclusivamente da $|s(0)|$ elementi di altezza 0; se $s(0) \geq 0$, poniamo $X^0 = Z_0, Y^0 = \emptyset$; altrimenti poniamo $Y^0 = Z_0, X^0 = \emptyset$. Dati poi X^n, Y^n , sia Z_{n+1} un insieme costituito esclusivamente da $|s(n+1) - s(n)|$ elementi di altezza $n+1$ (in particolare, $Z_{n+1} \cap X^n = Z_{n+1} \cap Y^n = \emptyset$); se $s_{n+1} \geq s_n$, poniamo $X^{n+1} = X^n \cup Z_{n+1}, Y^{n+1} = Y^n$, altrimenti $X^{n+1} = X^n$ e $Y^{n+1} = Y^n \cup Z_{n+1}$. Siano $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n, Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y^n$. Per costruzione, $f_X - f_Y = s$, dato che $X^n = X_n, Y^n = X_n$. Quindi gli elementi di B_h sono

tutte e solo le differenze tra counting functions.

Resta da vedere che A_n è il sottoanello di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ generato da C_h . Evidentemente, A_h è un anello, e contiene B_h . Vediamo che ogni suo elemento è generabile con elementi di B_h . Per dimostrarlo, osserviamo che ogni successione e_i , definita come $e_i(n) = 1 \Leftrightarrow n = i, e_i(n) = 0$ altrimenti, appartiene a B_h .

Sia ora s in A_h . Siano $k, d \in \mathbb{N} \mid \forall n \leq k \mid s_n \leq h_n^d$. La successione t , definita come $t(n) = 0 \forall n < k, t(n) = s(n) \forall n \geq k$, sta in B_h . Ma $s = s(0) \cdot e_0 + s(1) \cdot e_1 + \dots + s(k-1)e_{k-1} + t$; sia t , che le e_i stanno in B_h , e a membro destro abbiamo una combinazione lineare finita di queste, che quindi deve stare nell'anello generato da B_h , cioè $s \in \langle B_h \rangle_{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}-\text{anello}} = \langle C_h \rangle_{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}-\text{anello}}$. Inoltre, dalla dimostrazione appena fatta, si deduce anche l'equivalenza tra le due descrizioni di A_h date nell'enunciato.

L'idea, analoga a quella sviluppata nel capitolo precedente, è di costruire la funzione numerosità a partire dalle counting functions. Assumiamo nuovamente l'assioma di approssimazione finita già espresso nel capitolo 2:

(afa) $|X_n| \leq |Y_n| \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{num}(X) \leq \text{num}(Y)$.

(afa) ci assicura che la numerosità degli insiemi numerabili possa essere vista come il limite della loro counting functions. Per questo diremo **continua** una funzione numerosità che soddisfi (afa).

Definiamo un ordinamento parziale su $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$: diremo $s \leq t \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq k \mid s(n) \leq t(n)$.

Oss: Se num soddisfa (afa), vale che $f_X \leq f_Y \Rightarrow \text{num}(X) \leq \text{num}(Y)$.

Dim: Sia k come nella definizione del minore tra successioni. Si ha $|X_k| \leq |Y_k|$. Gli insiemi $X \setminus X_k$ e $Y \setminus Y_k$ soddisfano le condizioni di (afa), quindi $\text{num}(X \setminus X_k) \leq \text{num}(Y \setminus Y_k)$. Ma $\text{num}(X) = \text{num}(X \setminus X_k) + \text{num}(X_k) \leq \text{num}(Y \setminus Y_k) + \text{num}(Y_k) = \text{num}(Y)$, che è la nostra tesi.

Teorema 3.2.4.

Sia $\text{num} : \mathbb{W} \rightarrow N$ una funzione numerosità continua, sia \mathcal{M} l'anello ordinato generato da \mathcal{N} , sia $F : \mathbb{W} \rightarrow A_h$ la funzione che associa ad ogni insieme la sua counting function e sia i l'iniezione di \mathcal{N} in \mathcal{M} . Allora esiste un unico omomorfismo di anelli $\varphi : A_h \rightarrow \mathcal{M}$ tale che $i \circ \text{num} = \varphi \circ F$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W} & \xrightarrow{\text{num}} & \mathcal{N} \\ \downarrow F & & \downarrow i \\ A_h & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M} \end{array}$$

Il \ker di φ è un ideale primo convesso non principale \mathfrak{p} che contiene tutte le successioni definitivamente nulle e che soddisfa questa proprietà euclidea (**eu**): $A_h \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq C_h + \mathfrak{p}$.

Dim: Per quanto visto nel lemma 3.2.2, ogni elemento di A_h si può scrivere come $s = f_X - f_Y + t$, con $X, Y \in \mathbb{W}$, t definitivamente 0. Definiamo

$$\varphi(s) = \text{num}(X) - \text{num}(Y)$$

La definizione è ben posta: se X_1, X_2 sono tali che $f_{X_1} = f_{X_2}$, si ha $|(X_1)_n| = |(X_2)_n| \forall n \in \mathbb{N}$, da cui discende, per continuità, $\text{num}(X_1) = \text{num}(X_2)$.

φ è anche surgettiva (discende dalla costruzione di \mathcal{M}), ed è necessariamente l'unica applicazione che faccia commutare il diagramma.

Vediamo che φ è un omomorfismo. Siano $s_1 = f_{X_1} - f_{Y_1} + t_1, s_2 = f_{X_2} - f_{Y_2} + t_2$, con $X_1 \cap X_2 = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. $s_1 + s_2 = f_{X_1} - f_{Y_1} + f_{X_2} - f_{Y_2} + t_1 + t_2 = f_{X_1 \cup X_2} - f_{Y_1 \cup Y_2} + t_1 + t_2$ per le proprietà delle counting functions rispetto alle unioni disgiunte. $\varphi(s_1 + s_2) = \text{num}(X_1 \cup X_2) - \text{num}(Y_1 \cup Y_2) = \text{num}(X_1) + \text{num}(X_2) - \text{num}(Y_1) - \text{num}(Y_2) = \varphi(s_1) + \varphi(s_2)$.

$s_1 \cdot s_2 = (f_{X_1} - f_{Y_1} + t_1) \cdot (f_{X_2} - f_{Y_2} + t_2) = (f_{X_1} - f_{Y_1})(f_{X_2} - f_{Y_2}) + t_1(f_{X_2} - f_{Y_2} + t_2) + t_2(f_{X_1} - f_{Y_1} + t_1)$. Il prodotto di una successione definitivamente 0 per un'altra è una successione definitivamente zero. Inoltre il prodotto di counting functions di due insiemi corrisponde alla counting function del prodotto cartesiano dei due insiemi, quindi $\varphi(s_1 \cdot s_2) = \text{num}(X_1 \times X_2) + \text{num}(Y_1 \times Y_2) - \text{num}(X_1 \times Y_2) - \text{num}(Y_1 \times X_2) = (\text{per proprietà (prod) del prodotto di numerosità})(\text{num}(X_1) - \text{num}(Y_1)) \cdot (\text{num}(X_2) - \text{num}(Y_2)) = \varphi(s_1) \cdot \varphi(s_2)$.

La proprietà (afa) assicura anche che φ preservi l'ordine, e questo permette di affermare che $\mathfrak{p} = \ker \varphi$ è un ideale convesso. Evidentemente, ogni successione s che sia definitivamente 0 sta in \mathfrak{p} , perchè si può scrivere $s = f_\emptyset - f_\emptyset + s$.

Per surgettività, φ induce un isomorfismo di anelli tra A_h / \mathfrak{p} e \mathcal{M} ; noi sappiamo che \mathcal{N} è un dominio di integrità, quindi anche \mathcal{M} lo è, cioè \mathfrak{p} deve essere primo. Inoltre, gli elementi positivi di A_h modulo \mathfrak{p} sono esattamente le classi di elementi di C_h ; ma ogni elemento di $A_h \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ha un resto non negativo modulo \mathfrak{p} , cioè deve essere \mathfrak{p} -equivalente ad un elemento di C_h , da cui risalendo si determina la proprietà (eu).

Più interessante è il teorema che segue, che fornisce il viceversa di quello precedente, ed esplicita una costruzione di funzione numerosità: dato un ideale primo convesso non principale \mathfrak{p} di A_h , si può costruire in maniera semplice una funzione numerosità avente come immagine le classi di equivalenza modulo \mathfrak{p} di successioni positive in A_h . Nella prossima sezione vedremo come, grazie a questo risultato, si possa prendere come insieme di numerosità

una opportuna iperestensione dei naturali; prima però dobbiamo dimostrare il seguente:

Teorema 3.2.5.

Dato un ideale primo, convesso e non principale \mathfrak{p} in A_h , denotiamo con π la proiezione al quoziente, e sia \mathcal{M} la proiezione di $A_h \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Sia F l'applicazione che associa ad ogni insieme la sua counting function. Allora la composizione $num = \pi \circ F$ è una funzione numerosità continua.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap A_h \\ & \searrow num & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{M} \end{array}$$

Dim: Ogni sequenza s definitivamente 0 sta in \mathfrak{p} per convessità: infatti $s \leq 0$ e $0 \leq s$.

Dobbiamo verificare che $num(X) = num(Y) \Leftrightarrow X \approx Y$. In particolare, va verificata la coerenza di num rispetto ad (e1)-(e5).

(e1): $f_{X \cup Y} = f_{X \setminus Y} + f_{Y \setminus X}$, quindi $f_{X \cup Y} + f_{X \cap Y} = f_{X \setminus Y} + f_{Y \setminus X} + f_{X \cap Y} = f_{X \setminus Y} + f_Y = f_X + f_{Y \setminus X}$. Quindi $\pi \circ F(X) = \pi \circ F(Y) \Leftrightarrow \pi \circ F(X \setminus Y) = \pi \circ F(Y \setminus X)$.

(e2): Siano $X_1 \approx X_2$. $\pi \circ F(X_1) = \pi \circ F(X_2) \Rightarrow f_{X_1} \equiv f_{X_2} \text{ mod } \mathfrak{p} \Rightarrow \forall f_Y \mid Y \in \mathbb{W} f_{X_1} \cdot f_Y \equiv f_{X_2} \cdot f_Y \text{ mod } \mathfrak{p}$, cioè $num(X_1 \times Y) = num(X_2 \times Y)$.

(e3): Sia $a \in L$ con $H(a) = k$. Allora, $\forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq k$, $f_X(n) = f_{\{a\} \times X}(n)$, cioè f_X differisce da $f_{\{a\} \times X}$ soltanto per una sequenza definitivamente nulla, che sta però in \mathfrak{p} , quindi $f_X \equiv f_{\{a\} \times X} \text{ mod } \mathfrak{p}$ e ci siamo.

(e4): Vale semplicemente perchè δ e σ_j sono funzioni che preservano H , e quindi sono F -invarianti.

(e5): Assumiamo che \mathfrak{p} goda della proprietà (eu). Dati $X, Y \in \mathbb{W}$, si può sempre scrivere $f_X - f_Y = s^+ - s^-$, con $s^+, s^- \in A_h \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $s^+ \cdot s^- = 0$, quindi almeno uno tra s^+ ed s^- deve stare in \mathfrak{p} . A meno di scambiare X con Y , si può assumere $s^- \in \mathfrak{p}$. $s^+ \in A_h \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $s^- \in \mathfrak{p}$, quindi per (eu) $s^+ - s^- = s + p$, con $p \in \mathfrak{p}$, $s \in C_h$. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) = 0\}$, e sia n_i una enumerazione crescente dei suoi elementi. Si ha $f_X(n_{i+1}) - f_X(n_i) = f_Y(n_{i+1}) - f_Y(n_i) + s(n_{i+1}) - s(n_i)$. Sia $Z_i \subset X_{n_{i+1}} \setminus X_{n_i}$ di cardinalità $f_Y(n_{i+1}) - f_Y(n_i)$ (si può trovare perchè $s \in C_h \Rightarrow (f_X(n_{i+1}) - f_X(n_i)) > (f_Y(n_{i+1}) - f_Y(n_i))$), e sia $Y' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$. $f_{Y'}(n) = f_Y(n) \forall n \in A$. Assumiamo che, se A è il luogo degli zeri di un elemento di \mathfrak{p} , ogni altra successione avente un soprainsieme di A come luogo degli zeri stia in \mathfrak{p} (lo dimostreremo nella prossima sezione). Accettato questo, si ha che $f_{Y'} - f_Y = 0$ ha come luogo degli zeri un soprainsieme di A , quindi sta in \mathfrak{p} , cioè $num(Y) = num(Y')$, e

Y' è un sottoinsieme di X , come voluto.

(afa): Sia $|X_n| \leq |Y_n| \forall n \in \mathbb{N}$. Di qui segue che $f_X \leq f_Y$, da cui, per convessità di \mathbf{p} , passando al quoziente si ottiene $num(X) \leq num(Y)$.

3.3 Modelli non standard

Il risultato da cui trae spunto il resto di questa sezione è l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra ideali convessi propri di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ e filtri su \mathbb{N} .

Dato un filtro \mathcal{F} , sia

$$I_{\mathcal{F}} = \{s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \mid \exists A \in \mathcal{F} \mid (s(n) = 0 \Leftrightarrow n \in A)\}$$

Dato un ideale I proprio convesso di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, definiamo

$$\mathcal{F}_I = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \exists s \in I (s(n) = 0 \Leftrightarrow n \in A)\}$$

Proposizione 3.3.1.

Per ogni filtro \mathcal{F} , $I_{\mathcal{F}}$ è un ideale proprio convesso di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$; viceversa, per ogni I ideale proprio convesso di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, \mathcal{F}_I è un filtro su \mathbb{N} . Inoltre, queste associazioni mappano ideali primi in ultrafiltri e viceversa.

Dim: Sia I un ideale convesso. Dimostriamo che \mathcal{F}_I è un filtro su \mathbb{N} . Il vuoto non vi appartiene: supponiamo sia data $s \in I$, con $s(n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $s(n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Però questa condizione, unita alla convessità, ci assicura che la successione costante 1 debba stare in I , il che è assurdo perchè I è un ideale proprio; $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ perchè è il luogo degli zeri della successione che vale costantemente 0.

\mathcal{F}_I è chiuso per soprainsieme: sia $A \in \mathcal{F}_I$, e $A \subset B$. Sia s_A una successione in I avente A come luogo di zeri. Definiamo s' come $s'(n) = 0$ se $n \in B \setminus A$; $s'(n) = 1$ altrimenti. $s_A \cdot s'$ sta in I per proprietà di ideale, e il suo luogo degli zeri è esattamente B , quindi $B \in \mathcal{F}_I$.

\mathcal{F}_I è chiuso per intersezioni: siano $A, B \in \mathcal{F}_I$, $s_A, s_B \in I$ come sopra. Possiamo supporre che s_A ed s_B siano successioni a valori non negativi, a meno di moltiplicarle per un qualche elemento di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. I ideale, quindi $s_A + s_B \in I$, e l'insieme di zeri di $s_A + s_B$ è esattamente $A \cap B$.

Sia ora I primo. Siano dati A, B con $A \cup B \in \mathcal{F}_I$. La successione $s_{A \cup B}$ si può scrivere come prodotto di s_A ed s_B : $s_A(n) = 0 \Leftrightarrow n \in A$, $s_A(n) = 1$ altrimenti; $s_B(n) = 0 \Leftrightarrow n \in B$, $s_B(n) = 1$ se $n \in A \setminus B$, $s_B(n) = s_{A \cup B}(n)$ altrimenti. Vale che $s_{A \cup B} = s_A \cdot s_B$, perciò deve essere $s_A \in I$ o $s_B \in I$, quindi almeno uno tra A e B sta in \mathcal{F} , cioè \mathcal{F} è un ultrafiltro.

Sia ora \mathcal{F} un filtro. Dimostriamo che $I_{\mathcal{F}}$ è un ideale proprio di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$: è proprio perchè nessuna successione priva di zeri può starci; lo 0 sta in $I_{\mathcal{F}}$ perchè \mathbb{N}

sta in \mathcal{F} ; siano s_A, s_B in $I_{\mathcal{F}}$, con A, B insiemi di zeri. Allora $s_A + s_B$ ha come insieme di zeri un soprainsieme di $A \cap B$, e quindi sta in I . Data poi s qualsiasi, il luogo di zeri di $s \cdot s_A$ include A , quindi nuovamente $s \cdot s_A \in I$. Infine, se s_A sta in \mathcal{F} anche $-s_A$ deve starci perchè hanno lo stesso insieme di zeri. E' convesso perchè, se $s_A \geq 0$ è un suo elemento (e supporremo senza perdita di generalità che $s_A(n) \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$), ogni s tale che $0 \leq s \leq s_A$ ha come insieme degli zeri un soprainsieme di A , e quindi sta in $I_{\mathcal{F}}$.

Sia ora \mathcal{F} un ultrafiltro. Se $s_A \cdot s_B$ sta in I , e come al solito A e B sono i rispettivi insiemi di zeri, si ha che $\{n \in \mathbb{N} \mid s_A(n) \cdot s_B(n) = 0\} = A \cup B \in \mathcal{F}$. Per proprietà di ultrafiltro quindi almeno uno tra A e B sta in \mathcal{F} , cioè almeno una tra s_A e s_B sta in I , quindi I è primo.

Data $s \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, denotiamo $\mathbf{Z}_s = \{n \in \mathbb{N} \mid s(n) = 0\}$.

Proposizione 3.3.2.

Sia I un ideale primo, proprio e convesso di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Sia $s \in I$, e sia $t \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Allora $Z_s = Z_t \Rightarrow t \in I$.

Dim: Come già osservato, si può supporre senza perdita di generalità che $0 \leq s$. Si può pure supporre $0 \leq t$. Infatti, sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid t(n) < 0\}$. Sia γ la successione che vale 1 su A^c , -1 su A . $\gamma \cdot t \geq 0$. Se $\gamma \cdot t \in I$, $t \in I$, perchè γ non può starci (come visto nel corso della dimostrazione della proposizione precedente), ma I è primo, quindi almeno t deve essere un suo elemento.

Sia quindi $0 \leq t, 0 \leq s$. Siano $A = \{n \in \mathbb{N} \mid t(n) \leq s(n)\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid s(n) < t(n)\}$. Definiamo α così: se $n \in A, \alpha(n) = 1$; se $n \in B, \alpha(n) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \cdot s(n) > t(n)\}$ (la definizione è ben posta per archimedecità di \mathbb{N}). Per proprietà di ideale, $s \cdot \alpha \in I$. Per costruzione però $0 \leq t \leq s \cdot \alpha$, da cui per convessità concludiamo $t \in I$.

Si è così dimostrata l'affermazione lasciata in sospenso nel corso della dimostrazione del teorema 3.2.4. Inoltre, questa proposizione consente di dimostrare che $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{I_{\mathcal{F}}}$ e $I = I_{\mathcal{F}_I}$.

I prossimi risultati ci permetteranno di riesprimere il risultato del teorema 3.2.4 in termini di iperestensioni dei naturali. Il lemma fondamentale è il seguente:

Lemma 3.3.3.

Sia I un ideale primo di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, e sia \mathcal{U} l'ultrafiltro corrispondente su \mathbb{N} . Allora $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/I$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$.

Dim: L'idea è che l'isomorfismo non debba essere altro che l'applicazione φ tale che, se π_1 denota la proiezione di $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ su $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/I$, π_2 quella su $\mathbb{Z}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$, valga $\pi_2 = \varphi \circ \pi_1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/I \\ & \searrow \pi_2 & \downarrow \phi \\ & & \mathbb{Z}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

Sia data quindi $[f]_I \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/I$. Definiamo $\varphi([f]_I) = [f]_{\mathcal{U}}$. La definizione è ben posta: siano f, g nella stessa classe di equivalenza rispetto ad I . Allora $f - g \in I$, quindi $\{n \in \mathbb{N} \mid (f - g)(n) = 0\} \in \mathcal{U}$, che non è altro che la definizione di \mathcal{U} -equivalenza. φ rispetta sia la somma che il prodotto, essendo queste definite per classi di equivalenza. φ è iniettiva: sia f con $\varphi([f]_I) = [0]_{\mathcal{U}}$. Allora l'insieme degli 0 di f sta in \mathcal{U} , perciò f sta in I (per come è definita la corrispondenza tra ideali ed ultrafiltri), quindi $[f]_I = [0]_I$ e ci siamo. La surgettività è evidente, e questo dimostra il teorema.

L'inversa di φ altro non è che l'applicazione $\tau([f]_{\mathcal{U}}) = [f]_I$.

Nel teorema 3.2.3, era stata isolata la proprietà (eu) per l'ideale I . Avendo come obiettivo la riespressione del risultato di quel teorema in termini di iperestensioni dei naturali, dobbiamo per prima cosa tradurre (eu) in una condizione di ultrafiltro.

Proposizione 3.3.4.

La condizione (eu) per ideali è equivalente alla seguente condizione per gli ultrafiltri:

$$(eu) \forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cap A_h \exists U_0 \in \mathcal{U} \mid \forall m, n \in U_0 \ n \leq m \Rightarrow f(n) \leq f(m)$$

Dim: Supponiamo valga (eu) per gli ideali. Data f come nelle ipotesi, (eu) ci permette di scrivere $f = c + p$, con $c \in C_h, p \in \mathbf{p}$. Allora $f - c \equiv 0 \pmod{\mathbf{p}}$, cioè $f \equiv c \pmod{\mathcal{U}}$, da cui la tesi (perchè per c la tesi è vera per appartenenza a C_h).

Il viceversa procede esattamente allo stesso modo: se vale (eu) per l'ultrafiltro, vuol dire che per ogni $f \in A_h \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists g \in C_h$ con $f \equiv g \pmod{\mathcal{U}}$, cioè $f \equiv g \pmod{I}$, quindi $f \in C_h + \mathbf{p}$.

La condizione di ultrafiltro della proposizione ricorda da vicino una delle condizioni equivalenti della selettività. Però (eu) è più debole: infatti, si richiede la \mathcal{U} -equivalenza con funzioni non decrescenti non per qualsiasi successione di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ma solo per quelle successioni che siano polinomialmente limitate da h , e non ogni funzione di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è polinomialmente limitabile da un'altra assegnata: data f , basta considerare g definita così: $g(n) = f^n(n) + 1$.

Definizione 3.3.5. Sia fissata una successione $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Diremo che un ultrafiltro \mathcal{U} è **g -monotono** se, $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, f \leq g \Rightarrow \exists s$ non decrescente \mathcal{U} -equivalente ad f . Si dirà poi che l'ultrafiltro è **g -euclideo** se è g^n -monotono per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ad esempio, $\forall n \in \mathbb{N}$, un qualsiasi ultrafiltro è n -monotono. Osserviamo che ogni ultrafiltro selettivo è, in particolare, g -euclideo $\forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (e questa è una condizione chiaramente equivalente alla selettività).

Adesso possiamo riesprimere il teorema 3.2.3 in termini di ipernaturali. La proprietà (eu) dell'ideale, assieme al lemma precedente, ci consente di affermare che debba esistere un unico ultrafiltro H -euclideo (con H l'altezza su L) \mathcal{U} tale che $\text{num}(X) = \text{num}(Y) \Leftrightarrow [f_X]_{\mathcal{U}} = [f_Y]_{\mathcal{U}}$. Quindi vale il seguente:

Teorema 3.3.6.

Una funzione $\text{num} : \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{N}$ è una funzione numerosità continua se e solo se esistono un ultrafiltro \mathcal{U} H -euclideo su \mathbb{N} e una iniezione isomorfa j di \mathcal{N} in $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$ tali che, se $F : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ indica la funzione che associa ad ogni insieme la sua counting function, e $\pi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$ è la proiezione al quoziente, si abbia $\pi \circ F = j \circ \text{num}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ \text{num} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{N} & \xrightarrow{j} & \mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

\mathcal{U} e j sono univocamente determinati dalle condizioni precedenti, l'immagine di j è il semianello convesso generato dalle classi di \mathcal{U} -equivalenza di funzioni non decrescenti polinomialmente delimitate da h .

3.4 Estensioni

In questa sezione, supporremo assegnata una numerosità num per tutta $\mathbb{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_n(L)$, con l'immagine di num inclusa in una opportuna iperestensione dei numeri naturali $\mathbb{N}_{\mathcal{V}}^{\mathbb{N}}$. Inoltre, dati due insiemi $X, Y \in \wp(\mathbb{W})$, continuiamo ad identificare il prodotto cartesiano $X \times Y$ con l'insieme $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, ottenuto concatenando tutte le possibili coppie di elementi di X ed Y .

Dato un insieme $X \in \wp(\mathbb{W})$, diremo **parte n -dimensionale** di X l'insieme $\mathbf{X}_n = X \cap \mathbb{E}_n$. La prima generalizzazione riguarda gli elementi di $\wp(\mathbb{W})$ costituiti da un numero finito di parti finito-dimensionali, cioè insiemi

$X \in \wp(\mathbb{W})$ per cui esista $F \subset \mathbb{N}$ finito con $X = \bigcup_{n \in F} X_n$. Un insieme di questo tipo sarà detto **semi-finito dimensionale**.

Sia dunque **Fd** il sottoinsieme di $\wp(\mathbb{W})$ costituito da tutti e soli gli insiemi semi-finito dimensionali. Osserviamo che **Fd** è chiuso per unioni e prodotti cartesiani.

Definizione 3.4.1. Dato $X \in Fd$, definiamo $\widetilde{num}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} num(X_n)$.

Questa è chiaramente una estensione di num : per ogni insieme X finito dimensionale, $num(X) = \widetilde{num}(X)$.

Siano X_0, \dots, X_n le parti finito dimensionali di X , e siano $\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_n$ degli insiemi disgiunti, tutti della stessa dimensione, costruiti in modo da avere $num(X_i) = num(\tilde{X}_i) \forall i = 1, \dots, n$. Sia \tilde{X} l'insieme ottenuto facendo l'unione disgiunta degli \tilde{X}_i ; allora $\widetilde{num}(X) = num(\tilde{X})$, per proprietà (sum) di num , da cui discende ovviamente $\widetilde{num}(X) = \widetilde{num}(Y) \Leftrightarrow num(\tilde{X}) = num(\tilde{Y})$.

Vale chiaramente un principio di approssimazione, che discende dalle regole di corenza di somma ed ordine per $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: siano dati $X, Y \in Fd$, e siano \tilde{X}, \tilde{Y} come sopra.

(sap): $|\tilde{X}_n| \leq |\tilde{Y}_n| \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \widetilde{num}(X) \leq \widetilde{num}(Y)$.

Questo principio può riformularsi dicendo semplicemente che se un insieme semi-finito dimensionale X ha ogni componente meno numerosa di quella di un altro insieme Y , $\widetilde{num}(Y) \geq \widetilde{num}(X)$:

(sap): Siano $X, Y \in Fd$, $X = \bigcup_{n \in F_1} X_n, Y = \bigcup_{n \in F_2} Y_n$. Se $\forall n \in F_1$ $num(X_n) \leq num(Y_n)$, vale $\widetilde{num}(X) \leq \widetilde{num}(Y)$.

Proposizione 3.4.2.

\widetilde{num} soddisfa (sum) ma non soddisfa (pp); vale però questo indebolimento di (pp): **(hpp):** $\forall X, Y \in Fd, \widetilde{num}(X \times Y) \leq \widetilde{num}(X) \cdot \widetilde{num}(Y)$.

Dim: Siano $X, Y \in Fd, X \cap Y = \emptyset$. Allora 1) $\forall n \in \mathbb{N} X_n \cap Y_n = \emptyset$; 2) $\forall n \in \mathbb{N} (X \cup Y)_n = X_n \uplus Y_n$.

Quindi $\widetilde{num}(X \cup Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} num((X \cup Y)_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} num(X_n \cup Y_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (num(X_n) + num(Y_n)) =$ (perchè la somma è finita) $= \sum_{n \in \mathbb{N}} num(X_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} num(Y_n) = \widetilde{num}(X) + \widetilde{num}(Y)$.

(pp) non vale: ad esempio, sia $X = \{\{(1)\}, \{(1, 2)\}\}, Y = \{\{(3)\}, \{(2, 3)\}\}$ (per semplicità si è posto $L = \mathbb{N}$). Allora $X \times Y = \{\{(1, 3)\}, \{(1, 2, 3)\}, \{(1, 2, 2, 3)\}\}$, e (pp) è falsificato.

Dall'esempio si vede che (pp) non può valere perchè possono presentarsi assorbimenti nel fare il prodotto di n -ple. Prendiamo il caso in cui questi

assorbimenti non si presentino. Allora $(X \times Y)_n = \bigcup_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i+j=n\}} X_i \times Y_j$, quindi $num(X \times Y)_n = \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i+j=n\}} num(X_i \times Y_j) = \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i+j=n\}} num(X_i) \cdot num(Y_j)$. Sommando su $n \in \mathbb{N}$, si trova $\widetilde{num}(X \times Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i+j=n\}} (num(X_i) \cdot num(Y_j)) = \widetilde{num}(X) \cdot \widetilde{num}(Y)$. Quindi nei casi senza assorbimenti (pp) vale, i casi con assorbimento riducono la numerosità, da cui otteniamo (hpp).

Dalla dimostrazione di (hpp) si vede che ciò che falsifica (pp) è l'assorbimento che si genera nel prodotto cartesiano di sottoinsiemi qualsiasi di \mathbb{W} , e che in assenza di assorbimento (pp) vale. Sicuramente, se uno tra X ed Y è finito dimensionale, $(x_1.y_1) = (x_2.y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$ (dove con $(a.b)$ si indica la concatenazione di a e b), quindi non si hanno assorbimenti. Un altro caso semplice di validità di (pp) si ha se vale questa condizione: $\forall n \in \mathbb{N} \exists! i \in \mathbb{N}, \exists! j \in \mathbb{N} \mid X_i \neq \emptyset, Y_j \neq \emptyset, i + j = n$. Nel caso generale, la condizione (decisamente più complicata delle precedenti da verificare) che ci assicuri la mancanza di assorbimenti in $X \times Y$ è la seguente:

(pd): (Prodotto Disgiunto) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j), (h, k) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = h + k = n, (X_i \times Y_j) \cap (X_h \times Y_k) = \emptyset$.

Rimane da analizzare la proprietà della differenza. Ricordo che il principio (diff) afferma che $\forall \eta \leq num(X) \exists Y \subseteq X \mid num(Y) = \eta$.

Proposizione 3.4.3.

La proprietà della differenza per num è equivalente a quella per \widetilde{num} : vale che $\forall \eta < num(X) \exists Y \subseteq X \mid num(Y) = \eta \Leftrightarrow \forall \eta' < \widetilde{num}(A) \exists B \subseteq A \mid \widetilde{num}(B) = \eta'$.

Dim: La seconda proprietà implica evidentemente la prima, perchè $\mathbb{W} \subseteq Fd$. Viceversa, dati X e η , sia i il massimo indice per cui $\sum_{n < i} num(X_n) = \mu \leq \eta$, e sia m il più piccolo indice maggiore di i per cui $X_m \neq \emptyset$. Per costruzione, $num(X_m) \geq \eta - \mu$, quindi per ipotesi esiste un $Y_m \subseteq X_m \mid num(Y_m) = \eta - \mu$. Allora $Y = \bigcup_{n < m} X_n \cup Y_m$ ha $num(Y) = \eta$.

Quindi si può passare da $num : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a $\widetilde{num} : Fd \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ semplicemente facendo le somme delle numerosità delle componenti finito-dimensionali, ottenendo una misura di grandezza avente immagine contenuta nell'insieme delle numerosità di num .

La seconda generalizzazione riguarda tutto $\wp(\mathbb{W})$. Sia $X \in \wp(\mathbb{W})$. Chia-

miamo $\mathbf{X}_{\leq n} = \bigcup_{i \leq n} X_n$. Chiaramente, $X_{\leq n}$ è un insieme semi-finito dimensionale.

Definizione 3.4.4. Dato $X \in \wp(\mathbb{W})$, diremo *counting sequence* di X la funzione $\alpha_X(\mathbf{n}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{num}(X_n) = \widetilde{\text{num}}(X_{\leq n})$. Se \mathcal{U} è un ultrafiltro non principale su \mathbb{N} , definiamo una funzione numerosità $\overline{\text{num}}$ ponendo, per ogni $X \in \wp(\mathbb{W})$, $\overline{\text{num}}(X) = [\alpha_X]_{\mathcal{U}}$

Come sempre, identifichiamo ogni elemento x di $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$ con la classe di equivalenza della successione che vale costantemente x .

Proposizione 3.4.5.

1) X finito-dimensionale $\Rightarrow \text{num}(X) = \overline{\text{num}}(X)$; 2) X semi-finito dimensionale, allora $\widetilde{\text{num}}(X) = \overline{\text{num}}(X)$; in particolare, $\overline{\text{num}}$ soddisfa FIN.

Dim: Per dimostrare la proprietà 2 ricordiamo per prima cosa che \mathcal{U} , per non principalità, estende il filtro di Frèchet. Sia $m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \neq \emptyset\}$. La successione α_X , per $n \geq m$, è costante e vale esattamente $\widetilde{\text{num}}(X)$. Quindi è \mathcal{U} -equivalente alla successione globalmente costante che vale $\widetilde{\text{num}}(X)$, che è, nelle solite identificazioni fatte per le iperestensioni, $\widetilde{\text{num}}(X)$. Da qui discende FIN perchè ogni elemento finito di $\wp(\mathbb{W})$ è un insieme semi-finito dimensionale, e $\widetilde{\text{num}}$ soddisfa FIN. La proprietà 1 discende poi dalla 2, essendo $\text{num}(X) = \widetilde{\text{num}}(X)$ per ogni insieme finito dimensionale.

$\overline{\text{num}}$ soddisfa il seguente assioma di approssimazione del tutto analogo ad (afa):

$$(\mathbf{nap}): \forall n \in \mathbb{N} \widetilde{\text{num}}(X_{\leq n}) \leq \widetilde{\text{num}}(Y_{\leq n}) \Rightarrow \overline{\text{num}}(X) \leq \overline{\text{num}}(Y)$$

la cui validità è del tutto evidente per come sono state definite le numerosità.

Vogliamo studiare in maniera più approfondita le proprietà algebriche di $\overline{\text{num}}$.

Proposizione 3.4.6.

$\overline{\text{num}}$ soddisfa (sum) ma non (pp); vale però l'analogo di (hpp): $\overline{\text{num}}(X \times Y) \leq \overline{\text{num}}(X) \cdot \overline{\text{num}}(Y)$.

Dim: La dimostrazione di (sum) è identica a quella fatta per $\widetilde{\text{num}}$: siano $X, Y \in \wp(\mathbb{W})$, $X \cap Y = \emptyset$. Si ha $\forall n \in \mathbb{N} X_{\leq n} \cap Y_{\leq n} = \emptyset$. Quindi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\text{num}}((X \cup Y)_{\leq n}) = \widetilde{\text{num}}(X_{\leq n}) + \widetilde{\text{num}}(Y_{\leq n})$, da cui la tesi. (pp) non vale perchè per i semi-finiti abbiamo visto che $\overline{\text{num}}$ e $\widetilde{\text{num}}$ coincidono, e $\widetilde{\text{num}}$ non soddisfa (pp).

Per dimostrare (hpp), calcoliamo $\alpha_X(n) \cdot \alpha_Y(n)$ e $\alpha_{X \times Y}(n)$.

$$\begin{aligned} \alpha_X(n) \cdot \alpha_Y(n) &= \widetilde{num}(X_{\leq n}) \cdot \widetilde{num}(Y_{\leq n}) = (\sum_{i \leq n} num(X_i)) \cdot (\sum_{i \leq n} num(Y_i)); \\ \alpha_{X \times Y}(n) &= \widetilde{num}((X \times Y)_{\leq n}) = \widetilde{num}(\bigcup_{i \leq n} (X \times Y)_i) = \sum_{i \leq n} \widetilde{num}((X \times Y)_i) \\ &= \sum_{i \leq n} num((X \times Y)_i) = \sum_{i \leq n} (\sum_{\{(j,k) | k+j=i\}} num(X_j) \cdot num(Y_k)) = \\ &= \sum_{i \leq n} (num(Y_i) \cdot \sum_{k \leq (n-i)} num(X_k)) \leq (\sum_{i \leq n} num(X_i)) \cdot (\sum_{i \leq n} num(Y_i)), \end{aligned}$$

da cui la tesi.

La validità di AP è evidente dalle definizioni (semplicemente, se $Y \subset X$ ed $x \in X \setminus Y$ ha altezza n , $\forall m \geq n$ si ha $\alpha_X(m) > \alpha_Y(m)$).

Considerare insiemi che possono avere componenti di dimensione arbitraria genera però più di un problema. Abbiamo già visto che PP, in generale, non vale; per \widetilde{num} avevamo però identificato la proprietà (dp) che ne garantiva la validità per alcuni casi particolari. Considerando \overline{num} , invece, (dp) cessa di essere una condizione sufficiente per PP: sia ad esempio $a \in L$. Consideriamo l'insieme $X = \{a, (a, a), (a, a, a), \dots\}$ costruito selezionando in ciascun $\mathbb{E}_n(L)$ la n -pla avente tutte le componenti uguali ad a . Se valesse (dp), dovremmo avere $num(\{a\} \times X) = num(X)$. Invece $num(\{a\} \times X) = num(X) - 1$, poichè $\{a\} \times X = X \setminus \{a\}$. In particolare, questo stesso esempio mostra come non possa valere neppure il principio (e3).

Rimane da affrontare il problema della differenza. Iniziamo osservando che l'insieme con la numerosità più grande di tutte è \mathbb{W} . Quindi ogni successione approssimante sarà limitata da $\alpha_{\mathbb{W}}$.

Proposizione 3.4.7.

Sia $\omega_0 = num(L)$. Allora, $\forall n > 0 \in \mathbb{N}$, $\alpha_{\mathbb{W}}(n) = \sum_{i \leq n} \omega_0^i$.

Dim: Per ogni $n > 0$ $num(\mathbb{E}_n(L)) = \omega_0^n$, come si vede facilmente per applicazione ripetuta di (prod). Quindi $\alpha_{\mathbb{W}}(n) = \widetilde{num}(\mathbb{W}_{\leq n}) = \widetilde{num}(\bigcup_{i \leq n} \mathbb{E}_i(L)) = \sum_{i \leq n} num(\mathbb{E}_i(L)) = \sum_{i \leq n} \omega_0^i$.

Sia ora dato $X \in \wp(\mathbb{W})$, e sia $\eta \leq \alpha_X$. Vogliamo determinare $Y \subset X \mid \overline{num}(Y) = \eta$. Nella sezione precedente avevamo dato la definizione di monotia di un ultrafiltro su \mathbb{N} rispetto ad elementi di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; possiamo ripetere la definizione utilizzando funzioni λ definite da \mathbb{N} in $\mathbb{N}_{\downarrow}^{\mathbb{N}}$, dicendo che un ultrafiltro \mathcal{U} su \mathbb{N} è λ -monotono se $\forall \eta \in (\mathbb{N}_{\downarrow}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \mid \eta \leq \lambda, \exists A \in \mathcal{U}$ tale che η è non decrescente su A .

Proposizione 3.4.8.

\overline{num} soddisfa (diff) $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ è $\alpha_{\mathbb{W}}$ -monotono e num soddisfa (diff).

Dim: \Leftarrow): Sia dato $X \in \wp(\mathbb{W})$, e sia $\eta \leq \alpha_X$. Supponiamo, per semplicità, che la relazione d'ordine tra le due sia valida per ogni $n \in \mathbb{N}$. Le

condizioni su \mathcal{U} ci assicurano che $\exists A \in \mathcal{U} \mid \eta$ sia non decrescente su A , e che esista $B \in \mathcal{U} \mid \alpha_X - \eta$ sia non decrescente su B . Sia $C = A \cap B \in \mathcal{U}$. Siano $n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$ i suoi elementi.

Costruiamo $Y \subseteq X$ con $\overline{num}(Y) = \eta$ per induzione su k .

Per $k = 0$, consideriamo $\eta(n_0)$ e $\widetilde{num}(X_{\leq n_0}) = \alpha_X(n_0)$. Dato che $\eta(n_0) \leq \alpha_X(n_0)$, la proprietà diff di num , che è equivalente a quella di \widetilde{num} , ci assicura di poter selezionare $Y_{\leq n_0} \subseteq X_{\leq n_0}$ con $\widetilde{num}(Y_{\leq n_0}) = \eta(n_0)$.

Sia ora definito $Y_{\leq n_k} \subseteq X_{\leq n_k}$ con $\widetilde{num}(Y_{\leq n_k}) = \eta(n_k)$, e consideriamo n_{k+1} . Siano $\alpha_{k+1} = \alpha_X(n_{k+1}) - \alpha_X(n_k)$ ($\alpha_{k+1} \geq 0$ perchè α_X è non decrescente), e sia $\eta_{k+1} = \eta(n_{k+1}) - \eta(n_k)$. η_{k+1} è maggiore di 0 perchè $C \subseteq A$, e $\alpha_{k+1} \geq \eta_{k+1}$ perchè $C \subseteq B$. Consideriamo l'insieme semi-finito dimensionale $X_{k+1} = X_{\leq n_{k+1}} \setminus X_{\leq n_k}$. $\widetilde{num}(X_{k+1}) = \alpha_{k+1}$, quindi possiamo selezionarne un sottoinsieme Y_{k+1} con $\widetilde{num}(Y_{k+1}) = \eta_{k+1}$. Per costruzione, $Y_{\leq n_k} \cap Y_{k+1} = \emptyset$. Sia $Y_{\leq n_{k+1}} = Y_{\leq n_k} \cup Y_{k+1}$. Per costruzione, $\alpha_{Y_{\leq n_{k+1}}}(n_i) = \eta(n_i)$ per ogni $i \leq k + 1$.

Sia ora $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_{\leq k}$. Questo è l'insieme cercato: infatti, $Y \subseteq X$ perchè ogni $Y_{\leq k} \subseteq X$; inoltre, per ogni $n_k \in C$, $\alpha_Y(n_k) = \widetilde{num}(Y_{\leq n_k}) = \eta(n_k)$, da cui $\overline{num}(Y) = \eta$.

\Rightarrow): Supponiamo \overline{num} soddisfi (diff). Dato che $\overline{num} = num$ sui finito dimensionali, anche num soddisfa (diff). Sia poi $\eta < \alpha_W$. Per (diff), è possibile trovare $X \subseteq \mathbb{W}$ con $\alpha_Y = \eta$. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_X(n) = \eta(n)\}$. α_Y è non decrescente, quindi η è non decrescente su A , perciò \mathcal{U} è $\alpha_{\mathbb{W}}$ -monotono.

Il problema è che, sicuramente, ultrafiltri $\alpha_{\mathbb{W}}$ -monotoni non esistono! Infatti, in $(\mathbb{N}_{\mathcal{V}}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ ci sono successioni strettamente decrescenti: ad esempio, se η è un elemento infinito di $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathcal{V}}^{\mathbb{N}}$ con $f(n) = \eta - n$ è una successione strettamente decrescente. Quindi, qualsiasi sia l'ultrafiltro non principale \mathcal{U} considerato su \mathbb{N} , la classe di equivalenza di f non conterrà mai funzioni non decrescenti. Avendo chiaro il perchè non esistano ultrafiltri $\alpha_{\mathbb{W}}$ -monotoni, si riesce ad esibire una situazione in cui, sicuramente, la differenza non può valere. Sia $Y = \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{E}_n(L) \setminus A_n)$, dove $A_n \subset \mathbb{E}_n(L)$ sia un insieme di cardinalità $n - 1$. Sia invece $X = \bigcup_{n > 1} \mathbb{E}_n(L)$. Chiaramente, $\overline{num}(Y) > \overline{num}(X)$: infatti, detta ω_0 la numerosità di L , si ha $\forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha_Y(n) - \alpha_X(n) = \omega_0 - n > 0$, perchè ω_0 è infinita. Ma non esiste nessun sottoinsieme X' di Y equinumeroso ad X : se esistesse tale X' , avremmo che la counting sequence di $Y \setminus X'$ dovrebbe essere una funzione \mathcal{U} -equivalente ad $\alpha_Y - \alpha_X$, che abbiamo appena dimostrato essere strettamente decrescente, e questo è un assurdo perchè, per costruzione, le counting sequence sono funzioni non decrescenti.

Un modo per capire (a livello intuitivo) perchè saltino fuori questo genere

di problematiche, è richiamare un paio di risultati di teoria degli insiemi. Il primo è che $\mathbb{N}_{\mathcal{V}\mathcal{U}}^{\mathbb{N}\mathbb{N}}$ è isomorfo a $\mathbb{N}_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{U}}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Il secondo è che, dati comunque due ultrafiltri \mathcal{U}, \mathcal{V} , il prodotto $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ non è mai selettivo. Ma noi sappiamo che le condizioni necessarie ad avere la differenza sono strettamente analoghe a quelle della selettività, quindi è intuitivo aspettarsi che i prodotti del tipo $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ non le soddisfino.

C'è un metodo per provare ad aggirare queste problematiche. $\overline{num}(X)$ è definita a partire da una successione di sottoinsiemi di X , a ciascuno dei quali viene associata una successione definente la sua numerosità. Questa costruzione di 'successioni di successioni' può essere fatta in un unico passaggio. La convenienza nel procedere in questa maniera risiede in un risultato riguardante gli ultrafiltri: abbiamo appena visto che le numerosità costruite prima definendo una numerosità sugli insiemi finito dimensionali e poi estendendola a tutte le parti di \mathbb{W} conducono a ultrafiltri prodotto su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e con queste costruzioni è impossibile ottenere la proprietà della differenza. Però gli ultrafiltri su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ non sono tutti del tipo 'prodotto di ultrafiltri sui naturali': procedendo in maniera diretta a partire da successioni indicizzate con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si ha a disposizione una classe di ultrafiltri più ampia per fare le costruzioni; in particolare si hanno a disposizione gli ultrafiltri selettivi su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il che ci consentirà di costruire nuovi tipi di numerosità che potranno godere della proprietà della differenza.

Definizione 3.4.9. Dato $X \in \wp(\mathbb{W})$, definiamo **funzione biapprossimante di X** la funzione $\beta_X(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = |\{x \in X \mid x \in X_{\leq m} \text{ e } H(x) \leq n\}|$.

Evidentemente, per ogni $X \in \wp(\mathbb{W})$ $\beta_X \leq \beta_{\mathbb{W}}$. Calcoliamo quindi $\beta_{\mathbb{W}}$. Ricordiamo che $\forall n \in \mathbb{N} \ h(n) = |\{x \in L \mid H(X) \leq n\}|$.

Proposizione 3.4.10.

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \beta_{\mathbb{W}}(m, n) = \frac{h(n)^{m+1} - h(n)}{h(n) - 1}$$

Dim: Per induzione su m . Se $m = 1$, $\beta_{\mathbb{W}}(0, n)$ è, per definizione, il numero di elementi in L di altezza al più n , cioè $\beta_{\mathbb{W}}(0, n) = h(n)$, e ci siamo perchè $\frac{h(n)^2 - h(n)}{h(n) - 1} = h(n)$.

$\beta_{\mathbb{W}}(m+1, n) - \beta_{\mathbb{W}}(m, n)$ è, per definizione, il numero di elementi di $\mathbb{E}^{m+1}(L)$ di altezza al più n , che è $h(n)^{m+1}$. Perciò $\beta_{\mathbb{W}}(m+1, n) = \beta_{\mathbb{W}}(m, n) + h(n)^{m+1} = \frac{h(n)^{m+1} - h(n)}{h(n) - 1} + h(n)^{m+1} = \frac{h(n)^{m+2} - h(n)}{h(n) - 1}$.

Quindi ogni funzione biapprossimante di elementi di $\wp(\mathbb{W})$ sta nel taglio di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ generato da $\beta_{\mathbb{W}}$. Sia \mathcal{U} un ultrafiltro su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ non principale e non del tipo $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ con almeno uno tra \mathcal{U}_1 ed \mathcal{U}_2 principale.

Definizione 3.4.11. Dato $X \in \wp(\mathbb{W})$, definiamo $\widehat{num}(X) = [\beta_X]_{\mathcal{U}}$.

Proposizione 3.4.12.

\widehat{num} dà come numerosità agli insiemi finiti la loro cardinalità, soddisfa (sum) ed (hpp) ma non (pp).

Dim: Sia $X \in \wp(\mathbb{W})$, con $|X| = k$ finita. Sia m_k il massimo delle dimensioni degli elementi di X , e sia n_k la massima altezza dei suoi elementi. Allora, $\forall m \geq m_k, n \geq n_k, \beta_X(m, n) = k$. Sia $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'insieme su cui β_X vale k . Se A non stesse in \mathcal{U} , avremmo $A^c \in \mathcal{U}$. Ma $A^c = \bigcup_{i \leq k} B_i$, con $B_i = \{(m, n) \mid \beta_X(m, n) = i\}$. Per proprietà di ultrafiltro quindi esiste un indice i per cui $B_i \in \mathcal{U}$. Ma B_i si può scrivere come una unione finita di semirette orizzontali o verticali, quindi sempre per proprietà di ultrafiltro una di queste sta in \mathcal{U} . Sia $\{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}, n \text{ fissato}\} \in \mathcal{U}$. Allora $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$, con \mathcal{U}_2 l'ultrafiltro principale generato da $\{n\}$, contro le ipotesi su \mathcal{U} . Il caso in cui in \mathcal{U} stia una retta verticale è del tutto analogo. Quindi deve essere necessariamente $A \in \mathcal{U}$, cioè $\beta_X \equiv_{\mathcal{U}} k$, cioè $\widehat{num}(X) = k$.

Dati $X, Y \in \mathbb{W}$, $X \cap Y = \emptyset$, si vede subito che $\beta_{X \cup Y} = \beta_X + \beta_Y$, da cui segue (sum).

Per vedere che PP non vale basta riprendere l'esempio fatto per \widetilde{num} .

Rimane da verificare (hpp). $\beta_{X \times Y}(m, n) = |\{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in (X \times Y)_{\leq m}, H(x) \leq n, H(y) \leq n\}| = \sum_{\{(i,j) \mid i+j=m\}} |\{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X_i, y \in Y_j, H(x) \leq n, H(y) \leq n\}| \leq \sum_{\{(i,j) \mid i+j=m\}} |\{x \in X \mid x \in X_i, H(x) \leq n\}| \cdot |\{y \in Y \mid y \in Y_j, H(y) \leq n\}| \leq \sum_{i \leq m} |\{x \in X \mid x \in X_i, H(x) \leq n\}| \cdot \sum_{j \leq m} |\{y \in Y \mid y \in Y_j, H(y) \leq n\}| \leq \beta_X(m, n) \cdot \beta_Y(m, n)$.

Affrontiamo il problema della differenza. Ripercorrendo il ragionamento fatto per dimostrare che $\widehat{num}(X) = |X|$ per ogni $|X|$ finito, si dimostra (AP): $Y \subset X \Rightarrow num(Y) < num(X)$. In particolare, ripercorrendo l'esempio fatto per \overline{num} , si vede che (e3) continua a non essere verificato. Viceversa, sia $\eta < num(X)$. Vorremmo costruire un $Y \subset X$ con $\alpha_Y \equiv_{\mathcal{U}} \eta$.

Sia data una funzione $\eta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Diremo che un insieme $A \subset \mathbb{N}$ è **η -diagonale** se, indicati con $\pi_2(A) = \{n_0 < n_1 < \dots\}$ la proiezione di A sulla seconda componente, e con $m_i^{n_k}$ l' i -esimo elemento della fibra di A su n_k (intendendo con questo $A \cap \{(n_k, m) \mid n \in \mathbb{N}\}$), convenendo che $\eta(n) = 0$ se $n < 0$ o n è non definito (ad esempio $n = m_{-1}$), si abbia $\forall k \in \mathbb{N} \eta(n_k, m_i^{n_k}) \geq \eta(n_k, m_{i-1}^{n_k}) + \eta(n_{k-1}, m_{j_i}^{n_{k-1}}) - \eta(n_{k-1}, m_{\tilde{j}_{i-1}}^{n_{k-1}})$, dove con j_i indichiamo il minimo indice per cui $m_{j_i}^{n_{k-1}} \geq m_i^{n_k}$, mentre \tilde{j}_{i-1} indica il massimo indice per cui $m_{\tilde{j}_{i-1}}^{n_{k-1}} \leq m_{i-1}^{n_k}$.

Diremo poi che un ultrafiltro \mathcal{U} su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è **$\beta_{\mathbb{W}}$ -diagonale** se $\forall \eta \leq \beta_{\mathbb{W}} \exists A \in \mathcal{U} \mid A$ è η -diagonale.

Proposizione 3.4.13.

\widehat{num} soddisfa (diff) $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ è $\beta_{\mathbb{W}}$ -diagonale.

Dim: Supponiamo \mathcal{U} $\beta_{\mathbb{W}}$ -diagonale. Sia $\eta < \widehat{num}(X)$ (per semplicità si suppone che la relazione d'ordine valga in ogni (m, n)), sia A un insieme $(\beta_{\mathbb{W}} - \eta)$ -diagonale, e sia B un insieme η -diagonale. Sia $C = A \cap B$. Utilizziamo le notazioni introdotte nella definizione di insieme η -diagonale per indicare gli elementi di C , indicando inoltre con $\pi_2^{-1}(m_k)$ la fibra di C su n_k . La costruzione procede per induzione ‘doppia’ su k ed i . Denotiamo con $X_{k,i}$ l'insieme $\{x \in X \mid x \in X_{\leq n_k} \text{ e } H(x) \leq i\}$.

Sia $k = 0, i = 0$. Per ipotesi, $\eta(n_0, m_0^{n_0}) \leq \beta(X)(n_0, m_0^{n_0}) = |X_{0,0}|$, dunque selezioniamo $Y_{0,0} \subseteq X_{0,0}$ con $|Y_{0,0}| = \eta(n_0, m_0^{n_0})$.

Sia ora $k = 0, i = l + 1$, e supponiamo di aver costruito $Y_{0,l}$ con $|Y_{0,l}| = \eta(n_0, m_l^{n_0})$. Per η -diagonalità, $\eta(n_0, m_i^{n_0}) - |Y_{0,0}| \geq 0$, e $\alpha_X(n_0, m_i^{n_0}) - |X_{0,l}| \geq \eta((n_0, m_i^{n_0}) - |Y_{0,l}|)$, quindi si possono scegliere $\eta(n_0, m_i^{n_0}) - |Y_{0,l}|$ elementi in $X_{0,i} \setminus X_{0,l}$. Sia $Y_{0,i}$ questo insieme.

Sia $Y_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_{0,i}$. Per costruzione, $\beta_{Y_0}(n_0, m_i^{n_0}) = \eta(n_0, m_i^{n_0}) \forall (n_0, m_i^{n_0}) \in C$.

Supponiamo ora di aver costruito Y_k con $\beta_{Y_k}(n_k, m_i^{n_k}) = \eta(n_k, m_i^{n_k}) \forall (n_k, m_i^{n_k}) \in C$.

Sia $h = k+1, i = 0$. Per costruzione, $\beta_{Y_k}(n_h, m_0^h) = \beta_{Y_k}(n_k, m_0^h)$, e $\beta_{Y_k}(n_k, m_0^h) < \beta_{Y_k}(n_k, m_{j_0}^{n_k}) = \eta(n_k, m_{j_0}^{n_k})$; inoltre, per $\beta_X - \eta$ diagonalità abbiamo anche $\beta_X(n_h, m_0^h) - \beta_X(n_k, m_{j_0}^{n_k}) > \eta(n_h, m_0^h) - \eta(n_k, m_{j_0}^{n_k}) = \eta_{(h,0),(k,j_0)}$, quindi si possono scegliere in X $\eta_{(h,0),(k,j_0)}$ elementi di dimensione compresa tra n_k escluso ed n_h incluso ed altezza minore di m_0^h . Sia $Y_{h,0}$ questo insieme, e sia $Y_{k,(h,0)} = Y_k \cup Y_{h,0}$.

Sia ora costruito $Y_{k,(h,l)}$, e occupiamoci di $Y_{h,i}$ con $i = l + 1$. Per costruzione, $\beta_{Y_{k,(h,l)}}(n_h, m_i^{n_h}) = \beta_{Y_{k,(h,l)}}(n_h, m_l^{n_h}) + \beta_{Y_{k,(h,l)}}(n_k, m_i^{n_h}) - \eta_{Y_{k,(h,l)}}(n_k, m_l^{n_k}) < \beta_{Y_{k,(h,l)}}(n_h, m_l^{n_h}) + \beta_{Y_{k,(h,l)}}(n_k, m_{j_i}^{n_k}) - \beta_{Y_{k,(h,l)}}(n_k, m_{j_{i-1}}^{n_k}) = \eta(n_h, m_l^{n_h}) + \eta(n_k, m_i^{n_h}) - \eta(n_k, m_l^{n_k}) < \eta(n_h, m_i^{n_h})$. Per $\beta_X - \eta$ diagonalità si possono scegliere in X $\eta(n_h, m_i^{n_h}) - \beta_{Y_{k,(h,l)}}(n_h, m_i^{n_h})$ elementi di dimensione compresa tra n_k esclusa ed n_h inclusa ed altezza compresa tra $m_l^{n_h}$ esclusa e $m_i^{n_h}$ inclusa. Sia $Y_{h,i}$ questo insieme.

Sia quindi $Y_h = Y_k \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_{h,i}$; per costruzione, $\forall (n_r, m_s^{n_r}) \mid r \leq h$ si ha $\eta(n_r, m_s^{n_r}) = \beta_{Y_h}(n_r, m_s^{n_r})$.

Poniamo $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k$. Affermo che Y è il sottoinsieme di X cercato. Infatti, chiaramente $Y \subseteq X$ perchè ogni $Y_k \subseteq X$; inoltre, per costruzione, per ogni $(n_k, m_i^{n_k}) \in C$, $\beta_Y(n_k, m_i^{n_k}) = \beta_{Y_k}(n_k, m_i^{n_k}) = \eta(n_k, m_i^{n_k})$, quindi $\widehat{num}(Y) = \eta$.

Viceversa, sia data $\eta \leq \widehat{num}(\mathbb{W})$, e sia $X \subset \mathbb{W}$ con $\widehat{num}(X) = \eta$. La funzione biapprossimante di X soddisfa la condizione di β_X -diagonalità ad-

dirittura su \mathbb{N}^2 . Se A è l'insieme di \mathcal{U} su cui $\beta_X = \eta$, A è β_X -diagonale, quindi η -diagonale. Dunque $\forall \eta \leq \beta_{\mathbb{W}} \exists A \in \mathcal{U}$ η -diagonale, quindi \mathcal{U} è $\beta_{\mathbb{W}}$ -diagonale.

Le funzioni biapprossimanti inducono successioni approssimanti per ogni insieme di $\wp(\mathbb{W})$: dato $X \in \wp(\mathbb{W})$, definiamo **sequenza approssimante** di X la successione $\phi_X(\mathbf{n}) = \beta_X(\mathbf{n}, \mathbf{n})$.

Questa successione conta il numero di elementi di X che stanno nella intersezione con l'ipercubo costituito dagli insiemi di dimensione al più n con tutti elementi di altezza al più n .

Essendo costruite a partire dalle funzioni biapprossimanti, anche per le sequenze approssimante vale la limitazione dall'alto imposta da \mathbb{W} :

Proposizione 3.4.14.

$$\forall X \in \wp(\mathbb{W}) \phi_X(n) \leq \frac{h(n)^{n+1} - h(n)}{h(n) - 1}.$$

$\phi_{\mathbb{W}}$ ricorrerà spesso nei discorsi che seguono. Per questo la rinominiamo, per comodità, come \tilde{h} :

$$\tilde{h}(n) = \frac{h(n)^{n+1} - h(n)}{h(n) - 1}$$

Le successioni approssimanti sono tutte minori od uguali ad \tilde{h} . Sia \mathcal{U} un ultrafiltro non principale su \mathbb{N} .

Definizione 3.4.15. Dato $X \in \wp(\mathbb{W})$, definiamo $\vec{\text{num}}(X) = [\phi_X]_{\mathcal{U}}$.

Proposizione 3.4.16.

1) $\vec{\text{num}}(X) = \text{num}(X)$ per ogni X finito dimensionale; 2) $\vec{\text{num}}(X) = \widetilde{\text{num}}(X)$ per ogni X che sia semi-finito dimensionale.

Dim: E' sufficiente dimostrare 2), dato che $\widetilde{\text{num}}(X) = \text{num}(X)$ per gli insiemi finito dimensionali.

Sia $m = \max\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \neq \emptyset\}$. Allora, $\forall n \geq m$, $\phi_X(n) = f_{X_0}(n) + \dots + f_{X_n}(n)$. Quindi $[\phi_X]_{\mathcal{U}} = [f_{X_0} + \dots + f_{X_m}]_{\mathcal{U}} = [f_{X_0}]_{\mathcal{U}} + \dots + [f_{X_m}]_{\mathcal{U}}$, cioè $\vec{\text{num}}(X) = \widetilde{\text{num}}(X)$.

Proposizione 3.4.17.

$\vec{\text{num}}$ soddisfa *FIN*, (*sum*) ed (*hpp*) ma non (*pp*).

Dim: Sia $X \in \wp(\mathbb{W})$, $|X| = k$ finita. Sia m_k il massimo delle dimensioni degli elementi di X ed n_k il massimo delle altezze degli elementi di X . Sia d il massimo tra m_k ed n_k . Allora, per ogni $n \geq d$, $\phi_X(n) = k$ quindi, per non principalit  di \mathcal{U} , $\phi_X \equiv_{\mathcal{U}} k$.

Per dimostrare (sum), come sempre, basta osservare che la successione approssimante l'unione disgiunta di due insiemi è la somma delle rispettive successioni approssimanti.

La non validità di (pp) discende nuovamente dall'esempio fatto per \widetilde{num} . Nel corso della dimostrazione di (hpp) per \widehat{num} avevamo visto che $\beta_{X \times Y}(m, n) \leq \beta_X(m, n) \cdot \beta_Y(m, n)$. Ponendo $m = n$ si ottiene (hpp) per \vec{num} .

Affrontiamo il problema della differenza.

Proposizione 3.4.18.

$\vec{num}(X)$ soddisfa (diff) $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ è \tilde{h} -monotono.

Dim: Sia $\eta < \vec{num}$, e supponiamo per semplicità che questa relazione d'ordine sia realizzata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $A \in \mathcal{U} \mid \eta$ è non decrescente su A , $B \in \mathcal{U} \mid \phi_X - \eta$ è non decrescente su B , e sia $A \cap B = C \in \mathcal{U}$, con $n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$ gli elementi di C .

Sia Z_0 costruito prendendo $\eta(n_0)$ elementi di $X_{\leq n}$ di altezza al più n . Poniamo $Y_{n_0} = Z_0$.

Supponiamo poi di aver costruito Y_{n_i} per $i \leq k$. Prendiamo n_{k+1} . Sia $\eta(n_{k+1}) - \eta(n_k) = \eta_{k+1} \geq 0$. Per monotonia di $\phi_X - \eta$, si ha $\phi_X(n_{k+1}) - \phi_X(n_k) \geq \eta_{k+1}$, quindi si possono prendere η_{k+1} elementi in $D_{k+1} = \{x \in X \mid n_k < \dim(x) \leq n_{k+1} \text{ e } H(x) \leq n_{k+1}\} \cup \{x \in X \mid \dim(X) \leq n_k \text{ e } n_k < H(x) \leq n_{k+1}\}$ (poichè $|D_{k+1}| = \phi_X(n_{k+1}) - \phi_X(n_k)$). Sia Z_{k+1} l'insieme costituito da questi elementi, e poniamo $Y_{n_{k+1}} = Y_{n_k} \cup Z_{k+1}$. Osserviamo che questa unione risulta, per costruzione, disgiunta.

Sia $Y = \bigcup_{n \in C} Y_n$. Dico che $\phi_Y(n) = \eta(n) \forall n \in C$. Per vedere ciò, basta osservare che $\phi_Y(n) = |Y_n|$ per ogni $n \in C$, il che è evidente dalla costruzione. Ma, sempre per costruzione, $|Y_{n_k}| = \eta(n_k) \forall n_k \in C$: per n_0 questo è banale; sia poi vero che $|Y_{n_k}| = \eta(n_k)$. Per costruzione, $|Z_{k+1}| = \eta(n_{k+1}) - \eta(n_k)$, quindi $|Y_{n_{k+1}}| = |Y_{n_k}| + |Z_{k+1}| = \eta(n_{k+1}) - \eta(n_k) + \eta(n_k) = \eta(n_{k+1})$. Quindi (diff) risulta verificata.

Viceversa, se $\eta < \phi_{\mathbb{W}}$, per (diff) esiste un $Y \subset \mathbb{W}$ ed un $A \in \mathcal{U}$ con $\eta = \phi_Y$ su A . ϕ_Y è non decrescente, quindi η è \mathcal{U} -non decrescente, cioè \mathcal{U} è \tilde{h} -monotono.

Nel paragrafo 3.3 avevamo isolato la proprietà di H -euclideanità come proprietà equivalente alla differenza per numerosità definite sulle $\text{Fc}(\mathbb{W})$; per avere (diff) per \vec{num} abbiamo visto che serve la \tilde{h} -monotonia.

Proposizione 3.4.19.

\mathcal{U} selettivo $\Rightarrow \mathcal{U}\tilde{h}$ -monotono $\Rightarrow \mathcal{U}H$ -euclideo.

Dim: La selettività implica evidentemente sia la \tilde{h} -monotonia che la H -euclideanità.

Sia ora \mathcal{U} \tilde{h} -monotono. Sia $f \leq h^k$. Per costruzione di h abbiamo $h(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$. Allora si vede immediatamente che $\tilde{h}(n) \geq h^k(n) \forall n \geq k+2$, per cui f è \mathcal{U} -equivalente ad una funzione limitata da \tilde{h} , per cui è \mathcal{U} -equivalente ad una funzione non decrescente; abbiamo quindi dimostrato che ogni funzione polinomialmente limitata da h è non decrescente modulo \mathcal{U} , cioè che \mathcal{U} è H -euclideo.

Un'altra dimostrazione è questa: per restrizione, \vec{num} definisce una numerosità su Fd , e se \vec{num} soddisfa (diff) anche la sua restrizione deve soddisfarla; ma noi sappiamo che soddisfare (diff) su Fd equivale ad essere H -euclidei, e soddisfare (diff) su \mathbb{W} equivale ad essere \tilde{h} -monotoni, da cui discende immediatamente la tesi.

Capitolo 4

Numerosità Ordinali

Nel capitolo 2 abbiamo definito funzioni numerosità sulla classe degli insiemi numerabili, che è molto ampia ma non ha una struttura particolarmente ricca o complicata. Nel capitolo 3 si sono definite funzioni numerosità per insiemi finito dimensionali di punti. Una delle differenze rispetto al caso precedente è il doversi confrontare con la struttura degli insiemi, cioè il dover includere nella costruzione della funzione numerosità un certo numero di proprietà discendenti dalla forma particolare degli insiemi sotto studio.

In questo capitolo vogliamo costruire funzioni numerosità per una classe ancora più strutturata: i numeri ordinali.

4.1 Ricerca degli assiomi

I numeri ordinali, con la loro algebra, forniscono già una teoria della grandezza. Volevamo definire un metodo per contare gli elementi su di un insieme di grandezze presenta alcuni problemi: in primo luogo, quello che si vorrebbe ottenere è una qualche forma di coerenza tra la grandezza definita tramite ordinali e quella tramite numerosità. In effetti, quello che rende gli ordinali diversi dalle numerosità sono gli assorbimenti che, talvolta, accadono nelle operazioni di somma e prodotto; qualora questi non si presentino, vorremmo che a somme e prodotti ordinali corrispondessero somme e prodotti di numerosità.

Un altro problema è dato dal principio PP. Per PP, il prodotto di numerosità di insiemi deve corrispondere alla numerosità del loro prodotto. Questo, però, è un insieme di coppie di ordinali, non di numeri ordinali. Quindi, prima di poter affrontare PP, si deve ricercare un metodo per sostituire il prodotto cartesiano con una operazione interna a $\wp(Ord)$.

Per definire una funzione numerosità dobbiamo isolare le proprietà che si ritengono necessarie per caratterizzarla.

Due vengono suggerite direttamente dalle nozioni di Euclide: affinché queste siano verificate (o anche solo verificabili), è necessario avere sulla classe \mathcal{N} delle grandezze sia un ordine che una coerenza con le operazioni di complemento relativo di insiemi. Pertanto i primi due assiomi sono:

O) Per ogni X, Y , vale una e una sola delle seguenti:

1. $num(X) = num(Y)$;
2. esiste $X' \subset Y$ con $num(X) = num(X')$;
3. esiste $Y' \subset X$ con $num(Y') = num(Y)$.

OP) $num(X) = num(Y) \Leftrightarrow num(X \setminus Y) = num(Y \setminus X)$.

La prima proprietà serve a definire sia un ordinamento che una differenza sulla classe delle numerosità e su quella degli insiemi da misurare. La seconda è necessaria a poter definire una somma di numerosità, coerente con l'idea che la grandezza dell'unione di insiemi disgiunti sia la somma delle grandezze dei due insiemi.

Le altre proprietà che si considerano discendono più strettamente da quelle di *Ord*.

Sia α un ordinale. La struttura lineare di *Ord* porta a pensare che, dato un $\tau \in Ord$, l'insieme $[\tau, \tau + \alpha)$, traslato di α , debba essere equinumeroso ad α . Le proprietà di assorbimento della somma ordinale intervengono a ricordare che non si può assumere questa proprietà per ogni α, τ : ad esempio, sia $\alpha = \omega$, $\tau = n$ con $n > 0$ un naturale. $[n, n + \omega)$ è un sottoinsieme stretto di ω , e per AP (principio la cui validità dimostreremo discendere da O) deve avere numerosità strettamente inferiore.

Quindi il primo problema da affrontare è: per quali coppie (α, τ) si può assumere $num([0, \alpha)) = num([\tau, \tau + \alpha))$?

Dico che le coppie per le quali non si cade immediatamente in contraddizione sono le (α, τ) con $\alpha < \tau$ e $\tau = \omega^\beta$ per un qualche β ordinale. Prima di vedere perchè queste coppie vadano bene, cerchiamo di capire perchè, in generale, scelte diverse di τ non siano opportune.

Intanto, l'esempio precedente con $\alpha = \omega$, $\tau = n$ mostra perchè sia necessario assumere $\tau > \alpha$. In effetti, pensando alle scritture di τ e α in forma normale di Cantor, appare chiaro che non appena il massimo esponente della scrittura di α sia maggiore di quello della scrittura di τ , $[\tau, \tau + \alpha) \subset \alpha$, rendendo

impossibile considerare la traslazione per τ una isometria.

Sempre le scritture in forma normale di Cantor fanno pure capire perchè, sempre in generale, anche dei τ che non siano in forma monomiale come potenze di ω sono inadatti a fare da ‘base’ per le traslazioni. Indichiamo con $T_\tau(A) = \{\tau + i \mid i \in A\}$, e siano $A = [0, \omega^2)$ e $B = [\omega, \omega^2)$. Siano $\tau_1 = \omega^3 + \omega^2 + \omega$, $\tau_2 = \omega^3 + \omega^2$. Allora $T_{\tau_1}(A) = [\omega^3 + \omega^2 + \omega, \omega^3 + \omega^2 2) = T_{\tau_2}(B)$. $B \subset A$, quindi per AP $num(B) < num(A)$, ma se le traslazioni per τ_1, τ_2 fossero isometrie, avremmo $num(A) = num(B)$, il che conduce ad un assurdo.

Quindi, le uniche coppie teoricamente adatte per le traslazioni sono le coppie (α, ω^β) con $\alpha < \omega^\beta$.

Gli ordinali del tipo ω^α vengono detti **additivamente chiusi**. Il perchè di questo nome è chiarito dalla osservazione che segue.

Osservazione: $\tau = \omega^\gamma \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta < \tau, \alpha + \beta < \tau$.

Dim: Sia $\tau = \omega^\gamma$, e siano $\alpha, \beta < \tau$, $\alpha = \sum_{i=0}^n \omega^{\gamma_i} n_i$, $\beta = \sum_{i=0}^n \omega^{\gamma_i} m_i$, con $\gamma_0 > \dots > \gamma_n, n_i \geq 0, m_i \geq 0$. Per ipotesi, $\gamma_0 < \gamma$, da cui $\alpha + \beta \leq \omega^{\gamma_0} (n_0 + m_0) + \sum_{i=1}^n \omega^{\gamma_i} m_i < \omega^\gamma$, cioè $\alpha + \beta < \tau$.

Facciamo l’implicazione inversa: sia $\sum_{i=0}^m \omega^{\gamma_i} n_i$ l’espressione in forma normale di Cantor di τ , con $m \geq 1, n_i > 0 \forall i$. Allora, se γ_m è il massimo tra gli esponenti, prendendo $\alpha = \beta = \omega^{\gamma_m} n_m$, si ha $\alpha + \beta > \tau$, assurdo. Resta il caso in cui $\tau = \omega^\gamma n$, con $n > 1$. In questo caso basta considerare $\alpha = \beta = \omega^\gamma (n - 1) + 1$: $\alpha + \beta = \omega^\gamma (2n - 2) + 2 > \omega^\gamma n$.

Tutte queste osservazioni sulle traslazioni lecite portano a formulare un assioma che ci assicuri la loro validità:

T) (Traslazioni) Se τ è un ordinale additivamente chiuso e $X \subseteq \tau$, allora $num(X) = num(\{\tau i + x \mid x \in X\})$ per ogni $i \in Ord$.

Nelle notazioni precedenti, indicheremo con $T_{\tau i}[X]$ l’insieme $\{\tau i + x \mid x \in X\}$. Resta da affrontare quello che è il problema più delicato: trovare un assioma che regoli il prodotto di numerosità.

Fino ad ora è stato possibile associare il prodotto di numerosità al prodotto cartesiano di insiemi, così come vorrebbe l’intuizione, perchè si è avuto a che fare con classi di insiemi chiuse per prodotto cartesiano. Però nè Ord nè nessun suo sottoinsieme possono avere questa proprietà di chiusura, semplicemente perchè il prodotto cartesiano di una coppia di insiemi di ordinali è un insieme di coppie di ordinali. Va quindi trovato un metodo, che preservi le grandezze, per tradurre il prodotto cartesiano di insiemi di ordinali in

un insieme di ordinali. La prima idea potrebbe essere quella di definire come prodotto di insiemi l'insieme ottenuto facendo il prodotto degli elementi: $A \times B = \{\alpha \cdot \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$. Ovviamente questa non è una buona definizione: basta osservare ad esempio che, se $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$, $A \times B = \{0\}$, il che rende chiaro che non si possa assumere $num(A) \cdot num(B) = num(A \times B)$. L'idea giusta è di partire dal prodotto cartesiano e trovare un modo per proiettarlo sulla retta ordinale. Graficamente, $X \times Y$ non sono altro che 'Y' copie di X disposte una sopra l'altra. Il metodo più semplice di riportarle sulla retta ordinale è di prenderle una a una, andando dal basso verso l'alto, e di affiancarle lungo la retta ordinale. Quindi l'idea è di trasformare il prodotto cartesiano $X \times Y$ in quello che chiameremo prodotto piatto su τ di X, Y :

Definizione 4.1.1. *Siano τ un ordinale, $X, Y \subseteq Ord$; diremo **prodotto piatto** su τ di X ed Y l'insieme $\mathbf{X} \otimes_{\tau} \mathbf{Y} = \{\tau y + x \mid y \in Y, x \in X\}$.*

Le solite proprietà di assorbimento nella somma e nel prodotto ordinale impediscono di poter accettare come sostituto del prodotto cartesiano il prodotto piatto su τ per ogni X, Y, τ .

Per prima cosa, sicuramente τ deve essere diverso da 0, altrimenti avremmo $X \otimes_{\tau} Y = X$, che sarebbe una pessima traduzione lineare di $X \times Y$ per ogni Y che abbia più di un solo elemento. Inoltre, va sicuramente imposto $X \subseteq \tau$, altrimenti si perderebbe l'iniettività della applicazione $f : X \times Y \rightarrow X \otimes_{\tau} Y : f(x, y) = \tau y + x$. Ad esempio, se $X = \alpha$, $\tau < \alpha$ e Y contiene un ordinale γ e il suo successore, si ha $f(\tau, \gamma) = f(0, \gamma + 1)$, cioè una sovrapposizione tra le fibre di $X \times Y$ nella sua traduzione lineare, situazione che va evitata. Inoltre vorremmo avere, per comodità, che i prodotti $X \times Y$ e $Y \times X$, seppur diversi, siano della stessa grandezza. Quindi si vuole che pure le loro traduzioni lineari siano equinumerose. Questo significa che si dovrà imporre, o dimostrare a partire dagli altri assiomi, che $num(X \otimes_{\tau} Y) = num(Y \otimes_{\tau} X)$. Le discussioni precedenti quindi portano a dover avere pure $Y \subseteq \beta$.

Questa non è ancora una condizione sufficiente. Scriviamo infatti τ in forma normale di Cantor. In prima analisi, si vede che τ deve essere esprimibile come un monomio in ω . Infatti, ad esempio, $[0, \omega) \otimes_{\omega+1} [0, \omega)$ è un sottoinsieme proprio di $[0, \omega^2)$, cioè per AP ha numerosità strettamente minore di quella di $[0, \omega^2)$, mentre noi vorremmo ottenere $num([0, \omega)) \cdot num([0, \omega)) = num([0, \omega^2))$, sempre per motivi intuitivi legati alla struttura di $[0, \omega) \times [0, \omega)$. Quindi deve essere $\tau = \omega^{\gamma} n$. Dico che deve pure aversi $n = 1$. Infatti, ad esempio, se $n = 2$, $[0, \omega 2) \otimes_{\omega 2} [0, \omega 2) = [0, \omega^2 2) \subset [0, \omega^2 4)$, e il ragionamento precedente ci porta a voler escludere situazioni di questo tipo. Quindi deve essere come minimo τ additivamente chiuso. Questo ancora non basta:

se $\tau = \omega^\gamma$, serve che lo stesso γ sia un multiplo finito di un ordinale additivamente chiuso. Infatti $[0, \omega^\omega) \otimes_{\omega^{\omega+1}} [0, \omega^\omega)$ è un sottoinsieme proprio di $[0, \omega^{\omega^2})$, altra situazione che vorremmo escludere.

In definitiva, gli ordinali τ adatti a fare da base per il prodotto piatto di due insiemi $X \subseteq \alpha$, $Y \subseteq \beta$ sono da ricercarsi nell'insieme $\{\tau \in Ord \mid \tau \geq \alpha, \tau \geq \beta, \exists \gamma \in Ord, n \in \mathbb{N} \mid \tau = \omega^{\omega^{\gamma n}}\}$.

In letteratura, gli ordinali del tipo ω^{ω^γ} sono detti **moltiplicativamente** (o **aritmeticamente**) **chiusi**. Questo perchè vale la seguente osservazione:

Osservazione: θ è moltiplicativamente chiuso $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta, \gamma < \theta, \alpha\beta + \gamma < \theta$.

Dim: Un θ che verifichi la condizione a destra del \Leftrightarrow sarà detto un atomo.

\Rightarrow) Grazie alla osservazione sugli ordinali additivamente chiusi, otteniamo che $\forall \alpha, \beta < \theta, \alpha + \beta < \theta$. Resta da dimostrare che vale la proprietà analoga sostituendo il prodotto alla somma. Dico che basta dimostrarla per le coppie di ordinali $\alpha, \beta < \theta$ del tipo $\alpha = \omega^{\lambda_1}$, $\beta = \omega^{\lambda_2}$. Questo è chiaro: infatti, dati altri due ordinali qualsiasi, è sufficiente esprimere sia loro che il loro prodotto in forma normale di Cantor; se ogni elemento del tipo $\omega^{\lambda_1} \cdot \omega^{\lambda_2}$ che appare in questo prodotto è $< \theta$, dalla chiusura rispetto all'addizione otteniamo la chiusura rispetto al prodotto. Ma $\lambda_1, \lambda_2 < \omega^\gamma \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 < \omega^\gamma$, quindi $\omega^{\lambda_1} \cdot \omega^{\lambda_2} = \omega^{\lambda_1 + \lambda_2} < \omega^{\omega^\gamma}$, da cui la tesi.

\Leftarrow) Sicuramente, se θ è un atomo, essendo chiuso rispetto alla somma deve essere additivamente chiuso. Quindi esiste σ con $\theta = \omega^\sigma$. Se σ non fosse aritmeticamente chiuso, potremmo determinare $\lambda_1, \lambda_2 < \sigma$ con $\lambda_1 + \lambda_2 > \sigma$, cioè $\omega^{\lambda_1} \cdot \omega^{\lambda_2} > \omega^\sigma$, contro la chiusura di θ rispetto alla moltiplicazione. Quindi σ deve essere della forma ω^γ , e la tesi è dimostrata

Vedremo che, per dimostrare la proprietà associativa del prodotto che definiremo sulle numerosità, ci sarà utile considerare le potenze naturali degli ordinali moltiplicativamente chiusi.

Definizione 4.1.2. *Gli ordinali del tipo $\omega^{\omega^{\gamma n}}$ sono detti **ordinali quadrabili**.*

Dunque, ricapitolando, si è visto che, dati $X, Y \subseteq \tau$, con τ quadrabile, un buon sostituto del prodotto cartesiano è il prodotto piatto $X \otimes_\tau Y$.

Anzichè definire un assioma che regoli il prodotto direttamente a partire dal prodotto piatto, si pone prima un criterio di equipotenzialità tra insiemi lineari da cui poi possa discenderne uno per il prodotto di numerosità.

Supponiamo di avere un insieme $X \subseteq \tau^2$, con τ quadrabile, in modo che ciascun taglio $X \cap [\tau i, \tau(i+1))$ sia o vuoto o un traslato del medesimo $Z \subseteq \tau$.

Sia ora $Y \subseteq \sigma^2$, con σ quadrabile, e supponiamo che anche per Y valga la stessa condizione di X , cioè che esista W con ogni $Y \cap [\sigma i, \sigma(i+1))$ o vuoto od ottenuto traslando W . Supponiamo infine che sia Z equinumeroso a W . Da qui non segue immediatamente che Y sia equinumeroso ad X , semplicemente perchè non è detto che l'insieme degli indici i per i quali gli X_i sono non vuoti abbia una qualche relazione con il corrispondente insieme degli indici per Y : ad esempio, potremmo avere che $X = Z$ mentre Y è costituito da infinite copie di W . Però, nella ipotesi più restrittiva che $\forall i \in Ord X \cap [\tau i, \tau(i+1)) \neq \emptyset \Leftrightarrow Y \cap [\sigma i, \sigma(i+1)) \neq \emptyset$, ci si aspetterebbe di poter ricavare che X ed Y stessi siano equinumerosi, essendo costituiti da pezzi ciascuno equinumeroso con il suo corrispondente. Questo conduce a formulare il seguente assioma:

EQO (Equinumerosità Ordinale) Se σ, τ sono ordinali quadrabili, con $X \subseteq \sigma^2$, $Y \subseteq \tau^2$, ed esistono Z, W con $num(Z) = num(W)$ tali che, detti $X_i = X \cap [\tau i, \tau(i+1))$, $Y_i = Y \cap [\sigma i, \sigma(i+1))$, si abbia $\forall i \in Ord X_i \neq \emptyset \Leftrightarrow X_i = T_{\tau i}(Z) \Leftrightarrow Y_i \neq \emptyset \Leftrightarrow Y_i = T_{\sigma i}(W)$, allora $num(X) = num(Y)$.

Per capire come questo abbia relazioni con il prodotto piatto degli insiemi, definiamo cosa si intende per α -lift.

Definizione 4.1.3. Dato $X \subseteq \alpha^2$, diremo α -**lift** di X il sottoinsieme $X \uparrow^\alpha$ di $\alpha \times \alpha$ con $X \uparrow^\alpha = \{(\beta, \gamma) \in \alpha \times \alpha \mid \alpha\beta + \gamma \in X\}$. α sarà detto **esponente del lift**.

Ovviamente, non ogni α è adatto a fare questa costruzione. Senza ripetere i ragionamenti già fatti per il prodotto piatto, che andrebbero semplicemente ripercorsi per gli α -lift, si vede che gli α opportuni a liftare un insieme X sono quelli che maggiorano X (cioè $\alpha > \beta \forall \beta \in X$) e che sono quadrabili. Ritornando al prodotto piatto, si vede perchè EQO ci assicuri di poter usare $X \otimes_\tau Y$ per definire coerentemente il prodotto di numerosità: infatti, se $X, Y \subseteq \tau$, con τ quadrabile, il τ -lift di $X \otimes_\tau Y$ è esattamente $X \times Y$. Vedremo che EQO servirà anche a garantire la coerenza delle operazioni che definiremo sull'insieme delle numerosità per renderlo un semianello. L'ultimo assioma che viene aggiunto riguarda la proprietà commutativa del prodotto: si assumerà anche

C) (Commutatività) Se τ è quadrabile e $X, Y \subseteq \tau$, allora $num(X \otimes_\tau Y) = num(Y \otimes_\tau X)$.

E' interessante osservare come il principio C, letto a livello dei lift di X ed Y , fornisca l'esatto analogo del Teorema di Fubini sulla inversione degli integrali.

A questo punto, siamo riusciti ad isolare alcune proprietà fondamentali da richiedere ad una funzione numerosità definibile sugli insiemi di Ord . Nella prossima sezione si vedrà come queste siano sufficienti a costruire una teoria della grandezza. Prima, però, definiamo cosa si intenderà per funzione numerosità.

Definizione 4.1.4. *Sia \mathbb{W} una collezione di insiemi di ordinali chiusa per unioni disgiunte, prodotti piatti e traslazioni dei tipi discussi precedentemente. Una **funzione numerosità** per \mathbb{W} con insieme delle numerosità \mathcal{N} è una funzione surgettiva $num : \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{N}$ che soddisfi le condizioni seguenti per ogni $X, Y \in \mathbb{W}$:*

O) (*Ordine*) Per ogni X, Y , vale una e una sola delle seguenti:

1. $num(X) = num(Y)$,
2. esiste $X' \subset Y$ con $num(X) = num(X')$,
3. esiste $Y' \subset X$ con $num(Y') = num(Y)$;

OP) (*Operazioni*) $num(X) = num(Y) \Leftrightarrow num(X \setminus Y) = num(Y \setminus X)$;

T) (*Traslazioni*) Se τ è un ordinale additivamente chiuso e $X \subseteq \tau$, allora $num(X) = num(\{\tau i + x \mid x \in X\})$ per ogni $i \in Ord$;

EQO) (*Equivalenza Ordinale*) Se σ, τ sono ordinali quadrabili, con $X \subseteq \sigma^2$, $Y \subseteq \tau^2$, ed esistono Z, W con $num(Z) = num(W)$ tali che, detti $X_i = X \cap [\tau i, \tau(i+1))$, $Y_i = Y \cap [\sigma i, \sigma(i+1))$, si abbia $\forall i \in Ord \ X_i \neq \emptyset \Leftrightarrow X_i = T_{\tau i}(Z) \Leftrightarrow Y_i \neq \emptyset \Leftrightarrow Y_i = T_{\sigma i}(W)$, allora $num(X) = num(Y)$;

C) (*Commutatività*) Se τ è quadrabile e $X, Y \subseteq \tau$, allora $num(X \otimes_{\tau} Y) = num(Y \otimes_{\tau} X)$.

Queste sono le proprietà che ci si aspetterebbe di poter ottenere costruendo dei modelli delle numerosità.

In realtà la questione è molto delicata: il problema principale deriva dall'assioma O. O afferma sia la possibilità di definire un ordine sulle numerosità, e questo riusciremo a farlo facilmente, sia che valga pure la proprietà della differenza, poichè dice che per ogni X, Y , se $num(X) < num(Y)$, deve essere possibile determinare un sottoinsieme di Y equinumeroso ad X . Nei capitoli precedenti abbiamo visto che ottenere un risultato di questo tipo è tutt'altro che banale: nel caso degli insiemi numerabili abbiamo dovuto far ricorso alla

esistenza di ultrafiltri selettivi, nel caso degli insiemi finito dimensionali di punti costruiti su rette base numerabili si sono dovute introdurre altre proprietà di ultrafiltro analoghe alla selettività. Per gli ordinali, vedremo che la questione si fa ancora più complicata: addirittura, per l'ultimo tipo di numerosità che definiremo, appare alquanto dubbio che le proprietà di ultrafiltro che isoleremo per avere questa differenza siano realmente verificabili. Nel modello che costruiremo nel prossimo capitolo, invece, riusciremo a dimostrare la validità di questo principio soltanto per i sottoinsiemi numerabili di Ord .

Una discussione a parte la merita anche il principio EQO. Vediamo EQO nell'ottica dei lift degli insiemi. Questi afferma che se i lift di X ed Y sono tali che le intersezioni di questi con rette orizzontali siano tutte equinumerose ad un insieme fissato, allora X ed Y devono avere la stessa numerosità. C'è un teorema classico della geometria piana che sostiene un risultato simile: il Principio di Cavalieri (enunciato dal matematico, e allievo di Galilei, Bonaventura Cavalieri, 1598-1647):

Cavalieri: Figure piane quali si vogliano, collocate tra le medesime parallele, nelle quali - condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione - le porzioni intercette di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali tra di loro.

Nell'ambito degli ordinali, il principio di Cavalieri va letto così:

Cavalieri Ordinale: Se $A, B \subseteq \alpha \times \alpha$ sono tali che $\forall i < \alpha \text{ num}(A_i) = \text{num}(B_i)$, allora A e B hanno la stessa grandezza.

Con A_i (analogamente con B_i) si intende $\{\beta \in \alpha \mid (\beta, i) \in A\}$. Analogamente al caso geometrico di Cavalieri, si sta dicendo che, se tagliando A e B con ogni retta del tipo $r_i = \{(j, i) \mid j \in Ord\}$ si incontrano sempre segmenti di stessa lunghezza (cioè insiemi della stessa numerosità), gli insiemi interi A e B devono essere della stessa grandezza. Questa è una richiesta strettamente più forte di EQO: infatti, non si sta più richiedendo che gli insiemi X ed Y siano costituiti come unioni arbitrarie di traslati di uno stesso insieme. Si sta affermando molto di più: si dice che, se le intersezioni corrispondenti sono equinumerose, allora devono essere equinumerosi gli interi insiemi, ma due qualsiasi tagli di uno stesso insieme possono essere entrambi non vuoti e con numerosità radicalmente diverse.

Vedremo nella prossima sezione che, almeno nel modello che considereremo, sarà sicuramente verificato EQO ma sarà falso il Cavalieri Ordinale. Resta aperta la questione se questo principio possa essere verificato in qualche altro

modello delle numerosità. L'idea è che, espresso in questa forma così generale, sia troppo forte per poter essere verificabile, però la questione rimane, al momento, aperta.

4.2 Proprietà della numerosità

In questa sezione vedremo che le 5 proprietà soddisfatte dalle funzioni numerosità sono sufficienti sia a poter rendere l'insieme delle numerosità un semianello ordinato, sia ad assicurarci la validità degli assiomi di Euclide.

Una conseguenza immediata della proprietà O è la possibilità di definire un ordinamento su W e sull'insieme delle numerosità. Su W , dati X ed Y si dirà $X \approx Y \Leftrightarrow num(X) = num(Y)$, e $X \prec Y \Leftrightarrow \exists X' \subset Y \mid X \approx X'$. Dati invece ψ, η nell'insieme \mathcal{N} delle numerosità, con $\psi = num(X)$, $\eta = num(Y)$, diremo $\psi < \eta \Leftrightarrow X \prec Y$.

Proposizione 4.2.1.

La relazione $<$ è un ordinamento tra numerosità.

Dim: La tricotomia è evidentemente assicurata da O, e l'irriflessività è evidente. Resta da dimostrare la transitività. Sia $X \prec Y \prec Z$, e siano $X' \subset Y$, $Y' \subset Z$ con $X \approx X'$, $Y \approx Y'$. Supponiamo che esista $X'' \subset Y'$ con $X'' \approx X' \approx X$. Allora avremmo concluso, dato che per costruzione $X'' \subset Y' \subset Z$. L'esistenza di X'' è una semplice conseguenza del prossimo lemma.

Lemma 4.2.2.

Siano X, Y con $X \approx Y$. Allora per ogni $X' \subset X$ esiste $Y' \subset Y$ con $X' \approx Y'$.

Dim: Per O, X' non può essere equinumeroso ad X , e quindi nemmeno ad Y . Inoltre Y non può essere equinumeroso ad un sottoinsieme di X' , altrimenti avremmo $Y \prec X$. Da qui, per O, si ha la tesi.

Con questo ordine quindi risulta verificato AP: se $X \subset Y$, per definizione $num(X) < num(Y)$.

Veniamo ora alla parte centrale di questa sezione. Fino a questo punto, \mathcal{N} è semplicemente un insieme ordinato. Il teorema seguente mostra come si possa esplicitamente munire \mathcal{N} della struttura di semianello ordinato.

Teorema 4.2.3.

Esistono uniche operazioni $+, \cdot$ su \mathcal{N} tali che valgano

- (SP) $num(X) + num(Y) = num(X \cup Y)$ se $X \cap Y = \emptyset$;

- (PP*) $num(X) \cdot num(Y) = num(X \otimes_\tau Y)$ se $X, Y \subseteq \tau$ e τ è quadrabile.

Con queste operazioni \mathcal{N} diviene la parte non negativa di un anello ordinato.

Dim: Occupiamoci della somma. La verifica importante da fare è che, (1) se $X \approx A, Y \approx B, X \cap Y = A \cap B = \emptyset$, allora $X \cup Y \approx A \cup B$. Per questo, dati $X, Y \subseteq \tau$, con τ quadrabile, definiamo $X \oplus_\tau Y = X \cup \{\tau + \eta \mid \eta \in Y\}$. Affermo che, se $X \cap Y = \emptyset$, $num(X \cup Y) = num(X \oplus_\tau Y)$. Infatti, per T, che si può applicare perchè gli ordinali quadrabili sono additivi, si ha $(X \cup Y) \setminus (X \oplus_\tau Y) = Y \approx T_\tau[Y] = (X \oplus_\tau Y) \setminus (X \cup Y)$, da cui per OP e T ricaviamo $X \oplus_\tau Y \approx X \cup Y$. Dunque possiamo dimostrare (1) sostituendo \oplus_τ a \cup .

Siano quindi $X, Y \subseteq \tau, A, B \subseteq \sigma$, con τ, σ quadrabili e $X \approx A, Y \approx B$. Supponiamo, senza perdita di generalità, che $\tau \geq \sigma$. $A \oplus_\tau B \approx A \oplus_\sigma B$ perchè entrambi sono equinumerosi ad $A \cup B$. Dico che $X \oplus_\tau Y \approx X \oplus_\sigma B$: infatti questa vale $\Leftrightarrow (X \oplus_\tau Y) \setminus (X \oplus_\sigma B) = T_\tau[Y] \setminus T_\tau[B] \approx (X \oplus_\sigma B) \setminus (X \oplus_\tau Y) = T_\tau[B] \setminus T_\tau[Y] \Leftrightarrow T_\tau[Y] \approx T_\tau[B]$, e questo è vero per T perchè $Y \approx B$. Inoltre, $X \oplus_\tau B \approx A \oplus_\tau B$: sempre per OP si ha $X \oplus_\tau B \approx A \oplus_\tau B \Leftrightarrow (X \oplus_\tau B) \setminus (A \oplus_\tau B) = X \setminus A \approx (A \oplus_\tau B) \setminus (X \oplus_\tau B) = A \setminus X \Leftrightarrow X \approx A$, che era nelle ipotesi. Rimettendo insieme le varie condizioni di equinumerosità trovate, si dimostra che $X \oplus_\tau Y \approx A \oplus_\sigma B$.

Dunque, dati $\psi, \eta \in N$, per avere (SP) è sufficiente definire $\eta + \psi = num(X \oplus_\tau Y)$, con X, Y, τ tali che $num(X) = \eta, num(Y) = \psi, X, Y \subseteq \tau, \tau$ additivo.

La commutatività è evidente, perchè $X \oplus_\tau Y \approx X \cup Y = Y \cup X \approx Y \oplus_\tau X$, e analogamente per la associatività. Chiaramente $0 = num(\emptyset)$ è l'unico elemento neutro di questa operazione (l'unicità discende da AP).

Passiamo al prodotto. Per verificare (PP*) dobbiamo definire il prodotto di $\psi, \eta \in N$ come $\psi \cdot \eta = num(X \otimes_\tau Y)$, dove $num(X) = \psi, num(Y) = \eta, X, Y \subseteq \tau$ quadrabile. Per poterlo fare, dobbiamo prima verificare che la definizione del prodotto non dipenda dalla scelta dei rappresentanti X, Y nè da τ , cioè che, dati $X \approx A, Y \approx B, X, Y \subseteq \tau, A, B \subseteq \sigma$ con σ, τ quadrabili, valga $X \otimes_\tau Y \approx A \otimes_\sigma B$.

Dalla definizione di $A \otimes_\sigma B$ segue, per T, che $(A \otimes_\sigma B) \cap [\sigma\eta, \sigma\eta + \sigma] \approx A \approx X \approx (X \otimes_\tau B) \cap [\tau\eta, \tau\eta + \tau]$ per ogni $\eta \in B$. Quindi, per EQO (che si può applicare per equinumerosità di X ed A), si ottiene $A \otimes_\sigma B \approx X \otimes_\tau B$. Per P otteniamo $X \otimes_\tau B \approx B \otimes_\tau X$, da cui, per EQO (usando questa volta la equinumerosità di Y e B), si ha $B \otimes_\tau X \approx Y \otimes_\tau X$, e da P si ottiene $Y \otimes_\tau X \approx X \otimes_\tau Y$. Rimettendo insieme le varie uguaglianze otteniamo $A \otimes_\sigma B \approx X \otimes_\tau Y$, da cui l'esistenza e unicità del prodotto.

La commutatività di \cdot segue da C, e la distributività dalla distributività del

prodotto piatto rispetto alla unione disgiunta. L'elemento neutro è dato dalla numerosità del singoletto $\{0\}$ (vedremo nella prossima proposizione che le numerosità di ogni singoletto è uguale a quella di $\{0\}$), perchè $X = X \otimes_{\tau} \{0\}$ per ogni $X \subseteq \tau$ e ogni τ quadrabile.

La associatività segue da una uguaglianza insiemistica: dati $X, Y, K \subseteq \tau$, con τ quadrabile, vale $(X \otimes_{\tau^2} (Y \otimes_{\tau} K)) = ((X \otimes_{\tau^2} Y) \otimes_{\tau^3} K)$, dove si è sfruttato che le potenze finite degli ordinali quadrabili sono quadrabili e che $X \otimes_{\tau^2} Y \subseteq \tau^3$: infatti $(X \otimes_{\tau^2} (Y \otimes_{\tau} K)) = \{\tau^3 k + \tau^2 y + x \mid x \in X, y \in Y, k \in K\} = ((X \otimes_{\tau^2} Y) \otimes_{\tau^3} K)$, per cui si possono utilizzare questi prodotti piatti per il calcolo di $num(X) \cdot (num(Y) \cdot num(K))$ e di $(num(X) \cdot num(Y)) \cdot num(K)$.

A questo punto, costruiamo \mathcal{Z} da \mathcal{N} alla stessa maniera di come si costruisce \mathbb{Z} da \mathbb{N} . Vediamo che \mathcal{N} è la parte positiva di questo anello.

Vanno verificate le proprietà di coerenza di somma e prodotto con l'ordine. Per O, si ha che $\eta \leq \psi \Leftrightarrow \exists \rho \neq 0 \mid \psi = \eta + \rho$, e ρ è unico per OP. Inoltre si ha la monotonia rispetto alla addizione: $\eta + \rho \leq \eta + \phi \Leftrightarrow \rho \leq \phi$, da cui si ottiene la legge di cancellazione a sinistra. Infine, la definizione del prodotto piatto ci assicura che l'unico divisore dello zero sia lo 0. Quindi \mathcal{N} è la parte non negativa di un anello totalmente ordinato.

Per poter affermare che num sia una buona definizione di grandezza restano da fare 2 verifiche: va visto che num soddisfi FIN e che num soddisfi i principi di Euclide. Occupiamoci prima di FIN.

Proposizione 4.2.4.

Siano X, Y insiemi finiti. Allora $num(X) = num(Y) \Leftrightarrow |X| = |Y|$. Inoltre per ogni A infinito si ha $X \prec A$.

Dim: \Leftarrow) Per induzione su $n = |X| = |Y|$. Se $n = 0$, $X = Y = \emptyset$, e ci siamo. Se $n = 1$, siano $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$. Gli unici sottoinsiemi di X ed Y sono loro stessi ed il vuoto, e l'unico insieme equinumeroso al vuoto è il vuoto stesso. Pertanto la triconomia data da O forza ad avere $X \approx Y$.

Sia ora $|X| = |Y| = n + 1$. Si prenda $x \in X, y \in Y$ e si scriva $X = \{x\} \cup (X \setminus \{x\})$, $Y = \{y\} \cup (Y \setminus \{y\})$. Per ipotesi induttiva $num(\{x\}) = num(\{y\})$ e $num(X \setminus \{x\}) = num(Y \setminus \{y\})$, da cui, per SP, si ha $num(X) = num(Y)$.

\Rightarrow) Sia $n = |X|$, $m = |Y|$ e $num(X) = num(Y)$. Supponiamo, ad esempio, $n < m$. Sia $Y' \subset Y$ con $|Y'| = n$. Per quanto appena dimostrato si ha $num(X) = num(Y')$. Ma, per O, $num(Y') < num(Y)$, pertanto $num(X) < num(Y)$, il che è assurdo.

Infine, se $|X| = n$ e A è infinito, basta prendere un qualsiasi sottoinsieme di A con n elementi per vedere che $X \prec A$.

Una conseguenza di questa proposizione è che, identificando le numerosità degli insiemi finiti con le cardinalità, si può prendere \mathbb{N} come segmento iniziale di \mathcal{N} . Da qui segue pure che l'ordinamento di \mathcal{N} debba essere discreto.

Rimangono da discutere le nozioni di Euclide. La più delicata da trattare è E4, perchè dobbiamo prima isolare una classe I di isometrie per *num*. Il principio T permette di includere in I alcune traslazioni: più precisamente, dato $\alpha \in \text{Ord}$, denotiamo con T_α la traslazione $T_\alpha(x) = \alpha + x$. Il principio T assicura che, se $\alpha = \tau i$ con τ additivo, per ogni $X \subseteq \tau$ si ha $X \approx T_\alpha(X)$. Inoltre, intuitivamente, dal punto di vista del contare il numero di elementi di un insieme, le omotetie sono isometrie. Questa, con alcune restrizioni dovute alle solite proprietà di assorbimento delle operazioni ordinali, è una proprietà verificata dalle numerosità. Infatti, denotando con H_τ l'applicazione $H_\tau(\alpha) = \tau\alpha$, per C, se $X \subseteq \tau$ e τ è quadrabile, si ha $H_\tau(X) = \{0\} \otimes_\tau X \approx X \otimes_\tau \{0\} = X$, per cui vale che τ quadrabile $\Rightarrow X \approx H_\tau(X) \forall X \subseteq \tau$. Dunque in I abbiamo sia le traslazioni che le omotetie; pertanto abbiamo le trasformazioni affini $F_{\alpha,\tau} : F_{\alpha,\tau}(\eta) = \alpha + \tau\eta$, a meno di restringerne opportunamente il dominio. Infatti vale il seguente

Teorema 4.2.5.

Siano β, γ ordinali tali che $\alpha = \tau\omega^\beta\gamma + \rho$, con $\rho < \tau$, e $\tau = \omega^{\omega^\delta\epsilon}$. Sia $\eta = \min\{\beta + 1, \omega^{\delta+1}\}$. Allora, per ogni $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ valgono

1. $F_{\alpha,\tau}(X) \approx X \forall X \subseteq \omega^\eta$;
2. $T_{\omega^\beta\gamma}$ preserva le grandezze degli insiemi limitati di $\omega^{\beta+1}$;
3. $H_{\omega^{\omega^\delta\epsilon}}$ preserva le grandezze degli insiemi limitati di $\omega^{\omega^{\delta+1}}$.

Dim: (1) segue semplicemente da quanto detto per le traslazioni e le omotetie, essendo gli elementi di $F_{\alpha,\tau}$ composizioni finite di tali isometrie. L'unica verifica da fare riguarda le giuste limitazioni di X : ma se $\text{sup}(X) < \omega^\eta$, allora $X \subseteq \omega^{\omega^{\delta+1}}$ e $X \subseteq \omega^{\beta+1}$, da cui $H_\tau(X)$ è un sottoinsieme limitato di $\tau\omega^{\beta+1}$, e la tesi si ottiene per applicazioni successive di H_τ e di $T_{\tau\omega^\beta\gamma}$.

(2) Sia $\tau = \omega^\beta$, e $X \subseteq \tau n$. Si procede per induzione su n . Per $n = 1$ la tesi è data dalla proprietà T, ponendo $i = \gamma$. Sia allora $X \subseteq \tau(n + 1)$. Scriviamo $X = Y \cup W$, con Y la parte di X inclusa in τn , W inclusa nel complementare. Sia poi $W' = \{\eta \mid \tau n + \eta \in W\} \subseteq \tau$: W' è tale che $W = T_{\tau(\gamma+n)}(W')$, quindi $W \approx W'$. Quindi $\text{num}(X) = \text{num}(Y) + \text{num}(W) = \text{num}(T_{\tau\gamma}[Y]) + \text{num}(T_{\tau\gamma}[W]) = \text{num}(T_{\tau\gamma}[X])$.

(3) Assumiamo questa proprietà, che è una facile conseguenza di un osservazione che sarà fatta ad inizio del paragrafo seguente: ogni $\omega^{\omega^\delta\epsilon}$ si può

scrivere in un unico modo come prodotto $\pi_1 \dots \pi_n$ con i π_i ordinali moltiplicativamente chiusi. Questo ci serve a ricondurre (3) alla proprietà equivalente (4): $H_\pi[X] \approx X$ se $X \subseteq \pi^n$, π moltiplicativo. Dimostriamo (4) per induzione su n . Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare. Se $X \subseteq \pi^{n+1}$, sia $X_i = \{\xi \in \pi^n \mid \pi^n i + \xi \in X\}$. $X \cap [\pi^n i, \pi^n(i+1)) = T_{\pi^n i}[X_i]$ che, per (2), è equinumeroso ad X_i . Inoltre $H_\pi[X] \cap [\pi^{n+1} i, \pi^{n+1}(i+1)) = T_{\pi^{n+1} i}[H_\pi[X_i]]$, che per ipotesi induttiva e (2) è equinumeroso ad X_i . Allora la proprietà (EQO) ci assicura che $H_\pi[X] \approx X$.

Avendo isolato una classe di isometrie, si può verificare che num soddisfa tutti i principi di Euclide.

Teorema 4.2.6.

num soddisfa i principi di Euclide.

Dim: E1) E1 dice semplicemente che $X \approx Y, Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$, cioè $num(X) = num(Y), num(Y) = num(Z) \Rightarrow num(X) = num(Z)$, il che è ovvio.

E2) E' stato verificato per definire la somma nel teorema 4.2.3.

E3) E' stato verificato per definire il prodotto nel teorema 4.2.3.

E4) E' stato dimostrato nel teorema 4.2.5.

E5) E' una facile conseguenza di O.

Con questo risulta dimostrata la validità di num come concetto di grandezza per gli insiemi di ordinali. In realtà num soddisfa pure un'altra proprietà interessante: la coerenza con le scritture in forma normale di Conway. Nella proposizione che segue, le espressioni del tipo $num(\omega^\alpha)$ significano $num([0, \omega^\alpha))$.

Proposizione 4.2.7.

Siano $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ numeri ordinali. Allora $num(\sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^n (num(\omega^{\alpha_i}))$ e $num(\omega^{\sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i}}) = \prod_{i=1}^n num(\omega^{\omega^{\alpha_i}})$.

Dim: Per induzione su n . Trattiamo la prima uguaglianza. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Sia allora $n > 1$ e scriviamo ogni α_i come $\alpha_i = \alpha_n + \delta_i$. Sia poi $\delta = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$. Per invarianza per traslazioni si ha che $num(T_{\omega^{\alpha_n \delta}}[\omega^{\alpha_n}]) = num(\omega^{\alpha_n})$, mentre per ipotesi induttiva si ha $num(\sum_{i=1}^{n-1} \omega^{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n-1} num(\omega^{\alpha_i})$, da cui $num(\sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i}) = num(\sum_{i=1}^{n-1} \omega^{\alpha_i}) + num(T_{\omega^{\alpha_n \delta}}[\omega^{\alpha_n}]) = \sum_{i=1}^{n-1} num(\omega^{\alpha_i}) + num(\omega^{\alpha_n})$, che è la tesi.

Trattiamo ora la seconda uguaglianza. Siano $\alpha_1 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1}$, e si pongano $\tau = \omega^{\sum_{i=1}^k \omega^{\alpha_i}}, \theta = \omega^{\omega^{\alpha_i}}, \sigma = \theta^k$. Allora $\omega^{\sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i}} = \sigma \tau = \sigma \otimes_\sigma \tau$, da cui $num(\omega^{\sum_{i=1}^n \omega^{\alpha_i}}) = num(\sigma \tau) = num(\sigma \otimes_\sigma \tau) = num(\sigma) \cdot (\tau)$. A questo

punto sfruttiamo l'ipotesi induttiva su τ ottenendo $num(\tau) = num(\omega^{\alpha_{k+1}}) \cdot \dots \cdot num(\omega^{\alpha_n})$. Inoltre, facendo una semplice induzione su k si dimostra che $num(\sigma) = num(\theta^{k-1} \otimes_{\theta^{k-1}} \theta) = num(\theta)^\kappa$. Quindi $num(\omega^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}) = num(\sigma)num(\tau) = num(\omega^{\alpha_1})^k num(\omega^{\alpha_{k+1}}) \dots num(\omega^{\alpha_n}) = \prod_{i=1}^n num(\omega^{\alpha_i})$.

Una conseguenza semplice ed elegante di questo teorema riguarda, come detto, le forme normali di Cantor.

Dati $\alpha, \beta \in Ord$, scriviamo α, β nelle forme normali di Cantor, e consideriamo $\alpha \oplus \beta$ e $\alpha \otimes \beta$ (ricordo che $(\sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} n_i) \oplus (\sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} m_i) = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} (n_i + m_i)$, e $(\sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} n_i) \otimes (\sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} m_i) = \bigoplus_{i,j} \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j} n_i m_j$).

Osservazione: $num(\alpha \oplus \beta) = num(\alpha) + num(\beta)$; $num(\alpha \otimes \beta) = num(\alpha) num(\beta)$.

Dim: La prima uguaglianza segue banalmente dalla prima uguaglianza della proposizione precedente. La proposizione precedente ci assicura anche che $num(\omega^{\alpha \oplus \beta}) = num(\omega^\alpha) num(\omega^\beta)$, da cui si ottiene la tesi per distributività.

In particolare, quindi, num è un isomorfismo iniettivo di semianelli di (Ord, \oplus, \otimes) in \mathcal{N} .

4.3 Modelli della numerosità

In questa sezione si vogliono esibire modelli della numerosità, così come è definita in 4.1.4. Nelle situazioni dei capitoli precedenti si è mostrato come il modo solito di costruire le funzioni numerosità di un insieme X sia quello di approssimare prima X con una successione, avente indici in un qualche opportuno insieme ordinato (o parzialmente ordinato), di suoi sottoinsiemi finiti, e di considerare poi la counting function di X , costruita associando ad ogni elemento della successione approssimante la sua cardinalità. Vorremmo procedere in maniera analoga anche nel contesto presente.

Il risultato che permette di costruire in maniera naturale le successioni approssimanti è la possibilità di scrivere ogni ordinale come 'polinomio' avente come variabili degli ordinali moltiplicativamente chiusi.

Sia infatti dato $\alpha \in Ord$. Ad α possiamo associare la scrittura in forma normale di Cantor $\alpha = \omega^{\beta_1} n_1 + \dots + \omega^{\beta_k} n_k$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_k$, $n_i > 0$. Consideriamo il termine di 'grado' β_i di questa scrittura: $\omega^{\beta_i} n_i$. Possiamo riscrivere questo monomio sostituendo a β_i la sua scrittura in forma normale di Cantor: $\beta_i = \omega^{\gamma_{1,i}} m_{1,i} + \dots + \omega^{\gamma_{l,i}} m_{l,i} \Rightarrow \omega^{\beta_i} = \omega^{\omega^{\gamma_{1,i}} m_{1,i}} \cdot \omega^{\omega^{\gamma_{2,i}} m_{2,i}} \cdot \dots \cdot \omega^{\omega^{\gamma_{l,i}} m_{l,i}} n_i$. Rinominando $\omega^{\omega^{\gamma_{j,i}}}$ come $\pi_{j,i}$, si ottiene la scrittura $\omega^{\beta_i} = \pi_{1,i}^{m_{1,i}} \cdot \dots \cdot \pi_{l,i}^{m_{l,i}}$, dove i $\pi_{j,i}$ sono tutti ordinali moltiplicativamente chiusi.

In definitiva otteniamo

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \pi_{1,i}^{m_{1,i}} \cdot \dots \cdot \pi_{l,i}^{m_{l,i}} n_i$$

(dove l dipende da i): si è trovato un modo per scrivere ogni ordinale come un polinomio, con esponenti e coefficienti in \mathbb{N} , in un numero finito di ‘variabili’ rappresentate da ordinali moltiplicativamente chiusi. Diremo questa la **scrittura polinomiale moltiplicativamente chiusa di α** , e l’insieme dei $\pi_{j,i}$ sarà detto **base** di questa scrittura.

Questa scrittura suggerisce un metodo per associare ad α un indice intero:

Definizione 4.3.1. Dato $\alpha \in \text{Ord}$, diremo **altezza** di α il numero

$H(\alpha) = \max\{m_{j,i}, n_s \mid \text{nella scrittura polinomiale moltiplicativamente chiusa di } \alpha \text{ } n_s \text{ compare come coefficiente, } m_{j,i} \text{ appare come esponente}\}$.

Sia fissato un insieme finito F di ordinali moltiplicativamente chiusi. Con $B(F)$ indichiamo l’insieme di ordinali la cui base, nella scrittura polinomiale moltiplicativa, è inclusa in F . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero di elementi di $B(F)$ di altezza $\leq n$ è finito: infatti dire $H(\alpha) \leq n$ significa che ogni $m_{j,i}$ ed ogni n_i della scrittura di α devono essere $\leq n$, e questo è vero soltanto per un numero finito di polinomi con variabili in F .

Dato ora un insieme generico X di ordinali, vorremmo associare ad X la successione $f_X(n) = \{\alpha \in X \mid H(\alpha) \leq n\}$. Il problema è che, in generale, $f_X(n)$ potrebbe essere un insieme infinito: infatti non è necessariamente vero che il numero di elementi di X di altezza $\leq n$ sia finito, perchè le basi delle scritture di due elementi qualsiasi di X possono non avere alcun legame tra loro. Ad esempio, sia $X = \omega^{\omega^\omega}$. Gli elementi di altezza 1 di X sono infiniti: infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, ω^{ω^n} è un elemento di X di altezza 1. Quindi f_X non è, in generale, una buona successione approssimante.

Un modo più opportuno di costruire tale successione è di mischiare le proprietà di $B(F)$, per F finito, con la definizione di f_X .

Dato F finito, X insieme di ordinali, consideriamo $X_F = \{x \in X \mid x \in B(F)\}$. Al variare di F tra tutti i possibili sottoinsiemi finiti di ordinali si ottiene un ricoprimento di X . Inoltre, fissato F , la successione $\varphi_{X_F}(n) = \{\alpha \in X_F \mid H(\alpha) \leq n\}$ è una successione crescente, avente come limite X_F , e tale che $\forall n \in \mathbb{N} \mid \varphi_{X_F}(n) \mid < \aleph_0$.

Sia W un insieme di atomi. Denotato con $\wp_\omega(W)$ l’insieme dei sottoinsiemi finiti di W , sia $I = \wp_\omega(W) \times \mathbb{N}$, ordinato così: $(F, n) \leq (G, m) \Leftrightarrow F \subseteq G, n \leq m$.

Definizione 4.3.2. Dato $X \subseteq B(W)$, diremo **sequenza approssimante di X** la successione $\mathbf{X}_{F,n} = \{x \in X \mid x \in B(F) \text{ e } H(x) \leq n\}$. Si dirà **counting function** di X l’applicazione $\phi_X : I \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $\phi_X(F, n) = |X_{F,n}|$.

Osservazioni: 1) Per quanto detto precedentemente, $|X_{F,n}|$ è finita $\forall X, F, n$, dunque ϕ_X è ben definita; 2) ϕ_X è crescente: se $(F, n) \leq (G, m)$, $X_{F,n} \subseteq X_{G,m}$, dunque $\phi_X(F, n) \leq \phi_X(G, m)$.

Va verificato che relazioni intercorrano tra le counting functions e le operazioni insiemistiche di unione disgiunta e di prodotto piatto.

Proposizione 4.3.3.

Siano $X, Y \subseteq W$. Se $X \cap Y = \emptyset$ allora $\forall (F, n) \in I$ $(X \cup Y)_{F,n} = X_{F,n} \cup Y_{F,n}$; inoltre, se $X, Y \subseteq \tau = \pi^m$, con π moltiplicativamente chiuso, allora $(X \otimes_\tau Y)_{F,n} = X_{F,n} \otimes_\tau Y_{F,n} \forall n \geq 2m$, F tale che $\pi \in F$. In particolare si ha $\phi_{X \cup Y} = \phi_X + \phi_Y$, $\phi_{X \otimes_\tau Y}(F, n) = \phi_X(F, n) \cdot \phi_Y(F, n) \forall F$ tale che $\pi \in F, n \geq 2m$.

Dim: L'affermazione riguardante l'unione segue facilmente dalle definizioni.

Per il prodotto piatto: gli elementi di $(X \otimes_\tau Y)_{F,n}$ sono tutti e soli gli elementi del tipo $\pi^m p_1 + p_2$, con $\pi^m p_1 + p_2 \in B(F)$, $H(\pi^m p_1 + p_2) \leq n$; quelli di $X_{F,n} \otimes_\tau Y_{F,n}$ sono tutti e soli quelli del tipo $\pi^m p_1 + p_2$, con $p_1 \in X, p_2 \in Y, p_1, p_2 \in B(F), H(p_1) \leq n, H(p_2) \leq n$. $\pi \in F \Rightarrow (X \otimes_\tau Y)_F = X_F \otimes_\tau Y_F$. Restano da determinare due cose: 1) per quali n $H(\pi^m p_1 + p_2) \leq n \Rightarrow H(p_1) \leq n, H(p_2) \leq n$; 2) per quali n vale l'implicazione inversa.

1) Necessariamente deve aversi $n \geq m$, perchè $H(\pi^m p_1 + p_2) \geq m$; questo poi basta, perchè vale sempre che $H(\pi^m p_1 + p_2) \geq \max\{H(p_1), H(p_2)\}$.

2) Per ipotesi $X \subseteq \pi^m$, quindi π^m non compare nelle scritture in forma polinomiale moltiplicativa degli elementi di X . Perciò, per ogni $p_1 \in X, p_2 \in Y$, $\pi^m p_1 + p_2$ è una scrittura in forma moltiplicativa in cui i termini di $\pi^m p_1, p_2$ rimangono separati (cioè non si sommano tra loro). Quindi l'insieme dei coefficienti di $\pi^m p_1 + p_2$ è l'unione di quello di p_1 con quello di p_2 . Sia quello di p_1 che quello di p_2 sono composti da elementi $\leq n$, dunque anche tutti i coefficienti di $\pi^m p_1 + p_2$ sono $\leq n$. Restano da controllare gli esponenti. Quelli di p_2 restano immutati. Quelli di p_1 restano immutati ad eccezione dei monomi in cui compaiono potenze intere di π , che però possono avere al più grado $m - 1$, dato che $Y \subseteq \pi^m$. Quindi sicuramente tutti gli esponenti di $\pi^m p_1 + p_2$ sono $\leq m + m - 1 = 2m - 1$. Pertanto, se $n \geq 2m$, $H(p_1) \leq n$ e $H(p_2) \leq n \Rightarrow H(\pi^m p_1 + p_2) \leq n$. Poichè $2m \geq m$, per $n \geq 2m$ valgono entrambe le implicazioni, cioè vale l'uguaglianza della tesi.

Inoltre, $(X \cup Y)_{F,n} = X_{F,n} \cup Y_{F,n}$ implica chiaramente che $\phi_{X \cup Y} = \phi_X + \phi_Y$ se $X \cap Y = \emptyset$; ricordando che $|A \otimes_\tau B| = |A| \cdot |B| \forall A, B \subset \tau$ finiti, τ additivo, da $(X \otimes_\tau Y)_{F,n} = X_{F,n} \otimes_\tau Y_{F,n}$ si ottiene $\phi_{X \otimes_\tau Y}(F, n) = \phi_X(F, n) \cdot \phi_Y(F, n)$ per ogni (F, n) con $\pi \in F, n \geq 2m$.

Definizione 4.3.4. Sia \mathcal{U} un ultrafiltro su $\wp_\omega(W) \times \mathbb{N}$. Si dirà che \mathcal{U} è **iperselettivo** se per ogni $X \subseteq W$ al più numerabile la proiezione di \mathcal{U} su $\wp_\omega(X) \times \mathbb{N}$ è un ultrafiltro selettivo.

Teorema 4.3.5.

Sia dato W insieme di ordinali moltiplicativamente chiusi, e sia \mathbb{W} un sottoinsieme di $B(W)$ tale che

- $B(F) \subseteq \mathbb{W}$ per ogni $F \in \wp_\omega(W)$;
- \mathbb{W} sia chiuso per prodotto piatto su τ per ogni $\tau \in W$ e per ogni coppia di suoi insiemi;
- \mathbb{W} sia chiuso per sottoinsieme: $Y \in \mathbb{W} \Rightarrow \wp(Y) \subseteq \mathbb{W}$.

Sia \mathcal{U} un ultrafiltro iperselettivo su $I = \wp_\omega(W) \times \mathbb{N}$ che includa il prodotto $D \times Fr$, con D filtro conico su $\wp_\omega(W)$ e Fr il filtro di Frechèt su \mathbb{N} .

Sia infine φ la mappa che associa ad ogni elemento di \mathbb{W} la classe mod \mathcal{U} della sua counting function: $\varphi(X) = [\phi_X]_{\mathcal{U}}$.

Allora φ è una funzione numerosità per \mathbb{W} che soddisfa la condizione della differenza per i sottoinsiemi numerabili.

Dim: Rinominiamo per comodità φ come *num*. Bisogna controllare che *num* verifichi le condizioni della definizione 4.1.4.

OP) Vale per la proposizione precedente: infatti, per ogni $X, Y \in \mathbb{W}$ $num(X) = num(X \cap Y) + num(X \setminus Y)$, e analoga scambiando i ruoli di X ed Y . Dunque $num(X) = num(Y) \Leftrightarrow num(X \cap Y) + num(X \setminus Y) = num(X \cap Y) + num(Y \setminus X) \Leftrightarrow num(X \setminus Y) = num(Y \setminus X)$.

C) Per la proposizione precedente, e perchè $D \times Fr \subseteq \mathcal{U}$, si ha $num(X \otimes_\tau Y) = num(X) \cdot num(Y) = num(Y) \cdot num(X) = num(Y \otimes_\tau X)$ per ogni τ quadrabile con $X, Y \subseteq \tau$.

T) Sia $T_\tau[X]$ una traslazione lecita, cioè τ additivo, $X \subseteq \tau$. In particolare, la scrittura moltiplicativa di τ è un unico monomio (che per semplicità continueremo a scrivere come τ), quindi, se ψ è un elemento di X con scrittura moltiplicativa p , la scrittura moltiplicativa di $\tau + \psi$ è $\tau + p$. L'altezza di ogni elemento $\tau + p$ è la massima tra quelle di τ e quella di p . Quindi, se t è l'altezza di τ , per ogni $h > t$ $H(\tau + p) = H(p)$. Perciò, per ogni F che contenga τ e ogni $h > t$ si ha $\phi_X(F, h) = \phi_{T_\tau[X]}(F, h)$. Ma l'insieme $\{(F, h) \mid \tau \in F, h > t\}$ sta in \mathcal{U} , perchè è un elemento di $D \times Fr$. Quindi $num(T_\tau[X]) = num(X) \forall \tau$ additivo, $X \subseteq \tau$.

EQO) Come al solito, denotiamo con $X_i = X \cap [\tau i, \tau(i+1))$, $Y_i = Y \cap [\sigma i, \sigma(i+1))$. $\phi_{X_i}(F, h) = |\{x \in X \mid x \in [\tau i, \tau(i+1)), x \in B(F), H(x) \leq h\}|$. Se f è la scrittura moltiplicativa di i , la scrittura moltiplicativa di ciascun

elemento di $X \cap [\tau i, \tau(i+1))$ è del tipo $\tau f + p$, e l'altezza di questa scrittura è la massima tra le altezze di τ , f , p perchè τ è quadrabile. Dunque, per avere $\phi_{X_i}(F, h)$ non vuoto serve sicuramente che $H(f) \leq h$. Serve inoltre che $i \in B(F)$. Ma ci sono soltanto un numero finito di ordinali che soddisfino entrambe queste condizioni: sia questo insieme $I_{F,h}$; per ogni $j \notin I_{F,h}$ si ha $\phi_{X_j}(F, h) = 0$. Allora $\phi_X(F, h) = \sum_{i \in Ord} \phi_{X_i}(F, h) = \sum_{i \in I_{F,h}} \phi_{X_i}(F, h)$; si può ripetere lo stesso identico ragionamento sostituendo Y ad X . Osserviamo che l'insieme $I_{F,h}$ è indipendente da X e da Y .

Siano dati Z, W come nelle ipotesi di EQO, e sia $U_0 = \{(F, h) \mid \phi_Z(F, h) = \phi_W(F, h)\} \in \mathcal{U}$. Sia U_1 costituito dalle coppie (F, h) con $\tau, \sigma \in A$, $k \geq \max\{H(\tau), H(\sigma)\}$. U_1 sta in \mathcal{U} perchè \mathcal{U} estende $D \times Fr$. Sia $U_2 = U_0 \cap U_1$, e sia $(F, h) \in U_2$. Allora, $\forall i \in I_{F,h}$, si ha $\phi_{X_i}(F, h) = \phi_Z(F, h) = \phi_W(F, h) = \phi_{Y_i}(F, h)$, perchè sotto queste ipotesi, se $\tau f + p \in X_i$ è tale che $H(\tau f + p) \leq n$, $\tau f + p \in B(F)$, allora le stesse condizioni devono valere per p , e p per costruzione è un elemento di Z ; una situazione completamente analoga si verifica pure per Y . Dunque, su U_2 , $\phi_X(F, h) = \sum_{i \in I_{F,h}} \phi_{X_i}(F, h) = \sum_{i \in I_{F,h}} \phi_Z(F, h) = \sum_{i \in I_{F,h}} \phi_W(F, h) = \sum_{i \in I_{F,h}} \phi_{Y_i}(F, h) = \phi_Y(F, h)$, pertanto $num(X) = num(Y)$.

O) La tricotomia data da Ord è verificata da num per proprietà di ultrafiltro: infatti uno ed uno solo degli insiemi $\{i \in I \mid \phi_X < \phi_Y\}$, $\{i \in I \mid \phi_X = \phi_Y\}$, $\{i \in I \mid \phi_X > \phi_Y\}$ sta in \mathcal{U} , e a seconda di quale delle tre situazioni si verifichi si ottiene l'ordinamento tra $num(X)$ e $num(Y)$. La parte complicata, che richiede la iperselettività dell'ultrafiltro, è l'altra proprietà data da O): se $num(X) < num(Y)$, si deve trovare $X' \subset Y$ con $num(X') = num(X)$.

Come detto, supponiamo X, Y al più numerabili. Per iperselettività di \mathcal{U} , si può scrivere l'insieme A degli atomi di X come una sequenza non decrescente di insiemi A_h in modo che l'insieme degli elementi di I del tipo (A_h, h) , al variare di $h \in \mathbb{N}$, stia nella proiezione di \mathcal{U} su $\wp_\omega(A) \times \mathbb{N}$. Sia $D = \{(A_h, h) \mid h \in \mathbb{N}\}$ questo insieme. Inoltre, la sequenza delle cardinalità $|X_{A_h, h}|$ è, per iperselettività, equivalente ad una non decrescente. Inoltre, sempre per selettività, pure $f(h) = |Y_{A_h, h}| - |X_{A_h, h}|$ è equivalente ad una funzione non decrescente. Sia U_0 l'insieme su cui f è non decrescente, e sia $E = D \cap U_0$. Si costruisce quindi X' per induzione su h , prendendo h nell'insieme $C = \{n \in \mathbb{N} \mid (A_n, n) \in E\}$. Siano $h_0 < h_1 < \dots < h_i < \dots$ gli elementi di C . Per $i = 0$ basta usare l'ipotesi $|Y_{A_h, h}| > |X_{A_h, h}|$ e scegliere $|X_{A_h, h}|$ elementi in $Y_{A_h, h}$. Sia X'_0 questo insieme. Per $i = k + 1$, si devono scegliere $|X_{A_i, i}| - |X_{A_k, k}|$ elementi in $Y_{A_i, i} \setminus Y_{A_k, k}$, e questo si può fare per la condizione di non decrescenza di $f(h)$ su C . Sia X'_i è l'insieme ottenuto aggiungendo ad X'_k questi elementi, e sia $X' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X'_i$. Allora, per costruzione, $num(X) = num(X')$: infatti, per ogni elemento (A_h, h) di E si ha

$\phi_X(A_h, h) = \phi_{X'}(A_h, h)$, da cui, siccome $E \in \mathcal{U}$, si ha la tesi .

Osserviamo che la condizione di iperselettività è servita solamente a definire la differenza. Sicuramente, è per questo una condizione sufficiente, ma non è chiaro se sia pure necessaria; non è neppure evidente l'esistenza di ultrafiltri iperselettivi. Per queste tematiche si rimanda a [7], in cui viene mostrato come si possa riuscire a costruire una numerosità che soddisfi la proprietà della differenza restringendosi ad ω_1 .

Nella sezione precedente si è anticipato che, in questo modello, non è possibile ammettere come principio di equinumerosità il principio Cavalieri Ordinale in tutta la sua generalità. Dimostriamo questo fatto.

Sia $X = \{\omega \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{\omega \cdot n + (n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Gli unici atomi di X, Y sono ω e 1 . Sia A l'insieme delle coppie (F, h) con $\omega, 1 \in F$, $h \in \mathbb{N}$. A è un elemento di \mathcal{U} . Sia $(F, h) \in A$, con $h \geq 1$. $\phi_X(F, h) = |\{x \in X \mid x \in B(F) \text{ e } H(x) \leq h\}| = |\{0, \omega, \dots, \omega h\}| = h + 1$. Invece $\phi_Y(F, h) = |\{y \in Y \mid y \in B(F) \text{ e } H(y) \leq h\}| = |\{1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot (h - 1) + h\}| = h$. Dunque, su A , si ha $\phi_Y + 1 = \phi_X$. Ma $A \in \mathcal{U}$, quindi $\text{num}(X) = \text{num}(Y) + 1$. Però X ed Y soddisfano le ipotesi di Cavalieri Ordinale: infatti, sono entrambi inclusi in ω^2 e, per ogni $i \in \text{Ord}$, $\text{num}(X_i) = \text{num}(Y_i) = 1$ se $i < \omega$, 0 altrimenti. Se valesse Cavalieri Ordinale dovremmo avere $\text{num}(X) = \text{num}(Y)$, il che abbiamo dimostrato essere falso. Quindi, in questo modello, vale EQO ma non vale Cavalieri Ordinale.

Definizione 4.3.6. *Un insieme X di ordinali ha **carattere finito** se, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\{x \in X \mid H(x) \leq n\}$ è finito.*

Ad esempio, fissato un insieme F finito di ordinali moltiplicativamente chiusi, $B(F)$ è un insieme di carattere finito. Non vale il viceversa, cioè possono esistere anche insiemi di carattere finito non del tipo $B(F)$. La particolarità degli insiemi di carattere finito è che, su questi insiemi, si può definire una numerosità procedendo esattamente come abbiamo fatto nel capitolo 2, usando come indicizzazione degli elementi quella fornita dall'altezza. Inoltre, se num è una funzione numerosità per W , $\text{num}_{\upharpoonright \text{Fin}}$ è una funzione numerosità per Fin la cui immagine è un sottoanello di $\text{num}[W]$: questo perchè Fin è chiusa per prodotti piatti e unioni disgiunte.

4.4 Metodo alternativo

In questa sezione vogliamo proporre una definizione di funzione numerosità che generalizzi direttamente quelle definite sugli insiemi numerabili, e studiarne le relazioni con la teoria della grandezza esposta nei due paragrafi

precedenti.

Nel secondo capitolo abbiamo visto come associare una indicizzazione, con indici in \mathbb{N} , agli insiemi numerabili, in modo da avere delle ottime proprietà di coerenza con le unioni e i prodotti cartesiani di insiemi. La caratteristica importante di questa indicizzazione è l'essere 'finita ad 1', cioè di associare ad ogni numero naturale soltanto un numero finito di elementi dell'insieme. Volendo generalizzare quella costruzione, si può pensare di ingrandire l'insieme degli indici da \mathbb{N} ad Ord (si sono identificati gli elementi di \mathbb{N} con quelli di ω), associando ad ogni elemento di Ord lui stesso come indice. Sorgono però due problemi. Il primo riguarda il prodotto cartesiano: per definizione, se A, B sono insiemi indicizzati, l'indicizzazione di $A \times B$ è $l(a, b) = \max\{l(a), l(b)\}$. Siano però $A = B = \omega + 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $l(\omega, n) = \omega$ per definizione. Quindi in $A \times B$ abbiamo infiniti elementi di indice ω , contro l'ipotesi di finitezza ad uno di l .

L'altro problema riguarda le counting functions. Le counting functions sono funzioni dall'insieme degli indici in \mathbb{N} che associano ad ogni i la cardinalità dell'insieme degli elementi aventi indice al più i . Però, se $I = Ord$, con l'ordine dato dalla relazione di appartenenza, niente più assicura che tali cardinalità vengano finite. Anzi: ad esempio, se $A = [0, \omega)$, $\phi_A(\omega) = \aleph_0 \notin \mathbb{N}$.

Questi due problemi possono venir risolti cambiando l'ordinamento di Ord . Per questo si sfruttano le scritture in forma normale di Cantor.

Siano dati $\alpha, \beta \in Ord$, con $\alpha = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} n_i$, $\beta = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} m_i$, dove assumiamo $m_i, n_i \geq 0$.

Definizione 4.4.1. Diremo $\alpha \trianglelefteq \beta \Leftrightarrow n_i \leq m_i \forall i \leq k$.

Questo ordine è collegato ad una struttura di reticolo definibile su Ord . Nelle notazioni precedenti, diremo

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} \min\{n_i, m_i\}$$

$$\alpha \vee \beta = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} \max\{n_i, m_i\}$$

Con questa scrittura, si ha $\alpha \trianglelefteq \beta \Leftrightarrow \alpha = \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha \vee \beta$.

Osservazioni:

1. \trianglelefteq coincide con \leq su ω ;
2. $\forall \alpha \in Ord \{\beta \in Ord \mid \beta \trianglelefteq \alpha\}$ è finito;

3. $\alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$.

Dim: 1) La scrittura in forma normale di Cantor di $n \in \omega$ è n , quindi $m \preceq n \Leftrightarrow m \leq n$.

2) Sia $\alpha = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} n_i$. Per definizione di \preceq , β può essere $\preceq \alpha \Leftrightarrow \beta = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} m_i$, con $0 \leq m_i \leq n_i \forall i \leq k$. Quindi ogni ordinale $\preceq \alpha$ è individuato dalla $k+1$ -pla m_0, \dots, m_k , e ci sono soltanto $\prod_{i=0}^k (n_i + 1)$ scelte possibili che rispettino i vincoli dati.

3) Chiara dalle scritture di α, β in forme normali di Cantor.

Sia I l'insieme Ord ordinato con \preceq . Se (A, l_A) e (B, l_B) sono insiemi indicizzati, definiamo l'indicizzazione del prodotto cartesiano $(A \times B)$ come $l_{A \times B}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = l_A(\mathbf{a}) \vee l_B(\mathbf{b})$. Questa indicizzazione rispetta la finitezza ad 1: infatti, fissato α , ci sono soltanto un numero finito di coppie (μ, ν) con $\mu \vee \nu = \alpha$, e ciascuna di queste coppie è associata ad un numero finito di termini. Pertanto l'insieme $\{(a, b) \in A \times B \mid l_{A \times B}(a, b) = \alpha\}$ è finito qualsiasi sia α . Questa indicizzazione è inoltre coerente con quella definita nel secondo capitolo: se n, m sono numeri naturali, $\max\{n, m\} = n \vee m$.

Dato (A, l_A) , l'applicazione \vee permette di associare un indice ad ogni sottoinsieme finito di A : dato $B \in \wp_\omega(A)$, diremo $l(B) = \bigvee_{b \in B} l(b)$, cioè il più piccolo ordinale che maggiori ogni elemento di B rispetto alla relazione \preceq .

Dato $\alpha \in Ord$, A indicizzato, sia $\alpha^A = \{f : A \rightarrow \alpha \mid \text{supp}(f) \text{ finito}\}$, dove $\text{supp}(f) = \{a \in A \mid f(a) \neq 0\}$. Allora si etichetta ogni $f \in \alpha^A$ ponendo $l(f) = \bigvee \{l(x, f(x)) \mid x \in \text{supp}(f)\}$.

Definizione 4.4.2. Sia (A, l_A) un insieme indicizzato. Diremo **sequenza approssimante** di A la successione degli $A_\alpha = \{a \in A \mid l_A(a) \preceq \alpha\}$, e diremo **counting sequence** di A la funzione $\phi_A : (Ord, \preceq) \rightarrow \mathbb{N} : \phi_A(\alpha) = |A_\alpha|$.

Osservazioni: 1) ϕ è ben definita; 2) se A è tale che ogni suo elemento abbia indice intero, allora la sequenza approssimante e la counting sequence di A coincidono con quelle definite nel capitolo 2.

Dim: 1) Bisogna verificare che, per ogni α , $|A_\alpha|$ sia finita. Per ipotesi le indicizzazioni sono finite ad 1. Inoltre sappiamo che $\forall \alpha \in Ord \{\beta \in Ord \mid \beta \preceq \alpha\}$ è finito. Quindi $|A_\alpha|$ è la cardinalità di una unione finita di insiemi finiti, quindi è finita e ϕ è ben definita.

2) Segue banalmente dalla parte 1) della osservazione precedente.

Definizione 4.4.3. Dato $\alpha \in Ord$, denotiamo con $Ord^{\geq \alpha} = \{x \in Ord \mid \alpha \preceq x\}$.

Oss: La famiglia $\{Ord^{\geq\alpha}\}_{\alpha \in Ord}$ gode della FIP.

Dim: Basta osservare che $Ord^{\geq\alpha_1} \cap \dots \cap Ord^{\geq\alpha_n} = Ord^{\geq(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n)}$.

Sia allora Ω un cardinale sufficientemente grande, e denotiamo con $W(\Omega)$ la classe degli insiemi con indici in Ω . Siano ϕ_A, ϕ_B due successioni approssimanti che siano uguali su un qualche $Ord^{\geq\alpha}$. Alla stessa maniera in cui si dimostra che $\{Ord^{\geq\alpha}\}_{\alpha \in Ord}$ ha la FIP, si può far vedere che anche la famiglia $\{\Omega^{\geq\alpha}\}_{\alpha \in \Omega}$ ha la FIP, dove $\Omega^{\geq\alpha} = \{\gamma \in \Omega \mid \alpha \leq \gamma\}$. Sia \mathcal{U} un ultrafiltro che estende questa famiglia. Allora, modulo \mathcal{U} , ϕ_A, ϕ_B sono uguali. Questo conduce alla seguente:

Definizione 4.4.4. Diremo *numerosità* per $W(\Omega)$ l'applicazione $num : W(\Omega) \rightarrow \mathbb{N}_{\mathcal{U}}^I$ tale che $num(\mathbf{A}) = [\phi_{\mathbf{A}}]_{\mathcal{U}} \forall \mathbf{A} \in W(\Omega)$.

Teorema 4.4.5.

num soddisfa UP, SUM, PP, AP, $num(\gamma^E) = num(\gamma)^{num(E)}$, FIN.

Dim: UP) Sia $A = \{a\}$, e sia $l_A(a) = \alpha$. Allora $\phi_A(x) = 1 \forall x \in \Omega^{\geq\alpha}$, cioè $\phi_A \equiv_{\mathcal{U}} 1$.

SUM) Siano A, B con $A \cap B = \emptyset$. $\phi_{A \cup B}(\alpha) = |\{x \in A \cup B \mid l(x) \leq \alpha\}| = |\{x \in A \mid x \leq \alpha\} \cup \{x \in B \mid x \leq \alpha\}| = |\{x \in A \mid x \leq \alpha\}| + |\{x \in B \mid x \leq \alpha\}| = \phi_A(\alpha) + \phi_B(\alpha)$, per cui $num(A \cup B) = num(A) + num(B)$.

PP) $\phi_{A \times B}(\alpha) = |\{(x, y) \in A \times B \mid l(x) \vee l(y) \leq \alpha\}| = |\{x \in A \mid l(x) \leq \alpha\}| \times |\{y \in B \mid l(y) \leq \alpha\}| = \phi_A(\alpha) \cdot \phi_B(\alpha)$, quindi $num(A \times B) = num(A) \cdot num(B)$.

AP) Sia $A \subseteq B$, e sia $a \in A \setminus B$, con $l(a) = \alpha$. Allora su $\Omega^{\geq\alpha}$ si ha $\phi_A > \phi_B$, cioè $[\phi_A]_{\mathcal{U}} > [\phi_B]_{\mathcal{U}}$.

Per l'uguaglianza esponenziale: $\phi_{\gamma^E}(\alpha) = |\{f : E \rightarrow \gamma \mid l(f) \subseteq \alpha\}| = |\{f : E \rightarrow \gamma \mid supp(f) \subseteq E_{\alpha}, f(E_{\alpha}) \subseteq \gamma_{\alpha}\}| = |\gamma_{\alpha}|^{|E_{\alpha}|} = \phi_{\gamma}(\alpha)^{\phi_E(\alpha)}$.

FIN) Segue da UP e SUM.

Di qui in seguito concentriamo l'attenzione solo sugli insiemi di ordinali, e indichiamo con num_1 la numerosità nel senso della definizione 4.1.4, num_2 quella nel senso della definizione 4.4.4.

Vogliamo individuare una classe di isometrie I per num_2 . Nelle sezioni precedenti abbiamo individuato le traslazioni T_{α} e le omotetie H_{α} come applicazioni adatte a stare in I rispetto alla num_1 . Per num_2 le traslazioni continuano ad essere isometrie:

Proposizione 4.4.6.

Se τ è un ordinale additivamente chiuso e $X \subseteq \tau$, allora $num_2(X) = num_2(\{\tau i + x \mid x \in X\})$ per ogni $i \in Ord$.

Dim: Basta osservare che, per ogni $\alpha \in Ord$, si ha $\phi_X(\alpha \vee \tau i) = |\{x \in X \mid x \leq \alpha \vee \tau i\}| = |\{x \in T_{\tau i}(X) \mid x \leq \tau i \vee \alpha\}| = \phi_{T_{\tau i}(X)}(\tau i \vee \alpha)$, cioè $\phi_X = \phi_{T_{\tau i}(X)}$ su $\Omega^{\geq \tau i}$, perciò $\phi_X \equiv_{\mathcal{U}} \phi_{T_{\tau i}(X)}$, quindi $num_2(X) = num_2(T_{\tau i}(X))$.

num_2 è definita a partire dalle scritte in forma normale di Cantor. Vorremmo quindi ottenere un risultato di coerenza tra tali scritte e le numerosità. Convenendo di denotare, per semplicità, $num_2([0, \alpha])$ come $num_2(\alpha)$, dimostriamo i prossimi due risultati, che conducono ad una proprietà del tutto analoga a quella della proposizione 4.2.7.

Lemma 4.4.7. $\forall m \in \mathbb{N}, \gamma \in \Omega, num_2(\omega^\gamma m) = m \cdot num_2(\omega^\gamma)$.

Dim: Basta osservare che $\omega^\gamma m = \omega^\gamma \cup T_{\omega^\gamma}[\omega^\gamma] \cup \dots \cup T_{\omega^\gamma(m-1)}[\omega^\gamma]$, dove tutte le unioni sono disgiunte. Quindi $num_2(\omega^\gamma m) = num_2(\omega^\gamma) + num_2(T_{\omega^\gamma}[\omega^\gamma]) + \dots + num_2(T_{\omega^\gamma(m-1)}[\omega^\gamma]) = m \cdot num_2(\omega^\gamma)$ per la invarianza per traslazioni.

Teorema 4.4.8.

num_2 è un isomorfismo di semianelli tra $(\Omega, \oplus, \otimes)$ e $(num_2(\Omega), +, \cdot)$, cioè valgono

1. $num_2(\alpha \oplus \beta) = num_2(\alpha) + num_2(\beta)$;
2. $num_2(\alpha \otimes \beta) = num_2(\alpha) \cdot num_2(\beta)$.

Dim: Per il lemma 4.4.7, se $\alpha = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} n_i$, si ha $num_2(\alpha) = \sum_{i=0}^k n_i num_2(\omega^{\gamma_i})$. Infatti $\alpha = \omega^{\gamma_0} n_0 \cup [\omega^{\gamma_0} n_0, \omega^{\gamma_0} n_0 + \omega^{\gamma_1} n_1] \cup \dots \cup [\sum_{i=0}^{k-1} \omega^{\gamma_i} n_i, \alpha]$, da cui $num_2(\alpha) = num_2(\omega^{\gamma_0} n_0) + num_2([\omega^{\gamma_0} n_0, \omega^{\gamma_0} n_0 + \omega^{\gamma_1} n_1]) + \dots + num_2([\sum_{i=0}^{k-1} \omega^{\gamma_i} n_i, \alpha])$; ma l'invarianza per traslazioni assicura che $num_2([\sum_{i=0}^l \omega^{\gamma_i} n_i, \sum_{i=0}^{l+1} \omega^{\gamma_i} n_i]) = num_2(\omega^{\gamma_{l+1}} n_{l+1})$, per cui $num_2(\alpha) = \sum_{i=0}^k n_i num_2(\omega^{\gamma_i})$.

Siano ora α come sopra, $\beta = \sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} m_i$, dove $n_i, m_i \in \mathbb{N}^+$. Allora $num_2(\alpha \oplus \beta) = num_2(\sum_{i=0}^k \omega^{\gamma_i} (n_i + m_i)) = \sum_{i=0}^k (n_i + m_i) num_2(\omega^{\gamma_i}) = \sum_{i=0}^k n_i num_2(\omega^{\gamma_i}) + \sum_{i=0}^k m_i num_2(\omega^{\gamma_i}) = num_2(\alpha) + num_2(\beta)$. Per il prodotto ricordiamo prima che $\alpha \otimes \beta = \bigoplus_{i,j} \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j} n_i m_j$. Sicuramente $num(\alpha \otimes \beta) = \sum_{i,j} num_2(\omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j} n_i m_j) = \sum_{i,j} n_i m_j num_2(\omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j})$. Per concludere la dimostrazione dobbiamo mostrare che (3) $num_2(\omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j}) = num_2(\gamma_i) \cdot num_2(\gamma_j)$. Sia $x \in Ord$. Allora $\phi_{\omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j}}(x \vee \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j}) = |\{y \in x \mid \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j} \leq y\}| = |\{y \in x \mid \omega^{\gamma_i} \leq y\}| \cdot |\{y \in x \mid \omega^{\gamma_j} \leq y\}| = \phi_{\omega^{\gamma_i}}(x \vee \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j}) \cdot \phi_{\omega^{\gamma_j}}(x \vee \omega^{\gamma_i \oplus \gamma_j})$, da cui segue (3).

A priori, niente assicura che num_1 e num_2 abbiano qualche relazione oltre alle coerenze con le scritte in forma normale di Cantor. Vogliamo adesso

determinare quali proprietà della definizione 4.1.4 siano verificate da num_2 . Vediamo cosa accade per la numerosità del prodotto piatto di insiemi. La prima domanda da porsi è se $X \otimes_\tau Y$ ed $X \times Y$ siano equinumerosi rispetto a num_2 . Questo, in generale, non accade. Il motivo per cui non abbiamo più l'equinumerosità tra questi due insiemi è che non è più assicurato che le omotetie siano isometrie. Sia, ad esempio, $X = [0, \omega)$, $\tau = \omega^m$ e scriviamo $\alpha = \sum_{\gamma \in Ord} \omega^\gamma n_\gamma$, dove $n_\gamma \neq 0$ soltanto per un numero finito di indici. Allora $\phi_X(\alpha) = n_0 + 1$, mentre $\phi_{\tau X}(\alpha) = n_m + 1$, cioè, se volessimo ammettere che una omotetia per ω^m sia una isometria, dovremmo avere (1) $\{\alpha \in \Omega \mid n_m = n_0\} \in \mathcal{U}$. Facendo variare $m \in \mathbb{N}$ si vede che si dovrà assumere che nell'ultrafiltro vi sia l'insieme degli ordinali che, scritti in forma normale di Cantor, hanno tutti i coefficienti corrispondenti a monomi di grado minore di ω uguali tra loro. Se X è della forma $[0, \sum_i \omega^{h_i} k_i)$, con gli h_i, k_i naturali, non è difficile dimostrare che la condizione (1) continua ad essere sufficiente ad assicurare che le omotetie per ω^m , al variare di $m \in \mathbb{N}$, siano isometrie. X però può anche essere un insieme non limitato da ω^ω . Si dimostra, in maniera simile a quanto appena fatto, che in quella situazione, in cui anche τ sarà un ordinale $> \omega^\omega$, è sufficiente avere $\{\alpha \in \Omega \mid \text{tutti i coefficienti non nulli della scrittura in forma normale di Cantor di } \alpha \text{ sono uguali}\} \in \mathcal{U}$. Chiaramente, questa è anche una condizione necessaria per avere tutte le omotetie considerate nella seconda sezione di questo capitolo. Quindi per assumere che le omotetie siano isometrie è necessario imporre delle condizioni sull'ultrafiltro.

Se \mathcal{U} non soddisfa queste condizioni, e avendo in mente che le omotetie, in questo caso, non sono isometrie, dimostriamo che, in generale, $X \otimes_\tau Y$ e $X \times Y$ non sono equinumerosi. Denotiamo con $H_\tau[X]$ l'insieme ottenuto applicando l'omotetia per τ ad X .

Lemma 4.4.9.

Siano dati $X, Y \subseteq \tau$, con τ additivamente chiuso. Allora, in generale, $num_2(X \times Y) \neq num_2(X \otimes_\tau Y)$.

Dim: E' sufficiente dimostrare che, in generale, $num_2(X \otimes_\tau Y) \neq num_2(X) \cdot num_2(Y)$.

Sia $\alpha \in \Omega$. $\phi_{X \otimes_\tau Y}(\alpha) = |\{\tau y + x \mid x \in X, y \in Y, \tau y + x \leq \alpha\}| = |\{\tau y \mid y \in Y, \tau y \leq \alpha\}| \cdot |\{x \in X \mid x \leq \alpha\}| = \phi_{H_\tau[Y]}(\alpha) \cdot \phi_X(\alpha)$. Abbiamo però dimostrato che, in generale, $\phi_{H_\tau[Y]}(\alpha) \neq \phi_Y(\alpha)$, da cui si ha che, sempre in generale, $\{\alpha \mid \phi_{H_\tau[Y]}(\alpha) = \phi_Y(\alpha)\} \notin \mathcal{U}$, perciò $num_2(H_\tau[Y]) \neq num_2(Y)$, da cui la tesi.

Dalla dimostrazione si capisce che, sicuramente, nei casi in cui τ, Y siano

tali che Y sia equinumeroso a $H_\tau[Y]$, $num_2(X \otimes_\tau Y) = num_2(X \times Y)$. Richiedere che questo sia valido per ogni X, Y, τ significa richiedere che le omotetie siano isometrie, e necessita quindi delle condizioni di ultrafiltro precedentemente isolate.

Resta da verificare il comportamento di num_2 rispetto alle altre proprietà che definiscono num_1 . Quella più difficile da analizzare è O. In effetti, O è una congiunzione di due proprietà:

O1) $\forall X, Y$ vale una e una sola delle seguenti:

- $num(X) < num(Y)$;
- $num(X) > num(Y)$;
- $num(X) = num(Y)$.

O2) $\forall X, Y$ si ha $num(X) < num(Y) \Rightarrow \exists X' \subseteq Y$ con $num(X') = num(Y)$.

Abbiamo affrontato entrambe anche nei capitoli precedenti. La situazione, nel contesto presente, è analoga: abbiamo già visto anche nelle altre situazioni che per ottenere O1 basta appellarsi alle proprietà di ultrafiltro; invece, per ottenere O2, bisogna fare delle richieste più specifiche su \mathcal{U} , richieste che abbiano a che fare, in qualche misura, con la selettività.

Posponiamo quindi la discussione di O2.

L'altro principio complicato è EQO. Nel presente contesto si riesce ad assicurare la validità di un suo indebolimento:

EQO*) Se τ è un ordinale quadrabile, con $X \subseteq \tau^2, Y \subseteq \tau^2$, ed esistono Z, W con $num(Z) = num(W)$ tali che, detti $X_i = X \cap [\tau i, \tau(i+1))$, $Y_i = Y \cap [\tau i, \tau(i+1))$, si abbia $\forall i \in Ord X_i \neq \emptyset \Leftrightarrow X_i = T_{\tau i}(Z) \Leftrightarrow Y_i \neq \emptyset \Leftrightarrow Y_i = T_{\tau i}(W)$, allora $num(X) = num(Y)$.

La differenza rispetto a EQO sta nella richiesta di avere lo stesso ordinale quadrabile per entrambi gli insiemi. Questa richiesta è necessaria se si vuol procedere senza dover imporre ulteriori condizioni sull'ultrafiltro usato per costruire num_2 . In generale, invece, il principio EQO, per poter essere verificato, richiede delle proprietà specifiche per l'ultrafiltro.

Teorema 4.4.10.

num_2 soddisfa O1, T, EQO*, PP.

Dim: O1) Sicuramente, dati $X, Y \in W$, per proprietà di ultrafiltro vale una e una sola delle disuguaglianze $\phi_X =_u \phi_Y, \phi_X <_u \phi_Y, \phi_Y <_u \phi_X$, da cui

traiamo la corrispondente relazione tra le numerosità di X e di Y .

OP) Basta osservare che $num_2(X) = num_2(X \cap Y) + num_2(X \setminus Y)$ e analogo invertendo X, Y , da cui $num_2(X) = num_2(Y) \Leftrightarrow num_2(X \setminus Y) = num_2(Y \setminus X)$.

T) Già fatta nella proposizione 4.4.2.

EQO*) Siano $X_i = \{x \in X \mid x \in [\tau i, \tau(i+1))\}$, $Y_i = \{y \in Y \mid y \in [\tau i, \tau(i+1))\}$.

Siano poi Z, W come nelle ipotesi. Sia U_0 l'elemento dell'ultrafiltro su cui $\phi_Z = \phi_W$, e sia $\alpha \in U_0$.

$\phi_X(\alpha) = \sum_{i \in \tau} \phi_{X_i}(\alpha)$. Dico che esistono soltanto un numero finito di indici i per i quali $\phi_{X_i}(\alpha) \neq \emptyset$. Infatti gli elementi di X_i si scrivono in forma normale di Cantor come $\tau f + p$, con f scrittura in forma normale di Cantor di i e p di un elemento di Z . $\tau f + p \leq \alpha \Leftrightarrow p \leq \alpha$ e $\tau f \leq \alpha$, e ci sono soltanto un numero finito di $i < \tau$ tali che $\tau f \leq \alpha$. Sia $I_{\tau, \alpha}$ questo insieme. Osserviamo che $I_{\tau, \alpha}$ non dipende nè da X nè da Y .

Allora, per $\alpha \in U_0$, $\phi_X(\alpha) = \sum_{i \in I_{\tau, \alpha}} \phi_{X_i}(\alpha) = \sum_{i \in I_{\tau, \alpha}} \phi_Z(\alpha) = \sum_{i \in I_{\tau, \alpha}} \phi_W(\alpha) = \sum_{i \in I_{\tau, \alpha}} \phi_{Y_i}(\alpha) = \phi_Y(\alpha)$, da cui otteniamo $num_2(X) = num_2(Y)$.

PP) Siano $X, Y \subset \Omega$. Allora, $\forall \alpha \in \Omega$, $\phi_{X \times Y}(\alpha) = |\{(x, y) \in X \times Y \mid x \vee y \leq \alpha\}| = |\{(y, x) \in Y \times X \mid y \vee x \leq \alpha\}| = \phi_{Y \times X}(\alpha)$, pertanto $num_2(X \times Y) = num_2(Y \times X)$.

Dalla dimostrazione di EQO* si capisce perchè, in generale, EQO potrebbe richiedere delle condizioni di ultrafiltro specifiche. Il motivo risiede nella definizione degli insiemi $I_{\tau, \alpha}$: questi sono sensibili all'ordinale moltiplicativo scelto per costruirli, cioè, in generale, se $\tau \neq \sigma$ anche $I_{\tau, \alpha} \neq I_{\sigma, \alpha}$. Nella dimostrazione si è però usata la condizione che, dato α , ad X e ad Y corrispondessero gli stessi insiemi finiti di indici su cui andare a sommare le counting functions. Se tali insiemi di indici fossero diversi, niente più assicurarebbe che tale procedimento sia lecito. Andrebbe quindi imposto che l'ultrafiltro \mathcal{U} utilizzato per definire num_2 contenga, dati comunque τ, σ quadrabili, l'insieme degli elementi α per i quali $I_{\tau, \alpha} = I_{\sigma, \alpha}$. Questa appare però una richiesta molto forte, ed è dubbio se possa esistere un ultrafiltro che la soddisfi.

Pure il principio Cavalieri Ordinale è falso per num_2 . L'esempio è lo stesso fatto nel caso di num : siano $X = \{\omega n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{\omega n + (n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sia $\alpha \in Ord$, e siano m, k i coefficienti dei termini di grado rispettivamente 1 e 0 della scrittura in forma normale di Cantor di α (eventualmente, $m, k = 0$). Sia h il minimo tra m, k . Allora $\phi_X(\alpha) = |\{x \in X \mid x \leq \alpha\}| = |\{0, \omega, \dots, \omega h\}| = h + 1$. Invece $\phi_Y(\alpha) = |\{y \in Y \mid y \leq \alpha\}| = |\{1, \omega + 2, \dots, \omega(h-1) + h\}| = h$. Quindi $num(X) = num(Y) + 1$, e il principio di Cavalieri

risulta falsificato.

Resta da affrontare O2. Introduciamo la **stratificazione** di Ord rispetto alla relazione \triangleleft . Dato un ordinale $\alpha = \sum_{i=0}^n \omega^{\gamma_i} n_i$, diremo **altezza** di α il numero $\sum_{i=0}^n n_i$: l'altezza di un numero è la somma dei coefficienti della sua scrittura in forma normale di Cantor.

Osservazione: $\alpha \triangleleft \beta \Rightarrow H(\alpha) < H(\beta)$.

E' una conseguenza facile della definizione di \triangleleft . L' altezza permette di definire l'insieme dei successori immediati e dei predecessori immediati di un ordinale:

Definizione 4.4.11. *Sia dato α ordinale. Diremo **successori immediati** di α gli elementi dell'insieme $S(\alpha) = \{\beta \in Ord \mid \alpha \triangleleft \beta \text{ e } H(\beta) = H(\alpha) + 1\}$; diremo **predecessori immediati** di α gli elementi dell'insieme $P(\alpha) = \{\beta \in Ord \mid \beta \triangleleft \alpha \text{ e } H(\beta) + 1 = H(\alpha)\}$.*

Osservazioni:

- $\forall \beta \in S(\alpha), \forall \gamma \in Ord \alpha \trianglelefteq \gamma \trianglelefteq \beta \Rightarrow \gamma = \alpha \text{ o } \gamma = \beta$;
- $\forall \beta_1, \beta_2 \in S(\alpha) \beta_1 \neq \beta_2 \Rightarrow \beta_1 \wedge \beta_2 = \alpha$;
- Analoghe per $P(\alpha)$ cambiando \trianglelefteq in \trianglerighteq e \wedge con \vee .

Dim: Da $\alpha \trianglelefteq \gamma \trianglelefteq \beta$ seguono: 1) $H(\alpha) \leq H(\gamma) \leq H(\beta)$; 2) i coefficienti di γ sono tutti maggiori o uguali a quelli di α , quelli di β sono tutti maggiori o uguali di quelli di γ . Ma $H(\beta) = H(\alpha) + 1$: quindi se $H(\gamma) = H(\alpha)$ i coefficienti di γ devono essere tutti uguali a quelli di α e si ha $\alpha = \gamma$; con lo stesso ragionamento si dimostra che, se $H(\gamma) = H(\beta)$, $\beta = \gamma$.

Per la seconda affermazione basta osservare che, se $\beta \in S(\alpha)$, la scrittura in forma normale di Cantor di β può essere ottenuta soltanto in due modi: o aggiungendo nella giusta posizione un ω^γ , con γ che non compare tra gli esponenti della scrittura di α , oppure incrementando uno ed uno solo dei coefficienti di α di 1. Se β_1 è ottenuto in un modo e β_2 nell'altro, chiaramente $\beta_1 \wedge \beta_2 = \alpha$. Se sono ottenuti entrambi aggiungendo un monomio, essendo differenti anche gli esponenti dei monomi aggiunti devono essere differenti, e nuovamente $\beta_1 \wedge \beta_2 = \alpha$; analogamente, se entrambi sono ottenuti aggiungendo 1 ad un coefficiente, da $\beta_1 \neq \beta_2$ segue che non possono aver modificato lo stesso coefficiente, quindi $\beta_1 \wedge \beta_2 = \alpha$.

La terza affermazione si dimostra in maniera del tutto analoga alle prime 2.

La funzione altezza ci fornisce quindi un metodo per ‘stratificare’ Ω in \aleph_0 livelli, intendendo con livello n -simo l’insieme degli ordinali di altezza n . Nelle notazioni della definizione 4.4.2, dato un qualsiasi insieme $A \subset \Omega$ indicheremo con $A_\alpha = \{\beta \in X \mid \beta \trianglelefteq \alpha\}$. Siano ora X, Y con $\text{num}_2(X) < \text{num}_2(Y)$. Quali sono i problemi nel determinare un $X' \subseteq Y$ con $\text{num}(X') = \text{num}(X)$? L’aver definito la stratificazione di Ω permette di poter determinare X' per induzione: si può costruire X' definendo uno dopo l’altro tutti i suoi livelli. Supponiamo di voler costruire il livello n -simo di X' avendo già costruito tutti i precedenti. Sia quindi α con $H(\alpha) = n$, ed assumiamo per semplicità che $\phi_Y(\alpha) > \phi_X(\alpha)$. E’ sufficiente a garantire che si possa ritagliare X' in Y con $\phi_{X'}(\alpha) = \phi_X(\alpha)$? No. Infatti, sia $\beta \in P(\alpha)$. Se $\phi_Y(\alpha) - \phi_Y(\beta) < \phi_X(\alpha) - \phi_X(\beta)$, per costruire X' dovremmo selezionare $\phi_X(\alpha) - \phi_X(\beta)$ elementi in da un insieme avente $\phi_Y(\alpha) - \phi_Y(\beta)$ elementi, il che è impossibile: ad esempio, se $Y = \{1, \omega\}$, $X = \{1 + \omega\}$, si dovrebbero scegliere in Y 0 elementi di indice 1, 0 elementi di indice ω e 1 elemento di indice $1 + \omega$, il che è impossibile, nonostante si abbia $|Y_{\omega+1} \setminus Y_\omega| = |Y_{\omega+1} \setminus Y_1| = |X_{\omega+1} \setminus X_\omega| = |X_{\omega+1} \setminus X_1| = 1$. Per gli insiemi finiti di questo tipo però la soluzione è semplice, e segue dal lavorare modulo ultrafiltro: nell’esempio precedente, basta prendere $X' = \{1\}$ e $\forall \alpha \in \Omega^{\geq(\omega+1)} \phi_{X'} = \phi_X = 1$, da cui $\text{num}_2(X) = \text{num}_2(X')$ perchè $\Omega^{\geq(\omega+1)} \in \mathcal{U}$. Il vero problema è che una situazione come quella descritta nell’esempio può presentarsi in infiniti indici: ogni volta che si vuol far la costruzione di X' all’indice α , bisogna tener conto di tutte quelle fatte ai livelli precedenti su indici che siano $\trianglelefteq \alpha$. Infatti, sia α un elemento del livello n -simo della stratificazione di Ω . Quando si vuol ritagliare X'_α , avendo già fissata la costruzione di X' ai livelli precedenti, troviamo già dentro ad X' tutti gli elementi presenti negli insiemi del tipo X'_γ con $H(\gamma) < H(\alpha), \gamma \triangleleft \alpha$; più precisamente, ci troviamo quelli presenti negli insiemi di questo tipo di cui avevamo già realmente fatto la costruzione. Infatti, in generale, lavorando modulo ultrafiltro non si determina X'_γ per ogni γ , ma solo per i $\gamma \in U_0$, con U_0 un qualche elemento di \mathcal{U} . Quello che realmente serve ad un qualsiasi livello è di avere un numero sufficiente di elementi tra cui scegliere, e questi elementi si potranno prendere sia tra quelli che appaiono in Y_α e non appartengono a nessuno dei livelli precedenti di Y , sia tra quelli che appaiono in Y_α e, se stanno pure in un qualche Y_β con $\beta \in P(\alpha)$, possono essere scelti, nel senso che si può modificare X'_β , cioè β non sta in U_0 . Inoltre, si deve avere anche una condizione ulteriore: siano dati due elementi α_1, α_2 del livello n -simo, e supponiamo di voler fare la costruzione per entrambi. Senza condizioni aggiuntive, potrebbe accadere che la costruzione fatta su α_1 vada ad incidere pure sull’ordinale α_2 e questa è, chiaramente, una situazione da evitare.

Introduciamo la seguente notazione: dati α ordinale, $A, B \subset \Omega$, indichiamo

con $\mathbf{A}_{\triangleleft_B} \alpha = \{a \in A \mid \exists b \in B \mid b \triangleleft \alpha \text{ e } a \trianglelefteq b\}$.

Il ragionamento precedente conduce ad individuare la seguente condizione sufficiente di ultrafiltro:

Definizione 4.4.12. *Sia data num_2 su Ω . Sia \mathcal{U} l'ultrafiltro che la definisce. Si dirà che \mathcal{U} è **Conway selettivo** se, per ogni coppia X, Y di sottoinsiemi di Ω tali che $\text{num}_2(X) \leq \text{num}_2(Y)$, $\exists U_0 \in \mathcal{U}$ tale che 1) $\forall \alpha \in U_0$ si abbia $|Y_{\trianglelefteq \alpha} \setminus Y_{\triangleleft_{U_0} \alpha}| \geq |X_{\trianglelefteq \alpha} \setminus X_{\triangleleft_{U_0} \alpha}|$; 2) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U_0, \alpha_1 \wedge \alpha_2 \in U_0$.*

Teorema 4.4.13.

Se \mathcal{U} è Conway selettivo num_2 soddisfa O2.

Dim: Sia \mathcal{U} Conway selettivo. Dati X, Y sia U_0 come nella definizione di Conway selettività, e sia B l'elemento di \mathcal{U} tale che $\phi_X(\beta) < \phi_Y(\beta) \forall \beta \in B$. Sia $\alpha \in U_0 \cap B$. Sia $C = U_0 \cap B \cap \Omega^{\geq \alpha}$. Costruiamo $X' \subseteq Y$ con $\phi_{X'}(\beta) = \phi_X(\beta) \forall \beta \in C$ per induzione sui livelli di C .

Per costruzione, il livello minimo di C contiene esclusivamente l'ordinale α . Al passo α scelgo semplicemente $\phi_X(\alpha)$ elementi da $Y_{\trianglelefteq \alpha}$, e si può fare perchè $\phi_Y(\alpha) > \phi_X(\alpha)$.

Supponendo di aver fatto la costruzione per i primi n livelli, facciamo la costruzione al livello $n + 1$. Sia ora $\beta \triangleright \alpha, \beta \in C$. In X' si hanno quindi $X_{\triangleleft_C \beta}$ elementi che provengono dalle costruzioni dei passi precedenti. Per poter avere $\phi_{X'}(\beta) = \phi_X(\beta)$ si devono poter aggiungere ad X' esattamente $|X_{\trianglelefteq \beta} \setminus X_{\triangleleft_C \beta}|$ elementi di Y che stiano in $Y_{\trianglelefteq \beta} \setminus Y_{\triangleleft_C \beta}$. E questo si può fare perchè $C \subseteq U_0$.

Resta da verificare che, se β_1, β_2 appaiono entrambi al livello $n + 1$, si possono fare le costruzioni per β_1, β_2 indipendentemente l'una dall'altra. Questo segue dalla proprietà 2 di Conway selettività: infatti, gli elementi scelti in β_1 che potrebbero comparire automaticamente in β_2 sono gli x tali che $x \trianglelefteq \beta_1$ e $x \trianglelefteq \beta_2$, cioè $x \trianglelefteq \beta_1 \wedge \beta_2$. Ma $\beta_1 \wedge \beta_2$ sta in C al livello n , quindi x , se è stato scelto, è già stato scelto ad un livello precedente e non in quello attuale, cioè non appare nella costruzione fatta al passo $n + 1$ per β_1 . Quindi sullo stesso livello tutte le costruzioni possono essere fatte indipendentemente.

Si ottiene quindi $X' \subseteq Y \mid \phi_{X'}(\beta) = \phi_X(\beta) \forall \beta \in C$. Ma $C \in \mathcal{U}$, quindi $\text{num}_2(X) = \text{num}_2(X')$.

Determinare una condizione di ultrafiltro necessaria e sufficiente per garantire la proprietà O2 è complicato. Quello che si vede è che la condizione 1 della proprietà di Conway selettività è sicuramente necessaria, ma non sufficiente a garantire la proprietà della differenza, perchè si limita a regolamentare la costruzione di X' soltanto nel passo induttivo, senza dire niente su ciò che accade per ordinali diversi appartenenti allo stesso livello. La seconda condizione di Conway-selettività serve, infatti, a garantire esattamente la

possibilità tutte le costruzioni di ciascun livello in maniera indipendente l'una dall'altra, ma non è l'unica condizione possibile di questo tipo. Ad esempio, una condizione alternativa potrebbe essere la presenza in \mathcal{U} di un elemento U_0 tale che ogni livello di U_0 consista esattamente di un ordinale, con l'ulteriore condizione che l'ordinale del livello $n + 1$ sia sempre un successore di quello del livello n . Tutte queste condizioni hanno come carattere comune quello di essere realmente molto forti: appare dubbio che possano esistere ultrafiltri che le soddisfino. La questione rimane, al momento, aperta.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo breve capitolo vogliamo sia descrivere quali siano i problemi aperti all'interno della teoria sfiorati nel corso della tesi, sia provare ad immaginarne i possibili sviluppi futuri.

5.1 Problemi Aperti

I problemi lasciati aperti sono, essenzialmente, di due tipi: quelli aperti semplicemente perchè non discussi, probabilmente risolvibili con poca difficoltà utilizzando tecniche analoghe a quelle studiate, e quelli, ben più difficili, di esistenza di ultrafiltri specifici e di modelli alternativi delle numerosità. Nella prima categoria rientrano, ad esempio, le possibili costruzioni alternative di insiemi di isometrie nelle varie situazioni. In ciascun caso, si sono descritte solamente quelle che apparivano come le più naturali possibili, ma questo non esclude che se ne possano avere anche di ben più complicate. Pensiamo alla situazione esposta nel terzo capitolo: gli insiemi finito dimensionali di punti. Le isometrie isolate sono quelle, estremamente naturali, che si possono assumere qualsiasi sia la retta base, cioè le permutazioni delle componenti e le iniezioni in dimensioni maggiori. Si è però lasciata del tutto aperta la possibilità di definirne di ulteriori nei casi con rette base strutturate, ad esempio dei gruppi infiniti, per i quali potremmo volere che alcuni dei loro automorfismi interni, opportunamente estesi a tutto lo spazio, siano isometrie.

Un altro problema di cui si è tralasciata completamente la discussione è la possibilità di avere indicizzazioni coerenti nel caso degli insiemi numerabili. La difficoltà risiede nella assunzione, apparentemente innocente, che se $B \subseteq A$ allora $l_B = l_{A|_B}$. Questa problematica potrebbe essere evitata considerando soltanto una classe di insiemi numerabili chiusa per unioni, prodotti

cartesiani e sottoinsiemi, che è poi tutto quello che ci serve assumere per sviluppare la costruzione della funzione numerosità; potrebbe però così accadere che non si abbia più la surgettività di num su $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^{\mathbb{N}}$. Questa questione, magari non complicatissima, appare comunque molto delicata. In particolare, la richiesta della coerenza delle indicizzazioni su tutta la classe degli insiemi numerabili potrebbe portare a situazioni assurde come la presenza di insiemi costituiti esclusivamente da elementi aventi tutti la stessa etichetta, il che falsificherebbe la finitezza ad uno delle loro indicizzazioni.

Un altro problema non affrontato è la possibilità di determinare modelli alternativi rispetto a quelli proposti. Sfruttando l'idea delle approssimazioni finite, si sono sempre esibiti modelli delle numerosità del tipo $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}^I$ (o analoghi algebrici), senza mai porsi il problema se questi siano, modulo isomorfismo, gli unici possibili. Nel caso numerabile le indicizzazioni conducono in maniera estremamente naturale a modelli di questo tipo. Negli altri casi però non è chiaro se si presenti questa situazione.

Vi è poi tutta una tipologia di problemi che andrebbero affrontati: le esistenze dei vari tipi di ultrafiltro considerati. In effetti, quasi tutti quelli introdotti hanno in comune il dover soddisfare una qualche condizione analoga alla selettività. Già solo per dimostrare l'esistenza di ultrafiltri selettivi serve assumere l'ipotesi del continuo; non ci si è però quasi mai posti il problema per le altre proprietà (ad eccezione di una discussione sugli ultrafiltri monotoni ed euclidei su \mathbb{N}). Questo perché i problemi di questo tipo sono realmente molto difficili; inoltre, se per molti di questi la congettura è che, modulo alcune ipotesi come quella del continuo, sia possibile dimostrarne l'esistenza, condizioni come la Conway-selettività appaiono così restrittive da essere difficilmente verificabili.

5.2 Sviluppi futuri

Ovviamente, tra gli obiettivi futuri della teoria un posto di rilievo va dato alla soluzione dei problemi rimasti aperti. Questi però non ricoprono tutto lo spettro degli sviluppi possibili. Uno di questi potrebbe essere la ricerca di funzioni numerosità su altre importanti classi di insiemi: ad esempio, si potrebbe provare a definire una funzione numerosità sulla classe dei problemi computazionali in un opportuno linguaggio, oppure una funzione numerosità per le estensioni algebriche di un campo fissato. Questo è collegato al possibile secondo sviluppo futuro della teoria: la ricerca di connessioni con le altre aree della matematica.

In effetti, le 2 teorie classiche della grandezza, soprattutto la teoria della cardinalità, devono la loro importanza anche al frequentissimo uso che ne viene

fatto in quasi ogni altro ambito matematico. Quello che ci si può chiedere è se anche le numerosità possano essere utili come strumenti di indagine per altre aree matematiche. Ricollegandosi ai due esempi precedenti, potremmo chiederci se, avendo a disposizione una funzione numerosità ben formata sulla classe dei problemi su di un alfabeto Σ , sia possibile ritrovare delle correlazioni numeriche tra la classe dei problemi P e quella NP, oppure se, fissato un campo, sia possibile determinare un collegamento non banale tra numerosità ed altre proprietà (ad esempio, algebricità) delle sue estensioni. Questi sono solo due dei problemi possibili. Al momento entrambi non rappresentano altro che idee estremamente vaghe, e potrebbe benissimo essere che non esistano collegamenti del tipo ricercato. Questo però non preclude l'interesse per una eventuale ricerca volta in tale direzione.

Un esempio estremamente semplice di quanto appena detto è dato dal gruppo \mathbb{Z} . Come descritto nel secondo capitolo, diamo come indicizzazione a \mathbb{Z} la funzione valore assoluto, e prendiamo un ultrafiltro su \mathbb{N} che estenda la famiglia degli insiemi $n\mathbb{N} = \{n \cdot m \mid m \in \mathbb{N}\}$. La teoria dei gruppi finiti ci assicura che la cardinalità di ogni sottogruppo sia un divisore intero della cardinalità dell'intero gruppo, cosa che perde significato non appena si considerino le cardinalità infinite.

Cosa succede però sostituendo le numerosità alle cardinalità? Per i gruppi finiti non cambia niente, poichè le numerosità finite sono esattamente uguali alle cardinalità. Nel caso di \mathbb{Z} , sostituire le numerosità alle cardinalità ci permette di affermare che la numerosità di ogni sottogruppo è un divisore intero della numerosità dell'intero gruppo (escludendo sia dal gruppo che dal sottogruppo l'elemento neutro). Infatti, i sottogruppi di \mathbb{Z} , ad eccezione di quello banale, sono del tipo $n\mathbb{Z} = \{n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Sia dato $n\mathbb{Z}$. Quanto vale la sua sequenza approssimante sull'insieme $n\mathbb{N} \setminus \{0\}$? Per ogni $nm \in n\mathbb{N}$ si ha $f_{n\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(nm) = 2m$, mentre $f_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}(nm) = 2nm$, cioè $n \cdot \text{num}(n\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \text{num}(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$: la numerosità di $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ è n volte quella di $n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, cioè si ha una relazione di divisibilità tra le numerosità di \mathbb{Z} e dei suoi sottogruppi non banali. Inoltre, il quoziente di tale divisione è esattamente la numerosità del gruppo quoziente: $\frac{\text{num}(\mathbb{Z} \setminus \{0\})}{\text{num}(n\mathbb{Z} \setminus \{0\})} = n = \text{num}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Bibliografia

- [1] C.C. Chang, H.J. Keisler - *Model Theory*, (3rd edition), North-Holland, Amsterdam 1990.
- [2] T. Jech - *Set Theory*, (3rd edition), Springer, Berlin 2003.
- [3] V. Benci, M. Di Nasso - *Numerosities of labelled sets: a new way of counting*, Adv. Math. 173 (2003), 50-67.
- [4] V. Benci, M. Di Nasso, M. Forti - *The eightfold path to Nonstandard Analysis*, in Nonstandard Methods and Applications in Mathematics (N.J. Cutland, M. Di Nasso, D.A. Ross, eds.), L.N. in Logic, A.S.L. 2006, 3-44.
- [5] V. Benci, M. Di Nasso, M. Forti - *An Aristotelian Notion of size*, Ann. Pure Appl. Logic 143 (2006), 43-53.
- [6] V. Benci, M. Di Nasso, M. Forti - *An Euclidean Notion of Size for mathematical universes*, Logique et Analyse, Vol 50 n.197 (2007) .
- [7] M. Di Nasso, M. Forti - *Numerosities of Point Sets over the Real Line*, Transactions of the American Mathematical Society, in stampa.