

1

**Università di Pisa**  
**Facoltà di Scienza Matematiche Fisiche e Naturali**  
**Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche**  
**Anno Accademico 2007-2008**  
**Tesi di Laurea Specialistica**

**Teorema di Fluttuazione-Dissipazione**  
**per Processi non Poissoniani di Rinnovo**

*Candidato*  
Jacopo Bazzocchi

*Relatore*  
Prof. Paolo Grigolini

*Relatore interno:* Prof. Leone Fronzoni

Pisa, settembre 2008

# Indice

<b>1</b>	<b>Presupposti Teorici</b>	<b>7</b>
1.1	Equazione maestra generalizzata . . . . .	7
1.2	Lancio della moneta . . . . .	10
1.3	Il rinnovo . . . . .	12
1.4	Eventi di rinnovo . . . . .	14
1.5	Senza Simmetria . . . . .	16
1.6	Legge a potenza . . . . .	18
1.7	Funzione di correlazione . . . . .	21
	1.7.1 Caso Poissoniano . . . . .	24
	1.7.2 Legge a potenza . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Teorema di Fluttuazione-Dissipazione</b>	<b>26</b>
<b>3</b>	<b>Considerazioni sul rinnovo</b>	<b>29</b>
3.1	Lancio della moneta e funzione di subordinazione . . .	29
3.2	La proprietà di invecchiamento . . . . .	34
	3.2.1 Distribuzione Poissoniana . . . . .	36

<i>INDICE</i>	3
3.3 Densità di realizzazione di evento . . . . .	37
3.3.1 Caso esponenziale . . . . .	38
3.3.2 Legge a potenza . . . . .	39
3.3.2.1 Caso $1 < \mu < 2$ . . . . .	40
3.3.2.2 Caso $2 < \mu < 3$ . . . . .	41
3.3.2.3 In conclusione: . . . . .	42
3.4 Survival probability invecchiata . . . . .	43
<b>4 Fluttuazione-Dissipazione per processi di rinnovo non Poissoniani</b>	<b>45</b>
4.1 Caso Stazionario . . . . .	45
4.2 Traiettoria stocastica . . . . .	48
4.3 Perturbazione a scalino . . . . .	56
4.3.1 $1 < \mu < 2$ . . . . .	58
4.3.2 $2 < \mu < 3$ . . . . .	59
4.3.3 Tirando le somme . . . . .	60
<b>5 Applicazione del teorema ai blinking quantum dots</b>	<b>61</b>
<b>6 Appendice</b>	<b>64</b>
<b>7 Conclusioni</b>	<b>69</b>
Bibliografia	71

# Introduzione

Negli ultimi anni la comunità scientifica ha compiuto diversi studi sulla risposta dei sistemi dinamici a perturbazioni esterne, discostandosi in particolare dalle condizioni classiche della fisica statistica. Un caso tipico che dagli anni '90 ricorre nei lavori di fisica teorica è rappresentato dal problema dei cosiddetti “blinking quantum dots” [1]: nano cristalli che sottoposti a radiazione prolungata si rilassano in maniera lampeggiante. Una volta che sono state saturate dal campo esterno, particolari celle del reticolo cristallino cominciano ad lampeggiare alternando stati di luce a stati di buio. Ciò che maggiormente rende peculiari e interessanti questi cristalli è che i due stati seguono distribuzioni diverse e nessuna delle due distribuzioni è descritta dalle leggi esponenziali che ci si aspetterebbe seguendo una trattazione classica, mentre il *fit* dei dati sperimentali più promettente è quello di legge a potenza. Al contrario Verberk *et al.* in [2] con l'ipotesi di rinnovo avevano predetto un andamento come legge di potenza inversa che si trova in accordo con i dati sperimentali. L'utilizzo di leggi a potenza, però, implica necessariamente un

abbandono della stazionarietà. Oltre ai BQD, un altro sistema non poissoniano di notevole interesse si trova nella spettroscopia a singola molecola [3], dove la non linearità è data dalla cooperazione fra le molecole dell'ambiente circostante.

D'altro canto, la centralità del teorema di fluttuazione-dissipazione di primo tipo nella fisica statistica è nota [4, 5], ma, nella sua forma ordinaria, la limitatezza del teorema al caso stazionario ne comprometterebbe l'utilizzo per questi sistemi dinamici. Nel mio lavoro, perseguo l'obiettivo di generalizzare il teorema al caso non stazionario, abbandonando l'ipotesi ergodica e definendo una funzione di correlazione non stazionaria. E' necessario però un cambio di prospettiva e l'introduzione della teoria degli eventi di rinnovo [7, 8] per poter efficacemente risolvere il problema. Una volta introdotta l'ipotesi di rinnovo si possono superare gran parte dei problemi riscontrati in precedenti generalizzazioni [10] e, seguendo il lavoro di Allegrini *et al.* [12], ottenere una generalizzazione della teoria della risposta lineare in accordo con gli esperimenti.

Nei primi due capitoli, enuncio il teorema di fluttuazione-dissipazione nella sua forma tradizionale, utilizzando però il formalismo delle teorie del rinnovo: nel capitolo 1 introduco l'ipotesi di rinnovo, spiego cosa si intenda per "eventi" e ricavo la funzione di correlazione per diversi sistemi; utilizzando tale formalismo, nel secondo capitolo svolgo una semplice dimostrazione del teorema di fluttuazione-dissipazione. Nel terzo capitolo entro più in dettaglio nelle proprietà,

come l'invecchiamento, dei sistemi con rinnovo, per poter arrivare a definire la funzione di correlazione generalizzata. Nel capitolo quarto enuncio il teorema nelle sue due possibili generalizzazioni e mostro le proprietà e le differenze delle stesse, mentre nel capitolo finale mostro come la generalizzazione che chiamo "dinamica" fornisca previsioni in accordo con i dati sperimentali. L'Appendice sviluppa la dimostrazione dell'equazione (3.33) che non mi sembrava opportuno presentare nel testo.

Desidero qui esprimere la mia gratitudine a Paolo Grigolini, che mi ha messo a disposizione generosamente i suoi appunti didattici ed altri suoi scritti inediti, e senza i cui consigli e incoraggiamenti, anche d'oltre Atlantico, il mio tentativo non sarebbe giunto in porto. Ringrazio inoltre tutti gli amici del gruppo di lavoro, che mi hanno accolto simpaticamente negli incontri periodici e hanno ascoltato con pazienza i miei interventi e tollerato le mie domande più elementari. Pur essendo unico responsabile delle ingenuità e delle imprecisioni che saranno rimaste nella mia esposizione, resto debitore a molti, ma a Leone Fronzoni e a Paolo sopra tutti (in ultimo, per gli indimenticabili "aperitivi del venerdì").

# Capitolo 1

## Presupposti Teorici

### 1.1 Equazione maestra generalizzata

Si consideri un problema classico, illustrato alla figura 1.1. Viene rappresentata una doppia buca di potenziale che descrive il movimento di una particella lungo l'asse  $x$ . Se  $p_1$  e  $p_2$  sono le probabilità di trovarsi rispettivamente nella buca di destra e in quella di sinistra, si può approssimare

$$\begin{aligned} p_1^{eq} &\propto \int_0^{\infty} e^{-\frac{V(x)}{k_B T}} dx \\ p_2^{eq} &\propto \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{V(x)}{k_B T}} dx \end{aligned} \quad (1.1)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann e  $T$  è la temperatura del sistema. Nel caso stazionario ed assumendo la temperatura  $T$  non troppo

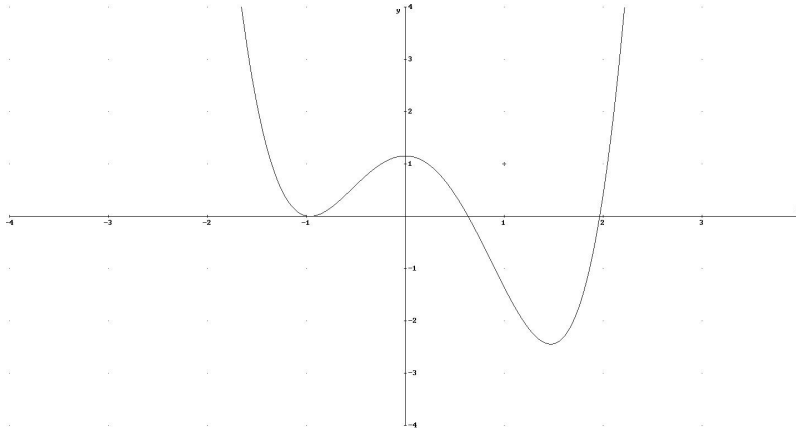


Figura 1.1: Una buca asimmetrica

grande, la doppia buca si trasforma in due oscillatori armonici con

$$V_1(x) \sim k_1(x - a)^2 - \Delta \quad (1.2)$$

$$V_2(x) \sim k_2(x + a)^2 \quad (1.3)$$

dove  $\Delta$  è la differenza di potenziale fra le due buche, mentre  $k_1$  e  $k_2$  sono le concavità delle stesse. Il rapporto fra  $p_1$  e  $p_2$  è quindi

$$\frac{p_1^{eq}}{p_2^{eq}} = \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\Delta}{k_B T}}. \quad (1.4)$$

Se la buca fosse simmetrica, avremmo ovviamente

$$\frac{p_1^{eq}}{p_2^{eq}} = 1 \quad (1.5)$$

Si vuole descrivere ciò che accade fuori dall'equilibrio, ovvero come  $p_1$  e  $p_2$ , inizialmente fuori dall'equilibrio, rilassino alla (1.5).



Per far ciò considero il tempo come successione di step temporali discreti e prendo un gran numero di insiemi tutti preparati allo stesso modo. Un tale insieme di Gibbs mi consente di “contare” il numero di sistemi in cui la particella esegue un salto (detto anche *evento*) tra una buca e l'altra, ed ottenere empiricamente la probabilità di salto per un singolo sistema. Ottengo quindi che la coppia di equazioni

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_1 &= -\frac{g}{2}p_1 + \frac{g}{2}p_2 \\ \frac{d}{dt}p_2 &= -\frac{g}{2}p_2 + \frac{g}{2}p_1\end{aligned}\quad (1.6)$$

descrive l'evoluzione di un sistema dicotomico dove ad ogni step temporale ho probabilità  $g$  che si verifichi un evento. Ovvero, prendendo un insieme di Gibbs di camminatori ad ogni istante rileviamo che una quantità  $n/2N$  di essi ha avuto un evento che li ha portati dallo stato “sinistro” a quello “destro” e una stessa quantità  $n/2N$  che ha operato il salto inverso ( $n/N = g$ ).  $g$  è detto il “rate di evento” del sistema di interesse e verrà considerato sempre un numero molto piccolo rispetto all'unità. L'evoluzione del sistema è quindi affidata alla Master Equation:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -\frac{g}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{p}, \quad (1.7)$$

dove posso riscrivere

$$M = -\frac{g}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

per compattare la (1.7) in

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = M \vec{p}. \quad (1.9)$$

La quantità che esprime il “grado di ordine”, ovvero quanto siamo distanti dalla situazione di equilibrio, è

$$\Pi(t) \equiv p_1(t) - p_2(t), \quad (1.10)$$

e  $\Pi(t)$ , come ci dice la (1.7), tende gradualmente ad azzerarsi. Infatti

$$\frac{d}{dt} \Pi(t) = -g(p_1 - p_2) = -g\Pi(t), \quad (1.11)$$

ovvero

$$\Pi(t) = e^{-g(t-t_0)} \quad (1.12)$$

## 1.2 Lancio della moneta

La master equation (1.7) può descrivere anche un altro sistema. Si prenda infatti il sistema descritto dalla master equation rappresen-

tata dalla matrice

$$M_0 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Ad ogni step temporale il sistema raggiunge l'equilibrio. Infatti in questo caso, anche se  $\Pi(0) \neq 0$ ,

$$\Pi(1) = \frac{-p_1(0) + p_2(0)}{2} + \frac{p_1(0) - p_2(0)}{2} = 0 \quad (1.14)$$

$\Pi(1) = 0$ . Un esempio intuitivo è dato da una distribuzione dove la permanenza nello stato sinistro o destro è dettata dal semplice lancio di una moneta. Ad ogni step temporale eseguo un lancio e pongo il sistema nello stato positivo o negativo a seconda che la moneta abbia dato testa o croce.

Nella sezione precedente ho definito *evento* il salto del sistema dallo stato sinistro a quello destro. Una definizione più corretta è che abbiamo un evento ogni qualvolta il camminatore si trova al bordo fra le due buche, ovvero quando si tratta di compiere una scelta tra lo stato destro e quello sinistro. La master equation  $M_0$  descritta dall'equazione (1.13) descrive un sistema dove ad ogni step temporale avviene un evento. In corrispondenza dell'evento avviene il lancio della moneta che decide in quale delle due buche cadrà la particella.

Introduciamo ora la condizione che l'evento non avvenga ad ogni

step temporale, che non sia quindi “ordinario”, ma sia un accadimento raro. Ad esempio l’evento potrebbe avvenire soltanto con probabilità  $g$ : ovvero, mediamente si registra un evento ogni  $1/g$  step temporali. In questo caso la master equation sarebbe:

$$M = -\frac{g}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

che è appunto l’eq. (1.7).

### 1.3 Il rinnovo

Vi sono sistemi la cui evoluzione non è poissoniana ma segue, poniamo, una legge a potenza. Per dare una spiegazione a questi fenomeni è stata introdotta la teoria del rinnovo. Nel presente capitolo non intendo dimostrare la validità della teoria, ma principalmente esporne le caratteristiche.

La teoria del rinnovo nasce e si sviluppa principalmente per lo studio di sistemi dicotomici dove il passaggio da uno stato all’altro è facilmente identificabile come importante cambiamento nel sistema. In realtà il salto fra i due stati non è il vero accadimento di interesse. Nel caso dell’equazione di Langevin, ad esempio, diciamo che c’è *evento* (o *action*, *azione*) quando il camminatore si trova all’apice della barriera tra le due buche. In quel punto il potenziale è piatto

(siamo sulla cima) e conta solo la forza stocastica  $f(t)$ ; dipende unicamente dalla forza stocastica che la pallina cada in una buca o nell'altra: per la natura totalmente casuale di  $f$  abbiamo il 50% di probabilità di trovare il camminatore in una buca o nell'altra. La nostra variabile potrebbe anche tornare dalla stessa parte da cui era arrivato. L'evento non è quindi identificabile con il passaggio da una buca all'altra, ma bensì con il verificarsi delle condizioni necessarie al salto. Ogni volta che registriamo un salto sappiamo con certezza che deve esserci stato un evento, ma non è vero il contrario: dopo un evento potrebbe anche non verificarsi un salto.

Secondo la teoria del rinnovo, ad un evento segue un azzeramento del sistema: dopo ogni azione il sistema perde memoria della sua storia precedente e comincia un nuovo percorso partendo ogni volta dalle stesse condizioni. Nel caso del sistema di Langevin è come se dopo un evento il camminatore si ritrovasse sempre fermo sul fondo di una delle due buche (col 50% di probabilità di trovarsi nell'una o nell'altra buca).

Il sistema dicotomico di interesse potrebbe anche essere descritto da una fisica diversa da quella implicita nell'equazione di Langevin. Per studiarne l'andamento è sufficiente avere la distribuzione di eventi o meglio la *distribuzione dei tempi di attesa* fra due eventi, che indico con  $\psi(\tau)$ . Poiché il sistema si azzerava dopo ogni azione, la probabilità che un evento avvenga è legata solo al tempo trascorso dall'evento precedente: i tempi di attesa  $\tau$  sono estratti tutti

dalla stessa distribuzione. La distribuzione  $\psi(\tau)$  è parente stretta della *probabilità di sopravvivenza* (*Survival probability*)  $\Psi(t)$ , ovvero la probabilità che fino al tempo  $t$  NON sia avvenuto un evento. La relazione fra le due è data da

$$\psi(t) = -\frac{d}{dt}\Psi(t). \quad (1.16)$$

## 1.4 Eventi di rinnovo

Un apparato elettrico munito di un componente destinato a cessare di funzionare, rappresenta un buon esempio di sistema di rinnovo. Anche l'illuminazione di una stanza per mezzo di una lampadina può andare bene. Sappiamo che la lampadina prima o poi si fulminerà e andrà sostituita. La fulminazione e l'immediata sostituzione della lampadina (supposte istantanee) rappresentano l'evento in oggetto. La lampadina funzionerà quindi per un tempo  $\tau$ , detto tempo di attesa, dopodiché cesserà di funzionare e sarà sostituita da un'altra. Questa nuova lampadina durerà un tempo  $\tau'$ , generalmente diverso da  $\tau$ , per poi essere sostituita a sua volta. Così se la prima sostituzione fosse stata effettuata al tempo  $\tau$ , la seconda avverrà al tempo  $\tau + \tau'$  e così via. Poiché prendiamo le lampadine dalla stessa fabbrica, i tempi di attesa  $\{\tau, \tau', \dots\}$  saranno estratti da  $\psi(\tau)$ , detta distribuzione dei tempi di attesa. Quindi, anche se la memoria del

sistema viene resettata ad ogni evento, la fisica del sistema non cambia, in quanto i tempi di attesa sono accomunati dalla stessa distribuzione.

Chiamerò  $t_i$  il tempo generico a cui avviene l'evento  $i$ -esimo, mentre  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$  è il tempo di attesa fra due eventi, ovvero la durata della lampadina  $i$ -esima. Per definizione, poiché i tempi di attesa sono estratti dalla distribuzione  $\psi(\tau)$ , la probabilità che fra due eventi passi un tempo  $\tau$  è data da  $\psi(\tau)d\tau$ , ma visto che qui considero sempre il tempo discreto e con passo 1, questa diviene semplicemente  $\psi(\tau)$ .

La survival probability o probabilità di sopravvivenza fino al tempo  $t$  della lampadina è definita come la probabilità che al tempo  $t$  non sia avvenuto alcun evento

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t \psi(t')dt' = \int_t^\infty \psi(t')dt' \quad (1.17)$$

in quanto la  $\psi(t)$  è normalizzata. Definisco quindi il tasso a cui avvengono gli eventi come

$$g(t) = \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} \quad (1.18)$$

Come esempio esplicativo, si prenda una distribuzione dei tempi di attesa poissoniana, cioè

$$\psi(t) = re^{-rt}. \quad (1.19)$$

Data una distribuzione poissoniana come la (1.19), ci attendiamo che il *rate* di eventi sia  $r$ . Infatti calcolando la survival probability utilizzando l'Eq. (1.17) è

$$\Psi(t) = e^{-rt}, \quad (1.20)$$

e quindi, utilizzando la (1.18) otteniamo, come ci si aspettava, un tasso a cui avvengono gli eventi pari a

$$g(t) = \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} = r \quad (1.21)$$

## 1.5 Senza Simmetria

Occupiamoci ancora del caso della buca asimmetrica descritta dal sistema di equazioni (1.1). In questo caso diciamo che l'equazione maestra è *perturbata*, ovvero il sistema è complicato dall'introduzione di due distinti parametri  $g$ : uno per il lato destro ( $g_+$ ), e l'altro per il sinistro ( $g_-$ ). Si ottiene perciò

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_1 &= -\frac{g_+}{2}p_1 + \frac{g_-}{2}p_2 \\ \frac{d}{dt}p_2 &= -\frac{g_-}{2}p_2 + \frac{g_+}{2}p_1, \end{aligned} \quad (1.22)$$

dove, per utilizzare le costanti introdotte nella (1.1), si ha

$$\frac{g_+}{g_-} = \frac{p_2^{eq}}{p_1^{eq}} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Delta}{k_B T}}. \quad (1.23)$$



L'Eq.(1.23) mi assicura che l'Eq.(1.22) descriva correttamente la transizione da una condizione generica all'equilibrio. Infatti, utilizzando

$$\Pi(t) \equiv p_1(t) - p_2(t) \quad (1.24)$$

e aggiungendovi la proprietà di probabilità mutuamente escludenti ( $p_1 + p_2 = 1$ ), ottengo

$$p_1(t) = \frac{1 + \Pi(t)}{2} \quad (1.25)$$

$$p_2(t) = \frac{1 - \Pi(t)}{2}. \quad (1.26)$$

Se ora inserisco i risultati delle ultime due equazioni nella (1.22), ottengo facilmente

$$\frac{d\Pi}{dt} = -g_+p_1 + g_-p_2 = -\frac{g_+ + g_-}{2}\Pi(t) + \frac{g_- - g_+}{2}. \quad (1.27)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (1.27) è data da

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \int_0^t e^{-\frac{g_+ + g_-}{2}(t-t')} \frac{g_- - g_+}{2} dt' + e^{-\frac{g_+ + g_-}{2}t} \Pi(0) \\ &= (1 - e^{-\frac{g_+ + g_-}{2}t}) \frac{g_- - g_+}{g_+ + g_-} + e^{-\frac{g_+ + g_-}{2}t} \Pi(0). \end{aligned} \quad (1.28)$$

La  $\Pi(t)$  rilassa esponenzialmente alla condizione di equilibrio

$$\Pi^{eq} = \frac{g_- - g_+}{g_+ + g_-}, \quad (1.29)$$

che implica

$$p_1^{eq} = \frac{g_-}{g_+ + g_-} \quad (1.30)$$

$$p_2^{eq} = \frac{g_+}{g_+ + g_-} \quad (1.31)$$

da cui si ottiene di nuovo l'Eq. (1.23)

$$\frac{p_1^{eq}}{p_2^{eq}} = \frac{g_-}{g_+} \quad (1.32)$$

L'equazione (1.22) è la nostra Master Equation e può essere riscritta nella forma vettoriale

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = -\frac{1}{2} \mathbf{K} \bullet \mathbf{p}(t) \quad (1.33)$$

con

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} g_+ & -g_- \\ -g_+ & g_- \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

## 1.6 Legge a potenza

In un sistema “ad eventi”, si definisce Survival Probability (probabilità di sopravvivenza) la probabilità che non avvenga un evento per un tempo  $t$ . Se  $\psi(t)$  è la distribuzione di evento correttamente

normalizzata, ciò si scrive

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t \psi(t') dt' = \int_t^\infty \psi(t') dt'. \quad (1.35)$$

In approssimazione di tempo discreto, la “generazione di evento” può essere ottenuta definendo  $g(t)$  la probabilità (molto piccola) che allo step  $t$  accada un evento. Come si è visto nella sezione precedente, se  $g(t) = g$  è costante otteniamo una survival probability e distribuzione Poissoniane

$$\Psi(t) = e^{-gt} \quad (1.36)$$

$$\psi(t) = ge^{-gt} \quad (1.37)$$

Se invece  $g(t)$  dipende dal tempo, otteniamo

$$\Psi(t) = \exp\left(-\int_0^t g(t') dt'\right) \quad (1.38)$$

e, poiché consideriamo  $g(t)$  piccolo, possiamo approssimare

$$\Psi(t) \simeq 1 - \int_0^t g(t') dt'. \quad (1.39)$$

Poiché in un processo di rinnovo il camminatore torna allo stato iniziale dopo ogni evento,  $g$  in realtà dipende unicamente dal tempo trascorso dall'ultimo evento, per il quale uso il simbolo  $\tau$ . Per poter ottenere una survival probability che decada come una legge

a potenza,  $g(\tau)$  deve essere della forma

$$g(\tau) = \frac{g_0}{1 + g_1\tau}. \quad (1.40)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \exp\left(-\int_0^\tau g(\tau')d\tau'\right) = \exp\left(-\frac{g_0}{g_1}\ln(1 + g_1\tau)\right) \\ &= \left(\frac{1}{1 + g_1\tau}\right)^{\frac{g_0}{g_1}} = \left(\frac{T}{T + \tau}\right)^{\mu-1} \end{aligned} \quad (1.41)$$

dove ho posto

$$\begin{aligned} \frac{g_0}{g_1} &= \mu - 1 \\ \frac{1}{g_1} &= T. \end{aligned} \quad (1.42)$$

con  $\mu > 1$  e  $T$  abbastanza grande. L'Eq. (1.41) esprime una survival probability che decade come una legge a potenza nella sua forma più generale. Si noti che in termini di  $\mu$  e  $T$ , la  $\psi(\tau)$  è della forma

$$\psi(\tau) = -\frac{d}{d\tau}\Psi(\tau) = (\mu - 1)\frac{T^{\mu-1}}{(T + \tau)^\mu} \quad (1.43)$$

Una perturbazione esterna atta a modificare gli eventi del sistema perturba  $g_0$  e  $g_1$  così che

$$g(\tau, t) = \frac{g_0(1 + \varepsilon\xi_p(t))}{1 + g_1(1 + \varepsilon\xi_p(t))\tau}. \quad (1.44)$$

La perturbazione è però abbastanza piccola da permetterci di con-

siderarla come se agisse direttamente sui parametri  $\mu$  e  $T$  con

$$\mu = \frac{g_0}{g_1} + 1 \rightarrow \frac{g_0(1 + \varepsilon\xi_p(t))}{g_1(1 + \varepsilon\xi_p(t))} + 1 = \mu \quad (1.45)$$

$$T = \frac{1}{g_1} \rightarrow \frac{1}{g_1(1 + \varepsilon\xi_p(t))} \approx T(1 - \varepsilon\xi_p(t)) \quad (1.46)$$

La presenza di una perturbazione  $\varepsilon\xi_p(t)$  modifica quindi solo il tempo di riferimento  $T$ , lasciando invariato l'esponente della survival probability.

## 1.7 Funzione di correlazione

La funzione di correlazione entra in gioco ogni volta che voglio trovare, ad esempio, il valore quadratico medio di un variabile definita come

$$x(t) = \int_0^t \xi(t') dt'. \quad (1.47)$$

La varianza della variabile  $x$  infatti vale

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle \xi(t')\xi(t'') \rangle_s \quad (1.48)$$

dove  $\langle \xi(t')\xi(t'') \rangle_s$  indica il prodotto dei valori della funzione  $\xi$  ai due differenti tempi  $t'$  e  $t''$  mediato su un insieme di Gibbs di sistemi. Quando i valori della  $\xi(t)$  sono costruiti mediante una distribuzione

$\psi(\tau)$  ergodica, posso scrivere

$$\langle \xi(t')\xi(t'') \rangle = \langle \xi^2 \rangle \Phi_\xi(t' - t'') \quad (1.49)$$

dove  $\Phi_\xi(\tau) \equiv \langle \xi(0)\xi(\tau) \rangle_t$  è la funzione di correlazione nel tempo, che prende il valore

$$\Phi_\xi(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty \xi(t)\xi(t + \tau) dt \quad (1.50)$$

Considero ora il caso in cui la fluttuazione dicotomica  $\xi_s$  è generata da un sistema ad eventi di lancio della moneta: conosco la distribuzione degli eventi e voglio trovare la funzione di correlazione. La funzione di correlazione è ottenuta con il metodo delle finestre mobili come illustrato in Fig. 1.2. Chiamo “finestra” la distanza (fissa) fra i due punti di cui voglio misurare la correlazione. Posto:

$$\Phi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = \langle \xi(0)\xi(\tau) \rangle, \quad (1.51)$$

la larghezza della finestra è  $\tau$ . Ora si integra su tutte le possibili posizioni dove si può mettere la finestra di lunghezza  $\tau$ . I contributi delle finestre al cui interno si trova un evento si annulleranno con i contributi di segno opposto che prima o poi si incontrano in una serie infinita. L'integrale si svolge solo nei tratti dove la finestra non abbraccia alcun evento e in questo tratto prende ovviamente un valore positivo pari all'unità. Le condizioni appena esposte e

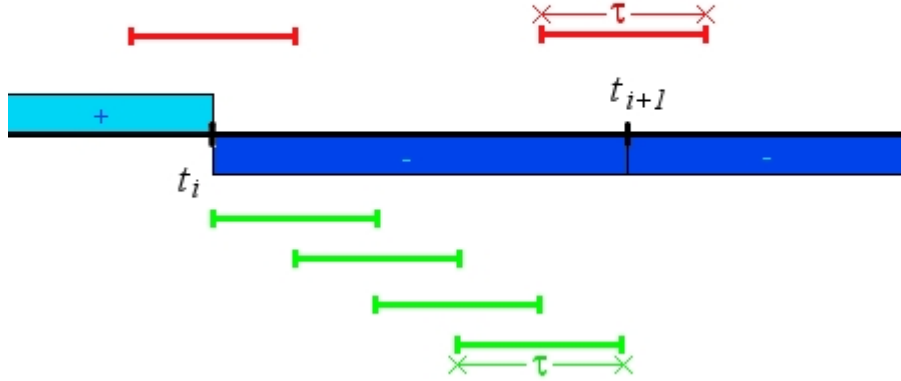


Figura 1.2: Calcolo della funzione di autocorrelazione con il metodo delle finestre mobili. Le finestre in verde non abbracciano alcun evento e i rispettivi contributi non si cancellano. Le due finestre in rosso sono un esempio di finestre con evento interno: danno contributi equivalenti ma opposti in segno e si elidono vicendevolmente.

rappresentate in figura, si riassumono nella formula:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{\langle t \rangle} \int_t^\infty \frac{\tau' - \tau}{\tau'} \tau' \psi(\tau') d\tau' \quad (1.52)$$

dove  $\tau' \psi(\tau')$  è la probabilità di avere una distanza fra due eventi consecutivi pari a  $\tau'$  (su cui poi integro), mentre  $(\tau' - \tau)/\tau'$  rappresenta la libertà che ho di posizionare la finestra fra due eventi distanziati di  $\tau'$ .

### 1.7.1 Caso Poissoniano

Calcoliamo la funzione di correlazione nel caso esponenziale sostituendo nell'eq. (1.52),

$$\psi(t') = ge^{-gt'} \quad (1.53)$$

ovvero, l'eq. 1.19 che è la funzione di distribuzione nel caso Poissoniano. Otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= g \int_t^\infty (t-t')ge^{-gt'} dt' \\ &= g^2 \left[ \frac{(t-t')ge}{-g} \right]_t^\infty + g^2 \int_t^\infty \frac{e^{-gt'}}{g} dt' = e^{-gt} \end{aligned} \quad (1.54)$$

La funzione di correlazione di una distribuzione esponenziale è ancora un esponenziale.

### 1.7.2 Legge a potenza

Se ora nell'equazione (1.52) mettiamo una distribuzione con legge a potenza  $\psi(\tau) = (\mu - 1) \frac{T^{\mu-1}}{(\tau+T)^\mu}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(t)}{\mu-2} &= (\mu-1)T^{\mu-2} \int_t^\infty \frac{(t'+T) - (T+t)}{(t'+T)^\mu} = \\ &= (\mu-1)T^{\mu-2} \left\{ \int_t^\infty \frac{dt'}{(t'+T)^{\mu-1}} - \int_t^\infty \frac{(T+t)dt'}{(t'+T)^\mu} \right\} = \\ &= (\mu-1) \left\{ \frac{T^{\mu-2}}{2-\mu} \left[ \frac{1}{(t'+T)^{\mu-2}} \right]_t^\infty - \frac{T^{\mu-2}}{1-\mu} \left[ \frac{1}{(t'+T)^{\mu-2}} \right]_t^\infty \right\} = \\ &= \frac{(\mu-1)}{(1-\mu)(2-\mu)} \frac{T^{\mu-2}}{(t+T)^{\mu-2}} = \frac{1}{\mu-2} \left( \frac{T}{t+T} \right)^{\mu-2} \end{aligned} \quad (1.55)$$



dove  $\langle \tau \rangle = T/(\mu - 2)$ . L'equazione (1.55) può essere valida solo per  $\mu > 2$ , in quanto per  $\mu < 2$  otterremmo una correlazione che aumenta con l'aumentare della distanza fra due punti. Ciò ci fa concludere necessariamente che per  $\mu < 2$  il sistema è non-stazionario, ovvero cade l'ipotesi ergodica. Trovare la funzione di correlazione per leggi a potenza con  $\mu < 2$  è lo scopo del 3 capitolo.

## Capitolo 2

### Teorema di

# Fluttuazione-Dissipazione

Il teorema di fluttuazione-dissipazione di primo tipo, conosciuto anche come teoria della risposta lineare, è un risultato della termodinamica statistica che permette di quantificare la relazione fra le fluttuazioni del sistema di interesse prima e dopo che sia applicata una perturbazione. In questo capitolo eseguo una dimostrazione del teorema nel semplice caso dicotomico governato dalla master equation (1.22) della sezione 1.5.

Chiamo  $S$  il sistema di interesse che genera la fluttuazione  $\xi_s$ . Il sistema  $S$  è perturbato dalla fluttuazione  $\xi_p$  del sistema perturbante  $P$ . Il teorema di fluttuazione-dissipazione ci dice che

$$\langle \xi_s(t) \rangle = \langle \xi_s(0) \rangle + \varepsilon \int_0^t \chi(t, t') \xi_p(t') dt' \quad (2.1)$$

dove  $\varepsilon$  è un parametro che indica l'intensità dell'accoppiamento, mentre  $\chi(t, t')$  si dimostra essere la derivata della funzione di correlazione del sistema  $S$  imperturbato.

Infatti, consideriamo il sistema dicotomico descritto dalla (1.22). La quantità  $\Pi(t) = p_1 - p_2$  è proprio la media della  $\xi_s$ , mentre si pone che i coefficienti  $g_{\pm}$  siano legati alla perturbazione  $\xi_p$  tramite

$$g_{\pm} = g(1 \mp \varepsilon \xi_p). \quad (2.2)$$

L'evoluzione di  $\Pi(t)$  è dettata dalla (1.27) che qui riscrivo per chiarezza:

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = -\frac{g_+ + g_-}{2}\Pi(t) + \frac{g_- - g_+}{2}; \quad (2.3)$$

in questa inserisco la (2.2) per ottenere

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = -g\Pi(t) + g\varepsilon\xi_p(t). \quad (2.4)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (2.4) è data da

$$\Pi(t) = \varepsilon \int_0^t g e^{-g(t-t')} \xi_p(t') dt'. \quad (2.5)$$

Confrontando l'eq. (2.5) con la (2.1) scritta sopra vediamo che nel caso esponenziale

$$\chi(t, t') = g e^{-g(t-t')} \quad (2.6)$$

la quale, come visto nella sezione 1.7.1, risulta essere la derivata

della funzione di correlazione

$$\chi(t, t') = \frac{d}{dt'} \Phi(t - t') = -\frac{d}{dt} \Phi(t - t'). \quad (2.7)$$

Come è facile vedere nel caso in cui la funzione di correlazione è stazionaria, non c'è differenza fra derivare in  $t$  (con un segno meno) o derivare in  $t'$ . Nei prossimi capitoli generalizzerò il teorema di fluttuazione-dissipazione al caso non stazionario; questo porterà a due diversi teoremi a seconda che si decida di derivare in una variabile o nell'altra.

## Capitolo 3

# Considerazioni sul rinnovo

### 3.1 Lancio della moneta e funzione di subordinazione

Si consideri nuovamente il sistema semplificato dove la variabile dicotomica ad ogni step temporale ha la possibilità di saltare da un livello all'altro, ovvero un sistema in cui ad ogni step temporale si realizza per certo un evento. La generazione della fluttuazione di questo sistema, che chiamiamo  $\xi_S$ , è, come visto nel capitolo 1, affidata al lancio di una moneta: otteniamo i valori  $\xi_S = 1$  o  $\xi_S = -1$  a seconda che il risultato sia testa o croce.

Prendiamo un insieme di Gibbs di questi camminatori in cui  $N_1$  sistemi si trovano nello stato  $|1\rangle$  e  $N_2$  nello stato  $|2\rangle$ . Consideriamo  $N = N_1 + N_2$  abbastanza grande da poter identificare  $p_1 = N_1/N$  con la probabilità che, preso un sistema a caso, questo

si trovi nello stato  $|1\rangle$ , e analogamente  $p_2 = N_2/N$  con quella di pescare un sistema nello stato  $|2\rangle$ . Definito il vettore  $\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2)$ , l'evoluzione del sistema è descritta da

$$\mathbf{p}(n+1) - \mathbf{p}(n) = \mathbf{M}\mathbf{p}(n) \quad (3.1)$$

dove

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

è l'operatore che tiene conto della probabilità  $1/2$  che il camminatore si trovi a destra o a sinistra all'inizio dell'osservazione. Se ora guardiamo l'insieme di Gibbs nel suo complesso e consideriamo la variabile

$$\Pi(n) \equiv p_1(n) - p_2(n), \quad (3.3)$$

notiamo che  $\Pi(n)$  da un valore fuori dell'equilibrio  $\Pi \neq 0$  passa subito alla condizione di equilibrio  $\Pi = 0$  in un unico passo temporale. Supponiamo che il sistema al tempo 0 sia fuori dall'equilibrio:

$$N\Pi(0) = Np_1(0) - Np_2(0) = N_1(0) - N_2(0) \neq 0. \quad (3.4)$$

Dopo uno step temporale avrò

$$\begin{aligned}
 N\Pi(1) &= N_1(1) - N_2(1) = \\
 &= \frac{1}{2}(N_1(0) + N_2(0)) - \frac{1}{2}(N_1(0) + N_2(0)) = \\
 &= \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N = 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

cioè  $\Pi(1) = 0$  indipendentemente dalla realizzazione del salto o meno. Infatti, prendendo un insieme di camminatori sufficientemente esteso, qualunque siano le loro condizioni precedenti all'evento, so per certo che, dopo il lancio della moneta, ne trovo tanti in una buca quanti sono nell'altra.

Abbandono ora la semplificazione che gli eventi avvengano ad ogni step temporale, e considero la situazione in cui per ogni camminatore l' $n$ -esimo lancio della moneta si verifichi al tempo  $t(n)$  e le distanze temporali fra due lanci

$$\tau_n = t(n+1) - t(n) \tag{3.6}$$

siano date da una densità di distribuzione  $\psi^{(S)}(\tau)$ , detta funzione di subordinazione. In questo caso, invece della (3.1), ottengo

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt' \psi_n^{(S)}(t') \Psi^{(S)}(t-t') \mathbf{K}^n \mathbf{p}(0) \tag{3.7}$$

con

$$\mathbf{K} = \mathbf{1} + \mathbf{M} \tag{3.8}$$

mentre  $\psi_n^{(S)}(t')$  è la probabilità di aver fatto  $n$  estrazioni con la condizione di aver fatto la  $n$ -esima estrazione al tempo  $t'$ . Quindi nel caso dell'equazione (3.7) la forma del vettore  $\mathbf{K}^n \mathbf{p}(0)$  rimane la stessa fino al tempo  $t$ , poiché nessuna estrazione viene compiuta fra  $t'$  e  $t$ . Quest'ultima condizione è assicurata dal fattore  $\Psi^{(S)}(t - t')$ , dove

$$\Psi^{(S)}(\tau) \equiv \int_{\tau}^{\infty} dt' \psi^{(S)}(t') \quad (3.9)$$

è la probabilità che non avvenga alcuna estrazione nel tempo  $\tau$ .

Facendo la trasformata di Laplace dell'equazione (3.7) ottengo

$$\hat{\mathbf{p}}(u) = \frac{1 - \hat{\psi}^{(S)}(u)}{u} \frac{1}{1 - \mathbf{K} \hat{\psi}^{(S)}(u)} \hat{\mathbf{p}}(0) \quad (3.10)$$

che in pochi passaggi risulta uguale a

$$\hat{\mathbf{p}}(u) = \frac{1}{u - \frac{u \hat{\psi}^{(S)}(u)}{1 - \hat{\psi}^{(S)}(u)} (\mathbf{K} - 1)} \hat{\mathbf{p}}(0) \quad (3.11)$$

Considerando ora la Master Equation Generalizzata (MEG)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \int_0^t dt' \Phi(t - t') \mathbf{M} \mathbf{p}(t') \quad (3.12)$$

osservo che, se il suo kernel di memoria, nel dominio laplaciano, è legato alla funzione di subordinazione  $\psi^{(S)}(t)$  da

$$\hat{\Phi}(u) = \frac{u \hat{\psi}^{(S)}(u)}{1 - \hat{\psi}^{(S)}(u)}, \quad (3.13)$$



allora la trasformata di Laplace della MEG coincide con la Eq. (3.11), provando così che la Eq. (3.12) sia uguale alla Eq. (3.7).

Il lancio della moneta descritto dalla matrice (3.2) può essere pensato come un sistema a due stati che può, con uguale probabilità, saltare da uno stato all'altro o restare nello stato precedente. Abbiamo visto che adottando la prospettiva di Gibbs e la semplificazione che ad ogni step avvenga un evento, la quantità  $\Pi(n)$  in un singolo passo temporale si muove da una condizione di non equilibrio  $\Pi(n) \neq 0$  ad una di equilibrio:  $\Pi(n+1) = 0$ . In altre parole, è sufficiente il primo lancio della moneta perché il sistema rilassi ad una condizione di equilibrio. Adottando l'Eq. (3.12) posso descrivere il rilassamento della variabile  $\Pi(t)$ . Infatti, applicando le definizioni di  $\mathbf{p}$  (Eq. 3.1) e di  $\Pi$  (Eq. 3.3), l'Eq. (3.12) diventa

$$\frac{d}{dt}\Pi(t) = \int_0^t dt' \Phi(t-t')\Pi(t'), \quad (3.14)$$

la cui trasformata di Laplace è

$$\hat{\Pi}(t) = \frac{1 - \hat{\psi}^{(S)}(u)}{u} \hat{\Pi}(0) \quad (3.15)$$

che quindi implica

$$\frac{\Pi(t)}{\Pi(0)} = \Psi^{(S)}(t). \quad (3.16)$$

C'era da aspettarsi un risultato del genere in quanto la probabilità che la quantità  $\Pi(t)$  si annulli è uguale alla probabilità che avvenga

un evento nell'intervallo temporale  $t$ .

### 3.2 La proprietà di invecchiamento

L'invecchiamento, o *aging*, distingue le statistiche Poissoniane da quelle non-Poissoniane, come ad esempio le leggi a potenza. Si dice che un processo stocastico “invecchia” quando la sua Survival Probability dipende dal momento in cui si inizia a fare le osservazioni.

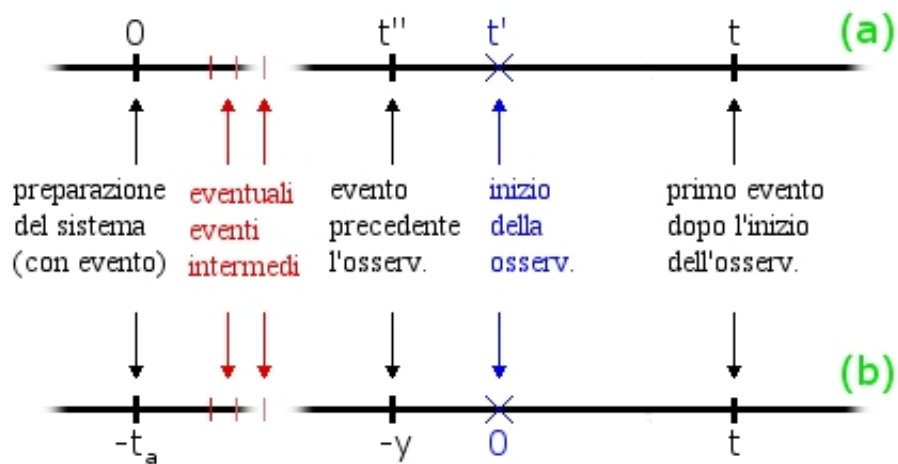


Figura 3.1: Esperimento di invecchiamento. Le rappresentazioni (a) e (b) sono equivalenti; differiscono unicamente per una diversa scelta del tempo di inizio di osservazione e di preparazione del sistema.

Nella figura 3.1 è rappresentato un processo stocastico di rinnovo il cui scorrere del tempo è rappresentato dalla linea continua, mentre gli eventi sono indicati come tratti verticali su questa. Limitiamoci a considerare la parte (a) della figura: la rappresentazione (b) sarà utile in seguito. Il sistema è preparato ad un tempo 0 ovvero sappiamo che un evento, e quindi un azzeramento della risposta del sistema, è avvenuto al tempo 0. La nostra osservazione inizia al tempo  $t'$  e vogliamo calcolare la probabilità che al tempo  $t$  incontriamo il primo evento. Occorre tener presente che ogni volta che parliamo di probabilità dobbiamo immaginare di costruire un insieme di Gibbs di sistemi con le stesse condizioni del nostro (cioè preparazione al tempo 0 e inizio di osservazione al tempo  $t'$ ), e quindi misurare la frequenza di eventi al tempo  $t$ . La densità dei tempi di attesa di evento, cominciando l'esperimento al tempo  $t'$ , è data da

$$\psi(t, t') = \psi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t'} \psi_n(t'') \psi(t - t'') dt''. \quad (3.17)$$

Merita analizzare termine per termine l'equazione (3.17). Non sapendo nulla di ciò che accade fra la preparazione (tempo 0) e l'inizio dell'osservazione ( $t'$ ), devo considerare tutte le possibilità di eventi avvenuti in questo intervallo. Potrebbe non essercene stato alcuno ed ecco quindi il primo termine: in questo caso la densità è data dalla semplice probabilità di evento  $\psi(t)$ . A questa devo aggiungere tutti i casi in cui ci siano stati eventi fra il tempo 0 e il

tempo  $t'$ , l'ultimo dei quali ad un tempo  $t''$ .  $\psi_n(t'')$  è la probabilità che l' $n$ -esimo evento avvenga al tempo  $t''$ ; sommo su tutti i possibili  $n$  e integro su tutti i possibili  $t''$  nell'intervallo "di ignoranza"; infine moltiplico per la probabilità di evento (posto che l'ultimo evento avvenga al tempo  $t''$ ). L'equazione (3.17) è detta distribuzione dei tempi di attesa invecchiata.

### 3.2.1 Distribuzione Poissoniana

Una funzione di distribuzione dei tempi di attesa Poissoniana ha la seguente forma:

$$\psi(t) = re^{-rt} \quad (3.18)$$

e per questa è evidente che

$$\psi(t, t') = \psi(t - t'). \quad (3.19)$$

Infatti la trasformata di Laplace della (3.18) è

$$\hat{\psi}(u) = \frac{r}{r + u}, \quad (3.20)$$

che inserita in

$$\hat{\psi}_n(u) = [\hat{\psi}(u)]^n \quad (3.21)$$

e antitrasformando, ci dà

$$\psi_n(t) = \frac{r^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-rt}. \quad (3.22)$$

Sostituendo la (3.22) nella (3.17), ottengo:

$$\begin{aligned} \psi(t, t') &= re^{-rt} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t'} \frac{r^n t'^{n-1}}{(n-1)!} e^{-rt'} re^{-r(t-t')} dt'' = \\ &= re^{-rt} + r^2 e^{-rt} \int_0^{t'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rt'')^n}{n!} dt'' = \\ &= re^{-rt} + r^2 e^{-rt} \int_0^{t'} e^{-rt''} dt'' = re^{-r(t-t')}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ciò mostra come non ci sia invecchiamento in un sistema governato da una distribuzione Poissoniana.

### 3.3 Densità di realizzazione di evento

Abbiamo visto che

$$\psi(t, t') = \psi(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t'} dt'' \psi_n(t'') \psi(t - t''). \quad (3.24)$$

Questa espressione è esatta, ma è estremamente difficile da calcolare analiticamente in generale. Per poterla maneggiare ne ricavo un'espressione approssimata introducendo

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t), \quad (3.25)$$

così da poter scrivere

$$\psi(t, t') = \int_0^{t'} dt'' P(t'') \psi(t - t''). \quad (3.26)$$

$P(t)$  sta ad indicare la densità di realizzazione di evento al tempo  $t$ . Per calcolare la forma analitica di  $P(t)$  è preferibile passare in trasformata di Laplace:

$$\widehat{P}(u) = \int_0^\infty e^{-ut} P(t) dt. \quad (3.27)$$

Per le proprietà delle trasformate, ricavo

$$\widehat{P}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\psi}_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{\psi}(u))^n = \frac{1}{1 - \widehat{\psi}(u)}. \quad (3.28)$$

Ora calcolo i diversi  $\widehat{P}(u)$ , e quindi  $P(t)$ , per differenti densità di evento  $\psi(t)$

### 3.3.1 Caso esponenziale

Il caso  $\psi(t) = re^{-rt}$  implica

$$\widehat{\psi}(u) \equiv r \int_0^\infty e^{-ut} e^{-rt} dt = \frac{r}{u + r} \quad (3.29)$$

e quindi la (3.28) ci dà

$$\widehat{P}(u) = \frac{r + u}{u + r - r} = \frac{r}{u} + 1. \quad (3.30)$$

Invertendo la trasformata di Laplace ottengo

$$P(t) = r + \delta(t) \quad (3.31)$$

che implica, come ci si aspettava, un *rate* di evento costante nel tempo.

### 3.3.2 Legge a potenza

Lavorare con

$$\psi(t) = \frac{(\mu - 1)T^{\mu-1}}{(t + T)^\mu} \quad (3.32)$$

è più complicato e ci costringe ad alcune approssimazioni. In appendice mostro che

$$\widehat{\psi}(u) = \frac{\Gamma(2 - \mu)}{(uT)^{1-\mu}} [E_{\mu-1}^{uT} - e^{uT}] \quad (3.33)$$

dove

$$E_{\mu-1}^{uT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(uT)^{n+1-\mu}}{\Gamma(n + 2 - \mu)}. \quad (3.34)$$

Poiché qui interessa ottenere una soluzione approssimata per tempi lunghi, cerco l'andamento della  $\widehat{\psi}(u)$  per  $u \rightarrow 0$ . Riscrivo quindi la (3.33) utilizzando la (3.34) e lo sviluppo in serie di Taylor dell'esponenziale:

$$\widehat{\psi}(u) = \frac{\Gamma(2-\mu)}{(uT)^{1-\mu}} \left\{ \frac{(uT)^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)} + \frac{(uT)^{2-\mu}}{\Gamma(3-\mu)} + \frac{(uT)^{3-\mu}}{\Gamma(4-\mu)} + \dots \right. \\ \left. \dots - 1 - uT - \frac{1}{2}(uT)^2 - \dots \right\}$$

$$= \left\{ 1 + \frac{\Gamma(2-\mu)}{(2-\mu)\Gamma(2-\mu)} (uT) + \frac{\Gamma(2-\mu)}{\Gamma(4-\mu)} (uT)^2 + \dots \right. \\ \left. - \Gamma(2-\mu) \left[ (uT)^{\mu-1} + (uT)^\mu + \frac{1}{2} (uT)^{\mu+1} + \dots \right] \right\} \quad (3.35)$$

Per l'ultimo passaggio ho usato in due punti la proprietà di  $\Gamma$

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x). \quad (3.36)$$

Per  $u \rightarrow 0$  la (3.35) tende a valori diversi a seconda che  $\mu$  sia maggiore o minore di 2. Distinguo quindi i due casi.

### 3.3.2.1 Caso $1 < \mu < 2$

Il decadimento più lento è dato dal contributo  $(uT)^{\mu-1}$ , ovvero

$$\lim_{u \rightarrow 0} \widehat{\psi}(u) = 1 - \Gamma(2-\mu)T^{\mu-1}u^{\mu-1}. \quad (3.37)$$

Ora uso il risultato della (3.37) per ottenere la  $\widehat{P}(u)$ : la (3.28) diventa quindi

$$\lim_{u \rightarrow 0} \widehat{P}(u) = \frac{1}{\Gamma(2-\mu)T^{\mu-1}} \frac{1}{u^{\mu-1}} \quad (3.38)$$

Le proprietà delle trasformate di Laplace mi dicono:

$$f(t) = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \rightarrow \widehat{f}(u) = \frac{1}{u^{n+1}}, \quad (3.39)$$



e quindi la (3.38) ci dà

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \mu) T^{\mu-1} \Gamma(\mu - 1)} \frac{1}{t^{2-\mu}} \quad (3.40)$$

### 3.3.2.2 Caso $2 < \mu < 3$

In questo caso la (3.35) ci dà:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \widehat{\psi}(u) = 1 - \langle \tau \rangle u - \Gamma(2 - \mu) (uT)^{\mu-1}$$

dove ho posto

$$\frac{T}{\mu - 2} = \langle \tau \rangle. \quad (3.41)$$

La  $\widehat{P}(u)$  ha un andamento del tipo

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \widehat{P}(u) &= \frac{1}{\langle \tau \rangle u + \Gamma(2 - \mu) (uT)^{\mu-1}} = \\ &= \frac{1}{\langle \tau \rangle u} \frac{1}{1 + \Gamma(2 - \mu) \frac{(uT)^{\mu-1}}{\langle \tau \rangle u}} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{\langle \tau \rangle u} \left( 1 - \Gamma(2 - \mu) \frac{(uT)^{\mu-1}}{\langle \tau \rangle u} \right) = \\ &= \frac{1}{\langle \tau \rangle u} - \Gamma(2 - \mu) \frac{T^{\mu-1}}{\langle \tau \rangle^2} \frac{1}{u^{3-\mu}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Le proprietà delle trasformate mi dicono che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} - \frac{\Gamma(2 - \mu) T^{\mu-1}}{\Gamma(3 - \mu) \langle \tau \rangle^2} \frac{1}{t^{\mu-2}} \quad (3.43)$$

mentre, utilizzando  $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$  (eq. (3.36)) e  $\langle\tau\rangle = T/(\mu-2)$  (eq. (3.41)), dalla (3.43) ottengo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{1}{\langle\tau\rangle} + \frac{T^{\mu-2}}{\langle\tau\rangle} \frac{1}{t^{\mu-2}} \quad (3.44)$$

### 3.3.2.3 In conclusione:

Riscrivo le equazioni (3.40) e (3.44) raccogliendo i coefficienti indipendenti da  $t$ . Ponendo

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Gamma(2-\mu)\Gamma(\mu-1)T^{\mu-1}} \\ B &= \frac{T^{\mu-2}}{3-\mu} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ottengo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) &= \frac{A}{t^{2-\mu}} \quad \text{per } 1 < \mu < 2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) &= \frac{1}{\langle\tau\rangle} \left[ 1 + \frac{B}{t^{\mu-2}} \right] \quad \text{per } 2 < \mu < 3 \end{aligned} \quad (3.46)$$

L'equazione (3.46) mette in evidenza le proprietà di  $P$  in caso di legge a potenza. Salta subito agli occhi come, nel caso  $1 < \mu < 2$ , una condizione di equilibrio sia *impossibile* da ottenere: la densità di evento diminuisce costantemente senza tendere ad alcun valore finito. Nel caso  $2 < \mu < 3$ , invece, la funzione  $P(t)$  tende ad un valore finito ( $1/\langle\tau\rangle$ ), ma è comunque necessario aspettare un tempo infinito per ottenere la stazionarietà.

### 3.4 Survival probability invecchiata

Come abbiamo visto, nel caso  $2 < \mu < 3$  è possibile ottenere una condizione di stazionarietà quando andiamo a guardare il sistema a tempi molto grandi. Per esprimere meglio questa condizione modifico l'eq. (3.17) in termini di variabili più appropriate.

$$\psi(t, t') = \psi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t'} \psi_n(t'') \psi(t - t'') dt'' \quad (3.47)$$

diventa

$$\psi(\tau, t') = \psi(\tau + t') + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t'} \psi_n(t'') \psi(\tau + t' - t'') dt'', \quad (3.48)$$

dove ho posto  $\tau = t - t'$ . Come conseguenza anche la (3.26) viene modificata in

$$\psi(\tau, t') = \int_0^{t'} dt'' P(t'') \psi(\tau + t' - t''); \quad (3.49)$$

facendo il limite per  $t' \gg T$ , posso porre  $P(t) = k$  e ottenere

$$\psi(\tau, t') = k \int_0^{t'} \psi(\tau + t' - t'') dt''. \quad (3.50)$$

dove la costante  $k$  è definita dalla normalizzazione

$$\int_0^{\infty} \psi(\tau, t') d\tau = 1$$

Nella eq. (3.50) cambio la variabile di integrazione  $t'' = t' - y$  per scrivere la forma più compatta

$$\psi(\tau, t') = k \int_0^{t'} \psi(\tau + y) dy. \quad (3.51)$$

Questa è la densità di evento infinitamente invecchiata, e per sottolineare questo infinito invecchiamento posso anche riscrivere  $\psi(\tau, t') \equiv \psi_\infty(\tau)$ . Ricavo la probabilità di sopravvivenza relativa utilizzando la (1.16), ovvero

$$\psi_\infty(t) = -\frac{d}{dt} \Psi_\infty(t) \quad (3.52)$$

$$\psi_\infty(t) = \left( \frac{T}{T + \tau} \right)^{\mu-2} \quad (3.53)$$

## Capitolo 4

# Fluttuazione-Dissipazione per processi di rinnovo non Poissoniani

### 4.1 Caso Stazionario

La più generale forma della risposta di un sistema di variabili ad una perturbazione dipendente dal tempo è

$$\Pi(t) \equiv \langle A(t) \rangle = \varepsilon \int_0^t \chi_{AB}(t, t') \xi_P(t') dt', \quad (4.1)$$

dove  $A$  è la variabile di interesse, il cui valor medio in assenza di perturbazioni è supposto azzerarsi.  $B$  è la variabile accoppiata con la perturbazione esterna  $\xi_P(t)$  di intensità  $\varepsilon$ , e  $\chi_{AB}(t, t')$  è detta funzione di risposta. Nel caso stazionario, Kubo in [5] ha mostrato

che

$$\chi_{AB}(t, t') = \frac{d}{dt'} \langle A(t)B(t') \rangle, \quad (4.2)$$

dove  $\langle \dots \rangle$  indica la media sulla distribuzione di probabilità classica o quantistica a seconda del contesto. Nel caso di interesse il “sistema” è composto da una sola variabile  $A = B = \xi_S(t)$ , la quale può assumere solo due valori  $\xi_S(t) = \pm 1$ . Quando la variabile  $\xi_S$  è stazionaria, ovvero, nel caso di legge a potenza inversa, quando  $\mu > 2$ , è possibile definire la funzione di autocorrelazione

$$\Phi_\xi(t, t') \equiv \langle \xi_S(t)\xi_S(t') \rangle. \quad (4.3)$$

Dato quindi un sistema descritto come nella Sez. 2.2, la cui probabilità di evento sia data da  $\psi(t)$ , possiamo ricavare la funzione di autocorrelazione con il metodo delle finestre mobili: la  $\Phi_\xi(\tau)$ , dove  $\tau = t - t'$ , diventa il prodotto tra i valori della variabile  $\xi_S$  agli estremi di una finestra di ampiezza  $\tau$  che si sposta lungo l’asse dei tempi opportunamente mediato sull’insieme di Gibbs. Ma l’andamento della variabile è dato da zone laminari in cui  $\xi_S = \pm 1$  costantemente, alternate da salti in cui passa dallo stato  $+$  a quello  $-$  (o viceversa). Dato che mediamo su un insieme di Gibbs di camminatori, un contributo non nullo sarà dato solo dalle finestre che non contengono eventi al loro interno. Infatti, come visto nella Sez. 3.1, dato un evento al tempo  $t$ , la probabilità che il camminatore salti o resti nello stesso stato è la stessa, e quindi, mediando sull’insieme

di Gibbs, i due contributi si annullano vicendevolmente. Otteniamo allora

$$\Phi_\xi(\tau) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \int_\tau^\infty \frac{\tau' - \tau}{\tau'} \tau' \psi(\tau') d\tau' \quad (4.4)$$

dove  $(\tau' - \tau)/\tau'$  è il “peso” (ovvero in quante posizioni la finestra si può mettere) della generica regione laminare di lunghezza  $\tau'$ , mentre  $\tau' \psi(\tau')$  è la probabilità di ottenere una tale regione. Derivando due volte l'Eq. (4.4):

$$\begin{aligned} \Phi'_\xi(\tau) &= \frac{1}{\langle \tau \rangle} \frac{d}{d\tau} \left[ \int_0^\infty (\tau' - \tau) \psi(\tau') d\tau' - \int_0^\tau (\tau' - \tau) \psi(\tau') d\tau' \right] = \\ &= \frac{1}{\langle \tau \rangle} \left[ - \int_0^\infty \psi(\tau') d\tau' + \int_0^\tau \psi(\tau') d\tau' \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

che ci dà

$$\Phi''_\xi(\tau) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \psi(\tau). \quad (4.6)$$

Ciò significa che la funzione di auto correlazione è una legge a potenza con indice  $\mu - 2$ . Essa deve per forza essere della forma della  $\Psi(t, t')$ , la survival probability invecchiata, e, poiché sono entrambe normalizzate, possiamo scrivere

$$\Phi_\xi(t - t') = \Psi(t - t') = \Psi(t, t') \quad (4.7)$$

e quindi

$$\chi(t, t') = \frac{d}{dt'} \Psi(t - t') = - \frac{d}{dt} \Psi(t - t') = \psi(t - t'). \quad (4.8)$$

Nell'Eq. (4.7) la seconda uguaglianza deriva dal fatto che stiamo considerando il caso  $\mu > 2$  e ciò implica che anche le funzioni invecchiate dipendano solo dalla differenza dei tempi. Generalizzare al caso non stazionario implica scegliere una delle due, ovvero scegliere fra

$$\chi(t, t') = \frac{d}{dt'} \Psi(t, t') \quad (4.9)$$

che si può chiamare ipotesi “fenomenologica”, e

$$\chi(t, t') = -\frac{d}{dt} \Psi(t, t') \quad (4.10)$$

a cui mi riferisco come idea “dinamica”.

## 4.2 Traiettoria stocastica

Consideriamo l'equazione matriciale imperturbata

$$\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_0(t) & -r_0(t) \\ -r_0(t) & r_0(t) \end{bmatrix} \mathbf{p}(t), \quad (4.11)$$

dove  $\mathbf{p}(t) \equiv (p_1(t), p_2(t))$  è il vettore bidimensionale le cui due componenti  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$  rappresentano la probabilità che il sistema, al tempo  $t$ , si trovi nello stato  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  rispettivamente. La funzione stocastica e dicotomica  $r_0(t)$  è una quantità fluttuante che vale sempre 0, tranne in occasione di ciascun evento, quando prende il



valore 1. Per le proprietà stocastiche di  $r(t)$  definiamo  $\mathbf{p}(t)$  una *traiettoria stocastica*. E' immediato vedere che al primo evento abbiamo la transizione  $(p_1(t), p_2(t)) \rightarrow (1/2, 1/2)$ ; ovvero, quando  $r(t)$  prende il valore 1, il sistema raggiunge subito l'equilibrio, proprio come nell'Eq. (3.2) del Cap. 3.

Introduco ora la perturbazione e riscrivo l'Eq. (4.11) in

$$\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} r_+(t) & -r_-(t) \\ -r_+(t) & r_-(t) \end{bmatrix} \mathbf{p}(t) \quad (4.12)$$

dove  $r_+(t)$  e  $r_-(t)$  sono due nuove funzioni stocastiche, le quali si riferiscono allo stato  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  rispettivamente. I tempi fra un evento e l'altro dello stato  $|1\rangle$  sono estratti da una distribuzione  $\psi^+(\tau)$ , mentre la funzione  $r_-(t)$  segue una distribuzione  $\psi^-(\tau)$ .

Si può dimostrare che se  $\psi(\tau)$  segue una legge a potenza inversa con  $\mu > 2$ , le due nuove distribuzioni manterranno lo stesso  $\mu$  della  $\psi(\tau)$  imperturbata, mentre avranno un  $T$ , ovvero un  $\langle \tau \rangle$ , diverso. In ogni caso, per la differenza fra le funzioni  $r_+(t)$  e  $r_-(t)$ , gli eventi saranno leggermente più frequenti quando il sistema si trova in uno stato piuttosto che nell'altro: in fig. 4.1 ho scelto che lo stato  $|1\rangle$  abbia meno eventi dello stato  $|2\rangle$ . Globalmente il sistema si troverà quindi più di frequente nello stato “+” piuttosto che in quello “-”. Ciò accade anche se il sistema risultante reagisce solo agli eventi della distribuzione relativa allo stato in cui si trova: se al tempo  $t$  si trova nello stato  $|1\rangle$ , e contemporaneamente nello stato  $|2\rangle$  si

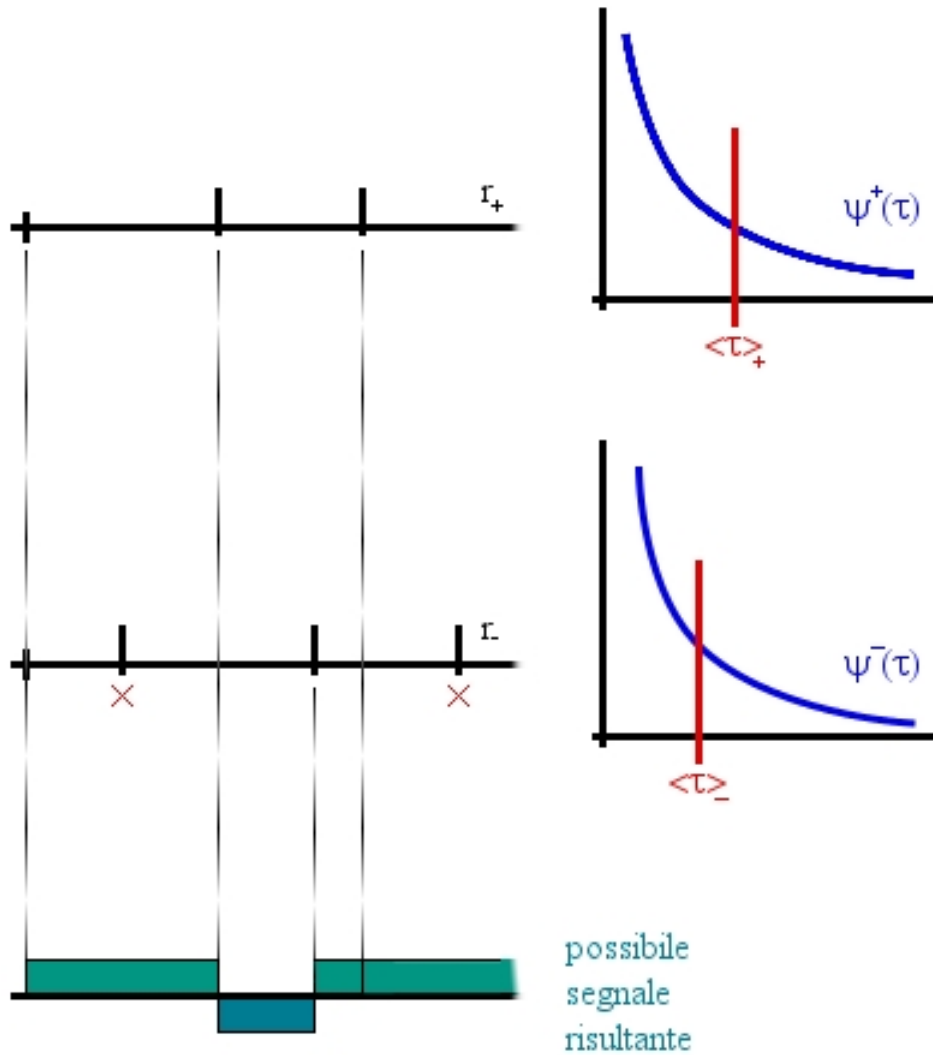


Figura 4.1: Dall'alto verso il basso: funzione  $r_+(t)$  con relativa distribuzione dei tempi di attesa  $\psi^+(\tau)$ ;  $r_-(t)$  con a fianco  $\psi^-(\tau)$ ; un possibile segnale risultante: lo chiamo "possibile" in quanto l'effettiva realizzazione non dipende solo dalle due funzioni  $r(t)$ , ma anche dal lancio della moneta in corrispondenza degli eventi. Con delle crocette rosse ho evidenziato due eventi che non contribuiscono allo sviluppo del sistema in quanto si trovano nello stato "svegliato".

realizza un evento, non c'è comunque alcun effetto, nessun “lancio di moneta”.

Per risolvere la (4.12), considero la variabile

$$\Sigma(t) = p_1(t) - p_2(t) \quad (4.13)$$

che, messa nella (4.12), ci dà

$$\Sigma(t) = [1 - S(t-1)]\Sigma(t-1) - D(t-1), \quad (4.14)$$

dove la variabile  $D(t)$  è data dalla differenza

$$D(t) \equiv [r_+(t) - r_-(t)]/2, \quad (4.15)$$

mentre la variabile somma è

$$S(t) \equiv [r_+(t) + r_-(t)]/2. \quad (4.16)$$

Mettendo nell'Eq. (4.14) la condizione iniziale  $\Sigma(0) = 0$ , otteniamo

$$\Sigma(t) = - \sum_{t'=0}^{t-1} D(t')Q(t, t'), \quad (4.17)$$

con

$$Q(t'+1, t') \equiv 1, \quad (4.18)$$

e, per  $t > t' + 1$ ,

$$Q(t, t') \equiv \prod_{j=1}^{t-t'-1} [1 - S(t-j)]. \quad (4.19)$$

La funzione  $Q(t, t')$  è sempre uguale a 1 finché non ci sono eventi fra  $t'$  e  $t > t'$ . Usando  $Q(t, t')$  riscriviamo l'Eq. (4.17):

$$\Sigma(t) = -\frac{1}{2} \sum_{t'=0}^{t-1} r_+(t') Q(t, t') + \frac{1}{2} \sum_{t'=0}^{t-1} r_-(t') Q(t, t') \quad (4.20)$$

e di questa facciamo la media su un insieme statistico di Gibbs di sistemi tutti preparati allo stesso modo:

$$\langle \Sigma(t) \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{t'=0}^{t-1} \langle r_+(t') Q(t, t') \rangle + \frac{1}{2} \sum_{t'=0}^{t-1} \langle r_-(t') Q(t, t') \rangle, \quad (4.21)$$

con  $\Pi(t) \equiv \langle \Sigma(t) \rangle$ .

Mediare sull'*ensemble* ci permette di passare dalla singola traiettoria alla probabilità di realizzazione evento. Poiché  $r_+(t)$  è sempre zero tranne quando avviene un evento nello stato +, e per le proprietà di  $Q(t, t')$  espresse nell'Eq. (4.19),

$$\langle r_+(t') Q(t, t') \rangle = \pi^+(t') \psi^-(t, t'), \quad (4.22)$$

dove  $\pi^+(t')$  è la probabilità che un evento sia avvenuto al tempo  $t'$  in  $|1\rangle$  e  $\psi^-(t, t')$  è la probabilità che un evento avvenga in  $|2\rangle$  al tempo  $t$ , presupposto che si cominci ad aspettare questo evento

dal tempo  $t'$ . Con le stesse considerazioni per  $\langle r_-(t')Q(t, t') \rangle$  e passando dal tempo discreto al tempo continuo, ottengo

$$\Pi(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t dt' [\pi^+(t')\psi^-(t, t') - \pi^-(t')\psi^+(t, t')]. \quad (4.23)$$

Per rendere più evidente il collegamento fra  $\Pi(t)$  e la perturbazione, definiamo più precisamente la stocasticità della funzione  $r(t)$ . Ad ogni step temporale abbiamo probabilità

$$g(\Delta t) = \frac{r_0}{1 + r_1 \Delta t} \quad (4.24)$$

che si verifichi un evento, mentre la perturbazione cambia la (4.24) in

$$g_{\pm}(\Delta t) = \frac{r_0[1 \mp \varepsilon \xi_P(t)]}{1 + r_1[1 \mp \varepsilon \xi_P(t)]\Delta t}. \quad (4.25)$$

Nelle due equazioni precedenti ho introdotto  $\Delta t = t - t_u$ , con  $t_u$  ad indicare il tempo a cui è avvenuto l'ultimo evento prima del tempo  $t$ ;  $\Delta t$  serve a ricordare che un evento azzerà il sistema nel complesso e quindi anche la probabilità che un nuovo evento si realizzi. A tempi brevi, ovvero con  $\Delta t \ll 1/r_1$ , la probabilità di ottenere un evento è

$$g_{\pm}(t) = r_0[1 \mp \varepsilon \xi(t)], \quad (4.26)$$

mentre per  $\Delta t \gg 1/r_1$ , ovvero quando non avviene un evento per

un lungo periodo, si ha

$$g_{\pm}(t) = \frac{r_0}{1 + r_1 \Delta t}. \quad (4.27)$$

che è identica alla (4.24). Per grandi intervalli temporali, infatti, la perturbazione esterna non produce effetti al prim'ordine nella distribuzione dei tempi di soggiorno fra due eventi.

Con l'Eq. (1.18) della Sez. 1.4 avevamo definito il *rate* di evento come

$$g(t) = \frac{\psi(t)}{\Psi(t)} \equiv \frac{-\frac{d}{dt}\Psi(t)}{\Psi(t)}. \quad (4.28)$$

Con l'equazione (4.24) ho definito  $g(t)$  e da quella posso facilmente ricavare  $\Psi(t)$ :

$$-\frac{d}{dt} [\ln \Psi(t)] = -\frac{\frac{d}{dt}\Psi(t)}{\Psi(t)} = \frac{r_0}{1 + r_1 t} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{r_0}{r_1} \ln(1 + r_1 t) \right] \quad (4.29)$$

che implica

$$\Psi(t) = (1 + r_1 t)^{-\frac{r_0}{r_1}}. \quad (4.30)$$

E' immediato riscrivere la (4.30) nella forma già utilizzata

$$\Psi(t) = \left( \frac{T}{t + T} \right)^{\mu-1}, \quad (4.31)$$

ponendo  $\mu - 1 = r_0/r_1$ , mentre  $T = 1/r_1$ . Inoltre, la perturbazione come espressa in (4.25) lascia invariato l'indice  $\mu$  della legge

a potenza, mentre i suoi effetti si esplicitano modificando  $T$ :

$$\mu = \frac{r_0}{r_1} + 1 \rightarrow \frac{r_0[1 \mp \varepsilon\xi_P(t')]}{r_1[1 \mp \varepsilon\xi_P(t')]} + 1 = \mu \quad (4.32)$$

$$T = \frac{1}{r_1} \rightarrow \frac{1}{r_1[1 \mp \varepsilon\xi_P(t')]} = T[1 \pm \varepsilon\xi_P(t')] \quad (4.33)$$

Questa perturbazione ci dà

$$\pi^\pm(t') = \frac{1}{2}[1 \mp \varepsilon\xi_P(t')], \quad (4.34)$$

$$\psi^\pm(t, t') = \psi(t, t'), \quad (4.35)$$

ovvero, nel limite di tempi lunghi le distribuzioni dei tempi di attesa di età  $t'$  sono indipendenti dallo stato in cui le si misura. Inserendo le Eq. (4.34) e (4.35) nell'Eq. (4.23), otteniamo

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t dt' \left\{ \frac{1}{2}[1 - \varepsilon\xi_P(t')]\psi(t, t') - \frac{1}{2}[1 + \varepsilon\xi_P(t')]\psi(t, t') \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^t dt' \psi(t, t') \xi_P(t') \end{aligned} \quad (4.36)$$

che è la (4.1) con la funzione di risposta  $\chi(t, t')$  data da

$$\chi(t, t') = \psi(t, t') = -\frac{d}{dt} \Psi(t, t') \quad (4.37)$$

La generalizzazione che ho chiamato “dinamica” (Eq. 4.10) è venuta fuori dall’ipotesi che la perturbazione modifichi gli eventi. E’ stato dimostrato [9] che l’ipotesi “fenomenologica” è equivalente a considerare gli eventi fissi mentre si perturba la probabilità di scegliere fra

un evento e l'altro (come se si lanciasse, per così dire, una moneta “truccata”).

### 4.3 Perturbazione a scalino

Per evidenziare la differenza fra metodo dinamico e fenomenologico considero una perturbazione a scalino e calcolo la risposta  $\Pi(t)$ . Nel caso fenomenologico ottengo

$$\Pi(t) = \varepsilon \int_0^t \chi(t, t') dt' = \varepsilon \int_0^t \frac{d}{dt'} \Psi(t, t') dt' = \varepsilon [\Psi(t, t) - \Psi(t, 0)]. \quad (4.38)$$

Ma  $\Psi(t, t)$  è la funzione di correlazione fra il sistema e se stesso allo stesso tempo, mentre  $\Psi(t, 0)$  è la survival probability di età zero, ovvero la  $\Psi(t)$ . La (4.38) diventa quindi

$$\Pi(t) = \varepsilon [1 - \Psi(t)]. \quad (4.39)$$

L'andamento di  $\Pi(t)$  per  $t \rightarrow \infty$  segue quindi la  $\Psi(t)$ , ovvero un andamento del tipo  $1/t^{\mu-1}$ . Vediamo ora cosa si ottiene utilizzando la formulazione dinamica.

La (4.10) e la perturbazione a scalino implicano

$$\Pi(t) = \varepsilon \int_0^t \psi(t, t') dt'; \quad (4.40)$$

per risolvere la (4.40) ho bisogno di usare la densità di realizzazione



evento (3.25) introdotta nella sezione 3.3, ovvero

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t) \quad (4.41)$$

che abbiamo visto generare la (3.26). Sostituendo questa nella (4.40), ottengo

$$\begin{aligned} \frac{\Pi(t)}{\varepsilon} &= \int_0^t \frac{d}{dt'} t' \psi(t, t') dt' = [t' \psi(t, t')]_0^t - \int_0^t t' P(t') \psi(t - t') dt' = \\ &= t \int_0^t P(t') \psi(t - t') dt' - \int_0^t t' P(t') \psi(t - t') dt' \end{aligned} \quad (4.42)$$

Passo in trasformata per avere

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\Pi}(u)}{\varepsilon} &= -\frac{d}{du} [P(u)\psi(u)] + \frac{d}{du} P(u)\psi(u) = \\ &= -P(u) \frac{d}{du} \psi(u) = \frac{\psi'(u)}{\psi(u) - 1} \end{aligned} \quad (4.43)$$

dove nell'ultimo passaggio ho inserito il valore di  $\widehat{P}(u)$  come ricavato nella (3.28).

Sono interessato all'andamento della  $\Pi(t)$  per  $t \rightarrow \infty$ , e devo quindi risolvere la (4.43) per  $u \rightarrow 0$ ; considero separatamente i due casi  $1 < \mu < 2$  e  $2 < \mu < 3$ .

**4.3.1**  $1 < \mu < 2$ 

Approssimo la (4.43) inserendovi

$$\lim_{u \rightarrow 0} \widehat{\psi}(u) = 1 - \frac{Tu}{\mu - 2} - \Gamma(2 - \mu) (Tu)^{\mu-1} \quad (4.44)$$

e da questa ottengo

$$\frac{d}{du} \widehat{\psi}(u) = -(\mu - 1)\Gamma(2 - \mu)T^{\mu-1}u^{\mu-2} \left[ 1 + \frac{(Tu)^{2-\mu}}{(\mu - 2)(\mu - 1)\Gamma(2 - \mu)} \right] \quad (4.45)$$

$$\widehat{\psi}(u) - 1 = -\Gamma(2 - \mu)T^{\mu-1}u^{\mu-1} \left[ 1 + \frac{(Tu)^{2-\mu}}{(\mu - 2)\Gamma(2 - \mu)} \right]. \quad (4.46)$$

Il rapporto fra le due precedenti equazioni è dato da

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\psi}'(u)}{\widehat{\psi}(u) - 1} &= \frac{\mu - 1}{u} \left[ 1 + \frac{(Tu)^{2-\mu}}{(\mu - 2)(\mu - 1)\Gamma(2 - \mu)} \right] \left[ 1 - \frac{(Tu)^{2-\mu}}{(\mu - 2)\Gamma(2 - \mu)} \right] = \\ &= \frac{\mu - 1}{u} \left[ 1 + \frac{(Tu)^{2-\mu}}{(\mu - 2)(\mu - 1)\Gamma(2 - \mu)} - \frac{(Tu)^{2-\mu}}{(\mu - 2)\Gamma(2 - \mu)} - \dots \right] = \\ &= \frac{\mu - 1}{u} + \frac{(\mu - 1)(Tu)^{2-\mu}(2 - \mu)}{u(\mu - 2)(\mu - 1)\Gamma(2 - \mu)} = \frac{\mu - 1}{u} - \frac{T^{2-\mu}}{\Gamma(2 - \mu)}u^{1-\mu} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Per calcolare  $\Pi(t)$ , faccio la trasformata inversa usando

$$\frac{t^q}{\Gamma(q + 1)} \rightarrow \frac{1}{u^{q+1}} \quad (4.48)$$

e ottengo

$$\Pi(t) = \varepsilon \left[ (\mu - 1) - \frac{T^{2-\mu}}{\Gamma(\mu - 1)\Gamma(2 - \mu)} \frac{1}{t^{2-\mu}} \right] \quad (4.49)$$

Come visto nella Sez. 3.3, per  $1 < \mu < 2$   $P(t)$  vale

$$P(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\mu)\Gamma(\mu-1)T^{\mu-1}} \frac{1}{t^{2-\mu}} \quad (4.50)$$

e posso quindi riscrivere la (4.49) come

$$\Pi(t) = \varepsilon(\mu-1) \left[ 1 - \frac{T}{(\mu-1)} P(t) \right] \quad (4.51)$$

#### 4.3.2 $2 < \mu < 3$

Utilizzo ancora la (4.44) e, con passaggi del tutto analoghi al caso precedente, arrivo alla  $\widehat{\Pi}(u)$

$$\frac{d}{du} \widehat{\psi}(u) = -\frac{T}{\mu-2} \left[ 1 + \frac{(\mu-1)\Gamma(2-\mu)(\mu-2)T^{\mu-1}}{T} u^{\mu-2} \right] \quad (4.52)$$

$$\widehat{\psi}(u) - 1 = -\frac{T}{\mu-2} u \left[ 1 + \frac{\Gamma(2-\mu)(\mu-2)T^{\mu-1}}{T} u^{\mu-2} \right] \quad (4.53)$$

$$\frac{\widehat{\psi}'(u)}{\widehat{\psi}(u) - 1} = \frac{1}{u} \left[ 1 + \frac{(\mu-2)\Gamma(2-\mu)(\mu-2)T^{\mu-1}}{T} u^{\mu-2} \right] \quad (4.54)$$

e di qui ottengo la  $\Pi(t)$  (usando sempre la (4.48))

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \varepsilon \left[ 1 - \frac{\Gamma(2-\mu)(\mu-2)^2 T^{\mu-2}}{\Gamma(3-\mu) t^{\mu-2}} \right] \\ &= \varepsilon \left[ 1 - (\mu-2) \frac{T^{\mu-2}}{t^{\mu-2}} \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Poiché in questo caso ho

$$P(t) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \left[ 1 + T^{\mu-2} \frac{1}{t^{\mu-2}} \right], \quad (4.56)$$

la (4.55) diventa

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \varepsilon \left[ 1 + (\mu - 2) - (\mu - 2) \langle \tau \rangle \left( \frac{1}{\langle \tau \rangle} + \frac{T^{\mu-2}}{\langle \tau \rangle} \frac{1}{t^{\mu-2}} \right) \right] = \\ &= \varepsilon(\mu - 1) \left[ 1 - \frac{T}{\mu - 1} P(t) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

che è identica alla (4.51) nonostante la discontinuità in  $\mu = 2$ .

### 4.3.3 Tirando le somme

Quindi passare dalla generalizzazione fenomenologica (Eq. 4.39) a quella dicotomica produce effetti misurabili. Non solo la risposta per  $t \rightarrow \infty$  è proporzionale a  $(1 - \mu)\varepsilon$  invece che a  $\varepsilon$ , ma il lento processo di equilibrio è regolato da  $P(t)$ , proporzionale a  $t^{-|\mu-2|}$ , invece che da  $\Psi(t)$ , proporzionale a  $t^{1-\mu}$ . Come mostrato in [11], l'andamento a  $\mu - 2$  indica il sussistere di processi di rinnovo.

## Capitolo 5

# Applicazione del teorema ai blinking quantum dots

Utilizzare una perturbazione a scalino come supposto nella sezione 4.3 è equivalente ad osservare l'evoluzione temporale di un processo a due stati con due differenti distribuzioni dei tempi di attesa,  $\psi^+(\tau)$  e  $\psi^-(\tau)$ , partendo da una una condizione iniziale con metà particelle nello stato  $|1\rangle$  e metà nello stato  $|2\rangle$ . Questa è la stessa situazione prefigurata dagli autori di [2] quando hanno analizzato l'evoluzione della fluorescenza dei blinking quantum dots. Rispetto al formalismo utilizzato in [2], qui ho scritto  $\Pi(t) = p_1(t) - p_2(t)$ , dove  $p_1(t)(p_2(t))$  è la probabilità che il sistema si trovi nello stato “acceso” (“spento”). Esprimo le trasformate di Laplace di  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$  come

$$\begin{aligned}\widehat{p}_1(u) &= \frac{1 - \widehat{s}^+(u)}{u(1 - \widehat{s}^+(u)\widehat{s}^-(u))} \\ \widehat{p}_2(u) &= \frac{1 - \widehat{s}^-(u)}{u(1 - \widehat{s}^+(u)\widehat{s}^-(u))}\end{aligned}\tag{5.1}$$

dove  $\widehat{s}^+(u)$  e  $\widehat{s}^-(u)$  sono le trasformate di Laplace delle densità di probabilità degli stati “acceso” e “spento” misurati sperimentalmente. Le distribuzioni dei tempi di attesa degli stati  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  dei blinking quantum dots hanno entrambe  $\mu < 2$  anche se con  $\mu$  eventualmente differenti. Sostituisco quindi

$$\begin{aligned}\widehat{s}^+(u) &= 1 - k_+ u^{\mu_1 - 1} \\ \widehat{s}^-(u) &= 1 - k_- u^{\mu_2 - 1}\end{aligned}\tag{5.2}$$

nella (5.1) per ottenere

$$\widehat{p}_1(u) \simeq \frac{k_-}{k_+} u^{\mu_1 - \mu_2 - 1}.\tag{5.3}$$

Poichè intuitivamente l'intensità della luminescenza  $I(t)$  sarà direttamente proporzionale alla probabilità di essere nello stato “acceso”, operando la trasformata inversa della (5.3), ottengo

$$I(t) \propto \frac{1}{t^{\mu_1 - \mu_2}}\tag{5.4}$$

in perfetto accordo con le predizioni di Verberk *et al.* in [2], i quali, a loro volta, sono in accordo con gli esperimenti. Una brusca perturbazione può, infatti, generare un diverso  $\mu$  per i due stati e quindi portare alla (5.4).

Una teoria in cui la perturbazione modifichi  $\mu$  è al di là dello scopo del presente lavoro, in cui ho ipotizzato una perturbazione esterna

sufficientemente debole da modificare solo il parametro  $T \rightarrow T^\pm \equiv T(1 \pm \varepsilon)$ . Ricavo quindi la relazione fra le trasformate di Laplace di  $\psi^\pm(t)$  e  $s^\pm(t)$  inserendo il fatto che non tutti gli eventi generano un cambio di stato:

$$\begin{aligned}\widehat{s}^+(u) &= \frac{\widehat{\psi}^+(u)}{2 - \widehat{\psi}^+(u)} \\ \widehat{s}^-(u) &= \frac{\widehat{\psi}^-(u)}{2 - \widehat{\psi}^-(u)}\end{aligned}\quad (5.5)$$

Il tutto va utilizzato in

$$\widehat{\Pi}(u) = \frac{\widehat{s}^-(u) - \widehat{s}^+(u)}{u [1 - \widehat{s}^+(u)\widehat{s}^-(u)]}.\quad (5.6)$$

Considero poi la già vista approssimazione della  $\widehat{\psi}(u)$  che si ottiene dalla (3.35)

$$\widehat{\psi}^\pm(u) = 1 - \Gamma(2 - \mu) (T^\pm u)^{\mu-1} - \frac{T^\pm u}{2 - \mu}\quad (5.7)$$

e la inserisco nell'Eq. (5.6). Il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  comporta esattamente l'equazione (4.51) il che conferma il teorema di fluttuazione-dissipazione per processi di rinnovo come esposto nel capitolo precedente.

## Capitolo 6

# Appendice

Riporto qui la dimostrazione dettagliata dell'equazione (3.33) ed i relativi calcoli.

Nella sezione 3.3.2 intendo mostrare che, per  $1 < \mu < 2$

$$P(t) \simeq \frac{1}{\Gamma(2 - \mu)\Gamma(\mu - 1)T^{\mu-1}} \frac{1}{t^{2-\mu}} \quad (6.1)$$

mentre per  $2 < \mu < 3$

$$P(t) \simeq \frac{1}{\langle \tau \rangle} \left[ 1 + \left( \frac{T}{t} \right)^{\mu-2} \right]. \quad (6.2)$$

Questo risultato, centrale nel ragionamento sviluppato successivamente nel testo, è conseguito sulla base dall'equazione (3.33) che passo a dimostrare qui in appendice.



Applicando la trasformata di Laplace alla (3.32), cioè a

$$\psi(t) = \frac{(\mu - 1)T^{\mu-1}}{(t + T)^\mu},$$

ottengo

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(u) &\equiv \int_0^\infty e^{-ut}\psi(t)dt = \\ &= (\mu - 1)T^{\mu-1} \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{(t + T)^\mu} dt \end{aligned} \quad (6.3)$$

che riscrivo come segue:

$$\widehat{\psi}(u) = (\mu - 1)T^{\mu-1} e^{uT} \int_T^\infty \frac{e^{-ux}}{x^\mu} dx. \quad (6.4)$$

Utilizzando una tavola di integrali, ad esempio quella in [14], si vede che

$$\int_a^\infty x^{b-1} e^{-cx} dx = \frac{1}{c^b} \Gamma(b, ca) \quad (6.5)$$

dove la  $\Gamma(b, ca)$  è detta funzione gamma incompleta definita da

$$\Gamma(b, ca) \equiv \int_{ca}^\infty t^{b-1} e^{-t} dt. \quad (6.6)$$

Riscrivendo la (6.6) in termini della funzione gamma usuale

$$\Gamma(b) \equiv \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t} dt \quad (6.7)$$

ottengo

$$\Gamma(b, ca) = \Gamma(b) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ca)^{b+n}}{n! (b+n)} \quad (6.8)$$

Inserisco nella (6.8) i valori

$$\begin{aligned} a &= T \\ b &= 1 - \mu \\ c &= u \end{aligned} \quad (6.9)$$

che si ricavano confrontando le equazioni (6.4) e (6.5), per arrivare al risultato

$$\widehat{\psi}(u) = (\mu-1) (uT)^{\mu-1} e^{uT} \left[ \Gamma(1-\mu) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(uT)^{1-\mu+n}}{n! \Gamma(1-\mu+n)} \right]. \quad (6.10)$$

La (6.10) è già sufficiente per ottenere il limite per  $u \rightarrow 0$  che ho usato nel capitolo 3, ma la modifico ulteriormente per ottenerne la forma più compatta dell'Eq. (3.33). In particolare riscrivo il secondo termine della parte destra dell'uguaglianza raccogliendo un fattore  $\Gamma(1-\mu)$  e lo rinomino  $E(uT)$

$$\frac{e^{uT}}{\Gamma(1-\mu)} \left[ - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(uT)^{1-\mu+n}}{n! (1-\mu+n)} \right] = E(uT). \quad (6.11)$$

Eseguo ora lo sviluppo di Taylor e raccolgo i termini di pari espo-

nente:

$$\begin{aligned}
E(uT) &= \left\{ 1 + uT + \frac{(uT)^2}{2} + \dots \right\} \left( -\frac{(uT)^{1-\mu}}{\Gamma(1-\mu)(1-\mu)} \right) \times \\
&\times \left\{ 1 - \frac{1-\mu}{2-\mu}uT + \frac{1-\mu}{2(3-\mu)}(uT)^2 + \dots \right\} = \\
&= -\frac{(uT)^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)} \left\{ 1 + \frac{uT}{2-\mu} + \frac{(uT)^2}{(2-\mu)(3-\mu)} + \dots \right\} = \\
&= -\left\{ \frac{(uT)^{1-\mu}}{\Gamma(2-\mu)} + \frac{(uT)^{2-\mu}}{\Gamma(3-\mu)} + \frac{(uT)^{3-\mu}}{\Gamma(4-\mu)} + \dots \right\} = \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(uT)^{1-\mu+n}}{\Gamma(2-\mu+n)} \equiv E_{\mu-1}^{uT} \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Nell'ultima eguaglianza,  $E_{\mu-1}^{uT}$  è legata alla derivata frazionaria con indice  $1-\mu$  di  $e^{uT}$ . Infatti posso scrivere l' $n$ -esima derivata ordinaria di  $t^m$  (con  $m > n$ ) come

$$\frac{d^n}{dt^n} t^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} t^{m-n} \tag{6.13}$$

che porta alla generalizzazione

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \tag{6.14}$$

Da qui ricavo

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha}{du^\alpha} e^{uT} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^\alpha}{du^\alpha} \frac{(uT)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)T^k}{k!\Gamma(k+1-\alpha)} u^{k-\alpha} \\
&= T^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(uT)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} = T^\alpha E_\alpha^{uT}. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

L'Eq. (6.12) mi dà

$$\widehat{\psi}(u) = (\mu - 1)\Gamma(1 - \mu) (uT)^{\mu-1} [e^{uT} - E_{\mu-1}^{uT}] \quad (6.16)$$

che corrisponde all'equazione (3.33).

## Capitolo 7

# Conclusioni

In questo lavoro ho mostrato come non solo sia possibile una generalizzazione della teoria di risposta lineare al caso non-stazionario, ma che ben due generalizzazioni siano considerabili; e, infine, che delle due, la prescrizione

$$\Pi(t) = \varepsilon \int_0^t \psi(t, t') \xi_p(t') dt' \quad (7.1)$$

è in accordo con i dati sperimentali provenienti dallo studio dei blinking quantum dots. Il significato fisico della (7.1) è evidente considerando l'importanza degli eventi nel considerare il sistema di rinnovo. Al tempo  $t'$  la perturbazione  $\xi_p(t')$  non genera un nuovo evento, ma marca l'inizio del processo di attesa perché un nuovo evento si realizzi al tempo  $t$ . La distribuzione dei tempi di attesa invecchiata  $\psi(t, t')$  è la funzione di risposta lineare, il che mostra come sia proprio il fenomeno di *invecchiamento* di rinnovo a portare al-

la formulazione del teorema di fluttuazione-dissipazione per sistemi con eventi di rinnovo.

La teoria della risposta lineare con rinnovo sta dimostrandosi utile in una vasta gamma di contesti applicativi; recentemente, è stata impiegata in [11] per rappresentare la correlazione fra sottosistemi neurali del cervello biologico.

Dal punto di vista teorico, la mia ricerca potrebbe proseguire generalizzando e potenziando gli strumenti formali adottati; le approssimazioni a cui mi sono dovuto fermare possono essere meglio analizzate ed eventualmente sostituite da una trattazione matematica più aderente.

# Bibliografia

- [1] Y.-J. Jung, E. Barkai, and R.J. Silbey, Chem. Phys. **284**, 181 (2002); I. Chung and M. G. Bawendi, Phys. Rev. B **70**, 165304 (2004); M. Kuno, D. P. Fromm, H. F. Hamann, A. Gallagher, and D. J. Nesbitt, J. Chem. Phys. **115**, 1028 (2001); G. Margolin and E. Barkai, Phys. Rev. Lett. **94**, 080601 (2005)
- [2] R. Verberk, J. W. M. Chon, M. Gu, and M. Orrit, Physica E (Amsterdam) **26**, 19 (2005)
- [3] Y. Jung, E. Barkai, R. J. Silbey, Chem. Phys. **284**, 181 (2002)
- [4] L. Onsager, Phys. Rev. **37**, 405 (1931); **38**, 2265 (1931);
- [5] R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin (1985) p. 37
- [6] P. Allegrini, G. Aquino, P. Grigolini, L. Palatella, A. Rosa, and B. J. West, Phys. Rev. E **71** 066109 (2005)

- [7] S. Bianco, P. Grigolini, P. Paradisi, *J. Chem. Phys.* **123**, 174704 (2005)
- [8] E. Daly and A. Porporato, *Phys. Rev. E* **74**, 041112 (2006)
- [9] P. Allegrini, P. Grigolini, and B. J. West, *Non-ergodic and renewal events as generators of a new fluctuation-dissipation theorem*, in pubblicazione
- [10] A. Crisanti and F. Ritort, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, R181-R290 (2003)
- [11] S. Bianco, M. Ignaccolo, M. S. Rider, M. J. Ross, P. Winsor and P. Grigolini, *Phys. Rev. E* **75**, 061911
- [12] P. Allegrini, M. Bologna, P. Grigolini, and B. West, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 010603 (2007)
- [13] P. Allegrini, G. D'Aquino, P. Grigolini, L. Palatella, A. Rosa, *Phys. Rev. E* **68**, 056123 (2003)
- [14] I.S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, Series and Products*, Academic Press, San Diego (1994)