

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA



TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

Orbite preliminari di asteroidi e satelliti artificiali

CANDIDATO
Davide Farnocchia

RELATORE
Prof. Andrea Milani

CONTRORELATORE
Dott. Giovanni F. Gronchi

ANNO ACCADEMICO 2007/2008

Indice

Introduzione	1
1 Metodi a tre osservazioni	3
1.1 Teoria Classica	3
1.1.1 Metodo di Laplace	3
1.1.2 Teoria di Charlier	6
1.1.3 Metodo di Gauss	9
1.1.4 Equivalenza tra i due metodi	11
1.2 Metodi di Laplace e Gauss topocentrici	13
1.2.1 Metodo di Laplace con osservazioni topocentriche	13
1.2.2 Metodo di Gauss con osservazioni topocentriche	15
1.2.3 Equivalenza tra i due metodi nel caso topocentrico	15
1.2.4 Problemi nel metodo di Laplace topocentrico	16
1.3 Teoria qualitativa generalizzata	16
1.3.1 Problema dell'intersezione	17
1.3.2 Topologia delle curve di livello di $C(x, y)$	18
1.3.3 Curva singolare	20
1.3.4 Parità del numero di soluzioni	23
1.3.5 Curva limitante	24
1.3.6 Numero di soluzioni	25
1.3.7 Esempio con più soluzioni	27
1.4 Satelliti terrestri	27
2 Regione ammissibile	29
2.1 Asteroidi	29
2.1.1 Regione ammissibile	30
2.1.2 Bordo inferiore	42
2.1.3 Campionamento della regione ammissibile	45
2.1.4 Effemeridi triangolate	52
2.2 Detriti spaziali	53
2.2.1 Regione ammissibile nel caso ottico	53

2.2.2	Regione ammissibile nel caso radar	62
3	Metodo degli integrali primi	69
3.1	Il problema dell'identificazione	69
3.1.1	Identificazione dell'orbita	69
3.1.2	Attribuzione	70
3.1.3	Recupero	70
3.1.4	Collegamento	71
3.2	Metodo degli integrali primi	71
3.2.1	Caso ottico	72
3.2.2	Caso radar	76
3.2.3	Scelta delle soluzioni	79
3.2.4	Modello con precessione	81
	Bibliografia	87
	Ringraziamenti	89

Introduzione

In questa tesi vengono analizzate diverse tecniche, sia classiche che recenti, di determinazione orbitale. Lo scopo di questi algoritmi è quello di produrre orbite preliminari, sulle quali verranno successivamente applicate le correzioni differenziali ed eseguiti controlli di qualità per stabilire se siano o meno accettabili. Si affrontano in parallelo i casi degli asteroidi e dei satelliti terrestri, con particolare attenzione ai detriti spaziali. Le tecniche descritte sono state applicate con successo negli ultimi anni agli asteroidi e verranno proposte per i futuri surveys di detriti spaziali.

Nel primo capitolo si studiano i metodi di Laplace e Gauss. Tali metodi permettono, sotto opportune condizioni, di costruire un'orbita a partire da almeno tre osservazioni. Oltre alla teoria classica vengono presentati i più recenti risultati descritti in [3] e [11]. In dettaglio:

- si dimostra, ad un opportuno livello di approssimazione, l'equivalenza tra i metodi di Laplace e Gauss, fatto in verità già noto ma di cui non abbiamo trovato una dimostrazione in letteratura;
- si modificano i due algoritmi considerando la posizione geocentrica dell'osservatore, che nella teoria classica viene assunta coincidente col centro della Terra;
- la teoria di Charlier, che permette di determinare il numero di soluzioni del metodo di Laplace, viene generalizzata al caso topocentrico, modificando le conclusioni sul numero di soluzioni.

Nel secondo capitolo viene presentata la teoria della regione ammissibile. Si definisce il concetto di attribuibile (che può essere di tipo ottico o radar), ovvero l'oggetto matematico che descrive i dati forniti da un'osservazione e si cerca di capire come sfruttare le informazioni a disposizione (non sufficienti per determinare un'orbita). In particolare si impone la condizione per cui l'orbita dell'oggetto osservato sia chiusa. Per la parte relativa agli asteroidi si è fatto riferimento a [1], mentre per quanto riguarda i detriti spaziali, oltre ai risultati già noti descritti in [16], viene introdotta una condizione sul

pericentro (traducibile in un'equazione algebrica), che permette di separare i satelliti artificiali dai missili.

Nel terzo ed ultimo capitolo si analizza il nuovo metodo degli integrali primi, con il quale si tenta di risolvere il problema delle identificazioni. Assegnati due attribuibili si cerca di capire se è possibile collegarli tra loro per produrre un'orbita. Per questo si impongono le conservazioni di energia e momento angolare, da cui si ricavano delle equazioni algebriche, di grado piuttosto alto nel caso ottico [19] ed estremamente basso nel caso radar. Risolvendo tali equazioni ed utilizzando opportuni criteri di scelta per le soluzioni, si possono costruire delle orbite preliminari. Infine, proponiamo un nuovo modello che tiene conto della mancata simmetria sferica della Terra. In tale circostanza devono essere modificate le condizioni su energia e momento angolare e, linearizzando una delle equazioni, si giunge ad espressioni algebriche, che possono essere trattate in modo sistematico con gli strumenti della geometria algebrica.

Capitolo 1

Metodi a tre osservazioni

In questo capitolo si affronta il problema della determinazione di un'orbita a partire da tre osservazioni. I metodi analizzati che permettono di risolvere questo problema sono due:

- metodo di Laplace;
- metodo di Gauss.

Tali algoritmi vengono prima descritti da un punto di vista classico e in seguito rivisti, introducendo le osservazioni topocentriche.

1.1 Teoria Classica

In questa sezione analizziamo la teoria classica. Partendo, come premesso, da tre osservazioni geocentriche, i metodi di Laplace e Gauss sono algoritmi che permettono di costruire delle candidate orbite per l'asteroide osservato. Grazie alla teoria qualitativa di Charlier è possibile determinare il numero di soluzioni fornite dal metodo di Laplace. Infine si dimostra che i due metodi presi in esame sono tra loro equivalenti.

1.1.1 Metodo di Laplace

Un'osservazione definisce un versore $\hat{\rho} = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta)$, dove (α, δ) sono ascensione retta e declinazione, due angoli che individuano la proiezione dell'oggetto sulla sfera celeste. Dalla geometria del problema si ha che la posizione eliocentrica dell'asteroide è

$$\mathbf{r} = \rho + \mathbf{q} = \rho \hat{\rho} + q \hat{\mathbf{q}} \quad (1.1)$$

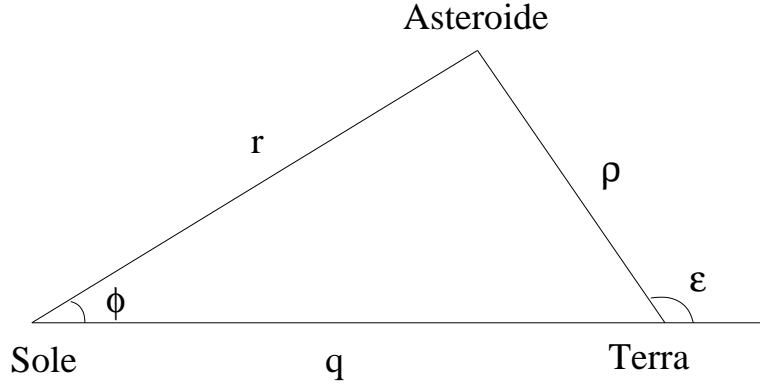


Figura 1.1: Configurazione geometrica di Sole, Terra e asteroide.

dove \mathbf{q} rappresenta la posizione del centro della Terra rispetto al Sole¹.

Interpolando a partire dalle tre osservazioni vengono approssimate con una curva di secondo grado le funzioni $\alpha(t)$ e $\delta(t)$, e di conseguenza $\hat{\boldsymbol{\rho}}(t)$. Siano s la lunghezza d'arco e η il moto proprio:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \eta = \sqrt{\dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2}, \\ \frac{d}{ds} &= \frac{1}{\eta} \frac{d}{dt}.\end{aligned}$$

Usiamo il sistema di riferimento ortogonale $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$, dove

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{ds}, \\ \hat{\mathbf{n}} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\mathbf{v}},\end{aligned}$$

e definiamo la curvatura geodetica κ dall'equazione

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} = -\hat{\boldsymbol{\rho}} + \kappa \hat{\mathbf{n}}$$

dove la componente lungo $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ è calcolata grazie alla seguente relazione:

$$0 = \frac{d}{ds}(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} = 1 + \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds}.$$

Pertanto l'accelerazione relativa è

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho \eta^2) \hat{\boldsymbol{\rho}} + (\rho \dot{\eta} + 2 \dot{\rho} \eta) \hat{\mathbf{v}} + (\rho \eta^2 \kappa) \hat{\mathbf{n}} \quad (1.2)$$

¹Il fatto che la velocità della luce sia finita viene tenuto in considerazione valutando la posizione dell'oggetto all'istante $t - \rho/c$.

e l'equazione differenziale del moto relativo, trascurando l'effetto del campo gravitazionale che la Terra esercita sul Sole, le perturbazioni di natura non gravitazionale e quelle dovute all'attrazione degli altri pianeti, è

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mu \mathbf{q}}{q^3} - \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.3)$$

dove $\mu = GM_{\odot}^2$. Moltiplicando (1.2) e (1.3) scalarmente per $\hat{\mathbf{n}}$ si ottiene

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho \eta^2 \kappa = \mu q \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

che possiamo riscrivere così:

$$C \frac{\rho}{q} = 1 - \frac{q^3}{r^3} \quad (1.4)$$

dove

$$C = \frac{\eta^2 \kappa q^3}{\mu \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}.$$

Questa, in letteratura, viene chiamata equazione dinamica³. C è una quantità adimensionale che può essere 0 quando $r = q$ oppure indeterminata, nel caso in cui l'approssimazione fatta interpolando fallisca (quando c'è un punto di inversione con tangente diretta verso il Sole).

Analizzando la Figura 1.1 si ricava la seguente condizione geometrica:

$$r^2 = \rho^2 + 2\rho q \cos \varepsilon + q^2 \quad (1.5)$$

dove ε è fissato dalla direzione di osservazione. Se $C = 0$ allora si ha che $r = q$. Altrimenti ricavando ρ da (1.4) e sostituendo in (1.5) si ottiene l'equazione polinomiale

$$P(r) = C^2 r^8 - q^2(1 + 2C \cos \varepsilon + C^2)r^6 + 2q^5(1 + C \cos \varepsilon)r^3 - q^8 = 0. \quad (1.6)$$

Una volta calcolati r e ρ da (1.4) e (1.6) è possibile ricavare $\dot{\rho}$ moltiplicando (1.2) e (1.3) scalarmente per $\hat{\mathbf{v}}$

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} \cdot \hat{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{r^3} + \mu \frac{\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{q^3} = \rho \dot{\eta} + 2\dot{\rho} \eta. \quad (1.7)$$

Infine, per completare il calcolo delle condizioni iniziali, deriviamo (1.1):

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{q}} = \eta \rho \hat{\mathbf{v}} + \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{q}}.$$

²Il pedice \odot si usa per indicare il Sole.

³In effetti è solo la componente lungo $\hat{\mathbf{n}}$ dell'equazione dinamica.

1.1.2 Teoria di Charlier

La teoria di Charlier (descritta in [4]) è un'analisi qualitativa sul numero di radici di (1.6).

Si parte dall'assunzione che ci sia sempre una soluzione, ovvero che l'oggetto osservato esista e che il valore di C sia non nullo e misurato con buona precisione. Nella pratica, però, ci sono le false identificazioni (quindi l'oggetto potrebbe non esistere) e κ (proporzionale a C) potrebbe non essere ben misurata⁴ (in particolare potrebbe essere sbagliato il suo segno).

Il segno dei coefficienti di $P(r)$ è noto:

- $C^2 > 0$
- $-q^2(1 + 2C \cos \varepsilon + C^2) < -q^2(1 - C)^2 < 0$ ⁵
- $2q^5(1 + C \cos \varepsilon) > 0$
- $-q^8 < 0$

La positività del coefficiente di r^3 non è ovvia. Da (1.4) e (1.5) si ricava che

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{\rho} \left(1 - \frac{q^3}{r^3} \right), \\ 2 \cos \varepsilon &= \frac{r^2 - q^2 - \rho^2}{q\rho}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

quindi

$$2C \cos \varepsilon + 2 = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{r^3 - q^3}{r^3} \right) (r^2 - q^2) + \left(1 + \frac{q^3}{r^3} \right) > 0.$$

Applicando la regola di Cartesio sui segni dei coefficienti a $P(r)$ e $P(-r)$ si ottiene che si hanno al più tre radici positive e una negativa. Ma una radice negativa c'è sicuramente, infatti $P(0) < 0$ e $\lim_{r \rightarrow -\infty} P(r) = +\infty$. Inoltre $P(q) = 0$. La soluzione $r = q$ corrisponde a $\rho = 0$, quindi non è quella cercata (l'asteroide infatti si troverebbe nel centro della Terra). Pertanto le radici complesse coniugate sono quattro o sei. Se fossero sei non avremmo altre soluzioni reali positive e mancherebbe dunque quella relativa al corpo osservato. Di conseguenza sono quattro e ci sono altre due radici reali positive.

⁴Questo accade spesso quando le osservazioni non sono tra loro ben spaziate.

⁵Tale quantità può essere nulla se $C = 1$ e $\varepsilon = \pi$, ma questo significherebbe osservare verso il Sole.

Estraendo il fattore $(r - q)$ da P si ottiene

$$\begin{aligned} P(r) &= (r - q)P_1(r), \\ P_1(0) &= q^7, \\ P_1(q) &= q^7 C(C - 3 \cos \varepsilon). \end{aligned}$$

Il numero di soluzioni di (1.6) cambia col segno di $P_1(q)$. Infatti se $P_1(q) < 0$

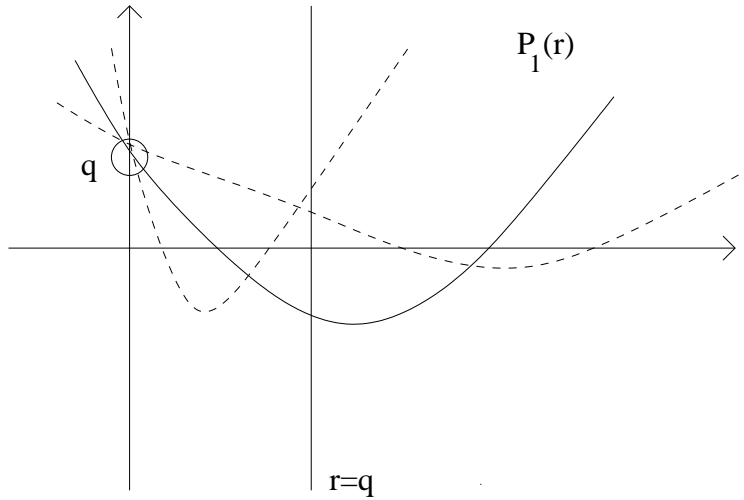


Figura 1.2: Con la linea continua si descrive il caso in cui $P_1(q) < 0$, con quella tratteggiata quello in cui $P_1(q) > 0$.

c'è una soluzione in $]0, q[$ e un'altra in $]q, +\infty[$. Grazie a (1.4) e alla conoscenza del segno di C siamo in grado di scartarne una. Se, invece, $P_1(q) > 0$ le radici si trovano entrambe dalla stessa parte rispetto a q e dobbiamo prenderle tutte e due in considerazione. $P_1(q)$ cambia segno quando $C = 0$ ($r = q$) o $C - 3 \cos \varepsilon = 0$. Quest'ultima equazione definisce la curva limitante, che nelle coordinate eliocentriche (r, ϕ) si scrive, usando la relazione $\rho^2 = r^2 + q^2 - 2rq \cos \phi$, in questo modo:

$$4 - 3 \frac{r}{q} \cos \phi = \frac{q^3}{r^3}.$$

Il numero di soluzioni può essere compreso con l'aiuto dei grafici delle curve di livello $C(r, \rho)$ nel piano contenente il Sole in $(0, 0)$, la Terra in $(q, 0)$ e con la posizione del corpo osservato definita da (r, ρ) .

Descriviamo il comportamento di tali curve:

- Se $C = 0$ abbiamo quello che viene chiamato cerchio zero.

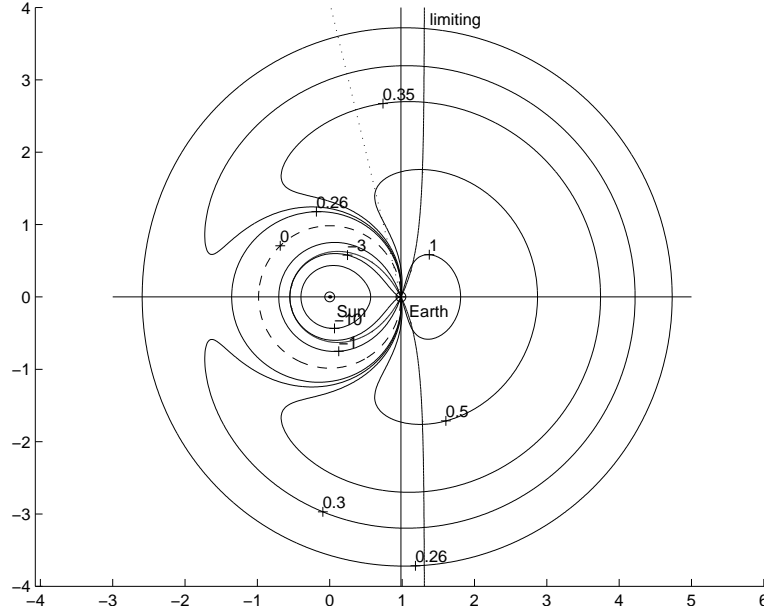


Figura 1.3: Curve di livello di $C(r, \rho)$ (linee continue), cerchio zero (tratteggiato) e curva limitante (etichettata). Per un valore assegnato di C e una direzione di osservazione (punteggiata) si possono avere una o due soluzioni.

- Se $C < 0$ allora $r < q$, quindi ci troviamo all'interno del cerchio zero. Per $C \rightarrow -\infty$ si ha che $r \rightarrow 0$ oppure $\rho \rightarrow 0$. Quest'ultimo caso non è possibile; supponiamo infatti che $\rho \rightarrow 0$: allora da (1.5) si ha che

$$r^2 \simeq q^2 + 2q\rho \cos \varepsilon, \quad r \simeq q + \rho \cos \varepsilon, \quad \frac{r - q}{\rho} \simeq \cos \varepsilon.$$

A questo punto basta riscrivere (1.8) in questo modo:

$$C = \frac{q(r^2 + 2rq + q^2)}{r^2} \frac{r - q}{\rho}. \quad (1.9)$$

La (1.9) è un'uguaglianza tra una quantità illimitata ed una limitata: ciò è assurdo. Quindi per $C \rightarrow -\infty$ abbiamo che $r \rightarrow 0$.

- Se $C > 0$ allora $r > q$, quindi ci troviamo fuori dal cerchio zero. Riscrivendo (1.9)

$$C = \left(\frac{q}{r} + \frac{q^2}{r^2} + \frac{q^3}{r^3} \right) \frac{r - q}{\rho}$$

si ottiene che C è limitata superiormente.

La curva limitante e il cerchio zero possono essere usate per dedurre il numero di soluzioni per la scoperta di un oggetto in qualsiasi posizione del piano, come descritto dalla Figura 1.10.

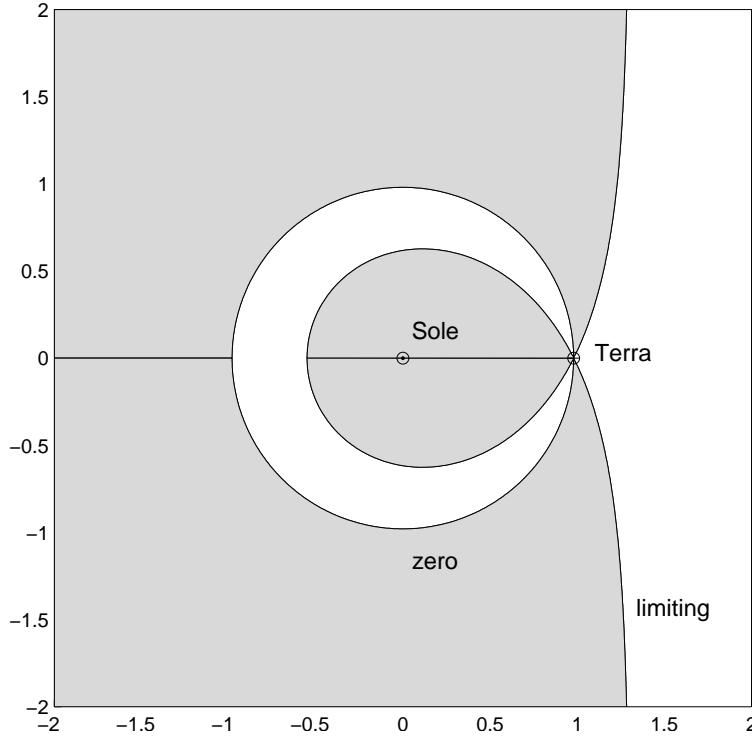


Figura 1.4: Per i punti nella zona bianca c'è una sola soluzione; nella regione colorata di grigio ce ne sono due.

1.1.3 Metodo di Gauss

Consideriamo le posizioni eliocentriche del corpo osservato

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{q}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.10)$$

agli istanti di osservazione $t_1 < t_2 < t_3$ con $t_{ij} = t_i - t_j = O(\Delta t) \ll$ periodo di rivoluzione del corpo. Imponendo la condizione di complanarità tra gli \mathbf{r}_i si ha, per opportuni coefficienti λ_1 e λ_3 , che

$$\lambda_1 \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \lambda_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{0}. \quad (1.11)$$

Da (1.11) $\times \mathbf{r}_i \cdot \hat{\mathbf{c}}$, con $\mathbf{c} = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$ si ricavano le espressioni:

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 \cdot \hat{\mathbf{c}}}{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 \cdot \hat{\mathbf{c}}}, \quad \lambda_3 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \cdot \hat{\mathbf{c}}}{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 \cdot \hat{\mathbf{c}}}.$$

Sia λ_1 che λ_3 sono positivi, dato che $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3$ e $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$ sono tra loro concordi. Da (1.10) e $\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot (1.11)$ si ha che

$$\rho_2 (\hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_2) = \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot (\lambda_1 \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 + \lambda_3 \mathbf{q}_3). \quad (1.12)$$

Usiamo il formalismo delle serie f e g , scrivendo \mathbf{r}_i come combinazione lineare di \mathbf{r}_2 e $\dot{\mathbf{r}}_2$:

$$\mathbf{r}_i = f_i \mathbf{r}_2 + g_i \dot{\mathbf{r}}_2 . \quad (1.13)$$

Facendo uno sviluppo di Taylor per \mathbf{r}_i attorno a \mathbf{r}_2 è immediato vedere che:

$$f_i = 1 - \frac{\mu t_{i2}^2}{2 r_2^3} + O(\Delta t^3) , \quad g_i = t_{i2} \left(1 - \frac{\mu t_{31}^2}{6 r_2^3} \right) + O(\Delta t^4). \quad (1.14)$$

Quindi $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_2 = -g_i \mathbf{c}$, $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 = (f_1 g_3 - f_3 g_1) \mathbf{c}$ e

$$\lambda_1 = \frac{g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1} , \quad (1.15)$$

$$\lambda_3 = \frac{-g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1} , \quad (1.16)$$

$$f_1 g_3 - f_3 g_1 = t_{31} \left(1 - \frac{\mu t_{31}^2}{6 r_2^3} \right) + O(\Delta t^4) . \quad (1.17)$$

Usando (1.14) e (1.17) in (1.15) e (1.16) si ottiene che

$$\lambda_1 = \frac{t_{32}}{t_{31}} \left[1 + \frac{\mu}{6 r_2^3} (t_{31}^2 - t_{32}^2) \right] + O(\Delta t^3) , \quad (1.18)$$

$$\lambda_3 = \frac{t_{21}}{t_{31}} \left[1 + \frac{\mu}{6 r_2^3} (t_{31}^2 - t_{21}^2) \right] + O(\Delta t^3) . \quad (1.19)$$

Sostituendo $V = \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_2$, (1.18) e (1.19) in (1.12), con alcune semplici manipolazioni sugli intervalli di tempo⁶ si ricava che

$$\begin{aligned} -V \rho_2 t_{31} &= \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot (t_{32} \mathbf{q}_1 - t_{31} \mathbf{q}_2 + t_{21} \mathbf{q}_3) + \\ &+ \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \left[\frac{\mu}{6 r_2^3} [t_{32} t_{21} (t_{31} + t_{32}) \mathbf{q}_1 + t_{32} t_{21} (t_{31} + t_{21}) \mathbf{q}_3] \right] + O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

Trascurando i termini di ordine Δt^4 il tutto può essere riscritto così:

$$- \frac{V \rho_2 t_{31}}{B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)} q_2^3 = \frac{q_2^3}{r_2^3} + \frac{A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)} \quad (1.20)$$

dove

$$A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = q_2^3 \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot (t_{32} \mathbf{q}_1 - t_{31} \mathbf{q}_2 + t_{21} \mathbf{q}_3) , \quad (1.21)$$

$$B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) = \frac{\mu}{6} t_{32} t_{21} \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot [(t_{31} + t_{32}) \mathbf{q}_1 + (t_{31} + t_{21}) \mathbf{q}_3] . \quad (1.22)$$

⁶ $t_{31}^2 - t_{32}^2 = t_{21}(t_{31} + t_{32})$ e $t_{31}^2 - t_{21}^2 = t_{32}(t_{31} + t_{21})$.

Siano

$$C_0 = \frac{V t_{31} q_2^4}{B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)}, \quad h_0 = -\frac{A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)},$$

dunque la (1.20) diventa

$$C_0 \frac{\rho_2}{q_2} = h_0 - \frac{q_2^3}{r_2^3}, \quad (1.23)$$

che è l'equazione dinamica per il metodo di Gauss. Quest'ultima è simile, ma non identica, a quella del metodo di Laplace. Usando (1.5) all'istante t_2 (con q_2, ρ_2, r_2 e ε_2) otteniamo, anche in questo caso, un'equazione polinomiale di grado otto:

$$\begin{aligned} P_0(r) = C_0^2 r_2^8 - q_2^2 (h_0^2 + 2C_0 h_0 \cos \varepsilon_2 + C_0^2) r_2^6 + \\ + 2q_2^5 (h_0 + C_0 \cos \varepsilon_2) r_2^3 - q_2^8 = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

dove il segno dei coefficienti è lo stesso del metodo di Laplace tranne che per quello di r_2^3 , dove c'è la dipendenza da h_0 . Da notare che $P(q) \neq 0$ e che non si possono trovare radici per via analitica. Una teoria qualitativa generale, che valga anche per il metodo di Gauss, verrà illustrata nella sezione 1.3.

Una volta ricavato il valore di r_2 , per completare l'insieme delle condizioni iniziali procediamo nel seguente modo⁷:

- Da (1.10) e $\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3 \cdot (1.11)$ si ottiene

$$\lambda_1 \rho_1 \hat{\rho}_1 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3) = (\mathbf{q}_2 - \lambda_1 \mathbf{q}_1 - \lambda_3 \mathbf{q}_3) \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3)$$

che ci permette di ricavare ρ_1 (e quindi anche \mathbf{r}_1).

- Usando (1.13) con $i = 1$ ricaviamo $\dot{\mathbf{r}}_2$.

1.1.4 Equivalenza tra i due metodi

Per confrontare direttamente i due metodi introduciamo in quello di Gauss la stessa approssimazione di ordine $O(\Delta t^2)$ per il moto della Terra. Le serie f, g per la Terra si ricavano dallo sviluppo:

$$\mathbf{q}_i = \left(1 - \frac{\mu t_{i2}^2}{2 q_2^3}\right) \mathbf{q}_2 + t_{i2} \dot{\mathbf{q}}_2 + \frac{\mu t_{i2}^3}{6 q_2^3} \left[\frac{3(\mathbf{q}_2 \cdot \dot{\mathbf{q}}_2) \mathbf{q}_2}{q_2^2} - \dot{\mathbf{q}}_2 \right] + O(\Delta t^4). \quad (1.25)$$

Sostituendo in (1.22) si ha:

$$B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) = \frac{\mu}{6} t_{32} t_{21} \hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_3 \cdot [3t_{31} \mathbf{q}_2 + t_{31} (t_{32} - t_{21}) \dot{\mathbf{q}}_2 + O(\Delta t^3)].$$

⁷Tale metodo è descritto in [6]

Se $t_{32} - t_{21} = t_3 + t_1 - 2t_2 = 0$, ovvero se t_2 coincide con la media dei tempi, allora

$$B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) = \frac{\mu}{6} t_{32} t_{21} t_{31} \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \mathbf{q}_2 (1 + O(\Delta t^2));$$

altrimenti l'ultimo fattore è $(1 + O(\Delta t))$. Sostituendo (1.25) in (1.21)

$$A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = -\frac{\mu}{2} t_{21} t_{32} t_{31} \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \left\{ \mathbf{q}_2 + (t_{21} - t_{32}) \left[\frac{(\mathbf{q}_2 \cdot \dot{\mathbf{q}}_2) \mathbf{q}_2}{q_2^2} - \frac{\dot{\mathbf{q}}_2}{3} \right] \right\} + O(\Delta t^5).$$

Se, come prima, $t_{32} - t_{21} = t_3 + t_1 - 2t_2 = 0$, allora

$$A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = -\frac{\mu}{2} t_{21} t_{32} t_{31} \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \mathbf{q}_2 (1 + O(\Delta t^2))$$

e possiamo concludere che

$$h_0 = -\frac{A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3)} = 1 + O(\Delta t^2).$$

Se, invece, $t_3 + t_1 - 2t_2 \neq 0$ allora l'ultimo termine è $(1 + O(\Delta t))$. Abbiamo bisogno di

$$\frac{d^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt^2} = \frac{d \dot{\hat{\boldsymbol{\rho}}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\eta \dot{\mathbf{v}}) = -\eta^2 \hat{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\eta} \dot{\mathbf{v}} + \kappa \eta^2 \hat{\mathbf{n}} \quad (1.26)$$

per poter fare il seguente sviluppo di Taylor di $\hat{\boldsymbol{\rho}}_i$ in t_2 :

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_i = \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 + t_{i2} \eta_2 \dot{\mathbf{v}}_2 + \frac{t_{i2}^2}{2} (-\eta_2^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 + \dot{\eta}_2 \dot{\mathbf{v}}_2 + \kappa_2 \eta_2^2 \hat{\mathbf{n}}_2).$$

Questo implica che

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} [(t_{12} \eta_2 \dot{\mathbf{v}}_2) \times (t_{32}^2 \kappa_2 \eta_2^2 \hat{\mathbf{n}}_2) - (t_{32} \eta_2 \dot{\mathbf{v}}_2) \times (t_{21}^2 \kappa_2 \eta_2^2 \hat{\mathbf{n}}_2)] \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_2 + \\ &+ O(\Delta t^5) = -\frac{\kappa_2 \eta_2^3}{2} (t_{12} t_{32}^2 - t_{32} t_{21}^2) (1 + O(\Delta t^2)) = \\ &= \frac{\kappa_2 \eta_2^3}{2} t_{21} t_{32} t_{31} (1 + O(\Delta t^2)). \end{aligned}$$

Se $t_3 + t_1 - 2t_2 \neq 0$ allora l'ultimo termine è $(1 + O(\Delta t))$. A questo punto possiamo calcolare

$$C_0 = \frac{P t_{31} q_2^4}{B} = \frac{\kappa_2 \eta_2^3 t_{31} q_2^4 + O(\Delta t^3)}{\mu \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_3 \cdot \mathbf{q}_2 (1 + O(\Delta t))}.$$

Il denominatore $\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_3$ valutato fino al secondo ordine è

$$\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_3 = t_{31} \eta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 + \frac{t_{32}^2 - t_{21}^2}{2} (\dot{\eta}_2 \hat{\mathbf{n}}_2 - \kappa_2 \eta_2^2 \hat{\mathbf{v}}_2) + O(\Delta t^3). \quad (1.27)$$

Se $t_{32} - t_{21} = t_3 + t_1 - 2t_2 = 0$ allora

$$C_0 = \frac{\kappa_2 \eta_2^3 t_{31} q_2^4 + O(\Delta t^3)}{\mu t_{31} \eta_2 q_2 \hat{\mathbf{q}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 + O(\Delta t^3)} = \frac{\kappa_2 \eta_2^2 q_2^3}{\mu \hat{\mathbf{q}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2} (1 + O(\Delta t^2))$$

altrimenti l'ultimo fattore è $(1 + O(\Delta t))$.

Possiamo concludere che le equazioni dinamiche (1.4) e (1.23) sono le stesse all'ordine 0 in Δt , in particolare lo sono all'ordine uno se t_2 è la media dei tempi di osservazione.

1.2 Metodi di Laplace e Gauss topocentrici

In questa sezione si vuole vedere cosa succede ai metodi di Laplace e Gauss (descritti in precedenza), togliendo l'approssimazione per la quale l'osservatore si trova al centro della Terra. Il metodo di Laplace necessita di una opportuna revisione mentre quello di Gauss rimane praticamente inalterato. I due algoritmi vengono nuovamente confrontati sotto questo nuovo punto di vista.

1.2.1 Metodo di Laplace con osservazioni topocentriche

Indichiamo con \mathbf{q}_\oplus ⁸ la posizione eliocentrica dal baricentro terrestre e con \mathbf{P} la posizione dell'osservatore rispetto al centro della Terra. Dalla geometria del problema si ha:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_\oplus + \mathbf{P}.$$

L'accelerazione relativa tra osservatore e corpo osservato è

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mu \mathbf{q}_\oplus}{q_\oplus^3} - \ddot{\mathbf{P}}.$$

Moltiplicando scalarmente per $\hat{\mathbf{n}}$ e usando (1.2) si ottiene che

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho \eta^2 \kappa = \mu \left[q_\oplus \frac{\hat{\mathbf{q}}_\oplus \cdot \hat{\mathbf{n}}}{q_\oplus^3} - q_\oplus \frac{\hat{\mathbf{q}}_\oplus \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r^3} - P \frac{\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r^3} \right] - \ddot{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

⁸Il pedice \oplus si usa per indicare la Terra.

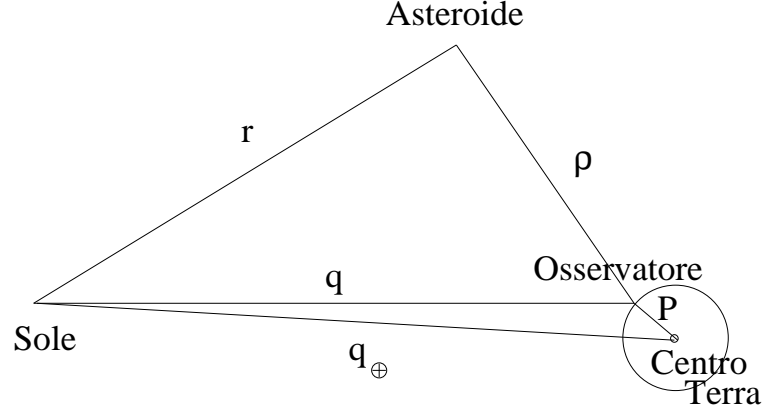


Figura 1.5: Configurazione geometrica di Sole, Terra, osservatore e asteroide.

Il termine $P \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}/r^3$ può essere trascurato. Tale approssimazione è legittima perché $P/q_{\oplus} \leq 4.3 \times 10^{-5}$ ed il termine trascurato è più piccolo delle perturbazioni dovute all'attrazione gravitazionale degli altri pianeti.

Si ottiene quindi l'equazione dinamica, analoga a (1.4):

$$C \frac{\rho}{q_{\oplus}} = (1 - \Lambda_n) - \frac{q_{\oplus}^3}{r^3} \quad (1.28)$$

dove

$$C = \frac{\eta^2 \kappa q_{\oplus}^3}{\mu \hat{\mathbf{q}}_{\oplus} \cdot \hat{\mathbf{n}}},$$

$$\Lambda_n = \frac{q_{\oplus}^2 \ddot{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mu \hat{\mathbf{q}}_{\oplus} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \frac{\ddot{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{(\mu/q_{\oplus}^2) \hat{\mathbf{q}}_{\oplus} \cdot \hat{\mathbf{n}}}.$$

Da notare che Λ_n è singolare dove lo è C . L'analogo dell'equazione (1.7), trascurando ancora i termini di ordine $O(P/q_{\oplus})$, è

$$\rho \dot{\eta} + 2 \dot{\rho} \eta = \frac{\mu \hat{\mathbf{q}}_{\oplus} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{q_{\oplus}^2} \left(1 - \Lambda_v - \frac{q_{\oplus}^3}{r^3} \right)$$

dove

$$\Lambda_v = \frac{q_{\oplus}^2 \ddot{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{v}}}{\mu \hat{\mathbf{q}}_{\oplus} \cdot \hat{\mathbf{v}}}.$$

L'aspetto cruciale è che Λ_n e Λ_v non sono per niente piccoli. L'accelerazione centripeta dell'osservatore dovuta alla rotazione della Terra è $\Omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos \theta$, dove Ω_{\oplus} è la velocità angolare terrestre, R_{\oplus} il raggio medio della Terra e θ la latitudine; all'equatore tale quantità è $\simeq 3.4 \text{ cm s}^{-2}$. La

quantità μ/q_{\oplus}^2 al denominatore in Λ_n è $\simeq 0.6 \text{ cm s}^{-2}$. Pertanto $|\Lambda_n|$ può essere > 1 e il coefficiente $1 - \Lambda_n$ molto diverso da 1 (in particolare potrebbe essere negativo). Questo ci porta alla conclusione che il metodo classico di Laplace non costituisce una buona approssimazione nel caso generale⁹.

1.2.2 Metodo di Gauss con osservazioni topocentriche

Il metodo di Gauss tiene conto delle osservazioni topocentriche in modo naturale. È infatti sufficiente sostituire a \mathbf{q}_i , che prima rappresentava la posizione eliocentrica del centro della Terra all'istante t_i , la posizione eliocentrica dell'osservatore. Il motivo è che nel metodo di Gauss non viene mai usato lo sviluppo di $\mathbf{q}(t)$, ma solamente la valutazione esatta di questa funzione nei tre istanti di osservazione, e di conseguenza non appare l'equazione di moto

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\mu \mathbf{q}}{q^3} + \ddot{\mathbf{P}}$$

dove la posizione topocentrica dell'osservatore gioca un ruolo fondamentale.

1.2.3 Equivalenza tra i due metodi nel caso topocentrico

Procediamo come nella sottosezione 1.1.4, sviluppando $\mathbf{q}_i(t)$ con Taylor

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_2 + t_{i2} \dot{\mathbf{q}}_2 + \frac{t_{i2}^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_2 + O(\Delta t^3)$$

dove stavolta $\mathbf{q}_2(t)$ e le sue derivate contengono $\mathbf{P}(t)$. Usando (1.27) e assumendo $t_{21} = t_{32}$ le equazioni (1.21) e (1.22) diventano rispettivamente

$$A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \frac{\eta_2 q_2^3}{2} t_{31}^2 t_{21} t_{32} \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{q}}_2 + O(\Delta t^6),$$

$$B(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3) = \frac{\mu \eta_2}{2} t_{31}^2 t_{21} t_{32} \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{q}_2 + O(\Delta t^6).$$

Notiamo che $\dot{\mathbf{q}}_2$ non appare a questo livello di approssimazione. Otteniamo

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{A}{B} = -\frac{q_2^3 \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{q}}_2 + O(\Delta t^2)}{\mu \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{q}_2 + O(\Delta t^2)} = \\ &= -\frac{q_2^3 \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{q}}_{\oplus 2}}{\mu \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{q}_2} - \frac{q_2^3 \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{P}}_2}{\mu \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{q}_2} + O(\Delta t^2) = \\ &= \frac{q_2^3}{q_{\oplus 2}} - \frac{q_2^3 \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{P}}_2}{\mu \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{q}_2} + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

⁹Nel caso in cui le osservazioni vengono effettuate dalla stessa stazione allo stesso tempo sidereo, allora la correzione dovuta alle osservazioni topocentriche si cancella. In tal caso il metodo di Laplace classico funziona bene.

Infine

$$\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{q}_2 = q_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \left(\frac{\mathbf{q}_{\oplus 2}}{q_2} + \frac{\mathbf{P}_2}{q_2} \right) = q_2 \left(\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \hat{\mathbf{q}}_2 + O\left(\frac{P_2}{q_2}\right) \right)$$

da cui ricaviamo che

$$h_0 = 1 - \frac{q_{\oplus 2}^3 \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{P}}_2}{\mu \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot \mathbf{q}_2} + O(\Delta t^2) + O\left(\frac{P_2}{q_2}\right) = 1 - \Lambda_{n2} + O(\Delta t^2) + O\left(\frac{P_2}{q_2}\right)$$

dove Λ_{n2} è Λ_n valutato all'istante $t = t_2$. Se $t_{32} \neq t_{21}$ allora abbiamo un $O(\Delta t)$ al posto di $O(\Delta t^2)$.

La conclusione è che il metodo di Gauss utilizzato con le posizioni eliocentriche dell'osservatore è equivalente a quello di Laplace con osservazioni topocentriche all'ordine più basso in Δt e trascurando i termini di ordine $O(P_2/q_2)$.

1.2.4 Problemi nel metodo di Laplace topocentrico

Descrivere le funzioni $\alpha(t)$ e $\delta(t)$ con polinomi di secondo grado (quelli che si ottengono interpolando a partire dalle tre osservazioni) non costituisce sempre un'approssimazione consistente. Consideriamo l'esempio in Figura 1.6, dove viene mostrata la traiettoria di un NEO¹⁰ in avvicinamento. È chiaro che cercare di approssimare tale curva con una parabola non è una buona idea. In particolare saranno diversi, e non di poco, i valori della curvatura, quantità fondamentale durante lo sviluppo del metodo di Laplace.

Sarebbe quindi opportuno modificare tale metodo. Poincaré, più di un secolo fa in [9], suggeriva di calcolare la quantità Λ_n usando un valore di $\ddot{\mathbf{P}}$ ottenuto interpolando i valori $\mathbf{P}(t_i)$ calcolati agli istanti di osservazione. Una tale modifica sarebbe utilizzabile ma in pratica non sono ancora emersi vantaggi.

La conclusione è, quindi, che il metodo di Gauss è superiore grazie alla naturalezza con cui integra le osservazioni topocentriche.

1.3 Teoria qualitativa generalizzata

Alla luce dei risultati della precedente sezione è necessario costruire una nuova teoria qualitativa che generalizzi quella di Charlier, ma che sia valida anche per il metodo di Gauss e con osservazioni topocentriche.

I risultati cambiano in maniera sostanziale: non sono più vere, ad esempio, le conclusioni riguardanti il numero di soluzioni.

¹⁰Near Earth Object.

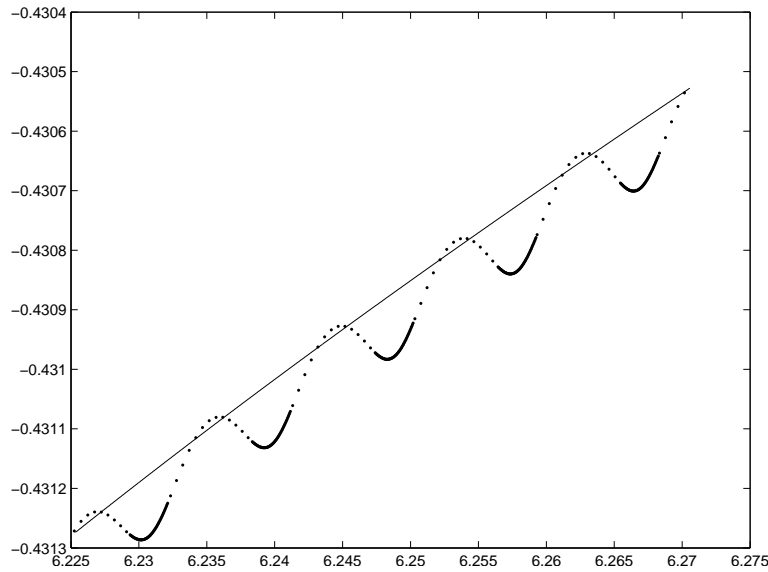


Figura 1.6: Sugli assi sono rappresentate ascensione retta e declinazione di un NEO in avvicinamento. I tratti di linea continua scura indicano dove sono possibili le osservazioni. I tratti di linea punteggiata indicano invece dove non è possibile osservare l'oggetto. Infine la linea continua più sottile simula l'andamento nel caso di osservazioni geocentriche.

Per motivi di brevità in questa sezione verranno omesse le dimostrazioni, che possono essere trovate in [11].

1.3.1 Problema dell'intersezione

Le equazioni (1.23) e (1.28) possono essere riscritte in questo modo:

$$C \frac{\rho}{q} = \gamma - \frac{q^3}{r^3}. \quad (1.29)$$

Lo scopo è quello di studiare il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (q\gamma - C\rho)r^3 - q^4 = 0 \\ r^2 - q^2 - \rho^2 - 2q\rho \cos \varepsilon = 0 \\ r, q > 0 \end{cases}, \quad (1.30)$$

al variare dei parametri γ , C e ε . Facciamo l'assunzione, già presente nella teoria di Charlier, per cui questi parametri siano tali che il problema ammetta almeno una soluzione, cosa che nella pratica non è sempre verificata¹¹

¹¹I motivi della mancata validità di tale assunzione sono già stati discussi all'interno della sottosezione 1.1.2

Dalle prime due equazioni del sistema (1.30) otteniamo, eliminando la variabile ρ , che

$$P(r) = C^2 r^8 - q^2 (C^2 + 2C\gamma \cos \varepsilon + \gamma^2) r^6 + 2q^5 (C \cos \varepsilon + \gamma) r^3 - q^8 = 0. \quad (1.31)$$

Notiamo che, a differenza di quanto accadeva nella teoria classica di Charlier, q non è sempre radice di P , infatti

$$P(q) = q^8 (1 - \gamma) [2C \cos \varepsilon - (1 - \gamma)].$$

Lavorando nel piano contenente Sole, osservatore e asteroide, definiamo la funzione

$$C(x, y) = \frac{q}{\rho} \left(\gamma - \frac{q^3}{r^3} \right)$$

dove $\rho = \sqrt{(q-x)^2 + y^2}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se $\gamma > 0$ allora è possibile definire il cerchio zero come $\{(x, y) \mid r = r_0\}$, dove $r_0 = q/\sqrt[3]{\gamma}$.

1.3.2 Topologia delle curve di livello di $C(x, y)$

Per prima cosa osserviamo che, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, valgono i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} C(x, y) &= 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} C(x, y) &= -\infty \end{aligned}$$

e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (q,0)} C(x, y) \begin{cases} = -\infty & \text{se } \gamma < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } \gamma = 1 \\ = +\infty & \text{se } \gamma > 1 \end{cases} .$$

Per capire i cambiamenti topologici che si hanno nel caso generalizzato è utile il seguente lemma:

Lemma 1.1. *I punti stazionari di $C(x, y)$ giacciono sull'asse x e dipendono da γ nel modo seguente:*

- i) per $\gamma \leq 0$ c'è un solo punto di sella appartenente a $]0, 3/4q]$;
- ii) per $0 < \gamma < 1$ ci sono tre punti stazionari: una sella all'interno del cerchio zero, una sella e un massimo fuori;
- iii) per $\gamma \geq 1$ c'è un unico punto di sella minore di $-r_0$.

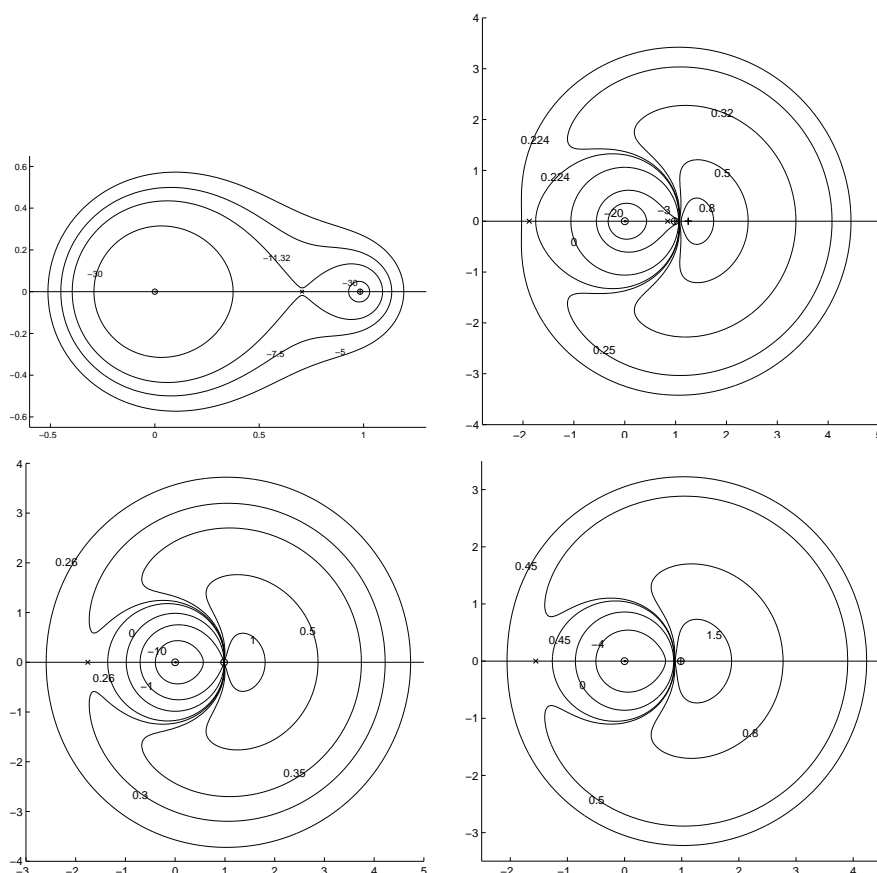


Figura 1.7: Curve di livello di $C(x, y)$. I punti di sella vengono indicati con \times mentre quello di massimo (presente solo per $0 < \gamma < 1$) con $+$. In alto a sinistra $\gamma = -0.5$, in alto a destra $\gamma = 0.8$, in basso a sinistra $\gamma = 1$ e in basso a destra $\gamma = 1.5$

In figura 1.7 vengono descritti tutti i principali comportamenti qualitativi delle curve di livello di C .

Serviranno le seguenti proposizioni:

Proposizione 1.2. *Osservando esattamente all'opposizione ($\varepsilon = 0$) il numero di soluzioni di (1.30) è il seguente:*

- i) se $\gamma \leq 0$ c'è una soluzione per $C < 0$ e non ci sono soluzioni per $C \geq 0$;
- ii) se $0 < \gamma < 1$ c'è una soluzione per $C \leq 0$, due soluzioni distinte per $C = C_\gamma$, dove C_γ è il valore di C corrispondente al punto di massimo, ovvero il valore di C minore di 3 tale che $4(C/3)^{3/4} - C = \gamma$;

- iii) se $\gamma = 1$ c'è una soluzione per $0 < C < 3$ e non ci sono soluzioni altrimenti;
- iv) se $\gamma > 1$ non ci sono soluzioni per $C \leq 0$ e c'è una soluzione per $C > 0$.

Proposizione 1.3. Osservando esattamente alla congiunzione ($\varepsilon = \pi$) il numero di soluzioni di (1.30) è il seguente:

- i) se $\gamma \leq 0$ ci sono tre soluzioni distinte per $C < C_\gamma$, una semplice ed una doppia per $C = C_\gamma$, una soluzione per $C_\gamma < C < 0$ e nessuna soluzione per $C \geq 0$, dove C_γ è il valore corrisponde all'unico punto stazionario di C ovvero la soluzione negativa di $4(-C/3)^{3/4} + C = \gamma$;
- ii) se $0 < \gamma < 1$ ci sono tre soluzioni distinte per $C < C_\gamma^{(1)}$, una soluzione semplice ed una doppia per $C = C_\gamma^{(1)}$, una soluzione per $C_\gamma^{(1)} < C \leq 0$, due soluzioni distinte per $0 < C < C_\gamma^{(2)}$, una soluzione doppia per $C = C_\gamma^{(2)}$ e nessuna soluzione per $C > C_\gamma^{(2)}$, dove $C_\gamma^{(1)}$ è il valore di C corrispondente al punto stazionario all'interno del cerchio zero, ovvero la soluzione minore di -3 dell'equazione $4(-C/3)^{3/4} + C = \gamma$, e $C_\gamma^{(2)}$ è il valore di C corrispondente al punto stazionario all'esterno del cerchio zero, ovvero la soluzione positiva dell'equazione $4(-C/3)^{3/4} + C = \gamma$;
- iii) se $\gamma = 1$ ci sono due soluzioni distinte per $C < -3$, una soluzione per $-3 \leq C \leq 0$, due soluzioni distinte per $0 < C < C_1$, una soluzione doppia per $C = C_1$ e nessuna soluzione per $C > C_1$, dove C_1 è il valore di C nell'unico punto stazionario, ovvero la soluzione positiva dell'equazione $4(C/3)^{3/4} + C = \gamma$;
- iv) se $\gamma > 1$ ci sono due soluzioni distinte per $C \leq 0$, tre soluzioni distinte per $0 < C < C_\gamma$, una soluzione semplice ed una doppia per $C = C_\gamma$ ed una soluzione per $C > C_\gamma$, dove C_γ è il valore di C corrispondente all'unico punto stazionario, ovvero la soluzione positiva dell'equazione $4(C/3)^{3/4} + C = \gamma$.

1.3.3 Curva singolare

La funzione $C(x, y)$ in coordinate sferiche topocentriche (ρ, ψ) è data da¹²

$$C(\rho, \psi) = \frac{q}{\rho} \left(\gamma - \frac{q^3}{r^3} \right)$$

¹²Con un abuso di notazione si usa la lettera C sia nel caso delle coordinate cartesiane che in quello delle coordinate sferiche topocentriche.

dove

$$r = \sqrt{\rho^2 + q^2 + 2\rho q \cos \psi}.$$

Dato che lo Jacobiano della trasformazione $(\rho, \psi) \rightarrow (x, y)$ è ρ , i punti critici di $C(\rho, \psi)$ sono gli stessi di $C(x, y)$, già discussi nel lemma 1.1.

Per un valore assegnato di $\gamma \in \mathbb{R}$ si definisce

$$F(C, \rho, \psi) = C \frac{\rho}{q} - \gamma + \frac{q^3}{r^3}.$$

La derivata di F rispetto a ρ è

$$F_\rho(C, \rho, \psi) = \frac{C}{q} - 3 \frac{q^3}{r^5} (\rho + q \cos \psi).$$

Consideriamo le equazioni

$$F(C, \rho, \psi) = F_\rho(C, \rho, \psi) = 0. \quad (1.32)$$

Grazie al teorema della funzione implicita, per ogni valore non stazionario C , i punti di tangenza tra le curve di livello di $C(x, y)$ e la linea di osservazione soddisfano (1.32). È possibile rimuovere la dipendenza da C considerando

$$F(C, \rho, \psi) - \rho F_\rho(C, \rho, \psi) = -\gamma + \frac{q^3}{r^3} + 3q^3 \rho r^5 (\rho + q \cos \psi).$$

La funzione $r^5(F - \rho F_\rho)$ in coordinate cartesiane eliocentriche diventa

$$G(x, y) = -\gamma r^5 + q^3(4r^2 - 3qx)$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definizione 1.4. Si definisce la curva singolare come l'insieme

$$S = \{(x, y) \mid G = 0\}.$$

Notiamo che S è composta da tutti i punti che soddisfano (1.32) più l'origine. Per descrivere la geometria della curva singolare al variare di γ c'è bisogno dei seguenti lemmi:

Lemma 1.5. Se $\gamma \neq 1$ la curva singolare S interseca l'asse x in $(0, 0)$ e nel punto stazionario di $C(x, y)$. Se $\gamma = 1$ allora S incontra l'asse x anche nel punto $(q, 0)$. In particolare questi punti dipendono da γ in questo modo:

i) se $\gamma \leq 0$ ce ne sono due, con $x \in [0, 3/4q]$;

- ii) se $0 < \gamma < 1$ ce ne sono quattro, due all'interno del cerchio zero e due fuori;
- iii) se $\gamma = 1$ ce ne sono tre, uno appartenente al cerchio zero, uno fuori e uno dentro;
- iv) se $\gamma > 1$ allora ce ne sono due, uno all'interno del cerchio zero e uno all'esterno.

Lemma 1.6. *I punti (x, y) tali che*

$$G(x, y) = G_y(x, y) = 0$$

dipendono da γ nel modo seguente:

- i) per $\gamma \leq 512/625$ sono i punti tali che $G(x, 0) = 0$.
- ii) per $\gamma > 512/625$ oltre ai punti tali che $G(x, 0) = 0$, ci sono due punti fuori dal cerchio zero con $y \neq 0$ e $x > 0$.

Grazie a questi due risultati si può dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 1.7. *Se $\gamma \neq 1$ allora la curva singolare è una varietà compatta senza bordo:*

- i) se $\gamma \leq 0$ ha un'unica componente connessa, che è convessa;
- ii) se $0 < \gamma < 1$ ha due componenti connesse, una dentro il cerchio zero e una fuori;
- iii) se $\gamma > 1$ ha un'unica componente connessa, non convessa, che interseca il cerchio zero.

Se, invece, $\gamma = 1$ allora S non è una varietà: ha un punto di auto-intersezione nella posizione dell'osservatore $(x, y) = (q, 0)$.

In figura 1.8 viene mostrato il grafico della curva singolare in tutti i diversi casi.

Lemma 1.8. *Per ogni $\gamma \neq 1$ ci sono solo due punti non appartenenti all'asse x , corrispondenti a soluzioni di (1.30) con molteplicità 3.*

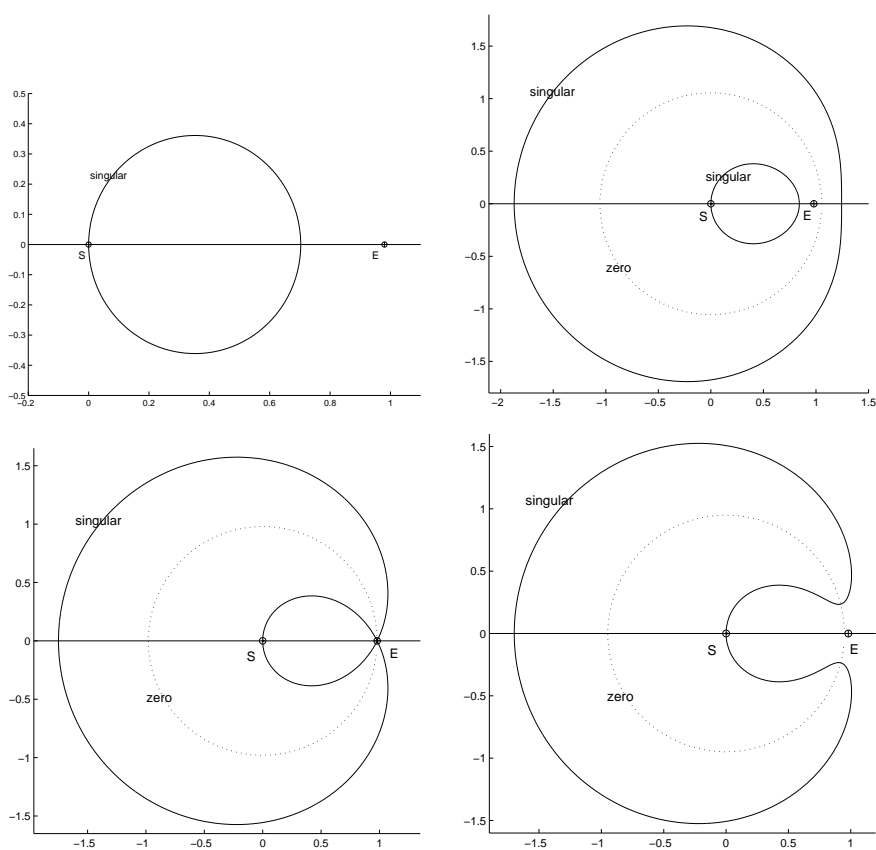


Figura 1.8: Curva singolare. In alto a sinistra $\gamma = -0.5$, in alto a destra $\gamma = 0.8$, in basso a sinistra $\gamma = 1$ e in basso a destra $\gamma = 1.5$

1.3.4 Parità del numero di soluzioni

È possibile sapere se il numero di soluzioni è pari o dispari grazie alla seguente proposizione:

Proposizione 1.9. Per $(\gamma, C, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, con $\gamma \neq 1$ si ha che:

- i) se $\gamma \leq 0$ il numero di soluzioni di (1.30) è pari (zero soluzioni) per $C \geq 0$, dispari per $C < 0$;
- ii) se $0 < \gamma < 1$ il numero di soluzioni di (1.30) è pari per $C > 0$, dispari per $C \leq 0$;
- iii) se $\gamma > 1$ il numero di soluzioni di (1.30) è pari per $C \leq 0$, dispari per $C > 0$.

Il limite sul numero di radici di (1.31) ci dice che le soluzioni di (1.30) non possono essere più di tre. Dato che abbiamo assunto che i parametri (γ, C, ε)

fossero tali da avere almeno una soluzione per (1.30), quando il numero di soluzioni è pari allora ce ne sono due, mentre se è dispari allora ce ne possono essere una o tre.

1.3.5 Curva limitante

Nella teoria di Charlier il numero di soluzioni dipendeva soltanto dalla posizione dell'oggetto. Questa affermazione può essere generalizzata come segue: per ogni fissato γ il numero di soluzioni dipende solo dalla posizione del corpo osservato.

Per $\gamma \neq 1$ definiamo

$$D_2(\gamma) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \gamma < 0 \\ \{(x, y) \mid r > r_0\} & \text{se } 0 < \gamma < 1 \\ \{(x, y) \mid r \leq r_0\} & \text{se } \gamma > 1 \end{cases}$$

e $D(\gamma) = \mathbb{R}^2 \setminus (D_2(\gamma) \cup \{(q, 0)\})$. Se il corpo osservato si trova in D_2 si ha un numero pari di soluzioni, che deve essere due.

Si vuole dividere D in due componenti connesse, ognuna delle quali abbia lo stesso numero di soluzioni. Sia $\Sigma = S \cap D$ la porzione di curva singolare contenuta in D . Notiamo che Σ è connessa. Per ogni punto $P \in \Sigma$ il problema (1.30) deve avere tre soluzioni, infatti appartenendo a D il numero di soluzioni è dispari e appartenendo a S la molteplicità dell'intersezione è ≥ 2 .

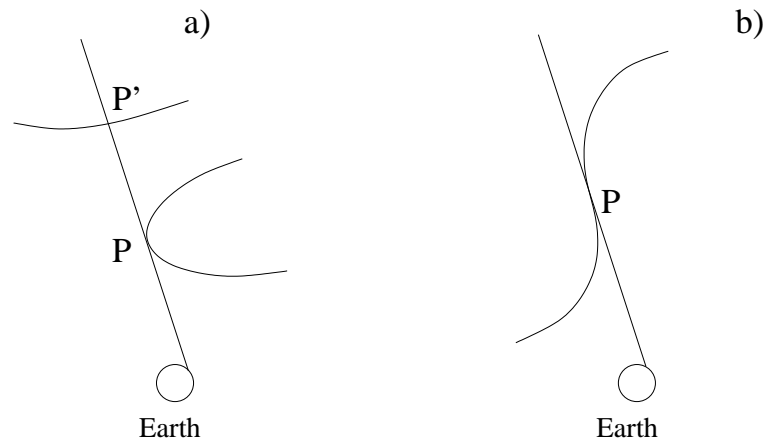


Figura 1.9: Casistica delle intersezioni tangenti tra la linea di osservazione e la curva di livello di C . A sinistra l'intersezione in P ha molteplicità 2 e l'altra intersezione P' è il punto residuale riferito a P . A destra l'intersezione in P , che è auto-residuale, ha molteplicità 3.

Si possono presentare due casi, rappresentati in figura 1.9 . Il caso a) si riferisce alla situazione generica: $F_{\rho\rho}(C, \bar{\rho}, \bar{\psi}) \neq 0$, dove $(\bar{\rho}, \bar{\psi})$ identificano P e C è tale che $F(C, \bar{\rho}, \bar{\psi}) = 0$; P corrisponde ad una soluzione con molteplicità 2, quindi deve esistere P' corrispondente alla ulteriore soluzione di (1.30). Il caso b) si ha quando $F_{\rho\rho}(C, \bar{\rho}, \bar{\psi}) = 0$, quindi P è una soluzione di molteplicità 3.

Definizione 1.10. *Siano $\gamma \neq 1$ fissato e $(\bar{\rho}, \bar{\psi})$ corrispondenti a $P \in \Sigma$. Se $F_{\rho\rho}(C, \bar{\rho}, \bar{\psi}) \neq 0$ si chiama punto residuale riferito a P il punto P' giacente sulla stessa linea di osservazione e sulla stessa curva di livello di C . Se $F_{\rho\rho}(C, \bar{\rho}, \bar{\psi}) = 0$ allora si dice che P è un punto auto-residuale, cioè è il punto residuale riferito a se stesso.*

Per convenzione poniamo $(q, 0)$ come punto residuale riferito a $(0, 0)$, quando quest'ultimo appartiene a Σ .

Definizione 1.11. *Sia $\gamma \neq 1$. La curva limitante L è l'insieme dei punti residuali riferiti ai punti di Σ .*

Ci serve il seguente lemma:

Lemma 1.12. *Per $\gamma \neq 1$ la curva limitante L è una curva continua e connessa che divide D in due regioni connesse, che indichiamo con D_1 e D_3 . D_3 contiene tutta la curva singolare. Inoltre se $\gamma < 1$ L è una curva chiusa mentre se $\gamma > 1$ è illimitata.*

A questo punto è possibile dimostrare il seguente teorema, attraverso il quale si può suddividere il piano in componenti connesse aventi lo stesso numero di soluzioni:

Teorema 1.13. *Per $\gamma \neq 1$ la curva limitante L divide l'insieme D in due regioni connesse D_1 e D_3 : i punti in D_1 sono l'unica soluzione del corrispondente problema (1.30); i punti in D_3 sono soluzioni di (1.30) che ha altre due soluzioni, anch'esse contenute in D_3 .*

In figura 1.10 vengono mostrati i possibili comportamenti della curva limitante al variare di γ .

1.3.6 Numero di soluzioni

I risultati precedenti ci dicono che il numero di soluzioni varia da uno a tre.

Il piano viene diviso in diverse componenti, ognuna delle quali ha lo stesso numero di soluzioni. In ogni caso la curva limitante separa la regione con una sola soluzione da quelle con più soluzioni.

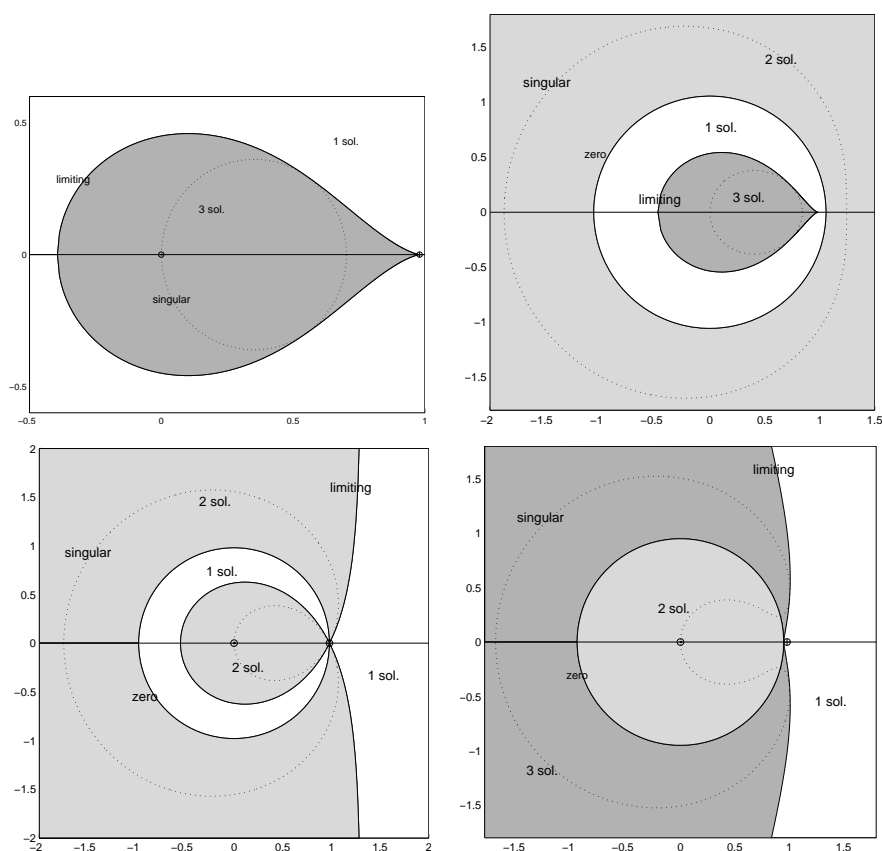


Figura 1.10: Curva limitante e numero di soluzioni. La curva limitante e il cerchio zero sono disegnati con linea continua, mentre la curva singolare è tratteggiata. Il grigio chiaro indica la regione con due soluzioni, il grigio scuro quella con tre soluzioni e in bianco quella con una soluzione. In alto a sinistra $\gamma = -0.5$, in alto a destra $\gamma = 0.8$, in basso a sinistra $\gamma = 1$ e in basso a destra $\gamma = 1.5$

In figura 1.10 vengono descritti i vari casi al variare di γ .

Rispetto al risultato di Charlier ci può essere una soluzione aggiuntiva, in particolare ci possono essere casi in cui due di queste si trovano vicine all'opposizione (come si vedrà in seguito con un esempio). È importante notare che ognuna delle soluzioni deve essere usata come punto di partenza delle correzioni differenziali: la convergenza di un metodo iterativo è più buona quando si parte vicino alla soluzione.

1.3.7 Esempio con più soluzioni

Vediamo adesso un esempio in cui la nuova teoria qualitativa risulta utile per trovare una soluzione in più rispetto a quelle fornite dalla teoria classica. La soluzione persa peraltro è quella più adatta da cui cominciare con le correzioni differenziali. Un esempio con due soluzioni vicine all'opposizione

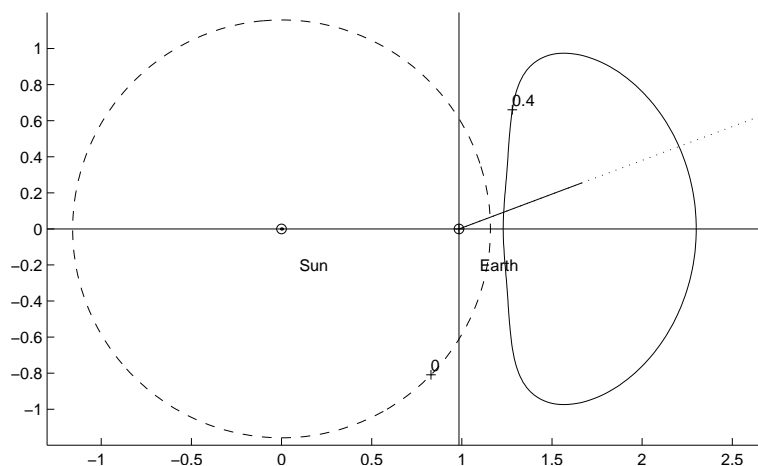


Figura 1.11: Esempio con due soluzioni vicine all'opposizione: per $h_0 = 0.613$ la direzione di osservazione (punteggiata) ha due intersezioni con la curva di livello $C_0(x, y) = 0.4$ (linea continua); il cerchio zero è tratteggiato. Le posizioni nella linea di osservazione con un'orbita limitata sono disegnate con una linea continua.

è mostrato in figura 1.11. La soluzione più vicina è quella che nella teoria classica corrisponde a $\rho_2 = 0$. L'altra soluzione porta ad un'orbita caratterizzata da un'eccentricità $e \simeq 10$. Una proprietà interessante di questo esempio è che, usando sei osservazioni, la prima ha un RMS= 66 arcsec mentre la seconda ha un RMS= 2.5 arcsec. In questo caso, se avessimo applicato le correzioni differenziali soltanto alla soluzione con i residui più bassi, non saremmo stati in grado di determinare l'orbita dell'oggetto osservato.

1.4 Satelliti terrestri

Il metodo di Gauss può essere applicato anche alla determinazione delle orbite dei satelliti terrestri. È sufficiente indicare con \mathbf{r} la posizione eliocentrica del satellite, con \mathbf{q} la posizione eliocentrica dell'osservatore e con $\boldsymbol{\rho}$ la posizione del satellite rispetto all'osservatore. Quello di Laplace, invece, andrebbe modificato. Infatti usa l'equazione del moto del centro della Terra rispetto

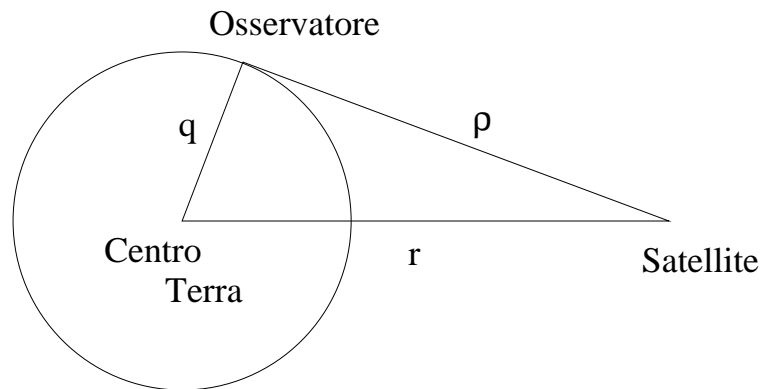


Figura 1.12: Configurazione geometrica di Terra, osservatore e satellite.

al Sole in (1.3), che andrebbe sostituita con l'accelerazione dell'osservatore rispetto al centro della Terra.

Una trattazione che descrive entrambi i metodi applicati al caso dei satelliti terrestri si può trovare in [7].

Capitolo 2

Regione ammissibile

I dati forniti nelle moderne indagini per la scoperta di asteroidi o satelliti terrestri non forniscono tre osservazioni (con le quali applicare gli algoritmi descritti nel capitolo 1), ma un insieme di quantità non sufficiente a determinare un'orbita. Lo scopo di questo capitolo è mostrare le informazioni che si possono ottenere dai dati a disposizione.

Vengono trattati separatamente il caso degli asteroidi e quello dei detriti spaziali.

2.1 Asteroidi

Una tecnica semplice e molto usata per la scoperta di nuovi asteroidi è quella del *blinking*: nel corso di una stessa notte, a intervalli di tempi regolari, si prendono in sequenza N immagini (tipicamente $3 \leq N \leq 5$) della stessa porzione di sfera celeste, solitamente con una distanza di tempo tra la prima e l'ultima osservazione di al più due ore. Successivamente le immagini vengono scandite in sequenza e, se nella porzione di cielo fotografata era presente un asteroide, questo apparirà come un punto luminoso che si sposta sulla lastra durante la scansione: abbiamo quella che viene chiamata *tracklet*.

Tale tecnica è decisamente efficace nella scoperta di oggetti in movimento, ma non è molto utile per determinarne l'orbita. Infatti per poter usare i metodi classici di determinazione orbitale (descritti in precedenza) servono tre osservazioni relative ad un arco con curvatura geodetica significativa. Nel caso del *blinking*, invece, gli archi sono troppo corti (*Too Short Arcs* o, più brevemente, *TSA*s) e con curvatura geodetica non significativa.

Per questo motivo un *TSA* non può essere considerato una scoperta. Non perché l'oggetto non esista effettivamente, ma senza conoscerne l'orbita non

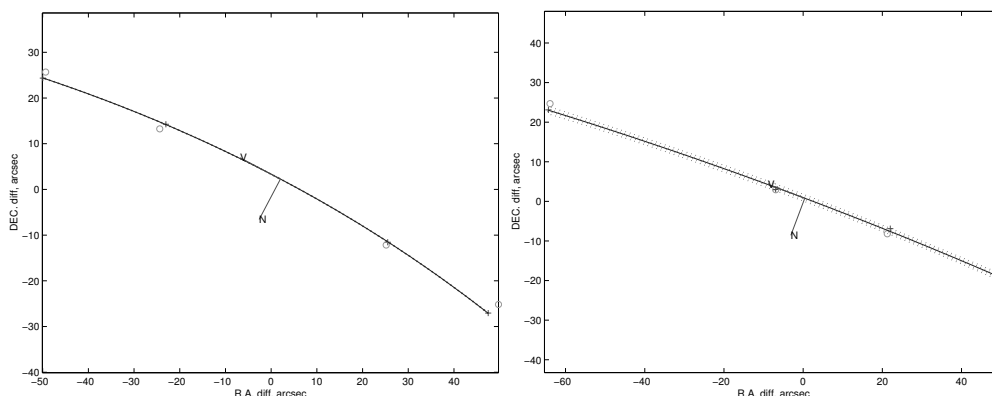


Figura 2.1: Esempi di osservazioni che individuano un arco con curvatura significativa (a sinistra) e non significativa (a destra).

è possibile determinarne la natura o sapere dove si troverà dopo un certo intervallo di tempo.

L'obiettivo di questa sezione è far vedere che un TSA contiene informazioni utili per determinare l'orbita dell'oggetto in questione. In particolare da un TSA ricaviamo un insieme di dati, chiamato attribuibile, a cui mancano informazioni sulla distanza e la velocità radiale del corpo. Queste due quantità, una volta determinato l'attribuibile, devono soddisfare opportune condizioni che definiscono la regione ammissibile.

Campionando tale regione è possibile procurarsi delle effemeridi con le quali prevedere dove si troverà in futuro l'oggetto osservato e quindi sapere dove puntare il telescopio per recuperarlo (osservandolo nuovamente).

Ci sono altre due quantità che si rivelano utili: la magnitudine apparente h e quella assoluta H . La prima è una grandezza che misura la luminosità dell'oggetto percepibile dal punto di osservazione. La seconda, invece, viene determinata supponendo che l'oggetto si trovi ad una unità astronomica sia dalla Terra che dal Sole, con angolo di fase nullo.

Le unità di misura usate nel corso di questa sezione sono l'unità astronomica per la distanza e il giorno solare medio per il tempo.

2.1.1 Regione ammissibile

Data un'osservazione di un TSA con curvatura trascurabile (quando la curvatura è nulla l'oggetto giace su un cerchio di raggio massimo della sfera celeste), è possibile determinare i valori di ascensione retta, declinazione e relative velocità ad un determinato istante.

Definizione 2.1. Si chiama *attribuibile* il vettore quadridimensionale $\mathcal{A} = (\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}) \in [-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

L'attribuibile è il nostro dato di partenza, da cui cercare di determinare un'orbita. Ciò che manca sono la distanza ρ e la velocità radiale $\dot{\rho}$ (con le quali avremmo le sei condizioni iniziali necessarie per determinare l'orbita).

Indichiamo, come rappresentato in figura 2.2, con $\mathbf{q}_\oplus, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ rispettivamente le posizioni eliocentriche del centro della Terra, dell'osservatore e del corpo osservato. Usiamo le coordinate sferiche centrate in \mathbf{q} :

$$(\rho, \alpha, \delta) \in]0, +\infty[\times [-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[. \quad (2.1)$$

Ponendo $\hat{\rho} = (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta)$ si ottiene che

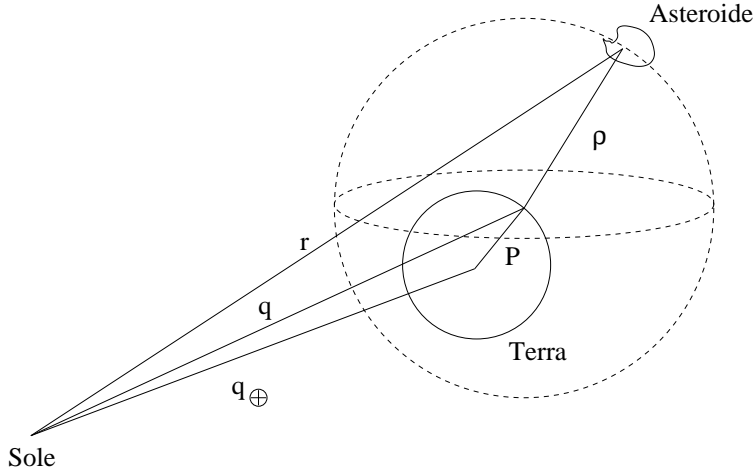


Figura 2.2: Configurazione geometrica di Sole, Terra e asteroide.

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} + \rho \hat{\rho}. \quad (2.2)$$

Usando queste notazioni consideriamo le seguenti quantità:

- Energia eliocentrica (per unità di massa):

$$\mathcal{E}_\odot = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - k^2 \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$$

dove k è la costante di Gauss, definita dalla relazione $k^2 = GM_\odot$.

- Energia geocentrica (per unità di massa):

$$\mathcal{E}_\oplus = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{q}}_\oplus\|^2 - k^2 m \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{q}_\oplus\|}$$

dove $m = M_\oplus/M_\odot$.

- Raggio della sfera di influenza della Terra¹:

$$R_{SI} = \sqrt[3]{a_{\oplus}^3 m/3} = 0.010044, \quad (2.3)$$

che, a meno di termini di ordine $m^{2/3}$, è la distanza dalla Terra del punto lagrangiano L_2 .

- Raggio della Terra:

$$R_{\oplus} = 4.2 \times 10^{-5}.$$

A partire da queste quantità e assegnato un attribuibile \mathcal{A} possiamo definire i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

- $D_1 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \mathcal{E}_{\oplus} \geq 0\}$, cioè l'insieme dei valori di $(\rho, \dot{\rho})$ per cui l'oggetto non è un satellite della Terra.
- $D_2 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \rho \geq R_{SI}\}$, cioè l'insieme dei valori di $(\rho, \dot{\rho})$ per cui l'oggetto non è controllato dalla Terra.
- $D_3 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \mathcal{E}_{\odot} \leq 0\}$, cioè l'insieme dei valori di $(\rho, \dot{\rho})$ per cui l'oggetto appartiene al Sistema Solare.
- $D_4 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \rho \geq R_{\oplus}\}$, cioè l'insieme dei valori di $(\rho, \dot{\rho})$ per cui l'oggetto sta fuori dalla superficie terrestre.

Definizione 2.2. *Si chiama regione ammissibile per $(\rho, \dot{\rho})$ l'insieme $D = (D_1 \cup D_2) \cap D_3 \cap D_4$.*

Il significato di $D_1 \cup D_2$ sta nel fatto che se l'oggetto è fuori dalla sfera di influenza della Terra non importa il valore della sua energia geocentrica, non trattandosi di un satellite terrestre. Se invece il corpo si trova all'interno di tale sfera, richiediamo che la sua energia geocentrica sia non negativa.

Nel definire gli insiemi D_1, D_2, D_3 e D_4 sono state introdotte le seguenti assunzioni:

1. L'osservatore si trova al centro della Terra². Tale assunzione può essere rimossa sostituendo \mathbf{q}_{\oplus} e $\dot{\mathbf{q}}_{\oplus}$ con le rispettive posizione e velocità dell'osservatore. In tal caso la condizione che definisce l'insieme D_4 andrebbe opportunamente modificata.

¹ a_{\oplus} è il semiasse maggiore dell'orbita terrestre.

²Questa approssimazione non è valida nel caso dei satelliti, come si vedrà nella sezione 2.2

2. Non viene tenuto conto del fatto che gli asteroidi che passano vicino alla Terra subiscono anche l'attrazione gravitazionale del Sole, oltre a quella terrestre. Studiare tutto questo con un modello a tre corpi sarebbe molto complicato. In effetti ci sono oggetti in orbita attorno al Sole che vengono catturati temporaneamente dalla Terra (quindi con $\mathcal{E}_\oplus \geq 0$), ma questo accade solo per velocità relative $\|\dot{\mathbf{q}}_\oplus - \dot{\mathbf{r}}\|$ molto piccole. Inoltre tali oggetti sono spesso artificiali.
3. Quando l'oggetto è molto più lontano dalla Terra che dalla Luna ($\rho \gg 60R_\oplus$) bisognerebbe sostituire a μ_\oplus il rapporto tra la massa del sistema Terra-Luna e quella del Sole.
4. Nel calcolo del raggio della sfera di influenza si trascura l'eccentricità dell'orbita terrestre.

Ad ogni modo, le condizioni che definiscono la regione ammissibile sono una buona approssimazione. Trovare delle espressioni analitiche basate sulla definizione 2.2 costituisce un ottimo punto di partenza per un successivo e più accurato studio.

2.1.1.1 Esclusione dei satelliti terrestri

Cerchiamo una semplice descrizione analitica e geometrica di $D_1 \cup D_2$.

Derivando (2.2) abbiamo che

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{q}} + \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \dot{\alpha} \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha + \rho \dot{\delta} \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta \quad (2.4)$$

dove $\hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha = \partial \hat{\boldsymbol{\rho}} / \partial \alpha$ e $\hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta = \partial \hat{\boldsymbol{\rho}} / \partial \delta$. Inoltre

$$\langle \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha \rangle = \langle \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta \rangle = \langle \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta \rangle = 0, \quad (2.5)$$

$$\|\hat{\boldsymbol{\rho}}\| = \|\hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha\| = \cos \delta. \quad (2.6)$$

Ne segue che

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{q}\|^2 = \rho^2 \quad \text{e} \quad \|\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{q}}\|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \rho^2 \dot{\delta}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \eta^2$$

dove $\eta = \sqrt{\dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2}$ è il moto proprio. La condizione in D_1 diventa pertanto

$$2\mathcal{E}_\oplus = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \eta^2 - 2k^2 m \frac{1}{\rho} \geq 0$$

che, ponendo

$$G(\rho) = 2k^2 m \frac{1}{\rho} - \rho^2 \eta^2,$$

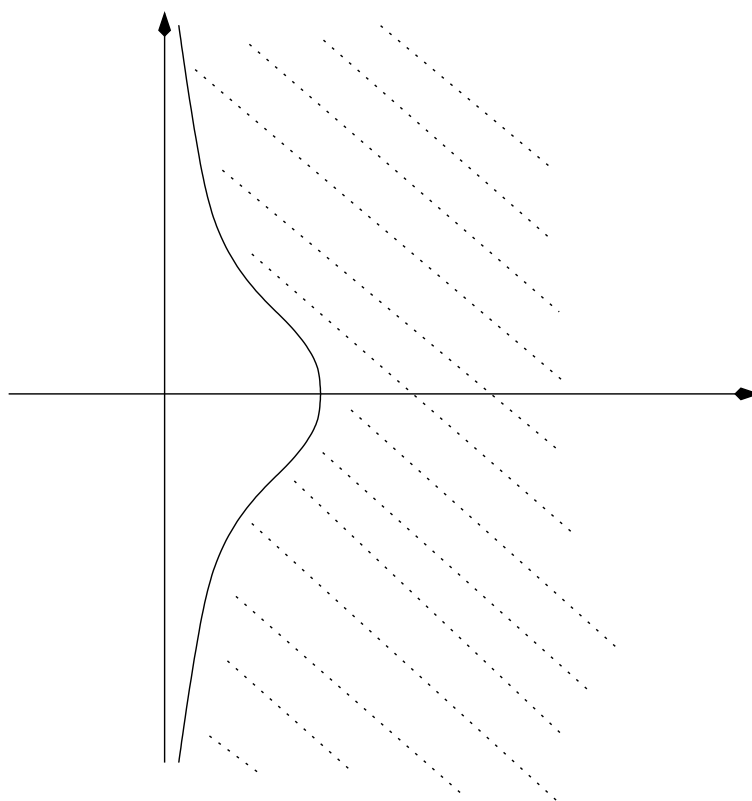


Figura 2.3: Sketch della regione $G(\rho) \leq \dot{\rho}$ nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

può essere riscritta come $G(\rho) \leq \dot{\rho}^2$. Tale disequazione è soddisfatta dai punti nella porzione di piano tratteggiata in figura 2.3.

Notiamo che $G(\rho) > 0$ per

$$0 < \rho < \rho_0 = \sqrt[3]{\frac{2k^2m}{\eta^2}}.$$

Quindi, prendendo in considerazione la condizione in D_2 , nel caso in cui $\rho_0 \leq R_{SI}$ si ha che $D_1 \cup D_2 = D_1$. Questo accade quando $\eta \geq \sqrt{6}n_{\oplus}^3$, come si vede da (2.3) e ricordando la terza legge di Keplero:

$$a_{\oplus}^3 n_{\oplus}^2 = k^2.$$

Se, invece, $\rho_0 \geq R_{SI}$ la situazione è quella descritta in figura 2.4.

³ n_{\oplus} indica il moto medio della Terra.

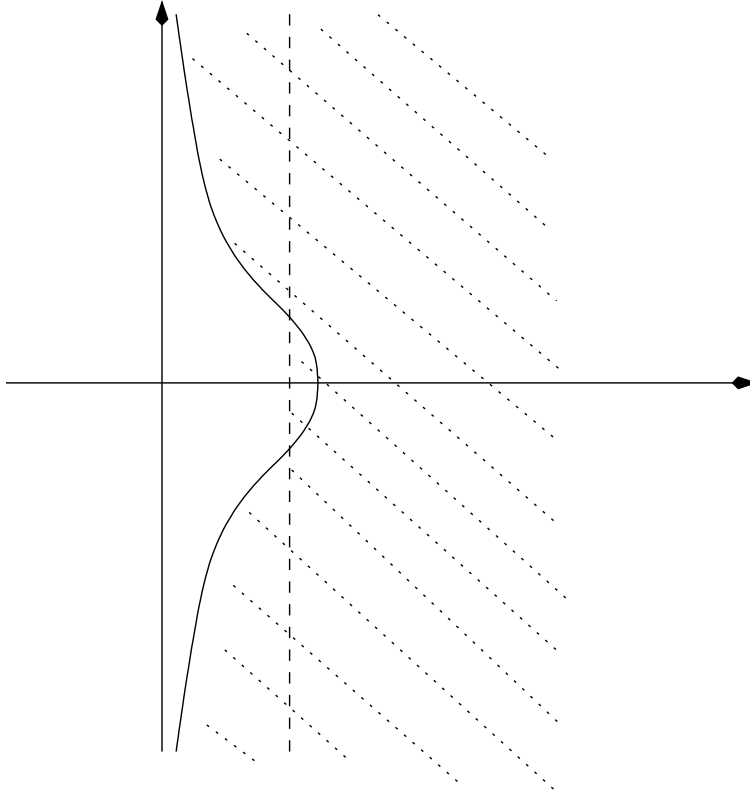


Figura 2.4: Sketch della regione $D_1 \cup D_2$ nel caso in cui $\rho_0 > R_{SI}$. La linea tratteggiata rappresenta la retta $\rho = R_{SI}$.

2.1.1.2 Esclusione degli oggetti interstellari

Cerchiamo una descrizione analitica e geometrica di D_3 .

Da (2.2) e (2.4) combinate con (2.5) e (2.6) si ha che

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \rho^2 + 2\rho \langle \mathbf{q}, \hat{\rho} \rangle + \|\mathbf{q}\|^2, \\ \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 &= \dot{\rho}^2 + 2\dot{\rho} \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\rho} \rangle + \rho^2 \eta^2 + 2\rho(\dot{\alpha} \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\rho}_\alpha \rangle + \dot{\delta} \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\rho}_\delta \rangle) + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \end{aligned}$$

Semplifichiamo la notazione ponendo

$$\begin{aligned} c_0 &= \|\mathbf{q}\|^2; \\ c_1 &= 2 \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\rho} \rangle; \\ c_2 &= \eta^2; \\ c_3 &= 2(\dot{\alpha} \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\rho}_\alpha \rangle + \dot{\delta} \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\rho}_\delta \rangle); \\ c_4 &= 2 \langle \mathbf{q}, \hat{\rho} \rangle; \\ \gamma &= \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - c_1^2/4. \end{aligned}$$

Infine introduciamo le seguenti quantità:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \|\mathbf{r}\|^2 = \rho^2 + c_4\rho + c_0; \\ P(\rho) &= c_2\rho^2 + c_3\rho + \gamma; \\ \mathcal{T}(\rho, \dot{\rho}) &= 1/2\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = (\dot{\rho}^2 + c_1\dot{\rho} + P(\rho) + c_1^2/4)/2. \end{aligned}$$

Notiamo che $\gamma \geq 0$, grazie alla disuguaglianza di Schwarz e a (2.6):

$$\langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\rho}} \rangle^2 \leq \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle \langle \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\rho}} \rangle = \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle. \quad (2.7)$$

Inoltre $P(\rho) \geq 0$, essendo l'opposto del discriminante di $\mathcal{T}(\rho, \dot{\rho})$ (visto come polinomio di secondo grado in $\dot{\rho}$), che è una quantità sempre positiva.

Usando queste notazioni la condizione in D_3 può essere riscritta in questo modo:

$$2\mathcal{E}_\odot = \dot{\rho}^2 + c_1\dot{\rho} + P(\rho) + \frac{c_1^2}{4} - \frac{2k^2}{\sqrt{S(\rho)}} \leq 0. \quad (2.8)$$

Tale disequazione può essere ricondotta ad una algebrica. Infatti ponendo

$$K(\rho, \dot{\rho}) = \dot{\rho}^2 + c_1\dot{\rho} + P(\rho) + \frac{c_1^2}{4}$$

si ottiene che

$$K(\rho, \dot{\rho}) \leq \frac{2k^2}{\sqrt{S(\rho)}}.$$

A questo punto è sufficiente elevare ambo i membri al quadrato e moltiplicare il tutto per $S(\rho)$. Inoltre, osservando che sia K che S sono di grado 2, concludiamo che la disequazione ha grado 6.

La 2.8, trattando il termine di sinistra come polinomio di secondo grado in $\dot{\rho}$, ammette soluzioni solo se il discriminante è non negativo:

$$\Delta_\odot(\rho) = \frac{\Delta}{4} = -P(\rho) + \frac{2k^2}{\sqrt{S(\rho)}} \geq 0,$$

ovvero se e solo se

$$P(\rho)^2 S(\rho) \leq 4k^4.$$

Chiamiamo $V(\rho) = P(\rho)^2 S(\rho)$. $V(\rho)$ è un polinomio di sesto grado che scriviamo nella forma $\sum_{i=0}^6 A_i \rho^i$ dove i coefficienti sono i seguenti:

$$\begin{aligned} A_0 &= c_0\gamma^2; \\ A_1 &= c_4\gamma^2 + 2c_0c_3\gamma; \\ A_2 &= \gamma^2 + 2c_3c_4\gamma + c_0(c_3^2 + 2c_2\gamma); \\ A_3 &= 2c_3\gamma + c_4(c_3^2 + 2c_2\gamma) + 2c_0c_2c_3; \\ A_4 &= c_3^2 + 2c_2\gamma + 2c_2c_3c_4 + c_0c_2^2; \\ A_5 &= c_2(2c_3 + c_2c_4); \\ A_6 &= c_2^2. \end{aligned}$$

Tutto questo ci permette di scrivere la condizione che definisce l'insieme D_3 in questo modo:

$$\dot{\rho}^2 + c_1\dot{\rho} + c_1^2/4 - \Delta_{\odot}(\rho) \leq 0 \quad \wedge \quad V(\rho) \leq 4k^4 \quad (2.9)$$

e di dimostrare alcune proprietà topologiche di tale insieme. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 2.3. *La regione D_3 è limitata ed ha al più due componenti connesse.*

Per la dimostrazione servono due lemmi.

Lemma 2.4. *Se almeno uno tra η e γ è strettamente positivo allora l'equazione*

$$V(\rho) - 4k^4 = 0$$

ha almeno due soluzioni reali, di cui una positiva e l'altra negativa.

Dimostrazione. Dato che l'energia eliocentrica della Terra $\|\dot{\mathbf{q}}\|^2/2 - k^2/\|\mathbf{q}\|$ è negativa, si ha che

$$V(0) - 4k^4 = c_0\gamma^2 - 4k^4 = \|\mathbf{q}\|^2\|\dot{\mathbf{q}}\|^4 - 4k^4 < 0.$$

A questo punto distinguiamo i diversi casi:

- se $\eta > 0$ allora $A_6 = \eta^4 > 0$. Pertanto $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V(\rho) - 4k^4 = \lim_{\rho \rightarrow -\infty} V(\rho) - 4k^4 = +\infty$, da cui segue banalmente la tesi;
- se $\eta = 0$ e $\gamma > 0$ allora $A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0$ e $A_2 = \gamma^2 > 0$. Quindi i limiti all'infinito sono gli stessi del caso precedente e la conclusione è la stessa.

□

Osservazione 2.5. *Nel caso degenere, in cui $\gamma = \eta = 0$, si ha che $V(\rho) \equiv 0$ e $\Delta_{\odot}(\rho) = 2k^2/\sqrt{S(\rho)}$. Quindi (2.9) ha soluzioni reali per $\dot{\rho}$ qualsiasi sia il valore di $\rho \geq 0$. Questo è un caso molto particolare, in cui posizione e velocità dell'asteroide sono paralleli alla velocità della Terra⁴.*

Lemma 2.6. *L'equazione $V'(\rho) = 0$ non può avere più di tre soluzioni reali distinte. Nel caso in cui le radici siano esattamente tre, nessuna può avere molteplicità 2.*

⁴Segue immediatamente da (2.7) e dalle definizioni di η e γ .

Dimostrazione. Dalla definizione di $V(\rho)$ si ha che

$$V'(\rho) = P(\rho)[2P'(\rho)S(\rho) + P(\rho)S'(\rho)], \quad (2.10)$$

il quale è un polinomio di grado 5. Poiché $P(\rho)$ è un polinomio di secondo grado non negativo, ci sono due casi:

- Se $P(\rho)$ non ha radici reali allora da (2.10) segue immediatamente che $V'(\rho)$ può avere al più tre radici reali distinte. Se le radici fossero esattamente tre allora ognuna avrebbe molteplicità 1, da cui la tesi.
- Se $P(\rho)$ ha una radice doppia allora, analizzando (2.10), è chiaro che si tratta di una radice almeno tripla per $V'(\rho)$, il quale di conseguenza avrebbe al più tre radici reali distinte. Se le radici fossero esattamente tre allora una sarebbe tripla e le altre avrebbero molteplicità 1, da cui la tesi.

□

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per dimostrare il teorema 2.3.

Dimostrazione teorema. $V(\rho) - 4k^4$ è un polinomio di sesto grado con le seguenti proprietà:

- $V(0) - 4k^4 < 0$;
- $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V(\rho) - 4k^4 = +\infty$;
- $\lim_{\rho \rightarrow -\infty} V(\rho) - 4k^4 = +\infty$.

Da questo si deduce che:

- tra due radici reali di $V(\rho) - 4k^4$ c'è una radice di $V'(\rho)$ (teorema di Rolle);
- il numero di radici, contate con molteplicità, di $V(\rho) - 4k^4$ è pari;
- almeno due radici reali di $V(\rho) - 4k^4$ hanno molteplicità dispari.

Usando questi fatti e i lemmi mostrati in precedenza possiamo affermare che per l'equazione $V(\rho) - 4k^4 = 0$ si può presentare uno solo dei seguenti casi:

- ci sono quattro soluzioni distinte, tutte semplici;
- ci sono tre soluzioni, di cui due semplici ed una con molteplicità pari;

- ci sono due radici distinte, di cui una semplice e l'altra con molteplicità dispari.

Ad ogni modo si ricava che le soluzioni di $V(\rho) - 4k^4 < 0$ sono al più due segmenti limitati sulla asse ρ . Da tutto questo e da (2.9) segue la tesi. \square

La regione $(D_1 \cup D_2) \cap D_3$ diventa quella in figura 2.5.

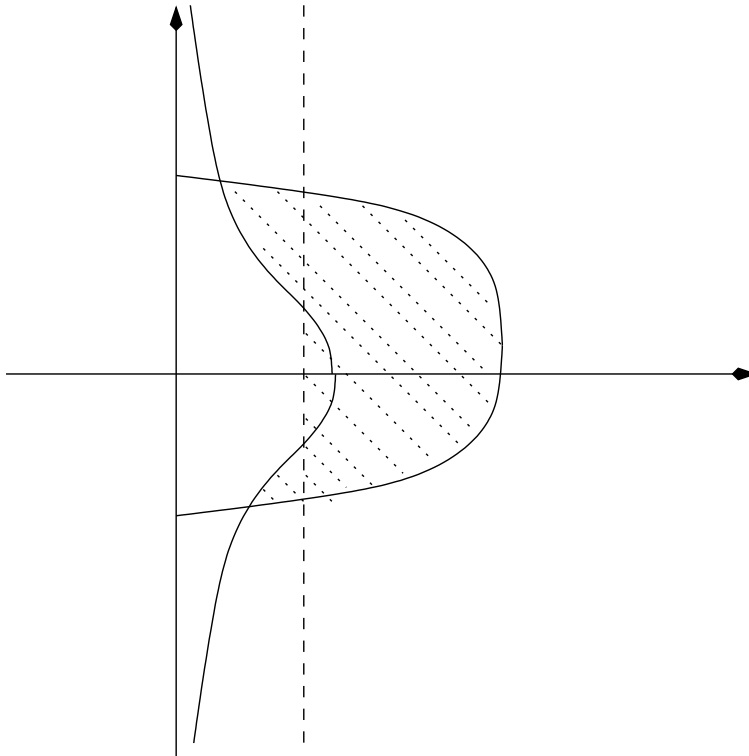


Figura 2.5: Sketch della regione $(D_1 \cup D_2) \cap D_3$.

2.1.1.3 Incontri ravvicinati

Per comprendere la struttura globale della regione ammissibile D è utile trovare le intersezioni tra le curve $\mathcal{E}_\oplus = 0$ e $\mathcal{E}_\ominus = 0$. Queste intersezioni hanno significato fisico solo se avvengono per $R_\oplus < \rho < R_{SI}$, cioè durante un incontro ravvicinato con la Terra, ma fuori dalla superficie terrestre. Il seguente risultato mostra che tali intersezioni avvengono solo dove non hanno significato fisico, non aumenta pertanto il numero di componenti connesse trovato in precedenza.

Teorema 2.7. Per $R_\oplus \leq \rho \leq R_{SI}$ la condizione $\mathcal{E}_\oplus \leq 0$ implica che $\mathcal{E}_\ominus \leq 0$.

Dimostrazione. Grazie alla disuguaglianza triangolare (applicata due volte) per dimostrare che $\mathcal{E}_{\odot}(\rho, \dot{\rho}) \leq 0$ è sufficiente far vedere che

$$(\|\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{q}}\| + \|\dot{\mathbf{q}}\|)^2 \leq \frac{2k^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q}\|}.$$

Osserviamo che

$$\mathcal{E}_{\oplus} \leq 0 \Leftrightarrow \|\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{q}}\| \leq \sqrt{\frac{2k^2m}{\|\mathbf{r} - \mathbf{q}\|}}.$$

Usando questa relazione dobbiamo dimostrare che, per $R_{\oplus} \leq \rho \leq R_{SI}$, vale la disuguaglianza

$$\frac{2k^2m}{\rho} + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + 2\|\dot{\mathbf{q}}\|\sqrt{\frac{2k^2m}{\rho}} \leq \frac{2k^2}{\rho + \|\mathbf{q}\|},$$

ovvero che, in tale intervallo, la funzione

$$\begin{aligned} F(\rho) &= 2k^2m(\rho + \|\mathbf{q}\|) + \rho(\rho + \|\mathbf{q}\|)\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \\ &\quad + 2\|\dot{\mathbf{q}}\|\sqrt{2k^2m}\sqrt{\rho}(\rho + \|\mathbf{q}\|) - 2k^2\rho \end{aligned}$$

è negativa.

Per capire il comportamento di $F(\rho)$ cominciamo decomponendo la derivata $F'(\rho)$ come segue:

$$F'(\rho) = \frac{g_1(\rho) + g_2(\rho)}{\sqrt{\rho}}$$

dove

$$\begin{aligned} g_1(\rho) &= \sqrt{\rho}(\mathcal{C} + 2\|\dot{\mathbf{q}}\|^2\rho); \\ g_2(\rho) &= \|\dot{\mathbf{q}}\|\sqrt{2k^2m}(3\rho + \|\mathbf{q}\|); \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{C} = 2k^2m + \|\mathbf{q}\|\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - 2k^2.$$

Notiamo che \mathcal{C} è una quantità negativa⁵.

La derivata seconda $g_1''(\rho)$ è positiva per ogni $\rho > 0$, mentre $g_2(\rho)$ è una retta. Quindi, per una questione di convessità, i grafici di $g_1(\rho)$ e $-g_2(\rho)$ possono avere al più due intersezioni per $\rho > 0$.

Pertanto $F'(\rho)$ può avere al più due zeri. Tenendo in considerazione i seguenti fatti:

⁵In particolare vale la stima $\mathcal{C} \leq -2.8075 \times 10^{-4}$.

- $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} F(\rho) = +\infty$;
- $F(0) = 2k^2 m \|\mathbf{q}\| > 0$;
- $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} F'(\rho) = +\infty$;

possiamo concludere che anche $F(\rho)$ al al più due zeri.

Infine, usando le stime $F(R_{\oplus}) \leq -2.49 \times 10^{-10} < 0$ e $F(R_{SI}) \leq -2.49 \times 10^{-6} < 0$, concludiamo che $F(\rho) < 0$ per $R_{\oplus} \leq \rho \leq R_{SI}$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 2.8. *Il teorema 2.7 vale soltanto per particolari valori di massa, raggio ed elementi orbitali del pianeta su cui si trova l'osservatore. Il risultato è specifico per la Terra. Un pianeta più grande, come Giove, potrebbe avere satelliti con velocità iperbolica rispetto al Sole (e quindi con energia eliocentrica positiva). Nel nostro caso i valori numerici usati per le stime sono:*

$$\begin{aligned}
 m &= 1/328900.5614; \\
 R_{\oplus} &= 4.24 \times 10^{-5}; \\
 k &= 0.01720209895; \\
 a_{\oplus} &= 1.0; \\
 e_{\oplus} &= 0.0167; \\
 \max \|\mathbf{q}\| &= 1.0167; \\
 \max \|\dot{\mathbf{q}}\| &= 0.0175;
 \end{aligned}$$

dove le ultime due quantità sono state ricavate dalle due relazioni⁶:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{q}\| &= a_{\oplus}(1 - e_{\oplus} \cos u_{\oplus}); \\
 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 &= k^2 \left(\frac{2}{\|\mathbf{q}\|} - \frac{1}{a_{\oplus}} \right);
 \end{aligned}$$

2.1.1.4 Bordo della regione ammissibile

A questo punto possiamo dare una descrizione completa del bordo della regione ammissibile D , che consiste di:

1. la parte della curva $\mathcal{E}_{\odot} = 0$ per $\rho > 0$;
2. due segmenti della retta $\rho = R_{\oplus}$;

⁶ e_{\oplus} indica l'eccentricità dell'orbita terrestre e u_{\oplus} l'anomalia eccentrica della Terra.

3. due parti della curva $\dot{\rho}^2 = G(\rho)$ (corrispondente a $\mathcal{E}_\oplus = 0$) e un segmento della retta $\rho = R_{SI}$ nel caso in cui $R_{SI} < \rho_0$; se, invece, $R_{SI} \geq \rho_0$ allora le due parti di $\dot{\rho}^2 = G(\rho)$ si uniscono per $\rho = \rho_0$.

Pertanto la regione ammissibile è formata da al più due componenti connesse ed è compatta, essendo all'interno di un numero finito di curve continue chiuse.

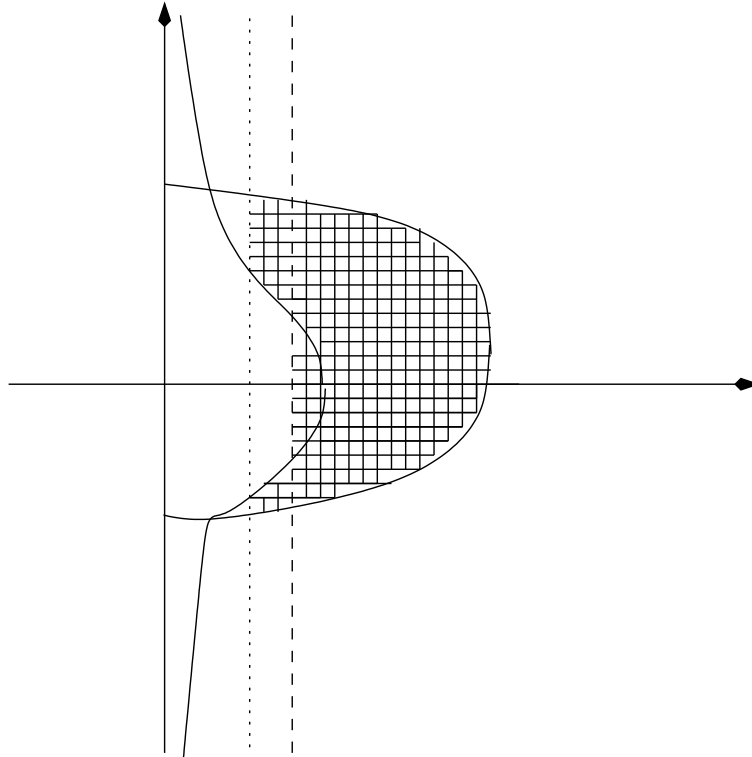


Figura 2.6: Sketch della regione ammissibile nel caso di una sola componente connessa. La linea a puntini e quella tratteggiata rappresentano rispettivamente le rette $\rho = R_\oplus$ e $\rho = R_{SI}$.

2.1.2 Bordo inferiore

I risultati esposti fino ad adesso ci danno una completa descrizione analitica e topologica della regione ammissibile. Da un punto di vista metrico però i risultati non sono pienamente soddisfacenti. Infatti, se teniamo conto della correzione topocentrica, ponendo $\mathbf{q} = \mathbf{q}_\oplus + \mathbf{P}^7$, allora il vincolo $\rho \geq R_\oplus$ non

⁷Come rappresentato in figura 2.2, \mathbf{P} indica la posizione dell'osservatore rispetto al centro della Terra.

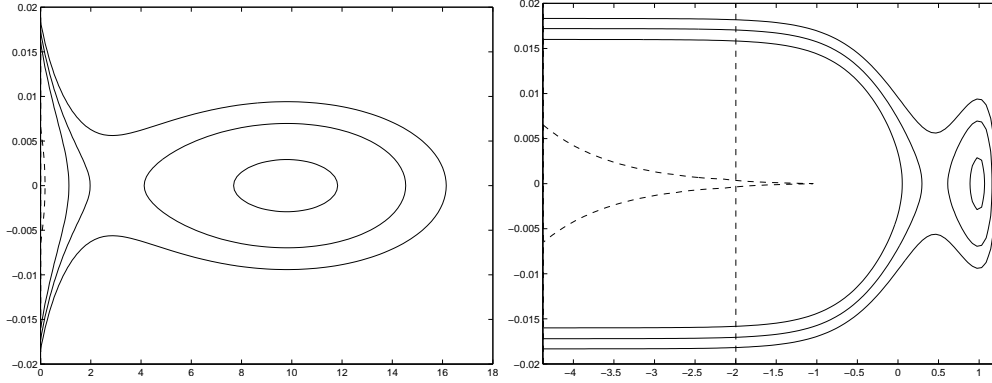


Figura 2.7: Un esempio con due componenti connesse. Sulla sinistra ci sono le curve di livello di \mathcal{E}_\odot (compresa quella relativa al valore 0) e la curva $\mathcal{E}_\oplus = 0$ (tratteggiata) nel piano $(\rho, \dot{\rho})$. Sulla destra c'è lo stesso grafico nel piano $(\log_{10}(\rho), \dot{\rho})$, dove la retta tratteggiata individua R_{SI} .

ha più senso e la regione ammissibile si estende fino a distanze arbitrariamente piccole tra il corpo osservato e l'osservatore.

È pertanto necessario sostituire la condizione precedente con un'altra che tenga conto della correzione topocentrica.

2.1.2.1 Stelle cadenti

Una condizione alternativa che limiti ρ dal basso è quella che l'oggetto non sia una stella cadente, cioè un oggetto molto piccolo e molto vicino. La dimensione di un oggetto è strettamente legata alla sua magnitudine assoluta, pertanto possiamo imporre che tale quantità non sia troppo elevata. Poniamo

$$D_5 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid H(\rho) \leq H_{max}\}.$$

La magnitudine $H(\rho)$ non dipende da $\dot{\rho}$ e dipende dalla magnitudine apparente h , quantità misurata assieme all'attribuibile, grazie alla relazione:

$$H(\rho) = h - 5 \log_{10} \rho - x(\rho)$$

dove $x(\rho)$ è una funzione nota che tiene conto di $\|\mathbf{r}\|$ e della fase, con la proprietà di dipendere da ρ in maniera trascurabile (e quindi essere praticamente costante) quando tale variabile diventa molto piccola⁸. Possiamo quindi approssimare $x(\rho)$ con la costante x_0 . In tal caso la condizione in D_5 diventa

$$\rho \geq 10^{(h-H_{max}-x_0)/5} = r_H.$$

⁸Per maggiori informazioni vedere [12].

Quindi, per ogni valore di h assegnato, esiste una distanza minima che limita dal basso ρ . Se prendiamo $H_{max} = 30$ (pochi metri di diametro) allora, ad esempio, all'opposizione (con $x_0 = 0$) si ha che

$$\begin{aligned} h = 20 &\Rightarrow \rho \geq 0.01; \\ h = 15 &\Rightarrow \rho \geq 0.001. \end{aligned}$$

In ogni caso la magnitudine assoluta non dipende da $\dot{\rho}$ e quindi la regione che rappresenta D_5 è un semipiano che soddisfa la condizione $\rho \geq r_H$. Assegnato $r_H \geq R_{\oplus}$ (per $H_{max} = 30$ questo accade quando $h \geq 8.1$) si possono usare le stesse argomentazioni della sezione precedente per dimostrare che la geometria della regione ammissibile non si complica sostituendo D_4 con D_5 . In realtà è addirittura possibile che la situazione si semplifichi: infatti, se $h > 20$ tutta la sfera di influenza della Terra viene esclusa dalla condizione in D_5 , quindi $D_5 \subseteq D_2$ e la condizione in D_1 diventa irrilevante.

2.1.2.2 Corpi ad impatto immediato o appena lanciati

È possibile escludere dalla regione ammissibile D i valori di $(\rho, \dot{\rho})$ per cui un oggetto con un certo moto proprio η non possa evitare una collisione con la Terra poco tempo dopo l'istante di osservazione. Allo stesso modo possiamo escludere i valori di $(\rho, \dot{\rho})$ che portano ad una collisione nell'immediato passato, cioè corrispondenti ad oggetti appena lanciati. Facciamo le seguenti assunzioni (descritte in figura 2.8):

1. il moto del corpo è rettilineo: si tratta di una valida approssimazione nel caso in cui l'intervallo di tempo sia abbastanza piccolo;
2. la correzione topocentrica viene trascurata.

Definiamo quindi la regione

$$D_6 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \eta\rho^2/|\dot{\rho}| \geq R_{\oplus}\}.$$

Questa condizione, tuttavia, non è molto significativa: infatti, oltre a complicare il dominio D , è interessante solo per oggetti molto piccoli (se fossero grandi sarebbero ben visibili), come nel caso delle stelle cadenti. Nella maggior parte dei casi la regione D_6 è molto meno rilevante di D_5 .

2.1.2.3 Regione ammissibile modificata

Modifichiamo la regione ammissibile come segue:

1. D_4 viene sostituito da D_5 ;

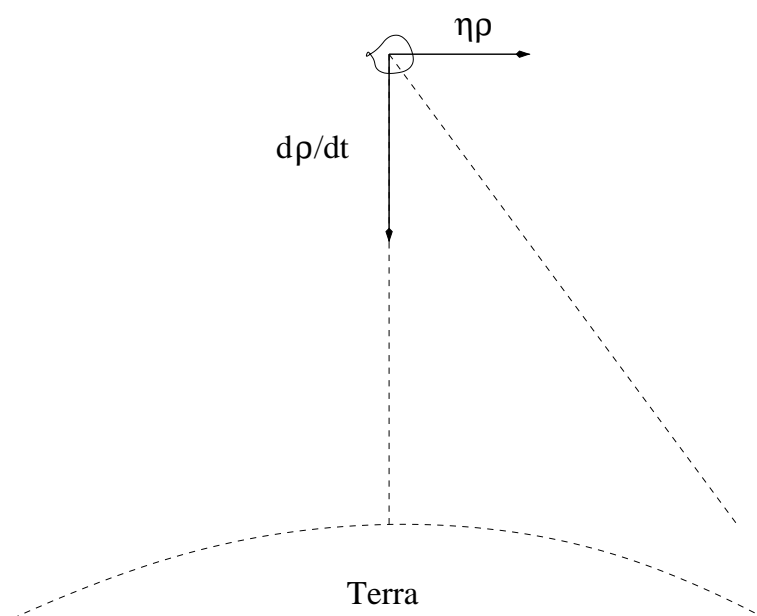


Figura 2.8: Traiettoria con impatto immediato.

2. in D_3 viene applicata la correzione topocentrica;
3. la condizione in D_3 viene rimpiazzata da $\mathcal{E}_{\odot} \leq -k^2/a_{max}$, in modo da escludere comete con un periodo troppo lungo, ad esempio con $a_{max} = 100$.

Non prendiamo in considerazione D_6 e non applichiamo la correzione topocentrica in D_1 ; queste modifiche non porterebbero vantaggi effettivi nel definire una regione ammissibile più realistica e renderebbero la sua geometria molto più complicata.

2.1.3 Campionamento della regione ammissibile

La regione ammissibile è un insieme infinito, dunque non è possibile effettuare diversi tipi di calcoli (come ad esempio le effemeridi) per ogni suo punto. Diventa quindi necessario campionarla con un numero finito, non troppo grande, di punti. Prima di farlo definiamo un algoritmo per triangolare la regione ammissibile: i nodi della triangolazione forniranno il campionamento cercato. Per prima cosa selezioniamo (con un opportuno criterio) un certo numero di punti appartenenti al bordo, con i quali verrà costruita una prima triangolazione che avrà tali punti come nodi. Infine, aggiungiamo nuovi nodi all'interno della regione ammissibile per ottenere una partico-

lare triangolazione che soddisfi alcune proprietà che verranno introdotte in seguito.

2.1.3.1 Campionamento del bordo

Il bordo della regione ammissibile ha una parte esterna, formata da archi della curva $\mathcal{E}_\odot = 0$ (simmetrica rispetto alla retta $\dot{\rho} = -c_1/2$); la curva $\mathcal{E}_\odot = -k^2/(2a_{max})$ che rappresenta il bordo esterno della regione ammissibile modificata è anch'essa simmetrica. Il bordo ha una parte interna composta da alcune combinazioni di archi appartenenti a $\mathcal{E}_\oplus = 0$ o alle rette $\rho = R_H$ e $\rho = R_{SI}$.

La simmetria rispetto a $\dot{\rho} = -c_1/2$ permette di fare i conti solo sulla regione inferiore ($\dot{\rho} \leq -c_1/2$), da $\rho = R_H$ fino al massimo valore ρ_{max} per cui il discriminante Δ_\odot si annulla. Quindi si procede al campionamento del bordo interno, usando la simmetria rispetto a $\dot{\rho}$ della curva $\mathcal{E}_\oplus = 0$.

I punti di intersezione tra le rette e le curve sono sempre inclusi nel campionamento del bordo, a meno che non ce ne siano alcuni troppo vicini: in tal caso si semplifica il bordo con un collegamento, al prezzo di includere nella triangolazione una piccola porzione di piano esterna alla regione ammissibile. Chiamiamo questa nuova regione \tilde{D} .

La regione ammissibile può avere due componenti connesse quando Δ_\odot ha tre radici reali. In tal caso si campionano separatamente i bordi delle due componenti.

Inoltre vogliamo selezionare punti che siano equispaziati sul bordo, ovvero, se il bordo viene parametrizzato attraverso la lunghezza d'arco s , allora la distanza tra una coppia di punti consecutivi corrisponde ad un incremento fissato \bar{s} .

È possibile evitare il calcolo del parametro lunghezza d'arco, usando la seguente tecnica. Assegnati n punti appartenenti a una curva γ di lunghezza unitaria, vogliamo selezionarne m ($m < n$) tali che la distanza sulla curva tra due punti consecutivi sia il più vicino possibile a $1/(m-1)$. Senza perdere di generalità supponiamo che γ sia l'intervallo unitario $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Sia $(P_k)_{k=1,n}$ un insieme di punti ordinati con $P_0 = 0$ e $P_n = 1$, e sia $(Q_j)_{j=1,m}$ la sequenza dei punti perfettamente equispaziati:

$$Q_{j+1} - Q_j = \frac{1}{m-1} = h.$$

Definiamo $d_k = P_k - P_{k-1}$ e $\delta_{kj} = |Q_j - P_k|$; notiamo che per ogni P_k esiste un Q_j per cui $\delta_{kj} \leq h/2$. A questo punto definiamo la seguente regola di

eliminazione: vengono scartati i punti $(P_{\bar{k}})$ tali che \bar{k} minimizza la funzione:

$$f(k) = \frac{\min\{d_k, d_{k+1}\}}{1 + \min_{j=1,m} \delta_{kj}}. \quad (2.11)$$

A questo punto basta applicare $(n - m)$ volte tale regola: da notare che ad ogni passo il valore dei d_k può cambiare a causa delle precedenti eliminazioni. Indichiamo con $(\hat{P}_j)_{j=1,m}$ il sottoinsieme dei numeri selezionati. Dimostriamo la bontà di tale algoritmo:

Proposizione 2.9. *Se vale che*

$$(Q_j)_{j=1,m} \subseteq (P_k)_{k=1,n} \quad (2.12)$$

allora $\hat{P}_j = Q_j$ per ogni j .

Dimostrazione. Se $f(\bar{k}) \leq f(k)$ per ogni k , allora bisogna dimostrare che:

- (i) $f(k) < h$;
- (ii) $P_{\bar{k}} \notin (Q_j)_{j=1,m}$.

Non può accadere che $f(\bar{k}) > h$ perché, per la (2.11), $f(k) \leq \min\{d_k, d_{k+1}\}$ e $d_k \leq h$ a causa di (2.12). Si può scartare anche il caso in cui $f(\bar{k}) = h$, infatti, dato che $n > m$, almeno due punti devono avere una mutua distanza minore di h . Quindi la (i) è dimostrata.

Adesso dimostriamo che vale (ii). Se, per assurdo, $P_{\bar{k}} = Q_j$ per qualche j , allora facciamo vedere che esiste $k \neq \bar{k}$ per cui f assume un valore inferiore. Abbiamo che $f(\bar{k}) = \min\{d_{\bar{k}}, d_{\bar{k}+1}\}$, dal momento che il denominatore in (2.11) si riduce ad 1. Assumiamo che $d_{\bar{k}} = \min\{d_{\bar{k}}, d_{\bar{k}+1}\}$, allora $\min\{d_{\bar{k}-1}, d_{\bar{k}}\} \leq d_{\bar{k}}$ e, grazie alla (i), $d_{\bar{k}} < h$, cioè $P_{\bar{k}-1} \notin (Q_j)_{j=1,m}$. Quindi $\delta_{\bar{k}-1,j} > 0$ per ogni j e di conseguenza $f(k-1) < f(k)$. Il caso in cui $d_{\bar{k}+1} = \min\{d_{\bar{k}}, d_{\bar{k}+1}\}$ è perfettamente analogo. Abbiamo pertanto trovato un assurdo.

I Q_j non vengono mai scartati, quindi dopo $n - m$ passi rimangono solo loro. \square

Nel caso generale, in cui i punti non vengono selezionati da una procedura ottimale, quelli rimanenti non saranno perfettamente equispaziati ma rappresenteranno una buona approssimazione.

Il numero di punti usato per campionare il bordo deve essere limitato per ragioni pratiche perché, come si vedrà in seguito, il numero finale di VAs⁹ è proporzionale al numero di punti sul bordo, e il costo computazionale di qualsiasi predizione dipende dal numero di VAs.

⁹Asteroidi virtuali.

2.1.3.2 Triangolazioni ottimali

Consideriamo il dominio \tilde{D} , definito connettendo i punti sul bordo della regione ammissibile: vogliamo trovare un modo di triangolare \tilde{D} .

Definizione 2.10. *Una triangolazione di un dominio poligonale \tilde{D} è una coppia (Π, τ) , dove $\Pi = \{P_1, \dots, P_N\}$ è un insieme di punti del dominio e $\tau = \{T_1, \dots, T_k\}$ è un insieme di triangoli con vertici in Π .*

Indichiamo con T_i l'insieme di tutti i punti contenuti in T_i . Con questa notazione, cerchiamo una triangolazione che abbia le seguenti proprietà:

- (i) $\bigcup_{i=1,k} T_i = \tilde{D}$;
- (ii) per ogni $i \neq j$ l'insieme $T_i \cap T_j$ è vuoto oppure un vertice oppure un lato del triangolo.

Ad ogni triangolazione è possibile associare il minimo angolo, ovvero il più piccolo angolo di tutti i triangoli. Tra tutte le triangolazioni di un dominio convesso ne esiste una particolare:

Definizione 2.11. *Sia (Π, τ) una triangolazione del dominio convesso \tilde{D} , tale triangolazione si dice di Delaunay se è caratterizzata dalle seguenti proprietà:*

- (i) *massimizza il minimo angolo;*
- (ii) *minimizza la circonferenza circoscritta di massimo raggio;*
- (iii) *per ogni triangolo T_i , la parte interna della circonferenza circoscritta non contiene alcun nodo.*

Teorema 2.12. *Le proprietà (i), (ii) e (iii) della definizione precedente sono equivalenti.*

Dimostrazione. Omessa¹⁰. □

Se il dominio è un quadrilatero convesso i cui vertici non stanno sulla stessa circonferenza, esistono solo due possibili triangolazioni, di cui solo una è di Delaunay (figura 2.9). È possibile passare da una triangolazione all'altra semplicemente scambiando la diagonale. Quando si passa da una triangolazione che non sia di Delaunay ad una di Delaunay si applica quello che si chiama algoritmo di edge-flipping.

¹⁰La dimostrazione si trova in [13].

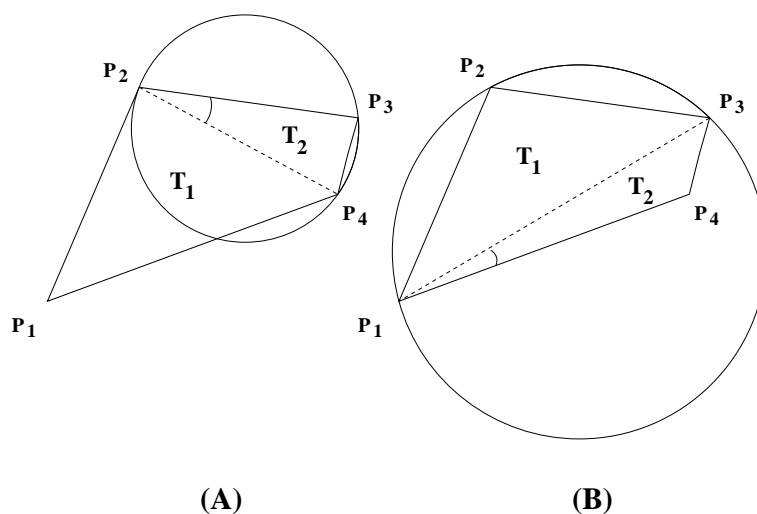


Figura 2.9: Possibili triangolazioni del quadrilatero $P_1 P_2 P_3 P_4$: quella indicata con (A). è una triangolazione di Delaunay. In entrambi i casi vengono indicati il minimo angolo e le circonferenze circoscritte.

Definizione 2.13. *Se si impone che ad una triangolazione di un dominio \tilde{D} appartengano dei lati fissati, allora tale triangolazione si dice vincolata.*

Definizione 2.14. *Assegnato un vincolo, una triangolazione si dice di Delaunay vincolata se soddisfa le condizioni (i) e (ii) della Definizione 2.11.*

Teorema 2.15. *Fissato un vincolo allora esiste una triangolazione di Delaunay vincolata. La condizione (iii) della definizione 2.11 non è garantita, poiché il dominio non è convesso.*

Dimostrazione. Omessa¹¹. □

In particolare, quando il dominio poligonale non è convesso, una volta imposto il vincolo dei lati sul bordo, è possibile ottenere una triangolazione di Delaunay vincolata.

La figura 2.9 suggerisce una tecnica per trasformare una qualsiasi triangolazione di \tilde{D} in una di Delaunay vincolata: per ogni triangolo T_i , si itera l'algoritmo di edge-flipping coi triangoli adiacenti. Si può dimostrare che tale iterazione è convergente e porta ad una triangolazione di Delaunay vincolata¹².

Applichiamo quello che abbiamo appena descritto alla regione ammissibile. Per quanto visto durante il campionamento del bordo, ci interessa triangolare il dominio \tilde{D} . Si procede in diversi passi:

¹¹La dimostrazione si trova in [13].

¹²La dimostrazione si trova in [14].

1. Prendiamo una qualsiasi triangolazione di \tilde{D} costruita a partire dai lati che collegano i punti del bordo. Applichiamo l'algoritmo di edge-flipping fino ad ottenere una triangolazione vincolata (Π_0, τ_0) .
2. Cerchiamo di raffinare tale triangolazione aggiungendo punti all'interno del dominio senza perdere la proprietà di Delaunay sulla massimizzazione del minimo angolo. Per fare questo definiamo la seguente densità discreta sui nodi del bordo:

$$\rho(P_j) = \min_{l \neq j} d(P_j, P_l)$$

dove d è una opportuna distanza. Sia G_i il baricentro del triangolo T_i e definiamo l'ulteriore densità:

$$\tilde{\rho}(G_i) = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 \rho(P_{im})$$

dove P_{im} sono i vertici del triangolo T_i . Aggiungiamo alla triangolazione il baricentro G_k che massimizza la quantità:

$$\min_j \left\{ \frac{d(G_i, P_j)}{\tilde{\rho}(G_i)} \right\},$$

quindi rimuoviamo T_k e aggiungiamo i tre triangoli ottenuti congiungendo i vertici di T_k con G_k . A questo punto ripetiamo l'algoritmo di edge-flipping e iteriamo il tutto fino a che

$$\max_{G_i} \left(\min_j \left\{ \frac{d(G_i, P_j)}{\tilde{\rho}(G_i)} \right\} \right) > \sigma$$

dove σ è un piccolo parametro fissato.

Teorema 2.16. *L'algoritmo converge e il numero finale di triangoli è minore di*

$$\frac{\mu(\partial\tilde{D})n_0}{\sqrt{3}\sigma}$$

dove n_0 è il numero di punti del bordo, la cui lunghezza viene indicata con $\mu(\partial\tilde{D})$.

Dimostrazione. Omessa¹³. □

Otteniamo quindi una triangolazione vincolata di Delaunay (Π_1, τ_1) .

¹³La dimostrazione si trova in [15].

3. Cerchiamo di migliorare la qualità di (Π_1, τ_1) , spostando P_j nel centro di massa di tutti i nodi ad esso collegati. Quella che otteniamo non è necessariamente una triangolazione di Delaunay vincolata, pertanto applichiamo nuovamente l'edge-flipping, rendendo ottimale la massimalità del minimo angolo.

Al termine di questa procedura otteniamo la triangolazione cercata.

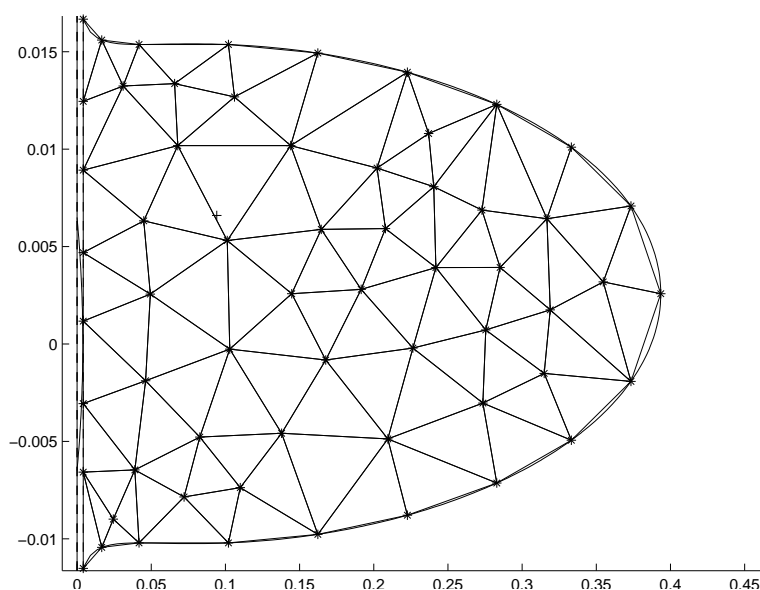


Figura 2.10: Un esempio di regione ammissibile campionata. Sulle ascisse viene indicato il valore $f(\rho)$ e sulle ordinate quello di $\dot{\rho}$.

2.1.3.3 Scelta della metrica

La definizione della triangolazione di Delaunay usa distanze e angoli, quindi dipende dalla metrica adottata per lo spazio $(\rho, \dot{\rho})$. In particolare è possibile scegliere una funzione strettamente crescente $f(\rho)$ ed effettuare la triangolazione della regione ammissibile con la seguente metrica:

$$ds^2 = df(\rho)^2 + d\dot{\rho}^2.$$

In altre parole possiamo lavorare nel piano $(f(\rho), \rho)$ dotato della norma euclidea.

Una particolare scelta che si rivela efficiente e flessibile è quella data da:

$$f(\rho) = 1 - e^{-\rho^2/2b^2}$$

dove b è un parametro fissato. Dato che $f'(\rho)$ ha massimo per $\rho = b$ la scelta del valore di b ci dice quale parte della regione ammissibile deve essere campionata con maggiore densità. Quindi se, ad esempio, ρ_{max} è la più grande radice positiva di Δ_{\odot} , la metrica indotta dalla scelta $b = \rho_{max}$ aumenta la densità del campionamento nella zona del piano $(\rho, \dot{\rho})$ vicina a $\rho = \rho_{max}$; se, invece, viene scelto un b opportunamente piccolo è possibile campionare con più precisione la zona in prossimità della Terra¹⁴.

2.1.4 Effemeridi triangolate

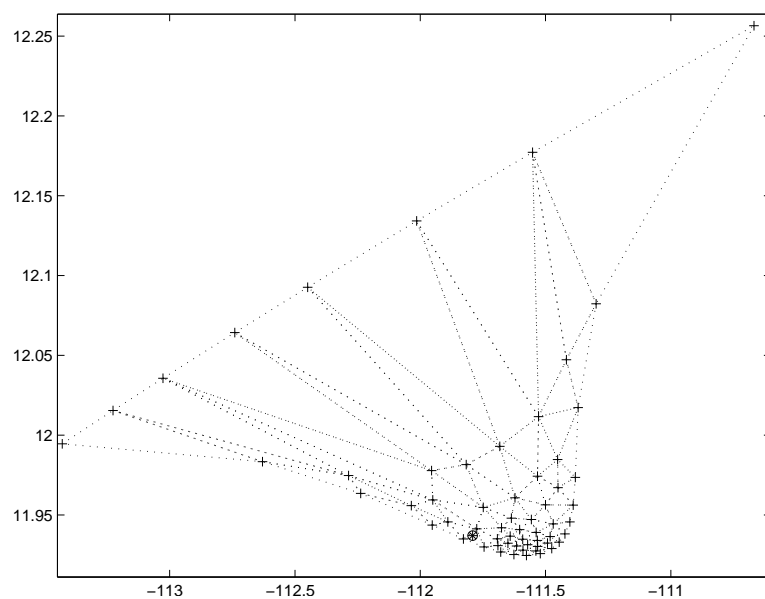


Figura 2.11: Un esempio di regione delle effemeridi campionata. Sulle ascisse viene indicato il valore α e sulle ordinate quello di δ .

Vediamo adesso un'applicazione della teoria sulla regione ammissibile e delle sue triangolazioni: la generazione di effemeridi. Se l'orbita di un asteroide è stata determinata in accordo col principio dei minimi quadrati, le effemeridi all'istante t_1 diverso da t (cioè dal tempo di osservazione) sono le previsioni dei valori di α e δ sulla sfera celeste a quell'istante. Nel caso in cui i dati derivanti dalle osservazioni non siano sufficienti a determinare completamente un'orbita (ad esempio se disponiamo di due sole osservazioni o se l'arco osservato è troppo corto) la nozione di effemeridi viene ridefinita come l'insieme dei valori degli angoli α e δ all'istante t_1 compatibili coi dati a disposizione.

¹⁴Potrebbe essere utile per trovare i NEOs.

Se possiamo assumere che l'oggetto soddisfi le condizioni che definiscono la regione ammissibile, allora esiste un insieme di valori per α e δ all'istante t_1 che, per continuità, è un sottoinsieme compatto della sfera celeste con al più due componenti connesse. Purtroppo non si conoscono algoritmi per calcolare esplicitamente questo sottoinsieme. L'obiettivo che si può raggiungere è quello di campionare questo insieme attraverso una triangolazione. Una volta assegnata una triangolazione della regione ammissibile possiamo calcolare α e δ al tempo t_1 per ogni nodo. Infatti, ogni nodo corrisponde ad una scelta dei valori di $(\rho, \dot{\rho})$ all'istante t che, assieme all'attribuibile, forniscono un insieme di sei condizioni iniziali da cui è possibile determinare l'orbita (ognuno di questi nodi è un asteroide virtuale o, più brevemente, VA).

Il problema è capire quanto debba essere densa la triangolazione della regione ammissibile, cioè quante orbite vadano propagate da t a t_1 , per campionare in maniera efficiente ed utile la regione delle effemeridi. In particolare sarà necessario che le distanze tra i punti di campionamento siano comparabili col campo di vista del telescopio con cui si intende osservare. Non esiste una formulazione analitica che risolva la questione, ma esistono regole empiriche che permettono di campionare efficacemente la regione ammissibile.

2.2 Detriti spaziali

La porzione di spazio vicino alla Terra è costellata da più di 300000 detriti artificiali con diametro maggiore di 1 cm. Lo spazio in cui tali oggetti si trovano è diviso in tre regioni principali:

- Low Earth Orbit (LEO): sotto i 2000 km di altitudine;
- Medium Earth Orbit (MEO): tra i 2000 km e i 36000 km di altitudine;
- Geosynchronous Earth Orbit (GEO): ad un altitudine di circa 36000 km.

Solitamente, per gli oggetti di tipo LEO e MEO vengono usate osservazioni radar mentre per i GEOs si usano osservazioni di tipo ottico. In entrambi i casi abbiamo un TSA che non ci permette di determinare un'orbita per gli oggetti osservati.

Come nel caso degli asteroidi costruiamo una regione ammissibile, campionando la quale si producono i VAs.

2.2.1 Regione ammissibile nel caso ottico

In questa sezione si vuole dare una definizione analitica della regione ammissibile per oggetti appartenenti ai detriti spaziali che vengono osservati

con un sensore ottico. La condizione principale è che l'energia geocentrica dell'oggetto sia negativa.

Indichiamo con \mathbf{P} e \mathbf{r} le posizioni geocentriche dell'osservatore e del corpo osservato mentre $\boldsymbol{\rho}$ è la posizione relativa:

$$\mathbf{r} = \mathbf{P} + \boldsymbol{\rho}. \quad (2.13)$$

Usiamo le coordinate polari definite da (2.1).

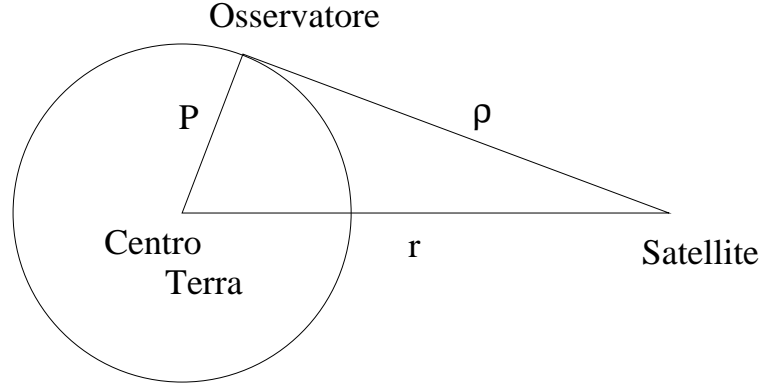


Figura 2.12: Configurazione geometrica di Terra, osservatore e corpo osservato.

Definizione 2.17. *Un attribuibile ottico è un vettore*

$$\mathcal{A}_{opt} = (\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}) \in [-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R}^2,$$

osservato all'istante t .

Dato che ρ e $\dot{\rho}$ non sono note, cerchiamo delle opportune condizioni che devono soddisfare.

Introduciamo le seguenti quantità:

- Energia geocentrica (per unità di massa):

$$\mathcal{E}_{\oplus}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\mu_{\oplus}}{\|\mathbf{r}\|}$$

dove $\mu_{\oplus} = GM_{\oplus}$ e M_{\oplus} è la massa della Terra.

- Limite inferiore per la distanza dell'oggetto dall'osservatore:

$$\rho_{min} = 2R_{\oplus} \simeq 12756 \text{ km.}$$

Questo limite è dovuto al fatto che siamo interessati ad oggetti con orbita alta. Infatti, gli oggetti con orbita bassa vengono solitamente osservati con il radar.

- Limite superiore per la distanza dell'oggetto dall'osservatore:

$$\rho_{max} = 20R_{\oplus} \simeq 127560 \text{ km.}$$

I valori di ρ_{min} e ρ_{max} possono variare a seconda delle esigenze. La scelta fatta in questo caso dipende dalla bassa densità degli oggetti presenti al di fuori di tali limiti.

Imponiamo adesso le condizioni che deve soddisfare la coppia $(\rho, \dot{\rho})$:

- $C_1 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \mathcal{E}_{\oplus} < 0\}$, cioè l'oggetto osservato è un satellite terrestre;
- $C_2 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \rho_{min} < \rho < \rho_{max}\}$.

In realtà andrebbe aggiunta una ulteriore condizione: il corpo, infatti, deve appartenere al Sistema Solare. Tuttavia questa condizione, una volta osservato che $\rho_{max} < R_{SI}$, è garantita da dal teorema 2.7. Tale osservazione ci permette anche di trascurare l'energia eliocentrica, visto che il corpo appartiene alla sfera di influenza terrestre.

Definizione 2.18. *Assegnato un attribuibile ottico \mathcal{A}_{opt} definiamo la regione ammissibile per un detrito spaziale come*

$$C = C_1 \cap C_2.$$

C_2 delimita soltanto ρ ed appare come una striscia infinita nel piano. Cerchiamo quindi una descrizione geometrica e analitica di C_1 .

Derivando (2.13) si ottiene:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{P}} + \dot{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho \dot{\alpha} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha} + \rho \dot{\delta} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta}$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} &= (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta), \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha} &= (-\sin \alpha \cos \delta, \cos \alpha \cos \delta, 0), \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta} &= (-\cos \alpha \sin \delta, -\sin \alpha \sin \delta, \cos \delta). \end{aligned}$$

Questi tre vettori costituiscono una base ortogonale di \mathbb{R}^3 , ma non ortonormale poiché $\|\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha}\| = \cos \delta$. Scriviamo posizione e velocità geocentriche dell'oggetto in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \rho^2 + 2\rho \langle \mathbf{P}, \hat{\boldsymbol{\rho}} \rangle + \|\mathbf{P}\|^2, \\ \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 &= \dot{\rho}^2 + 2\dot{\rho} \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\boldsymbol{\rho}} \rangle + \rho^2(\dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2) + \\ &\quad + 2\rho(\dot{\alpha} \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha} \rangle + \dot{\delta} \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta} \rangle) + \|\dot{\mathbf{P}}\|^2. \end{aligned}$$

Introduciamo la notazione seguente:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \|\mathbf{P}\|^2, \\
w_1 &= 2\langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\rho} \rangle, \\
w_2 &= \dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2, \\
w_3 &= 2\dot{\alpha} \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\rho}_\alpha \rangle + 2\dot{\delta} \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\rho}_\delta \rangle, \\
w_4 &= \|\dot{\mathbf{P}}\|^2, \\
w_5 &= 2\langle \mathbf{P}, \hat{\rho} \rangle.
\end{aligned}$$

In questi termini si ha che

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}\|^2 &= \rho^2 + w_5\rho + w_0, \\
\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 &= \dot{\rho}^2 + w_1\dot{\rho} + w_2\rho^2 + w_3\rho + w_4.
\end{aligned}$$

A questo punto la condizione che definisce C_1 può essere riscritta in questo modo:

$$2\mathcal{E}_\oplus = \dot{\rho}^2 + w_1\dot{\rho} + T(\rho) - \frac{2\mu_\oplus}{\sqrt{S(\rho)}} < 0 \quad (2.14)$$

dove

$$\begin{aligned}
T(\rho) &= w_2\rho^2 + w_3\rho + w_4, \\
S(\rho) &= \rho^2 + w_5\rho + w_0.
\end{aligned}$$

Anche in questo caso, come già visto per 2.8, è possibile ottenere una disequazione algebrica di grado 6.

Affinché (2.14) abbia soluzioni reali per $\dot{\rho}$ è necessario che $2\mathcal{E}_\oplus$, visto come polinomio di secondo grado in $\dot{\rho}$, abbia discriminante non negativo:

$$\Delta_\oplus = \frac{\Delta}{4} = \frac{w_1^2}{4} - T(\rho) + \frac{2\mu_\oplus}{\sqrt{S(\rho)}} \geq 0.$$

Quest'ultima disequazione può essere vista come

$$\frac{2\mu_\oplus}{\sqrt{S(\rho)}} \geq Q(\rho) \quad (2.15)$$

dove

$$Q(\rho) = w_2\rho^2 + w_3\rho + \gamma,$$

con

$$\gamma = w_4 - \frac{w_1^2}{4}.$$

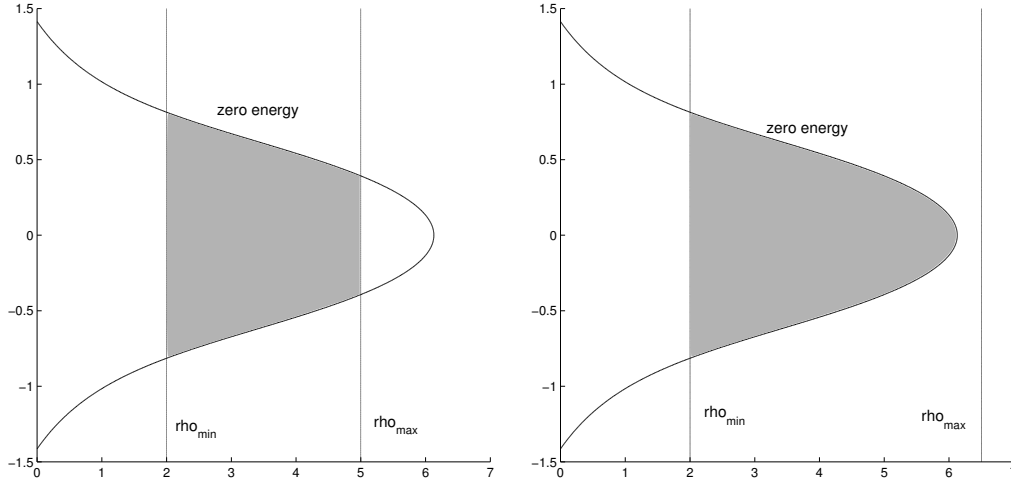


Figura 2.13: Esempio di regione ammissibile nel caso di una componente connessa.

Notiamo che il polinomio $Q(\rho)$ è non negativo, infatti coincide con l'opposto del discriminante di $\|\dot{\mathbf{r}}\|^2/2$ (visto come polinomio di secondo grado in $\dot{\rho}$).

Infine riscriviamo la condizione (2.15) introducendo il polinomio di sesto grado $V(\rho)$:

$$V(\rho) = Q^2(\rho)S(\rho) \leq 4\mu_{\oplus}^2.$$

Possiamo quindi applicare il teorema 2.3 e concludere che la regione ammissibile ha al più due componenti connesse.

Nelle Figure 2.13 e 2.14 vengono descritti i possibili comportamenti qualitativi della regione ammissibile, al variare del numero di componenti connesse e della posizione relativa tra ρ_{max} e le intersezioni di $\mathcal{E}_{\oplus} = 0$ con $\dot{\rho} = 0$.

Al fine di escludere oggetti appena lanciati o ad impatto immediato, è possibile porre un vincolo sul semiasse maggiore a assegnando un minimo valore possibile $\mathcal{E}_{\oplus}^{min}$ per l'energia. In questo modo sostituiamo C_1 con l'insieme

$$C'_1 = \{(\rho, \dot{\rho}) \mid \mathcal{E}_{\oplus}^{min} < \mathcal{E}_{\oplus} < 0\}.$$

In figura 2.15 viene mostrato come cambia la regione ammissibile imponendo questa nuova condizione.

2.2.1.1 Condizione sul pericentro

La condizione imposta in precedenza sul semiasse maggiore può essere migliorata: se vogliamo escludere oggetti appena lanciati o ad impatto immediato

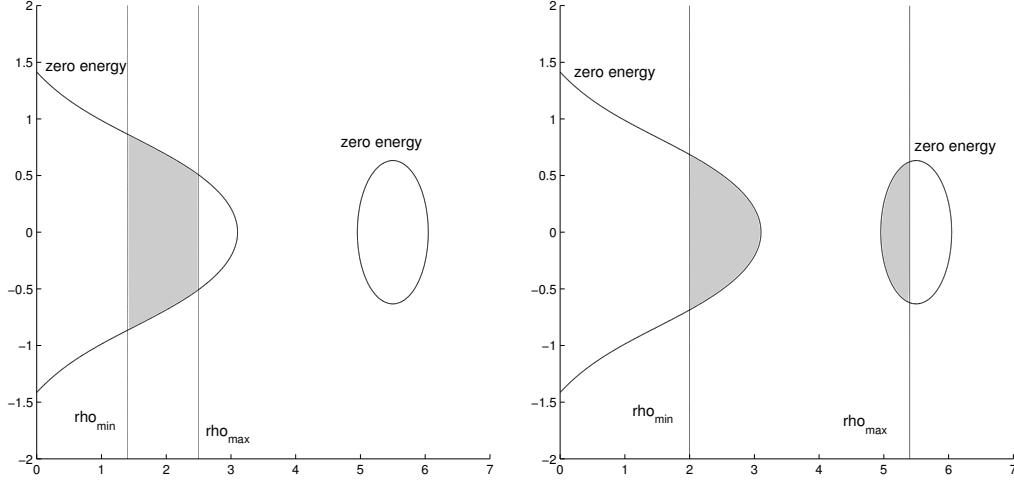


Figura 2.14: Esempi di regione ammissibile nel caso di due componenti connesse. Nella figura di destra la seconda componente non interseca la retta $\rho = \rho_{max}$, come accade in quella di destra.

dobbiamo limitare il pericentro r_p dell'orbita del corpo osservato¹⁵. Fissiamo pertanto una quota di sicurezza h e studiamo la disequazione

$$r_p = a(1 - e) \geq R_{\oplus} + h = \bar{r}. \quad (2.16)$$

Abbiamo bisogno di esprimere semiasse maggiore ed eccentricità in funzione di ρ e $\dot{\rho}$. Per fare questo usiamo le seguenti relazioni¹⁶:

$$a = -\frac{\mu_{\oplus}}{2\mathcal{E}_{\oplus}},$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}_{\oplus} \|\mathbf{c}\|^2}{\mu_{\oplus}^2}}$$

dove \mathbf{c} è il momento angolare. A questo punto la (2.16) diventa

$$-\frac{\mu_{\oplus}}{2\mathcal{E}_{\oplus}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}_{\oplus} \|\mathbf{c}\|^2}{\mu_{\oplus}^2}} \right) \geq \bar{r}.$$

che può essere riscritta in questo modo¹⁷:

$$\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}_{\oplus} \|\mathbf{c}\|^2}{\mu_{\oplus}^2}} \leq 1 + \frac{2\mathcal{E}_{\oplus} \bar{r}}{\mu_{\oplus}}. \quad (2.17)$$

¹⁵Tale condizione, assieme ad una analoga sull'apocentro, è stata studiata in [17]

¹⁶Per i conti espliciti vedere [21].

¹⁷Da notare che $\mathcal{E}_{\oplus} < 0$, affinché il corpo stia nella regione ammissibile.

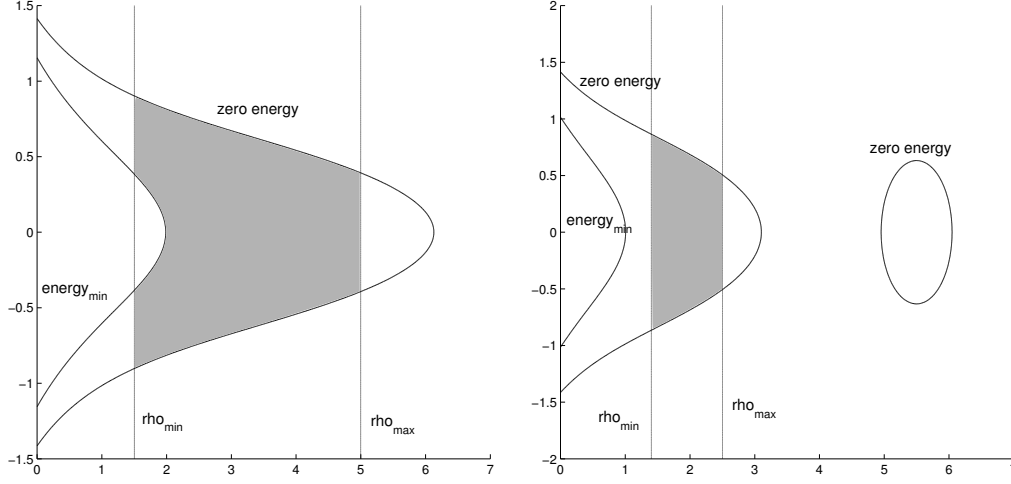


Figura 2.15: Esempi di regione ammissibile nel caso di una (a sinistra) e due (a destra) componenti connesse con l'aggiunta del vincolo sul semiasse maggiore.

Studiamo tale disequazione. Tanto per cominciare imponiamo la condizione di realtà per la radice:

$$1 + \frac{2\mathcal{E}_\oplus \|\mathbf{c}\|^2}{\mu_\oplus^2} \geq 0.$$

Tale condizione è sempre verificata dal momento che ad ogni punto della regione ammissibile corrisponde un'orbita, che avrà una certa eccentricità (che pertanto deve essere ben definita).

Procediamo osservando che il termine di destra in (2.17) dovrà essere non negativo:

$$1 + \frac{2\mathcal{E}_\oplus \bar{r}}{\mu_\oplus} \geq 0.$$

Da notare che quest'ultima disequazione è perfettamente equivalente alla condizione imposta in precedenza, per cui $a \geq \bar{r}$. A questo punto eleviamo al quadrato e, dopo qualche semplificazione, si ottiene che

$$\|\mathbf{c}\|^2 \geq 2\bar{r}(\mu_\oplus + \mathcal{E}_\oplus \bar{r}). \quad (2.18)$$

L'espressione (2.14) ci dice come esprimere l'energia in funzione di ρ e $\dot{\rho}$. Per quanto riguarda il momento angolare un semplice conto mostra che

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\rho + \mathbf{C}\rho^2 + \mathbf{D}\dot{\rho}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P} \times \dot{\mathbf{P}}, \\ \mathbf{B} &= \dot{\alpha} \mathbf{P} \times \hat{\rho}_\alpha + \dot{\delta} \mathbf{P} \times \hat{\rho}_\delta + \dot{\mathbf{P}} \times \hat{\rho}, \\ \mathbf{C} &= \dot{\alpha} \hat{\rho} \times \hat{\rho}_\alpha + \dot{\delta} \hat{\rho} \times \hat{\rho}_\delta, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{P} \times \hat{\rho}. \end{aligned}$$

La regione ammissibile diventa pertanto l'insieme dei valori di $(\rho, \dot{\rho})$ per cui viene verificato il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\oplus < 0 \\ \rho_{min} < \rho < \rho_{max} \\ \mathcal{E}_\oplus \geq -\mu_\oplus/2\bar{r} \\ \|\mathbf{c}\|^2 \geq 2\bar{r}(\mu_\oplus + \mathcal{E}_\oplus\bar{r}) \end{cases}$$

La prima e la terza disequazione sono riconducibili ad espressioni algebriche

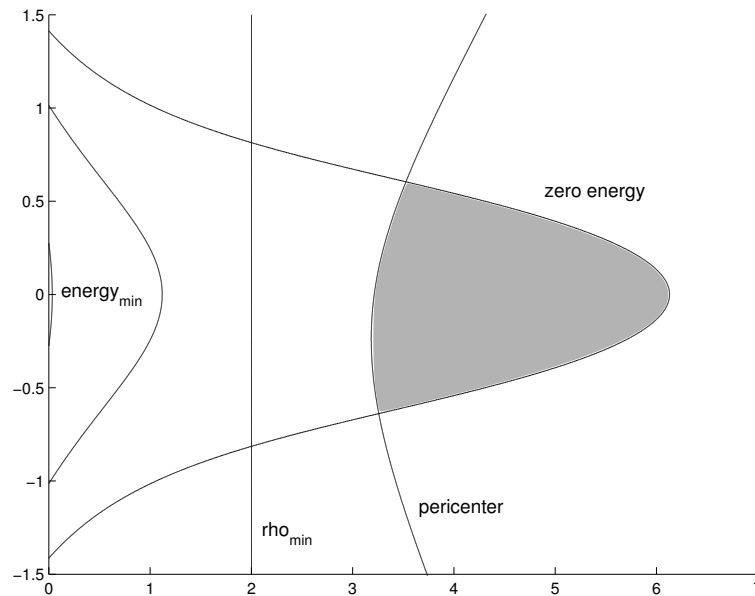


Figura 2.16: Esempio di regione ammissibile con l'inclusione del vincolo sul pericentro.

di grado 6, come già visto in precedenza. Analizziamo l'ultima, introducendo le quantità

$$\begin{aligned} W(\rho, \dot{\rho}) &= \|\mathbf{c}\|^2, \\ K(\rho, \dot{\rho}) &= \dot{\rho}^2 + w_1\rho + T(\rho) \end{aligned}$$

possiamo riscrivere tale disequazione come

$$\frac{2\mu_{\oplus}}{\sqrt{S(\rho)}} \geq K(\rho, \dot{\rho}) + \frac{\mu_{\oplus}}{\bar{r}} - W(\rho, \dot{\rho}).$$

A questo punto, elevando al quadrato ambo i membri, moltiplicando il tutto per S e osservando che W ha grado 4 mentre S e K sono di grado 2, si ottiene una disequazione algebrica di decimo grado.

In figura 2.16 viene mostrato un esempio di regione ammissibile, con l'aggiunta della condizione sul pericentro. In tale esempio si ottiene una sensibile riduzione della regione ammissibile e non cambia il numero di componenti connesse. La validità generale di due questi fatti deve ancora essere indagata.

2.2.1.2 Condizione sull'apocentro

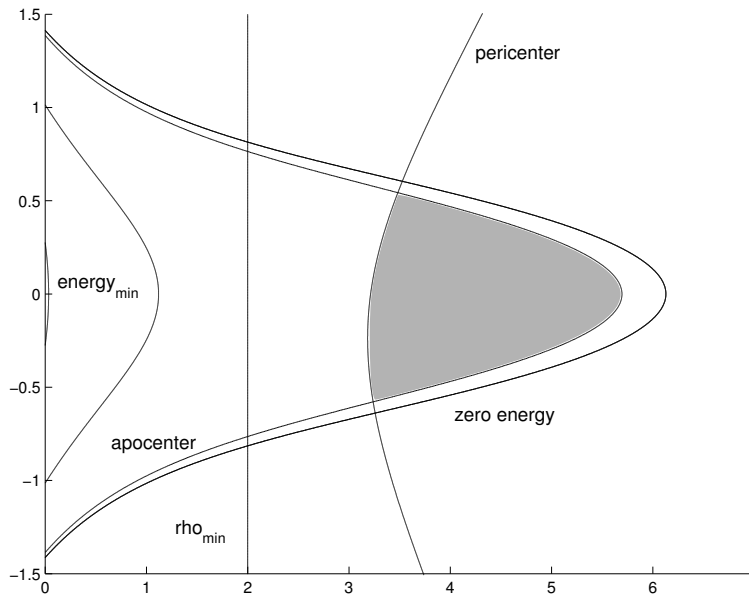


Figura 2.17: Stesso esempio di figura 2.16 con l'inclusione del vincolo sull'apocentro.

È possibile anche limitare dall'alto il valore dell'apocentro, cioè imporre la seguente condizione:

$$r_a = a(1 + e) \leq \bar{R}$$

dove \bar{R} sarà scelto a secondo dei casi. Procedendo come nella precedente

sottosezione si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\oplus &\geq -\frac{\mu_\oplus}{2\bar{R}}, \\ \|\mathbf{c}\|^2 &\geq 2\bar{R}(\mu_\oplus + \mathcal{E}_\oplus \bar{R}).\end{aligned}$$

La condizione appena proposta non porta ad un effettiva riduzione della regione ammissibile, come si apprezza osservando la figura 2.17. Ad ogni modo è interessante notare che tale figura coincide con quella presente in [17]¹⁸ ma, al contrario di quest'ultima, è ottenuta per via analitica.

2.2.1.3 Campionamento della regione ammissibile con triangolazioni

Come nel caso degli asteroidi, per poter effettuare calcoli praticamente accessibili, è necessario campionare la regione ammissibile.

Dato che non è ancora disponibile una teoria analitica che fornisca informazioni sul numero di componenti connesse, una volta preso in considerazione il vincolo sul pericentro (ed eventualmente quello sull'apocentro), è preferibile effettuare il campionamento trascurando tale condizione. Per fare questo basta applicare i risultati precedentemente ottenuti nella sezione 2.1.3.

Una volta effettuato questo campionamento preliminare si procede scartando tutti i nodi la cui corrispondente orbita è caratterizzata da un pericentro inferiore al limite imposto (o un apocentro troppo grande).

2.2.2 Regione ammissibile nel caso radar

Quando viene fatta un'osservazione di tipo radar le quantità che vengono misurate sono il modulo della distanza, la velocità radiale e la posizione sulla sfera celeste dell'oggetto osservato. I dati che mancano sono le misure delle velocità angolari $\dot{\alpha}$ e $\dot{\delta}$. Pertanto è necessario ridefinire i concetti di attribuibile e regione ammissibile.

Definizione 2.19. *Un attribuibile di tipo radar è un vettore*

$$\mathcal{A}_{rad} = (\alpha, \delta, \rho, \dot{\rho}) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

osservato ad un certo istante t .

Definizione 2.20. *Assegnato un attribuibile \mathcal{A}_{rad} si definisce la regione ammissibile per un detrito spaziale come*

$$C = \{(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) \mid \mathcal{E}_\oplus < 0\}.$$

¹⁸Infatti sono stati usati gli stessi dati.

In questo caso però si dovrà esprimere l'energia geocentrica in funzione di $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$. Sostituendo l'espressione di $T(\rho)$ in (2.14) si ottiene che

$$2\mathcal{E}_{\oplus} = \dot{\rho}^2 + w_1\dot{\rho} + w_2\rho^2 + w_3\rho + w_4 - \frac{2\mu_{\oplus}}{\sqrt{S(\rho)}} \quad (2.19)$$

dove soltanto i coefficienti w_2 e w_3 dipendono da $\dot{\alpha}$ e $\dot{\delta}$. Espandendo l'espressione precedente si ottiene il seguente polinomio di secondo grado:

$$2\mathcal{E}_{\oplus} = F(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) = z_{11}\dot{\alpha}^2 + 2z_{12}\dot{\alpha}\dot{\delta} + z_{22}\dot{\delta}^2 + 2z_{13}\dot{\alpha} + 2z_{23}\dot{\delta} + z_{33}, \quad (2.20)$$

con matrice dei coefficienti

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} z_{11} &= \rho^2 \cos^2 \delta, \\ z_{12} = z_{21} &= 0, \\ z_{13} = z_{31} &= \rho \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\rho}_{\alpha} \rangle, \\ z_{22} &= \rho^2, \\ z_{23} = z_{32} &= \rho \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\rho}_{\delta} \rangle, \\ z_{33} &= \dot{\rho}^2 + w_1\dot{\rho} + w_4 - \frac{2\mu_{\oplus}}{\sqrt{S(\rho)}}. \end{aligned}$$

Il bordo della regione ammissibile nel piano $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$ è dato da

$$F(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) = 0, \quad (2.21)$$

che, espresso in forma matriciale diventa

$$k^T Z k = 0$$

dove k è il vettore $(\dot{\alpha}, \dot{\delta}, 1)^T$.

L'equazione (2.21) rappresenta una conica nel piano $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$ con assi di simmetria paralleli agli assi coordinati. Studiamo la successione dei determinanti delle matrici principali di testa, per cercare di capire di che conica si tratta:

- $\det(z_{11}) = \rho^2 \cos^2 \delta > 0$;

- $\det \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = z_{11}z_{22} = \rho^4 \cos^2 \delta > 0;$
- $\det Z = z_{11}z_{22}z_{33} - z_{11}z_{23}^2 - z_{22}z_{13}^2.$

Poiché i primi due determinanti sono positivi, al variare di $\det Z$, l'equazione (2.21) può rappresentare:

$$\begin{cases} \text{un'ellisse reale} & \text{se } \det Z < 0 \\ \text{un singolo punto} & \text{se } \det Z = 0. \\ \text{un'ellisse complessa} & \text{se } \det Z > 0 \end{cases}$$

Da notare che se si scelgono come unità di misura $\dot{\alpha} \cos \delta$ e $\dot{\delta}$, si ha una circonferenza (eventualmente immaginaria o ridotta ad un punto).

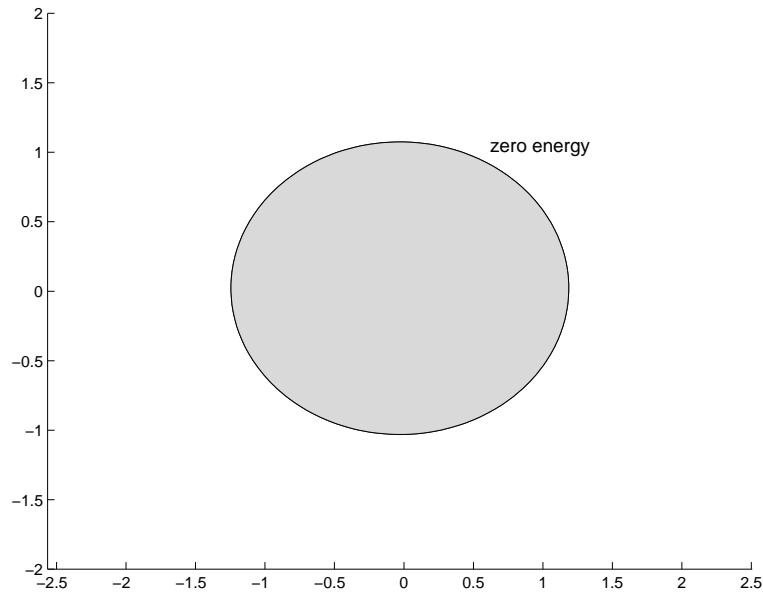


Figura 2.18: Esempio di regione ammissibile nel caso radar, quando la condizione (2.22) è soddisfatta: il bordo dell'ellisse è la curva $\mathcal{E}_{\oplus} = 0$.

La condizione da studiare per avere un ellisse reale¹⁹ è:

$$z_{11}z_{22}z_{33} - z_{11}z_{23}^2 - z_{22}z_{13}^2 < 0$$

o, equivalentemente,

$$z_{33} < \frac{z_{23}^2}{z_{22}} + \frac{z_{13}^2}{z_{11}}$$

¹⁹Osservando i primi due determinanti si vede subito che tale ellisse è più larga che lunga.

che, esplicitando, diventa:

$$\dot{\rho}^2 + w_1 \dot{\rho} + w_4 - \frac{2\mu_{\oplus}}{\sqrt{S(q)}} < \langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\rho}_{\delta} \rangle^2 + \frac{\langle \dot{\mathbf{P}}, \hat{\rho}_{\alpha} \rangle^2}{\cos^2 \delta}. \quad (2.22)$$

Nei prossimi anni verranno effettuati test e simulazioni sui detriti spaziali che chiariranno la frequenza con la quale la condizione (2.22) viene soddisfatta.

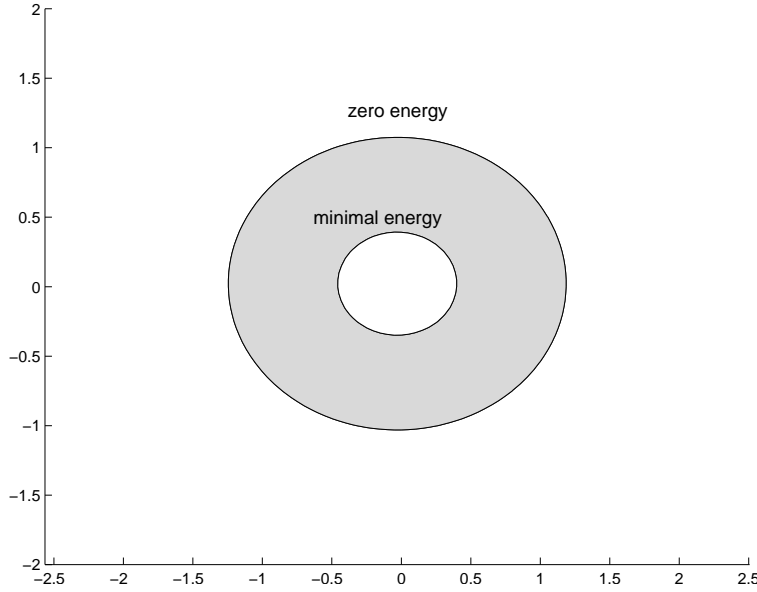


Figura 2.19: Esempio di regione ammissibile modificata nel caso radar, quando la condizione (2.22) è soddisfatta: il bordo dell'ellisse esterna è la curva $\mathcal{E}_{\oplus} = 0$ mentre il bordo di quella interna corrisponde a $\mathcal{E}_{\oplus} = \mathcal{E}_{\oplus}^{min}$.

Come nel caso ottico intendiamo escludere gli oggetti appena lanciati o ad impatto immediato. Vincoliamo quindi dal basso l'energia e modifichiamo la regione ammissibile come segue:

$$C' = \{(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) \mid \mathcal{E}_{\oplus}^{min} < \mathcal{E}_{\oplus} < 0\}.$$

Questa nuova condizione definisce, se (2.22) è soddisfatta, una corona ellittica. Infatti la curva $F(\dot{\alpha}, \dot{\delta}) = \mathcal{E}_{\oplus}^{min}$ è un'ellisse (che a seconda dei valori di $\mathcal{E}_{\oplus}^{min}$ può essere complessa o un punto) concentrica a quella trovata in precedenza, il cui interno va rimosso dalla regione ammissibile.

2.2.2.1 Condizione sul pericentro

La trattazione fatta nel caso ottico può essere ripetuta nel caso radar cambiando le espressioni di energia, attraverso la (2.20), e momento angolare,

che si esprime in funzione di $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$ in questo modo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{E} + \mathbf{F} \dot{\alpha} + \mathbf{G} \dot{\delta}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{P}} + \dot{\rho} \mathbf{P} \times \hat{\rho}, \\ \mathbf{F} &= \rho \mathbf{r} \times \hat{\rho}_\alpha, \\ \mathbf{G} &= \rho \mathbf{r} \times \hat{\rho}_\delta. \end{aligned}$$

Pertanto la nuova regione ammissibile sarà data dai valori di $(\dot{\alpha}, \dot{\delta})$ per cui valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\oplus < 0 \\ \mathcal{E}_\oplus \geq -\mu_\oplus/2\bar{r} \\ \|\mathbf{c}\|^2 \geq 2\bar{r}(\mu_\oplus + \mathcal{E}_\oplus\bar{r}) \end{cases}$$

L'ultima è una disequazione algebrica di secondo grado, visto che sia $\|\mathbf{c}\|^2$ che \mathcal{E}_\oplus sono forme quadratiche nelle variabili $\dot{\alpha}$ e $\dot{\delta}$. Pertanto il bordo della regione relativa è una conica, non concentrica all'ellisse di energia nulla e con assi di simmetria non paralleli a quelli cartesiani.

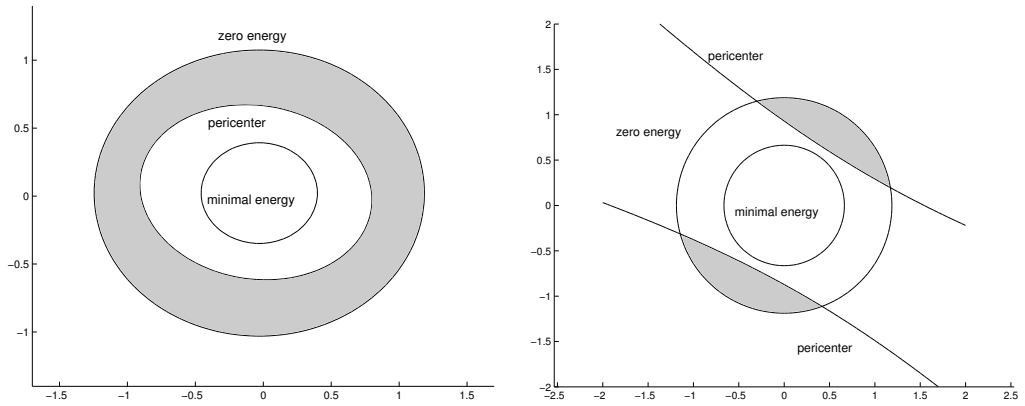


Figura 2.20: Esempio di regione ammissibile con l'aggiunta del vincolo sul pericentro, nel caso in cui il bordo della relativa regione sia un'ellisse (a sinistra) oppure un'iperbole (a destra).

In figura 2.20 viene mostrato come cambia la regione ammissibile con l'aggiunta delle ultime condizioni.

2.2.2.2 Condizione sull'apocentro

Come già osservato nel caso ottico la condizione sull'apocentro non porta ad effettivi vantaggi nella riduzione della regione ammissibile, quindi evitiamo di studiare tale condizione.

2.2.2.3 Campionamento della regione ammissibile attraverso la tecnica della ragnatela

Come nel caso ottico conviene trascurare inizialmente la condizione sul pericentro, dato che non è ancora disponibile una teoria analitica sufficientemente esauriente al riguardo.

In questo caso, oltre alla tecnica già discussa nella sezione 2.1.3, è possibile effettuare il campionamento attraverso la tecnica della ragnatela. Infatti la regione ammissibile ha una forma particolarmente semplice, trattandosi di un'ellisse o di una corona ellittica. In realtà la situazione può essere semplificata ulteriormente: come già osservato in precedenza, riscalando le unità di misura degli assi in $(\dot{\alpha} \cos \delta, \dot{\delta})$ si ha un cerchio o una corona circolare. Pertanto è possibile campionare in una maniera più naturale.

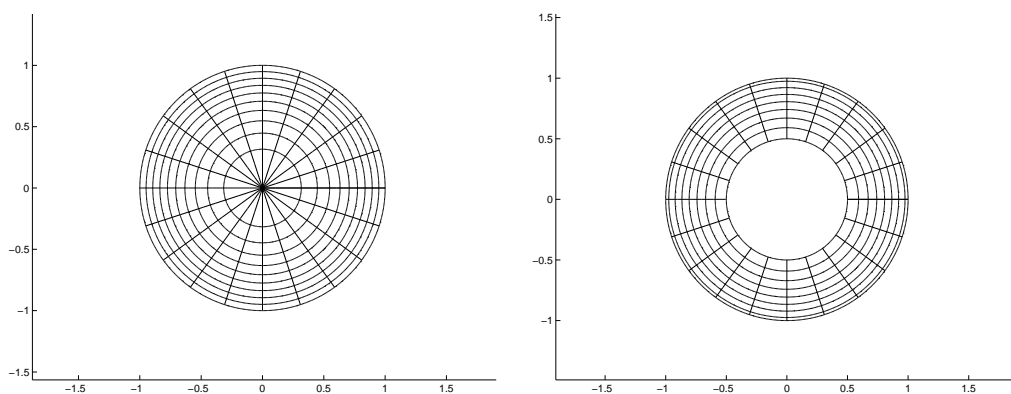


Figura 2.21: Nel piano $(\dot{\alpha} \cos \delta, \dot{\delta})$ viene disegnato un esempio di campionamento con la tecnica della ragnatela, in quella di destra si impone anche la limitazione dal basso sull'energia.

La base di partenza è quella di considerare la famiglia di circonferenze concentriche

$$\mathcal{E}_{\oplus} = k,$$

al variare di $k \leq 0$ ²⁰. Scegliendo, opportunamente un numero finito di queste curve di livello si effettua una prima suddivisione della regione ammissibile.

Successivamente si considerano i segmenti uscenti dal centro delle ellissi che terminano sul bordo della regione ammissibile. Scegliendo un numero finito di questi e considerando le intersezioni con le circonferenze costruite in precedenza si ottiene un campionamento.

La scelta delle circonferenze e dei raggi sarà fatta a seconda delle esigenze: è possibile, infatti, rendere maggiormente dense zone che possono essere più interessanti di altre relativamente al problema che stiamo affrontando.

Una volta terminato questo campionamento si scartano tutti i nodi le cui corrispondenti orbite non soddisfano la condizione sul pericentro.

²⁰Se si vuole campionare la regione ammissibile modificata allora $\mathcal{E}_{\oplus}^{min} \leq k \leq 0$

Capitolo 3

Metodo degli integrali primi

Questo capitolo è diviso in due parti: nella prima viene fatta una breve introduzione al problema dell'identificazione (una trattazione completa si trova in [22] e [2]); nella seconda viene presentato un metodo che sfrutta la conservazione di energia e momento angolare, attraverso il quale si può tentare di risolvere una classe dei problemi di identificazione.

3.1 Il problema dell'identificazione

Il problema dell'identificazione consiste nel trovare, tra diverse e indipendenti individuazioni di corpi celesti, quelle che appartengono allo stesso oggetto. Di seguito viene fatta una classificazione sulle varie tipologie del problema.

3.1.1 Identificazione dell'orbita

Si parla di problema di identificazione dell'orbita quando le osservazioni di ciascun arco sono sufficienti per produrre ciascuna un'orbita ai minimi quadrati: in questo caso si hanno due insiemi di elementi orbitali, ciascuno con le proprie matrici di covarianza e i propri residui. L'identificazione viene confermata se le osservazioni di entrambi gli archi possono essere usate contemporaneamente per produrre una singola orbita.

Testare due orbite assegnate per una possibile identificazione non è semplice, a causa della forte non linearità del problema della determinazione orbitale: serve una prima orbita preliminare a cui applicare le correzioni differenziali. Ad ogni modo questo problema di base è molto meno complicato di quello globale: assegnato un insieme composto da N orbite prodotte a partire da un arco corto, si vuole sapere quali tra le $N(N - 1)/2$ coppie appartengono allo stesso oggetto; inoltre si vuole calcolare un'orbita per

ciascuno dei vari oggetti individuati. Con i moderni cataloghi, contenenti centinaia di migliaia di orbite, e i surveys di prossima generazione da cui ci si aspetta di scoprire decine di milioni di oggetti, tale problema potrebbe portare ad una complessità computazionale inaccettabile, a meno che non venga affrontato con un algoritmo intelligente. Ci sono quindi tre passi nel problema dell'identificazione dell'orbita:

1. proporre identificazioni, selezionando un piccolo sottoinsieme di coppie;
2. calcolare una prima orbita preliminare;
3. applicare le correzioni differenziali per i due archi insieme, controllando che il procedimento converga ad un'orbita con residui accettabili.

3.1.2 Attribuzione

Si parla di attribuzione quando per un arco non ci sono dati sufficienti per calcolare un'unica orbita, cosa possibile invece per l'altro arco. Non potendo fare un paragone tra orbite, si confrontano le previsioni date dall'unica orbita disponibile con le osservazioni dell'altro arco.

Se si hanno a disposizione un insieme di N orbite e M archi osservati, con i quali non è possibile produrre un'orbita, il problema globale deve essere scomposto, come fatto in precedenza, in tre passi:

1. proporre attribuzioni, il cui numero deve essere molto minore di $M \times N$;
2. usare come orbita preliminare l'unica disponibile;
3. applicare le correzioni differenziali come nel caso precedente, tenendo conto dell'asimmetria del problema.

3.1.3 Recupero

Il recupero è una procedura per cercare nuove osservazioni che appartengano allo stesso oggetto, assumendo che non si trovino nel database delle osservazioni passate. Questo può essere fatto in due modi:

1. recupero nel futuro e nel cielo, puntando il telescopio in una o più posizioni previste per un oggetto già noto;
2. prerecupero nel passato e negli archivi di immagine del cielo, cercando osservazioni non misurate o non incluse nel database.

Il problema principale del recupero è che le risorse utilizzate (telescopi, lavoro umano e strumenti di calcolo) dipendono dall'incertezza della previsione. Accade spesso che venga trovato un asteroide intruso assieme a (o addirittura al posto di) quello cercato. Quindi dopo aver ottenuto le osservazioni bisogna risolvere un problema di attribuzione.

3.1.4 Collegamento

Il più complicato tipo di identificazione è il collegamento, che si ha quando due archi troppo corti vengono uniti in un arco sufficientemente buono per produrre un'orbita. In questo caso non è possibile confrontare quantità della stessa natura (orbite con orbite o osservazioni con osservazioni), infatti le orbite non sono disponibili e non si possono confrontare direttamente osservazioni fatte a istanti diversi (a meno che l'intervallo di tempo non sia molto piccolo). Quindi i passi da seguire possono essere di vario tipo, ad esempio:

1. calcolare una o più orbite ipotetiche, compatibili con le osservazioni relative al primo arco, insieme a qualche sostituto delle matrici di covarianza, per valutare le incertezze;
2. confrontare le previsioni sulle osservazioni a partire dalle orbite (che per il momento sono ipotetiche) trovate usando le osservazioni degli altri archi e selezionare le coppie proposte per l'identificazione;
3. calcolare un'orbita compatibile con entrambi gli archi;
4. controllare la convergenza delle correzioni differenziali con i dati di entrambi gli archi e la qualità dei residui.

Il collegamento è un problema complicato anche quando ci sono pochi archi a disposizione. Pertanto, specialmente quando il numero di archi è alto, è necessario tenere sotto controllo la complessità computazionale.

3.2 Metodo degli integrali primi

Assegnati due attribuibili a due diversi istanti di osservazione, vediamo come sfruttare la conservazione di energia e momento angolare per effettuare il collegamento tra le due osservazioni e, se possibile, produrre un'orbita.

Si trattano separatamente i casi ottico e radar.

3.2.1 Caso ottico

3.2.1.1 Energia

Abbiamo già visto come esprimere l'energia (per unità di massa) di un oggetto osservato, sia nel caso di un asteroide, attraverso la (2.8), che nel caso dei satelliti terrestri, attraverso la (2.14). Ad ogni modo si può scrivere:

$$2\mathcal{E} = \dot{\rho}^2 + c_1\dot{\rho} + c_2\rho^2 + c_3\rho + c_4 - \frac{2\mu}{\sqrt{\rho^2 + c_5\rho + c_0}} \quad (3.1)$$

dove

$$\begin{aligned} c_0 &= \|\mathbf{q}\|^2, \\ c_1 &= 2\langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\rho}} \rangle, \\ c_2 &= \dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2 = \eta^2, \\ c_3 &= 2 \left(\dot{\alpha} \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha \rangle + \dot{\delta} \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta \rangle \right), \\ c_4 &= \|\dot{\mathbf{q}}\|^2, \\ c_5 &= 2\langle \mathbf{q}, \hat{\boldsymbol{\rho}} \rangle. \end{aligned}$$

Chiaramente nel caso degli asteroidi \mathbf{q} indicherà la posizione eliocentrica dell'osservatore e $\mu = GM_\odot$, mentre nel caso dei satelliti terrestri \mathbf{q} sarà la posizione geocentrica dell'osservatore e $\mu = GM_\oplus$.

3.2.1.2 Momento angolare

Usando le equazioni (2.2) e (2.4) si ha che il momento angolare (per unità di massa) del corpo osservato è

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\rho + \mathbf{C}\rho^2 + \mathbf{D}\dot{\rho} \quad (3.2)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{B} &= \dot{\alpha} \mathbf{q} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha + \dot{\delta} \mathbf{q} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta + \dot{\mathbf{q}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}, \\ \mathbf{C} &= \dot{\alpha} \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha + \dot{\delta} \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{q} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha &= (-\cos \alpha \sin \delta \cos \delta, -\sin \alpha \sin \delta \cos \delta, \cos^2 \delta), \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta &= (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0). \end{aligned}$$

3.2.1.3 Conservazione di energia e momento angolare

Utilizziamo la conservazione degli integrali primi introdotti in precedenza. Siano assegnati due attribuibili \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , osservati agli istanti t_1 e t_2 . Dalla conservazione del momento angolare si ha che

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\rho_1 + \mathbf{C}_1\rho_1^2 + \mathbf{D}_1\dot{\rho}_1 = \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\rho_2 + \mathbf{C}_2\rho_2^2 + \mathbf{D}_2\dot{\rho}_2. \quad (3.3)$$

Moltiplicando la (3.3) scalarmente per $\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2$ si eliminano le variabili $\dot{\rho}_1$ e $\dot{\rho}_2$, ottenendo la conica

$$q(\rho_1, \rho_2) = b_2\rho_1^2 + b_1\rho_1 + b_0(\rho_2) = 0 \quad (3.4)$$

dove

$$\begin{aligned} b_0(\rho_2) &= b_{0,2}\rho_2^2 + b_{0,1}\rho_2 + b_{0,0}, \\ b_2 &= \mathbf{C}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2), \\ b_1 &= \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2), \\ b_{0,2} &= -\mathbf{C}_2 \cdot (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2), \\ b_{0,1} &= -\mathbf{B}_2 \cdot (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2), \\ b_{0,0} &= (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \cdot (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2). \end{aligned}$$

Per l'eliminazione di $\dot{\rho}_1$ si moltiplica la (3.3) vettorialmente per \mathbf{D}_2 , ottenendo l'equazione:

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\rho_1 + \mathbf{C}_1\rho_1^2) \times \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2\dot{\rho}_1 = (\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\rho_2 + \mathbf{C}_2\rho_2^2) \times \mathbf{D}_2$$

che moltiplicata scalarmente per $\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2$ dà

$$\dot{\rho}_1 = \frac{[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\rho_2 - \mathbf{B}_1\rho_1 + \mathbf{C}_2\rho_2^2 - \mathbf{C}_1\rho_1^2) \times \mathbf{D}_2] \cdot (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{\|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2\|^2}. \quad (3.5)$$

In maniera del tutto analoga si elimina $\dot{\rho}_2$:

$$\dot{\rho}_2 = \frac{[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2\rho_2 - \mathbf{B}_1\rho_1 + \mathbf{C}_2\rho_2^2 - \mathbf{C}_1\rho_1^2) \times \mathbf{D}_1] \cdot (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2)}{\|\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2\|^2}. \quad (3.6)$$

Passiamo adesso alla conservazione dell'energia. Valutando (3.1) ai due istanti t_1 e t_2 , uguagliando le espressioni ottenute e sostituendo $\dot{\rho}_1$ e $\dot{\rho}_2$, otteniamo, dopo due opportuni elevamenti al quadrato, un'equazione algebrica di grado 24 di questo tipo¹:

$$p(\rho_1, \rho_2) = \sum_{j=0}^{20} a_j(\rho_2)\rho_1^j = 0$$

¹Per ricavare la struttura del polinomio si è fatto ricorso all'utilizzo di Maple.

dove

$$\deg(a_j) = \begin{cases} 20 & \text{per } j = 0, \dots, 4 \\ 24 - (j + 1) & \text{per } j = 2k - 1 \text{ con } k \geq 3 \\ 24 - j & \text{per } j = 2k \text{ con } k \geq 3 \end{cases} .$$

Dobbiamo quindi trovare le soluzioni del sistema di equazioni polinomiali:

$$\begin{cases} p(\rho_1, \rho_2) = 0 \\ q(\rho_1, \rho_2) = 0 \end{cases} . \quad (3.7)$$

Grazie al teorema di Bézout il numero di soluzioni è minore o uguale a 48.

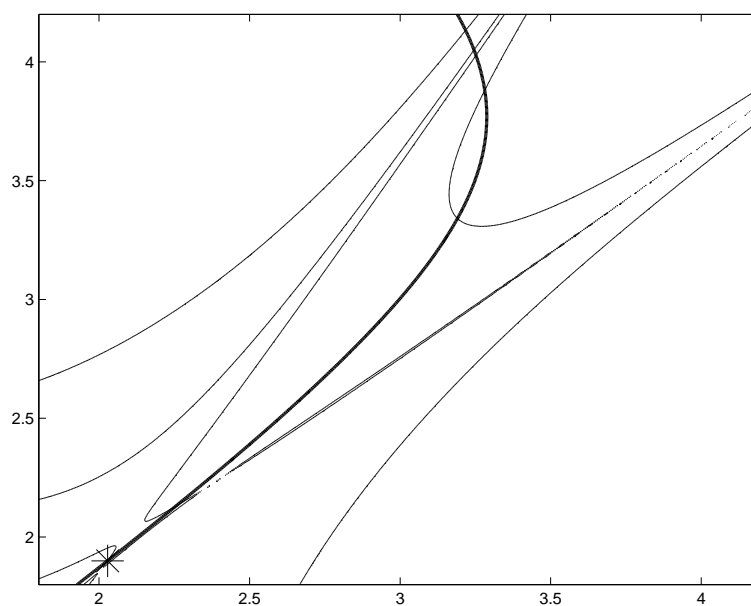


Figura 3.1: Un esempio in cui si mostra il comportamento dei polinomi p e q (in grassetto). In figura ci sono sette intersezioni (in realtà ce n'è un'altra vicina all'origine), tra cui anche quella vera (indicata con un asterisco).

Rimuoviamo la variabile ρ_1 , utilizzando la teoria del risultante². Se (ρ_1, ρ_2) è soluzione di (3.7) allora ρ_2 dovrà essere radice di $R(\rho_2)$, con cui indichiamo

²Tale teoria si trova, ad esempio, in [25].

il determinante della matrice di Sylvester

$$S(\rho_2) = \begin{pmatrix} a_{20} & 0 & b_2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ a_{19} & a_{20} & b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \vdots & \vdots & \vdots & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare³ che $\deg R(\rho_2) \leq 48$. Tale stima pare essere ottimale, infatti ci sono esempi in cui il grado sembra (usiamo il condizionale visto che i conti non vengono fatti in aritmetica esatta) essere proprio 48. Pertanto la ricerca delle radici di $R(\rho_2)$ andrà effettuata per via numerica.

Una volta trovata una possibile soluzione ρ_2 attraverso (3.4) si ricavano i corrispondenti valori (al più due) di ρ_1 . Infine, usando (3.5) e (3.6) si ottengono i valori di $\dot{\rho}_1$ e $\dot{\rho}_2$.

3.2.1.4 Singolarità

Cerchiamo di studiare i casi in cui la procedura descritta degenera. In particolare, quando si moltiplica scalarmente per $\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2$, dobbiamo discutere i casi in cui tale prodotto vettore si annulla. Applicando la definizione di \mathbf{D} si ha che

$$\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2 = (\mathbf{q}_1 \times \hat{\rho}_1) \times (\mathbf{q}_2 \times \hat{\rho}_2).$$

Vediamo quando tale oggetto si annulla:

1. $\mathbf{q}_1 \times \hat{\rho}_1 = 0$, cioè quando l'osservazione all'istante t_1 viene fatta in direzione parallela alla posizione dell'osservatore. Nel caso dei detritti significa che l'oggetto si trova sulla retta congiungente centro della Terra e osservatore.
2. $\mathbf{q}_2 \times \hat{\rho}_2 = 0$, è come al punto precedente, ma al tempo t_2 .
3. $(\mathbf{q}_1 \times \hat{\rho}_1) \times (\mathbf{q}_2 \times \hat{\rho}_2) = 0$, cioè quando i vettori \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 , $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ giacciono sullo stesso piano, ad esempio quello generato da \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 (quando non sono paralleli). Nel caso degli asteroidi con osservazioni geocentriche si ha che l'oggetto si trova, agli istanti t_1 e t_2 , sul piano dell'eclittica.

³Per la dimostrazione si veda [19]

3.2.2 Caso radar

3.2.2.1 Energia

L'energia, nel caso radar, è quella descritta dall'equazione (2.19). Riscriviamo tale espressione cambiando leggermente notazione:

$$2\mathcal{E} = e_1\dot{\alpha}^2 + e_2\dot{\delta}^2 + e_3\dot{\alpha} + e_4\dot{\delta} + e_5 \quad (3.8)$$

dove

$$\begin{aligned} e_1 &= \rho^2 \cos^2 \delta, \\ e_2 &= \rho^2, \\ e_3 &= 2\rho \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha \rangle, \\ e_4 &= 2\rho \langle \dot{\mathbf{q}}, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta \rangle, \\ e_5 &= \dot{\rho}^2 + c_1\dot{\rho} + c_4 - \frac{2\mu}{\sqrt{\rho^2 + c_5\rho + c_0}} \end{aligned}$$

e i c_i sono quelli definiti nella sottosezione 3.2.1.1.

3.2.2.2 Momento angolare

Usando le equazioni (2.2) e (2.4) si ha che il momento angolare (per unità di massa) del corpo osservato è

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{E} + \mathbf{F} \dot{\alpha} + \mathbf{G} \dot{\delta} \quad (3.9)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{q}} + \dot{\rho} \mathbf{q} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}, \\ \mathbf{F} &= \rho \mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha, \\ \mathbf{G} &= \rho \mathbf{r} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_\delta. \end{aligned}$$

3.2.2.3 Conservazione di energia e momento angolare

Utilizziamo la conservazione degli integrali primi introdotti in precedenza. Siano assegnati due attribuibili \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , osservati agli istanti t_1 e t_2 . Dalla conservazione del momento angolare si ha che

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{F}_1 \dot{\alpha}_1 + \mathbf{G}_1 \dot{\delta}_1 = \mathbf{E}_2 + \mathbf{F}_2 \dot{\alpha}_2 + \mathbf{G}_2 \dot{\delta}_2. \quad (3.10)$$

Abbiamo quindi un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\delta}_1$, $\dot{\alpha}_2$ e $\dot{\delta}_2$, che può essere risolto scegliendone una come parametro, ad esempio

$\dot{\delta}_2$. Infatti moltiplicando (3.10) scalarmente per $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{F}_2$ si ottiene che

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \frac{\mathbf{G}_2 \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{F}_2) \dot{\delta}_2 - (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{F}_2)}{\mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{F}_2)} = \\ &= \frac{\mathbf{F}_2 \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \dot{\delta}_2 - (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{F}_2 \times \mathbf{G}_1)}{\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)}.\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si ottengono le espressioni per $\dot{\delta}_1$ e $\dot{\alpha}_2$:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= \frac{\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) \dot{\delta}_2 - (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)}{\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)}, \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \dot{\delta}_2 - (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{G}_1)}{\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)}.\end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella seguente equazione, ricavata imponendo la conservazione dell'energia:

$$e_{1,1}\dot{\alpha}_1^2 + e_{2,1}\dot{\delta}_1^2 + e_{3,1}\dot{\alpha}_1 + e_{4,1}\dot{\delta}_1 + e_{5,1} = e_{1,2}\dot{\alpha}_2^2 + e_{2,2}\dot{\delta}_2^2 + e_{3,2}\dot{\alpha}_2 + e_{4,2}\dot{\delta}_2 + e_{5,2}$$

si arriva ad un'equazione di secondo grado nella sola variabile $\dot{\delta}_2$. Pertanto ci possono essere al più due soluzioni, a ciascuna delle quali corrisponde, in ognuno dei due istanti di osservazione, un insieme di quantità scalari $(\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}, \rho, \dot{\rho})$ sufficiente per determinare una candidata orbita.

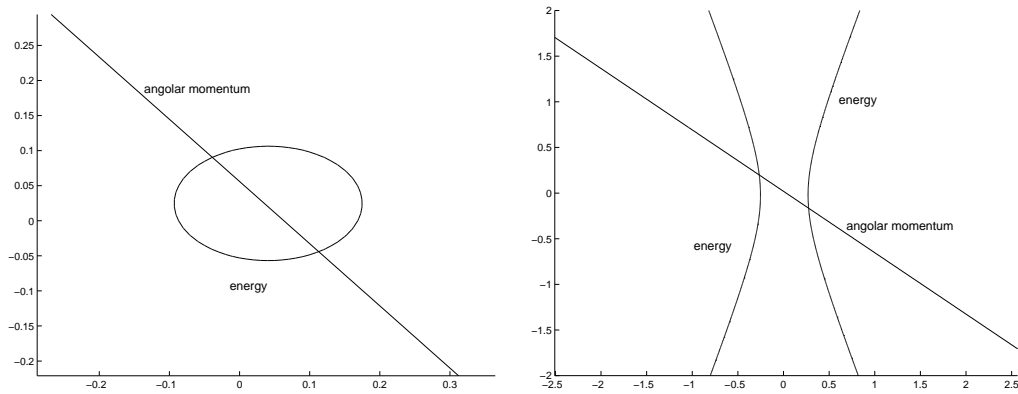


Figura 3.2: Nel piano $(\dot{\alpha}_2, \dot{\delta}_2)$ sono disegnate le curve esprimenti la conservazione di momento angolare ed energia, dopo aver eliminato $\dot{\alpha}_1$ e $\dot{\delta}_1$. A sinistra la curva relativa alla conservazione dell'energia è un'ellisse, a destra un'iperbole.

3.2.2.4 Singolarità

Cerchiamo di analizzare i casi in cui il metodo appena descritto è degenere. Osserviamo infatti che per poter eliminare tre delle variabili $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\delta}_1$, $\dot{\alpha}_2$ e $\dot{\delta}_2$ la matrice del sistema lineare (3.10) dovrà avere almeno un minore di ordine 3 invertibile.

Scegliendo come parametro $\dot{\delta}_2$, dobbiamo imporre che $\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)$ sia non nullo. Usando le espressioni date in 3.2.2.2 si ha che:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 &= \rho_1 \rho_2 (\mathbf{r}_1 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 1}) \times (\mathbf{r}_2 \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2}) = \\ &= \rho_1 \rho_2 \{[(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2}] \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 1} + [(\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 1} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2}) \cdot \mathbf{r}_2] \mathbf{r}_1\}, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \rho_1^2 \rho_2 [(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2}] [(\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta 1} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 1}) \cdot \mathbf{r}_1].$$

Analizziamo i casi in cui tale oggetto si annulla:

1. $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$, cioè quando \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono paralleli.
2. $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2} = 0$. Dato che $\|\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2}\| = \cos \delta_2$, questo è il caso in cui $\delta_2 = \pm\pi/2$.
3. $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2} = 0$. Osservando che, nel caso in cui non si annulli, $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ è parallelo a \mathbf{c} , questa condizione equivale alla perpendicolarità tra \mathbf{c} e $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2}$, ovvero al fatto che $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 2}$ giaccia sul piano dell'orbita.
4. $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 1} = 0$. Analogamente al punto 2, la condizione diventa $\delta_1 = \pm\pi/2$.
5. $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 1} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta 1} = 0$. Il prodotto vettore in questione è uguale a $\cos \delta_1 \hat{\boldsymbol{\rho}}_1$, pertanto le condizioni sono le stesse del punto precedente.
6. $(\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\delta 1} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\alpha 1}) \cdot \mathbf{r}_1 = 0$. Sviluppando i conti si vede che il prodotto misto è uguale a $\cos \delta_1 (\mathbf{q}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \rho_1)$. Quindi, oltre alla condizione sul coseno, già discussa nei precedenti punti, si ottiene⁴:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}_1 + \rho_1 = q_1 \cos \varepsilon_1 + \rho_1 = 0$$

Tale condizione implica che $\cos \varepsilon_1 < 0$, ciò vorrebbe dire osservare attraverso la Terra (e quindi in pratica non si verifica mai), come si capisce osservando la figura 3.3.

⁴Con ε si indica, come nei precedenti capitoli, la coelongazione.

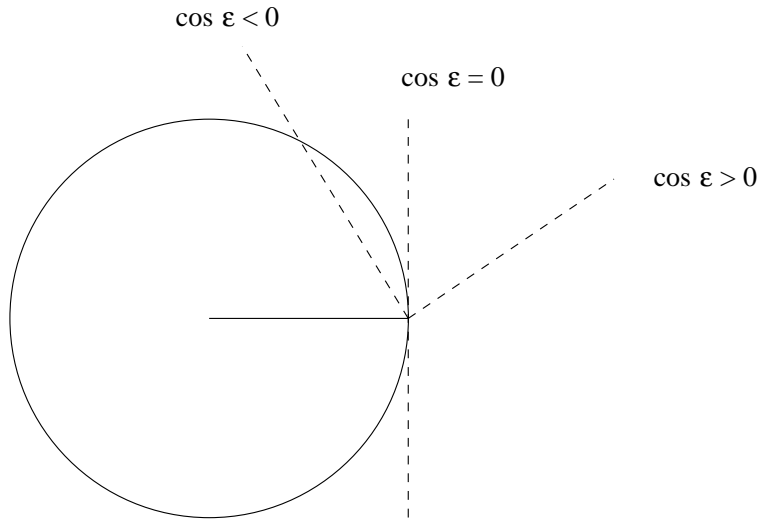


Figura 3.3: Direzioni di osservazione a seconda del segno di $\cos \varepsilon$.

Analizziamo adesso quello che succederebbe scegliendo come parametro un'altra variabile, ad esempio $\dot{\alpha}_2$. Un conto perfettamente analogo a quello precedente ci fornisce la condizione:

$$\mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) = \rho_1^2 \rho_2 [\hat{\rho}_{\delta 2} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)] [\mathbf{r}_1 \cdot (\hat{\rho}_{\alpha 1} \times \hat{\rho}_{\delta 1})] \neq 0.$$

Quindi, rispetto al caso precedente, non abbiamo più la condizione 2, mentre la 3 va modificata: in questo caso è $\hat{\rho}_{\delta 2}$ a non dover appartenere al piano dell'orbita.

Se scegliamo come parametro una tra $\dot{\alpha}_1$ e $\dot{\delta}_1$, basta considerare quanto fatto fino ad adesso, scambiando gli indici 1 e 2.

Cerchiamo di capire in quali condizioni non è possibile effettuare nessuna delle eliminazioni. Tanto per cominciare osserviamo che la condizione su δ è una singolarità del sistema di coordinate. Inoltre non è possibile che $\hat{\rho}_\alpha$ e $\hat{\rho}_\delta$ appartengano al piano dell'orbita contemporaneamente: in tal caso, infatti, ρ sarebbe ortogonale al piano orbitale, il che è assurdo. Quindi l'unico caso in cui non si può procedere con una delle eliminazioni è quando \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono paralleli.

3.2.3 Scelta delle soluzioni

Abbiamo appena visto come usare, sia nel caso ottico che in quello radar, la conservazione di energia e momento angolare per trovare dei possibili valori per le incognite ρ_1 , ρ_2 , $\dot{\rho}_1$ e $\dot{\rho}_2$. Abbiamo un certo numero di soluzioni del

sistema (genericamente alto nel caso ottico, molto basso nel caso radar) che si ottengono uguagliando energia e momento angolare valutati agli istanti t_1 e t_2 . È pertanto fondamentale avere dei criteri che ci dicano se una soluzione sia accettabile o se debba essere scartata. L'idea più immediata, oltre a scartare le soluzioni che non si trovano nella regione ammissibile, è quella di controllare che le orbite ottenute ai diversi istanti di osservazione coincidano.

Ad ogni soluzione fornita dagli algoritmi descritti in precedenza corrispondono i due vettori $(\alpha_1, \delta_1, \dot{\alpha}_1, \dot{\delta}_1, \rho_1, \dot{\rho}_1)$ e $(\alpha_2, \delta_2, \dot{\alpha}_2, \dot{\delta}_2, \rho_2, \dot{\rho}_2)$, valutati rispettivamente ai tempi t_1 e t_2 . Per ognuno di questi è possibile calcolare un'orbita⁵ che può essere descritta usando le seguenti quantità:

- a = semiasse maggiore;
- e = eccentricità (deve essere minore di 1);
- i = inclinazione;
- Ω = ascensione retta del nodo ascendente;
- ω = argomento del pericentro;
- $\ell = n(t - t_0) = \sqrt{\mu/a^3}(t - t_0)$ = anomalia media, dove t_0 è il tempo di passaggio al pericentro.

I primi quattro elementi dipendono solo da energia e momento angolare infatti valgono le seguenti:

- $\mathcal{E} = -\mu/2a$;
- $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$;
- $\hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}$.

Tali elementi devono pertanto coincidere, quando valutati nei due diversi istanti. Da notare che nel caso ottico è possibile che tale affermazione risulti essere errata: il motivo è che nella sottosezione 3.2.1.3 vengono effettuati diversi elevamenti al quadrato per giungere ad un'equazione algebrica e di conseguenza vengono introdotte delle radici spurie. Gli ultimi due elementi, invece, possono essere diversi, anche a parità di energia e momento angolare. Per poter accettare una soluzione, devono valere le seguenti condizioni:

⁵Si calcolano facilmente \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$, da cui si ricavano gli elementi orbitali (come descritto in [21]).

- $\omega_2 = \omega_1$;
- $\ell_2 = n(t_2 - t_0) = n(t_2 - t_1) + n(t_1 - t_0) = n(t_2 - t_1) + \ell_1$, dove gli n coincidono grazie al fatto che dipendono solo dal semiasse maggiore a .

Un ulteriore criterio, applicabile solo nel caso ottico e la cui necessità è già stata evidenziata, è quello di scartare le radici spurie. Si deve pertanto controllare nella sottosezione 3.2.1.3 che prima di ogni elevamento al quadrato non ci sia una diversità di segno.

3.2.4 Modello con precessione

Fino adesso abbiamo considerato la Terra come un corpo perfettamente sferico, cosa non vera in realtà (ad esempio è noto che il nostro pianeta è schiacciato ai poli). Cerchiamo di analizzare l'effetto prodotto dalla mancanza di tale simmetria⁶ sui detriti spaziali e vediamo come modificare opportunamente i metodi descritti in precedenza.

3.2.4.1 Modifica del potenziale gravitazionale

Il potenziale di un corpo che non sia a simmetria sferica è della forma⁷:

$$U(r, \lambda, \theta) = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} P_{\ell m}(\sin \theta) (C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda) \right]$$

dove λ è la longitudine, θ è la declinazione geocentrica, $P_{\ell m}$ sono le funzioni associate di Legendre e $C_{\ell m}$ e $S_{\ell m}$ sono coefficienti adimensionali che dipendono dalla geometria del corpo attrattore. Nel caso della Terra l'effetto principale dovuto alla mancata simmetria sferica è

$$U_{J_2} = -\frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \sin^2 \theta - 1}{2} \right)$$

dove $J_2 \simeq 10^{-3}$.

⁶Tale effetto è maggiormente pronunciato per i corpi più vicini.

⁷Per la dimostrazione si veda [22].

3.2.4.2 Variazione degli elementi orbitali

Per descrivere il problema perturbato facciamo uso delle variabili di Delaunay:

$$\begin{cases} \ell \\ g = \omega \\ z = \Omega \\ L = \sqrt{\mu a} \\ G = L\sqrt{1 - e^2} = \|\mathbf{c}\| \\ Z = G \cos i = c_z \end{cases} .$$

Queste variabile sono canoniche⁸, pertanto possiamo usare il formalismo hamiltoniano. L'Hamiltoniana è $H = T - U - U_{J_2}$, dove T è l'energia cinetica e U è il potenziale gravitazionale puramente kepleriano. Le equazioni imperturbate, dovute soltanto a $T - U$, sono:

$$\begin{cases} \dot{\ell} = n \\ \dot{g} = \dot{z} = 0 \\ \dot{L} = \dot{G} = \dot{Z} = 0 \end{cases} .$$

Cerchiamo di capire quale sia l'effetto dovuto al J_2 terrestre, trascurando gli effetti a corto periodo. Le equazioni di Hamilton sono⁹:

$$\begin{aligned} \bar{\ell} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial L} = n - \frac{\partial \bar{U}_{J_2}}{\partial L} = n - \frac{3}{4}n \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \frac{J_2}{(1 - e^2)^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i), \\ \bar{g} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial G} = 0 - \frac{\partial \bar{U}_{J_2}}{\partial G} = \frac{3}{2}n \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \frac{J_2}{(1 - e^2)^2} \left(\frac{4 - 5 \sin^2 i}{2} \right), \\ \bar{z} &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial Z} = 0 - \frac{\partial \bar{U}_{J_2}}{\partial Z} = -\frac{3}{2}n \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \frac{J_2}{(1 - e^2)^2} \cos i, \\ \bar{L} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \ell} = 0 + \frac{\partial \bar{U}_{J_2}}{\partial \ell} = 0, \\ \bar{G} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial g} = 0 + \frac{\partial \bar{U}_{J_2}}{\partial g} = 0, \\ \bar{Z} &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial z} = 0 + \frac{\partial \bar{U}_{J_2}}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

⁸Per la dimostrazione si veda [23].

⁹Per i conti espliciti vedere [24]. Le equazioni per ℓ , g e h possono essere ricavate anche senza l'utilizzo delle variabili di Delaunay e del formalismo hamiltoniano, come descritto in [21].

Pertanto si ha che a , e e i rimangono costanti mentre ℓ , ω e Ω variano (in realtà ℓ variava anche prima, ma in questo caso la sua derivata non è più n).

3.2.4.3 Modifiche alla conservazione del momento angolare

Con l'aggiunta del termine dipendente dal J_2 terrestre non si conserva più il momento angolare, dobbiamo pertanto trovare tre equazioni che sostituiscano (3.3) (caso ottico) e (3.10) (caso radar).

Dai conti appena fatti si ha che G e Z , che corrispondono rispettivamente a $\|\mathbf{c}\|$ e c_z , non subiscono variazioni. Abbiamo quindi le prime due equazioni:

$$\begin{aligned} c_{1z} &= c_{2z}, \\ \|\mathbf{c}_1\|^2 &= \|\mathbf{c}_2\|^2. \end{aligned}$$

Nel caso ottico la prima equazione è di grado 2 e la seconda di grado 4, mentre in quello radar le equazioni sono rispettivamente di grado 1 e 2.

Per trovare la terza condizione usiamo l'equazione relativa a z . Si ha che:

$$\Omega_2 = \bar{z}(t_2 - t_1) + \Omega_1,$$

da cui

$$\cos \Omega_2 = \cos[\bar{z}(t_2 - t_1)] \cos \Omega_1 - \sin[\bar{z}(t_2 - t_1)] \sin \Omega_1. \quad (3.11)$$

Esprimiamo i termini di questa equazione in funzione del momento angolare. Per fare questo si usano le seguenti relazioni¹⁰:

$$\begin{aligned} \cos \Omega_i &= \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_i}{\|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_i\|} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \\ \sin \Omega_i &= \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_i}{\|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_i\|} \cdot \hat{\mathbf{y}}, \\ a(1 - e^2) &= \frac{\|\mathbf{c}_1\|^2}{\mu}, \\ \cos i &= \frac{c_{1z}}{\|\mathbf{c}_1\|}, \\ \bar{z} &= -\frac{3}{2}n\mu^2 J_2 R_\oplus^2 \frac{c_{1z}}{\|\mathbf{c}_1\|^5}. \end{aligned}$$

Usando (3.2) o (3.9) (a seconda che l'osservazione sia di tipo ottico o radar) e sostituendo tutto in (3.11) si ottiene un'equazione non lineare nei parametri,

¹⁰La cui dimostrazione si trova, ad esempio, in [21].

$(\rho_i, \dot{\rho}_i)$ nel caso ottico o $(\dot{\alpha}_i, \dot{\delta}_i)$ nel caso radar. Linearizziamo (3.11) sviluppando¹¹ nel parametro $\bar{z}\Delta t$:

$$\cos \Omega_2 = \cos \Omega_1 - \bar{z}\Delta t \sin \Omega_1,$$

e cerchiamo di ottenere un'equazione algebrica. Per alleggerire la notazione introduciamo $\xi = 3n\mu^2 J_2 R_\oplus^2 \Delta t / 2$. Utilizzando le relazioni appena descritte si ha che

$$\frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_2}{\|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_2\|} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1}{\|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1\|} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \xi \frac{c_{1z}}{\|\mathbf{c}_1\|^5} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1}{\|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1\|} \cdot \hat{\mathbf{y}}$$

da cui, facendo il minimo comune multiplo, si ricava:

$$\|\mathbf{c}_1\|^5 \|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1\| [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_2) \cdot \hat{\mathbf{x}}] = \|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_2\| \{ \|\mathbf{c}_1\|^5 [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1) \cdot \hat{\mathbf{x}}] + \xi c_{1z} [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1) \cdot \hat{\mathbf{y}}] \}.$$

Dato che ogni modulo è una radice quadrata, serve che ognuno di questi appaia con una potenza pari. Per far questo eleviamo tutto al quadrato e otteniamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}_1\|^{10} \|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1\|^2 [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_2) \cdot \hat{\mathbf{x}}]^2 - \|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_2\|^2 \{ \|\mathbf{c}_1\|^{10} [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1) \cdot \hat{\mathbf{x}}]^2 + \\ + \xi^2 c_{1z}^2 [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1) \cdot \hat{\mathbf{y}}]^2 \} = 2\xi \|\mathbf{c}_1\|^5 c_{1z} [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1) \cdot \hat{\mathbf{x}}] [(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{c}_1) \cdot \hat{\mathbf{y}}]. \end{aligned}$$

Il termine a sinistra dell'uguaglianza ha grado 28 nel caso ottico e 14 nel caso radar. Quindi elevando ulteriormente al quadrato si ottiene un'equazione di grado 56 nel caso ottico e di grado 28 nel caso radar.

3.2.4.4 Modifiche alla conservazione dell'energia

Per quanto riguarda l'energia è sufficiente sostituire \mathcal{E} con

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - U_{J_2}.$$

Nel caso ottico il termine U_{J_2} dipende da ρ . L'energia si scrive come:

$$\mathcal{E} = \dot{\rho}^2 + c_1 \dot{\rho} + c_2 \rho^2 + c_3 \rho + c_4 - \frac{2\mu}{\sqrt{\rho^2 + c_5 \rho + c_0}} \left(1 + \frac{c_6}{\rho^2 + c_5 \rho + c_0} \right)$$

dove

$$c_6 = \frac{J_2 R_\oplus^2}{2} \left(\frac{3 \sin^2 \theta - 1}{2} \right).$$

¹¹Tale sviluppo si giustifica osservando che $\bar{z} \simeq n J_2 (R_\oplus / a)^2$.

Cerchiamo di ottenere un'equazione algebrica dalla conservazione dell'energia. Semplifichiamo la notazione introducendo

$$\begin{aligned} T_i &= \dot{\rho}_i^2 + c_{1,i}\dot{\rho}_i + c_{2,i}\rho_i^2 + c_{3,i}\rho_i + c_{4,i}, \\ S_i &= \rho_i^2 + c_{5,i}\rho_i + c_{0,i}. \end{aligned}$$

Quindi la conservazione di $\tilde{\mathcal{E}}$ si esprime come

$$T_1 - \frac{2\mu}{\sqrt{S_1}} \left(\frac{S_1 + c_{6,1}}{S_1} \right) = T_2 - \frac{2\mu}{\sqrt{S_2}} \left(\frac{S_2 + c_{6,2}}{S_2} \right).$$

Facendo il minimo comune multiplo si ottiene che

$$\sqrt{S_1}^3 \sqrt{S_2}^3 (T_1 - T_2) = 2\mu \left[\sqrt{S_2}^3 (S_1 + c_{6,1}) - \sqrt{S_1}^3 (S_2 + c_{6,2}) \right]$$

da cui, elevando al quadrato, si ricava

$$\begin{aligned} S_1^3 S_2^3 (T_1 - T_2)^2 - 2\mu \left[S_2^3 (S_1 + c_{6,1})^2 + S_1^3 (S_2 + c_{6,2})^2 \right] = \\ = -4\mu \sqrt{S_1}^3 \sqrt{S_2}^3 (S_1 + c_{6,1})(S_2 + c_{6,2}). \end{aligned}$$

Osservando che sia T_i che S_i sono di grado 2, se eleviamo nuovamente al quadrato si ottiene un'equazione algebrica di grado 32.

Nel caso radar non ci sono sostanziali differenze rispetto al caso imper turbato, dato che U_{J_2} non dipende ne da $\dot{\alpha}$ ne da $\dot{\delta}$, ed è quindi costante una volta assegnato l'attribuibile. Basta rimpiazzare e_5 con

$$\tilde{e}_5 = e_5 - U_{J_2}.$$

Pertanto il grado che esprime la conservazione dell'energia rimane 2.

	Caso ottico	Caso radar
$c_{1z} = c_{2z}$	2	1
$\ \mathbf{c}_1\ ^2 = \ \mathbf{c}_2\ ^2$	4	2
$\cos \Omega_2 = \cos \Omega_1 - \dot{z} \Delta t \sin \Omega_1$	56	28
$\tilde{\mathcal{E}}_1 = \tilde{\mathcal{E}}_2$	32	2

Tabella 3.1: Riassunto sui gradi delle equazioni algebriche nel caso con precessione.

3.2.4.5 Confronto tra le orbite

In 3.2.3 è stato analizzato un criterio per la scelta delle soluzioni trovate dal metodo degli integrali primi. Alla luce di quanto appena analizzato, tale criterio deve essere modificato come segue:

- $a_2 = a_1$;
- $e_2 = e_1$;
- $i_2 = i_1$;
- $\omega_2 = \bar{g}(t_2 - t_1) + \omega_1$;
- $\Omega_2 = \bar{h}(t_2 - t_1) + \Omega_1$;
- $\ell_2 = \bar{\ell}(t_2 - t_1) + \ell_1$.

Bibliografia

- [1] A. Milani, G. F. Gronchi, M. de'Michieli Vitturi, Z. Knežević, 2004. *Orbit Determination with Very Short Arcs. I Admissible Regions*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 90, 59-87.
- [2] A. Milani, G. F. Gronchi, Z. Knežević, M. E. Sansaturio, O. Arratia, 2005. *Orbit Determination with Very Short Arcs. II Identifications*. Icarus, 79, 350-374.
- [3] A. Milani, G. F. Gronchi, D. Farnocchia, Z. Knežević, R. Jedicke, L. Denneau, F. Pierfederici, 2008. *Topocentric Orbit Determination: Algorithms for the Next Generation Surveys*. Icarus, 195, 474-492.
- [4] C. V. L. Charlier, 1910. *On Multiple Solutions in the Determination of Orbits from three Observations*. MNRAS, 71, 120-124.
- [5] H. C. Plummer, 1918. *An introductory treatise on Dynamical Astronomy*. Cambridge University press.
- [6] J. M. A. Danby, 1962. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. The Macmillan Company.
- [7] P. R. Escobal, 1965. *Methods of Orbit Determination*. John Wiley & Sons.
- [8] R. Bevilacqua, D. Bini, M. Capovani, O. Menchi, 1992. *Metodi Numerici*. Zanichelli.
- [9] H. Poincaré, 1906. *Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace*. Bulletin astronomique, 23, 161-187.
- [10] M. Abate, F. Tivena, 2006. *Curve e Superfici*. Springer.
- [11] G. F. Gronchi. *Multiple Solutions in Preliminary Orbit Determination from three observations*. Submitted.

- [12] E. Bowell, B. Hapke, D. Domingue, K. Lumme, J. Peltoniemi, A. W. Harris, 1989. *Application of photometric models to asteroids*. Asteroids II, 524-556.
- [13] M. Bern, D. Eppstein, 1992. *Mesh Generation and Optimal Triangulation*. Computing in Euclidean Geometry, 23-90.
- [14] B. Delaunay, 1934. *Sur la sphere vide*. Izvestya Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennykh Nauk 7, 793-800.
- [15] M. de'Michieli Vitturi, 2004. *Approximate gradient-based methods for optimum shape design in aerodynamic*. Tesi di Dottorato.
- [16] G. Tommei, A. Milani, A. Rossi, 2007. *Orbit determination of space debris: admissible regions*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 97, 289-304.
- [17] J. M. Maruskin, 2008. *On the Dynamical Propagation of Subvolumes and on the Geometry and Variational Principles of Nonholonomic Systems*. PhD Thesis.
- [18] G. Tommei, 2006. *Impact Monitoring of Near-Earth Objects: theoretical and computational results*. Tesi di Dottorato.
- [19] G. F. Gronchi, L. Dimare, A. Milani. *Orbit Determination with the Energy and Angular Momentum Integrals*. In preparazione.
- [20] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, 1996. *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer.
- [21] G. Mengali, A. Quarta, 2006. *Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale*. Plus.
- [22] A. Milani, G. F. Gronchi. *Orbit Determination*. In preparazione.
- [23] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, 1950. *Meccanica classica*. Zanichelli.
- [24] A. E. Roy, 2005. *Orbital Motion*. IoP.
- [25] E. Sernesi, 2000. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri.

Ringraziamenti

Non sono mai stato bravo a scrivere, pertanto queste poche parole non renderanno giustizia alla mia gratitudine nei vostri confronti. Ad ogni modo ci metterò il massimo impegno. Chiedo anticipatamente scusa per le eventuali (e del tutto involontarie) omissioni.

Comincio ringraziando il prof. Andrea Milani per tutto quello che mi ha insegnato (o che ha tentato di insegnarmi) in questi ultimi anni e per la fiducia riposta in me, permettendomi di collaborare al suo lavoro molto più di quanto fosse lecito attendersi. Ringrazio Giovanni e Giacomo per aver messo a disposizione la loro esperienza e competenza ogni volta che ne ho avuto bisogno, sempre con grande disponibilità e gentilezza.

Ringrazio Luciano, per i preziosi consigli che mi ha dato all'inizio del mio percorso universitario.

Ringrazio la mia famiglia, ed in modo particolare mia madre, per gli sforzi (non pochi) fatti in questi primi ventiquattro anni della mia vita. Per non avermi mai fatto mancare nulla, nemmeno nei momenti più difficili. Un ringraziamento speciale va a Niclo, non solo per aver corretto il mio rozzo stile di scrittura: se non fosse entrato nella mia vita non penso che avrei mai raggiunto questo traguardo. Ringrazio i miei nonni, forse le persone più orgogliose del mio percorso universitario. Ringrazio tutte le mie "altre famiglie" (passatemi il termine, sono sicuro che i destinatari capiranno). Voglio che sappiano di avere molto più merito di quello che pensano, avendomi cresciuto più di quanto fosse compito loro.

Ringrazio i miei colleghi studenti per aver condiviso con me le emozioni di questi cinque anni. Tra questi il grazie più grande lo merita Emiliano, il miglior compagno di avventura che potessi sperare di avere al mio fianco. Ringrazio gli amici, quelli veri, che per mia fortuna sono tanti. Su tutti Marco e Stefania, per aver insistito affinché mi iscrivessi a Matematica.

Ultimo, ma non meno importante, è il ringraziamento a Emanuela, per tutta una serie di motivi che, messi in forma scritta, supererebbero ampiamente la lunghezza di tutta la tesi.

Grazie di cuore a tutti.