

Università di Pisa



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2007/2008

Tesi di Laurea Specialistica

Aspetti Quantistici dei Vortici
Non-Abeliani in Teorie di Gauge
Supersimmetriche

Candidato

Daniele Dorigoni

Relatore

Chiar.mo Prof. Kenichi Konishi

Indice

1	Introduzione	4
2	Teorie di Gauge e Topologia	9
2.1	Domain Walls	9
2.2	Vortici	11
2.2.1	Modello di Higgs abeliano	11
2.3	Monopoli	14
2.3.1	Modello di Georgi-Glashow	14
2.3.2	Monopolo di 't Hooft-Polyakov	16
2.4	Ibridi	17
2.5	Un po' di Topologia	17
2.5.1	Gruppi di Omotopia e Relazioni di Esattezza	19
3	Teorie di Gauge Supersimmetriche	21
3.1	Algebra di Supersimmetria	21
3.2	Rappresentazioni Irriducibili Massless	22
3.3	Rappresentazioni Irriducibili Massive	23
3.4	Supersimmetria con Carica Centrale	23
3.5	Rappresentazioni Locali	25
3.5.1	Superspazio $N = 1$	25
3.5.2	Supercampi	26
3.5.3	Supercampi Chirali	27
3.5.4	Multipletto Vettoriale	27
3.6	Lagrangiane $N = 1$	29

<i>INDICE</i>	2
3.7 Lagrangiane $N = 2$	30
3.7.1 Multipletto Vettoriale	30
3.7.2 Superspazio $N = 2$	31
3.7.3 Ipermultipletto	32
3.8 Carica Centrale in teorie $N = 2$	35
4 Analisi di Seiberg-Witten	37
4.1 R-Simmetria	37
4.1.1 Azione sul Multipletto Vettoriale $N = 2$	38
4.1.2 Azione sull'Ipermultipletto $N = 2$	39
4.1.3 Rottura della R-Simmetria	40
4.2 Spazio dei Moduli Classico	41
4.3 Azione Effettiva	42
4.4 Dualità	45
4.4.1 Gruppo di Dualità	47
4.5 Spettro della Teoria	48
4.6 Monodromie e Singolarità	49
4.6.1 Monodromia all'Infinito	49
4.6.2 Monodromie al Finito	50
4.7 Soluzione di Seiberg-Witten	52
4.8 Confinamento	55
4.9 Seiberg-Witten in Presenza di Materia	56
4.9.1 QED	57
4.9.2 QCD	58
5 Vortici in $\mathcal{N} = 2$	59
5.1 Vuoti della Teoria	59
5.2 Modello	60
5.2.1 Teoria di Basse Energie	62
5.2.2 Spettro a Basse Energie	63
5.3 Vortici Non-Abeliani	65
5.4 Teoria Effettiva sulla Worldsheet	70

<i>INDICE</i>	3
5.4.1 Generalizzazione a $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$	72
5.4.2 Fisica del Modello $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$	74
6 Vortici senza Abelianizzazione	76
6.1 Modello	76
6.1.1 Vortici	79
6.2 Kinks e Monopoli	83
7 Conclusioni	87
A R-Vuoti	90
B Soluzione di Vortice	94
Bibliografia	99

Capitolo 1

Introduzione

Una delle sfide più importanti nella fisica delle alte energie risulta senz'altro quella di spiegare il confinamento dei quark, non si è tuttora riusciti a capire se la cromodinamica quantistica esibisca o meno tale fenomeno. Un possibile meccanismo di confinamento era stato pensato da 't Hooft e Mandelstam [1, 2, 3] i quali avevano proposto che a confinare i quark fossero una sorta di vortici cromo-elettrici così come in un superconduttore i monopoli magnetici sono confinati dai vortici di Abrikosov-Nielsen e Olesen a causa dell'effetto Meissner. Questa idea diede il via ad uno sviluppo massiccio [6, 7, 8] della nostra conoscenza sulle teorie non abeliane soprattutto dal punto di vista non perturbativo portando alla scoperta [4, 5] di vortici che portano uno spazio dei moduli continuo e di natura non-Abeliana. L'idea che i difetti topologici, quali monopoli, vortici e domain walls fossero un ingrediente chiave per capire la dinamica delle teorie di gauge non-Abeliane ricevette un importantissimo contributo dall'analisi di Seiberg-Witten [9, 10] riguardante lo studio delle teorie con supersimmetria $\mathcal{N} = 2$. Andando a studiare il limite di basse energie di una teoria $\mathcal{N} = 2$ con gruppo di gauge $SU(2)$ rotta ad $U(1)$ è possibile trovare punti dello spazio dei moduli quantistico (QMS) nei quali appaiono delle singolarità dovute all'annullarsi della massa di configurazioni solitoniche quali monopoli magnetici e dioni. Mettendoci proprio alla singolarità dove un monopolio magnetico diventa massless e an-

dando a perturbare la teoria con un termine di massa per lo scalare nella rappresentazione aggiunta rompiamo $\mathcal{N} = 2 \leftrightarrow \mathcal{N} = 1$ e sviluppiamo un vev non nullo per l'ipermultipletto che descrive questi monopoli magnetici che quindi si trovano in fase di Higgs, ne consegue che nella teoria duale siamo in fase di confinamento e le cariche elettriche risultano confinate da vortici abeliani. Venne pertanto trovato un primo modello che presentava un fenomeno di confinamento alla maniera di 't Hooft e Mandelstam sebbene questo fosse essenzialmente di natura abeliana. Questa scoperta fece scattare [4, 11, 12] tutti i successivi studi sulle teorie supersimmetriche che risultavano essere le candidate migliori ad esibire fenomeni di confinamento. Il tipico sistema sotto esame è una teoria $U(n)$ in presenza di $N_f = n$ flavors il cui vev rompe completamente la simmetria di gauge lasciando però una simmetria residua $SU(n)_{C+F}$ (*color-flavor locking*) grazie appunto alla presenza di flavor. La teoria contiene soluzioni delle equazioni del moto di tipo vortice che presentano modi-0 di natura continua parametrizzati da

$$SU(n)/SU(n-1) \times U(1) \sim \mathbb{CP}^{n-1}, \quad (1.1)$$

dove chiaramente $SU(n-1) \times U(1)$ sarà la simmetria rispettata dal vortice. Possiamo adesso lasciar fluttuare sia nel tempo che nella direzione del vortice questi parametri dei moduli, ottenendo così un modello 1 + 1 dimensionale che ci descrive queste fluttuazioni sulla worldsheet, arrivando ad un modello-sigma \mathbb{CP}^{n-1} in 2 dimensioni. Se il sistema sotto analisi era la parte bosonica di una teoria supersimmetrica $\mathcal{N} = 2$ ne segue che il modello sigma presenta una supersimmetria (2, 2) in quanto metà dei generatori della supersimmetria sono rotti dal vortice. Tutto questo viene studiato utilizzando la seguente gerarchia di scale

$$m \gg \mu \gg \Lambda,$$

dove m è la massa bare dei quark mentre Λ la scala generata dinamicamente dalla nostra teoria di gauge. A questo livello l'approssimazione semiclassica che ci porta a prevedere l'esistenza di vortici non-Abeliani è ben giustificata, quando però passiamo ad un regime altamente quantistico $\Lambda \gg \mu \sim m \rightarrow 0$

il risultato che si ottiene è l'abelianizzazione dinamica di questi vortici che si riducono a quelli di Abrikosov-Nielsen-Olesen. Il modello-sigma sulla worldsheet diventa fortemente accoppiato generando n stati di ground degeneri. Avendo a disposizione questi n stati di vuoto ci aspettiamo la presenza di kink sulla worldsheet, configurazioni di campi che interpolano tra due di questi vuoti, ed infatti così è: i monopoli appaiono come domain-wall confinati da vortici che portano flusso sotto $U(1)$. È da osservare che il teorema di Coleman-Mermin-Wagner si può applicare alla simmetria globale $SU(n)_{C+F}$ che quindi non viene rotta dalla dinamica del vortice, tuttavia questo non toglie il fatto che i monopoli portino solo carica magnetica di natura puramente Abeliana nel limite infrarosso.

In realtà il modello appena considerato può essere immerso in una teoria più grande, esso risulta infatti la parte bosonica di una teoria effettiva di basse energie di una teoria $\mathcal{N} = 2$ con gruppo di gauge $SU(N)$, dove $N = n + 1$, in presenza di $N_f = n$ flavors. Il gruppo di gauge è rotto a causa del vev non nullo sviluppato da un campo scalare nell'aggiunta

$$\langle \phi \rangle = \text{diag} (m_1, \dots, m_n, -\sum_{j=1}^n m_j), \quad m_j \rightarrow m, \quad (1.2)$$

e la simmetria di gauge residua risulta $SU(n) \times U(1)/\mathbb{Z}_n \sim U(n)$. Dalle singularità nelle curve di Seiberg-Witten possiamo dedurre [13, 14] quali stati diventano massless nel limite m_i e μ molto piccoli mentre invece nel limite $m \gg \Lambda$ abbiamo sempre l'interpretazione semiclassica. Quest'ultima ci permette di classificare i vuoti della teoria in base al numero di quark che risultano massless grazie alla cancellazione nel superpotenziale

$$\tilde{Q}(M + \sqrt{2}\Phi)Q$$

della massa bare e del vev non nullo del campo scalare. Il modello considerato in [4, 11, 12] corrisponde chiaramente ad un $r = n = N_f$ vuoto della teoria più grande appena esposta. Altrimenti in genere avremo gli r -vuoti semiclassici caratterizzati dal vev del campo scalare che assume la forma

$$\langle \phi \rangle = \text{diag} (m_1, \dots, m_r, c, \dots c), \quad c = -\frac{1}{N-r} \sum_{j=1}^r m_j. \quad (1.3)$$

Quando andiamo a studiare il limite $m_i \rightarrow m \rightarrow 0$ dobbiamo capire a quale vuoto quantistico corrispondono i vuoti semiclassici, questo matching è stato fatto mappando uno a uno i vuoti quantistici e quelli classici usando considerazioni di simmetria. Gli r -vuoti $r = 0, 1, \dots, N_f$ trovati semiclassicamente per $m \gg \mu \gg \Lambda$ sono legati [13, 14, 15, 16] agli r -vuoti quantistici da

$$\{r, N_f - r\} \iff r, \quad r = 0, 1, \dots \leq N_f/2, \quad (1.4)$$

dove il membro destro identifica il vuoto quantistico corrispondente ai vuoti classici del membro sinistro. Ne segue che il modello considerato deve stare in un vuoto quantistico con $r = 0$. Le proprietà trovate per i monopoli leggeri che si trovano nel limite $m_i \rightarrow m \rightarrow 0$ nei vari vuoti quantistici sono riassunte in Tabella 1.1

r	Gradi Lib.	Gauge Eff.	Fase	Simm.Glob.
0	monop.	$U(1)^{N-1}$	Confinam.	$U(n_f)$
1	monop.	$U(1)^{N-1}$	Confinam.	$U(N_f - 1) \times U(1)$
$2, \dots, [\frac{N_f-1}{2}]$	NA monop.	$SU(r) \times U(1)^{N-r}$	Confinam.	$U(N_f - r) \times U(r)$
$N_f/2$	rel. nonloc.	-	quasi SCFT	$U(N_f/2) \times U(N_f/2)$

Tabella 1.1: Vuoti di confinamento per una teoria di gauge $SU(N)$ con N_f flavors. Il vuoto $r = N_f/2$ corrisponde ad una teoria quasi superconforme nella quale appaiono come gradi di libertà a basse energie monopoli e dioni relativamente non locali. “Quasi” sta a significare che quando $\mu = 0$ la teoria è superconforme mentre per $\mu \neq 0$ confina.

In conclusione per un $r = 0$ vuoto tutti i monopoli sono di natura Abeliana e nessuno di questi porta numeri quantici di flavor legati a $SU(N_f)$. D'altra parte sappiamo però che in SQCD in 4 dimensioni ci devono essere dei monopoli leggeri che portano carica sotto un qualche gruppo di gauge non-Abeliano [13, 17], vediamo dalla Tabella 1.1 che è necessario $2 \leq r \leq N_f/2$, risulta quindi lecito domandarsi se sia possibile trovare dei vortici veramente non-Abeliani che quindi non presentino un fenomeno di abelianizzazione dinamica. Vedremo che sarà possibile trovare un modello [18] che presenti tale fenomeno, prenderemo una teoria $\mathcal{N} = 2$ con gruppo di gauge $SU(N)$

e $N_f = N$ flavor, tramite un tuning delle masse bare dei quark otterremo una rottura del gruppo di gauge a $SU(n) \times SU(r) \times U(1)$ grazie al vev del campo scalare nell'aggiunta. Troveremo questi vortici non-Abeliani in un appropriato regime che ci permetterà di capire la loro origine semiclassica insieme a quella dei corrispettivi monopoli non-Abeliani.

Capitolo 2

Teorie di Gauge e Topologia

Le teorie di gauge abeliane e non che presentano un fenomeno di rottura spontanea di simmetria hanno uno spettro molto più ricco di quello ricavabile direttamente dai campi presenti nella Lagrangiana [19, 20]. In effetti per queste teorie esistono configurazioni di campi estese non banali, le quali a prima vista potrebbero sembrare instabili ma che invece sono rese stabili da condizioni di natura “topologica”. Ecco quindi che diventa importante la struttura topologica del gruppo di gauge e quella dello spazio tempo in cui viviamo per garantirci l’esistenza di soluzioni delle equazioni del moto legate a vari gruppi di omotopia: domain walls (o kinks), vortici e monopoli. È da notare come tutte queste “nuove” configurazioni contribuiscano in maniera essenziale alla dinamica delle teorie di gauge.

2.1 Domain Walls

Questo tipo di solitone nasce in maniera naturale in una teoria in $1 + 1$ dim. (o similmente in $3 + 1$ dim. considerando una configurazione unidimensionale) con una Lagrangiana semplicissima:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2, \quad (2.1)$$

dove ϕ è un campo scalare reale mentre η è una costante che identifica i due vuoti della teoria. Abbiamo una simmetria discreta di tipo \mathbb{Z}_2 che mappa

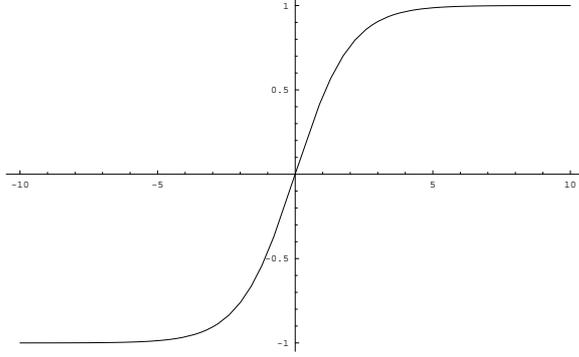


Figura 2.1: Configurazione di domain wall nel caso in cui $\eta = 1$ con centro in $x_0 = 0$.

$\phi \rightarrow -\phi$, i due minimi del potenziale sono evidentemente $\phi = \pm\eta$ e lo spazio dei vuoti verrà indicato con $\mathcal{V} = \{+\eta, -\eta\}$. Se ora cerchiamo delle soluzioni delle equazioni del moto:

$$\square\phi + \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - \eta^2)\phi = 0, \quad (2.2)$$

dedotte da (2.1) che abbiano condizioni al bordo $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = \pm\eta$ e indipendenti dal tempo con energia finita troviamo:

$$\phi(x) = \eta \operatorname{tgh} \left(\eta \frac{\sqrt{\lambda}}{2} (x - x_0) \right). \quad (2.3)$$

Questa soluzione ha una densità di energia non nulla nei pressi di x_0 (Fig. 2.1), appunto il nostro domain wall, e a grandi distanze da x_0 raggiunge i due valori di ϕ che determinano i due vuoti. La stabilità è garantita dal fatto che una deformazione del campo tale da farci arrivare alla configurazione di vuoto su tutto lo spazio dovrebbe agire su un volume infinito e quindi richiederebbe energia infinita. Per capire meglio questo fatto notiamo che esiste la seguente corrente conservata:

$$j_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi,$$

dove $\mu, \nu = 0, 1$. Se ora calcoliamo la carica conservata abbiamo semplicemente:

$$Q = \int dx j_0 = \phi(x \rightarrow +\infty) - \phi(x \rightarrow -\infty).$$

Il vuoto ha evidentemente $Q = 0$ mentre per la soluzione (2.3) vale $Q = +2\eta$, ma allora avendo il domain wall carica topologica diversa non può evolvere nella configurazione di vuoto e risulta pertanto stabile.

2.2 Vortici

Configurazioni dei campi di tipo vortice nascono in molti modelli fisici in $2 + 1$ dim. (oppure $3 + 1$ dim. con simmetria traslazionale lungo un asse). Il primo e più semplice da trattare è il modello di Higgs abeliano [21, 22] dove abbiamo un campo scalare complesso ϕ accoppiato in maniera minimale ad un campo di gauge A_μ implementando così una simmetria di tipo $U(1)$. Vedremo che già questo semplice modello supporta delle configurazioni non banali dei campi del tutto analoghe ai vortici presenti nei superconduttori.

2.2.1 Modello di Higgs abeliano

La lagrangiana di questo modello risulta essere:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - \frac{\lambda}{8}(\phi^\dagger\phi - \eta^2)^2. \quad (2.4)$$

Abbiamo una simmetria di tipo $U(1)$ dove $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ è la derivata covariante. Il vuoto è definito dal V.E.V. di $|\phi| = \eta$. Operando un riscalamento:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x/e\eta, \\ \phi &\rightarrow \eta\phi, \\ A_\mu &\rightarrow \eta A_\mu, \end{aligned}$$

otteniamo così $D_\mu \rightarrow \partial_\mu - iA_\mu$. Lavorando in gauge temporale $A_0 = 0$ e posto $\alpha = \lambda/e^2$ abbiamo che la tensione di una certa configurazione di campi (ossia l'energia per unità di lunghezza) risulta:

$$T = \int d^2x \mathcal{H} = e^2\eta^4 \int d^2x \left[\frac{1}{4} F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2} (D^i\phi)^\dagger(D_i\phi) + \frac{\alpha}{8} (\phi^\dagger\phi - 1)^2 \right]. \quad (2.5)$$

Affinchè questo integrale converga e quindi la configurazione abbia energia, o almeno energia per unità di lunghezza, finita sono necessarie le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}\phi^\dagger\phi &\rightarrow 1, \\ F_{ij} &\rightarrow 0, \\ D_i\phi &\rightarrow 0,\end{aligned}\tag{2.6}$$

quando $x \rightarrow \infty$. L'ultima condizione di (2.6) è cruciale poichè riguarda la derivata covariante piuttosto che non quella parziale di ϕ in maniera tale da permetterci soluzioni non banali. Infatti dalla prima condizione segue che $\partial_i\phi \rightarrow 0$ allora è necessario che $iA_i \rightarrow (\partial_i\phi)\phi^{-1}$ più veloce di $1/|x|^2$, ossia deve essere una pura gauge. Completando à la *Bogomol'ny* la tensione si ottiene la seguente:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = e^2\eta^4 &\left\{ \frac{1}{8} [\epsilon^{ij}F_{ij} \pm (\phi^\dagger\phi - 1)]^2 + [D_i\phi \pm i\epsilon_{ij}D^i\phi]^2 \right\} + \\ &+ e^2\eta^4 \left\{ \frac{1}{8}(\alpha - 1)(\phi^\dagger\phi - 1)^2 \pm \partial_i(\epsilon_{ij}J_j) \right\},\end{aligned}\tag{2.7}$$

dove

$$4J_j = 2A_j - i\phi^\dagger D_j\phi + i(D_j\phi)^\dagger\phi.\tag{2.8}$$

Notiamo subito in (2.7) che diversi valori di α cambiano la dinamica in maniera sostanziale, infatti se $\alpha < 1$ la situazione è identica a quella dei superconduttori di *tipo I* ossia esiste un potenziale attrattivo tra vortici, mentre per $\alpha > 1$ il potenziale che risulta è repulsivo dando così una superconduttività di *tipo II*. Il caso critico è $\alpha = 1$ (limite B.P.S.) per cui otteniamo il seguente limite inferiore per la tensione:

$$T \geq e^2\eta^4 \int d^2x \partial_i(\epsilon_{ij}J_j) \geq e^2\eta^4 \oint dx^i A_i/2.\tag{2.9}$$

Il segno di uguaglianza vale se e solo se valgono le seguenti equazioni del prim'ordine

$$\begin{cases} (D_1 \pm i D_2)\phi = 0 \\ F_{12} \pm \frac{1}{2}(\phi^\dagger\phi - 1) = 0 \end{cases}\tag{2.10}$$

inoltre (2.10) implicano le equazioni del moto dedotte da (2.4):

$$\begin{cases} D^\mu D_\mu \phi = 0 \\ \partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger) + A_\mu \phi^\dagger \phi \end{cases}, \quad (2.11)$$

sempre parlando di soluzioni statiche in gauge temporale. Notiamo che ora i vuoti ottenuti da (2.4) possono essere parametrizzati dalla fase del campo scalare ϕ , quindi possiamo identificare lo spazio dei vuoti con la circonferenza unitaria $\mathcal{V} \sim S^1_{\mathcal{V}}$. Quindi la configurazione di campi cercata mapperà la circonferenza all'infinito spaziale S^1_∞ in $S^1_{\mathcal{V}}$. Le mappe inequivalenti (ossia non collegate da una trasformazione di gauge) $\phi|_\infty : S^1_\infty \rightarrow S^1_{\mathcal{V}}$ sono classificate da un numero intero $n \in \mathbb{Z}$ chiamato *winding number*, il quale ci dice quanti “avvolgimenti” vengono effettuati tra le due circonferenze. A meno di trasformazioni di gauge possiamo prendere per una data configurazione con winding n :

$$\phi = \eta e^{in\varphi}, \quad A_\varphi = \frac{n}{r}, \quad A_r = 0 \quad (2.12)$$

questo chiaramente per $r \rightarrow \infty$. Calcoliamo con (2.12) il flusso magnetico portato dal vortice:

$$\Phi = \oint dx^i A_i = \int_0^{2\pi} d\varphi r \frac{n}{r} = 2\pi n. \quad (2.13)$$

Osserviamo come il flusso sia quantizzato proprio con il numero di avvolgimenti della soluzione considerata. Per questo tipo di configurazioni avremo allora da (2.9) il seguente limite inferiore all'energia:

$$E \geq \pi\eta^2 |n|,$$

e l'uguaglianza si ha se e solo se vale (2.10). È possibile studiare la soluzione per un vortice $n = 1$ in una situazione con simmetria cilindrica:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi(r) e^{i\varphi}, \\ A_\varphi(x, y) &= (1 - a(r)) \frac{1}{r}, \\ A_r(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

con le condizioni al bordo date da $\phi(r) \rightarrow 1$, $a(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$. Sostituendo (2.14) in (2.10) si trovano le equazioni alle quali devono soddisfare le

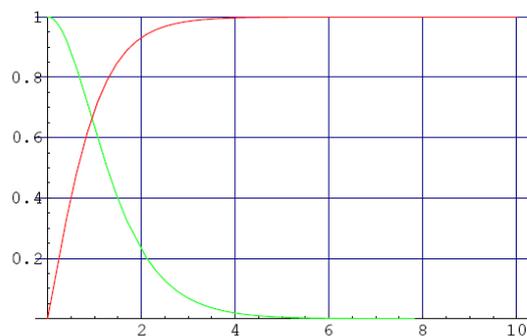


Figura 2.2: Soluzione numerica per le funzioni profilo del vortice. Notiamo che $\phi(r)$ tende ad 1 mentre $a(r)$ tende a 0 per $r \rightarrow \infty$.

funzioni profilo $\phi(r)$, $a(r)$, in questo caso non esistono soluzioni esplicite però non è difficile ottenere soluzioni numeriche le quali mostrano il taglio esponenziale di entrambe le funzioni (Fig. (2.2)). Anche in questo caso l'energia (e il flusso del campo magnetico) sono confinati in una regione larga circa l'inverso della massa del campo scalare e con centro il centro del vortice.

2.3 Monopoli

Consideriamo ora una teoria di gauge in 3+1 dim. e il modello ideale risulta quello di Georgi-Glashow: il gruppo di gauge è $SU(2)$ ed abbiamo un tripletto di campi scalari in rappresentazione aggiunta i quali ci daranno un fenomeno di Higgs.

2.3.1 Modello di Georgi-Glashow

La Lagrangiana è data da:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^a D_\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2, \quad (2.15)$$

dove

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ie [W_\mu, W_\nu],$$

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a - e \epsilon^{abc} W_\mu^b \phi^c. \quad (2.16)$$

Il potenziale di Higgs ci da il valore di aspettazione sul vuoto $|\phi|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \eta^2$ e chiaramente questo rompe $SU(2) \hookrightarrow U(1)$, adesso quindi lo spazio dei vuoti risulta una sfera $\mathcal{V} = S_\mathcal{V}^2$. Ripetendo il ragionamento svolto per i vortici scriviamo la densità di energia per configurazioni statiche:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left((G_a^{0i})^2 + \left(\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} G_a^{jk} \right)^2 + (D^0 \phi_a)^2 + (D^i \phi_a)^2 \right) + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2. \quad (2.17)$$

Richiedendo che l'integrale spaziale di (2.17) sia finito abbiamo le seguenti condizione sugli andamenti asintotici dei campi:

$$G_a^{\mu\nu} \rightarrow 0, \quad D_\mu \phi \rightarrow 0, \quad V(\phi) \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

per $|x| \rightarrow \infty$. Come già detto prima quest'ultima condizione sul potenziale ci dice che $|\phi| \rightarrow \eta$ e quindi in questo caso otteniamo il seguente mapping:

$$\vec{\phi}|_\infty : S_\infty^2 \rightarrow S_\mathcal{V}^2. \quad (2.19)$$

Riscriviamo le condizioni (2.18):

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_{vac} \cdot \vec{\phi}_{vac} &= \eta^2 \\ \partial_\mu \vec{\phi}_{vac} - e \vec{W}_\mu \times \vec{\phi}_{vac} &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

e quindi risolvendo per \vec{W}_μ :

$$\vec{W}_\mu = \frac{1}{e\eta^2} \vec{\phi}_{vac} \times \partial_\mu \vec{\phi}_{vac} + \frac{1}{\eta} \vec{\phi}_{vac} A_\mu, \quad (2.21)$$

dove A_μ è la componente di \vec{W}_μ parallela a $\vec{\phi}_{vac}$, identificabile come la parte $U(1)$ non rotta di $SU(2)$, il fotone della nostra teoria. Quindi possiamo costruire il tensore elettromagnetico costruito con la parte parallela a $\vec{\phi}_{vac}$ contenuta in $\vec{G}_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e\eta^3} \vec{\phi}_{vac} \cdot (\vec{\phi}_{vac} \times \partial_\mu \vec{\phi}_{vac}), \quad (2.22)$$

con questa definizione il campo magnetico risulta $B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$. Prendiamo ora un volume Ω abbastanza grande da circondare la nostra configurazione

di campi e sia $\partial\Omega$ il suo bordo e possiamo supporre che $\vec{\phi}|_{\partial\Omega} \sim \vec{\phi}_{vac}$. Allora calcolando la carica magnetica della configurazione presa in esame si ottiene:

$$g = \int_{\partial\Omega} dS^i B_i = -\frac{1}{2e\eta^3} \int_{\partial\Omega} dS^i \epsilon_{ijk} \vec{\phi}_{vac} \cdot (\partial^j \vec{\phi}_{vac} \times \partial^k \vec{\phi}_{vac}). \quad (2.23)$$

L'equazione (2.23) è un invariante topologico ed è proporzionale a:

$$\nu = \frac{1}{8\pi\eta^3} \int_{\partial\Omega} dS^i \epsilon_{ijk} \vec{\phi}_{vac} \cdot (\partial^j \vec{\phi}_{vac} \times \partial^k \vec{\phi}_{vac}), \quad (2.24)$$

che risulta essere un numero intero e caratterizza il numero di volte che $\vec{\phi}_{vac} \sim S_V^2$ viene "avvolto" in $\partial\Omega \sim S_\infty^2$. Troviamo allora la quantizzazione della carica magnetica:

$$g = -\frac{4\pi\nu}{e}.$$

2.3.2 Monopolo di 't Hooft-Polyakov

È possibile trovare [19, 23] esplicitamente una soluzione a simmetria sferica, statica e di energia finita utilizzando l'ansatz:

$$\begin{aligned} \phi^a &= \frac{x^a}{er^2} H(e\eta r), \\ W_i^a &= -\epsilon_{ij}^a \frac{x^j}{er^2} (1 - K(e\eta r)). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Anche per i monopoli si può fare un completamento dell'energia (o massa) della configurazione dei campi *à la Bogomol'nyi* partendo da (2.17):

$$M = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathcal{E}_i^a)^2 + (\mathcal{B}_i^a - D_i \phi^a)^2 + (D_0 \phi^a)^2 + V(\phi) \right] + \eta g, \quad (2.26)$$

dove $\mathcal{E}_i^a = -G_{0i}^a$, $\mathcal{B}_i^a = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} G_{jk}^a$. L'ultimo termine è come sempre un pezzo di superficie proporzionale a ν . Chiaramente vale il seguente limite inferiore sulla massa del nostro monopolo di carica unitaria:

$$M \geq \eta |g| = \eta \frac{4\pi}{e} = \frac{\nu}{\alpha} M_W, \quad (2.27)$$

dove M_W è la massa dei bosoni di gauge rotti. Osserviamo che più la teoria è debolmente accoppiata, $\alpha \rightarrow 0$, e più la massa dei monopoli è grande

rispetto quella dei bosoni di gauge. Per saturare il limite di (2.27) bisogna avere $\lambda \rightarrow 0$, ossia è necessario il limite BPS per il quale valgono le equazioni del prim'ordine:

$$\mathcal{B}_i^a - D_i \phi^a = 0, \quad D_0 \phi^a = 0. \quad (2.28)$$

In questo caso sostituendo le funzioni profilo date da (2.25) in (2.28) troviamo la soluzione esplicita per il monopolo di 't Hooft Polyakov:

$$H(\xi) = \xi \coth(\xi) - 1, \\ K(\xi) = \frac{\xi}{\sinh(\xi)}. \quad (2.29)$$

2.4 Ibridi

Non bisogna pensare che queste configurazioni di campi nascano ciascuna separatamente dalle altre. È del tutto possibile, anzi noi saremo proprio interessati a questi casi, che avvengano più rotture del gruppo di simmetria a scale diverse. Quello che accadrà sarà che solitoni, per esempio monopoli, legati ad una prima rottura siano collegati con altri solitoni, per esempio vortici, generati da un'altra rottura presente ad una scala inferiore dando così configurazioni del tipo monopolo/anti-monopolo collegati da vortici.

2.5 Un po' di Topologia

Una volta definito il pattern secondo il quale il gruppo di simmetrie viene rotto possiamo subito discutere dell'esistenza di questi difetti topologici quali domain walls, vortici e monopoli [24]. Partiamo quindi con una teoria che presenta un gruppo di simmetrie continue G , il quale viene rotto spontaneamente ad un suo sottogruppo H a causa di un parametro d'ordine, per esempio dei campi scalare $\phi_{i,0}$ che hanno valori di aspettazione sul vuoto non nulli:

$$G \xrightarrow{\phi_{i,0}} H. \quad (2.30)$$

Partiamo con il caso banale $H = \emptyset$, questo significa che possiamo ottenere vuoti diversi applicando a ϕ_0 un elemento di G . Ma allora lo spazio dei vuoti inequivalenti è semplicemente identificabile con $\mathcal{V} \sim G$. Se adesso $H \neq \emptyset$ applicando elementi di G a ϕ_0 non otteniamo sempre nuovi vuoti inequivalenti, infatti è necessario identificare gli elementi di G che differiscono tra loro per moltiplicazioni a destra di elementi di H . Abbiamo $h\phi_0 = \phi_0$ dove $h \in H$, allora $gh\phi_0 = g\phi_0$, $gh \sim g$. Per tanto lo spazio dei vuoti inequivalenti risulta $\mathcal{V} = G/H$, dove abbiamo indicato lo *spazio coset*

$$G/H = \{[g] = gH, g \in G, [g] = [g'] \leftrightarrow \exists h \in H \text{ t.c. } g = g'h\} .$$

Se adesso questo spazio coset non è connesso, indicando con $\pi_0(G/H)$ l'insieme delle sue componenti connesse, potremo avere un domain wall ossia una configurazione dei campi tale da unire due regioni spaziali distanti nelle quali il sistema si trova in due elementi diversi di $\pi_0(G/H)$, e pertanto in due vuoti appartenenti a regioni disconnesse di G/H . La stabilità di queste configurazioni è garantita dal fatto che il sistema per arrivare alla situazione banale dovrebbe lasciare uno dei due vuoti su un volume infinito di spazio, ossia superare così una barriera di potenziale infinita. Consideriamo adesso il caso in cui lo spazio dei vuoti contenga cammini chiusi non contrattili, ossia il caso in cui $\pi_1(G/H)$ non sia banale. L'esempio considerato prima era quello in cui $G = U(1)$ ed avevamo un parametro d'ordine dato dal v.e.v. del campo scalare ϕ il quale ci dava un mapping $\phi|_\infty : S_\infty^1 \rightarrow S_V^1$. Evidentemente andando a considerare la dipendenza dall'angolo polare φ avremo:

$$\phi|_\infty(\varphi) = g(\varphi) \phi|_\infty(0),$$

e $g(0) = g(2\pi) = \mathbb{1}$. Quindi $g(\varphi)$ è un cammino chiuso da S_∞^1 in $U(1)$, e identifica così un elemento di $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$. Chiaramente questo discorso può essere fatto solo asintoticamente o dopo un certo raggio r_0 , infatti se $\phi(x)$ potesse essere espressa ovunque come $\phi|_r(\varphi) = g(\varphi) \phi_r(0)$ necessariamente ϕ non potrebbe essere continuo $\forall r$ poichè per $r = 0$ avremmo che $g(\varphi) = \mathbb{1}$ ma quindi avremmo trasformato continuamente una mappa $g(\varphi)$ con winding

non banale per $r \rightarrow \infty$ nella mappa identità e questo non è possibile. Per tanto esiste un punto sul piano, oppure una linea nello spazio, in cui il campo lascia la configurazione di vuoto e lì abbiamo una densità di energia diversa da zero, ossia il vortice. La stabilità è assicurata se lo spazio dei vuoti non è semplicemente connesso. Passando adesso al caso di S_∞^2 e ad uno spazio di vuoti $\mathcal{V} \sim S_\mathbb{V}^2$ avremo a che fare con $\pi_2(G/H)$. L'esistenza o meno di monopoli sarà legata al fatto che il $\pi_2(G/H)$ sia non banale o banale. Ci siamo per tanto convinti che lo studio di questi difetti topologici sia legato intrinsecamente allo studio di questi vari gruppi di omotopia $\pi_n(G/H)$, sembra così di dover andare a discutere ogni singolo pattern di rottura per capire i possibili solitoni presenti nella nostra teoria, esistono però dei teoremi di topologia molto utili per il nostro studio. Esistono infatti le cosiddette relazioni di esattezza.

2.5.1 Gruppi di Omotopia e Relazioni di Esattezza

Consideriamo una varietà \mathcal{M} (p.es. G il gruppo di Lie delle trasformazioni di gauge) e una sua sottovarietà A (p.es. $H \subseteq G$ il sottogruppo in cui viene rotto G), e consideriamo i due gruppi di omotopia $\pi_i(\mathcal{M}, x_0)$ e $\pi_i(A, \mathcal{M}, x_0)$, dove si è indicato con $\pi_i(\mathcal{M}, x_0)$ l'insieme delle classi di omotopia delle applicazioni da D^i , disco i dimensionale, in \mathcal{M} , tali che tutti i punti del bordo $\partial D^i = S^{i-1} \rightarrow x_0 \ni \mathcal{M}$, detto punto base. Chiaramente $\pi_i(\mathcal{M}, x_0)$ induce su A sottovarietà di \mathcal{M} con $x_0 \in A$ una struttura simile chiamata appunto $\pi_i(A, \mathcal{M}, x_0)$. Consideriamo adesso le seguenti applicazioni:

$$j : \pi_i(\mathcal{M}, x_0) \xrightarrow{j} \pi_i(A, \mathcal{M}, x_0), \quad (2.31)$$

$$\partial : \pi_i(A, \mathcal{M}, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A, x_0), \quad (2.32)$$

$$i_* : \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(\mathcal{M}, x_0). \quad (2.33)$$

Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \text{Ker } j &= \text{Im } i_* , \\ \text{Ker } i_* &= \text{Im } \partial , \\ \text{Ker } \partial &= \text{Im } j , \end{aligned} \tag{2.34}$$

che possono essere riassunte nella sequenza:

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(A, \mathcal{M}) \xrightarrow{\partial} \pi_i(A) \xrightarrow{i_*} \pi_i(\mathcal{M}) \xrightarrow{j} \pi_i(A, \mathcal{M}) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A) \rightarrow \dots$$

la quale viene detta *sequenza esatta*. Un esempio fuori dal contesto puramente fisico può essere quello di $\mathcal{M} = D^n$ mentre $A = S^{n-1}$ così otteniamo quella che viene chiamata *serie esatta corta*:

$$0 = \pi_n(D^n) \rightarrow \pi_n(S^{n-1}, D^n) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_{n-1}(D^{n-1}) = 0 .$$

Grazie al fatto che i gruppi iniziali e finali della sequenza sono quelli banali e usando (2.34) otteniamo che la freccia centrale è in realtà un isomorfismo ottenendo quindi $\pi_n(S^{n-1}, D^n) = \mathbb{Z}$. Torniamo adesso al caso di nostro interesse ossia $\mathcal{M} = G$ gruppo di gauge rotto ad $A = H$ suo sottogruppo, utilizzando il fatto che per ogni gruppo di Lie $\pi_2(G) = 1$ abbiamo che se G è contrattile $\pi_1(G) = 1$ e quindi vale la relazione appena trovata per una sequenza esatta corta ossia:

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H) .$$

Per esempio considerando $G = SU(2)$ rotto in $U(1)$ otteniamo proprio che $\pi_2(SU(2)/U(1)) = \mathbb{Z}$ che corrisponde al monopolo di 't Hooft-Polyakov visto in precedenza. È da notare come sotto certe ipotesi (dobbiamo poter eludere il teorema di Derrick) l'analisi svolta dal punto di vista topologico ci garantisca condizioni sufficienti sulla stabilità di queste configurazioni. In seguito vedremo come la presenza simultanea di simmetrie di locali di gauge e simmetrie globali di flavour permettano di ottenere, tramite un mixing tra le due (color-flavour locking), varie soluzioni solitoniche stabilizzate da altre configurazioni topologiche.

Capitolo 3

Teorie di Gauge Supersimmetriche

3.1 Algebra di Supersimmetria

L'algebra di supersimmetria [25] è un'estensione di quella di Poincarè ed è data dalle seguenti regole di anticommutazione:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha}J}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P^\mu \delta_J^I, \\ \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= 0, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}I}, \bar{Q}_{\dot{\beta}J}\} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Q e \bar{Q} sono i generatori della supersimmetria e trasformano sotto Lorentz come operatori di spin 1/2:

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha^I] = i(\sigma^{\mu\nu} Q^I)_\alpha, \quad [M^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}I}] = i(\bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{Q}_I)_{\dot{\alpha}}. \quad (3.2)$$

Gli indici I, J corrono da $1, \dots, N$ dove N è il numero totale di supersimmetrie. Per quanto riguarda invece P^μ abbiamo:

$$[P^\mu, Q_\alpha^I] = [P^\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}J}] = 0, \quad (3.3)$$

per tanto anche il commutatore con P^2 di Q e \bar{Q} farà 0 dicendoci così che tutti gli stati appartenenti ad una data rappresentazione saranno degeneri in massa. Il prossimo passo sarà per tanto quello di studiare il contenuto di materia di alcune di queste rappresentazioni.

3.2 Rappresentazioni Irriducibili Massless

A meno di boost e rotazioni possiamo supporre che, per uno stato massless, $P^\mu = M(1, 0, 0, 1)$. Allora riscrivendo l'algebra di supersimmetria (3.1):

$$\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha}J}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4M \end{pmatrix} \delta_J^I. \quad (3.4)$$

Poichè Q_1 e \bar{Q}_1 generano stati a norma 0 possiamo toglierli e considerare solo gli altri generatori. Riscalando

$$a^I = \frac{1}{2\sqrt{M}} Q_2^I, \quad (a^I)^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{M}} \bar{Q}_{2I},$$

otteniamo l'algebra di Clifford con $2N$ generatori:

$$\{a^I, (a^J)^\dagger\} = \delta^{IJ}, \quad \{a^I, a^J\} = 0, \quad \{(a^I)^\dagger, (a^J)^\dagger\} = 0. \quad (3.5)$$

Il vuoto di Clifford $|\Omega_\lambda\rangle$ è definito dalla condizione $a^I|\Omega_\lambda\rangle = 0 \forall I$ ed è inoltre autostato dell'elicità all'autovalore λ : $h|\Omega_\lambda\rangle = \lambda|\Omega_\lambda\rangle$. Otteniamo tutti gli altri stati applicando $(a^I)^\dagger$ al vuoto ogni volta diminuendo di $1/2$ l'elicità quindi avremo tutti gli stati con elicità compresa tra $\lambda - N/2, \dots, \lambda$. A causa delle regole di anticommutazione applicando n operatori a^\dagger avrò una degenerazione data dal numero di modi in cui posso scegliere n indici diversi su N ossia: $\binom{N}{n}$. Allora chiaramente il numero totale di stati sarà 2^N .

Per esempio avremo:

$$\begin{aligned} N = 1 & : |\lambda\rangle, \quad |\lambda - 1/2\rangle, \\ N = 2 & : |\lambda\rangle, \quad 2|\lambda - 1/2\rangle, \quad |\lambda - 1\rangle, \end{aligned}$$

Completando queste rappresentazioni con i loro complementi CPT otteniamo rappresentazioni CPT invarianti, per esempio $N = 1$ con $\lambda = 1/2$ contiene uno spinore di Majorana con uno scalare complesso (multipletto scalare) mentre per $\lambda = 1$ abbiamo un vettore ed uno spinore di Majorana (multipletto vettoriale). Per $N = 2$ con $\lambda = 1/2$ abbiamo due copie del multipletto scalare $N = 1$ (ipermultipletto) per $\lambda = 1$ invece il contenuto di materia è quello di un multipletto scalare più un multipletto vettoriale sempre di $N = 1$.

3.3 Rappresentazioni Irriducibili Massive

Poichè adesso abbiamo stati con $P^2 = M^2$ possiamo sempre metterci nel sistema di riposo ottenendo $P^\mu = M(1, 0, 0, 0)$ definendo poi i soliti operatori di creazione/distruzione:

$$a_\alpha^I = \frac{1}{2\sqrt{M}} Q_\alpha^I, \quad (a_\alpha^I)^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{M}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}I}.$$

l'algebra di supersimmetria si riduce a:

$$\{a_1^I, (a_1^J)^\dagger\} = \delta^{IJ}, \quad \{a_2^I, (a_2^J)^\dagger\} = \delta^{IJ}, \quad (3.6)$$

con i restanti anticommutatori tutti nulli. Quest'algebra di Clifford non è null'altro che l'algebra (3.5) con il doppio dei generatori, per tanto avremo 2^{2N} stati. È da notare che se il vuoto di Clifford $|0\rangle$ è un singoletto di spin il massimo spin ottenibile applicando gli a^\dagger non è N bensì $N/2$ poichè lo stato ottenuto applicando tutti gli a^\dagger ha spin 0. Questo segue dalle regole di anticommutazione (3.6) che ci danno: $(a_1^I)^\dagger (a_2^J)^\dagger = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} (a_\alpha^I)^\dagger (a_\beta^J)^\dagger$ e questa espressione è uno scalare. Chiaramente se il vuoto di Clifford $|\Omega_\lambda\rangle$ ha spin j ed è quindi degenere $2j + 1$ volte, la rappresentazione conterrà $(2j + 1) 2^{2N}$ stati ottenuti combinando la rappresentazione con $j = 0$ dell'algebra di Clifford con quella di spin j per il momento angolare. Da ultimo è da notare come in tutte le rappresentazioni considerate (sia massless che massive), il numero di gradi di libertà bosonici coincide con quelli fermionici.

3.4 Supersimmetria con Carica Centrale

L'algebra (3.1) scritta in precedenza è estendibile modificando le ultime due regole di anticommutazione arrivando a:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{\dot{\alpha}J}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P^\mu \delta_J^I, \\ \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= 2\sqrt{2} \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}, \\ \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}I}, \bar{Q}_{\dot{\beta}J}\} &= 2\sqrt{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z_{IJ}^*. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Z e Z^* sono le cosiddette cariche centrali, matrici antisimmetriche in I, J che commutano con tutti gli altri generatori e quindi in una fissata rappresentazione saranno multipli dell'identità (lemma di Schur). Studiamo il caso $N = 2$ per il quale la carica centrale è semplicemente un numero $Z \in \mathbb{C}$. Partiamo dal caso massivo in quanto vedremo tra poco che il caso massless non ammette un'estensione centrale. Nel sistema di quiete vale:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_{J\dot{\alpha}}\} &= 2M \delta_{\alpha\dot{\alpha}} \delta_J^I, \\ \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= 2\sqrt{2} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{IJ} Z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Per quanto detto prima Z è semplicemente un numero complesso fisso a fissata rappresentazione. Definiamo gli operatori a, b nel seguente modo:

$$a_\alpha = \frac{1}{2} [Q_\alpha^1 + \epsilon_{\alpha\beta} (Q_\beta^2)^\dagger], \quad b_\alpha = \frac{1}{2} [Q_\alpha^1 - \epsilon_{\alpha\beta} (Q_\beta^2)^\dagger]. \quad (3.9)$$

Allora riscrivendo (3.8) arriviamo a:

$$\{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} (M + \sqrt{2} Z), \quad \{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} (M - \sqrt{2} Z), \quad (3.10)$$

e tutti gli altri anticommutatori sono nulli. Dato che in una rappresentazione unitaria tutti gli stati fisici devono avere norma definita positiva notiamo subito che il caso massless esclude una qualsiasi carica centrale ($Z = 0$) Possiamo distinguere in genere tre casi:

- $M \geq \sqrt{2} |Z|$: *long multiplet*, la rappresentazione esiste e contiene 16 stati;
- $M = \sqrt{2} |Z|$: *short multiplet*, metà dei generatori della supersimmetria annichilano gli stati, abbiamo 4 stati;
- $M \leq \sqrt{2} |Z|$: gli stati avrebbero norma quadra negativa, per tanto non esistono rappresentazioni accettabili.

L'origine della carica centrale è molto semplice, infatti considerando una generica Lagrangiana supersimmetrica \mathcal{L} le cariche Q, \bar{Q} si scriveranno come integrali spaziali di una qualche funzione locale dei campi (la componente

temporale della supercorrente). Calcolando l'anticommutatore avremo dei termini di superficie i quali in genere vengono trascurati, però in presenza di configurazioni topologicamente non banali (p.es. cariche elettriche o magnetiche) questi termini di superficie non possono essere tolti dando così una carica centrale. È da notare come gli stati *BPS*, ossia gli stati che saturano il limite inferiore $M \geq \sqrt{2}|Z|$, vengono annichilati da metà dei generatori della supersimmetria a causa di (3.10) e inoltre il fatto di appartenere ad uno short multiplet non può essere modificato da correzioni quantistiche. Di fatto queste correzioni possono al più portare ad una rinormalizzazione dei parametri ma sempre mantenendo il vincolo $M = \sqrt{2}|Z|$ altrimenti passeremmo da short multiplet a long multiplet ma non ci aspettiamo che tali correzioni possano generare tutti i gradi di libertà extra da riempire un multipletto allungato.

3.5 Rappresentazioni Locali

Così come il gruppo di Poincarè agisce sulle coordinate dello spazio-tempo, similmente le trasformazioni di supersimmetria si possono vedere come "naturali" azioni su un'estensione del normale spazio-tempo detta *superspazio*. Definendo dei supercampi su questo superspazio otterremo i soliti campi quantistici come campi componenti di questi nuovi oggetti.

3.5.1 Superspazio $N = 1$

Il superspazio per $N = 1$ è definito dalla seguente terna $(x, \theta, \bar{\theta})$ dove $\theta, \bar{\theta}$ sono delle variabili di Grassman e x è un punto dello spazio-tempo. Considero la versione $N = 1$ di (3.1) con parametri di trasformazione $\xi, \bar{\xi}$, allora le coordinate sul superspazio trasformano come:

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}, \\ \theta &\rightarrow \theta' = \theta + \xi, \\ \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\xi}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

Queste trasformazioni sono generate dall'operatore $\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, si può ottenere subito la sua rappresentazione sul superspazio:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad (3.12)$$

Questi operatori soddisfano $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu$. Introduciamo le superderivate covarianti:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i(\theta \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad (3.13)$$

le quali soddisfano $\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu$, mentre commutano invece con Q e \bar{Q} .

3.5.2 Supercampi

Come detto in precedenza un *supercampo* non è nient'altro che una generica funzione $F(x, \theta, \bar{\theta})$ del superspazio. Grazie al fatto che per una variabile di Grassman ξ vale $\xi^2 = 0$ è sempre possibile espandere un supercampo $N = 1$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ & + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Facendo una trasformazione di supersimmetria F trasforma secondo $\delta(F) = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})F$, da questa possiamo estrarre le trasformazioni dei singoli campi componenti. È da notare come la trasformazione di $d(x)$, il campo di dimensione più elevata, debba necessariamente essere una derivata totale degli altri campi componenti. Allora chiaramente a meno di derivate totali quest'ultima componente è invariante sotto trasformazioni di supersimmetria e per tanto possiamo costruire Lagrangiane invarianti prendendo le componenti più elevate di appropriati supercampi. I supercampi formano rappresentazioni lineari dell'algebra di supersimmetria, però in genere sono riducibili. Per eliminare questi gradi di libertà extra vanno aggiunti vincoli, senza però restringere la dipendenza da x .

3.5.3 Supercampi Chirali

Un supercampo $N = 1$ chirale è definito dal seguente vincolo:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \quad (3.15)$$

Ponendo $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ abbiamo:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^\mu = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\beta = 0, \quad (3.16)$$

quindi ogni funzione di (y, θ) è un supercampo chirale e si può vedere che vale anche il viceversa. Allora il più generale supercampo chirale è scrivibile in termini dei seguenti campi componenti:

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y). \quad (3.17)$$

Abbiamo A campo scalare e ψ campo fermionico, mentre F è un campo ausiliario richiesto per chiudere l'algebra off-shell. Similmente un campo antichirale sarà :

$$D_\alpha\Phi^\dagger = 0. \quad (3.18)$$

In generale una qualsiasi funzione di un supercampo chirale è a sua volta un supercampo chirale:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Phi_i) &= \mathcal{W}(A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta F_i) \\ &= \mathcal{W}(A_i) + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i} \sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta \left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial A_i} F_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial A_i \partial A_j} \psi_i \psi_j \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

\mathcal{W} viene detto *superpotenziale*.

3.5.4 Multipletto Vettoriale

Un multipletto vettoriale è semplicemente un supercampo reale, nel senso $V = V^\dagger$. In termini dei campi componenti:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C + i\theta\chi - i\bar{\theta}\bar{\chi} + \frac{i}{2}\theta^2(M + iN) - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2(M - iN) \\ &\quad - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2\bar{\theta}(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi) \end{aligned}$$

$$-i\bar{\theta}^2\theta(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(D - \frac{1}{2}\square C). \quad (3.20)$$

Si possono eliminare molti di questi campi tramite una trasformazione di gauge $V \rightarrow V + \Lambda + \Lambda^\dagger$, dove Λ e Λ^\dagger sono campi chirali e antichirali. In quella che viene chiamata gauge di Wess-Zumino vengono posti $C = M = N = \chi = 0$ ottenendo:

$$V = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}^2\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2D. \quad (3.21)$$

In questa gauge $V^2 = \frac{1}{2}A_\mu A^\mu \theta^2\bar{\theta}^2$ e di conseguenza $V^3 = 0$. È da notare che la gauge di Wess-Zumino rompe la supersimmetria ma non la simmetria di gauge abeliana di A_μ . Definiamo la field strength abeliana come:

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}}. \quad (3.22)$$

W_α è un campo chirale gauge invariante e in gauge di Wess-Zumino vale:

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F_{\mu\nu} + \theta^2(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_\alpha, \quad (3.23)$$

dove $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ è la solita field strength abeliana.

Nel caso non abeliano V appartiene alla rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge ossia $V = V_A T^A$ dove i T^A sono i generatori nella rappresentazione aggiunta e soddisfano $T^{A\dagger} = T^A$. Adesso le trasformazioni di gauge sono:

$$e^{-2V} \rightarrow e^{-i\Lambda^\dagger} e^{-2V} e^{i\Lambda}, \quad (3.24)$$

dove $\Lambda = \Lambda_A T^A$. Definiamo come prima la field strength non abeliana:

$$W_\alpha = \frac{1}{8}\bar{D}^2 e^{2V} D_\alpha e^{-2V} \quad (3.25)$$

che ora trasforma secondo:

$$W_\alpha \rightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda}. \quad (3.26)$$

Andando a vedere i campi componenti abbiamo:

$$W_\alpha = T^A \left(-i\lambda_\alpha^A + \theta_\alpha D^A - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta)_\alpha F_{\mu\nu}^A + \theta^2\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}^A \right), \quad (3.27)$$

dove

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad (3.28)$$

e D_μ è la derivata covariante:

$$D_\mu \bar{\lambda}^A = \partial_\mu \bar{\lambda}^A + f^{ABC} A_\mu^B \bar{\lambda}^C. \quad (3.29)$$

3.6 Lagrangiane $N = 1$

Come detto in precedenza le componenti più alte di un supercampo possono essere prese come base per costruire delle Lagrangiane supersimmetriche in quanto trasformano in derivate totali sotto supersimmetria. Per un supercampo chirale Φ allora posso considerare:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\Phi, \Phi^\dagger) + \int d^2\theta \mathcal{W}(\Phi) + \int d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{W}}(\Phi^\dagger). \quad (3.30)$$

Dove \mathcal{W} è il superpotenziale mentre K è un generico supercampo detto *potenziale di Kähler*. Come caso particolare si può andare a considerare $K(\Phi, \Phi^\dagger) = \Phi\Phi^\dagger$ e ottenere la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \Phi\Phi^\dagger = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + F^\dagger F + i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi, \quad (3.31)$$

Questa Lagrangiana descrive uno scalare ed uno spinore entrambi a massa nulla, mentre il campo F è un campo ausiliario e può essere eliminato tramite le equazioni del moto. Per quanto riguarda il multipletto vettoriale abbiamo invece la Lagrangiana di Yang-Mills non abeliana data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{8\pi} \text{Im} \left(\tau \text{Tr} \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha \right) \\ &= -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu} + \frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} D^a D^a - i \lambda^a \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda}^a \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

dove $\tau \in \mathbb{C}$ contiene sia la costante d'accoppiamento g che il termine θ :

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g^2}. \quad (3.33)$$

Se ora abbiamo un supercampo chirale che trasforma secondo una data rappresentazione del gruppo di gauge, ossia:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{i\Lambda^a t^a} \Phi, \quad (3.34)$$

per descrivere l'interazione con il multipletto vettoriale usiamo il termine supersimmetrico e gauge invariante:

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{-2V} \Phi. \quad (3.35)$$

Quindi mettendo insieme (3.30), (3.32) e (3.35) arriviamo alla Lagrangiana con supersimmetria $N = 1$ per un multipletto scalare interagente con uno vettoriale:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \text{Im} \left(\tau \text{Tr} \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha \right) + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{-2V} \Phi + \int d^2\theta \mathcal{W} + \int d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{W}}. \quad (3.36)$$

3.7 Lagrangiane $N = 2$

3.7.1 Multipletto Vettoriale

Il contenuto di materia $(\phi, \psi, \lambda, A_\mu)$ di un supercampo vettoriale $N = 2$ coincide proprio con quello di un multipletto vettoriale $N = 1$ (A_μ, λ) piú uno scalare sempre di $N = 1$ (ϕ, ψ) . Allora per costruire una Lagrangiana invariante $N = 2$ per questo multipletto modificheremo la (3.36). Poichè il multipletto vettoriale appartiene alla rappresentazione aggiunta dobbiamo richiedere che anche quello scalare vi appartenga $\Phi = \Phi^a T^a$. I fermioni ψ^a, λ^a vengono scambiati dalla supersimmetria $N = 2$ e per tanto è necessario togliere il superpotenziale \mathcal{W} in quanto accoppiava solo ψ^a . Da ultimo bisogna riscalarare il campo chirale:

$$\Phi \rightarrow \frac{1}{g} \Phi,$$

così che i termini cinetici dei due fermioni abbiano la stessa normalizzazione.

Arriviamo così a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \text{Im} \text{Tr} \left[\tau \left(\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha \right) + 2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{-2V} \Phi \right]. \quad (3.37)$$

I campi ausiliari D e F compaiono nella forma:

$$\frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} DD + D[\phi^\dagger, \phi] + F^\dagger F \right), \quad (3.38)$$

quindi (3.38) ci permette di eliminare, tramite le equazioni del moto, questi campi ausiliari:

$$F = 0, \quad D = -[\phi^\dagger, \phi]. \quad (3.39)$$

Sostituendo (3.39) in (3.37) si arriva a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + g^2 \frac{\theta}{32\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \frac{1}{2} [\phi^\dagger, \phi]^2 \right. \\ \left. - i\lambda \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda} - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi - i\sqrt{2} [\lambda, \psi] \phi^\dagger - i\sqrt{2} [\bar{\lambda}, \bar{\psi}] \phi \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

La Lagrangiana (3.40) descrive una generalizzazione supersimmetrica di una teoria di Yang-Mills, con un potenziale di Higgs dato da $\sim \text{Tr}([\phi^\dagger, \phi]^2)$, e un termine θ .

3.7.2 Superspazio $N = 2$

È possibile estendere il concetto di superspazio anche al caso $N = 2$ aggiungendo altri due gradi di libertà fermionici $\tilde{\theta}, \bar{\tilde{\theta}}$ al superspazio $N = 1$. I supercampi saranno funzioni su questo superspazio allargato con dei vincoli. Per esempio il multipletto vettoriale di $N = 2$ è rappresentato da un campo $\Psi(x, \theta, \bar{\theta}, \tilde{\theta}, \bar{\tilde{\theta}})$ con i vincoli di chiralità $\bar{D}_\alpha \Psi = \bar{\tilde{D}}_\alpha \Psi = 0$. Anche ora è comodo introdurre $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + i\tilde{\theta}\sigma^\mu\bar{\tilde{\theta}}$. Espandendo ora in $\tilde{\theta}$ ritroviamo i due campi $\Phi(y, \theta), W_\alpha(y, \theta)$ di $N = 1$ che compongono il multipletto vettoriale di $N = 2$:

$$\Psi(y, \theta, \tilde{\theta}) = \Phi(y, \theta) + \sqrt{2} \tilde{\theta}^\alpha W_\alpha(y, \theta) + \tilde{\theta}\tilde{\theta} G(y, \theta), \quad (3.41)$$

dove G è la seguente combinazione:

$$G(y, \theta) = \int d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger e^{2gV}. \quad (3.42)$$

La Lagrangiana (3.37) si può riscrivere in questa nuova formulazione come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \text{Im Tr} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \frac{1}{2} \tau \Psi^2 \quad (3.43)$$

Adesso è facile generalizzare (3.43), infatti per Ψ valgono tutte le considerazioni fatte per i supercampi chirali di $N = 1$ e per tanto la più generale Lagrangiana per Ψ risulta:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \text{Im Tr} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \mathcal{F}(\Psi), \quad (3.44)$$

dove \mathcal{F} è una funzione qualsiasi del supercampo e viene detta *prepotenziale*. Per tornare ad usare i supercampi $N = 1$ basta integrare $d^2\tilde{\theta}$ ricordando (3.41) e (3.42) ottenendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \text{Im} \left(\int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^a \partial \Phi^b} W^{a\alpha} W_\alpha^b + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} (\Phi^\dagger e^{2gV})^a \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^a} \right). \quad (3.45)$$

Se richiediamo una teoria rinormalizzabile allora \mathcal{F} dovrà essere quadratico in Ψ , però se vogliamo studiare una teoria di basse energie, come faremo in seguito, non sarà più necessaria la rinormalizzabilità di \mathcal{L} e quindi potremo avere un prepotenziale completamente arbitrario.

3.7.3 Ipermultipletto

Poichè i campi di materia e i campi di gauge trasformano secondo rappresentazioni diverse i campi di materia devono appartenere a qualche altro multipletto di $N = 2$ che viene chiamato *ipermultipletto*, il quale andrà a descrivere i quark della nostra teoria. L'ipermultipletto in termini di campi $N = 1$ è dato da una coppia Q, \tilde{Q} dove Q (\tilde{Q}) è un campo (anti-)chirale, trasformano rispettivamente nella rappresentazione \underline{N}_c e \underline{N}_c^* del gruppo di gauge $SU(N_c)$. In termini di campi componenti abbiamo (q, ψ_q, F_q) e $(\tilde{q}, \tilde{\psi}_q, \tilde{F}_q)$ ossia togliendo i campi ausiliari abbiamo una coppia di scalari complessi e una coppia di spinori a due componenti. Prendiamo ora N_f ipermultipletti interagenti con V supercampo vettoriale $N = 1$, per tanto la Lagrangiana

sarà data da (3.35):

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left(Q_i^\dagger e^{-2V} Q_i + \tilde{Q}_i e^{2V} \tilde{Q}_i^\dagger \right) \quad i = 1, \dots, N_f, \quad (3.46)$$

bisogna però aggiungere il termine

$$\int d^2\theta \sqrt{2} \tilde{Q}_i \Phi Q_i + \text{h.c.} \quad i = 1, \dots, N_f, \quad (3.47)$$

questo termine viene richiesto dalla supersimmetria $N = 2$ la quale lega $Q \leftrightarrow \tilde{Q}$ e $V \leftrightarrow \Phi$. Unendo (3.46) e (3.47) otteniamo:

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \left(Q_i^\dagger e^{-2V} Q_i + \tilde{Q}_i e^{2V} \tilde{Q}_i^\dagger \right) + \int d^2\theta \left(\sqrt{2} \tilde{Q}_i \Phi Q_i + m_i \tilde{Q}_i Q_i \right) + \text{h.c.}, \quad (3.48)$$

dove abbiamo aggiunto anche un termine di massa. Eliminando i campi ausiliari F_q e $F_{\tilde{q}}$ dell'ipermultipletto otteniamo il potenziale:

$$V = \frac{1}{2} g^2 D^a D^a, \quad D^a = (q_i^\dagger t^a q_i - \tilde{q}_i t^a \tilde{q}_i^\dagger), \quad (3.49)$$

dove t^a sono i generatori del gruppo nella rappresentazione fondamentale. Per determinare il vuoto della teoria dobbiamo minimizzare (3.49) tenendo conto anche dei termini aggiuntivi dovuti alla massa dell'ipermultipletto. Se i quark hanno massa diversa da 0 l'unica soluzione si ha per $q = \tilde{q} = 0$ e solo il campo scalare ϕ del multipletto vettoriale $N = 2$ potrà sviluppare un v.e.v. diverso da 0. Viceversa quando $m_i = 0$ il potenziale (3.49) ci darà delle direzioni piatte e può essere minimizzato da dei q, \tilde{q} non nulli, mentre il termine $\tilde{Q}\Phi Q$ ci dice che necessariamente $\phi = 0$. Studiando quest'ultimo caso ($m_i = 0$) notiamo che il minimo si ha per $D^a = 0$. Ora la componente scalare di Q è un campo del tipo $q_\alpha^{(i)}$ dove α è un indice di colore mentre i è di flavour, ma allora possiamo vederlo come un insieme di N_c vettori appartenenti a \mathbb{C}^{N_f} . Otteniamo quindi una matrice quadrata $N_c \times N_c$ considerando:

$$\sum_i q_\alpha^{(i)} q_\beta^{(i)\dagger} = q_\alpha \cdot q_\beta^\dagger = (qq^\dagger)_{\alpha\beta}. \quad (3.50)$$

Utilizzando questa definizione possiamo riscrivere D^a notando che:

$$\sum_i q_i^\dagger \lambda^a q_i = \sum_i q_\alpha^{(i)} q_\beta^{(i)\dagger} \lambda_{\beta\alpha}^a = \text{Tr}(qq^\dagger \lambda^a). \quad (3.51)$$

Agendo similmente per \tilde{q} arriviamo a $D^a = 0$:

$$D^a = \text{Tr} [(qq^\dagger - \tilde{q}^\dagger\tilde{q}) \lambda^a] = 0. \quad (3.52)$$

Essendo i λ^a generatori di una rappresentazione irriducibile di $SU(N_c)$ da (3.52) segue che la soluzione dev'essere del tipo:

$$qq^\dagger - \tilde{q}^\dagger\tilde{q} = c^2 \mathbb{1}_{N_c}. \quad (3.53)$$

Bisogna ora distinguere i due casi $N_f < N_c$ e $N_f \geq N_c$.

1) $N_f < N_c$: allora qq^\dagger ha rango N_f così abbiamo $N_c - N_f$ autovalori nulli, lo stesso vale per $\tilde{q}^\dagger\tilde{q}$. A meno di ruotare con $SU(N_c) \times SU(N_f) \times U(1)_R$ possiamo rendere qq^\dagger diagonale e a causa di (3.53) anche $\tilde{q}^\dagger\tilde{q}$ dev'essere diagonale. Risolvendo per q e \tilde{q} :

$$q = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2^{(2)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & v_{N_f}^{(N_f)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \tilde{v}_2^{(2)} & & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & \tilde{v}_{N_f}^{(N_f)} & 0 & \cdots \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

A causa degli autovalori nulli si deve avere $c = 0$ e quindi $v_i^{(i)} = \tilde{v}_i^{(i)}$. Dai v.e.v. ottenuti si vede che la simmetria di gauge è rotta a $SU(N_c - N_f)$ eccetto che per $N_c = N_f + 1$ per cui è rotta completamente.

2) $N_f \geq N_c$: adesso qq^\dagger ha rango N_c e in genere i suoi autovalori non saranno 0, quindi generalmente $c \neq 0$. Ripetendo quanto fatto sopra arriviamo a:

$$q = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & v_2^{(2)} & & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & v_{N_c}^{(N_c)} & 0 & \cdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{v}_2^{(2)} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \tilde{v}_{N_c}^{(N_c)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Ora vale anche:

$$\tilde{v}_i^{(i)} = \sqrt{|v_i^{(i)}|^2 - c^2}. \quad (3.56)$$

In questo caso il gruppo di gauge è rotto e il pattern di rottura dipende dai valori dei vari $v_i^{(i)}$.

3.8 Carica Centrale in teorie $N = 2$

Per calcolare la carica centrale partendo da (3.7) vediamo che dobbiamo calcolare l'anticommutatore delle due supercariche. Queste cariche Q_α^i si possono calcolare, ricordando il teorema della Noether, come integrale spaziale della componente temporale della supercorrente S^μ associata alla supersimmetria. Partendo dalla Lagrangiana (3.40) e posto $\theta = 0$ possiamo calcolare la corrente associata alla (super)simmetria $\delta_\epsilon^I = \epsilon^\alpha Q_\epsilon^I + \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} Q^{I\dot{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} g^2 S_{(1)}^\mu &= -\frac{i}{2} (\bar{\lambda}_1^a \bar{\sigma}^\mu \sigma^{\rho\nu} \epsilon + \bar{\epsilon} \bar{\sigma}^{\rho\nu} \sigma^\mu \lambda_1^a) F_{\mu\nu}^a - (\bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \lambda_1^a + \bar{\lambda}_1^a \bar{\sigma}^\mu \epsilon) \phi^\dagger T^a \phi \\ &\quad + \sqrt{2} \epsilon \sigma^\rho \bar{\sigma}^\mu \lambda_2^a D_\rho \phi^{a\dagger} + \sqrt{2} \lambda_2^a \bar{\sigma}^\mu \sigma^\rho \epsilon D_\rho \phi^a. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Per ottenere la corrente vera e propria bisogna togliere i parametri ϵ e $\bar{\epsilon}$, inoltre abbiamo rinominato i precedenti (λ, ψ) in (λ_1, λ_2) così da poter scrivere la seconda supercorrente semplicemente facendo $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ e $\lambda_2 \rightarrow -\lambda_1$ direttamente in (3.57).

Le supercariche si scrivono come $Q_{I\alpha} = \int d^3x S_{I\alpha}^0(\vec{x}, 0)$ allora data (3.57) possiamo calcolare l'anticommutatore trovando:

$$\{Q_{(1)\alpha}, Q_{(2)\beta}\} = -\frac{2\sqrt{2}}{g^2} \epsilon_{\alpha\beta} \int d^3x (iF^{a0i} + \tilde{F}^{a0i}) D_i \phi^{a\dagger}. \quad (3.58)$$

Usiamo l'identità di Bianchi e le equazioni del moto così da poter riscrivere (3.58) come integrale di una derivata totale:

$$\{Q_{(1)\alpha}, Q_{(2)\beta}\} = -\frac{2\sqrt{2}}{g^2} \epsilon_{\alpha\beta} \int d^3x \partial_i [(iF^{a0i} + \tilde{F}^{a0i}) \phi^{a\dagger}] \quad (3.59)$$

Le cariche elettriche e magnetiche possono essere definite da:

$$\begin{cases} Q_{ele} = gn_e = -\frac{1}{ag} \int d^3x \partial_i (F^{a0i} \phi^a), \\ Q_{mag} = \frac{4\pi}{g} n_m = -\frac{1}{ag} \int d^3x \partial_i (\tilde{F}^{a0i} \phi^a), \end{cases} \quad (3.60)$$

dove $\langle \phi \rangle = a$. Quindi osservando (3.59) ricaviamo che:

$$Z = -ia(n_e + \frac{4\pi i}{g^2}n_m). \quad (3.61)$$

La presenza di un termine θ nella Lagrangiana modifica l'espressione della carica centrale a causa dell'effetto Witten, ripetendo i calcoli si arriva a:

$$Z = a(n_e + \tau n_m), \quad (3.62)$$

la condizione trovata prima per ottenere rappresentazioni fisicamente accettabili $M \geq \sqrt{2}|Z|$ ripropone il limite BPS che si troverebbe nell'analisi dei monopoli magnetici.

Se ora consideriamo la Lagrangiana contenente anche gli ipermultipli-
ti chiaramente nel calcolo di (3.57) riceveremo contributo anche da Q, \tilde{Q} .
Ripetendo il procedimento considerando anche (3.48) si ottiene come carica
centrale la seguente espressione:

$$Z = a(n_e + \tau n_m) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{N_f} m_i S_i, \quad (3.63)$$

dove abbiamo definito:

$$S_i = \int d^3x \left(D_0 q_i^\dagger q_i + q_i D_0 q_i^\dagger - \frac{i}{2} \psi_{q_i}^\dagger \psi_{q_i} + \frac{i}{2} \psi_{q_i} \psi_{q_i}^\dagger - (q \rightarrow \tilde{q}, \psi_q \rightarrow \psi_{\tilde{q}}) \right).$$

Capitolo 4

Analisi di Seiberg-Witten

Nel lavoro iniziale di Seiberg e Witten [9, 10] vengono studiati lo spettro e la struttura del vuoto di una teoria con supersimmetria $N = 2$ con gruppo di gauge $SU(2)$ in 4 dimensioni. Il risultato più importante sta nel fatto che molte proprietà fisiche possono essere studiate in maniera esatta, per esempio formule di massa per gli elettroni e le masse dei dioni, nonché la metrica sul moduli space. Sono presenti vuoti nei quali la nostra teoria di gauge è fortemente accoppiata precludendo così ogni studio perturbativo, però grazie ad una trasformazione di dualità elettro-magnetica saremo in grado di descrivere la stessa teoria da un punto di vista “duale” dove ora i gradi di libertà fisicamente rilevanti e debolmente accoppiati risultano essere i monopoli.

4.1 R-Simmetria

Dall'algebra di supersimmetria (3.1) possiamo leggere direttamente [26, 27] una simmetria globale chiamata *R-simmetria*, infatti un'algebra di supersimmetria estesa con N cariche risulta invariante sotto una rotazione $U(N)$ delle supercariche e quindi dando opportuni pesi ai campi componenti una teoria supersimmetrica dovrà presentare, al meno a livello classico, questa simmetria globale $U(N)$. Consideriamo il caso $N = 1$ dove la R-simmetria

si riflette in una simmetria sotto il gruppo $U(1)$ il quale agisce sulla supercarica $Q \rightarrow e^{-i\alpha}Q$ quindi utilizzando la formulazione con il superspazio per Q (3.12) possiamo ottenere l'azione della R-simmetria su $\theta, \bar{\theta}$:

$$\theta \rightarrow e^{i\alpha}\theta, \quad \bar{\theta} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\theta}.$$

Prendendo in esame $N = 2$ avremo ora $\theta^I, \bar{\theta}_I$ con $I = 1, 2$ e il gruppo di simmetria $U(2)$ si può decomporre in $U(1)_{\mathcal{R}}$ che agisce in maniera identica a $N = 1$ e $SU(2)_R$ che ruota semplicemente gli indici I delle coordinate.

4.1.1 Azione sul Multipletto Vettoriale $N = 2$

Sappiamo dall'analisi effettuata nel secondo capitolo che il contenuto di materia di questo multipletto è dato da un campo vettoriale A_μ , due spinori di Weyl λ, ψ e uno scalare ϕ . Ponendo questi campi nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & A_\mu & \\ \lambda & & \psi \\ & \phi & \end{array} \quad (4.1)$$

otteniamo che il gruppo $SU(2)_R$ agisce ruotando le righe di (4.1): quindi A_μ e ϕ sono singoletti mentre gli spinori formano un doppietto. Utilizzando il formalismo di $N = 1$ abbiamo il supercampo chirale $\Phi = (\phi, \psi)$ e il supercampo vettoriale $V = (A_\mu, \lambda)$ perdiamo però la manifesta invarianza sotto tutto $SU(2)_R$, restando solo con un sottogruppo $U(1)_J$ che non scambia λ con ψ e agisce come fase: $(\lambda, \psi) \rightarrow (e^{i\alpha}\lambda, e^{-i\alpha}\psi)$. Riassumendo l'azione dei due sottogruppi $U(1)_{\mathcal{R}}$ e $U(1)_J$:

$$\begin{aligned} U(1)_{\mathcal{R}} : \phi &\rightarrow e^{2i\alpha}\phi \\ (\lambda, \psi) &\rightarrow e^{i\alpha}(\lambda, \psi) \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu \end{aligned} \quad (4.2)$$

a

$$\begin{aligned}
U(1)_J : \lambda &\rightarrow e^{i\alpha} \lambda & (4.3) \\
(\phi, A_\mu) &\rightarrow (\phi, A_\mu) \\
\psi &\rightarrow e^{-i\alpha} \psi.
\end{aligned}$$

Notiamo subito come, combinando i due spinori di Weyl λ e $\bar{\psi}$ in maniera da ottenere uno spinore di Dirac:

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

le due simmetrie scritte in (4.2), (4.3) non sono altro che:

$$U(1)_{\mathcal{R}} : \psi_D \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \psi_D \quad (4.4)$$

$$U(1)_J : \psi_D \rightarrow e^{i\alpha} \psi_D. \quad (4.5)$$

Scritte in questa maniera ci accorgiamo che $U(1)_{\mathcal{R}}$ è una simmetria chirale e per tanto nella nostra teoria sarà rotta dalla presenza della corrispettiva anomalia chirale come riprenderemo più avanti.

4.1.2 Azione sull'Ipermultipletto $N = 2$

Il contenuto in materia ora è dato da due campi scalari q, \tilde{q} e da i loro partner supersimmetrici $\psi_q, \psi_{\tilde{q}}$ fermioni di Weyl, nel linguaggio $N = 1$ sappiamo che questo corrisponde ad avere due multipletti chirali $Q = (q, \psi_q)$ e $\tilde{Q} = (\tilde{q}, \psi_{\tilde{q}})$. Come nel caso precedente la simmetria $SU(2)_R$ agisce ruotando le righe del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
& \psi_q & \\
q & & \tilde{q}^\dagger \\
& \psi_{\tilde{q}}^\dagger &
\end{array} \quad (4.6)$$

l'unico doppietto risulta formato da q e \tilde{q}^\dagger . Anche ora abbiamo la manifesta simmetria della Lagrangiana solo sotto il sottogruppo $U(1)_J$ che non mischia

q con \tilde{q}^\dagger . Riportiamo l'azione dei due sottogruppi $U(1)_J$ e $U(1)_\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} U(1)_\mathcal{R} : (\psi_q, \psi_{\tilde{q}}) &\rightarrow e^{-i\alpha}(\psi_q, \psi_{\tilde{q}}) \\ (q, \tilde{q}) &\rightarrow (q, \tilde{q}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} U(1)_J : q &\rightarrow e^{i\alpha}q \\ (\psi_q, \psi_{\tilde{q}}) &\rightarrow (\psi_q, \psi_{\tilde{q}}) \\ \tilde{q}^\dagger &\rightarrow e^{-i\alpha}\tilde{q}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Possiamo di nuovo utilizzare spinori di Dirac:

$$(\psi_Q)_D = \begin{pmatrix} (\psi_q)_\alpha \\ (\bar{\psi}_{\tilde{q}})_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

e ora $U(1)_\mathcal{R}$ agisce con carica opposta di (4.4):

$$U(1)_\mathcal{R} : (\psi_Q)_D \rightarrow e^{-i\alpha\gamma_5}(\psi_Q)_D. \quad (4.9)$$

4.1.3 Rottura della R-Simmetria

Possiamo riscrivere la Lagrangiana di super-Yang-Mills con $N_f = 0$ esplicitando il pezzo spinoriale in funzione di ψ_D spinore di Dirac:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \text{Tr} &\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g^2 \frac{\theta}{32\pi^2} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \frac{1}{2}[\phi^\dagger, \phi]^2 \right. \\ &\left. + i\bar{\psi}_D \not{D}\psi_D + i\sqrt{2}[\bar{\psi}_D, (\frac{1+\gamma_5}{2})\psi_D]\phi^\dagger - i\sqrt{2}[\bar{\psi}_D, (\frac{1-\gamma_5}{2})\psi_D]\phi \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Vediamo allora come $U(1)_\mathcal{R}$ (4.4) sia una simmetria a livello classico, mentre a livello quantistico è anomala $\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{N_c}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$. Usiamo l'approccio dell'integrale funzionale e facciamo un cambio di coordinate usando la

trasformazione (4.2):

$$\int [d\phi'] [d\bar{\psi}'_D] [d\psi'_D] \exp \{ iS[\phi', \bar{\psi}'_D, \psi'_D, A_\mu] \} \\ \int [d\phi] [d\bar{\psi}_D] [d\psi_D] \exp \{ iS[\phi, \bar{\psi}_D, \psi_D, A_\mu] \} e^{-i\alpha N_c \nu},$$

chiaramente $\nu \in \mathbb{N}$ è il numero istantonico. Notiamo che $U(1)_{\mathcal{R}}$ resta una simmetria dell'integrale funzionale per valori di $\alpha = \frac{2\pi n}{4N_c}$ con $n = 1, \dots, 4N_c$ e per tanto $U(1)_{\mathcal{R}}$ a questo livello viene rotto dall'anomalia a \mathbb{Z}_{4N_c} . In seguito abbiamo la rottura spontanea causata dal vev di ϕ : $u = \langle \text{Tr} \phi^2 \rangle$ il quale avendo carica 4 sotto $U(1)_{\mathcal{R}}$ trasforma secondo:

$$u \rightarrow e^{\frac{2\pi i n}{N_c}} u,$$

e quindi nel caso $u \neq 0$ il vev resta invariato solo per $n = N_c, 2N_c, 3N_c, 4N_c$ e questo ci dice che $\mathbb{Z}_{4N_c} \hookrightarrow \mathbb{Z}_4$. Per avere il gruppo di simmetria globale bisogna tenere conto del fatto che $SU(2)_R$ e questo \mathbb{Z}_4 hanno un centro comune. In conclusione il gruppo di simmetria globale risulta:

$$(SU(2)_R \times \mathbb{Z}_4) / \mathbb{Z}_2. \quad (4.11)$$

La presenza di flavors e quindi di fermioni in rappresentazione fondamentali fa sì che solo il sottogruppo $\mathbb{Z}_{4N_c - 2N_f} \subset U(1)_{\mathcal{R}}$ sopravviva all'anomalia chirale.

4.2 Spazio dei Moduli Classico

A livello classico se la teoria possiede un potenziale con direzioni piatte leggiamo lo spazio dei moduli \mathcal{M} , inteso come lo spazio dei vuoti quozientati per la relazione di equivalenza di essere collegati da una trasformazione di gauge, direttamente dai minimi del potenziale. Per una teoria di super-Yang-Mills con gruppo di gauge $SU(2)$ abbiamo visto prima (3.40) che il potenziale per il campo scalare risulta:

$$V(\phi) = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} ([\phi^\dagger, \phi]^2), \quad (4.12)$$

i vuoti della teoria quindi dovranno soddisfare alla condizione $[\phi^\dagger, \phi] = 0$. Selezionando le configurazioni di vuoto gauge inequivalenti arriviamo a $\phi = \frac{1}{2}a\sigma_3$ dove $a \in \mathbb{C}$ è la parametrizzazione dello spazio dei moduli classico. In realtà bisogna ancora tenere conto di un'invarianza di gauge residua codificata dal sottogruppo delle riflessioni di Weyl, questo ci permette di identificare come configurazioni fisicamente equivalenti i due vuoti parametrizzati da a e $-a$. Otteniamo una parametrizzazione completamente gauge invariante utilizzando:

$$u \doteq \langle \text{Tr}\phi^2 \rangle = \frac{1}{2}a^2. \quad (4.13)$$

Notiamo come, al meno a livello classico, per $a \neq 0$ la simmetria di gauge $SU(2)$ venga rotta ad $U(1)$, i campi $A_\mu^a, \psi^a, \lambda^a$ con $a = 1, 2$ acquistano massa $m = \sqrt{2}|a|$ tramite il meccanismo di Higgs, mentre invece $A_\mu^3, \psi^3, \lambda^3, \phi^3$ rimangono massless andando a formare un multipletto vettoriale short di $N = 2$. Per $a = 0$ la simmetria di gauge $SU(2)$ viene ripristinata, tutti i campi restano massless, a livello classico quindi \mathcal{M} presenta una singolarità per $u = 0$. Ci aspettiamo che correzioni quantistiche vadano a modificare lo spazio dei moduli classico andando a rimuovere od aggiungere le singolarità corrispondenti alla formazione di particelle massless.

4.3 Azione Effettiva

Vogliamo adesso andare a studiare l'azione a basse energie della nostra teoria di partenza. Quello che otterremo sarà una Lagrangiana effettiva valida solo sotto una certa scala di energie. In teoria dei campi di solito viene indicata come azione effettiva $\Gamma[\Phi]$ il funzionale generatore dei diagrammi *1PI*. $\Gamma[\Phi]$ viene calcolata integrando gli impulsi da zero fino ad un cutoff ultravioletto Λ . Va inoltre introdotta una scala μ usata per definire le funzioni a n punti rinormalizzate. Quello a cui siamo interessati ora è studiare il comportamento della teoria a energie più basse di un cutoff infrarosso μ introducendo l'azione effettiva di basse energie $S_W[\mu, \Phi]$ definita usando Γ e integrando però tutti gli impulsi fino al cutoff infrarosso μ . In genere questa procedura è tutt'altro

che semplice, per fortuna nel caso di nostro interesse è possibile dare una descrizione esatta dell'azione effettiva di basse energie. Integrando via gli stati massivi si introducono nella Lagrangiana termini non rinormalizzabili, però come già discusso nel paragrafo 3.7.2 se richiediamo che la teoria sia sempre $N = 2$ supersimmetrica necessariamente dovrà avere la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \int d^2\theta d^2\tilde{\theta} \mathcal{F}(\mathcal{A}),$$

dove $\mathcal{A} = (\Phi, W_\alpha)$ è il multipletto $N = 2$ vettoriale massless associato al sottogruppo non rotto $U(1)$ di $SU(2)$. Tenendo conto che questi campi V, Φ sono in rappresentazione aggiunta di $U(1)$ otteniamo la Lagrangiana effettiva ottenibile direttamente da (3.45):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \text{Im} \left(\int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha + 2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi} \bar{\Phi} \right). \quad (4.14)$$

Utilizzando ora i campi componenti notiamo come il termine $\mathcal{F}''(\phi)$ stia sempre a moltiplicare i termini cinetici dei vari campi. Parametizziamo lo spazio dei moduli quantistico \mathcal{M}_q con $a = \langle \phi \rangle$ dove ϕ è la componente scalare di Φ , allora $\mathcal{F}''(a)$ definisce una metrica su \mathcal{M}_q :

$$ds^2 = \text{Im} \mathcal{F}''(a) da d\bar{a} = \text{Im} \tau(a) da d\bar{a}, \quad (4.15)$$

dove abbiamo posto $\tau(a) = \mathcal{F}''(a)$ poichè viene interpretata come costante d'accoppiamento effettiva:

$$\tau(a) = \mathcal{F}''(a) = \frac{\theta}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g^2}. \quad (4.16)$$

Notiamo subito che necessariamente dobbiamo avere:

$$\text{Im} \tau(a) > 0, \quad (4.17)$$

poichè compare davanti ai termini cinetici. Purtroppo $\text{Im} \tau(a) = \text{Im} \partial^2 \mathcal{F} / \partial a^2$ non può essere definita positiva per ogni $a \in \mathbb{C}$ dato che essendo una funzione armonica deve soddisfare al principio del minimo. Il problema nasce dal fatto che abbiamo utilizzato come gradi di libertà adatti a descrivere

l'azione effettiva di basse energie Φ, W_α e la funzione \mathcal{F} su tutto \mathcal{M}_q . Dobbiamo però aspettarci che in alcuni punti dello spazio dei moduli quantistico la nostra descrizione diventi inappropriata ottenendo un regime fortemente accoppiato e quindi bisogna necessariamente passare a nuovi gradi di libertà non direttamente leggibili dalla nostra Lagrangiana di partenza i quali ora risultano debolmente accoppiati e per i quali esista una Lagrangiana effettiva ben definita. Cerchiamo intanto di trovare una prima descrizione del prepotenziale. Grazie alla R-simmetria possiamo determinare il contributo ad 1-loop del prepotenziale, infatti $U(1)_{\mathcal{R}}$ è sostanzialmente una simmetria chirale, la quale sappiamo essere anomala, questo ci consente di dire che sotto una tale trasformazione di parametro infinitesimo α la nostra Lagrangiana (4.14) trasforma come:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{\alpha}{4\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

ma possiamo anche ottenere $\delta\mathcal{L}$ partendo da (4.2) trovando al prim'ordine in α :

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{\alpha}{8\pi} \text{Im} \left[a \mathcal{F}'''(a) (\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right]. \quad (4.19)$$

Uguagliando (4.18) e (4.19) troviamo la seguente equazione per il prepotenziale:

$$\mathcal{F}'''(a) = \frac{2i}{\pi a}, \quad (4.20)$$

integrandola arriviamo al prepotenziale ad 1-loop:

$$\mathcal{F}(a) = \frac{i}{2\pi} a^2 \ln \frac{a^2}{\Lambda^2}. \quad (4.21)$$

Osserviamo come per grandi $|a|$ nel calcolo dell'azione effettiva avremo un contributo dominante per impulsi $p \sim a$ dove la teoria di gauge $SU(2)$ è asintoticamente libera e per tanto ci aspettiamo che l'espressione perturbativa trovata (4.21) dia una buona approssimazione per \mathcal{F} . In realtà si può vedere che (4.21) è esatto in teoria delle perturbazioni ad ogni ordine, acquista tuttavia contributi non perturbativi dovuti agli istantoni e la formula finale che si ottiene è:

$$\mathcal{F}(a) = \frac{i}{2\pi} a^2 \ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \left(\frac{\Lambda}{a} \right)^{4k} a^2. \quad (4.22)$$

4.4 Dualità

Abbiamo visto che le coordinate a, \bar{a} non possono essere usate su tutto lo spazio dei moduli quantistico, di conseguenza $\Phi, W_\alpha, \mathcal{F}$ non possono descrivere l'azione effettiva di basse energie su tutto \mathcal{M}_q ma solo nella regione di grandi u dove la teoria è asintoticamente libera. Per ottenere una descrizione buona anche nelle altre regioni dello spazio dei moduli dobbiamo introdurre una trasformazione di dualità che ci porta alla descrizione in termini di Φ_D, W_D^α nuovi gradi di libertà adatti a descrivere la teoria di basse energie in un'altra regione di \mathcal{M}_q . Partendo da (4.14) definiamo:

$$\phi_D \doteq \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi}, \quad (4.23)$$

e il prepotenziale duale:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_D(\Phi)}{\partial \Phi_D} = -\Phi. \quad (4.24)$$

Notiamo come questa trasformazione di dualità non sia nient'altro che una trasformata di Legendre di \mathcal{F} rispetto Φ e quindi:

$$\mathcal{F}_D(\Phi_D) = \mathcal{F}(\Phi(\Phi_D)) - \Phi(\Phi_D) \Phi_D. \quad (4.25)$$

Grazie a (4.23) possiamo reinterpretare la costante d'accoppiamento (4.16):

$$\tau(a) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(a)}{\partial a^2} = \frac{da_D}{da} \quad (4.26)$$

similmente la nuova costante d'accoppiamento duale sarà:

$$\tau_D(a_D) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(a_D)}{\partial a_D^2} = -\frac{da}{da_D} = -\frac{1}{\tau(a)} \quad (4.27)$$

capiamo quindi come regioni di strong coupling vengano mappate in regioni di weak coupling, in effetti quando il parametro $\theta = 0$ la trasformazione di dualità di τ si riflette nella seguente:

$$g \rightarrow g_D = \frac{4\pi}{g}.$$

Vediamo ora come la teoria espressa in termini di Φ_D e \mathcal{F}_D sia perfettamente equivalente a (4.14). Infatti il termine riguardante solo Φ in (4.14) è facilmente riscrivibile in termine delle variabili duali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \text{Im} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi} \bar{\Phi} &= \frac{1}{4\pi} \text{Im} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_D \overline{\left(-\frac{\partial F_D(\Phi_D)}{\partial \Phi_D} \right)} \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{Im} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \frac{\partial \mathcal{F}_D}{\partial \Phi_D} \bar{\Phi}_D, \end{aligned}$$

e quindi questo termine è invariante sotto la dualità. Per quanto riguarda il termine che coinvolge anche il supercampo vettoriale V è necessario passare ad una formulazione del prim'ordine in maniera del tutto analoga al caso dell'elettromagnetismo con A_μ e $F_{\mu\nu}$. In questo caso conviene esprimere l'integrale funzionale in termini di W_α (field-strength) piuttosto che V (potenziale di gauge). Per imporre il vincolo aggiuntivo su $F_{\mu\nu}$ dato dall'identità di Bianchi $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ notiamo che in termini di supercampi si legge come:

$$\text{Im}(D_\alpha W^\alpha) = 0. \quad (4.28)$$

Introduciamo quindi nell'integrale funzionale un moltiplicatore di Lagrange V_D supercampo reale per implementare (4.28):

$$\begin{aligned} \int [\mathcal{D}V] \exp \left[\frac{i}{8\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha \right] &= \quad (4.29) \\ \int [\mathcal{D}W][\mathcal{D}V_D] \exp \left[\frac{i}{8\pi} \text{Im} \int d^4x \left(\int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \Phi^2} W^2 + \frac{1}{2} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} V_D D_\alpha W^\alpha \right) \right] \end{aligned}$$

ed è possibile riscrivere il secondo termine introducendo:

$$(W_D)_\alpha \doteq -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D_\alpha V_D, \quad (4.30)$$

trovando così:

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} V_D D_\alpha W^\alpha = -4 \int d^2\theta (W_D)_\alpha W^\alpha.$$

Grazie a quest'ultima equazione (4.29) diventa un integrale gaussiano in W e quindi integrando questo grado di libertà otteniamo:

$$\int [\mathcal{D}V_D] \exp \left[\frac{i}{8\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta \left(-\frac{1}{\mathcal{F}''(\Phi)} W_D^\alpha W_{D\alpha} \right) \right].$$

e grazie alla (4.26) vediamo che la nuova metrica sul moduli space è semplicemente data da τ_D . Riassumendo quanto trovato la nostra teoria duale diventa:

$$\frac{1}{8\pi} \text{Im} \int d^4x \left[\int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}_D}{\partial \Phi_D^2} W_D^2 + 2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \frac{\partial \mathcal{F}_D}{\partial \Phi_D} \bar{\Phi}_D \right]. \quad (4.31)$$

Grazie all'introduzione del moltiplicatore di Lagrange V_D adesso la field-strength W_D descrive il campo magnetico e quindi $\tilde{F}_{\mu\nu}$ campi carichi sotto questo $U(1)$ non saranno più "elettroni" bensì monopoli magnetici.

4.4.1 Gruppo di Dualità

Riscriviamo l'azione (4.14):

$$\frac{1}{8\pi} \text{Im} \int d^4x \left(\int d^2\theta \frac{d\Phi_D}{d\Phi} W^\alpha W_\alpha + 2 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^D \bar{\Phi}_D \right), \quad (4.32)$$

la trasformazione di dualità si può riscrivere in una forma molto utile ora:

$$\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Notiamo subito che il secondo termine è anche invariante sotto:

$$\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

con $b \in \mathbb{Z}$. Vediamo che la scelta di un b intero fa sì che anche il primo termine risulti invariante, infatti

$$\frac{d\Phi_D}{d\Phi} \rightarrow \frac{d\Phi_D}{d\Phi} + b,$$

quindi il primo termine va in se stesso più il seguente pezzo:

$$\frac{b}{8\pi} \text{Im} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha = \frac{b}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 2\pi b\nu,$$

dove $\nu \in \mathbb{Z}$ è il numero istantonico e quindi la trasformazione (4.34) modifica l'integrale funzionale per un fattore $e^{2\pi i b\nu}$ che per $b \in \mathbb{Z}$ si riduce ad 1.

Le trasformazioni (4.33) e (4.34) generano il gruppo unimodulare $SL(2, \mathbb{Z})$. L'azione del gruppo di dualità su τ è molto semplice, infatti $SL(2, \mathbb{Z})$ agisce su τ proprio come agisce sui punti del piano complesso:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

allora:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \quad (4.35)$$

In realtà dobbiamo ricordarci che una condizione necessaria su τ è $\text{Im}\tau > 0$ e quindi stiamo lavorando su H semipiano superiore di \mathbb{C} , inoltre sappiamo che il gruppo modulare mappa il semipiano superiore in se stesso e per tanto possiamo restringerci a considerare il dominio fondamentale $H/SL(2, \mathbb{Z})$ e in questo spazio due punti distinti non sono collegati da una trasformazione di dualità dando luogo così a due teorie diverse.

4.5 Spettro della Teoria

Sappiamo che per gli stati BPS della nostra teoria deve valere:

$$M = \sqrt{2}|Z|,$$

inoltre devono appartenere ad un multipletto short. Se partiamo da stati massless, quindi necessariamente BPS, che acquistano massa tramite un meccanismo di Higgs questi rimarranno in un multipletto short saturando sempre il limite di Bogomol'nyi. Eventuali correzioni quantistiche andranno necessariamente a modificare la carica centrale e la massa, ma sempre mantenendo (4.5). Per uno stato carico solo elettricamente avremo $Z = n_e a$ quindi per dualità uno stato carico magnetico avrà $Z = n_m a_D$ e di conseguenza un dione (n_e, n_m) avrà carica centrale:

$$Z = a_D n_m + a n_e. \quad (4.36)$$

Le trasformazioni di dualità agiscono come:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix}, \quad M \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad (4.37)$$

che è equivalente a trasformare le cariche dello stato:

$$\begin{pmatrix} n_m \\ n_e \end{pmatrix} \rightarrow M^T \begin{pmatrix} n_m \\ n_e \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Come già detto prima stati carichi solo elettricamente finiscono in stati carichi solo magneticamente e viceversa.

4.6 Monodromie e Singularità

Possiamo passare ad analizzare il comportamento di $a_D(u), a(u)$ al variare di u , in particolare se u compie un cammino chiuso nello spazio dei moduli necessariamente dobbiamo trovare una teoria equivalente a quella di partenza ma non necessariamente la stessa. La presenza di singularità nello spazio dei moduli permette una monodromia non banale su \mathcal{M}_q , se il cammino chiuso circonda un punto singolare allora $a_D(u), a(u)$ non finiranno in se stessi ma in un'altra coppia equivalente sotto dualità a quella di partenza, in formule:

$$\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix}, \quad M \in SL(2, \mathbb{Z}). \quad (4.39)$$

Tutto ora sta nell'andare a studiare queste singularità e le matrici di monodromia associate ad esse.

4.6.1 Monodromia all'Infinito

Avendo già calcolato in (4.21) la forma del prepotenziale per u molto grandi, grazie alla libertà asintotica, possiamo prendere questa come buona approssimazione di \mathcal{F} calcolando così a_D :

$$a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = \frac{2i a}{\pi} \ln \left(\frac{a}{\Lambda} \right) + \frac{i a}{\pi}, \quad (4.40)$$

mentre per a essendo in regime di weak coupling varrà il limite classico $a = \sqrt{2u}$. Consideriamo quindi il cammino chiuso nel piano u dato da una circonferenza di raggio u_0 molto grande così da poter usare quanto appena trovato $u(t) = u_0 e^{2\pi i t}$ con $t \in [0, 1]$, possiamo così trovare come variano a, a_D :

$$\begin{aligned} u &\rightarrow e^{2\pi i} u, \\ a &\rightarrow a e^{i\pi} = -a, \\ a_D &\rightarrow -\frac{2i a}{\pi} \ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) + 2a - \frac{ia}{\pi} = -a_D + 2a. \end{aligned}$$

Vediamo come appare una monodromia non banale, implementata da una matrice $M_\infty \in SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M_\infty \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Grazie a quanto appena visto possiamo subito vedere come nel piano u sia necessaria almeno una singolarità, se infatti non ve ne fossero ogni cammino chiuso sarebbe contraibile in un punto ottenendo così una monodromia banale anche all'infinito. Non avendo una monodromia banale all'infinito ne deduciamo che ci dev'essere almeno una singolarità e grazie alla R-simmetria essa dev'essere per forza in 0. Avendo una sola singolarità si ottiene che la monodromia all'infinito deve coincidere con quella intorno alla singolarità e avendo una sola matrice di monodromia M_∞ ne consegue che a^2 è una buona coordinata su tutto il moduli space, ma noi sappiamo che ciò implicherebbe $\text{Im}\tau \not\approx 0$. La scelta effettuata da Seiberg e Witten è stata quella di provare con due singolarità che, sempre per R-simmetria, devono trovarsi in u_0 e $-u_0$ con $u_0 \neq 0$. Andiamo a studiare in quale modo ottenere le monodromie attorno a queste due singolarità al finito.

4.6.2 Monodromie al Finito

Andando a costruire una teoria di basse energie bisogna tener conto che in alcuni punti dello spazio dei moduli alcuni stati da massivi diventano a massa nulla creando così delle singolarità. Abbiamo già anticipato che ci devono

essere almeno due singolarità ma ancora non sappiamo quali stati diventino massless a $\pm u_0$. Se questi stati fossero dei bosoni di gauge avremmo necessariamente una teoria conforme nel limite infrarosso e quindi un operatore dimensionato come $u = \langle \text{Tr} \phi^2 \rangle$ dovrebbe fare 0, quindi singolarità a $u \neq 0$ non corrispondono a bosoni di gauge che diventano massless. Seiberg e Witten hanno pensato che questi nuovi stati a diventare massless potevano essere delle configurazioni solitoniche: monopoli e dioni. Se assumiamo che in un certo punto dello spazio dei moduli un monopolio magnetico di carica unitaria e massa data dalla formula BPS $m = \sqrt{2} |a_D|$ diventi massless necessariamente in quel punto $a_D = 0$. Sia quindi u_0 tale punto per cui $a_D(u_0) = 0$ e ricaviamo allora la monodromia attorno a questa singolarità che a meno di normalizzazioni può essere posta in $u_0 = 1$. Passiamo alla descrizione della teoria duale per la quale in $u = 1$ abbiamo monopoli massless e la teoria è data semplicemente da una teoria $U(1)$ accoppiata all'ipermultipletto descritto dai due campi chirali M, \tilde{M} che descrivono i monopoli. Conosciamo la β della teoria:

$$\beta(g) = \frac{dg}{d \ln \mu} = \frac{g^3}{8\pi^2}, \quad (4.42)$$

quindi ponendo $\theta = 0$ tramite una rotazione chirale abbiamo $\tau = i \frac{4\pi}{g^2}$ che sostituita in (4.42) ci da:

$$\mu \frac{d\tau}{d\mu} = -\frac{i}{\pi} \quad (4.43)$$

che integrata da:

$$\tau = -\frac{i}{\pi} \ln \frac{\mu}{\Lambda}. \quad (4.44)$$

Bisogna tener conto che nella teoria duale dalla β otterremo τ_D piuttosto che non τ , inoltre la scala della teoria μ è necessariamente data dalla massa dell'ipermultipletto ossia a_D . Vicino alla singolarità a_D è una buona coordinata e può pertanto essere espansa secondo $a_D(u) \simeq c_0(u-1)$. Utilizzando quanto appena detto possiamo dire che:

$$\tau_D(a_D) = -\frac{da}{da_D} = -\frac{i}{\pi} \ln \frac{a_D}{\Lambda}, \quad (4.45)$$

che integrata permette di estrarre a :

$$a = \frac{ia_D}{\pi} \left(\ln \frac{a_D}{\Lambda} - 1 \right). \quad (4.46)$$

Grazie alle espressioni per a_D e a possiamo calcolare la monodromia attorno ad $u = 1$, prendiamo il cammino chiuso $(u - 1) \rightarrow e^{2\pi i t}(u - 1)$ e sostituiamo nelle espressioni precedenti trovando:

$$\begin{aligned} a_D &\rightarrow a_D, \\ a &\rightarrow a - 2a_D. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto la seguente matrice di monodromia intorno ad $u = 1$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Conoscendo la monodromia M_∞ e M_1 è facile ora ottenere la matrice per $u = -1$. Basta infatti imporre la relazione $M_1 M_{-1} = M_\infty$ ottenuta percorrendo consecutivamente i due cammini chiusi attorno alle singolarità al finito oppure in maniera del tutto equivalente il cammino all'infinito. Otteniamo per M_{-1} :

$$M_{-1} = M_1^{-1} M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Per capire quale stato generi questa singolarità usiamo quanto detto prima sullo spettro della teoria notando che $Z = (n_m, n_e)(a_D, a)^T$ non viene modificato, nella singolarità, dalla monodromia, questo equivale a richiedere che il vettore (n_m, n_e) sia un autovettore all'autovalore 1 della matrice M^T . Per la matrice (4.49) questo ci dice che $n_m + n_e = 0$, di conseguenza nel punto del moduli space $u = -1$ lo stato che diventa massless generando così una singolarità è un dione $(1, -1)$.

4.7 Soluzione di Seiberg-Witten

Siamo arrivati a capire come lo spazio dei moduli \mathcal{M}_q parametrizzato da u abbia 3 singolarità poste in ± 1 e ∞ . Seiberg e Witten hanno trovato una

descrizione equivalente dello spazio dei moduli in termini di famiglia di curve algebriche, grazie poi a metodi di geometria algebrica sono riusciti a trovare una soluzione esatta per ogni u delle funzioni $a(u)$ e $a_D(u)$ e $\tau(u)$ caratterizzando completamente la teoria. Iniziamo con l'osservare che le matrici di monodromia $M_{\pm 1}, M_{\infty}$ generano il seguente gruppo:

$$\Gamma_2 \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ t.c. } a = d = 1 \pmod{2}, c = b = 0 \pmod{2} \right\}. \quad (4.50)$$

Possiamo restringere il semipiano complesso superiore H dato da τ al dominio fondamentale H/Γ_2 e questo viene identificato col piano u , H/Γ_2 possiede tre cuspidi che corrispondono alle tre singolarità del piano u . Adesso introduciamo una parametrizzazione di H/Γ_2 come famiglia di curve E_u :

$$y^2 = (x - 1)(x + 1)(x - u), \quad (4.51)$$

con $x, y \in \mathbb{C}$. Questa famiglia di curve presenta tre zeri per $x = 1, -1, u$, per ottenere una funzione ad un sol valore bisogna inoltre richieder che lo spazio x sia un doppio ricoprimento del piano complesso con i due fogli incollati sui tagli $-1, 1$ e u, ∞ , attraversando un taglio si passa all'altro foglio. È facile vedere che lo spazio x non è nient'altro che un toro, con y ben definita ed a un sol valore su questo spazio. Allora (4.51) definisce una famiglia di tori al variare del parametro u , diventando tori degeneri quando u va a coincidere proprio con le singolarità ossia $u = 1, -1, \infty$. Questo si può vedere meglio introducendo sul piano x una coppia di cicli indipendenti α, β , dove per esempio α circonda il taglio $-1, 1$ mentre β interseca entrambi i tagli. Quando variamo il parametro u variamo il piano x ossia il toro, quando u viene a coincidere con $1, -1, \infty$ uno dei due cicli si riduce ad un punto e la curva definita da E_u diventa singolare. Questi cicli α, β formano una base per il primo gruppo di omologia di E_u : $H^1 = (E_u, \mathbb{C})$ (in sostanza le classi di omotopia di cammini chiusi), il quale è possibile identificare con il primo gruppo di coomologia di E_u ossia lo spazio delle $(1,0)$ -forme meromorfe con residui nulli quozientate per le forme esatte. Infatti per ogni $(1,0)$ -forma ω

possiamo associare un ciclo γ usando:

$$(\gamma, \omega) \rightarrow \oint_{\gamma} \omega \in \mathbb{C}. \quad (4.52)$$

Richiedendo che i residui siano nulli otteniamo che una deformazione di γ non modifica (4.52) anche passando attraverso un polo di ω . Prendiamo ora una base per entrambi i gruppi, per il gruppo di coomologia abbiamo:

$$\omega_1 = \frac{dx}{y}, \quad \omega_2 = \frac{x dx}{y}, \quad (4.53)$$

e notiamo che ω_1 è l'unico differenziale olomorfo su E_u , mentre per il gruppo di omologia andiamo a prendere due cammini γ_1, γ_2 normalizzati a $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ (ossia con un solo punto di intersezione). Definiamo adesso i due periodi b_1, b_2 :

$$b_i \doteq \oint_{\gamma_i} \omega_1, \quad i = 1, 2. \quad (4.54)$$

Il parametro τ_u della curva ellittica E_u è dato da:

$$\tau_u \doteq \frac{b_1}{b_2}, \quad (4.55)$$

ed ha le importantissime proprietà

- $\text{Im}\tau_u > 0$,
- sotto cambi di base del primo gruppo di omologia trasforma secondo $SL(2, \mathbb{Z})$.

Prendiamo ora una qualsiasi forma $\omega \in H^1(E_u, \mathbb{C})$ e definiamo a, a_D utilizzando la base del gruppo di omologia data dai cicli α, β :

$$\begin{aligned} a_D &= \oint_{\beta} \omega, \\ a &= \oint_{\alpha} \omega. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Utilizziamo il fatto che $\tau(u) = \frac{da_D}{da}$ e ci ricordiamo che è necessario imporre $\text{Im}\tau(u) > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{da_D}{du} &= \oint_{\beta} \frac{d\omega}{du}, \\ \frac{da}{du} &= \oint_{\alpha} \frac{d\omega}{du}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Notiamo quindi che se poniamo

$$\frac{d\omega}{du} = f(u)\omega_1, \quad (4.58)$$

allora $\tau(u)$ coincide proprio con τ_u parametro del toro e $\text{Im}\tau(u) > 0$. $f(u)$ viene determinata imponendo l'andamento asintotico giusto per a_D e a vicino le singolarità e si vede che $f(u) = -\sqrt{2}/4\pi$. Fatto ciò otteniamo:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}(\omega_2 - u\omega_1)}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (4.59)$$

che ci permette di scrivere a_D e a come integrali lungo i tagli:

$$\begin{aligned} a_D &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^u \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}, \\ a &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

La monodromia generata è proprio quella che abbiamo trovato in precedenza, inoltre l'andamento vicino alle singolarità coincide precisamente con l'analisi fatta in precedenza. Ne concludiamo che il modello fisico e il modello geometrico coincidono perfettamente e siamo stati in grado di ottenere una descrizione esatta su tutti i punti dello spazio dei moduli quantistico \mathcal{M}_q della nostra teoria di basse energie.

4.8 Confinamento

Nella teoria $N = 2$ lo spettro massless nel limite semiclassico contiene solamente un multipletto vettoriale Abelian, andiamo ora a studiare cosa cambia una volta acceso un termine di massa m per il multipletto scalare Φ . A basse energie possiamo rappresentare $\text{Tr} \Phi^2$ con un supercampo chirale U , il quale ha come campo componente scalare $u = \langle \text{Tr} \Phi^2 \rangle$. Per m piccoli possiamo aggiungere semplicemente un superpotenziale efficace $W_{eff} = mU$ alla Lagrangiana di basse energie. Ci aspettiamo che un tale termine rimuova la degenerazione di vuoto e dia massa al multipletto scalare. Per avere un mass

gap bisogna che anche i campi di gauge Abeliani acquistino massa e l'unico modo possibile è quello di avere dei campi leggeri carichi che producano un meccanismo di Higgs. Sappiamo che nello spazio dei moduli quantistico vicino ad una singolarità i monopoli magnetici diventano leggeri, passando quindi ad una descrizione duale possiamo rappresentare con due multipletti chirali M, \tilde{M} di $N = 1$ l'ipermultipletto del monopolo. In tale descrizione duale il superpotenziale completo $N = 1$ deve tener conto dell'accoppiamento del monopolo con Φ_D

$$\hat{W} = \sqrt{2}\Phi_D M \tilde{M} + m U(\Phi_D). \quad (4.61)$$

Il vuoto di basse energie si trova andando a prendere la soluzione di

$$d\hat{W} = 0, \quad (4.62)$$

che soddisfi inoltre $|M| = |\tilde{M}|$ in maniera da annullare i restanti termini di potenziale dell'ipermultipletto del monopolo. Per $m = 0$ dobbiamo ritrovare lo spazio dei moduli $N = 2$ studiato in precedenza, ed in effetti troviamo che la soluzione di (4.62) risulta $M = \tilde{M} = 0$ e a_D è arbitrario. Per $m \neq 0$ invece

$$\begin{aligned} \sqrt{2} M \tilde{M} + m \frac{du}{da_D} &= 0, \\ a_D M = a_D \tilde{M} &= 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Se assumiamo che il parametro dello spazio dei moduli u abbia una dipendenza non banale da a_D , ossia $du/da_D \neq 0$, otteniamo che $M, \tilde{M} \neq 0$ mentre $a_D = 0$. Poichè M è carico il suo vev non nullo genera una massa per i campi di gauge attraverso il meccanismo di Higgs. Inoltre il fatto di avere $M \neq 0$ ci dice che i monopoli magnetici massless condensano nel vuoto, questo ci porta ad un confinamento della carica elettrica tramite un effetto Meissner duale (ossia di tipo magnetico).

4.9 Seiberg-Witten in Presenza di Materia

Ripetiamo ora a grandi linee l'analisi della soluzione di Seiberg-Witten per una teoria supersimmetrica $N = 2$ in presenza di N_f multipletti di materia

[10]. Per comodità riscalamo la carica elettrica così che n_e sia sempre un numero intero e teniamo fisso a_D :

$$a \rightarrow \frac{a}{2}, \quad n_e \rightarrow 2n_e.$$

4.9.1 QED

Preliminarmente studiamo la QED supersimmetrica $N = 2$ in presenza di N_f ipermultipli di quark, che come sempre verranno descritti dai due supercampi chirali M_i, \tilde{M}_i con carica sotto $U(1)$ rispettivamente $+1$ e -1 . L'unico superpotenziale rinormalizzabile è dato da:

$$\mathcal{W} = \sqrt{2}\Phi M^i \tilde{M}_i + \sum_i m_i M^i \tilde{M}_i. \quad (4.64)$$

Chiaramente nel caso di tutte le masse nulle la teoria acquista oltre alla R-simmetria anche una simmetria di flavor $SU(N_f)$. Nel caso $m_i = 0$ la fase di Coulomb viene selezionata da $\langle \Phi \rangle \neq 0$ che implica $\langle M^i \rangle = \langle \tilde{M}_i \rangle = 0$. Così il gruppo di gauge risulta non rotto e i quark acquistano massa grazie al vev non zero di Φ , studiando allora la teoria di basse energie restiamo semplicemente con una pura teoria di gauge supersimmetrica $N = 2$. Usiamo anche questa volta la funzione β della teoria in presenza di N_f ipermultipli e troviamo:

$$a_D = -\frac{iN_f}{2\pi} a \ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right). \quad (4.65)$$

Calcoliamo la costante d'accoppiamento ottenendo:

$$\tau = -\frac{iN_f}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) - \frac{iN_f}{2\pi}, \quad (4.66)$$

e notiamo che τ è singolare per $|a| = \Lambda/e$, questo perchè la teoria non ha senso nella regione ultravioletta non avendo ora libertà asintotica. Se ora m_i risulta diverso da 0 per un qualche i modificheremo le singolarità, infatti notiamo subito da (4.64) che per $a = -m_i/\sqrt{2}$ un quark diventa massless e quindi in \mathcal{M}_q comparirà un punto singolare.

4.9.2 QCD

Il problema adesso è quello di studiare una teoria di gauge $SU(2)$ con supersimmetria $N = 2$ accoppiata ad N_f ipermultipli. Adesso è nella teoria microscopica che è presente il superpotenziale (4.64) e di nuovo per $m_i = 0$ abbiamo una simmetria $SU(N_f)$ di flavor. La funzione β risulta:

$$\beta(g) = -\frac{4 - N_f}{16\pi^2} g^3, \quad (4.67)$$

se richiediamo $N_f = 1, 2, 3$ riusciamo ad avere una teoria asintoticamente libera, osserviamo inoltre che per $N_f = 4$ abbiamo una β identicamente nulla ottenendo una teoria conforme. Nel caso $N_f = 0$ avevamo che le trasformazioni di monodromia risultavano omogenee, si può vedere che nel caso di interesse bisogna aspettarsi trasformazioni inomogenee. In questo caso il vettore che trasforma in maniera omogenea risulta $(m/\sqrt{2}, a_D, a)$, con $m \neq 0$ massa bare di un quark che diventa massless, e l'invarianza della carica centrale ci dice che il vettore $W = (S, n_m, m_e)$ dove S è dato da (3.8) trasforma sotto una monodromia M come $W \rightarrow WM^{-1}$. Per capire la struttura dei punti singolari in \mathcal{M}_q in presenza di materia partiamo da una teoria con ipermultipli pesanti: $m \gg \Lambda$ così da avere le singolarità, dovute alla comparsa di quark massless, in una regione weakly coupled in maniera tale da poter usare ragionamenti semiclassici, mentre nella regione fortemente accoppiata avremo in sostanza una teoria con $N_f = 0$ per la quale possiamo utilizzare l'analisi svolta nelle sezioni precedenti ottenendo le due singolarità dovute alla comparsa di monopoli e dioni massless. In seguito sarà possibile spostare $m \rightarrow 0$ in maniera da capire cosa succede alle singolarità dovute alla comparsa di quark massless anche a massa bare piccola.

Capitolo 5

Vortici in $\mathcal{N} = 2$

In questo capitolo e nel successivo passeremo a studiare una particolare classe di modelli molto interessanti [4, 11, 12, 18]. Studieremo una teoria supersimmetrica $\mathcal{N} = 2$ rotta in maniera soft con un termine $\mu \text{Tr} \Phi^2$, con gruppo di gauge $SU(N)$ e con N_f ipermultipli che trasformano nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge.

5.1 Vuoti della Teoria

Partendo [4, 11, 12] con una QCD $SU(N)$, $\mathcal{N} = 2$ supersimmetrica con N_f flavors e deformandola tramite un piccolo termine di massa per il multipletto chirale solleviamo le direzioni piatte presenti nella teoria di partenza, la quale presentava una degenerazione continua di vuoti e la branca di Coulomb della teoria si riduce ad un certo numero di vuoti $\mathcal{N} = 1$ isolati. Il generico vev di Φ rompe il gruppo di gauge $SU(N) \leftrightarrow U(1)^{N-1}$ però è stato visto che qualche vuoto della teoria $\mathcal{N} = 1$ preserva un sottogruppo non-Abeliano del gruppo di gauge. Tali vuoti vengono classificati da un intero r . Partiamo come sempre da un regime semiclassico valido quando la massa bare dei quark è grande:

$$m_A \gg \Lambda, \quad A = 1, \dots, N_f, \quad (5.1)$$

allora il vev di Φ è della forma:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(-m_1, -m_2, \dots, -m_r, c, \dots, c), \quad c = \frac{1}{N-r} \sum_{i=1}^r m_i, \quad (5.2)$$

osserviamo che $\text{Tr} \Phi = 0$. Quando aggiustiamo le masse dei quark tutte ad uno stesso valore comune m siamo in grado di cambiare il pattern di rottura ottenendo

$$SU(N) \hookrightarrow SU(r) \times SU(N-r) \times U(1). \quad (5.3)$$

Poichè la massa dei quark viene dal superpotenziale $\tilde{Q}_i(\sqrt{2}\Phi + m_i)Q_i$ ne segue che il settore $SU(N-r)$ è una teoria $N=2$ di pura Yang-Mills la quale diventa fortemente interagente a basse energie rompendosi così in maniera dinamica ad $U(1)^{N-r-1}$. Per quanto riguarda il settore $SU(r)$ avendo N_f flavors massless, fintantochè $r \leq \frac{N_f}{2}$, resta debolmente accoppiato. A causa del termine di massa per lo scalare nell'aggiunta i campi degli squarks leggeri acquistano vev non nullo di tipo diagonale in colore-flavor detto in gergo *Color-Flavor Locking*:

$$\langle q_i^a \rangle = \delta_i^a \sqrt{\mu m}, \quad i, a = 1, 2, \dots, r, \quad (5.4)$$

questo rompe completamente $SU(r) \times U(1)$ a scale molto più piccole della massa bare dei quark: $\sqrt{\mu m} \ll m$. La teoria ora si trova in fase di Higgs e sono possibili configurazioni di vortici rappresentate da elementi non banali del gruppo

$$\pi_1 \left(\frac{SU(r) \times U(1)^{N-r}}{\mathbb{Z}_r} \right) = \mathbb{Z}^{N-r}. \quad (5.5)$$

5.2 Modello

Per concretezza andiamo a studiare una teoria con gruppo di gauge $SU(3)$ [4]. I campi contenuti in una tale teoria con supersimmetria $N=2$ sono: il campo di gauge A_μ , i due fermioni di Weyl $\lambda_\alpha^1, \lambda_\alpha^2$ e il campo scalare ϕ tutti nella rappresentazione aggiunta per quanto riguarda il multipletto vettoriale. Abbiamo poi N_f ipermultipli di flavors composti da q^{kA} e \tilde{q}^{kA} scalari complessi e da ψ^{kA} e $\tilde{\psi}^{kA}$ fermioni di Weyl tutti quanti nella rappresentazione

fondamentale, scegliamo per convenzione $k = 1, 2, 3$ indice di colore mentre $A = 1, \dots, N_f$ indice di flavor. I campi nella rappresentazione aggiunta saranno matrici 3×3 che andranno ad agire sui campi nella rappresentazione fondamentale i quali saranno vettori a 3 componenti dal punto di vista del colore. La teoria presenta una branca di Coulomb per la quale il campo scalare nell'aggiunta prende vev:

$$\phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 + \frac{a_8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -2\frac{a_8}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \lambda_3 a_3 + \lambda_8 a_8, \quad (5.6)$$

usando le matrici di Gellmann λ_3, λ_8 che generano la sottoalgebra di Cartan di $SU(3)$. Osserviamo come, per generici valori di a_3, a_8 il gruppo venga rotto a $U(1)^2$, se però consideriamo il particolare vuoto

$$\langle a_3 \rangle = 0, \quad (5.7)$$

almeno a livello classico avremo che la teoria a basse energie presenterà un gruppo di gauge non-Abeliano $SU(2) \times U(1)$. Adesso grazie al termine di rottura dovuto al superpotenziale

$$\mathcal{W} = \mu \text{Tr} \Phi^2, \quad (5.8)$$

la branca di Coulomb si ridurrà ad un certo numero di vuoti isolati di $N = 1$. Nel limite $\mu \rightarrow 0$ essi corrisponderanno a punti singolari sulla branca di Coulomb nei quali diverranno massless monopoli, dioni o quark. Sappiamo che tre di queste singolarità, quelle corrispondenti ai vuoti $N = 1$ della pura teoria di gauge, si troveranno in un regime di accoppiamento forte mentre i punti nei quali i quark diventano massless si troveranno in un regime di accoppiamento debole nel caso in cui $m_A \gg \Lambda$. I vuoti per i quali i quark diventano massless saranno chiamati *vuoti dei quark*, sono questi i vuoti ai quali saremo maggiormente interessati. Dobbiamo notare che la supersimmetria $N = 2$ non viene rotta al prim'ordine in μ dal termine $\mu \text{Tr} \Phi^2$, è infatti possibile riscrivere tale termine ottenendo così un termine di Fayet-Iliopoulos il quale non rompe $N = 2$, ovviamente continuando questo sviluppo avremo necessariamente dei termini che rompono a $N = 1$.

5.2.1 Teoria di Basse Energie

Un generico vev di ϕ dato da (5.6) romperebbe $SU(3)$ ad $U(1) \times U(1)$, ma nel limite di masse dei quark uguali il vev di a_3 fa zero e il gruppo di gauge che resta a basse energie risulta $SU(2) \times U(1)$. Andando a scale dell'ordine $\sqrt{\mu m}$ molto inferiori alla scala della prima rottura poichè abbiamo scelto $\mu \ll m$ il contenuto di materia della teoria sarà dato dai quattro scalari leggeri a_b e a_8 con $b = 1, 2, 3$ indice di colore sotto $SU(2)$, e dai bosoni di gauge di $SU(2)$: A_μ^b , e quello di $U(1)$: $A_\mu^{(8)}$, più certamente tutti i superpartner fermionici. I campi di gauge li possiamo definire usando

$$A_\mu = \lambda_b A_\mu^b + \lambda_8 A_\mu^8, \quad (5.9)$$

espandendo nelle prime tre matrici di Gellmann che formeranno $SU(2)$. I quark che restano leggeri andranno a formare un doppietto di $SU(2)$: i campi scalari saranno q^{kA}, \tilde{q}_{kA} , e avremo anche i loro superpartner sempre con $k = 1, 2$ indice di colore. La parte bosonica della teoria effettiva di basse energie è

$$S_{eff} = \int d^4x \left[\frac{1}{4g_2^2} (F_{\mu\nu}^b)^2 + \frac{1}{4g_1^2} (F_{\mu\nu}^{(8)})^2 + \frac{1}{g_2^2} |D_\mu a_b|^2 + \frac{1}{g_1^2} |\partial_\mu a_8|^2 + |\nabla_\mu q^A|^2 + |\nabla_\mu \tilde{q}^A|^2 + V(q^A, \tilde{q}_A, a_b, a_8) \right]. \quad (5.10)$$

Dobbiamo prestare attenzione al fatto che abbiamo due derivate covarianti di cui tenere conto, D_μ è la derivata covariante nella rappresentazione aggiunta di $SU(2)$, mentre ∇_μ è per la rappresentazione in cui trasformano i quark, ossia la fondamentale

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2\sqrt{3}} A_\mu^8 - i A_\mu^b \frac{\tau^b}{2}. \quad (5.11)$$

Chiaramente le costanti d'accoppiamento g_1 e g_2 sono gli accoppiamenti dei due gruppi $U(1)$ e $SU(2)$. Il termine di potenziale contiene

$$\begin{aligned}
 V(q^a, \tilde{q}_a, a_b, a_8) = & \frac{g_2^2}{8} (\bar{q}_A \tau^b q^A - \tilde{q}_A \tau^b \bar{\tilde{q}}^A)^2 + \frac{g_1^2}{24} (\bar{q}_A q^A - \tilde{q}_A \bar{\tilde{q}}^A)^2 + \\
 & + \frac{g_2^2}{2} |\tilde{q}_A \tau^b q^A|^2 + \frac{g_1^2}{6} |\tilde{q}_A q^A + \sqrt{6} \mu \langle a_8 \rangle|^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{N_f} \left\{ |(a_8 + \sqrt{2} m_A + \tau^b a_b) q^A|^2 + \right. \\
 & \left. + |(a_8 + \sqrt{2} m_A + \tau^b a_b) \bar{\tilde{q}}^A|^2 \right\}, \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

gli ultimi due termini fanno zero quando andiamo a considerare $\langle a_8 \rangle \neq 0$ e $\langle a_b \rangle = 0$. Il termine $\sqrt{6} \mu \langle a_8 \rangle$ nasce quando si sviluppa attorno al vev il termine di rottura della supersimmetria tenendo solo il primo ordine nelle fluttuazioni, è del tutto equivalente ad un termine di Fayet-Iliopoulos.

5.2.2 Spettro a Basse Energie

Vogliamo andare a determinare la struttura di vuoto e lo spettro di basse energie della teoria di partenza $SU(3)$ nel caso in cui il gruppo di gauge effettivo risulti $SU(2) \times U(1)$ sempre mantenendo una supersimmetria $N = 2$. Per trovare i vuoti della teoria effettiva dobbiamo cercare gli zeri del potenziale (5.12). Dobbiamo avere come minimo $N_f = 2$ per poter ottenere, a livello classico, $SU(2) \subset SU(3)$, partiamo quindi con questo semplice caso. Il vev del campo scalare ϕ del multipletto chirale Φ è

$$\phi = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & -2m \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

dove m è la massa di entrambi i flavor. Leggiamo quindi dall'equazione (5.6)

$$\langle a_3 \rangle = 0, \quad \langle a_8 \rangle = -\sqrt{6} m. \tag{5.14}$$

Possiamo eseguire una rotazione di gauge per rendere i vev degli squark reali se m, μ sono reali, in questo caso possiamo scrivere i campi $q^{kA}, \bar{\tilde{q}}^{kA}$

in notazione matriciale dove $k = 1, 2$ è l'indice di colore mentre $A = 1, 2$ è quello di flavor. Il loro vev è dato dalla forma mista di color-flavor locking

$$\langle q^{kA} \rangle = \langle \bar{q}^{\bar{k}A} \rangle = \sqrt{\frac{\xi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Il parametro $\xi = 6\mu m$ ha le dimensioni di una massa al quadrato ed è proprio la costante che moltiplica il campo di gauge $U(1)$ per costruire il termine di Fayet-Iliopoulos, questo parametro fornisce la scala della teoria di basse energie. Tutti i restanti vev delle restanti componenti di colore e di flavor per gli squark sono nulli. In questo vuoto $SU(2) \times U(1)$ è rotto completamente a causa del vev degli squark, pertanto tutti i bosoni di gauge acquistano massa dell'ordine di ξ . È proprio il termine cinetico dei quark leggibile da (5.10) a fornirci la matrice di massa per A_μ^a, A_μ^8 , la quale risulta diagonale proprio in tale base. Le masse per i bosoni vettoriali risultano

$$\begin{aligned} m_8^2 &= \frac{1}{3} g_1^2 \xi, \\ m_W^2 &= g_2^2 \xi. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Per quanto riguarda gli scalari a_8, a_b le loro masse coincidono con quelle dei rispettivi bosoni vettoriali. La matrice di massa degli squark risulta una matrice 16×16 per tenere conto delle 4 componenti reali dei campi complessi q, \bar{q} per ogni colore e per ogni flavor. A causa del meccanismo di Higgs per $U(1), SU(2)$ avremo $1 + 3$ autovalori nulli associati agli stati mangiati per dare massa ai bosoni di gauge, più due autovalori non nulli coincidenti con (5.16), vi saranno tre autovettori relativi a m_8 e nove relativi a m_W . Andando a considerare tutti questi stati si formeranno un multipletto lungo di $N = 2$ con massa m_8 , avremo 8 stati bosonici: 3 stati di A_μ^8 che ora è massivo, 2 stati di a_8 e 3 squarks, e altrettanti stati fermionici. Inoltre ci saranno tre multipletti $N = 2$ lunghi con massa m_W , ciascuno labellato da un indice di colore $a = 1, 2, 3$, di nuovo avremo 8 stati bosonici più 8 stati fermionici.

A questo punto è necessario osservare che la nostra assunzione di avere solo due flavor è stata alquanto semplicistica. Infatti nella teoria $N_f = 2$

le iterazioni di gauge $SU(2)$ diventano fortemente accoppiate sotto la scala m , non possiamo quindi sperare che la Lagrangiana (5.10) ci dia una buona descrizione nè per i gradi di libertà nè per la dinamica a scale dell'ordine $\sqrt{\mu m}$. Per questa ragione dobbiamo richiedere la presenza di flavor aggiuntivi nella teoria di partenza, se consideriamo infatti $SU(3)$ con $N_f = 4, 5$ la teoria di basse energie rimarrà in regime di accoppiamento debole e potremo quindi fare affidamento su (5.10).

Per masse dei quark diverse la teoria presenta un numero di $r = 2$ vuoti pari a $\binom{N_f}{2}$, ognuno dei quali corrisponde evidentemente a scegliere due tra gli N_f flavor disponibili che sviluppino un vev non nullo. Nel caso $N_f = 4$ questo corrisponde ad avere $N_f(N_f - 1)/2 = 6$ scelte possibili. Quando in seguito andiamo a mettere tutte le masse dei quark uguali tali vuoti si uniscono per andare a formare una branca di Higgs. Notiamo che abbiamo $8N_f$ variabili reali q^{kA}, \tilde{q}^{kA} soggette ai vincoli dati da (5.12) che sono 4 per il termine D e 8 per il termine F e altre $3 + 1$ fasi di gauge mangiate dal meccanismo di Higgs, ne segue che i gradi di libertà restanti, che determinano la dimensione di tale branca di Higgs, sono $8N_f - 12 - 4 = 8(N_f - 2)$. Quello che andremo a considerare ora sarà una sottovarietà di tale branca di Higgs che ammette vortici, essa risulta compatta e presenta una condensazione degli squark $\langle |q^A|^2 \rangle = \langle |\tilde{q}^A|^2 \rangle = \xi$. Un punto su di essa corrisponde ad un vev non nullo per i primi due flavor, mentre i restanti hanno vev nullo.

5.3 Vortici Non-Abeliani

Restringiamoci quindi a studiare una sottovarietà della branca di Higgs presente nella nostra teoria con $N_f = 4$ e tramite una rotazione di gauge possiamo prendere il vev degli squark direttamente da (5.15). Rappresentiamo con matrici 2×2 gli squarks q^{kA} che sviluppano un vev non nullo, mentre i restanti flavor rimarranno a zero sulla soluzione, anche se la loro presenza risulta importantissima lasciandoci le interazioni di $SU(2)$ debolmente accoppiate.

Facciamo l'ansatz:

$$q^{kA} = \bar{q}^{kA}, \quad (5.17)$$

e ridefiniamo i campi degli squark secondo $q^{kA} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}q^{kA}$. L'azione effettiva si riduce quindi a:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4g_2^2}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4g_1^2}(F_{\mu\nu}^8)^2 + |\nabla_\mu q^A|^2 + \frac{g_2^2}{8}(\bar{q}_A \tau^a q^A)^2 + \frac{g_1^2}{24}(\bar{q}_A q^A - 2\xi)^2 \right]. \quad (5.18)$$

Passiamo a scrivere la tensione à la Bogomolnyi

$$T = \int d^2x \left(\sum_{a=1}^3 \left[\frac{1}{2g_2} F_{ij}^{(a)} \pm \frac{g_2}{4} (\bar{q}_A \tau^a q^A) \epsilon_{ij} \right]^2 + \left[\frac{1}{2g_1} F_{ij}^{(8)} \pm \frac{g_1}{4\sqrt{3}} (|q^A|^2 - 2\xi) \epsilon_{ij} \right]^2 + \frac{1}{2} |\nabla_i q^A \pm i \epsilon_{ij} \nabla_j q^A|^2 \pm \frac{\xi}{\sqrt{3}} \tilde{F}^{(8)} \right), \quad (5.19)$$

dove $\tilde{F}^{(8)} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} F_{ij}^{(8)}$ ci da il termine topologico. Dall'annullarsi dei termini quadratici otteniamo le equazioni del prim'ordine per il vortice

$$\begin{aligned} \frac{1}{2g_2} F_{ij}^{(a)} \pm \frac{g_2}{4} (\bar{q}_A \tau^a q^A) \epsilon_{ij} &= 0, \\ \frac{1}{2g_1} F_{ij}^{(8)} \pm \frac{g_1}{4\sqrt{3}} (|q^A|^2 - 2\xi) \epsilon_{ij} &= 0, \\ \nabla_i q^A \pm i \epsilon_{ij} \nabla_j q^A &= 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

con $a = 1, 2, 3$ e $A = 1, \dots, N_f$. La soluzione di vortice $U(1) \times U(1)$ trovata nel caso di masse diverse per i quark si può leggere direttamente da (5.20). Per ottenerla in questo contesto restringiamo il campo di gauge A_μ^a ad un'unica componente diversa da zero A_μ^3 mentre $A_\mu^1 = A_\mu^2 = 0$ e consideriamo i campi degli squarks nella forma diagonale colore-flavor:

$$q^{kA}(x) = \bar{q}^{kA}(x) \neq 0, \quad k = A = 1, 2,$$

ponendo tutte le altre componenti a zero. La caratterizzazione topologica dei vortici nel caso di masse distinte risulta

$$\pi_1 \left(\frac{U(1) \times U(1)}{\mathbb{Z}_2} \right) = \mathbb{Z}^2, \quad (5.21)$$

avremo quindi due numeri interi che ci daranno i due winding attorno ai diversi $U(1)$. Siano n e k rispettivamente il winding del primo flavor e del secondo, cerchiamo quindi una soluzione di (5.20) usando l'ansatz

$$\begin{aligned} q^{kA} &= \begin{pmatrix} e^{in\phi} \phi_1(r) & 0 \\ 0 & e^{ik\phi} \phi_2(r) \end{pmatrix}, \\ A_i^3(x) &= \mp \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} ((n-k) - f_3(r)), \\ A_i^8(x) &= \mp \sqrt{3} \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} ((n+k) - f_8(r)), \end{aligned} \quad (5.22)$$

dove abbiamo usato coordinate polari r, ϕ per descrivere il piano $(1, 2)$ perpendicolare alla direzione del vortice. Sono state introdotte delle funzioni profilo ϕ_1, ϕ_2 per i campi scalari e f_3, f_8 per i campi di gauge, le quali dipendono solo da r . L'ansatz appena scritto ci permette di risolvere (5.20) a patto che le funzioni profili soddisfino:

$$\begin{aligned} r \frac{d\phi_1(r)}{dr} - \frac{1}{2} (f_8(r) + f_3(r)) \phi_1(r) &= 0, \\ r \frac{d\phi_2(r)}{dr} - \frac{1}{2} (f_8(r) - f_3(r)) \phi_2(r) &= 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{df_8(r)}{dr} + \frac{g_1^2}{6} (\phi_1(r)^2 + \phi_2(r)^2 - 2\xi) &= 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{df_3(r)}{dr} + \frac{g_3^2}{6} (\phi_1(r)^2 - \phi_2(r)^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} f_3(0) &= \pm(n-k), & f_8(0) &= \pm(n+k), \\ f_3(\infty) &= 0, & f_8(\infty) &= 0, \end{aligned} \quad (5.24)$$

dove il segno \pm è scelto in base a $\text{sign}(n+k)$. Per i campi scalari abbiamo

$$\phi_1(\infty) = \sqrt{\xi}, \quad \phi_2(\infty) = \sqrt{\xi}, \quad (5.25)$$

mentre le condizioni per $r = 0$ vanno scelte in maniera da avere che q^{kA} risulti ad un sol valore per $r \rightarrow 0$ (p.es. se $n \neq 0$ e $k = 0$ bisogna prendere $\phi_1(0) = 0$). La tensione di una stringa di tipo (n, k) nel caso di masse uguali è determinata dal flusso del campo di gauge A_μ^8

$$T_{n,k} = 2\pi\xi |n+k|. \quad (5.26)$$

Notiamo come le stringhe $(1, 0)$ e $(0, 1)$ siano perfettamente degeneri in tensione. Le equazioni (5.20) sono la generalizzazione non-Abeliana delle equazioni di Bogomolnyi e bisogna osservare che per una generica stringa (n, k) non si separano in due set di equazioni “standard” di Bogomolnyi. Adesso passiamo a considerare il caso più interessante ossia quando le masse dei quark sono uguali. Il gruppo di omotopia di nostro interesse risulta ora

$$\pi_1 \left(\frac{SU(2) \times U(1)}{\mathbb{Z}_2} \right) = \mathbb{Z},$$

invece di (5.21). Se prendiamo il loop che circonda una sola volta $U(1)/\mathbb{Z}_2$ questo ci fornisce una base per il gruppo fondamentale, quindi la tensione della stringa è ottenibile facilmente una volta noto il numero di avvolgimenti attorno a questo loop. Mentre prima avevamo un reticolo di (n, k) -stringhe adesso la caratterizzazione verrà data dall'intero $(n + k)$. Ad esempio una stringa $(1, -1)$ risulterà ora completamente instabile poichè dal punto di vista topologico il loop nel gruppo di gauge che la caratterizza è omotopo al cammino banale e quindi ha winding zero. Le stringhe $(1, 0)$ e $(0, 1)$ continuano a restare degeneri in tensione anche nel caso di masse uguali e sembrerebbero formare così un doppietto di $SU(2)$, salendo in energia avremo anche un tripletto formato da $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ e via dicendo. In realtà quello che andremo a vedere ora è che esiste un infinito continuo di vortici con stesso winding minimale e con la stessa tensione, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ saranno semplicemente due casi particolari. Costruiamo una deformazione della soluzione di vortice per $(1, 0)$ che lasci la tensione invariata e interpoli con il vortice $(0, 1)$, questo corrisponderà a degli 0-modi orientazionali. Iniziamo con il dividere i gradi di libertà fisici da quelli mangiati dal meccanismo di Higgs nei campi dei quark, parametrizziamo così la matrice dei quark:

$$q^{kA} = U_{U(1)} U_{SU(2)} (q^0 + \tau^a q^a). \quad (5.27)$$

Le matrici $U_{U(1)}$ e $U_{SU(2)}$ sono le matrici per i fattori di gauge dati da $U(1)$ e $SU(2)$, mentre $q^0(x), q^a(x)$ sono campi reali. In questa maniera rappresentiamo le 8 variabili reali contenute in q^{kA} come $3 + 1$ fattori di fase di gauge

mangiati dal meccanismo di Higgs e 4 variabili fisiche q^0, q^a le quali grazie alle condizioni del vuoto devono soddisfare

$$\langle q^0 \rangle = \sqrt{\xi}, \quad \langle q^a \rangle = 0. \quad (5.28)$$

Prendiamo la soluzione per il vortice $(1, 0)$ da (5.22) ponendola in gauge singolare così che il flusso del vortice venga tutto dalla singolarità del potenziale di gauge nell'origine:

$$q^{kA} = \begin{pmatrix} \phi_1(r) & 0 \\ 0 & \phi_2(r) \end{pmatrix},$$

$$A_i^3(x) = \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} f_3(r), \quad A_i^8(x) = \sqrt{3} \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} f_8(r). \quad (5.29)$$

Osserviamo che un sottogruppo diagonale di $SU(2)_C \times SU(2)_F$ sopravvive, cioè non viene rotto dal vev degli squarks

$$U \langle q \rangle U^{-1} = \langle q \rangle,$$

dove U è una rotazione globale in $SU(2)_{C+F}$. Applichiamo quindi questa rotazione a (5.29) trovando

$$q^{kA} = U \begin{pmatrix} \phi_1(r) & 0 \\ 0 & \phi_2(r) \end{pmatrix} U^{-1},$$

$$A_i(x) = \frac{1}{2} U \tau^3 U^{-1} \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} f_3(r), \quad A_i^8(x) = \sqrt{3} \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} f_8(r), \quad (5.30)$$

dove abbiamo usato $A_\mu = A_\mu^a \tau^a / 2$ per i campi di gauge di $SU(2)$. Possiamo rappresentare la rotazione di τ^3 nel seguente modo

$$U \tau^3 U^{-1} = n^a \tau^a, \quad (5.31)$$

dove n^a parametrizza la sfera S^2 essendo un vettore unitario a tre componenti. Riscriviamo quindi $A_i(x)$

$$A_i(x) = \frac{1}{2} n^a \tau^a \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} f_3(r). \quad (5.32)$$

Da (5.32) vediamo che l'orientazione del flusso del vortice nel gruppo $SU(2)$ non è più nella direzione 3 bensì in una generica direzione n^a e ovviamente

continuiamo ad avere una soluzione di (5.20). Bisogna comunque specificare che una soluzione esplicita di vortice rompe $SU(2)_{C+F} \hookrightarrow U(1)$, allora i due angoli associati a n^a parametrizzeranno lo spazio quoziente $SU(2)/U(1) \sim \mathbb{CP}^1 \sim S^2$. È interessante studiare l'operatore

$$\mathcal{O}_B^A(x) \doteq \bar{q}_B q^A(x), \quad (5.33)$$

che possiede indici di flavor A, B e risulta un buon candidato ad essere un'osservabile. L'operatore \mathcal{O} è gauge invariante e inserendo la nostra soluzione contenente n^a notiamo che si può riscrivere

$$\mathcal{O}(r) = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)(r) + n^a \tau^a \frac{1}{2}(\phi_1^2 - \phi_2^2)(r), \quad (5.34)$$

che ci mostra una dipendenza da n^a in vicinanza del vortice dove $(\phi_1^2 - \phi_2^2)$ è diverso da zero. Ci convinciamo pertanto che questo parametro di orientazione corrisponde a 0-modi fisici dai quali possono dipendere operatori rilevanti fisicamente.

5.4 Teoria Effettiva sulla Worldsheet

Studiando il caso $SU(3) \hookrightarrow SU(2) \times U(1)$ vogliamo ottenere una teoria di basse energie per i parametri di orientazione collettivi sulla worldsheet del vortice. Per ottenere questo assumiamo che le coordinate n^a siano funzioni variabili lentamente delle coordinate della worldsheet x_n dove $n = 0, 3$. In questa maniera n^a diventa un campo di un modello-sigma 1 + 1 dimensionale. Osserviamo innanzitutto che essendo n^a i moduli che parametrizzano i modi-0 del vortice ne consegue che non ci sarà termine di potenziale sulla worldsheet. Sostituiamo direttamente nell'azione questi parametri che acquistano dipendenza da z, t tramite $n^a(x_n)$. Bisogna tenere conto però che avendo messo una dipendenza da z, t le componenti $n = 0, 3$ dei campi di gauge non saranno più nulle, assumeremo il seguente ansatz per loro:

$$A_n = -i (\partial_n U) U^{-1} f(r), \quad (5.35)$$

dove abbiamo dovuto introdurre una nuova funzione profilo $f(r)$, per ora possiamo solo dare la condizione al contorno

$$f(\infty) = 0, \quad (5.36)$$

vedremo poi come determinare f . Il termine cinetico per n^a viene dal termine cinetico dei campi di gauge e degli squarks, intanto calcoliamo la fieldstrength per $SU(2)$ trovando

$$F_{ni} = \frac{1}{2} \partial_n n^a \tau^a \epsilon_{ij} \frac{x_j}{r^2} [1 - f(r)] + i \partial_n U U^{-1} \frac{x_i}{r} \frac{df(r)}{dr}, \quad (5.37)$$

e da questa vediamo che per avere un contributo finito da $\text{Tr} F_{ni}^2$ dobbiamo imporre

$$f(0) = 1. \quad (5.38)$$

Sostituendo (5.37) nell'azione e calcolando anche il contributo degli squarks arriviamo a

$$S_\sigma^{(1+1)} = \beta \int d^2x \frac{1}{2} (\partial n^a)^2, \quad (5.39)$$

la costante d'accoppiamento β è data da

$$\beta = \frac{2\pi}{g_2^2} \int dr r \left\{ \left(\frac{df(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} f_3^2 (1-f)^2 + g_2 \left[\frac{1}{2} f^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (1-f)(\phi_1 - \phi_2)^2 \right] \right\}. \quad (5.40)$$

Variando l'integrale in β rispetto a f otteniamo l'equazione "del moto" cui deve soddisfare f e si può vedere che alla fine

$$f(r) = 1 - \frac{\phi_1}{\phi_2}, \quad (5.41)$$

che ci porta anche

$$\beta = \frac{2\pi}{g_2^2}. \quad (5.42)$$

Chiaramente l'azione (5.40) descrive una teoria effettiva di basse energie, abbiamo trascurato tutti gli ordini più alti ottenibili come correzioni in potenze di

$$\frac{\partial_n}{g_2 \sqrt{\xi}}.$$

5.4.1 Generalizzazione a $\mathbb{CP}(N - 1)$

Riportiamo la soluzione [8] per la stringa elementare in un modello per il quale la simmetria del vuoto sia $SU(N)_{C+F}$ rotta dalla soluzione a $SU(N-1) \times U(1)$

$$\begin{aligned}
q^{kA} &= U \begin{pmatrix} \phi_2(r) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \phi_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \phi_1(r) \end{pmatrix} U^{-1}, \\
A_i^{SU(N)} &= \frac{1}{N} U \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -(N-1) \end{pmatrix} U^{-1} \epsilon_{ij} \frac{x_i}{r^2} f_{NA}(r), \\
A_i^{U(1)} &= -\frac{1}{N} \epsilon_{ij} \frac{x_i}{r^2} f(r), \quad A_0^{U(1)} = A_0^{SU(N)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

La matrice $U \in SU(N)_{C+F}$ parametrizza i modi-0 di orientazione all'interno del gruppo di gauge, ovviamente tale soluzione è riportata in gauge singolare. Sappiamo che non tutte le matrici U forniscono una soluzione diversa, il gruppo $SU(N-1) \times U(1)$ è ancora non rotto quindi lo spazio dei moduli è

$$\frac{SU(N)}{SU(N-1) \times U(1)} \sim \mathbb{CP}(N-1). \tag{5.44}$$

Parametrizziamo nel seguente modo la matrice di (5.43)

$$\frac{1}{N} \left\{ U \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -(N-1) \end{pmatrix} U^{-1} \right\}_p^l = -n^l n_p^* + \frac{1}{N} \delta_p^l, \tag{5.45}$$

con $n^l \in \mathbb{C}^N$ e $n_i^* n^i = 1$. Vedremo che una fase di gauge $U(1)$ verrà eliminata e resteremo con i giusti gradi di libertà $2(N-1)$ per descrivere il modello sigma $\mathbb{CP}(N-1)$. Riscriviamo la soluzione (5.43) con la parametrizzazione

appena introdotta

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{N}[(N-1)\phi_2 + \phi_1] + (\phi_1 - \phi_2) \left(n \cdot n^* - \frac{1}{N} \right), \\ A_i^{SU(N)} &= \left(n \cdot n^* - \frac{1}{N} \right) \epsilon_{ij} \frac{x_i}{r^2} f_{NA}(r), \\ A_i^{U(1)} &= \frac{1}{N} \epsilon_{ij} \frac{x_i}{r^2} f(r). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Esattamente come prima lasciamo fluttuare questi parametri di orientazione facendo $n^l \rightarrow n^l(x_k)$ dove $k = 0, 3$ per ottenere un'azione effettiva di basse energie sulla worldsheet del vortice. Anche in questo caso è necessario introdurre dei campi di gauge con componenti non nulle anche per $k = 0, 3$ e utilizziamo l'ansatz

$$A_k^{SU(N)} = -i [\partial_k n \cdot n^* - n \cdot \partial_k n^* - 2n \cdot n^* (n^* \partial_k n)] \rho(r), \quad (5.47)$$

esattamente come per (5.35) dove abbiamo usato ρ al posto della funzione profilo f . Ripetendo il calcolo della fieldstrength si arriva a

$$S^{(1+1)} = 2\beta \int dt dz \{ (\partial_k n^* \partial_k n) + (n^* \partial_k n)^2 \}, \quad (5.48)$$

dove abbiamo ancora

$$\beta = \frac{2\pi}{g_2^2}, \quad (5.49)$$

dopo avere operato una procedura di minimo per quanto riguarda la funzione ρ , il procedimento è del tutto analogo al caso di $\mathbb{CP}(1)$. Nella teoria quantistica le due costanti d'accoppiamento saranno soggette a running, bisogna quindi dire a quale scala vale (5.49). Il modello $\mathbb{CP}(N-1)$ ci fornisce una descrizione della dinamica interna alla stringa ad energie basse, inferiori all'inverso dello spessore del vortice, il quale è dato dal vev degli squark ξ . In (5.48) allora ξ gioca il ruolo di cutoff ultravioletto, ed è proprio questa la scala alla quale vale (5.49). Sotto tale scala entrambe le costanti sono soggette a running. Ripetiamo ancora una volta che quello di (5.48) è un modello effettivo a basse energie, sottintendiamo sempre che lo sviluppo in potenze di

$$(g_2 \sqrt{\xi})^{-1} \partial_k$$

si ferma ai contributi quadratici.

Quanto detto prima per il modello $\mathbb{CP}(1)$ è direttamente estraibile dall'analisi appena effettuata operando il cambio di variabili

$$S^a = -n_l^* (\tau^a)_{lp} n_p. \quad (5.50)$$

5.4.2 Fisica del Modello $\mathbb{CP}(N - 1)$

Il modello (5.48) si può riscrivere in molteplici forme, fenomeno tipico delle teorie due dimensionali. In particolar modo si può capire come limite di accoppiamento forte di una teoria di gauge $U(1)$ la cui parte bosonica è della forma

$$S = \int d^2x \left\{ 2\beta |\nabla_k n^l|^2 + \frac{1}{4e^2} F_{kl}^2 + \frac{1}{e^2} |\partial_k \sigma|^2 + 4\beta |\sigma|^2 |n_l|^2 + 2e^2 \beta^2 (|n^l|^2 - 1)^2 \right\}, \quad (5.51)$$

dove la derivata covariante $\nabla_k = \partial_k - iA_k$ e σ è un campo scalare complesso. Il limite $e^2 \rightarrow \infty$ ci permette di implementare la condizione $n_l^* n_l = 1$, inoltre in tale limite il campo A_k e il suo superpartner bosonico $N = 2$ σ diventano ausiliari e possono essere integrati via tramite le loro equazioni del moto

$$A_k = -\frac{i}{2} n_l^* \overleftrightarrow{\partial}_k n^l, \quad \sigma = 0. \quad (5.52)$$

Sostituendo (5.52) nell'azione riotteniamo (5.48). La costante d'accoppiamento β è asintoticamente libera e il suo running come funzione dell'energia E è dato da

$$4\pi\beta = N \ln \frac{E}{\Lambda_\sigma}, \quad (5.53)$$

dove Λ_σ è la scala dinamicamente generata dal modello sigma. Il cutoff ultravioletto della teoria è dato da $g_2 \xi$ e quindi utilizzando (5.49) arriviamo a

$$\Lambda_\sigma^N = g_2^N \xi^{N/2} e^{-\frac{8\pi^2}{g_2^2}} = \Lambda_{SU(N)}^N, \quad (5.54)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\frac{8\pi^2}{g_2^2(E)} = N \ln \frac{E}{\Lambda_{SU(N)}}$. Giungiamo quindi all'importantissimo fatto che la scala del modello sigma e quella del modello

di bulk $SU(N)$ coincidono, avendo così un collegamento tra teoria in $1 + 1$ e $3 + 1$ dimensioni. Il modello $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ è stato risolto esattamente da Witten nel limite $N \rightarrow \infty$.

Capitolo 6

Vortici senza Abelianizzazione

Quest'ultimo capitolo presenta la parte originale del nostro lavoro [18]. Studiando una teoria di gauge con supersimmetria $N = 2$ rotta in maniera soft abbiamo trovato vortici che presentano uno spazio dei moduli veramente non-abeliano e soprattutto che non si riducono a vortici abeliani in maniera dinamica. Scegliendo in maniera appropriata le masse bare dei quark siamo in grado di selezionare un pattern di rottura del tipo $SU(N) \hookrightarrow SU(n) \times SU(r) \times U(1)/\mathbb{Z}_K$ con K minimo comune multiplo di n e r . A causa del vev non nullo degli squark il gruppo di gauge è rotto completamente ed in questo contesto nascono vortici che portano uno spazio dei moduli non-abeliano $\mathbb{CP}(n-1) \times \mathbb{CP}(r-1)$.

6.1 Modello

Il modello di partenza è sempre una teoria con supersimmetria $N = 2$, gruppo di gauge $SU(N)$ in presenza di $N_f = N$ flavor:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \text{Im} \tau_{cl} \left[\int d^4\theta \text{Tr} (\Phi^\dagger e^V \Phi e^{-V}) + \int d^2\theta \frac{1}{2} \text{Tr} W^2 \right] + \mathcal{L}_q + \int d^2\theta \mu \text{Tr} \Phi^2, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{L}_q = \sum_i \left[\int d^4\theta (Q_i^\dagger e^V Q_i + \tilde{Q}_i e^{-V} \tilde{Q}_i^\dagger) + \int d^2\theta \tilde{Q}_i (\sqrt{2}\Phi + m_i) Q_i \right], \quad (6.2)$$

dove τ_{cl} differisce da (3.33) per un fattore 2 e μ ci da una massa bare per Φ rompendo esplicitamente $N = 2$ ad $N = 1$. Scegliamo adesso le masse bare dei quark nel seguente modo:

$$m_1 = \dots = m_n = m^{(1)}, \quad m_{n+1} = \dots = m_{n+r} = m^{(2)}, \quad (6.3)$$

con $n + r = N$ e inoltre:

$$nm^{(1)} + rm^{(2)} = 0, \quad (6.4)$$

quest'ultima equazione è equivalente a:

$$m^{(1)} = \frac{r m_0}{\sqrt{n^2 + r^2}}, \quad m^{(2)} = -\frac{n m_0}{\sqrt{n^2 + r^2}}. \quad (6.5)$$

È importante notare che le scale di energie sono così correlate:

$$|m_0| \gg |\mu| \gg \Lambda. \quad (6.6)$$

Il vev del supercampo chirale Φ è dato da

$$\langle \Phi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m^{(1)} \mathbb{1}_{n \times n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m^{(2)} \mathbb{1}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

questo ci fornisce subito il pattern di rottura sotto la scala di energie $v_1 \sim |m_i|$, vediamo infatti che il gruppo di gauge si riduce a:

$$G = \frac{SU(n) \times SU(r) \times U(1)}{\mathbb{Z}_K}, \quad (6.8)$$

e K è il minimo comune multiplo tra n e r . Notiamo inoltre che le n componenti di colore più alte dei primi n flavor rimangono massless così come le r componenti di colore più basse degli ultimi r flavor. Indichiamo queste componenti rispettivamente con $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$ che portano carica λ_1 e $-\lambda_2$ con

$$\lambda_1 \doteq \frac{r}{\sqrt{2nr(r+n)}}, \quad \lambda_2 \doteq \frac{n}{\sqrt{2nr(r+n)}}, \quad (6.9)$$

sotto $U(1)$ generato da

$$t^{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1}_{n \times n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\lambda_2 \mathbb{1}_{r \times r} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

normalizzato in maniera da avere $\text{Tr} t^{(0)2} = \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda i due gruppi non-abeliani i generatori saranno

$$t_{su(n)}^a = \begin{pmatrix} (t^a)_{n \times n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad t_{su(n)}^b = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (t^b)_{r \times r} \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

con $a = 1, \dots, n^2 - 1$ e $b = 1, \dots, r^2 - 1$ e la solita normalizzazione $\text{Tr}(t^a t^{a'}) = \delta^{aa'}/2$. Passiamo quindi a studiare la Lagrangiana valida a questa scala di energie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4g_0^2} F_{\mu\nu}^{(0)2} - \frac{1}{4g_n} F_{\mu\nu}^{(n)2} - \frac{1}{4g_r} F_{\mu\nu}^{(r)2} + \frac{1}{g_0^2} |\mathcal{D}_\mu \Phi^{(0)}|^2 + \frac{1}{g_n^2} |\mathcal{D}_\mu \Phi^{(n)}|^2 \\ & + \frac{1}{g_r^2} |\mathcal{D}_\mu \Phi^{(r)}|^2 + |\mathcal{D}_\mu q^{(1)}|^2 + |\mathcal{D}_\mu \bar{q}^{(1)}|^2 + |\mathcal{D}_\mu q^{(2)}|^2 + |\mathcal{D}_\mu \bar{q}^{(2)}|^2 - V_D - V_F, \end{aligned} \quad (6.12)$$

per quanto riguarda la parte bosonica, e ovviamente V_D e V_F sono rispettivamente il termine D ed il termine F. Possiamo scrivere V_D come

$$V_D = \frac{1}{8} \sum_A \left[\text{Tr} t^A \left(\frac{2}{g^2} [\Phi, \Phi^\dagger] + \sum_i (Q_i Q_i^\dagger - \tilde{Q}_i^\dagger \tilde{Q}_i) \right) \right]^2, \quad (6.13)$$

dove $A = 0$ sta per il generatore di $U(1)$, mentre $A = a = 1, \dots, n^2 - 1$ o $A = b = 1, \dots, r^2 - 1$ indicano i generatori di $SU(n)$ o $SU(r)$. V_F risulta

$$\begin{aligned} g_0^2 |\mu \Phi^{(0)} + \sqrt{2} \tilde{Q} t^{(0)} Q|^2 + g_n^2 |\mu \Phi^{(n)} + \sqrt{2} \tilde{Q} t_{su(n)}^a Q|^2 + g_r^2 |\mu \Phi^{(r)} + \sqrt{2} \tilde{Q} t_{su(r)}^b Q|^2 \\ + \tilde{Q} [M + \sqrt{2} \Phi] [M + \sqrt{2} \Phi]^\dagger \tilde{Q}^\dagger + Q^\dagger [M + \sqrt{2} \Phi]^\dagger [M + \sqrt{2} \Phi] Q, \end{aligned} \quad (6.14)$$

con la matrice di massa data da

$$M = \begin{pmatrix} m^{(1)} \mathbb{1}_{n \times n} & 0 \\ 0 & m^{(2)} \mathbb{1}_{r \times r} \end{pmatrix}.$$

I campi degli squark devono avere la seguente forma scritta in una notazione mista colore/ flavor

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q^{(1)}(x)_{n \times n} & 0 \\ 0 & q^{(2)}(x)_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{q}^{(1)}(x)_{n \times n} & 0 \\ 0 & \tilde{q}^{(2)}(x)_{r \times r} \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Mettiamo V_D identicamente uguale a 0 ponendo

$$\tilde{q}^{(1)} = (q^{(1)})^\dagger, \quad q^{(2)} = -(\tilde{q}^{(2)})^\dagger, \quad (6.16)$$

ridefiniamo però nella seguente maniera

$$q^{(1)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}q^{(1)}, \quad \tilde{q}^{(2)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{q}^{(2)}, \quad (6.17)$$

adesso leggiamo da (6.7) che

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{(0)} \rangle &= -m_0 \\ \langle \Phi^{(a)} \rangle &= \langle \Phi^{(b)} \rangle = 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

ne segue pertanto che la prima riga di (6.14) ci porta a

$$\langle Q \rangle = \begin{pmatrix} v^{(1)} \mathbb{1}_{n \times n} & 0 \\ 0 & -v^{(2)*} \mathbb{1}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \langle \tilde{Q} \rangle = \begin{pmatrix} v^{(1)*} \mathbb{1}_{n \times n} & 0 \\ 0 & v^{(2)} \mathbb{1}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

dove

$$|v^{(1)}|^2 + |v^{(2)}|^2 = \sqrt{\frac{n+r}{nr}} \mu m_0. \quad (6.20)$$

Nel seguito assumeremo $v^{(1)} \neq 0$ e $v^{(2)} \neq 0$.

6.1.1 Vortici

Vortici non-abeliani nascono quando il vuoto rompe il gruppo di gauge (6.8) completamente lasciando però una simmetria globale di color-flavor diagonale

$$[SU(n) \times SU(r) \times U(1)]_{C+F}. \quad (6.21)$$

Includendo anche il gruppo globale $U(1)$ overall otteniamo che il gruppo di simmetrie globali è

$$U(n) \times U(r). \quad (6.22)$$

Il vortice minimale si ottiene andando a prendere il più piccolo cammino chiuso non banale nel gruppo di gauge (6.8), questo si ottiene eseguendo prima un cammino nel gruppo $U(1)$:

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha r} \mathbb{1}_{n \times n} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha n} \mathbb{1}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \alpha : 0 \rightarrow \frac{2\pi}{nr}, \quad (6.23)$$

che mappa

$$\mathbb{1}_{N \times N} \rightarrow \mathbb{Y}, \quad \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} \mathbb{1}_{n \times n} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/r} \mathbb{1}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

seguito poi dal cammino in $SU(n) \times SU(r)$ tale che

$$\mathbb{1}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{Z}_n = e^{-\frac{2\pi i}{n}} \mathbb{1}_{n \times n}, \quad \mathbb{1}_{r \times r} \rightarrow \mathbb{Z}_r = e^{-\frac{2\pi i}{r}} \mathbb{1}_{r \times r}, \quad (6.25)$$

riportandoci così ad avere $\mathbb{1}_{N \times N}$. Quest'ultimo passo si ottiene scegliendo per esempio

$$\begin{pmatrix} e^{i\beta(n-1)/n} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta/n} \mathbb{1}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{i\gamma(r-1)/r} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/r} \mathbb{1}_{(r-1) \times (r-1)} \end{pmatrix}, \quad (6.26)$$

con $\beta, \gamma : 0 \rightarrow 2\pi$. Dobbiamo notare come $\mathbb{Y}^K = \mathbb{1}_{N \times N}$ sempre con K minimo comune multiplo tra n e r , da questo segue che la tensione rispetto ad $U(1)$ del vortice minimale risulterà $\frac{1}{K}$ di quella standard dei vortici A.N.O.. I campi degli squark asintoticamente seguiranno lo stesso winding appena descritto mentre a distanze finite avranno la forma

$$q^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} f_1(\rho) & 0 \\ 0 & f_2(\rho) \mathbb{1}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} g_1(\rho) & 0 \\ 0 & g_2(\rho) \mathbb{1}_{(r-1) \times (r-1)} \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

dove chiaramente abbiamo introdotto coordinate polari ρ, ϕ nel piano perpendicolare al vortice, $f_{1,2}, g_{1,2}$ sono funzioni profilo determinabili numericamente (Fig. 6.1) notando che le condizioni al bordo appropriate sono date da

$$f_1(\infty) = f_2(\infty) = v^{(1)}, \quad g_1(\infty) = g_2(\infty) = v^{(2)}, \quad (6.28)$$

a grandi distanze dal vortice, invece per quanto riguarda le condizioni al core abbiamo

$$f_1(0) = g_1(0) = 0, \quad f_2(0) \neq 0, \quad g_2(0) \neq 0. \quad (6.29)$$

La soluzione di vortice prevede che il campo Φ possa essere preso uguale al proprio vev (6.18) accompagnato dai campi di gauge che rendono finita la tensione. Discutiamo le equazioni BPS per gli squark ed i campi di gauge

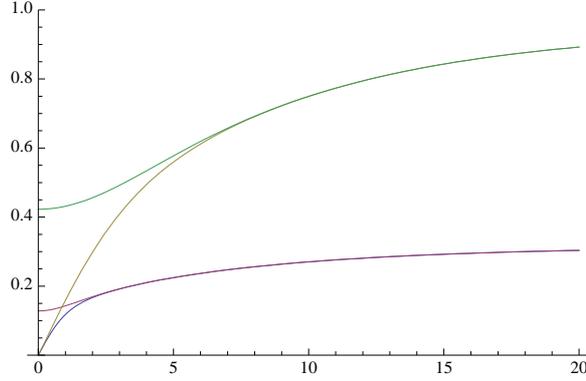


Figura 6.1: Studio numerico per le funzioni profilo $f_{1,2}, g_{1,2}$ come funzioni del raggio ρ , per la teoria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Le costanti d'accoppiamento e il rapporto tra i VEV sono stati fissati a $g_0 = 0.1, g_3 = 10, g_2 = 1, |v_2|/|v_1| = 3$.

utilizzando l'approccio della matrice dei moduli nell'appendice B presentando inoltre alcune proprietà della soluzione. Il fatto più importante di questi vortici minimali sta nella proprietà che i campi $q^{(1)}$ e $\tilde{q}^{(2)}$ devono necessariamente avere entrambi lo stesso winding all'infinito. Dato che il singolo vortice rompe la simmetria globale di color/flavor secondo

$$[SU(n) \times SU(r) \times U(1)]_{C+F} \hookrightarrow SU(n-1) \times SU(r-1) \times U(1)^3, \quad (6.30)$$

avremo necessariamente dei modi di Nambu-Goldstone parametrizzati da

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}. \quad (6.31)$$

Se lasciamo fluttuare l'orientazione del vortice in z e t otteniamo come Lagrangiana effettiva sul worldsheet un modello- σ $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$ 2 dimensionale.

Assumiamo senza perdita di generalità di avere $n > r$, escludendo il caso $n = r$, sappiamo che la costante d'accoppiamento del modello- σ $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ si comporta sotto il gruppo di rinormalizzazione esattamente come la costante d'accoppiamento della teoria di gauge $SU(n)$ in 4 dimensioni. Quando le fluttuazioni nel modello $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ diventano importanti entriamo in regime di accoppiamento forte e viene generata la scala Λ , che corrisponde anche alla

massa dei kink (monopoli abeliani) dell'azione di worldsheet, $SU(r)$ invece continua a rimanere debolmente accoppiato e quindi il vortice continua a portare carica sotto $SU(r)$. In questo regime il vortice porterà carica sotto uno dei fattori $U(1)$ generati dalla rottura dinamica $SU(n) \times U(1) \hookrightarrow U(1)^n$ nonchè sotto $SU(r)$. Dato che la teoria completa $SU(N)$ non ha vortici questi devono terminare e alle loro estremità saranno attaccati monopoli massivi, i quali devono necessariamente avere carattere non-abeliano, nati dalla rottura ad alte energie della simmetria di gauge.

Generalizzando la nostra costruzione potremmo cercare vortici quando il gruppo di gauge viene rotto in

$$SU(n) \times SU(r_1) \times SU(r_2) \times \dots$$

rimanendo sempre in regime semiclassico $|m_i|, |\mu| \gg \Lambda$. In realtà noi siamo interessati all'origine dei monopoli non-abeliani nella teoria di basse energie con $m_i \rightarrow 0$ e $\mu \sim \Lambda$. In tale limite il pattern di rottura della simmetria di gauge è deciso dinamicamente, il risultato dell'analisi della teoria in 4 dimensioni (Tabella 1.1) ci suggerisce che nel limite in questione il gruppo non-Abeliano che sopravvive da $SU(r_1) \times SU(r_2) \times \dots$ viene aumentato a $SU(r)$ ritornando così al caso da noi studiato.

Osserviamo da ultimo che il caso particolare $r = 1$ corrisponde al modello $U(N)$ trattato in molti articoli [4, 11, 12] e menzionato nel capitolo introduttivo. In questo caso sappiamo che i vortici in realtà abelianizzano, bisogna però prestare attenzione in quanto negli articoli in questione il modello di partenza era $SU(n+1)$ rotto ad $U(n)$ con $N_f = n$ flavors per il quale si studiava il vuoto con $r = 0$. Nel nostro caso invece la teoria microscopica è un modello $SU(N)$ con $N_f = N$ flavors e $N = n+r$. La condizione di matching tra vuoti quantistici e vuoti classici data da (1.4) ci dice che se vogliamo considerare il modello $U(n)$ nel nostro studio questo deve corrispondere a $r = 1$ piuttosto che non ad $r = 0$.

6.2 Kinks e Monopoli

Osserviamo che la simmetria globale all'interno del vortice è più piccola di quella all'esterno (6.30). Questo ci suggerisce che esisteranno alcuni modi di Nambu-Goldstone che possono propagare solo all'interno del vortice mentre nel vuoto all'esterno diventano massivi e pertanto non propagano più. Essendo inoltre in presenza di supersimmetria per ogni modo di Nambu-Goldstone bosonico ci aspettiamo il corrispettivo superpartner. Tali modi corrispondono ai vari generatori rotti di $SU(n)_{C+F} \times SU(r)_{C+F}$ i quali sono

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{b}^\dagger & 0 & 0 \\ \mathbb{b} & \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{c}^\dagger \\ 0 & 0 & \mathbb{c} & \mathbf{0}_{(r-1) \times (r-1)} \end{pmatrix}, \quad (6.32)$$

dove \mathbb{b}, \mathbb{c} sono vettori rispettivamente di $\mathbb{C}^{n-1}, \mathbb{C}^{r-1}$ che rappresentano le coordinate omogenee dei due spazi proiettivi $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$. Possiamo notare che in effetti guardando la dimensione dello spazio quoziente

$$SU(n)_{C+F} \times SU(r)_{C+F} \times U(1) / [SU(n-1) \times SU(r-1) \times U(1)^3],$$

che risulta essere:

$$(n^2 - 1) + (r^2 - 1) + 1 - [((n-1)^2 - 1) + ((r-1)^2 - 1) + 1 + 1 + 1] = 2(n+r-2),$$

coincide proprio con il numero di parametri su \mathbb{R} dei \mathbb{b}, \mathbb{c} appena trovati. Dal punto di vista topologico sappiamo che $\pi_2(SU(N)) = \mathbb{1}$ e quindi andando a considerare i monopoli di 't Hooft-Polyakov nati dalla prima rottura parziale $SU(N) \hookrightarrow SU(n) \times SU(r) \times U(1)$ questi devono necessariamente essere confinati dai vortici nati ad una scala di energie più bassa, quando dobbiamo iniziare a tener conto del vev degli squark. Poichè inoltre $\pi_1(SU(N)) = \mathbb{1}$ tutti i vortici che appaiono nella teoria $SU(n) \times SU(r) \times U(1)$ nella fase di Higgs non possono esserci nella teoria completa $SU(N)$, sono quindi metastabili, hanno una vita media e devono terminare in monopoli massivi. Capiamo

quindi che per ragioni di simmetria i vortici, portando ciascuno una propria orientazione nello spazio dei moduli, devono avere una corrispondente orientazione portata dai monopoli alle loro estremità.

Nel limite $m_i \rightarrow m \rightarrow 0$ e $\mu \sim \Lambda$ i gradi di libertà leggeri che si trovano nel r -vuoto della teoria $SU(N)$ soggiacente sono riassunti in Tabella (6.1)

	$SU(r)$	$U(1)_0$	$U(1)_1$	\cdots	$U(1)_{n-1}$	$U(1)_B$
$n_f \times q$	\mathbf{r}	1	0	\cdots	0	0
e_1	$\mathbf{1}$	0	1	\cdots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
e_{n-1}	$\mathbf{1}$	0	0	\cdots	1	0

Tabella 6.1: I gradi di libertà della teoria di basse energie con i corrispondenti numeri quantici presenti nel vuoto di confinamento caratterizzato da un gruppo di gauge duale $SU(r)$.

Ciò che ci resta da fare adesso è riuscire a collegare questi gradi di libertà quantistici con i vortici e i monopoli alle loro estremità studiati nel regime semiclassico $|m|_i \gg |\mu| \gg \Lambda$. Ci sembra abbastanza ragionevole assumere come buon candidato per spiegare la comparsa di monopoli non-Abeliani nella teoria di basse energie in 4 dimensioni il vortice non-Abeliano trovato in precedenza che porta numeri quantici non banali sotto $SU(n) \times SU(r) \times U(1)$. Sappiamo infatti che $SU(n)$ dinamicamente si riduce ad $U(1)^{n-1}$ e restiamo con vortici carichi sotto un fattore $SU(r)$ e eventualmente fattori $U(1)$ proprio come in Tabella 6.1. Come ulteriore riprova che questa sembra la strada corretta per comprendere la nascita di questi monopoli c'è il fatto che tali solitoni non-Abeliani esistono in 4 dimensioni ed in 2 dimensioni solamente per $r \leq N_f/2$.

Per quanto riguarda le simmetrie globali i monopoli che portano carica sotto $SU(r)$ sono presenti in N_f “copie”, andando a formare una rappresentazione di $SU(N_f)$ (Tabella 6.1) e questo è importante affinché la teoria effettiva possieda il corretto gruppo di simmetrie globali della teoria microscopica. Semiclassicamente questo si può capire come conseguenza dell'ef-

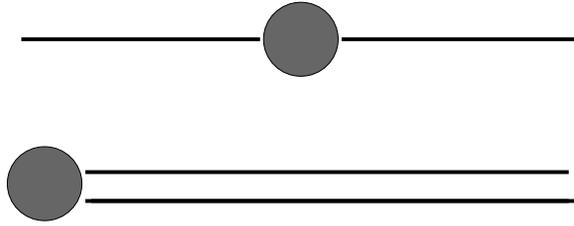


Figura 6.2: I kink della teoria 2 dimensionale sulla worldsheet risultano abeliani e confinati da due vortici, i monopoli non-Abeliani appaiono invece alle estremità dei vortici stabilizzando la configurazione risultante.

fetto Jackiw-Rebbi. Questo effetto emerge andando a studiare la dinamica di fermioni in un campo di background fornito da un monopolo semiclassico, i modi-0 dei fermioni (*nuvola di quark*) quantizzando attorno a tale background forniscono numeri quantici di flavor addizionali al solitone. Tale effetto è studiabile nel regime $|m| \gg |\mu| \gg \Lambda$ e si può osservare che la nuvola di quark ha come lunghezza caratteristica $\sim 1/|m| \ll 1/\Lambda$. L'effetto di rottura della simmetria di color-flavor è distinto da quello appena esposto poichè la scala di lunghezza che interviene in questo caso ci viene data dal vev degli squark e risulta quindi $\sim 1/\sqrt{\mu|m|}$.

Dalla Tabella 6.1 vediamo siamo in presenza anche di singoletti e_i sotto $SU(r)$, carichi però sotto certi fattori $U(1)$. Questi sono monopoli Abeliani e possiamo identificarli con i monopoli Abeliani visibili come i kink che la teoria effettiva sulla worldsheet presenta in 2 dimensioni. Il discorso topologico svolto in precedenza riguardante l'assenza di qualsiasi configurazione solitonica stabile nella teoria microscopica $SU(N)$ si applica anche a questi monopoli/kink Abeliani i quali sebbene stabili nella teoria 2 dimensionale risultano instabili quando consideriamo il sistema completo in 4 dimensioni e appaiono confinati da una coppia di vortici (Fig. 6.2). Ciascuno di questi vortici trasforma secondo la rappresentazione \underline{r} di $SU(r)_{C+F}$ quindi saremmo portati a pensare che tale kink non sia abeliano, quello che realmente succede è che i vortici composti trasformano nella rappresentazione prodotto [28] che

nel caso di nostro interesse risulta:

$$\underline{\mathbb{1}} \otimes \underline{\mathbb{1}}^* = \underline{\mathbb{1}} \oplus \underline{r^2 - 1}. \quad (6.33)$$

Ci aspettiamo che tenendo conto di effetti quantistici i due multipletti si splittino e che la tensione minore si abbia in presenza della configurazione dei due vortici che ci fornisce il singoletto.

Concludiamo dando alcune considerazioni sul caso $r = n = N/2 = N_f/2$. Questo particolare tipo di vuoto è il caso limite della nostra analisi, non vale infatti quanto detto in precedenza poichè se andiamo a studiare una teoria $N = 2$ in questo vuoto otteniamo una teoria fortemente accoppiata ma soprattutto una teoria superconforme non banale. I gradi di libertà di basse energie contengono monopoli e dioni relativamente non-locali (cioè con proprietà di trasformazione rispettivamente non locali tra loro) e non esistono descrizioni di una tale teoria in termini di una Lagrangiana effettiva. Tuttavia tale tipo di teoria presenta un fenomeno di confinamento (accendendo il termine $\mu \neq 0$) dovuto alla condensazione di *composti di monopoli*, creati a seguito del regime di accoppiamento forte.

Capitolo 7

Conclusioni

Nel nostro lavoro di tesi siamo stati in grado di capire quale potesse essere una possibile costruzione semiclassica capace di spiegare la comparsa di monopoli non-Abeliani leggeri trovati in supercromodinamica quantistica $\mathcal{N} = 2$, tutto questo tramite la costruzione esplicita di vortici che possiedono uno spazio dei moduli non-Abeliano. In un regime puramente semiclassico nel quale possiamo fidare in uno sviluppo perturbativo tali vortici sono semplicemente delle configurazioni dei campi che portano flusso di tipo colore-flavor in un gruppo $SU(n) \times SU(r) \times U(1)$, o in maniera più precisa portano dei modi di Nambu-Goldstone

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1},$$

i quali nascono in conseguenza della rottura parziale della simmetria globale $SU(n) \times SU(r) \times U(1)$ rispettata dal vuoto a $SU(n-1) \times SU(r-1) \times U(1)^3$ rispettata dal vortice. Tramite l'utilizzo del formalismo della matrice dei moduli siamo stati in grado di analizzare la tensione di un vortice minimale e abbiamo scoperto che il winding attorno ai due fattori non-Abeliani deve coincidere per ottenere i giusti limiti asintotici dei campi. Continuando lo studio da un punto di vista quantistico si nota che scegliendo senza alcuna perdita di generalità $n > r$ le fluttuazioni dei campi che si propagano lungo il vortice diventano fortemente accoppiate nell'infrarosso causando un abelianizzazione dinamica del fattore $SU(n) \times U(1)$ ad $U(1)^n$. Il fatto non

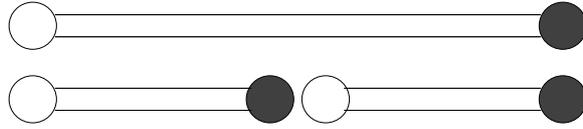


Figura 7.1: Instabilità del vortice a scale maggiori di $1/\Lambda$ e formazione di coppie monopolo/antimonopolo.

banale risulta che il vortice porta ancora carica sotto $SU(r)$ il quale resta debolmente accoppiato. Potremmo essere portati a credere che andando a studiare il sistema a scale ancora inferiori a Λ anche il fattore $SU(r)$ diventi fortemente interagente ad una certa scala Λ_r abelianizzando in maniera dinamica esattamente come $SU(n)$. In realtà ciò non avviene, infatti nella teoria 4 dimensionale abbiamo solamente una scala Λ e in regime altamente quantistico la dimensione dei monopoli che confinano le stringhe e la lunghezza delle stringhe stesse è data da $1/\Lambda$, non ha pertanto senso chiedersi se su scale $1/\Lambda_r > 1/\Lambda$ anche il fattore $SU(r)$ abelianizzi in quanto superata la lunghezza $1/\Lambda$ il vortice diverrà instabile per formazione di coppie monopolo/antimonopolo e pertanto non supereremo mai la lunghezza $1/\Lambda$ impedendo così a $SU(r)$ di divenire fortemente accoppiato (Fig. 7.1). In seguito abbiamo fornito argomentazioni per comprendere questi gradi di libertà come la controparte semiclassica dei monopoli leggeri non-Abeliani trovati in regime altamente quantistico tramite l'analisi degli r-vuoti.

In conclusione notiamo come i modelli trattati in questo lavoro presentino sempre in opportuni regimi dei condensati di monopoli

$$\langle M_i^a \rangle \neq 0$$

che ci forniscono una fase di Higgs per la teoria magnetica ma cosa più importante ci danno una fase di confinamento per la teoria duale elettrica, presentando quindi confinamento del colore à la 't Hooft-Mandelstam. La presenza di queste due fasi non è in contraddizione col fatto che l'olomorfia in tutti i parametri delle teorie supersimmetriche $\mathcal{N} = 2$ implichi l'assenza di transizioni di fase, infatti esiste la cosiddetta *complementarità* la quale ci

dice che le due fasi sono legate in maniera continua, i gradi di libertà elettrici e quelli magnetici si trasformano con continuità gli uni negli altri.

Sono notevoli le differenze con il confinamento presente nella cromodinamica quantistica, comunque senza dubbio le informazioni che traiamo dalla nostra analisi possono essere molto utili per arrivare a capire come in realtà avvenga questo cruciale fenomeno fisico.

Appendice A

R-Vuoti

Presentiamo ora una breve analisi dei vuoti semiclassici di una teoria $N = 2$ con gruppo di gauge $SU(n_c)$ in presenza di n_f ipermultipli di quark che trasformano nella rappresentazione fondamentale [13, 17]. La Lagrangiana di partenza è sempre data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \text{Im} \tau_{cl} \left[\int d^4\theta \Phi^\dagger e^V \Phi + \int d^2\theta \frac{1}{2} WW \right] + \mathcal{L}_q + \Delta\mathcal{L}, \quad (\text{A.1})$$

dove abbiamo il termine di rottura della supersimmetria

$$\Delta\mathcal{L} = \int d^2\theta \mu \text{Tr} \Phi^2 \quad (\text{A.2})$$

mentre la Lagrangiana per i quark è data da

$$\mathcal{L}_q = \sum_{i=1}^{n_f} \left[\int d^4\theta (Q_i^\dagger e^V Q_i + \tilde{Q}_i^\dagger e^V \tilde{Q}_i) + \int d^2\theta \tilde{Q}_i (\sqrt{2} \Phi + m_i) Q_i \right]. \quad (\text{A.3})$$

A livello classico quando $m_i = \mu = 0$ abbiamo un gruppo di simmetrie globali $SU(n_f) \times U(1)_B$ e una R-simmetria $SU(2)_R \times U(1)_{\mathcal{R}}$. Quando $n_f < 2n_c$ la teoria è asintoticamente libera e viene generata una scala Λ , il fattore istantonico è proporzionale a $\Lambda^{2n_c - n_f}$ e la simmetria $U(1)_{\mathcal{R}}$ risulta anomala rompendosi ad un suo sottogruppo discreto. L'analisi che andiamo a svolgere ora viene eseguita in un regime semiclassico per $|m_i|, |\mu| \gg \Lambda$, la supersimmetria $N = 1$ e l'olomorfia in μ e m_i ci vietano qualsiasi transizione di fase

quando iniziamo a muovere $|m_i|, |\mu|$ verso valori piccoli per i quali non è applicabile la nostra analisi, lo stesso numero di vuoti $N = 1$ deve essere presente in entrambi i regimi: semiclassico e altamente quantistico.

R-Vuoti Semiclassici

Riscriviamo il superpotenziale ricavabile da (A.2) e (A.3) mettendo in risalto gli indici di colore

$$\mathcal{W} = \mu \text{Tr} \Phi^2 + \tilde{Q}_i^a (\sqrt{2} \Phi_a^b + m_i \delta_a^b) Q_b^i, \quad (\text{A.4})$$

dove come sempre abbiamo usato

$$\begin{aligned} \Phi &\doteq \lambda^A \Phi^A, \quad (A = 1, \dots, n_c^2 - 1), \\ \text{Tr}(\lambda^A \lambda^B) &= \frac{1}{2} \delta^A B. \end{aligned}$$

Gli indici di flavor sono $i = 1, \dots, n_f$ mentre quelli di colore sono $a, b = 1, \dots, n_c$. Con la normalizzazione scelta per i generatori di $SU(n_c)$ vale la seguente relazione di Fierz

$$\sum_{A=1}^{n_c^2-1} (\lambda^A)_c^d (\lambda^A)_a^b = \frac{1}{2} \left[\delta_c^b \delta_a^d - \frac{1}{n_c} \delta_c^d \delta_a^b \right]. \quad (\text{A.5})$$

Le equazioni del vuoto risultano

$$[\Phi, \Phi^\dagger] = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$Q_a^i (Q^\dagger)_i^b - (\tilde{Q}^\dagger)_a^i \tilde{Q}_i^b = \nu \delta_a^b, \quad (\text{A.7})$$

$$Q_a^i \tilde{Q}_i^b - \frac{1}{n_c} \delta_a^b (Q_c^i \tilde{Q}_i^c) + \sqrt{2} \mu \Phi_a^b = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\sqrt{2} \Phi_a^b Q_b^i = -m_i Q_a^i, \quad (\text{A.9})$$

$$\sqrt{2} \tilde{Q}_i^b \Phi_b^a = -m_i \tilde{Q}_i^a, \quad (\text{A.10})$$

nelle ultime due equazioni l'indice i non è sommato. Utilizziamo una rotazione di $SU(n_c)$ per diagonalizzare Φ rendendolo della forma

$$\Phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_{n_c}), \quad \sum \phi_a = 0. \quad (\text{A.11})$$

Le equazioni (A.9), (A.10) ci dicono che i $2n_f$ vettori Q^i, \tilde{Q}_i sono autovettori relativi all'autovalore m_i oppure vettori nulli. Avendo messo Φ in forma diagonale i suoi autovettori devono essere del tipo

$$Q^i = (0, \dots, 0, d_i, 0, \dots, 0), \quad (\text{A.12})$$

con una sola componente non nulla d_i , similmente per \tilde{Q}_i . Dalla forma diagonale di Φ e dal fatto che sia a traccia nulla abbiamo al più $n_c - 1$ elementi indipendenti di Φ mentre per i Q^i possiamo avere al massimo n_f autovalori non nulli scegliendo tra m_1, \dots, m_{n_f} . La soluzione può essere parametrizzata da un numero intero $r = 0, \dots, \min\{n_f, n_c - 1\}$ che ci dice il numero di autovettori non banali. Avremo pertanto $\binom{n_f}{r}$ soluzioni a fissato r a seconda di quale m_i appare come autovalore. Prendendo gli autovalori m_1, \dots, m_r abbiamo la soluzione

$$Q^i = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad Q^i = 0, i = r + 1, \dots, n_f, \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{Q}_i = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{d}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \tilde{d}_r \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}_i = 0, i = r + 1, \dots, n_f, \quad (\text{A.14})$$

dove $r = 0, 1, \dots, \min\{n_f, n_c - 1\}$, mentre il campo Φ è dato da

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(-m_1, -m_2, \dots, -m_r, c, \dots, c), \quad c = \frac{1}{n_c - r} \sum_{k=1}^r m_k. \quad (\text{A.15})$$

Tramite una rotazione residua di $SU(n_c)$ i d_i possono essere presi reali mentre in generale i \tilde{d}_i resteranno complessi. Ovviamente l'equazione (A.6) è soddisfatta così come la parte fuori diagonale ($a \neq b$) di (A.7). Per quanto

riguarda la parte diagonale ($a = b$) di (A.7) dobbiamo distinguere le prime r dalle restanti $n_c - r$ equazioni

$$d_i^2 - |\tilde{d}_i|^2 = \nu, \quad i = 1, \dots, r, \quad (\text{A.16})$$

$$\nu = 0, \quad i = r + 1, \dots, n_f, \quad (\text{A.17})$$

da cui

$$d_i^2 = |\tilde{d}_i|^2. \quad (\text{A.18})$$

Per come abbiamo costruito la nostra soluzione le equazioni (A.9), (A.10) sono chiaramente soddisfatte e resta quindi da controllare (A.8). Per $a = b = 1, \dots, r$ fornisce

$$d_i \tilde{d}_i - \frac{1}{n_c} \sum_k d_k \tilde{d}_k = \mu m_i, \quad (\text{A.19})$$

da cui

$$\sum_k d_k \tilde{d}_k = \frac{n_c}{n_c - r} \mu \sum_{k=1}^r m_k \quad (\text{A.20})$$

e

$$d_i \tilde{d}_i = \mu m_i + \frac{1}{n_c - r} \mu \sum_{k=1}^r m_k. \quad (\text{A.21})$$

Per $a = b = r + 1, \dots, n_c$ troviamo invece

$$\sum_k d_k \tilde{d}_k = n_c \mu c. \quad (\text{A.22})$$

Quest'ultima equazione è compatibile con (A.20) grazie a (A.15).

Fissato r la nostra soluzione possiede ancora un'invarianza locale sotto $SU(n_c - r)$.

Tramite l'analisi di Seiberg-Witten è possibile seguire la teoria in diversi limiti riguardanti μ, m_i , la cosa più importante risulta che, sebbene in molti di questi regimi la nostra teoria diventi fortemente accoppiata cionondimeno sia possibile estrarre i gradi di libertà di basse energie ed il gruppo di gauge effettivo per tali teorie permettendoci così di capire come oggetti semiclassici quali vortici e monopoli studiabili nel regime $|m_i| \gg \mu \gg \Lambda$ siano traducibili in oggetti altamente quantistici presenti nel limite $\Lambda \gg |m_i| \sim |\mu|$.

Appendice B

Soluzione di Vortice

Partiamo dall'azione (6.12) nel vuoto dato da (6.7) e cerchiamo configurazioni dei campi di tipo vortice. Usando l'ansatz per i campi degli squark dato da (6.16) arriviamo all'azione

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4g_n^2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4g_r^2} (F_{\mu\nu}^b)^2 + \frac{1}{4g_0^2} (F_{\mu\nu}^{(0)})^2 + |\mathcal{D}_\mu q^{(1)}|^2 + |\mathcal{D}_\mu \tilde{q}^{(2)}|^2 \right. \\ \left. + \frac{g_n^2}{2} (q^{(1)\dagger} t^a q^{(1)})^2 + \frac{g_r^2}{2} (\tilde{q}^{(2)\dagger} t^b \tilde{q}^{(2)})^2 + \frac{g_0^2}{2} (\lambda_1 q^{(1)\dagger} q^{(1)} + \lambda_2 \tilde{q}^{(2)\dagger} \tilde{q}^{(2)} - \xi) \right], \quad (\text{B.1})$$

dove $\xi = \sqrt{2}\mu m_0$. Scriviamo la tensione à la Bogomolnyi completando i quadrati:

$$T = \int d^2x \left[\left(\frac{1}{2g_n} F_{ij}^a \pm \frac{g_n}{2} (q^{(1)\dagger} t^a q^{(1)}) \epsilon_{ij} \right)^2 + \left(\frac{1}{2g_r} F_{ij}^b \pm \frac{g_r}{2} (\tilde{q}^{(2)\dagger} t^b \tilde{q}^{(2)}) \epsilon_{ij} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2g_0} F_{ij}^{(0)} \pm \frac{g_0}{2} (\lambda_1 \text{Tr}_n q^{(1)\dagger} q^{(1)} + \lambda_2 \text{Tr}_r \tilde{q}^{(2)\dagger} \tilde{q}^{(2)} - \xi) \epsilon_{ij} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} |\mathcal{D}_i q^{(1)} \pm i \epsilon_{ij} \mathcal{D}_j q^{(1)}|^2 + \frac{1}{2} |\mathcal{D}_i \tilde{q}^{(2)} \pm i \epsilon_{ij} \mathcal{D}_j \tilde{q}^{(2)}|^2 \pm \xi B^{(0)} \right], \quad (\text{B.2})$$

dove $B^{(0)} \doteq \frac{1}{2} \epsilon_{ij} F_{ij}^{(0)}$ ci da il campo magnetico diretto lungo z . Le equazioni del prim'ordine ottenute ponendo a zero ogni singolo termine quadratico in (B.2) sono appunto le equazioni di Bogomolnyi. Possiamo introdurre adesso

il formalismo della moduli matrix [29], definiamo $z = x + iy$ e

$$q^{(1)} = S_n^{-1}(z, \bar{z}) e^{-\lambda_1 \psi(z, \bar{z})} H_0^{(n)}(z), \quad \tilde{q}^{(2)} = S_r^{-1}(z, \bar{z}) e^{-\lambda_2 \psi(z, \bar{z})} H_0^{(r)}(z), \quad (\text{B.3})$$

dove $H_0^{(n)}(z)$ e $H_0^{(r)}(z)$ sono due matrici olomorfe rispettivamente $n \times n$ e $r \times r$, mentre S_n e S_r sono matrici regolari appartenenti a $SL(n, \mathbb{C})$ e $SL(r, \mathbb{C})$, da ultima $\psi(z, \bar{z})$ è una funzione complessa che può essere scelta reale tramite un'appropriata scelta di gauge. S_n e S_r possono essere viste come trasformazioni di gauge complessificate dei gruppi $SU(n)$ e $SU(r)$. Abbiamo ancora un'arbitrarietà nella definizione di S e H , infatti possiamo operare trasformazioni della forma:

$$H_0^{(n)}(z) \rightarrow V_n(z) H_0^{(n)}(z), \quad S_n(z, \bar{z}) \rightarrow V_n(z) S_n(z, \bar{z}), \quad (\text{B.4})$$

dove $V_n(z)$ è una matrice $n \times n$ olomorfa a determinante 1, avremo ovviamente anche $V_r(z)$. Le matrici $H_0^{(n)}(z)$ e $H_0^{(r)}(z)$ sono dette matrici dei moduli poichè contengono tutti i parametri dei moduli dei nostri vortici. I campi di gauge per $SU(n), SU(r), U(1)$ sono ottenuti da

$$\begin{aligned} A_1^{(n)} + iA_2^{(n)} &= -2i S_n^{-1}(z, \bar{z}) \bar{\partial} S_n(z, \bar{z}), \\ A_1^{(r)} + iA_2^{(r)} &= -2i S_r^{-1}(z, \bar{z}) \bar{\partial} S_r(z, \bar{z}), \\ A_1^{(0)} + iA_2^{(0)} &= -2i \bar{\partial} \psi. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Tramite l'introduzione di questa matrice dei moduli risolviamo immediatamente la parte di materia delle equazioni di Bogomolnyi

$$(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2) q^{(1)} = (\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2) \tilde{q}^{(2)} = 0, \quad (\text{B.6})$$

che si riducono a $\bar{\partial} H_0 = 0$. Introduciamo ora

$$\Omega_n \doteq S_n S_n^\dagger, \quad \Omega_r \doteq S_r S_r^\dagger, \quad (\text{B.7})$$

in questa maniera risulta più semplice scrivere le equazioni di Bogomolnyi per i campi di gauge, chiamate *master equations*, ricaviamo i campi di gauge da (B.5)

$$\begin{aligned} A_1 &= -i(S^{-1} \bar{\partial} S + S^\dagger \partial (S^\dagger)^{-1}), \\ A_2 &= -(S^{-1} \bar{\partial} S - S^\dagger \partial (S^\dagger)^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Basta proseguire con l'algebra per trovare

$$(S^\dagger)^{-1} F_{12} S^\dagger = -2\partial(\Omega^{-1}\bar{\partial}\Omega), \quad (\text{B.9})$$

ottenendo così

$$\begin{aligned} \partial(\Omega_n^{-1}\bar{\partial}\Omega_n) &= \frac{g_n^2}{4} e^{-2\lambda_1\psi} [\Omega_n^{-1} H_0^{(n)} H_0^{(n)\dagger} - \frac{1}{n} \text{Tr}_n(\Omega_n^{-1} H_0^{(n)} H_0^{(n)\dagger}) \mathbb{1}_{n \times n}], \\ \partial(\Omega_r^{-1}\bar{\partial}\Omega_r) &= \frac{g_r^2}{4} e^{-2\lambda_2\psi} [\Omega_r^{-1} H_0^{(r)} H_0^{(r)\dagger} - \frac{1}{r} \text{Tr}_r(\Omega_r^{-1} H_0^{(r)} H_0^{(r)\dagger}) \mathbb{1}_{r \times r}], \\ \partial\bar{\partial}\psi &= \frac{g_0^2}{4} [\lambda_1 e^{-2\lambda_1\psi} \text{Tr}_n(\Omega_n^{-1} H_0^{(n)} H_0^{(n)\dagger}) + \lambda_2 e^{-2\lambda_2\psi} \text{Tr}_r(\Omega_r^{-1} H_0^{(r)} H_0^{(r)\dagger}) - \xi]. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Questa costruzione, dato che i fattori $SU(n)$, $SU(r)$ e $U(1)$ commutano tutti tra loro, è una generalizzazione di quanto già trovato per il caso $U(n) \sim SU(n) \times U(1)$. L'unica differenza sta nel fatto di avere un unico fattore $U(1)$ con due fattori non-abeliani, questo porta dei vincoli alle matrici dei moduli. Infatti poichè $S_n (S_r)$ appartiene a $SL(n, \mathbb{C}) (SL(r, \mathbb{C}))$ segue

$$\begin{aligned} \det(q^{(1)} q^{(1)\dagger}) &= e^{-2\lambda_1 n \psi} \det H_0^{(n)} H_0^{(n)\dagger}, \\ \det(\tilde{q}^{(2)} \tilde{q}^{(2)\dagger}) &= e^{-2\lambda_2 r \psi} \det H_0^{(r)} H_0^{(r)\dagger}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Ricordando la relazione ottenibile da (6.9) $\lambda_1 n = \lambda_2 r$, (B.11) è consistente con il vincolo asintotico dato da

$$q^{(1)} q^{(1)\dagger} \sim |v_1|^2 \mathbb{1}_{n \times n}, \quad \tilde{q}^{(2)} \tilde{q}^{(2)\dagger} \sim |v_2|^2 \mathbb{1}_{r \times r}, \quad (\text{B.12})$$

solo se vale

$$\frac{\det H_0^{(n)} H_0^{(n)\dagger}}{\det H_0^{(r)} H_0^{(r)\dagger}} \sim \frac{|v_1|^{2n}}{|v_2|^{2r}}, \quad (\text{B.13})$$

per $|z|$ molto grande. Vale inoltre che per un vortice con winding k

$$\det H_0 H_0^\dagger \propto |z|^{2k},$$

ma quindi affinché il rapporto tra i due determinanti in (B.13) dia il risultato finito a secondo membro ne segue necessariamente che

$$\det H_0^{(n)} H_0^{(n)\dagger} \propto \det H_0^{(r)} H_0^{(r)\dagger} \sim |z|^{2k}, \quad (\text{B.14})$$

ossia dobbiamo avere che q e \tilde{q} possiedono lo stesso winding.

Studiamo la tensione per il vortice minimale con $k = 1$. Partiamo da (B.3) portando localmente le matrici dei moduli alla forma:

$$H_0^{(n)} = \begin{pmatrix} c_1 z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \quad H_0^{(r)} = \begin{pmatrix} c_2 z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{(r-1) \times (r-1)} \end{pmatrix},$$

con il vincolo

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{v_1^n}{v_2^r}. \quad (\text{B.15})$$

Tramite una scelta opportuna per S_n e ψ possiamo porre $c_1 = 1$ e c_2 resta univocamente determinato dalla precedente equazione. Abbiamo quindi

$$H_0^{(n)}(z)H_0^{(n)}(z)^\dagger = \begin{pmatrix} \rho^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

ma sappiamo anche che $q^{(1)}q^{(1)\dagger} \sim |v_1|^2 \mathbb{1}_{n \times n}$ allora per consistenza a grandi $\rho^2 = |z|^2$ vale

$$e^{-2\lambda_1 \psi} (S_n^\dagger)^{-1} S_n^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1/\rho^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix},$$

e pertanto

$$S_n \sim \begin{pmatrix} e^{(n-1)\lambda_1 \psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{-\lambda_1 \psi} \mathbb{1}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}$$

ma soprattutto

$$e^{-2n\lambda_1 \psi} \sim 1/\rho^2 \implies \psi \sim \sqrt{\frac{n+r}{2nr}} \ln \rho^2. \quad (\text{B.17})$$

Ovviamente questo andamento asintotico si trova equivalentemente considerando l'andamento asintotico per $\tilde{q}^{(2)}$. L'espressione trovata in (B.17) ci permette di calcolare la tensione del vortice, infatti le equazioni di Bogomolnyi annullano tutti i termini di (B.2) a parte $F_{12}^{(0)} = -4\bar{\partial}\partial\psi$ e otteniamo

$$T = \xi \int d^2x F_{12}^{(0)} = \xi \int d^2x \nabla^2 \psi = 4\pi \sqrt{\frac{n+r}{2nr}} \xi = 4\pi \sqrt{\frac{n+r}{nr}} \mu m_0, \quad (\text{B.18})$$

che possiamo riscrivere nella seguente maniera

$$T = 4\pi(|v_1|^2 + |v_2|^2). \quad (\text{B.19})$$

Una soluzione di vortice generale presenterà un arbitrario orientamento all'interno di $SU(n) \times SU(r)$, la matrice dei moduli corrispondente è data da

$$H_0^{(n)} = \begin{pmatrix} c_1 z & \mathbf{0} \\ \mathfrak{b} & \mathbb{1}_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \quad H_0^{(r)} = \begin{pmatrix} c_1 z & \mathbf{0} \\ \mathfrak{c} & \mathbb{1}_{(r-1) \times (r-1)} \end{pmatrix},$$

dove abbiamo introdotto \mathfrak{b} , \mathfrak{c} , due vettori complessi rispettivamente di $n - 1$ e $r - 1$ componenti, i quali rappresentano le coordinate inhomogenee dei due spazi dei moduli \mathbb{CP}^{n-1} , \mathbb{CP}^{r-1} . Sotto le simmetrie di colore-flavor $SU(n)_{C+F}$ e $SU(r)_{C+F}$ tali parametri trasformano ciascuno secondo la propria rappresentazione fondamentale.

Per concludere notiamo che le equazioni BPS ammettono soluzioni di vortice di tipo più generale [30], lo spazio dei moduli per winding più elevati, posizioni dei vortici diverse e diversi parametri di orientazione mostra uno spettro via via più interessante e complicato.

Bibliografia

- [1] G. 't Hooft, “Topology Of The Gauge Condition And New Confinement Phases In Nonabelian Gauge Theories,” Nucl. Phys. B **190** (1981) 455.
- [2] S. Mandelstam, “Vortices and Quark Confinement in Nonabelian Gauge Theories,” Phys. Lett. B **53** (1975) 476.
- [3] S. Mandelstam, “Vortices And Quark Confinement In Nonabelian Gauge Theories,” Phys. Rept. **23** (1976) 245.
- [4] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi and A. Yung, “Nonabelian superconductors: Vortices and confinement in $N = 2$ SQCD,” Nucl. Phys. B **673** (2003) 187 [arXiv:hep-th/0307287].
- [5] A. Hanany and D. Tong, “Vortices, instantons and branes,” JHEP **0307**, 037 (2003) [arXiv:hep-th/0306150].
- [6] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin and K. Konishi, “Nonabelian monopoles and the vortices that confine them,” Nucl. Phys. B **686**, 119 (2004) [arXiv:hep-th/0312233].
- [7] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, “Non-Abelian Meissner effect in Yang-Mills theories at weak coupling,” Phys. Rev. D **71**, 045010 (2005) [arXiv:hep-th/0412082].
- [8] M. Shifman and A. Yung, “Supersymmetric Solitons and How They Help Us Understand Non-Abelian Gauge Theories,” Rev. Mod. Phys. **79**, 1139 (2007) [arXiv:hep-th/0703267].

- [9] N. Seiberg and E. Witten, “Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory,” Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994) [Erratum-ibid. B **430**, 485 (1994)] [arXiv:hep-th/9407087].
- [10] N. Seiberg and E. Witten, “Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric QCD,” Nucl. Phys. B **431**, 484 (1994) [arXiv:hep-th/9408099].
- [11] A. Hanany and D. Tong, “Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics,” JHEP **0404**, 066 (2004) [arXiv:hep-th/0403158].
- [12] M. Shifman and A. Yung, “Non-Abelian string junctions as confined monopoles,” Phys. Rev. D **70**, 045004 (2004) [arXiv:hep-th/0403149].
- [13] G. Carlino, K. Konishi and H. Murayama, “Dynamical symmetry breaking in supersymmetric $SU(n(c))$ and $USp(2n(c))$ gauge theories,” Nucl. Phys. B **590**, 37 (2000) [arXiv:hep-th/0005076].
- [14] G. Carlino, K. Konishi and H. Murayama, “Dynamics of supersymmetric $SU(n(c))$ and $USp(2n(c))$ gauge theories,” JHEP **0002**, 004 (2000) [arXiv:hep-th/0001036].
- [15] S. Bolognesi, K. Konishi and G. Marmorini, “Light nonabelian monopoles and generalized r-vacua in supersymmetric gauge theories,” Nucl. Phys. B **718**, 134 (2005) [arXiv:hep-th/0502004].
- [16] K. Konishi, G. Marmorini and N. Yokoi, “Nonabelian confinement near nontrivial conformal vacua,” Nucl. Phys. B **741**, 180 (2006) [arXiv:hep-th/0511121].
- [17] P. C. Argyres, M. R. Plesser and N. Seiberg, “The Moduli Space of $N=2$ SUSY QCD and Duality in $N=1$ SUSY QCD,” Nucl. Phys. B **471**, 159 (1996) [arXiv:hep-th/9603042].

- [18] D. Dorigoni, K. Konishi and K. Ohashi, “Non-Abelian Vortices without Dynamical Abelianization,” arXiv:0801.3284 [hep-th].
- [19] G. 't Hooft, “Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories,” Nucl. Phys. B **79**, 276 (1974).
- [20] A. M. Polyakov, “Particle spectrum in quantum field theory,” JETP Lett. **20**, 194 (1974) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 430 (1974)].
- [21] H. B. Nielsen and P. Olesen, “Vortex-Line Models for Dual Strings,” Nucl. Phys. B **61**, 45 (1973).
- [22] A. A. Abrikosov, “On the Magnetic properties of superconductors of the second group,” Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32**, 1442 (1957)].
- [23] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts and Yu. S. Tyupkin, “Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations,” Phys. Lett. B **59**, 85 (1975).
- [24] S. R. Coleman, “Classical Lumps and their Quantum Descendants” in Aspects of Symmetry, Cambridge University Press, 1985.
- [25] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity,” 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [26] L. Alvarez-Gaume and S. F. Hassan, “Introduction to S-duality in $N = 2$ supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten,” Fortsch. Phys. **45**, 159 (1997) [arXiv:hep-th/9701069].
- [27] A. Bilal, “Duality in $N=2$ SUSY $SU(2)$ Yang-Mills Theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten,” arXiv:hep-th/9601007.

- [28] M. Eto, K. Konishi, G. Marmorini, M. Nitta, K. Ohashi, W. Vinci and N. Yokoi, “Non-Abelian vortices of higher winding numbers,” *Phys. Rev. D* **74**, 065021 (2006) [arXiv:hep-th/0607070].
- [29] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, “Solitons in the Higgs phase: The moduli matrix approach,” *J. Phys. A* **39**, R315 (2006) [arXiv:hep-th/0602170].
- [30] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, “Moduli space of non-Abelian vortices,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 161601 (2006) [arXiv:hep-th/0511088].