



UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA MECCANICA

TESI

*Analisi e sviluppo di trasmissione  
per sferzatore di olive*

RELATORI

IL CANDIDATO

---

Prof. Ing. Marco Beghini  
Dipartimento di Ing. Mecc. Nucl. Prod.

---

Matteo Barlucchi

---

Prof. Ing. Leonardo Bertini  
Dipartimento di Ing. Mecc. Nucl. Prod.

---

Ing. Marco Bacchereti  
Scienza Machinale S.r.l.



Anno Accademico 2006-2007  
Sessione di Laurea 29-04-2008



*A Chi  
malgrado me  
ancor mi ama.*

## Sommario

La tesi sviluppa un progetto di trasmissione per abbacchiatore di olive. Dopo un'analisi di mercato ed un confronto tra le macchine presenti in commercio, si procede alla modellazione della presa dell'operatore e del sistema di trasmissione. Si esegue l'analisi dinamica del sistema esistente realizzata sia attraverso il modello di trave continua tramite il software *Mathcad*<sup>®</sup>, sia utilizzando il metodo di calcolo agli elementi finiti tramite il software *Ansys*<sup>®</sup>. Si calcolano le frequenze proprie del sistema nel suo complesso ed utilizzando il metodo di sovrapposizione modale si ricava l'andamento della deformata nel tempo.

Si studiano gli effetti di varie possibili modifiche e se ne valutano le conseguenze sulla risposta dinamica del sistema. Segue la progettazione di alcuni componenti della trasmissione utilizzando materiali compositi a fibra continua. Sulla base dei risultati ottenuti si esegue l'ottimizzazione dei parametri progettuali tenendo conto in particolare del costo dei componenti e delle vibrazioni trasmesse all'operatore.

Si giunge così al progetto di una macchina che ha un peso inferiore alla versione precedente, le cui vibrazioni sono ridotte al minimo e quasi del tutto assenti senza incidere in modo eccessivo sui costi.

I modelli utilizzati sono applicabili all'analisi dinamica di un qualunque sistema di travi e alberi, sia in materiale isotropo che realizzato tramite laminati in materiale composito.

## Abstract

This thesis develops a project about an olive-picker power transmission. After a marketing analysis and a comparison between the several machines currently in commerce, the creation of a model simulates the human handgrip and the power transmission. Then the thesis develops a dynamic analysis of the current device either with a continuous beam model with software *Mathcad*<sup>®</sup>, and a finite element analysis with *Ansys*<sup>®</sup>. That allows to compute the critical speed of the complete model and to obtain the deflection of beams as a function of time.

The study continues with an evaluation of several variations and consequent derivation effect on machine dynamic response; some components are studied and re-designed by using composite materials with long and continuous fibers. With respect to the results obtained, an optimization of design parameters is done considering components costs and worker exposure to hand-arm vibration.

The result is a machine design with less global weight of previous versions, vibrations reduced to a minimum rate and no significant growing in costs.

The models used can be applied to a generic dynamic analysis of any beam and shaft system, made of either an isotropic material or a laminar composite material.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Stato dell'arte</b>	<b>3</b>
1.1 Classificazione delle macchine per la raccolta di olive . . . . .	3
1.2 Caratteristiche tecniche principali . . . . .	8
1.2.1 Produttività . . . . .	8
1.2.2 Lunghezza dell'asta . . . . .	9
1.2.3 Velocità . . . . .	9
1.2.4 Peso, maneggevolezza, rumorosità, vibrazioni . . . . .	10
1.3 Principali abbacchiatori in commercio . . . . .	11
1.4 Confronto tra abbacchiatori . . . . .	15
<b>2 Analisi dell'abbacchiatore <i>Alice</i></b>	<b>18</b>
2.1 Modellazione della presa . . . . .	19
2.1.1 Punti di presa . . . . .	20
2.1.2 Massa della mano . . . . .	21
2.1.3 Rigidezza di presa . . . . .	22
2.2 Analisi statica . . . . .	23
2.2.1 Modellazione del sistema . . . . .	24
2.2.2 Analisi dei risultati . . . . .	25
2.3 Analisi dinamica . . . . .	30
2.3.1 Rigidezza dei cuscinetti . . . . .	31
2.3.2 Analisi della forzante . . . . .	34
2.3.3 Modello analitico . . . . .	38
2.3.3.1 Frequenze proprie flessionali . . . . .	40
2.3.3.1.1 Albero interno . . . . .	41
2.3.3.1.2 Carter . . . . .	45
2.3.3.1.3 Sistema completo . . . . .	51
2.3.3.2 Taglio ed inerzia a rotazione . . . . .	58
2.3.3.3 Effetto della rotazione dell'albero . . . . .	59
2.3.3.4 Effetto del carico assiale . . . . .	60

2.3.3.5	Frequenze proprie torsionali . . . . .	61
2.3.3.6	Frequenze proprie assiali . . . . .	64
2.3.3.7	Risposta dinamica . . . . .	66
2.3.3.7.1	Applicazione della forzante . . . . .	66
2.3.3.7.2	Sovrapposizione modale . . . . .	67
2.3.3.7.3	Contributo di ciascun modo proprio .	69
2.3.4	Analisi agli elementi finiti . . . . .	71
2.3.4.1	Frequenze proprie . . . . .	73
2.3.4.1.1	Albero interno . . . . .	74
2.3.4.1.2	Carter . . . . .	74
2.3.4.1.3	Sistema completo . . . . .	75
2.3.4.2	Confronto tra i risultati 3D e 2D . . . . .	77
2.3.4.3	Effetto della rotazione dell'albero . . . . .	78
2.3.4.4	Risposta dinamica . . . . .	79
2.3.5	Effetto dello smorzamento . . . . .	81
2.3.6	Vibrazioni trasmesse . . . . .	83
2.3.7	Sensibilità ai parametri progettuali . . . . .	86
2.3.8	Verifica dei componenti . . . . .	88
2.4	Indicazioni progettuali . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Sviluppo della trasmissione</b>	<b>93</b>
3.1	Modifica dei cuscinetti . . . . .	94
3.2	Aumento di rigidità specifica dei tubi . . . . .	96
3.2.1	Applicazione di materiali compositi . . . . .	98
3.2.2	Irrigidimento dell'albero . . . . .	101
3.2.3	Irrigidimento del carter . . . . .	102
3.3	Rigidità minima richiesta . . . . .	103
3.4	Ottimizzazione . . . . .	104
3.5	Tubi commerciali . . . . .	106
	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>111</b>
	<b>Appendici</b>	<b>113</b>
	<b>A File Mathcad analisi statica</b>	<b>114</b>
	<b>B File Mathcad Rigidità cuscinetti</b>	<b>119</b>
	<b>C File Mathcad Schema C3</b>	<b>125</b>
	<b>D File comandi Ansys schema B3</b>	<b>161</b>

---

<b>E</b>	<b>File comandi Ansys schema A3</b>	<b>164</b>
<b>F</b>	<b>File comandi Ansys schema C3</b>	<b>167</b>
<b>G</b>	<b>File Ansys con variazione dei cuscinetti</b>	<b>172</b>
<b>H</b>	<b>Elenco completo pre-impregnati</b>	<b>177</b>
<b>I</b>	<b>Elenco preventivi</b>	<b>178</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>179</b>



# Introduzione

La meccanizzazione della raccolta delle olive rappresenta attualmente un campo in forte sviluppo ed innovazione tecnologica, grazie alla crescente domanda del mercato d'olio d'oliva ed alla elevata differenziazione delle aziende produttive che porta ad una grande varietà di esigenze e di caratteristiche richieste ai sistemi di raccolta.

Inserendosi nel settore degli agevolatori di raccolta l'abbacchiatore o sferzatore *Alice*<sup>®</sup> realizzato su progetto di *Scienza Macchinale S.r.l.* rappresenta uno dei prodotti più all'avanguardia, adatto sia per una produzione di qualità che per l'utilizzo in oliveti volti ad un'elevata produttività.

Dopo una sintetica analisi di mercato, finalizzata ad individuare le principali macchine presenti in commercio e le caratteristiche tecniche fondamentali, si procede ad un confronto con *Alice*<sup>®</sup> in modo da evidenziare possibili sviluppi e miglioramenti con particolare riferimento al sistema di trasmissione.

La macchina infatti, durante l'impiego, manifesta delle rilevanti vibrazioni che, pur non compromettendo il suo corretto funzionamento, si ripercuotono sull'operatore diminuendone il comfort ed esponendolo a vibrazioni che si trasmettono al sistema mano-braccio, potenzialmente dannose per la salute.

Si esegue quindi un'approfondita analisi dinamica della macchina partendo da modelli notevolmente semplificati fino a giungere a modelli più complessi e completi che descrivono con sufficiente approssimazione il comportamento dinamico del sistema nel suo complesso. In particolare si calcolano le frequenze proprie della struttura e gli spostamenti derivanti dalla forzante applicata.

Lo studio permette di evidenziare le principali grandezze progettuali su cui poter intervenire valutando gli effetti e l'influenza dei parametri sulla dinamica della macchina. Su questa base è possibile eseguire uno sviluppo del sistema di trasmissione valutando l'efficacia dei possibili interventi e stimando i benefici che ne derivano.

Oltre ad altri possibili interventi di modifica, si valuta l'applicazione di materiali compositi per la realizzazione di alcuni componenti della macchi-

na; grazie all'aumento di rigidità specifica si può ottenere una diminuzione del peso e contemporaneamente una riduzione delle vibrazioni. Si modellano quindi tali particolari studiando il loro comportamento e parametrizzando i modelli rispetto alle grandezze progettuali e tecnologiche disponibili in modo da poter eseguire un'ottimizzazione nella scelta dei materiali e delle altre grandezze.

Infine, sulla base dei risultati ottenuti, considerando i preventivi richiesti a diverse aziende produttive del settore, si esegue un confronto tra alcune soluzioni possibili in modo da individuare una scelta ottimale che tenga conto anche dei costi di realizzazione.

# Capitolo 1

## Stato dell'arte

Nella produzione dell'olio, i costi di raccolta incidono fortemente sul prezzo finale del prodotto<sup>1</sup>. Nonostante questo, la meccanizzazione ed automatizzazione della raccolta delle olive risulta complessa per numerosi fattori di diversa natura tra cui la localizzazione di molte aziende in aree collinari e di declivi, la ridotta dimensione aziendale<sup>2</sup>, forme di allevamento non adatte all'automatizzazione, . . . Un altro aspetto è l'estrema diffusione e differenziazione della coltura in termini di forme di allevamento, varietà di olive coltivate (o *cultivar*), giacitura, dimensioni aziendali, . . .

Nonostante questi problemi, sono stati sviluppati numerosi sistemi per la raccolta meccanizzata; questo grazie anche alla crescente domanda del mercato d'olio d'oliva ed all'interpretazione dell'ovicoltura non solo come mera attività produttiva, ma anche come componente paesaggistica e culturale.

Un quadro generale di questo genere porta all'impossibilità di diffondere in tutte le aree di coltivazione gli stessi sistemi di raccolta ed il conseguente sviluppo di numerose macchine agricole notevolmente differenziate sotto molti punti di vista tra cui i meccanismi di raccolta, i campi di impiego, le caratteristiche meccaniche, la qualità e la produttività di raccolta, . . .

### 1.1 Classificazione delle macchine per la raccolta di olive

Prima di procedere all'analisi della macchina in esame si ritiene opportuno eseguire una rapida analisi di mercato valutando lo stato dell'arte e mettendo a confronto le varie macchine per la raccolta di olive disponibili sul mercato.

---

<sup>1</sup>Secondo [1] e [2] la raccolta può incidere per il 40%-60% sul costo totale

<sup>2</sup>In Italia, la classe di aziende olivicole più frequente è quella con superficie agricola utile inferiore all'ettaro [3]

Nell'ampio panorama di macchine per la raccolta di olive disponibili sul mercato, è possibile eseguire una classificazione e suddivisione sulla base del meccanismo di raccolta; si individuano in questo modo tre categorie principali:

- *Macchine scuotitrici*: sono costituite da un gancio montato su un'asta, spesso telescopica; il gancio viene fissato direttamente sul fusto della pianta oppure sui rami primari (detti *branche*) e secondari (detti *branchette*), viene poi impressa una vibrazione al gancio e, conseguentemente, alla pianta in modo da far cadere le olive. L'azionamento può avvenire tramite motore a scoppio, sostenuto dall'operatore mediante imbracatura, oppure in modo pneumatico attraverso un compressore che viene solitamente trainato attraverso un carrello. Il peso è piuttosto elevato e tendenzialmente superiore alle altre categorie, e può oscillare solitamente tra 10 kg e 15 kg. Queste macchine sono dotate di sistemi antivibranti sulle impugnature che permettono di ridurre le vibrazioni trasmesse all'operatore (figura 1.1). In alcuni casi possono



Figura 1.1: Macchina scuotitrice

essere montate direttamente su macchine trattatrici ed includere un meccanismo di posizionamento delle reti di raccolta; tali macchine vengono definite *scuotiraccogliatrici* (figura 1.2) e sono utilizzabili esclusivamente quando ci sia sufficiente spazio di manovra per il trattore tra le piante adiacenti e quando il terreno non sia terrazzato e non presenti pendenze eccessive. Il principale limite di queste attrezzature è rappresentato dalle basse rese di raccolta (percentuale di olive staccate dalla pianta) in epoche di raccolta precoci, soprattutto per cultivar difficili, come nel caso di frutti piccoli e con alta resistenza al distacco delle olive. Buoni risultati, invece, sono ottenibili in epoche tardive; in tali condizioni però, possono verificarsi perdite di un certo rilievo (5%–10%) per caduta precoce di gemme (definita anche *cascola*), tali da danneggiare e diminuire la resa del raccolto dell'anno successivo. I ganci scuotitori inoltre, causano escoriazioni su branche e branchette nel punto di attacco; tali



Figura 1.2: Macchina scuotiraccoglitrice

danni possono, anche se raramente, portare significative conseguenze come la *rogna dell'olivo*<sup>3</sup>.

- *Brucatori*: sono costituiti da un rastrello con denti ondulati a cui viene impresso un moto rotatorio attorno al loro asse principale. Il distacco dei frutti è provocato dall'azione combinata del movimento di rotazione e del pettinamento della chioma esercitato dall'operatore. I rastrelli sono montati mediante uno snodo orientabile su aste di alluminio, intercambiabili, fisse o telescopiche (figura 1.3). I brucatori permettono un



Figura 1.3: Brucatore

buon distacco dei frutti anche quando si esegue la raccolta precocemente; tuttavia, indipendentemente dall'epoca di raccolta, i risultati sono generalmente inferiori a quelli ottenibili con gli abbacchiatori o con gli scuotitori. Anche in questo caso i brucatori possono essere montati su trattori agricoli comprensivi di sistemi automatici di raccolta; macchine di questo genere presentano i limiti già evidenziati per le macchine scuotiraccoglitrici.

- *Abbacchiatori o sferzatori*: sono generalmente costituiti da pettini montati in coppia e oscillanti uno contro l'altro, costituiti da denti (detti

---

<sup>3</sup>Malattia dovuta a parassiti che si manifesta con escrescenze e colpisce soprattutto i rami delle piante.

anche *rebbi*) che variano in numero e lunghezza in funzione del modello considerato (figura 1.4). Queste attrezzature provocano la caduta dei



Figura 1.4: Testa di un abbacchiatore

frutti sia per azione diretta sugli stessi sia indiretta per effetto delle vibrazioni indotte ai rami ed alle branchette. È possibile effettuare un'azione pettinante, particolarmente utile quando si esegue la raccolta in epoca precoce (con elevata resistenza al distacco) ed in presenza di frutti piccoli. In molte di queste attrezzature, l'inclinazione degli organi battenti rispetto all'asta può essere regolata mediante una leva o una manopola per facilitarne l'uso in funzione della forma della chioma. Gli abbacchiatori/sferzatori sono montati su aste di lunghezza variabile e possono essere alimentati con sistemi ad aria compressa, mediante motori a scoppio o con alimentazione di tipo elettrico.

Un'ulteriore classificazione può essere eseguita sulla base del sistema di alimentazione delle macchine. Un approccio di questo tipo risulta molto utile per mettere in luce le diverse caratteristiche tecniche delle macchine e valutarne i campi di utilizzo.

Si possono individuare tre gruppi principali:

- Alimentazione di tipo pneumatico: la movimentazione degli organi meccanici avviene attraverso aria compressa fornita da un compressore che, a sua volta, può essere alimentato da un motore termico o elettrico. Necessitano di un carrello su cui trasportare il compressore ed hanno in dotazione tubi di lunghezza variabile per alimentare una o più utenze.

Le macchine alimentate pneumaticamente hanno alcuni vantaggi tra cui il peso ridotto dell'attrezzatura impugnata direttamente dall'operatore, la possibilità di alimentare più utenze con un unico compressore e l'intercambiabilità con strumenti agricoli di altra natura funzionanti anch'essi ad aria compressa. Presentano però alcuni problemi tra cui

la presenza del carrello che limita le possibilità di movimento dell'operatore; le vibrazioni trasmesse non sono trascurabili e soprattutto la rumorosità di macchine di questo tipo risulta notevolmente intensa e fastidiosa, tale da rendere necessario l'utilizzo di cuffie isolanti; inoltre il numero di battute al minuto risulta notevolmente influenzato dalla resistenza opposta dalle foglie e dai rami, ne consegue una velocità di esercizio fortemente variabile e dipendente dalle condizioni di utilizzo, portando ad un notevole abbassamento della produttività.

- Alimentazione con motore termico: i motori utilizzati sono di cilindrata e potenza ridotte e sono montati principalmente su scuotitori, anche se non mancano realizzazioni su abbacchiatori e brucatori.

Ai vantaggi di completa libertà di movimento e nessuna necessità di collegamento a batterie o compressori, si contrappongono i disagi causati dalla forte rumorosità e dalle elevate vibrazioni trasmesse (nonostante i sistemi di impugnatura antivibranti), con conseguente disagio per l'operatore accentuato dalla presenza dei fumi di scarico del motore; anche il peso e gli ingombri sono più elevati rispetto alle altre categorie, con un complessivo maggior affaticamento del personale.

- Alimentazione elettrica: si utilizzano per lo più in macchine di dimensioni ridotte, con basse potenze trasmesse, pesi ridotti ed ingombri contenuti. L'alimentazione può avvenire collegando la macchina direttamente alla rete elettrica oppure a batterie standard di tipo automobilistico, trasportabili tramite dei carrelli. Sono presenti anche versioni con batteria dedicata installata su zaino, indossabile direttamente dall'operatore.

Il peso di tali macchine risulta, in media, leggermente superiore a quelle alimentate ad aria compressa; questo è dovuto alla presenza del motore elettrico e dei sistemi di trasmissione. Nelle versioni con batteria su zaino, la libertà di movimento è completa, la rumorosità è quasi ridotta a zero, notevolmente inferiore a tutte le altre categorie, l'inquinamento è assente e non si hanno emissioni di fumi di scarico. Anche le vibrazioni trasmesse sono contenute e, complessivamente, il comfort del personale risulta notevolmente superiore rispetto alle altre categorie. Le batterie hanno autonomia superiore alle otto ore lavorative giornaliere e sono ricaricabili durante le ore notturne.

Dall'analisi delle tipologie di macchine presenti sul mercato e dai loro campi di impiego, emergono due filoni principali di utilizzo delle macchine. Il primo, particolarmente orientato alla quantità produttività per un massimo

abbattimento dei costi a scapito della qualità, ha portato le aziende agricole a preferire macchine scuotitrici o raccogliscuotitrici, utilizzabili in oliveti con sesto di impianto regolare, densità di impianto elevata, piante a tronco unico con produzione elevata e cultivar a frutto medio-grande. Si predilige un tardivo periodo di raccolta in modo da avere la massima resa delle macchine. In questo genere di produzione infatti, gli alberi non vengono potati ottenendo una sovrabbondanza di gemme senza nessuna selezione del raccolto; la cascata rientra così nei costi di gestione. Gli oli ottenuti sono di qualità medio bassa a prezzi fortemente concorrenziali.

Un secondo filone predilige la qualità, si rivolge ad una clientela più esigente con oli prodotti in quantità minori ma venduti a prezzi più elevati. In queste aziende gli alberi vengono regolarmente potati, i frutti selezionati e lavorati immediatamente dopo la raccolta. Si presta particolare attenzione ai possibili danneggiamenti delle piante e delle olive in modo da evitare il decadimento della qualità dell'olio prodotto. Si prediligono quindi macchine abbacchiatrici o sferzatrici, di alta qualità, che preservino l'integrità delle olive e del fogliame anche a costo di una più contenuta resa oraria.

Emerge come gli abbacchiatori ad alimentazione elettrica, rappresentino il campo in maggiore sviluppo riuscendo ad unire i vantaggi di elevata produttività di scuotitori e scuotiraccoglitori, senza però provocare danni alle piante; garantiscono il più elevato comfort per gli operatori grazie alle ridotte vibrazioni ed alla rumorosità quasi assente, al peso contenuto ed alla completa libertà di movimento garantita dalle batterie montate su zaini.

## 1.2 Caratteristiche tecniche principali

Al fine di poter eseguire un confronto diretto delle macchine per la raccolta delle olive presenti sul mercato, si individuano le caratteristiche tecniche principali, ritenute di importanza fondamentale per valutare la qualità dei prodotti.

Considerando che l'abbacchiatore in esame è di tipo elettromeccanico, ci si limiterà al confronto delle macchine agevolatrici appartenenti alla stessa categoria. Saranno così escluse le macchine scuotitrici e scuotiraccoglitrici, i brucatori e tutte le macchine ad alimentazione pneumatica.

### 1.2.1 Produttività

La produttività è una stima della quantità di olive cadute in un'ora e viene espressa in kg/h. Il dato è fortemente influenzato da molteplici fattori esterni difficilmente quantificabili e controllabili. Gli stessi valori forniti dalle



aziende produttrici risentono di tali incertezze e sono da considerare solo parzialmente affidabili.

In particolare la produttività dipende fortemente dalla Forza di Ritenzione del Frutto (*FRF*) a sua volta funzione del tipo di oliva, del periodo dell'anno in cui avviene la raccolta e dello stato di maturazione delle olive. Sono determinanti anche il carico di frutti presente sull'albero, la loro distribuzione sulla chioma, l'eventuale potatura della pianta e la sua conformazione ed altezza da terra. L'abilità ed esperienza dell'operatore influiscono notevolmente sulla produttività, sia per quanto riguarda la velocità nell'eseguire le operazioni necessarie, sia per gli eventuali danni che si possono arrecare alle piante durante la raccolta.

Bisogna tenere conto inoltre, del raggio di caduta delle olive che, al loro distacco, tendono ad essere proiettate ad una certa distanza dal punto di attacco, potendo anche cadere al di fuori della rete di raccolta. Questo, oltre ad incidere negativamente sulla produttività, può rendere necessario il posizionamento di reti su una superficie maggiore aumentando così i tempi di preparazione e il numero di addetti necessari.

Le macchine agevolatrici inoltre, tendono a far cadere una quantità variabile di foglie e rami insieme alle olive, diminuendo la produttività ed influenzando negativamente sulla salute della pianta. Le olive stesse possono venire intaccate durante la raccolta subendo delle marcature o segnature che comportano una rapida maturazione del frutto pregiudicando la qualità del raccolto e del prodotto.

Nel confronto tra i vari modelli presenti in commercio, oltre a valutare il singolo dato di produttività si cercherà di tenere conto anche di tutti questi fattori non trascurabili ai fini della valutazione della qualità dei prodotti.

### 1.2.2 Lunghezza dell'asta

La lunghezza dell'asta determina l'altezza massima raggiungibile dalla macchina. L'asta deve avere una lunghezza tale da permettere di raggiungere i rami più alti della pianta senza compromettere la maneggevolezza nella lavorazione delle fronde più basse. Per questo vengono realizzate aste di tipo telescopico facilmente regolabili in altezza. Si considereranno la lunghezza massima e minima degli agevolatori per un loro confronto.

### 1.2.3 Velocità

La velocità viene espressa in numero di battute al minuto per gli sferzatori con pettini a moto alternativo, oppure in giri al minuto per i modelli con teste rotanti. Incide principalmente sulla produttività e sui danni arrecati

alla pianta ed alle fronde, influisce anche sul raggio di caduta e sulla quantità di foglie e branchette asportate. Velocità contenute sono preferite da aziende produttrici orientate alla qualità dell'olio con particolare attenzione al mantenimento delle piante; velocità più elevate sono scelte in produzioni di grande quantità. Infine per un raccolto su olive mature e caratterizzate da minor forza di ritenzione è sufficiente un valore di velocità ridotto. Sono spesso previste più velocità di funzionamento in modo da adattare la macchina ad esigenze di funzionamento differenti.

Un altro aspetto importante è il controllo della velocità di esercizio: infatti il valore dichiarato dai fornitori è riferito al funzionamento a vuoto; quando i pettini sono inseriti nel fogliame questi tendono a rallentare notevolmente riducendo drasticamente l'efficacia delle macchine e non consentendo un controllo efficace sulla velocità da parte dell'operatore. Questo porta ad avere elevati raggi di caduta con distacco di foglie e presenza di danneggiamenti sui rami e sulle gemme nella fase di inserimento nella chioma o su chiome più rade; di contro la macchina rischia di diventare inefficace su chiome molto fitte. Il problema viene risolto in alcuni modelli in cui è stato introdotto un controllo elettronico di inseguimento della velocità che garantisce un funzionamento della macchina a velocità pressoché costante.

#### 1.2.4 Peso, maneggevolezza, rumorosità, vibrazioni

Queste caratteristiche sono particolarmente sentite in quanto incidono sull'affaticamento dell'operatore. Nei periodi di raccolta le macchine vengono utilizzate per tutta la durata dell'orario di lavoro; un minor affaticamento e maggior comfort aumentano la produttività e riducono la necessità di alternare più operatori alla macchina.

Il peso è chiaramente uno dei dati cruciali per il confronto delle macchine; oltre al valore in kg della massa complessiva, risulta importante anche la distribuzione delle masse sullo strumento ed il suo bilanciamento. Questo influenza la maneggevolezza e la manovrabilità dello strumento, riducendo ed accelerando le operazioni necessarie per il passaggio da una pianta all'altra o da una zona all'altra della pianta stessa. L'importanza di quest'ultimo aspetto è messo in evidenza nella norma UNI EN 1005 ([4, pag.4]):

*Dove possibile, il baricentro dell'oggetto dovrebbe trovarsi all'interno dell'oggetto, distribuito equamente tra entrambe le mani e situato il più possibile vicino al corpo.*

Una bassa rumorosità assicura un maggior comfort per l'operatore ed un suo minor affaticamento aumentando così la produttività. Una lunga esposi-

zione a rumori intensi oltre ad affaticare l'operatore e ridurre la produttività può provocare lesioni e problemi sanitari.

Discorso analogo può essere fatto per le vibrazioni trasmesse, da mantenere al più basso valore possibile in modo da ridurre l'affaticamento del personale e la necessità di alternare operatori diversi alla macchina. Sono inoltre ben note le conseguenze negative per la salute dovute all'esposizione prolungata a vibrazioni soprattutto in certi campi di frequenze in particolare per quanto riguarda le articolazioni ([5] e [6]).

Molti di questi dati non sono reperibili sulla rete e non vengono forniti dalle aziende produttrici. Si cercherà comunque di tenerne conto considerando i meccanismi di funzionamento, il tipo di alimentazione e gli altri dati e caratteristiche ricavabili.

### 1.3 Principali abbacchiatori in commercio

A seguito di una approfondita ricerca degli abbacchiatori presenti sul mercato, si sono raccolti i modelli principali e si procede ad illustrarne le caratteristiche.

- *Giulivo*®

L'abbacchiatore *Giulivo*®, prodotto dalla *Davide & Luigi Volpi S.p.a.*, ha una testa circolare orientabile con movimento rotatorio di sei rebbi in fibra di carbonio intrecciata. È dotato di un alimentatore elettronico con limitatore di svoraccarichi, il peso è notevolmente contenuto e l'asta, telescopica, raggiunge i 4 m di lunghezza. Funziona con una batteria da 12 V di tipo automobilistico ed alimentatore; è dotato di cavo di collegamento e di carrello per il trasporto delle batterie ([7]).

Il motore è montato sulla testa, il bilanciamento della macchina, quindi, non risulta ottimale in quanto la maggior parte della massa è concentrata sulla testa riducendo la maneggevolezza dello strumento.

1. Produttività dichiarata: 80-100 kg/h
2. Massa: 2 kg
3. Lunghezza asta: 2.5-3.8 m
4. Alimentazione: batteria da 12 V montata su carrello

- *Oliviero*®

*Agritec S.a.s.* produce *Oliviero*®, caratterizzato da una testa circolare con movimento rotatorio dei rebbi, l'alimentazione avviene tramite



Figura 1.5: Abbacchiatore Giulivo

batteria di tipo automobilistico oppure con batteria autonoma da 24 V ([8]).

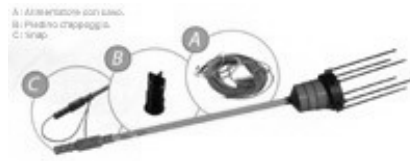


Figura 1.6: Abbacchiatore Oliviero

Anche in questo caso il motore elettrico è posizionato sulla testa e la maneggevolezza può risentirne negativamente; il carrello limita la libertà di movimento dell'operatore.

1. Produttività dichiarata: 80-120 kg/h
2. Massa: 2.2 kg
3. Lunghezza asta: 2.5-4.0 m
4. Alimentazione: batteria da 12 V o batteria autonoma da 24 V montate su carrello

- *Olivella mix*<sup>©</sup>

*Olivella mix*<sup>©</sup>, di *Coima Italy S.r.l.*, ha la testa orientabile con movimento circolare dei rebbi in carbonio, il motore è posizionato sulla testa e l'asta è telescopica. Dotata di batterie posizionate su zaini trasportabili direttamente dall'operatore, ha tre regolazioni di velocità disponibili ([9]).

1. Produttività dichiarata: 80-120 kg/h
2. Massa: 1.5 kg
3. Lunghezza asta: fino a 3 m
4. Alimentazione: Batteria dedicata da 12 V montata su zaino

- *Briolivo*<sup>©</sup> e *La scossa*<sup>©</sup>

Prodotti da *Imbriani macchine agricole*, *Briolivo*<sup>©</sup> e *La scossa*<sup>©</sup> hanno una testa circolare rotante con delle spazzole da 8 o 12 rebbi elastici. Il meccanismo di raccolta è diverso rispetto ai modelli presentati finora e, ad una maggiore semplicità costruttiva, contrappongono una minore produttività e, soprattutto, la tendenza a danneggiare maggiormente branche e branchette, ad aumentare la quantità di foglie e di gemme distaccate dai rami e comportano un più ampio raggio di caduta dei frutti ([10]).

1. Produttività dichiarata: 100 kg/h
2. Massa: 2.8 kg
3. Lunghezza asta: 2.5-5.0 m (con prolunga)
4. Alimentazione: batteria da 12 V montata su carrello

- *Oliwatt*<sup>©</sup>

Tra i modelli presentati finora, *Oliwatt*<sup>©</sup> di *Lisam S.r.l.* è l'unico che presenta un moto alternativo dei pettini che risulta più efficace dei cinesmatismi con moti rotatori. L'alimentazione avviene tramite batteria trasportabile su carrello attraverso cavi di lunghezza variabile; il motore è montato sulla testa e sono disponibili aste telescopiche di svariate lunghezze. È disponibile anche una versione con generatore elettrico di 5 kg di massa (a vuoto) trasportabile a zaino tramite tracolla. La soluzione, interessante per la libertà di movimento lasciata all'operatore, comporta però dei notevoli disagi quali il peso, le vibrazioni trasmesse alla schiena ed alle spalle, il riscaldamento, la rumorosità ed i fumi di scarico emessi dal motore termico ([11]).

1. Produttività dichiarata: 70 kg/h
2. Massa: 1.8 kg
3. Lunghezza asta: a scelta
4. Alimentazione: batteria da 12 V o generatore montabili su carrello o trasportabili a tracolla.

- *Electric mambo*®

Anche per questo modello di *Zanon S.r.l.*, i pettini sono di tipo oscillante. È dotato di cinghia di sostegno e batteria di alimentazione su carrello con cavo di prolunga ([12])

1. Produttività dichiarata: -
2. Massa: 3.4 kg
3. Lunghezza asta: 2-3.2 m
4. Alimentazione: batteria da 12 V montabili su carrello.

- *Olivium*®

*Olivium*® di *Pellenc* è uno dei prodotti più all'avanguardia nel settore. Oltre ad avere un cinematismo di tipo oscillante della testa, peso ridotto, aste telescopiche in fibra di carbonio, offre la possibilità di collegare la macchina ad una batteria dedicata montata su zaino ([13]).

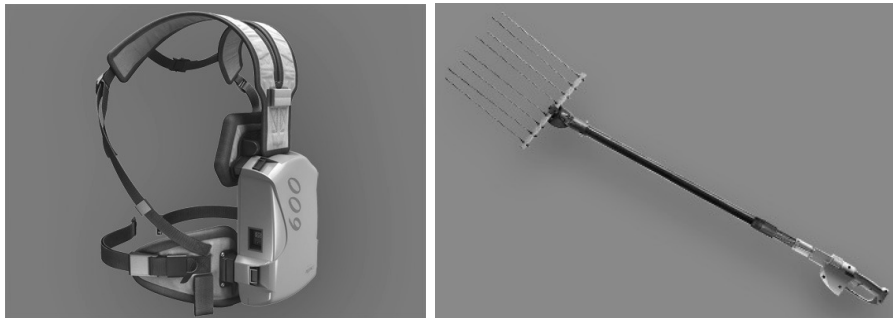


Figura 1.7: Olivium

1. Produttività dichiarata: -
2. Massa: 2.7 kg
3. Lunghezza asta: 1.9-2.6 m
4. Alimentazione: batteria dedicata da 38.4 V trasportabile su zaino (7 kg)

- *Alice*®

Particolare attenzione viene dedicata all'abbacchiatrice *Alice*® di *Campagnola* realizzata su progetto di *Scienza Machinale S.r.l.*. La macchina presenta molte caratteristiche all'avanguardia nel settore; in particolare è dotata di un cinematismo brevettato che impartisce un movimento ellittico ai rebbi e fornisce la massima produttività. Inoltre è l'unico

modello ad avere il controllo in velocità del motore tale da garantire una velocità pressoché costante in tutte le condizioni di funzionamento ([14]). È alimentabile sia con batteria di tipo automobilistico che

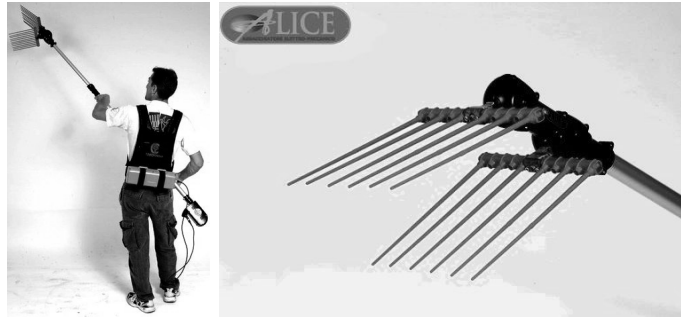


Figura 1.8: Alice

con batteria dedicata trasportabile su zaino. L'asta in alluminio è fissa di lunghezza pari a circa 2 m, ne risulta un peso complessivo leggermente superiore al diretto concorrente *Olivium*®. Il motore è montato sull'impugnatura ottenendo un buon bilanciamento della macchina.

1. Produttività dichiarata: 80 kg/h
2. Massa: 3.5 kg
3. Lunghezza asta: 1.4 m
4. Alimentazione: batteria dedicata da 24 V trasportabile su zaino o batteria automobilistica da 12 V trasportabile su carrello.

## 1.4 Confronto tra abbacchiatori

Tenendo conto delle informazioni disponibili si effettua un confronto diretto tra le caratteristiche dei vari modelli presenti sul mercato. Si considerano esclusivamente i modelli a testa non rotante con pettini oscillanti. Le macchine con testa a spazzola rotante infatti, pur avendo valori di produttività elevati, comportano il distacco di un notevole quantitativo di foglie ed il danneggiamento dei rami, oltre ad avere un raggio di caduta molto più ampio rispetto agli altri modelli.

In particolare, i dati considerati maggiormente importanti per la valutazione sono il peso e la possibilità di trasporto delle batterie su zaino; il primo incide sulla maneggevolezza dello strumento e sull'affaticamento dell'operatore e il secondo fornisce completa libertà di movimento.

Altro dato di rilevante importanza è la produttività. Considerando però che i valori sono molto simili tra loro e che sono fortemente influenzati da molti fattori esterni difficilmente controllabili e quantificabili, i vari modelli si considerano pressoché equivalenti sotto questo punto di vista. Si metteranno però in evidenza le caratteristiche peculiari delle macchine in modo da evidenziarne pregi e difetti.

Si riuniscono in tabella 1.1 tutte le caratteristiche delle macchine in modo da visualizzarne un confronto diretto.

	<b>Alice</b>	Giulivo	Oliviero	Olivella	Oliwatt	<b>Olivium</b>	Mambo
Prod. ( kg/h)	<b>80</b>	100	120	120	70	-	-
Peso ( kg)	<b>3.5</b>	2	2.2	1.5	1.4	<b>2.7</b>	3.4
Lunghezza asta ( m)	<b>2</b>	3.8	3.4	3	-	<b>2.6</b>	3.2
Controllo velocità	<b>Si</b>	No	No	No	No	<b>No</b>	No
Batteria su carrello	<b>Si</b>	Si	Si	Si	Si	<b>Si</b>	Si
Batteria su zaino	<b>Si</b>	No	No	Si	No	<b>Si</b>	No
Moto dei rebbi	<b>ellittico</b>	rotatorio	rotatorio	rotatorio	alternato	<b>alternato</b>	alterato

Tabella 1.1: Confronto tra abbacchiatori

Nonostante gli elevati valori di produttività forniti dai rivenditori, i meccanismi con teste circolari rotanti sono tendenzialmente meno efficaci in quanto non consentono la *pettinatura* della chioma e tendono a provocare il distacco di un maggior numero di foglie. La minor complessità del moto, che richiama il funzionamento dei brucatori, essendo di tipo rotante, trasmette una quantità di vibrazioni inferiore rispetto ai meccanismi con pettini oscillanti. Il motoriduttore viene in alcuni casi montato sulla testa ottenendo un peso minore della macchina (grazie all'eliminazione del sistema di trasmissione lungo tutta la lunghezza dell'asta) che però risulta peggio distribuito in quanto concentrato maggiormente su una sola estremità, riducendo la maneggevolezza dello strumento.

Seguendo i criteri di valutazione fin qui esposti, i due modelli tecnicamente più avanzati risultano essere il modello *Alice*<sup>©</sup> ed il modello *Olivium*<sup>©</sup>. Quest'ultimo presenta un peso inferiore al prodotto della ditta Campagnola la quale invece ha implementato un sistema di controllo di velocità tale da garantire un numero di battute pressoché costante indipendentemente (almeno entro certi limiti) dalle condizioni di funzionamento. Questa caratteristica, come già illustrato in precedenza, migliora notevolmente la produttività della macchina riducendo i danni sui frutti e sulle piante, riducendo il raggio di caduta delle olive e soprattutto garantendo un maggiore controllo dello strumento e della sua velocità da parte dell'operatore.

Risulta quindi di notevole importanza uno sviluppo della macchina *Alice*<sup>©</sup> in modo da ridurre il peso complessivo della macchina; inoltre, da una



serie di prove dirette sulla macchina, è emerso come sia auspicabile un irrigidimento della struttura che manifesta delle vibrazioni ed oscillazioni; queste, pur non pregiudicando il corretto funzionamento della macchina, possono essere ridotte attraverso l'utilizzo di materiali ad elevata rigidità specifica. Si otterrebbe così una riduzione delle vibrazioni trasmesse con un miglioramento complessivo del comfort per gli utilizzatori.

Uno sviluppo di *Alice*® in questa direzione può portare alla realizzazione di uno strumento per la raccolta delle olive di qualità superiore a tutti gli altri modelli presenti sul mercato.

Per raggiungere tale obiettivo sarà necessario uno studio approfondito del sistema di trasmissione attuale, in particolare per quanto riguarda il comportamento dinamico dell'albero di trasmissione e del carter, in modo da evidenziare eventuali problematiche di vibrazione e risonanze e proporre soluzioni progettuali tali da garantire il corretto funzionamento del sistema e minimizzare le vibrazioni trasmesse all'operatore.

## Capitolo 2

### Analisi dell'abbacchiatore *Alice*

Prima di affrontare una riprogettazione della macchina è necessario eseguirne uno studio approfondito, in particolare per quanto riguarda il sistema di trasmissione. L'obiettivo è quello di ottenere un modello fisico che riproduca con sufficiente approssimazione il comportamento statico e dinamico dello strumento, in modo da indirizzare gli interventi di modifica e valutarne gli effetti.

L'abbacchiatore *Alice* ha il motoriduttore posizionato alla base dell'asta, in corrispondenza dell'impugnatura da dove è possibile agire sull'interruttore di accensione della macchina. Il moto viene trasmesso attraverso un albero tubolare in alluminio, montato sul carter anch'esso in alluminio e di forma tubolare. Sulla testa è posizionato il cinematismo che conferisce il moto ai pettini ed ai rebbi.



Figura 2.1: Abbacchiatore *Alice*

Il diametro esterno del carter è imposto da condizioni di tipo ergonomico in modo da rendere agevole e confortevole la presa della macchina in un punto qualunque del carter. Questa scelta progettuale è in linea con le indicazioni fornite nella norma UNI EN 1005, dove si consiglia di evitare le posture lavorative obbligate in quanto aumentano rapidamente disagio e affaticamento e diminuiscono l'efficienza muscolare ([4]).

## 2.1 Modellazione approssimata della presa dell'operatore

Dato che la macchina viene impugnata direttamente dall'operatore, sarà necessario eseguire uno studio che definisca i parametri caratterizzanti l'impugnatura stessa e che permetta di definire dei campi di variabilità di tali parametri in modo da valutarne l'influenza sul comportamento della macchina.

Si sceglie di utilizzare un modello notevolmente semplificato della presa dell'operatore; infatti uno studio approfondito di tale aspetto esula dal tema e dagli obiettivi della tesi.

Si schematizza quindi la presa con due sistemi massa-molla che rappresentano rispettivamente le mani e la rigidità della presa esercitata dall'operatore attraverso gli arti e le articolazioni superiori.

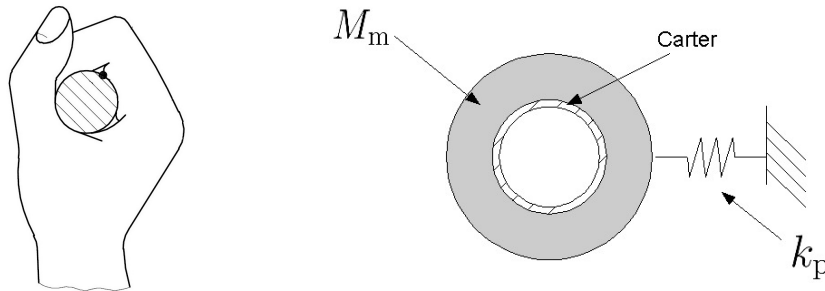


Figura 2.2: Modello di presa

Secondo questo schema, le grandezze fisiche da considerare sono:

- distanza tra i punti di presa:  $ab1$
- massa della mano:  $M_m$
- rigidità di presa:  $k_p$

Si passa quindi ad una valutazione numerica di tali parametri.

### 2.1.1 Punti di presa

Uno dei due punti di presa è imposto dalla posizione dell'interruttore di azionamento e dell'impugnatura alla base dell'asta. Il secondo punto di presa risulta però libero e variabile in base alle condizioni di utilizzo ed all'utilizzatore stesso.

Tale ampiezza è fortemente influenzata dalle condizioni di lavoro, dalle misure antropometriche dell'operatore e da molti altri fattori difficilmente quantificabili e controllabili. Si considera quindi un possibile *range* di valori per l'ampiezza della presa sulla base di misure antropometriche medie della popolazione e di considerazioni ergonomiche.

Escludendo la sovrapposizione delle mani e considerando la condizione limite di posizionare le mani una affianco all'altra, si può ipotizzare un'apertura minima pari alla larghezza delle mani che, utilizzando le misure antropometriche riportate nelle norma UNI 547 ([15]), possiamo considerare pari a 15 cm. Tali condizioni di esercizio sono però estreme e non applicabili in pratica per la loro scomodità e la scarsa manovrabilità della macchina che ne deriva.

Facendo riferimento alle misure antropometriche riportate in [16], si può allora considerare la larghezza del bacino come valore indicativo della ampiezza minima di presa. Considerando i valori per la popolazione maschile appartenente al 5° percentile, si può calcolare che il 95% delle persone hanno larghezza del bacino e quindi ampiezza minima di utilizzo maggiore di 30 cm, seguendo quanto riportato in [17].

Per quanto riguarda il valore massimo, si considerano le aree operative limite per gli arti superiori, secondo la norma EN ISO 14738 ([17]). Come valore estremo potremmo considerare l'area massima di lavoro (quota *B2* di figura 2.3). Anche in questo caso però, tale condizione non è applicabile al caso pratico in quanto impedita dagli ingombri della macchina e dalla difficoltà di manovra. Come valore realistico si considera quindi l'area di lavoro normale, pari a 480 cm, corrispondente al valore *B1* di figura 2.3

Riassumendo quindi, si è definito il campo di variabilità dell'ampiezza della presa che può oscillare tra 30 cm e 60 cm:

$$300 \text{ mm} \leq ab1 \leq 600 \text{ mm} \quad (2.1)$$

Si considera come condizione standard il valore pari a 40 cm, salvo poi valutare l'influenza di tale parametro sul comportamento della macchina e considerare le peggiori condizioni di esercizio.

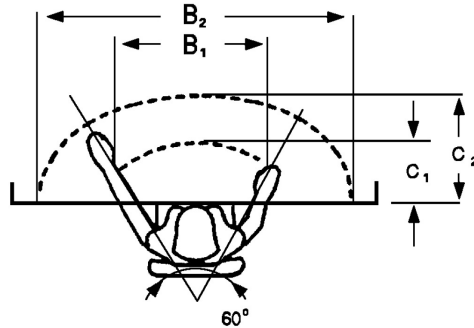


Figura 2.3: Area operativa limite per gli arti superiori ([17])

### 2.1.2 Massa della mano

Altro parametro importante per caratterizzare la presa è la massa della mano ( $M_m$ ) che si considera fissata alla macchina nei punti di presa. Si utilizza la regressione lineare fornita in [18]:

$$M_m = C + Bw + Sh \quad (2.2)$$

dove:

- $M_m$ : Massa della mano in kg
- $w$ : peso corporeo in kg
- $h$ : statura in cm
- $C = -0.11650$
- $B = 0.00360$
- $S = 0.00175$

L'equazione 2.2, fornisce il valore della massa della mano in funzione di altezza e peso dell'operatore. Anche in questo caso si considerano valori medi della popolazione per valutare il campo di variabilità di  $M_m$ . In particolare secondo [15] il 99% della popolazione ha altezza inferiore a 199.4 cm. Si considera un peso massimo di 110 kg e si ottiene un valore per  $M_m$  pari a 0.592 kg.

Per stabilire l'estremo inferiore si considera una statura pari a 155 cm ed un peso pari a 50 kg ottenendo così un valore di  $M_m$  pari a 0.36 kg.

Assumeremo quindi cautelativamente la seguente condizione per la massa della mano dell'operatore:

$$0.3 \text{ kg} \leq M_m \leq 0.6 \text{ kg} \quad (2.3)$$

ed un valore medio pari a:  $M_m = 0.4 \text{ kg}$

### 2.1.3 Rigidezza di presa

La rigidezza della presa è un parametro importante per eseguire una corretta analisi dinamica della macchina. Nel contempo però i valori di rigidezza sono difficilmente calcolabili e dipendono da numerosi fattori. Ci si limita quindi ad una valutazione di prima approssimazione ed una individuazione del campo di valori accettabili per  $k_p$ .

I modelli utilizzabili sono molteplici e di differenti complessità; considerando le effettive condizioni di lavoro si utilizza il modello riportato in [19] (figura 2.4) in cui si tiene conto della posizione dell'avambraccio e si calcola la rigidezza della sola articolazione del polso, trascurando la rigidezza e le forze esercitate da braccio ed avambraccio; tale approssimazione è accettabile se si tiene conto delle ampiezze di oscillazione molto ridotte e delle masse in gioco molto contenute che portano l'operatore ad avere braccia ed avambraccia praticamente ferme durante l'utilizzo della macchina (escludendo, naturalmente, i movimenti necessari alla pettinatura della chioma, che hanno comunque frequenze molto basse e non influenzano il comportamento dinamico dell'abbacchiatore).

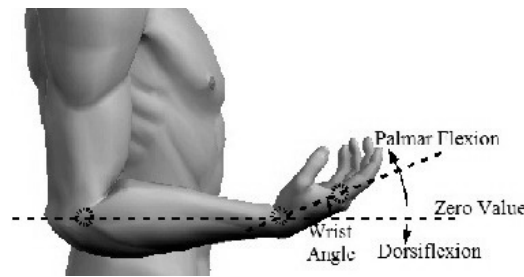


Figura 2.4: Modello dinamico del polso secondo [19]

Viene fornita una funzione esponenziale di  $\Theta_W$  (espresso in radianti) che fornisce il momento resistente  $M_W$  in Nm esercitato dal polso:

$$M_W = \exp(2.8508(-\Theta_W - 1.0185)) - \exp(5.4930(-1.2374 + \Theta_W))$$

(2.4)

Derivando l'equazione 2.4 e considerando una distanza tra il punto di presa e l'articolazione del polso pari a  $b_m = 88 \text{ mm}$  secondo quanto indicato in [15] e [16], si ottiene la rigidezza equivalente della molla  $k_p$  in funzione dell'angolo di inclinazione del polso  $\Theta_W$ .

$$k_p(\Theta_W) = -\frac{1}{b_m^2} \left( \frac{d}{d\Theta_W} M_W(\Theta_W) \right) \quad (2.5)$$

Considerando gli angoli raggiungibili dall'articolazione in esame si ricavano i valori massimo e minimo di  $k_p$  pari a circa  $1 \text{ N/m}$  e  $50 \text{ N/m}$ . Tenendo

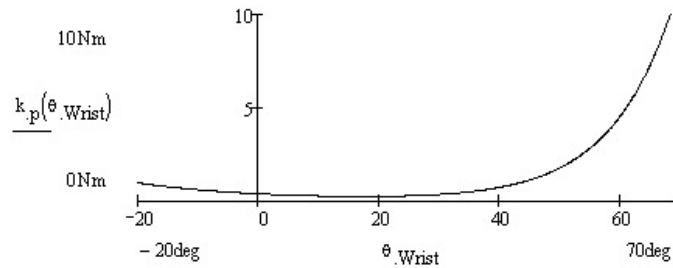


Figura 2.5: Andamento di  $k_p$  in funzione di  $\Theta_W$  in base a [19]

conto delle pesanti approssimazioni assunte, si considera cautelativamente, un range di valori per la rigidezza notevolmente più ampio:

$$1 \text{ N/m} \leq k_p \leq 1000 \text{ N/m} \quad (2.6)$$

Da notare come nell'equazione 2.6 si sia scelto di non abbassare ulteriormente il valore minimo di rigidezza  $k_p$ . Diminuire ulteriormente la rigidezza della presa infatti, non ha alcun interesse progettuale in quanto il comportamento dinamico del sistema vincolato attraverso la presa per valori molto bassi di  $k_p$  diventa assimilabile a quello del sistema libero.

## 2.2 Analisi statica

Come prima analisi si esegue uno studio statico dello strumento considerato come corpo rigido. Tale approccio, sebbene non rispecchi le condizioni di funzionamento con macchina accesa, potrà fornire delle importanti indicazioni per quanto riguarda le condizioni di presa dell'operatore ed i carichi che questi dovrà sopportare per sostenere la macchina. Si avrà inoltre una

stima della maneggevolezza della macchina e l'influenza delle masse della stessa sulla sua manovrabilità; utilizzando i criteri forniti in [4] è già citati nel paragrafo 1.2.4, si potranno eseguire delle stime su bilanciamento e maneggevolezza delle altre macchine concorrenti.

### 2.2.1 Modellazione del sistema

Per schematizzare la macchina si utilizza un modello semplificato (figura 2.6) con una massa  $M_i$  corrispondente alla massa dei corpi costituenti il gruppo dell'impugnatura e del motoriduttore che risulta fissata rigidamente ad una estremità del carter di caratteristiche note; una seconda massa  $M_f$  corrispondente alla testa dell'abbacchiatore, anch'essa fissata rigidamente all'estremità opposta del carter.

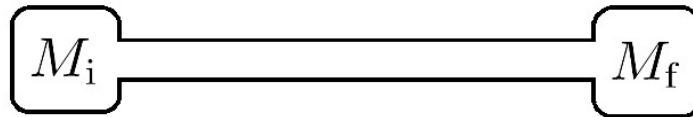


Figura 2.6: Modello rigido della macchina

L'abbacchiatore viene utilizzato in posizione prossima alla verticale, ma viene inclinato di un angolo non trascurabile durante le azioni di pettinatura della chioma delle piante e per l'utilizzo nelle fronde più basse. Si parametrizza quindi il modello rispetto all'angolo di inclinazione  $\alpha$  rispetto all'orizzontale (figura 2.7).

Per quanto riguarda i vincoli di presa, entrambe le mani esercitano una reazione perpendicolare all'asse, ma solo la mano posizionata in corrispondenza di  $A$  in figura 2.7 esercita una reazione in direzione assiale grazie all'ergonomia dell'impugnatura; con tale ipotesi, si trascura la reazione in direzione dell'asse del tubo esercitata dalla mano in  $B1$  e si considera tutta la componente assiale della reazione gravante su una mano. Lo schema di carichi e vincoli è rappresentato in figura 2.7.

La macchina risulta così vincolata isostaticamente; utilizzando le equazioni cardinali di equilibrio alla rotazione ed alla traslazione in direzione  $x$  e  $y$  di figura 2.7, si possono calcolare le reazioni vincolari che deve esercitare l'operatore per sostenere l'abbacchiatore.

Inoltre, per avere una stima della maneggevolezza della macchina, si può calcolare la sua inerzia alla rotazione rispetto al punto posizionato a metà tra i due punti di presa (che indichiamo con  $G_P$ ). La condizione ottimale si ha quando il baricentro della macchina coincide con il punto  $G_P$ , come riportato



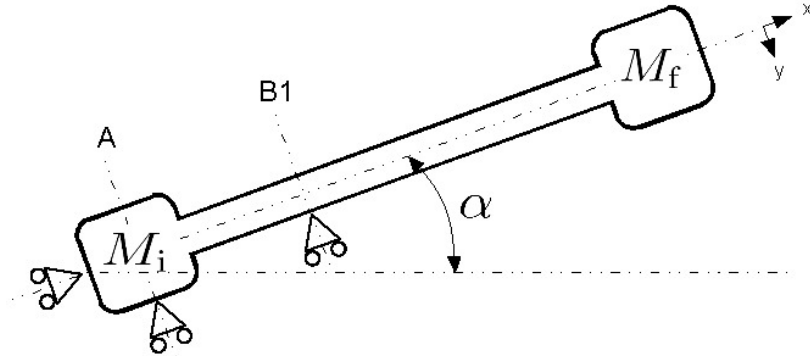


Figura 2.7: Schematizzazione dei vincoli di presa

in [4]. Si ha quindi una prima conferma delle considerazioni fatte riguardo alla maneggevolezza delle macchine nel paragrafo 1.2.4 e nel paragrafo 1.3: a parità di massa totale, è preferibile avere un maggior peso all'impugnatura (punto A) rispetto alla testa in quanto il baricentro risulta più vicino alla posizione ottimale.

Come confronto, si considera l'abbacchiatore *Giulivo*<sup>©</sup> che ha una massa complessiva inferiore (pari a 2 kg) con una lunghezza dell'asta di 2.5 m. Il motore è montato sulla testa, quindi, ipotizzando un tubolare di pari dimensioni rispetto all'abbacchiatore *Alice*<sup>©</sup> e considerando una densità pari a  $1600 \text{ kg/m}^3$ , si può calcolare la massa della testa, tenendo conto del fatto che non si ha nessun albero interno per la trasmissione del moto e trascurando il peso del cavo elettrico di alimentazione posizionato internamente al tubo.

### 2.2.2 Analisi dei risultati

Per la macchina *Alice*<sup>©</sup> le massa del carter e dell'albero interno di trasmissione in alluminio ( $M_c$  e  $M_a$ ), la massa totale  $M_{TOT}$ , le masse della testa e dell'impugnatura  $M_f$  e  $M_i$ , assumono i seguenti valori:

$$M_{TOT} \approx 3.58 \text{ kg}$$

$$M_c \approx 0.50 \text{ kg}$$

$$M_a \approx 0.15 \text{ kg}$$

$$M_f \approx 1.18 \text{ kg}$$

$$M_i \approx 1.75 \text{ kg}$$

In conseguenza dei carichi e dei vincoli imposti, si hanno due reazioni vincolari nel punto  $A$  in direzione  $x$  e  $y$ , denominate  $A_x$ ,  $A_y$  e nel punto  $B$  in direzione  $y$  denominata  $B_y$ . I valori delle reazioni, una volta fissate le masse della macchina, variano in funzione di  $\alpha$  e di  $ab1$ . È interessante osservare l'andamento delle reazioni in funzione dell'apertura di presa  $ab1$ , in particolare si considerano i moduli della reazione risultante  $A_r$  in  $A$  e della reazione  $B_r = B_y$  riportate in figura 2.8 e figura 2.9.

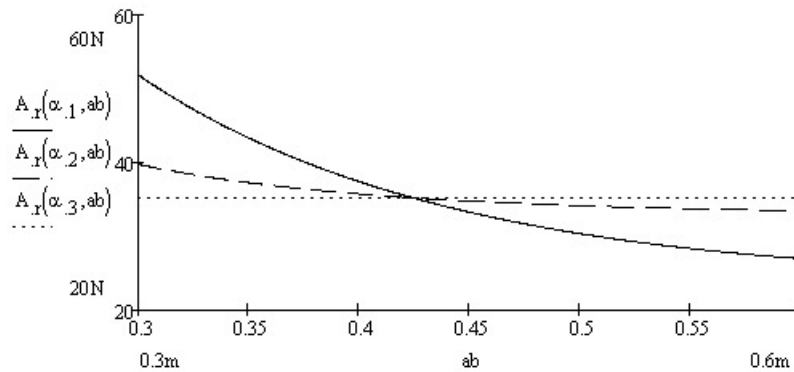


Figura 2.8: Reazione risultante in  $A$  in funzione di  $ab1$  per alcuni valori di  $\alpha$ :  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 70^\circ$ ,  $\alpha_3 = 90^\circ$

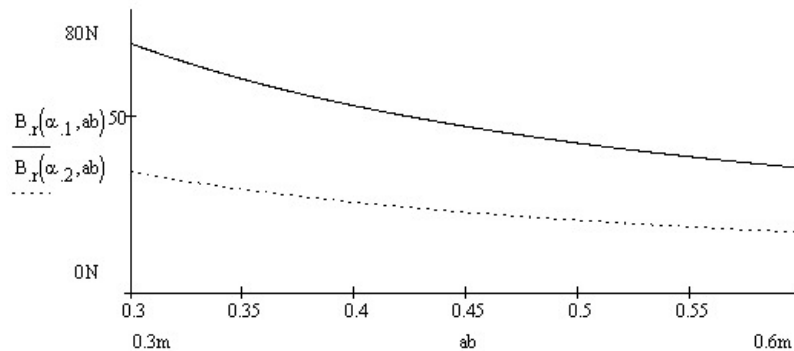


Figura 2.9: Reazione risultante in  $B$  in funzione di  $ab1$  per alcuni valori di  $\alpha$ :  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 70^\circ$

Le reazioni tendono ad aumentare mano a mano che ci si avvicina alla posizione orizzontale (piccoli valori di  $\alpha$ ) e diminuiscono all'aumentare di  $ab1$ . I valori massimi, nell'intervallo definito nella equazione 2.1 risultano:

$$A_{r,Max} \approx 65 \text{ N} \quad \text{per } \alpha = 0^\circ \text{ e } ab1 = 0.3 \text{ m}$$

$$B_{r,Max} \approx 100 \text{ N} \quad \text{per } \alpha = 0 \text{ deg} \quad \text{e} \quad ab1 = 0.3 \text{ m}$$

Tali valori, che corrispondono a forze peso inferiori o uguali a 10 kg, rientrano nei limiti ammessi in [4] per il 99.9% di popolazione maschile e femminile.

Dagli andamenti emerge anche come l'operatore sia spinto ad aumentare la larghezza di impugnatura in modo da ridurre le forze necessarie a sostenere la macchina.

Si esegue la stessa analisi per l'abbacchiatore *Giulivo*<sup>®</sup>, per il quale si considerano i seguenti valori per massa totale  $M_{TOT}$ , massa del tubolare  $M_c$ , massa della testa  $M_t$ , stimate sulla base delle informazioni ricavabili dal catalogo:

$$M_{TOT} \approx 2.00 \text{ kg}$$

$$M_c \approx 0.35 \text{ kg}$$

$$M_t \approx 1.65 \text{ kg}$$

Si riportano in figura 2.10 i grafici ricavati per *Giulivo*<sup>®</sup> analoghi quelli di figura 2.8 e figura 2.9; gli andamenti sono simili ma i valori risultano superiori; quindi, sebbene la massa complessiva della macchina sia inferiore, la forza che deve esercitare l'operatore durante il suo utilizzo è maggiore a causa della peggiore distribuzione delle masse.

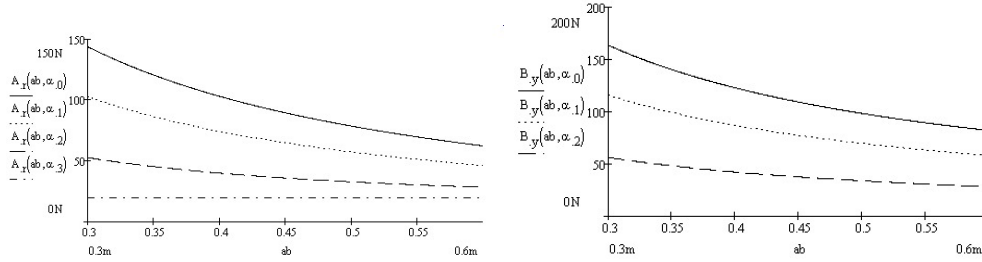


Figura 2.10: Reazioni risultanti in  $A$  e  $B1$  in funzione di  $ab1$  per alcuni valori di  $alpha$ :  $\alpha_1 = 45 \text{ deg}$ ,  $\alpha_2 = 70 \text{ deg}$ ,  $\alpha_3 = 90 \text{ deg}$

Si riportano i valori massimi e minimi delle reazioni per *Giulivo*

$$A_{r,Max} \approx 130 \text{ N} \quad \text{per } \alpha = 0 \text{ deg} \quad \text{e} \quad ab1 = 0.3 \text{ m}$$

$$B_{r,Max} \approx 150 \text{ N} \quad \text{per } \alpha = 0 \text{ deg} \quad \text{e} \quad ab1 = 0.3 \text{ m}$$

Si calcola poi la posizione del baricentro delle macchine che, posizionando l'origine del sistema di riferimento in  $A$  ha coordinata  $x$  (vedi figura 2.7) pari a:

$$x_G \approx 0.85 \text{ m}$$

Per *Giulivo* il baricentro ha coordinata

$$x_G \approx 2.30 \text{ m}$$

Per calcolare l'inerzia a rotazione del sistema si considera la somma delle inerzie dei singoli componenti; per quanto riguarda l'albero interno ed il carter si calcola l'inerzia a rotazione  $J_{G1}$  rispetto al loro baricentro ( $G_1$ ) situato a metà lunghezza, utilizzando l'equazione fornita in [20]:

$$J_{G1} = M_c \left( \frac{3r_{e,c}^2 + 3r_{i,c}^2 + L_c^2}{12} \right) + M_a \left( \frac{3r_{e,a}^2 + 3r_{i,a}^2 + L_a^2}{12} \right)$$

dove con i termini  $M$  e  $r$  si indicano le masse ed i raggi dei tubi, con i pedici  $c$  ed  $a$  si indicano le grandezze riferite rispettivamente al carter esterno ed all'albero interno, mentre con i pedici  $e$  ed  $i$  si sono indicati i raggi ( $r$ ) esterni ed interni dei due tubi.

Si calcola quindi l'inerzia a rotazione di *Alice* rispetto a  $G_P$ , utilizzando il Teorema di *Huyghens*, e riferendosi per le grandezze indicate, alla figura 2.11:

$$J_{GP} = J_{G1} + (M_c + M_a)x_{GP}^2 + M_i x_{GP}^2 + M_f x_{GP}^2$$

Dall'andamento di  $J_{GP}$  in funzione di  $ab1$ , rappresentato in figura 2.12 si ha una ulteriore verifica di quanto precedentemente affermato: il momento di inerzia tende a diminuire all'aumentare dell'ampiezza della presa e il minimo si ha quando il punto  $G_P$  coincide con il baricentro della struttura.

I valori massimo e minimo del momento di inerzia per le ampiezze di presa definite nella equazione 2.1 sono i seguenti:

$$J_{\text{Max}} \approx 4.9 \text{ kgm}^2$$

$$J_{\text{Min}} \approx 4.2 \text{ kgm}^2$$

Eseguendo la stessa analisi su *Giulivo* anche i valori del momento di inerzia risultano notevolmente più alti; infatti, sebbene rispetto all'asse baricentrico il momento di inerzia della macchina sia minore, essendo la distanza tra baricentro e punti di presa molto più alta, se ne ricavano dei valori massimi e minimi per  $J$  aumentati di circa il 50% rispetto ad *Alice*. Il dettaglio dei calcoli eseguiti e dei risultati sono riportati in appendice A

$$J_{\text{Max}} \approx 7.5 \text{ kgm}^2$$

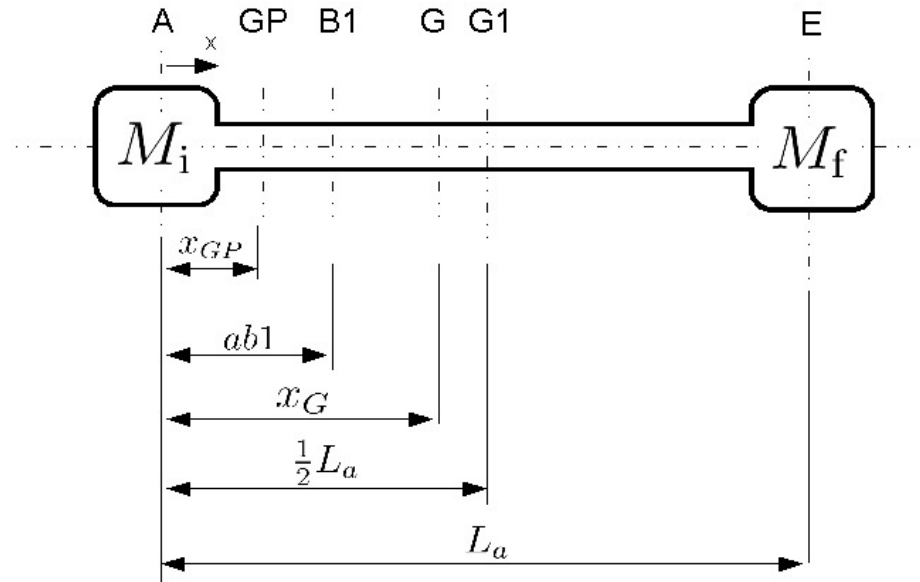


Figura 2.11: Indicazione delle grandezze per il calcolo dell'inerzia a rotazione

$$J_{\text{Min}} \approx 6.5 \text{ kgm}^2$$

Da questa analisi emerge come non sia conveniente posizionare il motoriduttore sulla testa. Sebbene in tali modelli il peso della macchina risulti complessivamente inferiore, la sua maneggevolezza ne risulta peggiorata (figura 2.12), in modo particolare quando si lavorano fronde più alte delle piante e l'ampiezza della presa tende a diminuire. Non solo, una configurazione di questo tipo, spinge l'operatore ad aumentare l'ampiezza della presa, allontanandolo dalle condizioni di ergonomia e portandolo ad un più rapido affaticamento. Considerazioni analoghe possono essere fatte per tutti gli

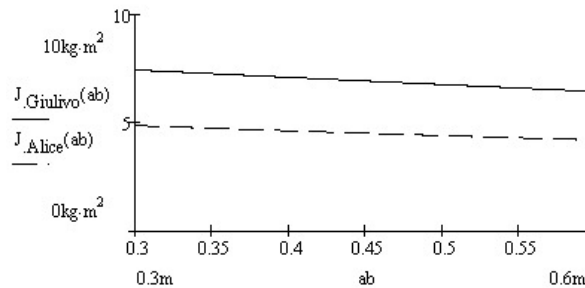


Figura 2.12: Andamento di  $J_{GP}$  in funzione di  $ab1$  per Alice e Giulivo

abbacchiatori aventi motoriduttore montato sulla testa.

## 2.3 Analisi dinamica

Come già accennato nel paragrafo 1.1, l'abbacchiatore *Alice*<sup>©</sup>, durante il funzionamento, manifesta delle vibrazioni che si ripercuotono sulla presa e sulle mani dell'operatore. Sebbene tali vibrazioni siano di entità ridotta e non pregiudichino il comportamento della macchina, possono accentuare l'affaticamento del personale e diminuire il comfort di utilizzo. Si esegue quindi l'analisi dinamica della macchina ed in particolare della trasmissione in modo da descriverne con sufficiente approssimazione il comportamento. Tali modelli verranno parametrizzati rispetto ai principali parametri progettuali potendo così fare delle previsioni che forniscano delle indicazioni per le modifiche da apportare alla trasmissione.

Il sistema di trasmissione, già descritto nel paragrafo 2, è rappresentato in figura 2.13; partendo da un sistema notevolmente semplificato, si aggiungono mano a mano elementi allo schema in modo da calcolare le frequenze proprie con sempre miglior approssimazione. In particolare si considerano dapprima il carter e l'albero interno separatamente e poi il sistema nel suo complesso, includendo gli effetti dovuti alla presa dell'operatore. È necessario inoltre uno studio dei cuscinetti in modo da determinare la loro rigidità e simulare con sufficiente approssimazione l'accoppiamento tra il carter e l'albero di trasmissione (paragrafo 2.3.1).

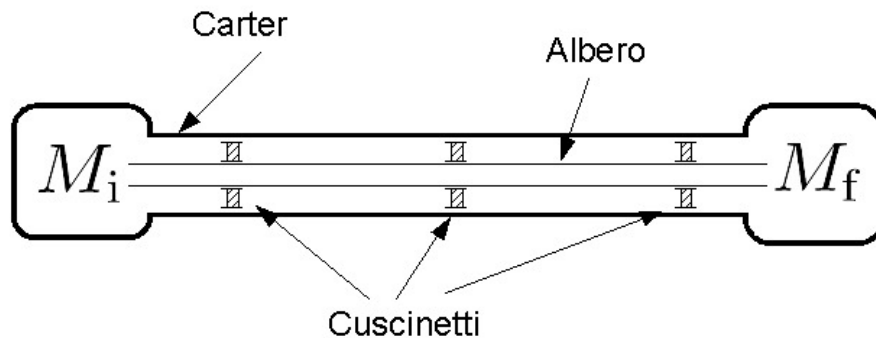


Figura 2.13: Schematizzazione dell'abbacchiatore *Alice*<sup>©</sup>

L'analisi viene eseguita secondo due approcci: il primo (paragrafo 2.3.3) di tipo analitico implementato su *Mathcad*<sup>©</sup>, utilizza l'equazione della linea elastica dinamica e permette di ottenere le frequenze proprie e la risposta

dinamica utilizzando la sovrapposizione modale; nel secondo (paragrafo 2.3.4) si esegue uno studio agli elementi finiti utilizzando il software *Ansys*<sup>©</sup>.

### 2.3.1 Rigidezza dei cuscinetti

I cuscinetti che vincolano l'albero di trasmissione al carter sono stati progettati per avere una bassa rigidezza; questo è imposto da esigenze di accoppiamento con il carter che ha delle tolleranze poco stringenti sul diametro interno. Per consentire il montaggio ed il corretto funzionamento, i cuscinetti devono potersi adattare alle irregolarità geometriche e dimensionali del carter.

Considerando la geometria del componente si può schematizzare il collegamento con quattro molle. La rigidezza di ciascuna molla sarà data dalla rigidezza del tratto di cuscinetto sottoposto a deformazione; il modello tridimensionale e le schematizzazioni del cuscinetto sono rappresentate in figura 2.14.

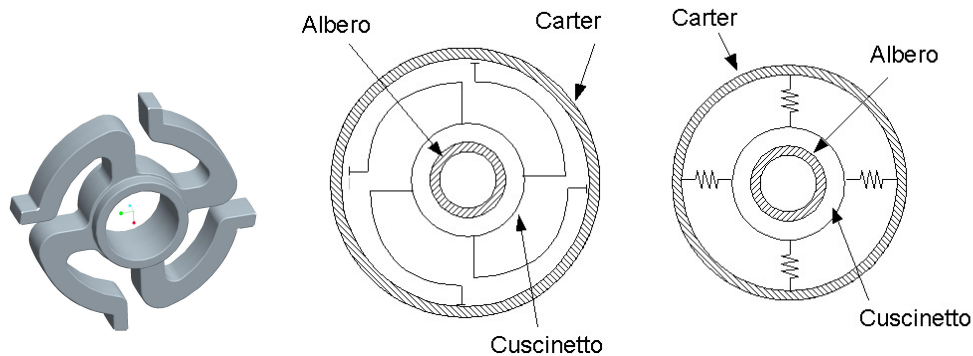


Figura 2.14: Modello tridimensionale e schematizzazione del cuscinetto

Si studia quindi la rigidezza di ciascuno dei quattro tratti; si considera applicato un carico unitario nel punto di contatto con il carter e si valuta lo spostamento che ne deriva. Si tiene conto degli effetti deformativi della flessione secondo la teoria delle travi curve seguendo la trattazione seguita in [21] e si calcolano gli effetti di taglio e sforzo normale per valutarne l'influenza.

Si ricavano dapprima le caratteristiche di sollecitazione sia per il tratto curvo (pedice  $c$ ) che per il tratto rettilineo (pedice  $r$ ) di trave rappresentati

in figura 2.15 dove si riportano anche le altre grandezze utilizzate.

$$M_c(z) = PR \cos\left(\frac{z}{R}\right) - Pb$$

$$T_c(z) = P \sin\left(\frac{z}{R}\right)$$

$$N_c(z) = P \cos\left(\frac{z}{R}\right)$$

$$M_r(z) = Pz$$

$$T_r(z) = P$$

$$N_r(z) = 0$$

Una volta ricavate le caratteristiche, integrando si ricava il lavoro di defor-

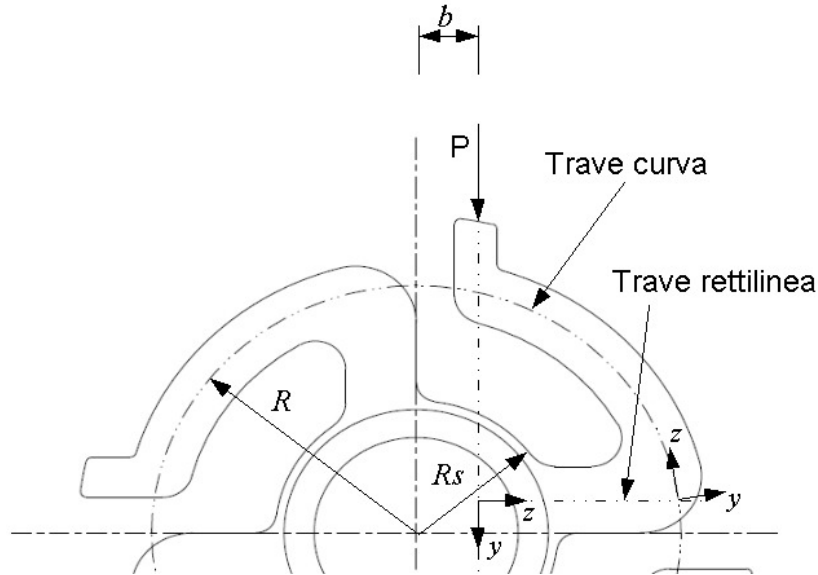


Figura 2.15: Dimensioni dei cuscinetti

mazione:

$$L_{f,r} = \frac{1}{2EI} \int M_r(z)^2 dz$$

$$L_t = \frac{1}{\frac{2G_t A}{\chi_t}} \int T(z)^2 dz$$

$$L_n = \frac{1}{2EA} \int N(z)^2 dz$$

dove  $E$  è il modulo elastico,  $I$  il momento di inerzia della sezione,  $A$  l'area della sezione,  $G_t$  il modulo di rigidezza tangenziale,  $\chi_t$  il fattore di taglio per



una sezione rettangolare; gli estremi di integrazione si impongono considerando l'inizio e la fine della travi tenendo conto della posizione dell'origine dei sistemi di riferimento relativi al tratto curvo e rettilineo rappresentati in figura 2.15.

Per quanto riguarda il tratto curvo di trave si utilizza il procedimento riportato in [21] in cui si definisce con  $e$  lo spostamento dell'asse neutro rispetto alla fibra baricentrica:

$$e = R - \frac{A}{\int dA/\rho} \quad (2.7)$$

Le tensioni hanno andamento:

$$\sigma_{zz}(z, y) = \frac{M(z)}{eA} \frac{y}{y + (R - e)} \quad (2.8)$$

Il lavoro di deformazione a flessione del tratto curvo di trave risulta:

$$L_{f,c} = s \int \left( \int \frac{\sigma_{zz}(z, y)}{E} dy \right) dz \quad (2.9)$$

Una volta calcolato il lavoro totale di deformazione si ricava lo spostamento  $\delta$  e quindi la rigidezza dei cuscinetti  $k_c$  che risulta:

$$k_{l,c} \approx 11.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (2.10)$$

Da analisi e test sperimentali precedentemente eseguiti da *Scienza Macchinale S.r.l.* era stato ricavato un valore della rigidezza pari a 10 N/mm in accordo con il valore ricavato.

Considerando che ci sono in ogni direzione due *molle* di rigidezza  $k_{l,c}$  disposte secondo uno schema di tipo *parallelo*, la rigidezza complessiva di ciascun cuscinetto nelle due direzioni risulta pari a:

$$k_c \approx 23 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (2.11)$$

Nel calcolo si è tenuto conto oltre agli effetti deformativi della flessione anche degli effetti, trascurabili, di taglio e carico normale. Calcolando la rigidezza escludendo tali effetti, il cui lavoro di deformazione risulta di due ordini di grandezza inferiore al corrispondente flessionale, i risultati ottenuti sono coincidenti. In appendice B si riporta il file di calcolo completo realizzato tramite il software *Mathcad*®.

### 2.3.2 Analisi della forzante

Sono presenti diverse forzanti che agiscono sulla macchina come l'irregolarità del moto del motore, i carichi indotti dall'operatore attraverso l'azione di pettinatura delle chiome, eventuali urti e carichi accidentali improvvisi, . . . . Tra tutti i carichi agenti risulta però prevalente l'azione del moto dei cinematismi ed i carichi prodotti dal moto del baricentro degli organi rotanti. Gli altri carichi, infatti, sono di entità notevolmente inferiore e, soprattutto hanno frequenze molto lontane dalle condizioni di risonanza; dipendono inoltre dalle condizioni di utilizzo della macchina e sono difficilmente quantificabili, ci si limita dunque ad una analisi della forzante indotta dal moto della testa della macchina trascurando eventuali carichi accidentali ed aleatori.

La forzante, di tipo periodico, è indotta dal moto degli organi di trasmissione e dei pettini della testa. Il baricentro degli organi rotanti, infatti, si muove in un piano seguendo una traiettoria di tipo ellittico.

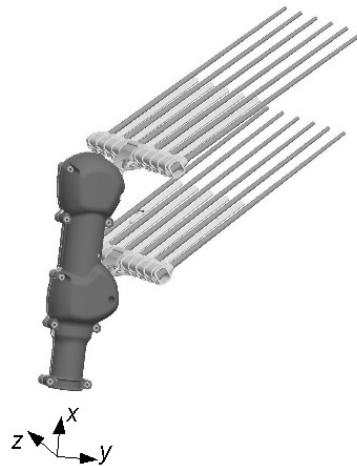


Figura 2.16: Testa di *Alice*

I dati relativi a tali spostamenti sono stati precedentemente analizzati da *Scienza Macchinale S.r.l.* e ne sono state ricavate, per un periodo, la coordinata  $x$  e  $y$  del baricentro in funzione del tempo (vedere figura 2.17). Come sistema di riferimento, in questo caso si assume il sistema della testa, rappresentato in figura 2.16 ed avente  $x$  disposta in direzione dell'asse della trasmissione e  $y$  e  $z$  nelle due direzioni perpendicolari. Il valore della pulsazione della forzante è pari alla velocità di rotazione dell'albero di trasmissione, si ricavano quindi i massimi valori di accelerazione per la massima velocità di funzionamento pari a 1100 rpm.

Una volta acquisiti i dati, per poter eseguire un'analisi della forzante,

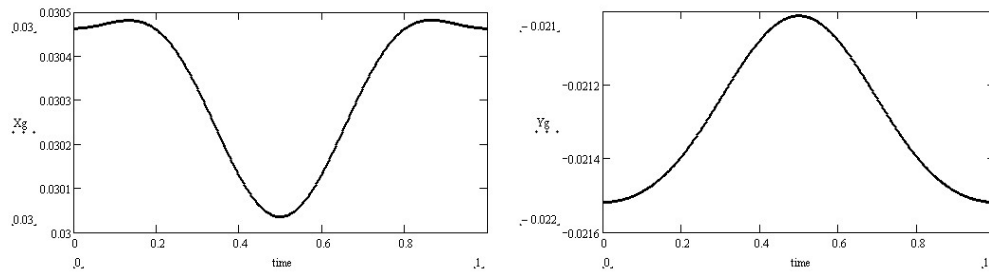


Figura 2.17: Posizione del baricentro degli organi rotanti in direzione  $x$  ed  $y$  in funzione del tempo

è necessario trovare una funzione che approssimi con accuratezza sufficiente l'andamento reale delle coordinate del baricentro. A tale scopo, essendo la forzante di tipo periodico, si utilizza lo sviluppo in serie di *Fourier*. Si considera cioè la funzione come sovrapposizione di una serie di funzioni periodiche di frequenze crescenti; infatti una generica funzione periodica di periodo  $T = 2\pi/\omega$ , può essere rappresentata dalla serie:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (2.12)$$

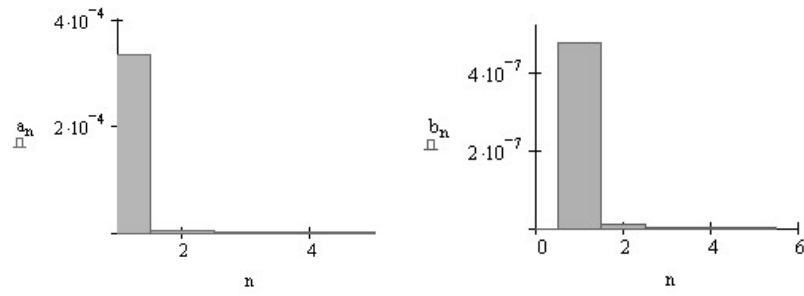
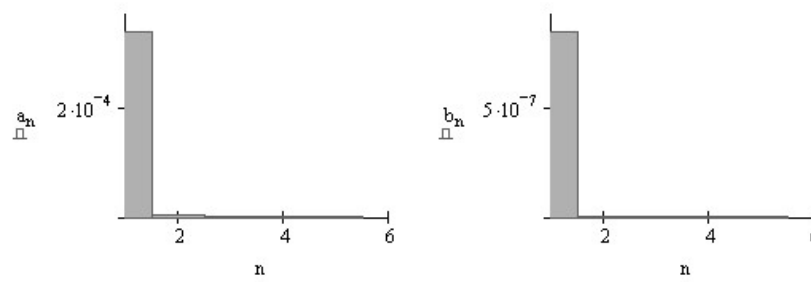
Nella pratica si dovrà interrompere la sommatoria ad un termine finito, tale da approssimare con sufficiente accuratezza la funzione. Si calcolano quindi dapprima il coefficiente  $a_0$  e poi  $a_n$  e  $b_n$  per  $n = 1 \dots 5$ . A tale scopo si utilizzano le equazioni riportate in [20]:

$$a_n = \left(\frac{2}{\tau}\right) \int_0^{\tau} F(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \left(\frac{2}{\tau}\right) \int_0^{\tau} F(t) \sin n\omega t dt$$

dove si è posto:  $\tau = 2\pi/\omega$ .

Dai valori ottenuti rappresentati in figura 2.18 ed in figura 2.19 emerge come sia sufficiente utilizzare esclusivamente il primo termine della sommatoria per entrambe le funzioni; già per  $n = 2$  infatti i valori dei coefficienti di Fourier sono di un ordine di grandezza inferiori a quello che si hanno per  $n = 1$  e quindi risultano del tutto trascurabili non comportando significative variazioni sulla funzione globale ottenuta; analoga considerazione può essere fatta per i termini  $b_n$ : già il primo termine infatti assume valori talmente bassi ed inferiori agli altri di diversi ordini di grandezza, da essere del tutto trascurabile nell'analisi della forzante.

Figura 2.18: Coefficienti di Fourier per gli spostamenti in direzione  $x$ Figura 2.19: Coefficienti di Fourier per gli spostamenti in direzione  $y$

Si ottengono quindi le seguenti funzioni che rappresentano gli spostamenti del baricentro nelle due direzioni, dove  $a_0$  ed  $a_1$  sono i coefficienti di Fourier ricavati per le funzioni in direzione  $x$  ed  $y$ :

$$x_g(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t$$

$$y_g(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t$$

Si riportano in figura 2.20 le funzioni ottenute rappresentate in linea tratteggiata e le funzioni originali in tratto continuo; l'approssimazione è accettabile e, comunque, cautelativa in quanto i massimi e minimi, le pendenze e le accelerazioni risultano leggermente maggiori rispetto ai dati originali.

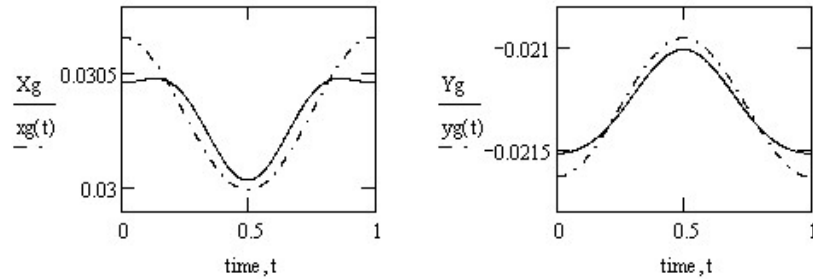


Figura 2.20: Moto del baricentro degli organi rotanti in direzione  $x$  e  $y$

A questo punto, considerando una velocità di rotazione  $\omega$  pari a 1100 rpm ed essendo la massa delle parti rotanti pari a  $M_r = 0.8$  kg è possibile calcolare le accelerazioni e le componenti della forzante che hanno andamento del tipo:

$$F(t) = -M_r \omega^2 a_1 \cos \omega t$$

ed in particolare assumono i seguenti valori massimi:

$$F_{x,\max} \approx 1.8 \text{ N}$$

$$F_{y,\max} \approx 3.6 \text{ N}$$

Dall'analisi emerge come la forza sia disposta su un piano ed abbia componente nulla fuori dal piano  $xy$ ; si potrà quindi schematizzare il sistema nel piano, anche tenendo conto delle simmetrie presenti.

### 2.3.3 Modello analitico

In un primo approccio, si studia il comportamento dinamico della struttura utilizzando un modello analitico semplificato.

I tubi sono di elevata lunghezza e diametri contenuti, il rapporto  $D/L$  per il carter vale:

$$\frac{D_c}{L_c} \approx 0.017 \quad (2.13)$$

si può quindi modellare la struttura utilizzando la teoria della travi essendo il rapporto  $D/L \ll 1$  come emerge dall'equazione 2.13. Si considerano le masse fissate rigidamente sul carter e si trascurano, in una prima analisi gli effetti del taglio, del carico assiale e dell'inerzia a rotazione; si procederà poi ad una verifica dell'influenza di tali effetti per giustificare tale approssimazione.

Tenendo conto della forza eccitatrice, di tipo alternato e disposta sul piano  $yz$  di figura 2.21, si considerano le travi sottoposte ad azioni flessionali. Come verifica si calcolano anche le frequenze proprie torsionali ed assiali delle travi in modo da escludere l'influenza di tali frequenze sul comportamento dinamico della struttura nell'intorno delle condizioni di funzionamento.

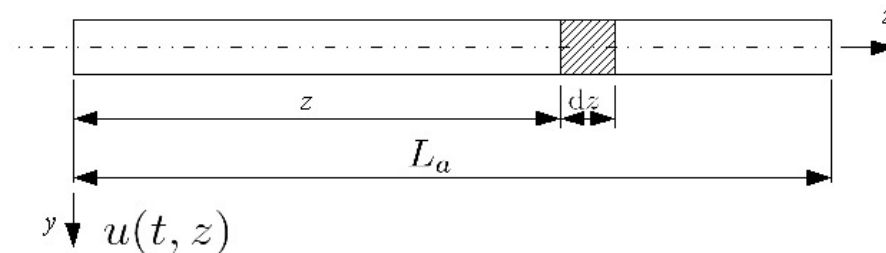


Figura 2.21: Trave sottoposta a vibrazioni flessionali

Seguendo il procedimento riportato in [22], si considera l'elemento infinitesimo di trave di sezione uniforme rappresentato in figura 2.22 e se ne scrive l'equazione di equilibrio dinamico. Si indica con  $u(z, t)$  lo spostamento dell'asse della trave in direzione  $y$ , relativo alla coordinata generica  $z$  e funzione del tempo  $t$ . Le forze d'inerzia rappresentano per la trave un carico distribuito  $q$ :

$$q = \rho A \ddot{u}$$

Escludendo lo smorzamento si ottiene:

$$\rho A \ddot{u} = -EI u^{IV}$$

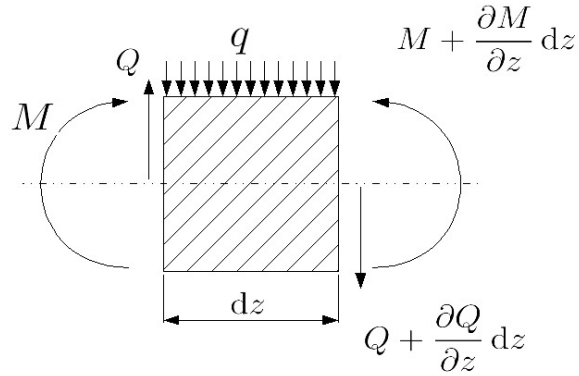


Figura 2.22: Elemento di trave sottoposto a vibrazioni flessionali

dove, per semplicità di notazione, si omettono gli argomenti della funzione  $u(z, t)$ ,  $I$  rappresenta il momento di inerzia della sezione della trave rispetto a  $z$  e dove si indicano con i punti le derivate rispetto al tempo e con numeri romani le derivate rispetto alla coordinata  $z$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u^{IV}$$

si definisce quindi

$$\nu = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2.14)$$

e si ottiene l'equazione differenziale:

$$\ddot{u} = -\nu^2 u^{IV} \quad (2.15)$$

Ponendo  $u$  nella forma:

$$u(t, z) = T(t)Z(z) \quad (2.16)$$

si può risolvere l'equazione con il metodo della separazione delle variabili ottenendo due equazioni differenziali, tra loro disaccoppiate:

$$\begin{aligned} \ddot{T} + \omega^2 T &= 0 \\ \nu^2 Z^{IV} - \omega^2 Z &= 0 \end{aligned}$$

dove  $\omega$  rappresenta la pulsazione del moto armonico della parte temporale  $T$  della soluzione  $u$ ; le equazioni hanno soluzione del tipo:

$$\begin{aligned} T &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ Z &= C \cos \chi z + D \sin \chi z + E \cosh \chi z + F \sinh \chi z \end{aligned}$$

dove i sette parametri  $\omega, A, B, C, D, E, F$  devono essere definiti sulla base delle condizioni iniziali ed al contorno e si è posto:

$$\chi = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (2.17)$$

### 2.3.3.1 Frequenze proprie flessionali

A questo punto, dividendo la struttura in un numero sufficiente di tratti di trave ed imponendo le condizioni al contorno, è possibile calcolare le frequenze proprie della struttura. Si ottiene infatti un sistema di equazioni lineare omogeneo nei quattro coefficienti:  $C, D, E, F$ .

Escludendo la soluzione nulla, che rappresenta la trave ferma ed in equilibrio nella condizione non deformata, si impone che il determinante dei coefficienti sia nullo. I valori di  $\chi$  che si ricavano permettono di ottenere, sulla base dell'equazione 2.17, le pulsazioni proprie della struttura.

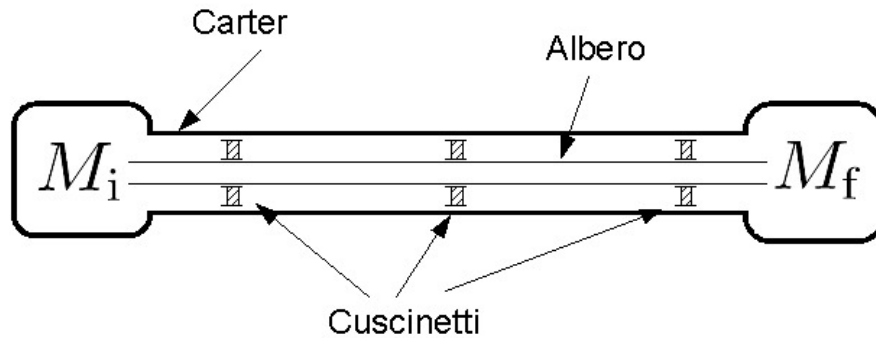


Figura 2.23: Schema della trasmissione di *alice*

Il sistema nel suo complesso può essere schematizzato come nella figura 2.23; partendo da un sistema semplificato si vanno via via aggiungendo elementi allo schema in modo da calcolare le frequenze proprie con approssimazione sempre migliore; si considerano in una prima analisi carter ed albero interno separatamente e poi si analizza la struttura nel suo complesso tenendo conto dei parametri di presa dell'operatore e della rigidità dei cuscinetti.



### 2.3.3.1.1 Albero interno

Si considera dapprima esclusivamente l'albero interno di trasmissione secondo tre schemi di vincolo denominati rispettivamente  $B1$ ,  $B2$ ,  $B3$ . Un approccio di questo tipo è utile in quanto, oltre ad avere una prima verifica dei dati numerici, permette di confrontare i risultati ottenuti con diversi schemi di vincoli e valutarne così gli effetti sulle frequenze proprie.

#### 2.3.3.1.1.1 Schema B1

Nel primo schema si considera l'albero non vincolato; si ottengono le prime frequenze proprie nulle che rappresentano gli spostamenti rigidi della struttura nei suoi gradi di libertà: traslazione in  $y$  e rotazione attorno a  $x$ , figura 2.24.

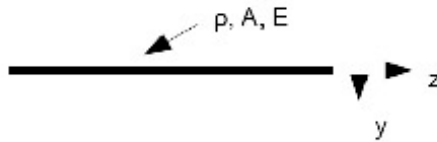


Figura 2.24: Schema B1

Si considera un unico tratto di trave a cui si impongono le condizioni al contorno corrispondenti agli estremi liberi:

$$u^{III} = u^{II} = 0 \quad (2.18)$$

che equivale ad imporre taglio e momento nullo alle estremità.

Esclusi i moti rigidi, le prime  $n$  frequenze proprie sono riportate in tabella 2.1 in rad/s, in Hza ed in rotazioni per minuto (rpm).

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	79	755	12.6
2	218	2085	34.7
3	428	4090	68.1

Tabella 2.1: Frequenze proprie schema B1

Si riporta in figura 2.25 la prima forma modale che coincide con gli andamenti riportati in [22]. Tale corrispondenza si verifica anche per le forme modali superiori.

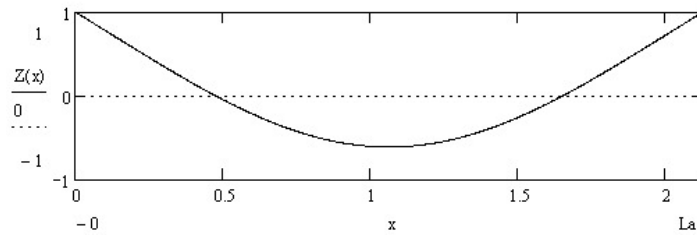


Figura 2.25: Prima forma modale per lo schema B1

### 2.3.3.1.1.2 Schema B2

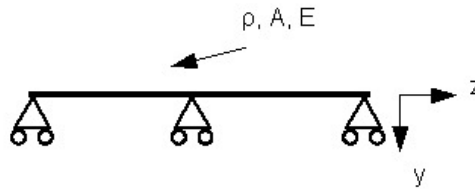


Figura 2.26: Schema B2

Nel secondo schema si vincola l'albero tramite tre appoggi rigidi come rappresentato in figura 2.26. In questo caso si divide l'albero in due tratti di trave  $u_1$  e  $u_2$ ; In corrispondenza di ciascun appoggio si impongono pari a zero lo spostamento ed il momento:

$$\begin{aligned} u^I &= 0 \\ E I u^{II} &= 0 \end{aligned}$$

Inoltre per l'appoggio centrale si impone la coincidenza di rotazioni e momento per i due tratti di trave attraverso le equazioni:

$$\begin{aligned} u_1^I &= u_2^I \\ u_1^{II} &= u_2^{II} \end{aligned}$$

Le frequenze proprie ricavate sono riportate in tabella 2.2 e le prime forme modali in figura 2.27; è evidente la congruenza con i vincoli imposti di spostamento nullo in corrispondenza dei ciscinetti e la continuità dei tratti di trave sia per gli spostamenti che per le rotazioni.

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	155	1480	24.7
2	243	2320	38.6
3	621	5930	98.9

Tabella 2.2: Frequenze proprie schema B2

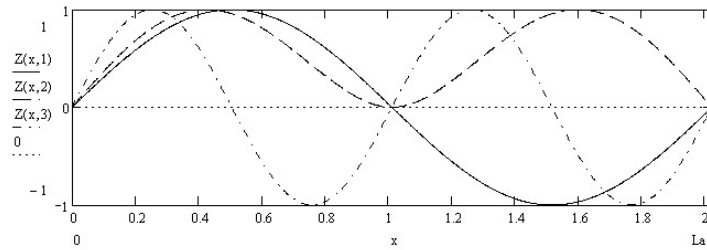


Figura 2.27: Prime tre forme modali schema B2

### 2.3.3.1.1.3 Schema B3

Nel terzo schema si tiene conto anche della rigidità dei cuscinetti calcolata al paragrafo 2.3.1. Lo schema dei vincoli è riportato in figura 2.28.

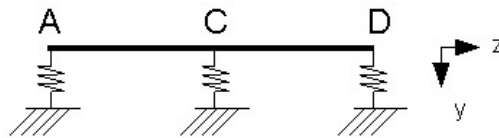


Figura 2.28: Schema B3

In questo caso le condizioni al contorno risultano, per il punto A:

$$\begin{aligned} u_1^{III} &= 0 \\ EIu_1^{III} + k_c u_1 &= 0 \end{aligned}$$

per il punto D:

$$\begin{aligned} u_2^{III} &= 0 \\ EIu_2^{III} - k_c u_2 &= 0 \end{aligned}$$

ed infine per il punto C:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_1^I &= u_2^I \\ u_1^{II} &= u_2^{II} \\ EIu_1^{III} - k_c u_1 - EIu_2 &= 0 \end{aligned}$$

Considerando che *Alice*<sup>©</sup> ha due velocità di funzionamento, pari a 1100 rpm e 900 rpm, da questa analisi emerge come le velocità critiche (riportate in tabella 2.3) siano, in prima approssimazione, sufficientemente lontane da quelle di esercizio. Bisogna tenere però conto del fatto che si è considerato l'albero fissato elasticamente su un carter infinitamente rigido ed immobile nello spazio. Nelle analisi successive, ed in particolare nel paragrafo 2.3.3.1.3 si esamineranno le frequenze proprie del sistema nel suo complesso.

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	154	1470	24.5
2	228	2180	36.3
3	601	5740	95.6

Tabella 2.3: Frequenze proprie schema B3

Altro dato interessante è la sostanziale non influenza della rigidità dei cuscinetti sulle frequenze proprie; confrontando i grafici ed i risultati ottenuti (tabella 2.3 e tabella 2.2), si nota come le frequenze proprie si possano considerare, dal punto di vista ingegneristico, coincidenti e come le forme modali (figura 2.29 e figura 2.27) ne risultino soltanto lievemente modificate. Essendo il file di calcolo, realizzato con *Mathcad*<sup>©</sup>, parametrizzato rispetto alla rigidità dei cuscinetti  $k_c$ , il calcolo può essere eseguito anche per rigidità diverse; impostando una rigidità molto elevata si ottengono i risultati già descritti nel paragrafo 2.3.3.1.1.2 (albero su tre appoggi), al contrario, annullando la rigidità dei cuscinetti i risultati coincidono con quelli descritti nel paragrafo 2.3.3.1.1.1 (albero non vincolato); tutto questo ad ulteriore conferma della correttezza dei calcoli eseguiti.

È interessante infine valutare l'andamento della prima frequenza propria al variare del numero di appoggi; già nel progetto di *Scienza Machinale S.r.l.* erano stati introdotti tre cuscinetti in modo da innalzare le frequenze proprie dell'albero interno; dato il ridotto costo in termini di progetto e di

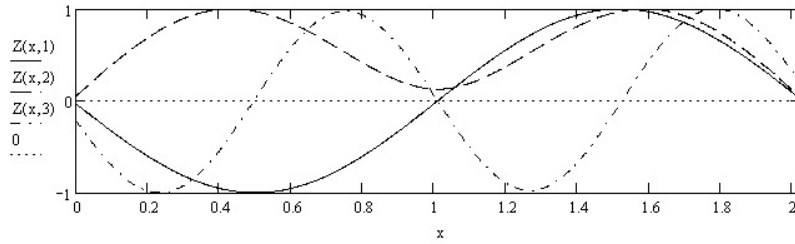


Figura 2.29: Prime tre forme modali schema B3

realizzazione conseguente all'aggiunta di uno o più cuscinetti, è utile valutarne le conseguenze sulla prima frequenza propria sia per l'albero interno, sia, in una seconda fase, per il sistema completo. Per tale analisi si rimanda al paragrafo 3.1.

### 2.3.3.1.2 Carter

Si passa ora all'analisi dinamica del carter ed al calcolo delle sue frequenze proprie; sul carter sono vincolate due masse alle due estremità. Si considerano alcuni schemi di vincolo, via via più complessi, che indicheremo con la lettera  $A$ .

#### 2.3.3.1.2.1 Schema A1

Nel primo schema si considera il carter libero, senza nessun tipo di vincolo, come rappresentato in figura 2.30; per le ragioni viste nel paragrafo 2.3.3.1.1.1, si escludono le prime frequenze proprie nulle, che si riferiscono ai moti rigidi della struttura.

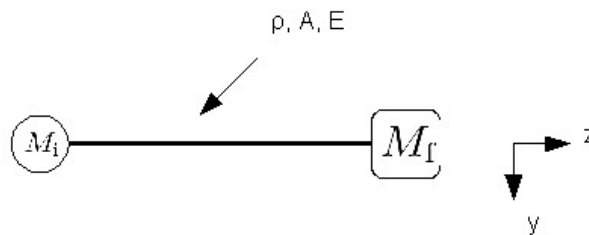


Figura 2.30: Schema A1

Avendo due masse vincolate alle estremità dell'albero, le condizioni al

contorno, in questo caso saranno:

$$M\ddot{u} + EIu''' = u'' = 0$$

come riportato in [22], dove ad  $M$  si sostituisce per le due estremità, il valore corrispondente e pari a  $M_i$  e  $M_f$ . Si riportano in tabella 2.4 le prime frequenze proprie ricavate ed in figura 2.31 le corrispondenti forme modali.

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	153	1460	24.3
2	582	5560	92.7
3	1290	12400	206.6

Tabella 2.4: Frequenze proprie schema A1

Già da questa prima analisi emerge come le frequenze proprie del carter esterno e quelle dell'albero interno abbiano valori confrontabili tra loro, questo può portare ad una reciproca influenza delle due strutture che dovranno quindi essere considerate e studiate complessivamente, tenendo conto delle interazioni tra i due sistemi. Questa analisi è affrontata nel paragrafo 2.3.3.1.3.

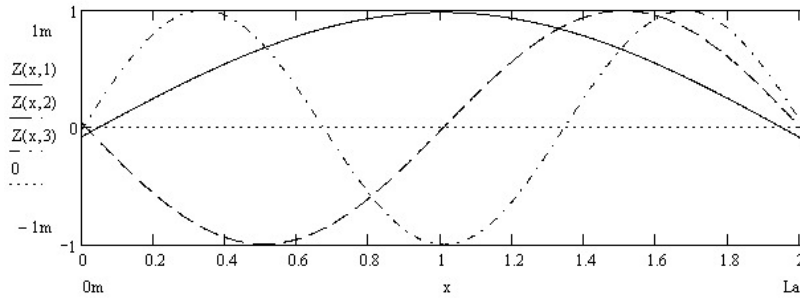


Figura 2.31: Prime tre forme modali schema A1

### 2.3.3.1.2.2 Schema A2

Nel secondo schema si considera il carter appoggiato rigidamente nei punti di presa come rappresentato in figura 2.32;

Sebbene questo schema di vincoli non rappresenti le condizioni fisiche reali di utilizzo della macchina, è comunque utile studiarne il comportamento in

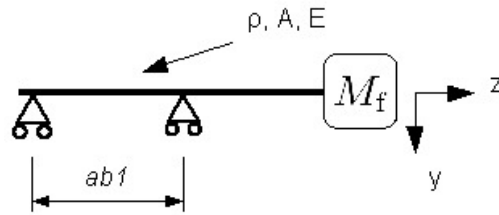


Figura 2.32: Schema A2

quanto fornisce delle utili indicazioni e può essere utilizzato come verifica dei risultati per i modelli più complessi.

Le condizioni al contorno sono analoghe a quanto descritto nel paragrafo 2.3.3.1.1.1 e riportato nell'equazione 2.18.

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	19.6	190	3.1
2	314.4	3000	50

Tabella 2.5: Frequenze proprie schema A2

Si riportano in tabella 2.5 le prime due frequenze proprie ottenute ed in figura 2.33 le corrispondenti forme modali.

In questa analisi la prima frequenza propria, che nei sistemi precedenti era pari a zero, risulta notevolmente bassa, con valori notevolmente inferiori alle condizioni di esercizio; si sono infatti eliminati i gradi di libertà della struttura, che risulta, in questa configurazione, vincolata isostaticamente.

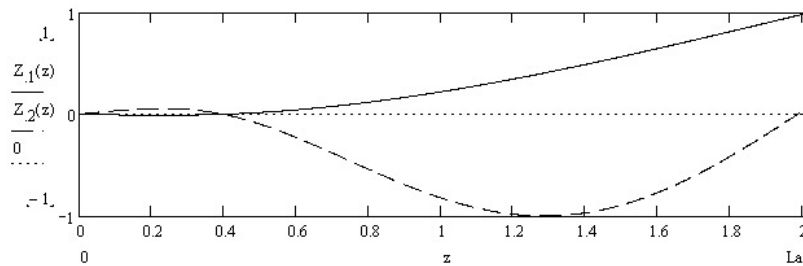


Figura 2.33: Prime due forme modali schema A2

### 2.3.3.1.2.3 Schema A3

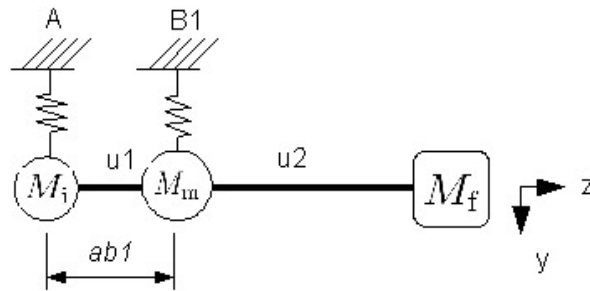


Figura 2.34: Schema A3

Si utilizza uno schema (vedi figura 2.34) che rappresenta con approssimazione migliore rispetto al precedente, la presa dell'operatore. Si utilizzano il modello, i valori di rigidezza, di massa e di apertura di presa ottenuti nel paragrafo 2.1; le condizioni al contorno sono analoghe a quelle imposte negli schemi *B3* e *A1*.

I risultati ottenuti dipendono dai parametri di presa scelti; si riportano in tabella 2.6 le frequenze proprie ottenute per parametri di presa pari a:  $ab1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $M_m = 0.4 \text{ kg}$ ,  $k_p = 100 \text{ N/m}$

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	1.3	15	0.2
2	8.0	75	1.3
3	126	1210	20.2
4	416	3970	66.2

Tabella 2.6: Frequenze proprie schema A3

Anche in questo caso si ottengono le prime due frequenze proprie con valori molto bassi di pulsazione; come si può notare anche dalle forme modali rappresentate in figura 2.35 questi modi propri coincidono con i moti rigidi della struttura; il carter cioè, non subisce deformazioni apprezzabili, ma cambia solo la sua posizione nello spazio. Considerando i valori di  $\omega_n$  che si ottengono, queste frequenze proprie, saranno trascurabili ai fini della valutazione della risposta dinamica: la frequenza eccitatrice infatti, risulta molto distante da quelle in esame, l'argomento verrà comunque approfondito nel paragrafo 2.3.3.7.3.

La terza e quarta forma modale, rappresentate in figura 2.36, presentano delle analogie evidenti con quelle ricavate per lo schema A1 riportate in figura 2.31; in particolare, abbassando la rigidezza di presa, le prime due



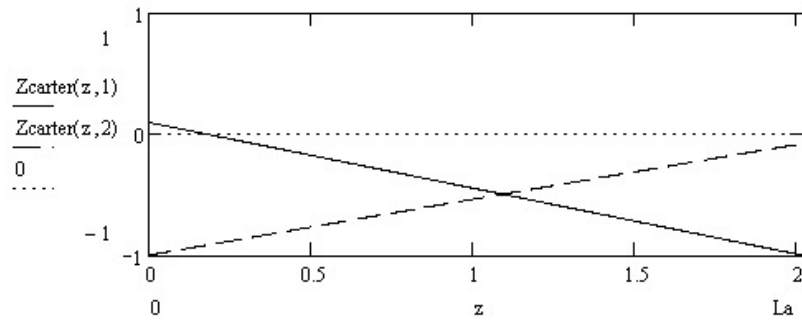


Figura 2.35: Prime due forme modali schema A3

frequenze proprie tendono ad annullarsi e le altre tendono a coincidere con i risultati ottenuti per lo schema A1. In direzione opposta, imponendo valori molto elevati di rigidità di presa, si ottengono gli stessi risultati dello schema A2. Questa congruenza dei risultati ottenuti rappresenta una prima verifica della correttezza dei modelli di calcolo e della loro implementazione su *Mathcad*<sup>®</sup> ed evidenzia l'utilità di giungere ad una modellazione con schemi complessi ed articolati, passando prima attraverso modelli semplici e facilmente verificabili.

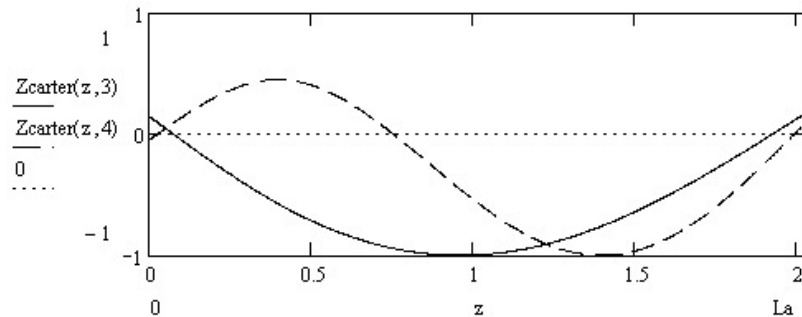


Figura 2.36: terza e quarta forma modale schema A3

Considerando i risultati ottenuti in questa analisi, emerge come la terza frequenza propria, di maggior interesse pratico, si avvicina alla frequenza di esercizio. Tale valore inoltre, è influenzato dai parametri di presa ed è interessante valutare le variazioni al variare di tali parametri.

In particolare per quanto riguarda la rigidità della presa, emerge come questa sia ininfluente sul valore di  $\omega_3$  e quindi sul comportamento dinamico della struttura, almeno nel campo di variabilità definito nel paragrafo 2.1; le condizioni peggiori si hanno, comunque, per valori bassi di rigidità, in

particolare, le differenze sono del tutto trascurabili per  $k_p < 100$  N/m. Si riportano in tabella 2.7 i valori di  $\omega$  in funzione di  $k_p$  avendo posto  $M_m = 0.4$  kg e  $ab1 = 0.4m$  kg (in tabella si riportano i valori numerici ricavati utilizzando un numero eccessivo di cifre significative, non congruente con le approssimazioni assunte; si sceglie di mantenere comunque tale notazione per mettere in evidenza le ridotte variazioni rilevate).

$k_p$ (N/m)	1	5	10	50	100	500	1000
$\omega_3$ (rpm)	1206	1207	1207	1208	1209	1221	1236

Tabella 2.7: Variazione della frequenza propria al variare di  $k_p$

Si passa ora a considerare l'influenza dell'ampiezza della presa sulla frequenza propria; si valuta la variazione considerando valori standard degli altri parametri ( $M_m = 0.4$  kg e  $k_p = 100$  N/m). Dai dati riportati in tabella 2.8 emerge come la frequenza propria tenda a diminuire al crescere di  $ab1$ ; la situazione critica si avrà quindi per la massima ampiezza di presa. È da sottolineare come per valori superiori a circa 500 mm la prima frequenza propria scenda al di sotto della forzante e quindi possano verificarsi delle condizioni di risonanza.

$ab1$ (mm)	300	350	400	450	500	550	600
$\omega_3$ (rpm)	1305	1255	1210	1165	1125	1090	1060

Tabella 2.8: Variazione della frequenza propria al variare di  $ab1$

Il valore della massa della mano dell'operatore tende ovviamente ad abbassare la frequenza propria all'aumentare della massa; per il campo di valori di  $M_m$  definiti,  $\omega$  assume valori prossimi alla frequenza di esercizio come riportato in tabella 2.9. Le condizioni peggiori, cioè quelle per cui la frequenza propria è minima, si hanno quindi per i seguenti valori dei parametri di presa:  $k_p = 1$  N/m,  $M_m = 0.6$  kg e  $ab1 = 0.6$  m; per questi valori si ottiene  $\omega_3 \approx 950$  rpm.

$M_m$ (kg)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
$\omega_3$ (rpm)	1260	1235	1210	1185	1165	1145	1125

Tabella 2.9: Variazione della frequenza propria al variare di  $M_m$

Da notare come in queste condizioni, il regime di funzionamento per entrambe le velocità di rotazione dell'albero di trasmissione (900 rpm e 1100 rpm), sia molto vicino alle condizioni di risonanza. Questo spiega le vibrazioni che

manifesta la macchina durante il funzionamento. Una prima indicazione che emerge dall'analisi è che risulta determinante la dinamica del carter esterno per determinare il comportamento di *Alice* e che quindi, presumibilmente, sarà più efficace un intervento di irrigidimento sul carter che non uno equivalente sull'albero interno. Uno studio più approfondito di tale aspetto viene effettuato alla luce dei risultati ottenuti dallo studio del sistema completo nel paragrafo 2.3.3.1.3

### 2.3.3.1.3 Sistema completo

Considerando la vicinanza delle frequenze proprie di carter ed albero, non si può escludere una reciproca influenza dei due sistemi per quanto riguarda il comportamento dinamico. Si studia allora il sistema nel suo complesso, secondo tre schemi di vincolo che definiamo *C1*, *C2*, *C3* descritti nei paragrafi seguenti.

#### 2.3.3.1.3.1 Schema C1

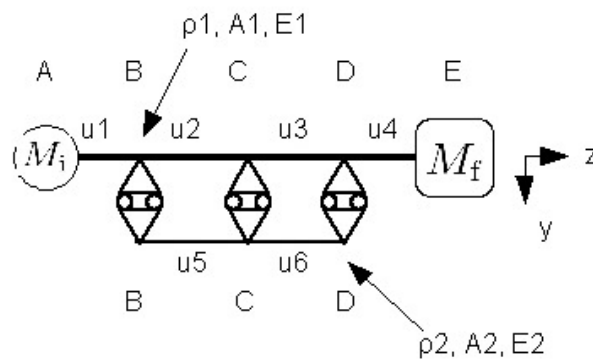


Figura 2.37: Schema C1

In questo primo schema rappresentato in figura 2.37, si considera il sistema non vincolato ed i cuscinetti infinitamente rigidi, modellati quindi come degli appoggi. Nella figura i due alberi sono rappresentati con assi paralleli ma non coincidenti al fine di permetterne la visualizzazione; nel modello di calcolo però, gli assi sono, ovviamente, coincidenti nella condizione non deformata. Si dovranno dividere gli alberi in sei di tratti di trave per poi imporre le condizioni al contorno; si hanno cinque punti singolari e si ottiene un sistema di 24 equazioni in altrettante incognite, annullando il determinante si possono ricavare le frequenze proprie del sistema. Oltre alle condizioni al

contorno già descritte negli schemi già visti, abbiamo alcuni punti singolari in cui convergono tre tratti diversi di trave. Come esempio si riportano le condizioni al contorno nel punto B di figura 2.37:

$$u_1 = u_2 = u_3 \quad (2.19)$$

$$u_1^I = u_2^I \quad (2.20)$$

$$u_1^{II} = u_2^{II} \quad (2.21)$$

$$u_5^{II} = 0 \quad (2.22)$$

$$E_c I_c u_1^{III} - E_c I_c u_2^{III} - E_a I_a u_5^{III} = 0 \quad (2.23)$$

condizioni analoghe si impongono per il punto D e C tenendo conto delle configurazioni e dei tratti di trave che vi confluiscono.

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	136	1300	21.6
2	174	1665	27.8
3	295	2815	47.0
4	582	5560	92.6

Tabella 2.10: Frequenze proprie schema C1

In tabella 2.10 si riportano le prime quattro frequenze proprie del sistema completo nelle condizioni di presa standard, si rappresenta in tratto continuo la deformata del carter e con linea tratteggiata la deformata dell'albero interno, la traccia a punti rappresenta la configurazione indeformata. Si nota come la prima frequenza sia inferiore alle prime frequenze proprie di carter ed albero interno considerati separatamente; si ha quindi la conferma di quanto precedentemente ipotizzato: l'interazione reciproca delle due strutture porta ad avere un comportamento dinamico diverso da quello dei due sistemi considerati separatamente. Non solo, i valori si avvicinano ulteriormente alle condizioni di risonanza. Assume così notevole importanza approfondire lo studio del sistema completo considerando sia la presa dell'operatore (paragrafo 2.3.3.1.3.2) che la rigidità dei cuscinetti (paragrafo 2.3.3.1.3.3).

Osservando la prima forma modale (figura 2.38) si può notare come la deformata del carter sia analoga a quella del caso non vincolato (schema A1) rappresentata in figura 2.31, la deformata dell'albero invece richiama la seconda forma modale rappresentata in figura 2.27; ci si aspetta quindi che un irrigidimento del carter contribuisca in modo maggiore all'innalzamento della prima frequenza propria rispetto ad un analogo irrigidimento dell'albero.

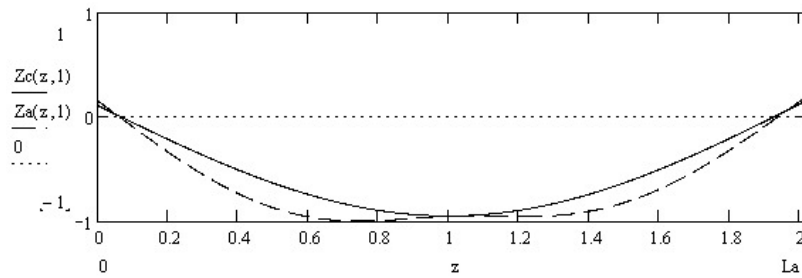


Figura 2.38: Prima forma modale schema C1

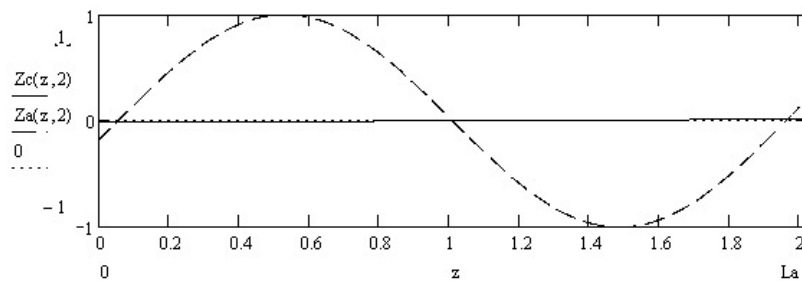


Figura 2.39: Seconda forma modale schema C1

Per quanto riguarda la seconda forma modale rappresentata in figura 2.39 si nota che il carter risulta quasi del tutto indeformato, mentre l'albero presenta un andamento corrispondente al primo modo proprio dello schema B2 (figura 2.27). Se ne deduce che per innalzare il valore della frequenza in esame si dovrà irrigidire l'albero interno, mentre risulterà pressoché ininfluente un intervento sul carter.

In generale si può osservare l'effetto dei vincoli imposti: nei punti B, C e D gli spostamenti di carter ed albero sono uguali; questo vincolo è stato imposto nelle condizioni al contorno come riportato nell'equazione 2.19.

### 2.3.3.1.3.2 Schema C2

Nel presente schema rappresentato in figura 2.40, si introduce l'elasticità dei cuscinetti che vengono schematizzati con delle molle di rigidezza  $k_c$ . La dinamica del sistema ne risulta solo parzialmente influenzata, le frequenze proprie (tabella 2.11) si modificano solo in piccola parte e possono considerarsi coincidenti, anche le forme modali risultano quasi del tutto invariate. Si può comunque notare in figura 2.41 l'effetto della diversità di vincolo imposto in particolare nel punto C, a metà lunghezza della trave in cui la posizione

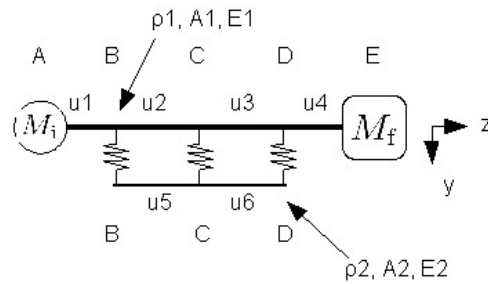


Figura 2.40: Schema C2

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	135	1290	21.5
2	174	1660	27.7
3	281	2685	44.8
4	582	5560	92.7

Tabella 2.11: Frequenze proprie schema C2

dell'asse di carter ed albero non coincidono ma risultano leggermente disassati in conseguenze dell'elasticità del cuscinetto imposta. Anche in questo caso si rappresenta in tratto continuo la deformata del carter, con linea tratteggiata la deformata dell'albero interno e con linea a punti la configurazione non deformata.

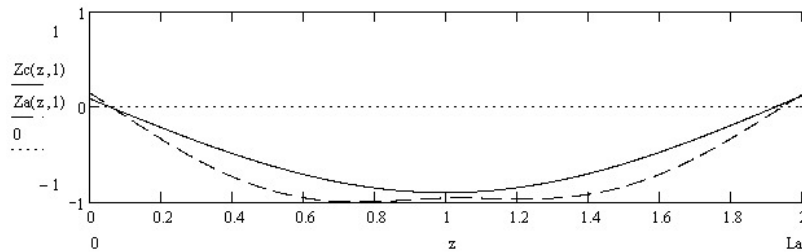


Figura 2.41: Prima forma modale schema C2

Dai risultati ottenuti emerge come la rigidità dei cuscinetti non influisca sulle frequenze proprie del sistema; un intervento su tale parametro non porterebbe significative modifiche al comportamento dinamico del sistema, almeno nei campi fisicamente realizzabili di rigidità del cuscinetto.

A scopo di verifica si può aumentare la rigidità  $k_c$  fino a valori molto

elevati; il comportamento del sistema diventa analogo allo schema C1 anche per quanto riguarda le forme modali; al contrario, diminuendo la rigidezza, i due sistemi tendono a disaccoppiarsi e portano ad instabilità numeriche ed i risultati perdono di significato fisico: i due sistemi andrebbero, in tal caso, studiati separatamente. Tali risultati rappresentano una prima conferma della correttezza dei modelli utilizzati e dei calcoli effettuati.

### 2.3.3.1.3.3 Schema C3

Questo schema è quello che più si avvicina alla configurazione reale della macchina nelle sue condizioni di funzionamento. Viene modellata la presa dell'operatore che agisce sul carter e la rigidezza dei cuscinetti sulla base delle analisi svolte al paragrafo 2.3.1 ed al paragrafo 2.1. I risultati ottenuti dipendono in modo significativo dai parametri di presa scelti, dopo una prima analisi nelle condizioni standard si considerano le variazioni dei parametri di presa e si valutano le conseguenze individuando la configurazione critica.

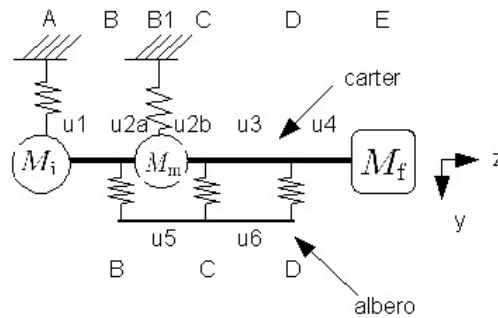


Figura 2.42: Schema C3

Lo schema è rappresentato in figura 2.42 ed è studiato utilizzando sette funzioni  $u(z, t)$  per cui saranno necessarie 28 condizioni al contorno con le quali impostare la matrice ed individuare gli zeri del determinante. Le condizioni imposte sono una combinazione di quelle già viste nei paragrafi precedenti per gli schemi semplificati e non si ritiene necessario riportarle.

Analizzando i risultati in tabella 2.12 emerge come siano presenti le frequenze proprie di tutti gli schemi precedentemente analizzati. Le prime due frequenze proprie rappresentano i moti indeformati di carter ed albero sulla rigidezza della presa descritte al paragrafo 2.3.3.1.2, le frequenze superiori hanno valori molto vicini a quelle già viste negli schemi C1 e C2; in particolare la terza frequenza propria è molto vicina alle condizioni di funzionamento, se poi si tiene conto del fatto che, modificando i parametri di presa, il valore può

$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rpm)	$\omega_n$ (Hza)
1	1	12	0.2
2	8	75	1.3
3	118	1130	18.8
4	174	1660	27.7
5	266	2545	42.4
6	415	3960	66.0

Tabella 2.12: Frequenze proprie schema C3

scendere ulteriormente, si possono avere delle risonanze durante il funzionamento della macchina. Tali risultati sono stati ottenuti imponendo i consueti valori standard dei parametri di presa che qui si ricordano:  $M_m = 0.4$  kg,  $k_p = 100$  N/m,  $ab1 = 0.4$  m.

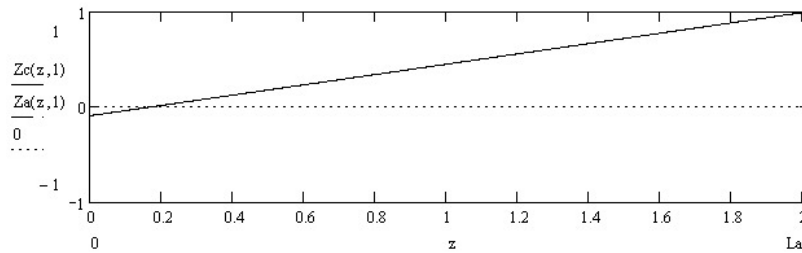


Figura 2.43: Prima forma modale schema C3

È interessante osservare le forme modali normalizzate ad uno, ed in particolare la prima (figura 2.43) e la terza (figura 2.44) che, come emerge nel paragrafo 2.3.3.7.3, rappresentano i modi propri che influiscono maggiormente sul comportamento del sistema sulla base della forzante descritta ed analizzata nel paragrafo 2.3.3.7.1. Come nei casi precedenti si rappresenta in tratto continuo la deformata del carter, con linea tratteggiata l'albero interno e si riporta la configurazione indeformata con linea a punti. Nella prima forma modale in figura 2.43, data la coincidenza tra albero e carter, le due linee sono sovrapposte e non distinguibili.

Si esegue una valutazione della variazione della terza frequenza propria al variare delle condizioni di presa. Il valore ottenuto infatti, risulta molto vicino alle condizioni di risonanza e può influire in modo determinante sul comportamento della macchina.

La variabilità rispetto a  $k_p$  non risulta determinante, le variazioni sono



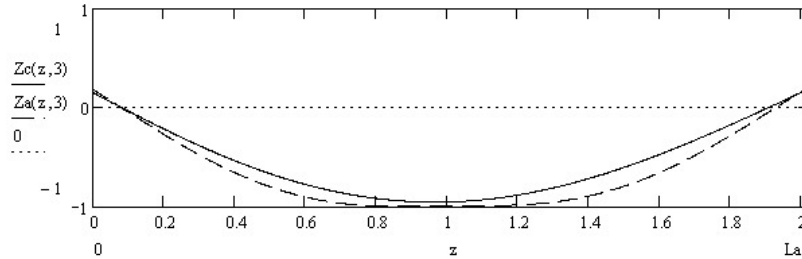


Figura 2.44: Terza forma modale schema C3

contenute e si possono del tutto trascurare come emerge in tabella 2.13, i valori sono calcolati avendo posto  $M_m = 0.4$  kg e  $ab1 = 0.4$  m.

$k_p$ (N/m)	1	10	100	1000
$\omega_3$ (rpm)	1125	1125	1130	1150

Tabella 2.13: Variazione della frequenza propria al variare di  $k_p$ 

La sensibilità rispetto all'ampiezza di presa  $ab1$  è maggiore come risulta dalla tabella 2.14, le condizioni critiche possono essere considerate quelle con pulsazione propria più bassa, tenendo conto del principale obiettivo progettuale di innalzare la frequenza propria al di sopra del regime di funzionamento. Valori minimi di  $\omega$  si ottengono per  $ab1 = 0.6$  m.

$ab1$ (mm)	300	350	400	450	500	550	600
$\omega_3$ (rpm)	1200	1160	1130	1100	1070	1050	1040

Tabella 2.14: Variazione della frequenza propria al variare di  $ab1$ 

Anche la sensibilità rispetto ad  $M_m$  non è trascurabile, la pulsazione propria è minima per alti valori della massa (vedi tabella 2.15). Dai risultati si può notare come nelle varie condizioni di presa, la terza pulsazione propria assuma valori molto vicini alle due velocità di funzionamento pari a 900 rpm e 1100 rpm.

$M_m$ (kg)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
$\omega_3$ (rpm)	1160	1145	1125	1110	1095	1080	1065

Tabella 2.15: Variazione della frequenza propria al variare di  $M_m$ 

In particolare il valore più basso per  $\omega_3$  si ottiene nelle seguenti condizioni:

$$M_m = 0.6 \text{ kg}$$

$$k_p = 100 \text{ N/m}$$

$$ab1 = 0.6 \text{ m}$$

per cui si ottiene:

$$\omega_3 \approx 920 \text{ rpm}$$

### 2.3.3.2 Effetto del taglio e dell'inerzia a rotazione

Negli schema si sono trascurati gli effetti del taglio e dell'inerzia a rotazione della sezione che possono portare ad un abbassamento delle frequenze proprie; sebbene, date le caratteristiche geometriche degli alberi, tale approssimazione sia accettabile, si procede comunque ad una stima approssimata della sua influenza in modo da giustificare e verificare l'ipotesi.

A tale scopo si segue il procedimento riportato in [22], in cui viene considerata l'influenza su una trave semplicemente appoggiata agli estremi. Viene introdotto il rapporto:

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{\omega_n'} \quad (2.24)$$

dove  $\omega_n'$  ed  $\omega_n$  rappresentano rispettivamente la pulsazione valutata senza tener conto di taglio ed inerzia e quella calcolata considerando anche tali effetti. Siano  $\lambda$  la snellezza della trave,  $E$  e  $G$  i moduli di rigidezza,  $\chi = 10/9$  il fattore di taglio della sezione,  $n$  il numero di frequenza propria, si definisce la grandezza:

$$\chi' = \chi \frac{E}{G}$$

La soluzione fornita in [22] per  $\alpha_n$  è la seguente:

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{2\chi'} \frac{\lambda^2}{\pi^2 n^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\pi^2 n^2} + 1 + \chi' - \sqrt{\left( \frac{\lambda^2}{\pi^2 n^2} + 1 + \chi' \right)^2 - 4\chi'} \right] \quad (2.25)$$

Si esegue il calcolo di  $\alpha_n$  utilizzando i dati del carter che, tra i due elementi, è quello che può risentire in misura maggiore del taglio avendo, a parità di lunghezza, diametro maggiore e quindi snellezza inferiore.

I valori sono praticamente uguali ad uno per la prima frequenza propria e l'errore è comunque inferiore al 5% per le prime sei pulsazioni, come si può notare in tabella 2.16. Gli effetti del taglio e dell'inerzia a rotazione saranno quindi del tutto trascurabili anche nel caso in esame e non saranno inclusi nella trattazione.

$n$	$\alpha_n$
1	0.999
2	0.995
3	0.988
4	0.979
5	0.968
6	0.955

Tabella 2.16: Valori ricavati di  $\alpha$  per le prime 6 frequenze proprie ( $n$ )

### 2.3.3.3 Effetto della rotazione dell'albero

Nel modello matematico utilizzato si studiano le frequenze flessionali della trave sottoposta a vibrazione; sebbene numericamente i valori delle frequenze proprie coincidano, nello studio non si considera un possibile sbilanciamento dell'albero interno che, data la sua elevata lunghezza ed il processo di realizzazione presenta delle imperfezioni e si discosta in certa misura dalle condizioni ideali rappresentate dal modello matematico. Date però le ridotte dimensioni diametrali del componente e la massa ridotta che ne consegue si può supporre trascurabile tale effetto; questo è ancora più valido se si tiene conto dell'elasticità dei cuscinetti: questa infatti porta ad uno spostamento relativo del baricentro dell'albero rispetto alla condizione ideale, notevolmente superiore a quello che si ottiene per effetto dello sbilanciamento dell'albero.

Si valuta comunque in prima approssimazione lo sbilanciamento dell'albero secondo quanto indicato in [22, pag.437] in modo da confrontarlo con i valori di spostamento che si ricaveranno nel paragrafo 2.3.3.7 a seguito dell'analisi dinamica.

Per l'albero interno si può considerare un grado di equilibratura tra quelli riportati in [23]; in particolare si può scegliere tra alcune classi di rotori a ciascuna delle quali è associato un valore  $G$  del grado di equilibratura in mm/s. Le classi che più si avvicinano al rotore in esame sono le seguenti (si riporta un estratto degli esempi di rotori riportati in [23]):

**$G = 6.3 \text{ mm/s}$** : parti veloci di macchine operatrici. Parti di macchine utensili e di macchine in generale.

**$G = 16 \text{ mm/s}$** : alberi di trasmissione, alberi cardanici con elevate esigenze di equilibratura. *Parti di macchine agricole*, di macchine molitorie, trebbiatrici.

**$G = 40 \text{ mm/s}$** : alberi di trasmissione ed assali completi di autoveicoli. Al-

beri a gomito completi di volani e frizioni di motori per vetture, autocarri e locomotive.

Tra le classi riportate quella che più si avvicina all'albero in esame è quella avente  $G = 16 \text{ mm/s}$ ; si esegue cautelativamente l'analisi anche per la classe superiore.

Si ricava quindi un valore di sbilanciamento massimo per l'albero sulla base di  $G$  e della massima velocità di rotazione  $\omega_{\max}$  secondo l'equazione:

$$e_{\max} = \frac{G}{\omega_{\max}} \quad (2.26)$$

Si ottengono i seguenti valori avendo posto  $\omega_{\max} = 1100 \text{ rpm}$ :

$$e_{16} \approx 0.15 \text{ mm} \quad (2.27)$$

$$e_{40} \approx 0.35 \text{ mm} \quad (2.28)$$

Il procedimento utilizzato segue un percorso inverso rispetto a quello solitamente usato nelle applicazioni pratiche per cui si ricava  $G$  a partire da  $e_{\max}$ ; l'analisi svolta fornisce comunque delle valide indicazioni, anche se approssimate, dell'influenza di tali effetti sul comportamento del sistema.

I valori ottenuti sono, come previsto, notevolmente ridotti, decisamente inferiori agli spostamenti che si riscontrano nell'uso della macchina apprezzabili anche empiricamente ad occhio nudo e calcolati nel paragrafo 2.3.3.7.

Inoltre bisogna tener conto della forzante applicata alla macchina, descritta ed analizzata in dettaglio nel paragrafo 2.3.3.7.1: questa è di tipo oscillante e viene applicata all'estremo del carter, è disposta su un piano (non è quindi di tipo rotante) ed assume valori talmente maggiori della forza indotta dallo sbilanciamento ipotizzato, da renderlo del tutto trascurabile.

Infine, non essendo presenti nell'albero rotori o manicotti di nessun genere si possono escludere effetti giroscopici.

In ultima analisi, quindi, anche questo effetto risulta del tutto trascurabile ai fini pratici ed il sistema potrà essere considerato come un sistema vibrante, senza considerare effetti giroscopici e rotazionali.

#### 2.3.3.4 Effetto del carico assiale

Alla struttura è applicato un carico assiale di compressione; tale carico, di tipo alternato ed avente frequenza pari alla velocità di rotazione dell'albero, viene trasmesso dal cinematismo della testa al carter. In questo paragrafo ci limiteremo a considerare l'abbassamento della frequenza propria flessionale dovuta a tale carico. Per quanto riguarda gli effetti dinamici, uno studio più dettagliato verrà eseguito al paragrafo 2.3.3.6 ed al paragrafo 2.3.3.7.1.

si considera il massimo valore del carico assiale di compressione agente sul carter ( $N_{\max}$ ) e, seguendo il procedimento indicato in [22], si stima l'influenza del carico sulle frequenze proprie.

Il carico assiale massimo è dato dalla somma del massimo della componente alternata  $F_{\max,N}$  e della forza peso dovuta alla massa presente sulla testa ( $gM_f$ ,  $g$  è l'accelerazione di gravità) ipotizzando di utilizzare la macchina in posizione verticale:

$$N_{\max} = F_{\max,N} + M_f g$$

essendo:

$$F_{\max,N} \approx 5.5 \text{ N}$$

$$gM_f \approx 11.5 \text{ N}$$

si ottiene:

$$N_{\max} \approx 17 \text{ N}$$

Si ricava poi il carico Euleriano:

$$N_{ne} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

ed applicando quanto indicato in [22] si ricava il rapporto  $\zeta$  tra le pulsazioni con e senza carico assiale applicato:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{N_{\max}}{N_{ne}}}} \quad (2.29)$$

Applicando l'equazione 2.29 al carter si ottiene  $\zeta \approx 0.996$ ; il risultato ottenuto si riferisce ad una trave semplicemente appoggiata agli estremi, ma può fornire indicazioni utili anche per il caso in esame soprattutto se si tiene conto dei valori numerici ottenuti. La diminuzione della frequenza propria è infatti inferiore al cinque per mille e risulta del tutto trascurabile; non si ritiene necessario uno studio più approfondito dell'effetto del carico assiale in relazione ai ridotti valori assunti da  $N_{\max}$ .

### 2.3.3.5 Frequenze proprie torsionali

Fino a questo punto si sono studiate le frequenze flessionali del sistema senza considerare eventuali frequenze proprie di tipo torsionale o assiale. Considerando la sezione tubolare delle travi, che rappresenta la forma geometrica

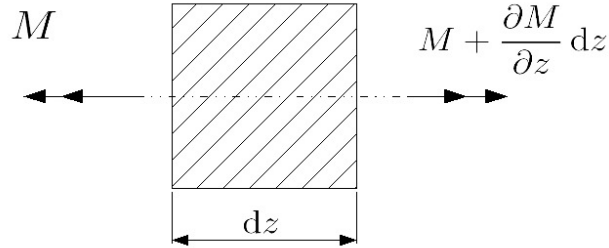


Figura 2.45: Elemento di trave sottoposto a vibrazioni torsionali

a massima efficienza per la torsione, tali frequenze risulteranno molto elevate, notevolmente superiori alle flessionali. Si esegue comunque una stima dei valori di tali pulsazioni sia per l'albero interno che per il carter.

In questo caso l'equilibrio infinitesimo di trave rappresentato in figura 2.45, in assenza di forze di smorzamento ed utilizzando le consuete notazioni fin qui adottate, conduce all'equazione differenziale:

$$\rho I \ddot{u} = \frac{\partial M}{\partial z} = GI u'' \quad (2.30)$$

dove con  $I$  si indica il momento di inerzia polare della sezione della trave. Posto:

$$\nu = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

l'equazione 2.30 si può scrivere nella forma:

$$\ddot{u} = \nu^2 u''$$

Le due travi devono essere considerate separatamente non essendo presente nella struttura nessun vincolo che colleghi la rotazione intorno all'asse  $z$  di carter ed albero. Si considerano le travi aventi estremi collegati a volani di inerzia  $I_v$  e si dovranno imporre le condizioni al contorno:

$$I_v \ddot{u} + GI u' = 0$$

Prendendo in esame il carter, alle estremità della trave si considerano applicati due volani che hanno momento di inerzia  $I_i$  ed  $I_f$  pari rispettivamente alle inerzie del gruppo del motoriduttore e dell'impugnatura e del gruppo del

cinematismo della testa. Tali valori ricavabili da analisi numeriche sui modelli tridimensionali realizzati su *Pro-Engineer*<sup>©</sup> risultano:

$$I_i \approx 11 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$I_f \approx 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Si ottengono le frequenze proprie riportate in tabella 2.17; i valori ottenuti sono molto elevati, si può quindi escludere l'influenza di tali frequenze sul comportamento dinamico del sistema soprattutto se si considera il fatto che non si hanno forzanti di tipo torsionale agenti sul carter.

$n$	$\omega_n$ (1/s)
1	200
2	2800
3	5500
4	8200

Tabella 2.17: Frequenze proprie torsionali del carter

Per quanto riguarda l'albero interno si dovranno considerare il motoriduttore montato all'impugnatura e il cinematismo della testa. Si calcola un momento di inerzia equivalente utilizzando l'uguaglianza dell'energia cinetica.

Si considera dapprima il motoriduttore; il motore elettrico ha momento di inerzia pari a  $J_m \approx 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$  ed il riduttore pari a  $J_r \approx 15 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$ . considerando il rapporto di riduzione pari a  $\tau_r = 3.18$  si ottiene un momento di inerzia equivalente all'impugnatura pari a:

$$J_i = (J_m + J_r) \tau_r^2 \approx 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

Per quanto riguarda il cinematismo della testa, si ha disposizione l'andamento dell'energia cinetica del sistema in un ciclo avendo posto velocità angolare pari a quella della forzante (1100 rpm). Tali dati sono il risultato di un'analisi dinamica effettuata utilizzando i modelli tridimensionali realizzati sul software *Pro-Engineer*<sup>©</sup>. Dividendo l'energia cinetica per il quadrato della velocità di rotazione si ottiene il momento di inerzia equivalente  $J_f(\theta)$  del cinematismo della testa che risulta essere funzione dell'angolo di rotazione  $\theta$ .

Tale irregolarità dell'energia cinetica e, conseguentemente, dell'inerzia, è la causa della forzante periodica applicata all'albero. Nel grafico di figura 2.46 si rappresenta l'andamento di  $J_f(\theta)$  in  $\text{kgm}^2$  in un intervallo di tempo (in s) pari al periodo di una rotazione completa dell'albero; si può notare come la

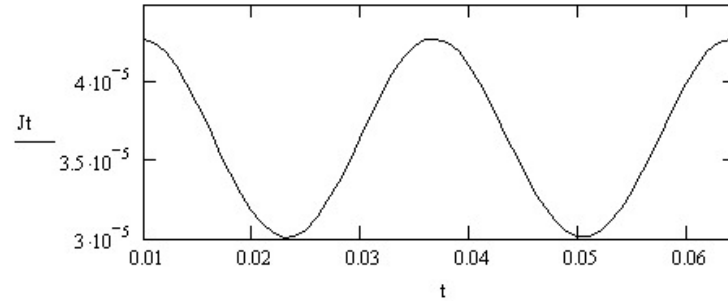


Figura 2.46: Variazione del momento di inerzia equivalente sulla testa in un giro dell'albero di trasmissione

funzione compie due cicli in tale intervallo e quindi la forzante torsionale che ne deriva avrà frequenza pari a circa  $230 \text{ s}^{-1}$ .

Per il calcolo delle frequenze torsionali si considera, cautelativamente, il massimo valore assunto da  $J_f$  che risulta pari a  $J_f \approx 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$ .

Imponendo i valori di inerzia appena ricavati ed utilizzando lo stesso metodo di calcolo utilizzato per il carter si ottiene il valore della prima frequenza propria per l'albero interno che risulta pari a:  $\omega_1 \approx 260 \text{ s}^{-1}$ .

Considerando i valori ottenuti, la sufficiente distanza delle condizioni di funzionamento da quelle di risonanza, ed i valori molto contenuti delle inerzie di rotazione, si possono escludere fenomeni dinamici di tipo torsionale rilevanti e influenti sulla dinamica complessiva del sistema.

### 2.3.3.6 Frequenze proprie assiali

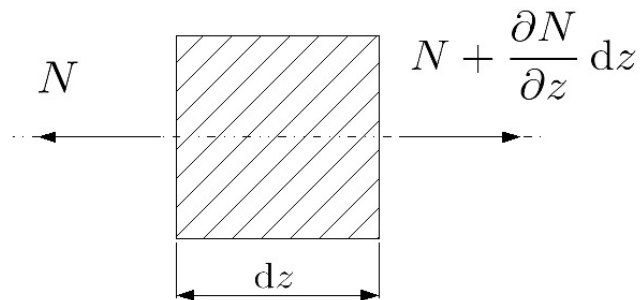


Figura 2.47: Elemento di trave sottoposto a vibrazioni assiali



Anche per quanto riguarda le frequenze assiali ci si aspetta di ottenere valori elevati; in questo caso imponendo l'equilibrio dell'elemento infinitesimo di trave rappresentato in figura 2.47 si ottiene l'equazione:

$$\rho A \ddot{u} = \frac{\partial N}{\partial z} = AE u'' \quad (2.31)$$

ponendo

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

si può scrivere l'equazione 2.31 nella forma:

$$\ddot{u} = \nu^2 u'' \quad (2.32)$$

Si procede al calcolo delle frequenze proprie come descritto al paragrafo 2.3.3.1 imponendo per l'albero interno le condizioni al contorno corrispondenti ad estremi liberi:

$$u' = 0$$

mentre per il carter si dovrà tenere conto delle masse applicate alle estremità imponendo:

$$M \ddot{u} + AE u' = 0$$

Per quanto riguarda l'albero interno si ottengono i valori riportati in tabella 2.18, e risultano elevati e lontani dalle condizioni di funzionamento.

$n$	$\omega_n$ (1/s)
1	7500
2	15000
3	22000
4	30000

Tabella 2.18: Frequenze proprie assiali dell'albero interno

Per il carter, si riportano in tabella 2.19 le frequenze calcolate considerando le masse calettate alle estremità e delle mani ed avendo imposto  $M_m = 0.6 \text{ kg}$  e  $ab1 = 0.6 \text{ m}$ .

Come previsto, i valori delle frequenze proprie assiali sono molto elevate, di almeno un ordine di grandezza superiori alla frequenza eccitatrice; se ne deduce che non avranno influenza sul comportamento dinamico della macchina e non verranno più considerate nel seguito.

$n$	$\omega_n$ (1/s)
1	7300
2	15000
3	23000
4	39000

Tabella 2.19: Frequenze proprie assiali del carter

### 2.3.3.7 Risposta dinamica

Alla luce dello studio fin qui svolto, risulta di notevole interesse pratico eseguire uno studio della risposta dinamica del sistema sottoposto all'eccitazione alternata causata dal moto dei pettini oscillanti sulla testa dell'abbacchiatore. Tra i vari schemi utilizzati si analizza lo schema C3 il più rappresentativo della macchina reale che comprende tutti gli effetti dinamici fin qui analizzati e descritto nel paragrafo 2.3.3.1.3.3. Prima di analizzare il metodo utilizzato per ricavare la soluzione dinamica, descritto nel paragrafo 2.3.3.7.2, si esegue uno studio dettagliato della forzante (paragrafo 2.3.3.7.1).

Lo studio permette di individuare l'andamento del tempo delle deformate del sistema consentendo così di quantificare spostamenti massimi e condizioni critiche oltre a fornire risultati numerici sulle vibrazioni trasmesse all'operatore. Si possono così ricavare utili informazioni ed indicazioni per orientare positivamente lo sviluppo della trasmissione.

#### 2.3.3.7.1 Applicazione della forzante

Sul sistema agisce la forzante analizzata e definita al paragrafo 2.3.2, al fine di applicare tale forzante al sistema, si utilizza il procedimento descritto in [22] che si riferisce ad una trave eccitata da una forza distribuita. Nel caso in esame, la forza è applicata alla testa e quindi, idealmente, in un punto coincidente con la massa concentrata  $M_f$ . In pratica però, la forza viene trasmessa attraverso il collegamento tra organi rotanti e carter e si distribuirà su una superficie necessariamente finita nell'intorno della testa. Si può quindi correttamente schematizzare la forzante come una forza distribuita lungo tutta la trave che assuma valore diverso da zero nell'intorno della testa ma che scenda rapidamente a zero man mano che ci si allontana da essa. Posto  $q(z, t) = p_z(z)p_t(t)$  si può scegliere quindi una funzione di distribuzione lungo

la trave del tipo:

$$p_z(z) = - \left( \frac{z}{z - \xi} \right)^p \frac{1}{L} \quad (2.33)$$

dove con  $z$  si indica la coordinata assiale della trave come rappresentata in

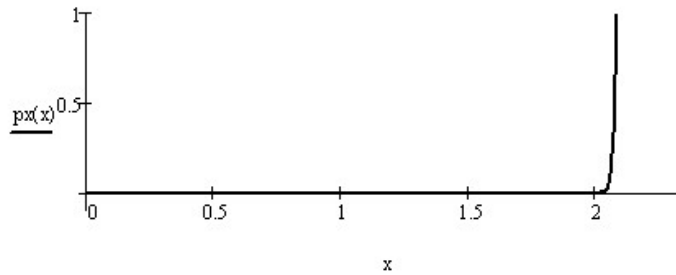


Figura 2.48: Andamento di  $p_z(z)$  tra zero ed  $L$

figura 2.21 e con  $L$  si indica la lunghezza del carter; la funzione è di tipo iperbolico ed ha un asintoto in  $\xi$  in cui tende a  $\infty$ , mentre scende rapidamente a zero per  $z < \xi$ , sulla base del valore assegnato a  $p$ . Queste due costanti quindi definiscono rispettivamente la pendenza in prossimità dell'asintoto e la sua posizione. Per quanto riguarda  $p$  si può scegliere un valore sufficientemente alto, tale da approssimare correttamente la superficie di applicazione della forza; in particolare aumentando il valore della costante la funzione scende più rapidamente a zero allontanandosi dalla testa della trave. Le variazioni non comportano significativi cambiamenti nel valore della forzante e della risposta dinamica per valori di  $p > 50$ , si sceglie quindi cautelativamente un valore di  $p$  pari a 100. Il parametro  $\xi$  definisce la posizione dell'asintoto verticale della funzione e quindi interviene direttamente sulla porzione di forza lineare applicata alla trave. Per ricavare tale valore si assume che l'integrale su tutta la trave della funzione debba essere uguale ad uno.

$$\int_0^L p_z(z) dz = 1$$

Ne risulta un andamento, rappresentato in figura 2.48, che ripecchia le reali condizioni di carico. Moltiplicando la funzione ottenuta per l'andamento temporale della forza  $p_t(t) = M_r \omega^2 a_1 \cos \omega t$ , complessivamente la  $q(z, t)$  assume modulo esattamente pari alla forza applicata  $F(t)$ .

### 2.3.3.7.2 Sovrapposizione modale

Essendo state ricavate le frequenze proprie e le relative forme modali per il sistema in esame, risulta immediato utilizzare il metodo di sovrapposizione modale per il calcolo della risposta dinamica. Il metodo, secondo quanto riportato in [22], e considerando la forzante di tipo distribuito, porta alla seguente equazione differenziale, utilizzando le consuete notazioni fin qui assunte:

$$\ddot{u} + \nu^2 u^{IV} = \frac{q(z, t)}{\rho A} \quad (2.34)$$

La soluzione di tale equazione può essere espressa come somma della soluzione generale e della soluzione particolare. Si esprimono i modi propri in modo che siano ortonormali alla distribuzione di massa; per quanto riguarda la struttura in esame, oltre alla densità ed alle sezioni delle travi di carter ed albero, si dovrà tenere conto delle masse concentrate presenti, ne consegue che tale condizione si ottiene imponendo, per ciascun modo proprio:

$$\begin{aligned} M_i(Z_c(0))^2 + M_m(Z_c(ab1))^2 + M_f(Z_c(L))^2 \\ + \int_0^L \rho_c A_c(Z_c(z))^2 dz + \int_0^L \rho_a A_a(Z_a(z))^2 dz = 1 \end{aligned} \quad (2.35)$$

dove con i pedici  $c$  ed  $a$  si indicano rispettivamente le grandezze di carter ed albero.

La soluzione particolare può quindi essere scritta nella forma:

$$u_p(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_{np}(t) \quad (2.36)$$

dove con  $Z_n(z)$  si indica la forma modale  $n$  normalizzata rispetto alla massa utilizzando l'equazione 2.35.

Sostituendo l'equazione 2.36 nell'equazione 2.34 si ottiene:

$$\ddot{T}_{np} + \omega_n^2 T_{np} = \int_0^L q(z, t) Z_n dz = q_n(t) \quad (2.37)$$

dove  $q_n(t)$  viene definita forza eccitatrice modale relativa al modo  $n$ . La soluzione dell'equazione 2.3.3.7.2 può essere espressa utilizzando l'integrale di Duhamel:

$$T_{np} = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t q_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (2.38)$$

ricavati quindi i vari contributi di ciascun modo proprio e sommati secondo quanto indicato nell'equazione 2.36 si ottiene la soluzione particolare dell'equazione differenziale; tale soluzione rappresenta la risposta a regime del sistema, si può considerare quindi solo questa componente della soluzione completa, trascurando la soluzione generale che rappresenta il transitorio.

### 2.3.3.7.3 Contributo di ciascun modo proprio

Teoricamente, per ottenere la soluzione esatta dell'equazione differenziale è necessario considerare gli infiniti modi propri del sistema, nella pratica però si può troncare la sommatoria ad un dato termine finito in quanto i contributi dei modi propri aventi pulsazione notevolmente superiore a quella dell'eccitatrice sono trascurabili. In [22] si suggerisce di troncare la sommatoria ad un termine finito  $n'$  in modo che la pulsazione  $\omega_{n'}$  sia almeno superiore alla massima pulsazione contenuta nello spettro della forza eccitatrice.

Per eseguire una ulteriore semplificazione, si considerano i termini  $T_{np}$ ; infatti avendo normalizzato i modi propri rispetto alla distribuzione di massa, i termini  $Z_n$  della sommatoria sono dello stesso ordine di grandezza, diventano quindi determinanti, ai fini della determinazione del contributo di ciascun modo proprio, i termini  $T_{np}$ . Si calcolano quindi tali termini, funzione del tempo e di  $n$  e della forzante, per i primi cinque modi propri del sistema completo in modo da escludere tutti i termini che non influiscono significativamente sulla risposta del sistema.

Si riportano in tabella 2.20 i massimi valori assunti dai termini  $T_{np}$ , in funzione di  $n$ , per il sistema completo C3 ed applicando la forzante descritta nel paragrafo 2.3.3.7.1. Dai dati ottenuti emerge come il modo proprio deter-

$n$	1	2	3	4	5
$T_{np}$ (m)	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$

Tabella 2.20: Ordine di grandezza di  $T_{np}$  per le prime cinque frequenze proprie

minante sia il terzo, in quanto ha frequenza vicina a quella della forzante. Gli altri modi propri sono del tutto trascurabili, l'unico di cui può essere utile tenere conto è il primo, che risulta comunque inferiore di un ordine di grandezza ma il cui contributo diventa più significativo cambiando la frequenza della forzante o le condizioni di presa. Infatti, osservando la forma modale rappresentata in figura 2.43 si può notare come la forzante si avvicini ad una condizione di carico *proporzionale* alla forma modale. Questo spiega il fatto che tale contributo sia sempre presente in tutte le condizioni di presa e per valori diversi della pulsazione della forzante. Come esempio si riportano in

figura 2.49 gli andamenti di  $T_{np}(t)$ , per  $n = 1$  (linea tratteggiata),  $n = 2$  (linea a punti),  $n = 3$  (linea continua).

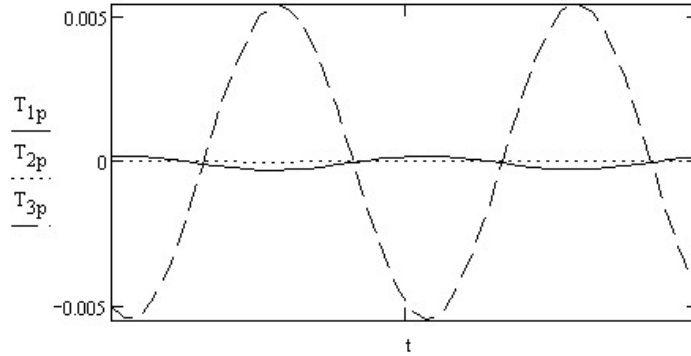


Figura 2.49: Andamenti di  $T_{np}(t)$ , per  $n = 1$  (linea tratteggiata),  $n = 2$  (linea a punti),  $n = 3$  (linea continua)

Per le ragioni fin qui esposte, nella sovrapposizione modale si tiene conto esclusivamente del primo e del terzo termine, essendo gli unici che influiscono in modo significativo sulla risposta dinamica del sistema che sarà quindi data da:

$$u_p(z, t) = Z_1(z)T_{1p}(t) + Z_3(z)T_{3p}(t) \quad (2.39)$$

Discretizzando il tempo ed eseguendo il calcolo per una serie di valori di  $t$ , si può ottenere la risposta dinamica del sistema nel dominio del tempo. Essendo la frequenza della forzante vicina, se pur non coincidente, con una frequenza propria del sistema, si verifica il fenomeno dei *battimenti*, descritto in [22], di cui si può osservare il tipico andamento in figura 2.50; si riporta nel grafico la posizione del punto medio del carter in un intervallo di tempo pari al periodo dei battimenti.

I battimenti hanno pulsazione  $\omega_b$  pari a:

$$\omega_b = \frac{1}{2}(\omega_f - \omega_3)$$

dove  $\omega_f$  è la pulsazione della forzante. Le condizioni di massimo spostamento si avranno quindi in corrispondenza del massimo dei battimenti; per individuare le condizioni critiche per il sistema eseguendo un calcolo rapido e che richieda un tempo ridotto, si può eseguire il calcolo per una serie di punti nell'intorno di tale massimo. In questo modo è possibile valutare rapidamente le variazioni delle vibrazioni del sistema in funzione delle diverse

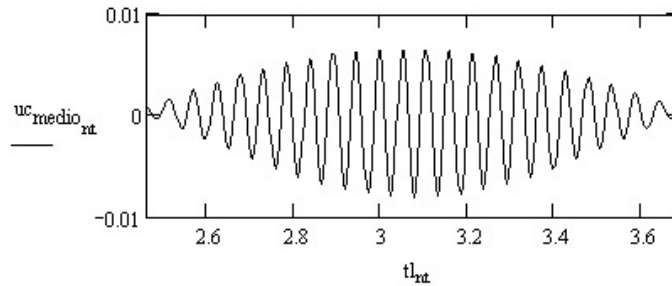


Figura 2.50: Posizione del punto medio del carter in funzione del tempo

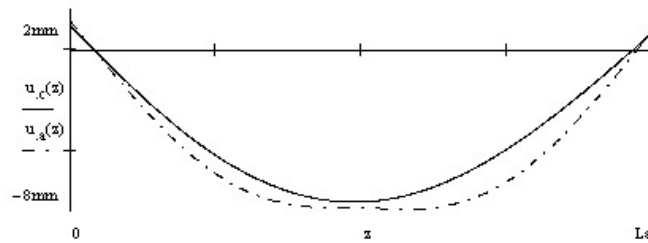


Figura 2.51: Massima deformata del sistema

condizioni di presa e gli effetti di eventuali variazioni delle caratteristiche della trasmissione.

Nel punto medio del carter si ha una freccia massima pari a  $u_{c,max} \approx 7.5$  mm. La massima deformata del sistema, rappresentata in figura 2.51, è molto vicina al terzo modo proprio ed il contributo del primo è notevolmente ridotto, almeno in queste condizioni di carico e vincolo; come negli altri casi si rappresenta in tratto continuo l'asse del carter, con linea tratteggiata l'asse dell'albero interno. In appendice C il file *Mathcad*<sup>©</sup> tramite il quale vengono eseguiti i calcoli e le analisi descritte in questo capitolo.

### 2.3.4 Analisi agli elementi finiti

Si esegue l'analisi dinamica della struttura utilizzando un approccio diverso rispetto al precedente. Utilizzando il software di calcolo agli elementi finiti *Ansys*<sup>©</sup>, si realizzano gli stessi modelli studiati e se ne calcolano frequenze proprie e risposta dinamica in modo da avere una verifica dei risultati ottenuti, analizzare l'influenza di effetti secondari trascurati quali la velocità di rotazione, e giustificare delle approssimazioni assunte come la schematizzazione in due dimensioni.

In analogia con quanto già svolto, si modella la struttura utilizzando

elementi trave bidimensionali e gli stessi schemi di vincolo descritti nel paragrafo 2.3.3; si considerano quindi dapprima albero interno e carter separatamente, per poi studiare il sistema completo tenendo conto della rigidità di cuscinetti e delle caratteristiche della presa ed utilizzando schematizzazioni via via più affinate e che meglio approssimano le condizioni reali di funzionamento.

Non è di interesse pratico affinare ulteriormente il calcolo realizzando modelli più complessi che utilizzino elementi guscio o elementi solidi; infatti, per gli obiettivi prefissati, hanno notevole rilevanza le frequenze proprie del sistema di tipo flessionale, vicine al campo di funzionamento. Non sono di interesse pratico invece le frequenze di tipo membranali ottenibili esclusivamente attraverso modelli più complessi in quanto hanno valori di frequenza notevolmente più alti e molto lontani dalle condizioni di esercizio. Per queste ragioni ci si limita allo studio del sistema schematizzato come insieme di travi in quanto si descrivono tutti i fenomeni utili allo sviluppo della macchina con il notevole vantaggio di una elevata velocità di calcolo.

Per ogni sistema e modello realizzato si può eseguire uno studio di convergenza per determinare il numero di nodi necessario a descrivere correttamente la struttura. Da tenere presente però che per le analisi di tipo dinamico, la convergenza è rapida ed è sufficiente una suddivisione in elementi (definita *meshatura*) non eccessivamente affinata per ottenere valori sufficientemente approssimati di frequenze proprie e spostamenti. Per queste ragioni e per esigenze di sintesi si omettono i dettagli sugli studi di convergenza eseguiti e ci si limiterà al confronto dei risultati con i dati ricavati nel paragrafo 2.3.3.

Per la realizzazione dei modelli, si utilizzano elementi trave di tipo bidimensionale (indicata con *BEAM3* in *Ansys*), aventi tre gradi di libertà per ciascun nodo, due di traslazione ed uno di rotazione (figura 2.52). Agli elementi si assegnano alternativamente, le caratteristiche di albero e carter.

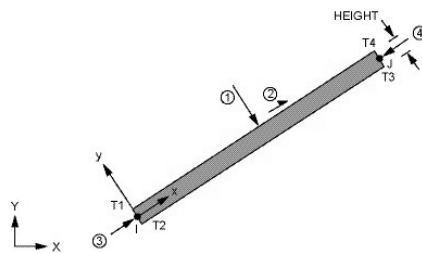


Figura 2.52: Elemento trave 2D in *Ansys*

Altri elementi che si utilizzano per realizzare i vari schemi di vincolo sono le masse concentrate (indicate con *MASS21* in *Ansys*) posizionate su nodi



in corrispondenza dei punti di presa ( $M_i$  e  $M_m$ ) e della testa ( $M_f$ ) ed a cui si assegnano i valori di massa noti e definiti nel paragrafo 2.

Per modellare la rigidità della presa dell'operatore e dei cuscinetti si utilizzano gli elementi molla (indicate con *COMBIN14* in *Ansys*) a cui si assegnano le rigidità  $k_p$  e  $k_c$ .

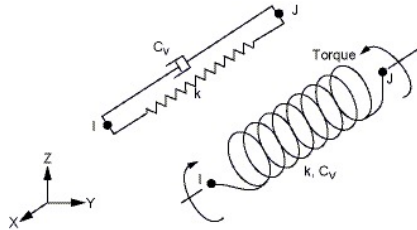


Figura 2.53: Elemento molla in *Ansys*

Per realizzare i vincoli che rappresentano i cuscinetti rigidi, si impone spostamento nullo ai relativi nodi, mentre, nel sistema completo, si impone che siano uguali gli spostamenti dei nodi di carter ed albero posizionati in corrispondenza dei cuscinetti (attraverso il comando *CP* in *Ansys*).

#### 2.3.4.1 Frequenze proprie

Si esegue un'analisi di tipo modale (*modal*), che fornisce i valori in Hza delle frequenze proprie e le corrispondenti forme modali normalizzate rispetto alla distribuzione di massa in modo del tutto analogo a quanto descritto nel paragrafo 2.3.3.7.

Si ottengono dei valori nulli per le prime frequenze proprie che rappresentano i moti rigidi in direzione assiale e negli altri gradi di libertà lasciati liberi dai vincoli imposti.

I risultati ottenuti sono perfettamente coincidenti con i dati ricavati nell'analisi precedente; questo è dovuto alla similitudine dei modelli realizzati che riproducono esattamente gli schemi descritti nel paragrafo 2.3.3, le differenze riscontrabili sono dovute ad errori di tipo numerico e dovuti alla discretizzazione; tali differenze sono comunque talmente ridotte da essere del tutto trascurabili soprattutto se si tiene conto delle altre approssimazioni assunte nella realizzazione del modello e della variabilità di molte grandezze fisiche considerate.

Ci si limita a riportare solo alcune delle soluzioni ricavate in questa analisi, mettendole a confronto con i risultati del paragrafo 2.3.3. In particolare, per esigenze di sintesi e per evitare inutili ripetizioni, si espongono esclusivamente i risultati degli schemi A3, B3 e C3 descritti ed identificati nei relativi paragrafi.

### 2.3.4.1.1 Albero interno

Per l'albero interno si considera lo schema B3 rappresentato in figura 2.28. In tabella 2.21 si mettono a confronto i risultati delle due analisi indicando con  $\omega_M$  e  $\omega_A$  i risultati ottenuti utilizzando rispettivamente *Mathcad*<sup>©</sup> e *Ansys*<sup>©</sup>; si omette la prima frequenza propria nulla che rappresenta lo spostamento rigido dell'albero in direzione assiale.

$n$	$\omega_{nA}$ ( Hza)	$\omega_{nM}$ ( Hza)
1	24.5	24.5
2	36.3	36.3
3	95.6	95.6

Tabella 2.21: Frequenze proprie schema B3

In figura 2.54 è rappresentata la prima frequenza propria ottenuta mediante i due metodi. Nel grafico della forma modale di *Ansys* le linee verticali rappresentano le posizioni degli elementi molla che descrivono il comportamento dei cuscinetti. Tali elementi sono stati impostati con una lunghezza finita in modo da renderli visibili nel modello, senza per questo influire in nessun modo sul calcolo delle frequenze. Si è eseguita una normalizzazione rispetto alla massa in entrambi i casi e si nota come sia le forme modali che i valori delle frequenze proprie siano perfettamente coincidenti. In appendice D si riporta il file di comandi completo, realizzato al fine di eseguire l'analisi appena descritta.

### 2.3.4.1.2 Carter

Per quanto riguarda il carter si considera lo schema A3 rappresentato in figura 2.34 ed avendo imposte come parametri di presa le consuete condizioni standard. Anche in questo caso i risultati ottenuti sono perfettamente coincidenti come emerge dalla tabella 2.22 dove si omette la frequenza propria nulla corrispondente al moto rigido del carter.

$n$	$\omega_{nA}$ ( Hza)	$\omega_{nM}$ ( Hza)
1	0.2	0.2
2	1.3	1.3
3	20.2	20.2
4	66.1	66.2

Tabella 2.22: Frequenze proprie schema A3

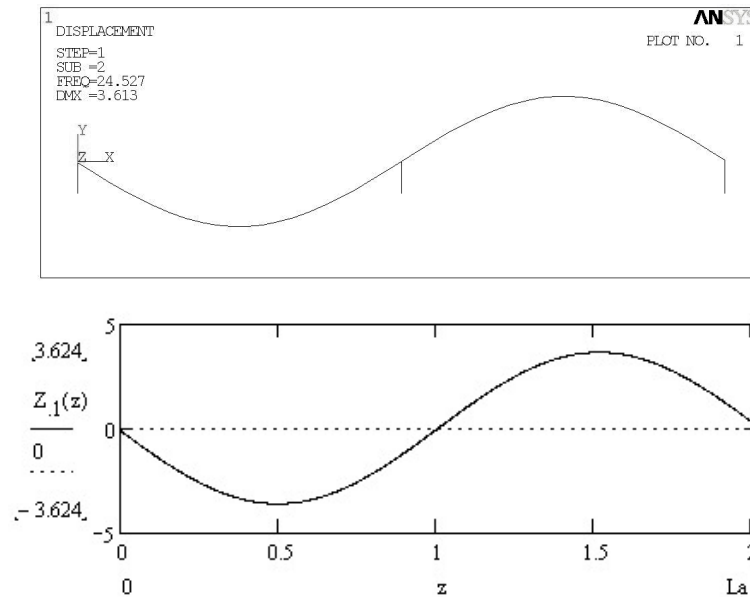


Figura 2.54: Prima forma modale schema B3

Le forme modali, normalizzate rispetto alla massa sono analoghe a quelle già ricavate; come esempio si riporta in figura 2.55 la terza frequenza propria, di maggior interesse in quanto prossima alle condizioni di funzionamento; in questo caso i tratti verticali rappresentano le molle che simulano la presa dell'operatore, in modo da renderne visibile il posizionamento. L'analisi è stata eseguita utilizzando il file di comandi riportato in appendice E.

### 2.3.4.1.3 Sistema completo

Si analizza infine il sistema completo che tiene conto delle interazioni tra albero e carter, della rigidità dei cuscinetti e della presa dell'operatore. I dati, in linea con le previsioni, sono riportati in tabella 2.23, omettendo, come al solito, le frequenze nulle corrispondenti ai moti rigidi; da osservare, in questo caso, che le frequenze proprie di valore nullo sono due, una che si riferisce al moto rigido del carter e l'altra al moto dell'albero interno. L'analisi è stata eseguita utilizzando il file di comandi riportato in appendice F.

In figura 2.56 si riporta la forma modale, normalizzata rispetto alla distribuzione di massa, corrispondente alla terza frequenza propria del sistema, di maggior interesse pratico in quanto influisce maggiormente sulla risposta dinamica del sistema.

I risultati fin qui ottenuti sono in perfetto accordo con le analisi svolte

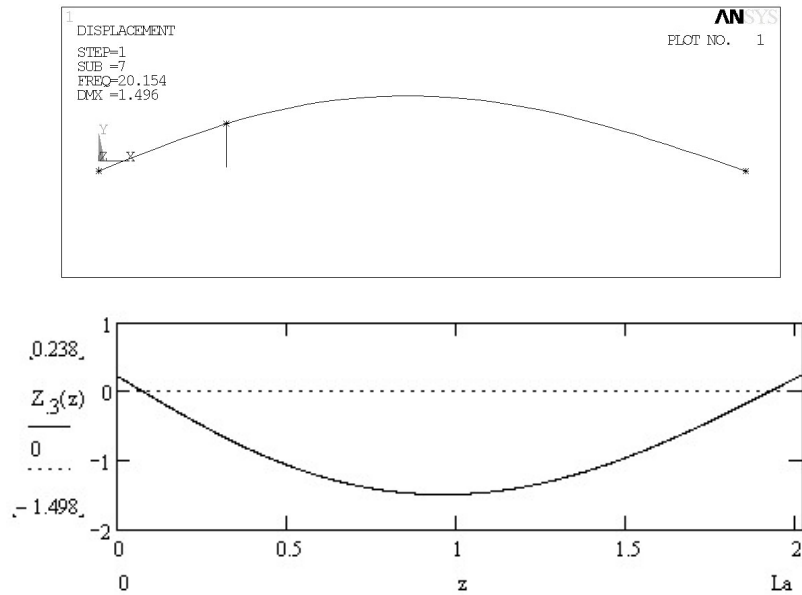


Figura 2.55: Terza forma modale schema A3

$n$	$\omega_{nA}$ (Hza)	$\omega_{nM}$ (Hza)
1	0.2	0.2
2	1.3	1.3
3	18.8	18.8
4	27.5	27.7
5	42.1	42.4
6	65.8	66.0

Tabella 2.23: Frequenze proprie schema C3

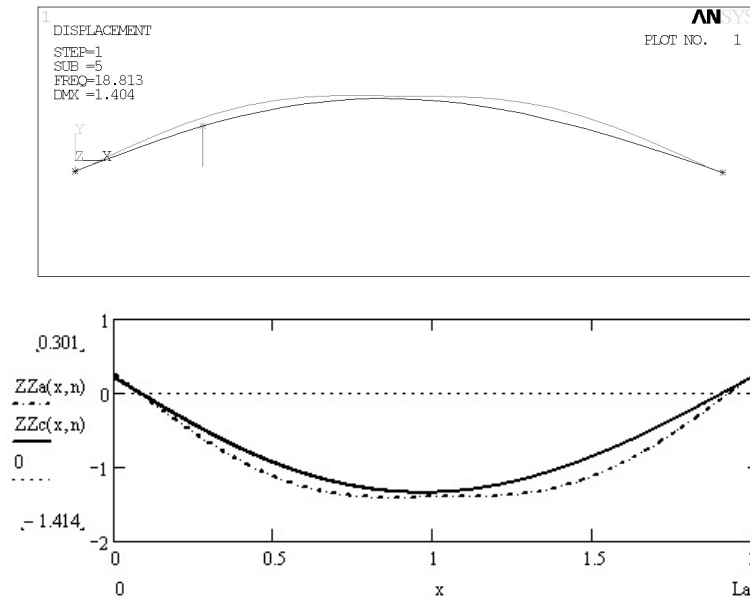


Figura 2.56: Terza forma modale schema C3

nel paragrafo 2.3.3 e forniscono una ulteriore conferma della correttezza del modello utilizzato e della sua implementazione su *Mathcad*<sup>®</sup>.

### 2.3.4.2 Confronto tra i risultati 3D e 2D

La simmetria del sistema in esame risulta evidente sia per quanto riguarda gli alberi (di forma tubolare), i cuscinetti (che hanno pari rigidezza nelle due direzioni) ed i vincoli (la presa dell'operatore, in prima approssimazione può considerarsi avente la stessa rigidezza in tutte le direzioni); anche la forzante è disposta su un piano. Ci si aspetta che non ci sia nessuna differenza apprezzabile nei risultati ottenibili con modelli tridimensionali rispetto a quelli bidimensionali, essendo questi correttamente rappresentativi del sistema reale.

Potendo sfruttare le potenzialità di un software di calcolo agli elementi finiti come *Ansys*<sup>®</sup>, si esegue ugualmente una verifica dell'ipotesi di bidimensionalità assunta. Si realizza un modello equivalente utilizzando elementi trave tridimensionali dotati di sei gradi di libertà su ciascun nodo: tre di rotazione e tre di traslazione. In questo modo è possibile escludere la presenza di frequenze proprie tridimensionali, non rappresentabili con i modelli bidimensionali fin qui realizzati. Anche gli altri elementi utilizzati dovranno rispettare le condizioni di tridimensionalità, impostando il corretto numero di gradi di libertà agli elementi.

$n$	$\omega_{nA}$ ( Hza)
1	0.2
2	0.2
3	1.4
4	1.4
5	19.1
6	19.1
7	27.5
8	27.5
9	42.1
10	42.1
11	66.0
12	66.0

Tabella 2.24: Frequenze proprie schema C3 tridimensionale

Si riportano i risultati ottenuti avendo applicato l'analisi tridimensionale allo schema completo (C3). Da osservare come le frequenze ottenute risultino accoppiate a due a due come riportato in tabella 2.24; infatti in questo caso il numero di frequenze proprie raddoppia, avendo per ciascun valore di velocità critica, due forme modali disposte alternativamente su due generici piani perpendicolari all'asse degli alberi. Dal confronto con i valori riportati in tabella 2.23 si nota come le differenze tra i due sistemi siano del tutto trascurabili, si omettono le forme modali in quanto coincidenti con quelle riportate nei paragrafi precedenti.

### 2.3.4.3 Effetto della rotazione dell'albero

Nell'analisi agli elementi finiti è possibile assegnare ai componenti una nota velocità di rotazione in modo da tenere conto dell'abbassamento delle frequenze proprie che ne deriva. Si prende in considerazione il sistema completo (C3) e si assegna all'albero interno, una velocità di rotazione pari a 1100 rpm attraverso il comando *cmomega* di *Ansys*. Le frequenze ottenute sono modificate solo in minima parte come emerge dai risultati riportati in tabella 2.25 in cui si indicano con  $\omega_n$  le frequenze calcolate senza tenere conto della velocità dell'albero e con  $\omega'_n$  i risultati ottenuti tenendo conto di tali effetti.

Date le ridotte variazioni evidenziate non si considera l'influenza di questi effetti che risultano del tutto trascurabile.

$n$	$\omega_n$ (Hza)	$\omega'_n$ (Hza)
1	0.2	0.2
2	1.3	1.2
3	18.8	18.7
4	27.5	27.3
5	42.1	41.9
6	65.8	65.7

Tabella 2.25: Frequenze proprie schema C3 considerando la rotazione dell'albero

#### 2.3.4.4 Risposta dinamica

Per eseguire l'analisi della risposta dinamica, il software mette a disposizione diversi metodi di calcolo; in analogia con le analisi precedentemente svolte, ed avendo già ottenuto i modi propri del sistema, risulta opportuno utilizzare il metodo di sovrapposizione modale. I risultati forniti si riferiscono esclusivamente alla risposta a regime, tengono conto soltanto della soluzione particolare dell'equazione differenziale escludendo il transitorio. Sono ammessi carichi di tipo sinusoidale con frequenza che può variare in un range definito.

Per quanto riguarda la forzante, si applica un carico concentrato sulla testa di valore pari ai risultati ottenuti nel paragrafo 2.3.3.7.1. Si considera lo schema competo identificato con la sigla C3 e si impostano le consuete condizioni di presa standard in modo da poter confrontare i risultati ottenuti con i dati ricavati nelle analisi precedenti.

Con una frequenza della forzante pari a 1100 rpm, si ottiene il seguente spostamento massimo del punto medio del carter  $u_{c,\max}$ :

$$u_{c,\max} \approx 7.3 \text{ mm}$$

Il valore ottenuto è in sostanziale accordo con quanto ricavato al paragrafo 2.3.3.1.3.3 in cui si era ricavato  $u_{c,\max} \approx 7.5 \text{ mm}$ , le differenze riscontrate sono ampiamente trascurabili e del tutto irrilevanti se si tiene conto delle approssimazioni assunte nel modello.

Si riporta inoltre in figura 2.57 la deformata del sistema nelle condizioni di massimo spostamento; dal confronto con la figura 2.51 si nota la coincidenza dei risultati ottenuti e la prevalente influenza della terza frequenza propria sul comportamento dinamico della trasmissione.

È interessante inoltre eseguire uno studio della variazione degli spostamenti in funzione della frequenza della forzante. Sono di particolare interesse

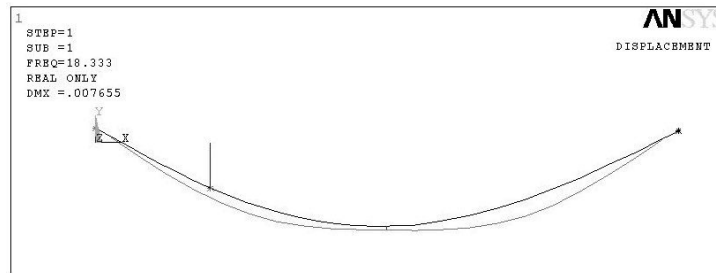


Figura 2.57: Deformata massima del sistema C3

gli spostamenti dei punti di presa, si riporta in figura 2.58 l'andamento del massimo spostamento nel punto di presa al variare della frequenza eccitatrice in un campo di frequenze compreso tra 900 rpm e 1100 rpm. Da tenere presente però che, non essendo stato introdotto nessuno smorzamento, il grafico presenta un asintoto in corrispondenza della pulsazione propria; ne consegue che i valori di spostamento ottenuti in corrispondenza di tali valori ed in particolare i valori numerici dei picchi rappresentati non hanno significato fisico. Si può ovviare al problema introducendo uno smorzamento interno come descritto nel paragrafo 2.3.5.

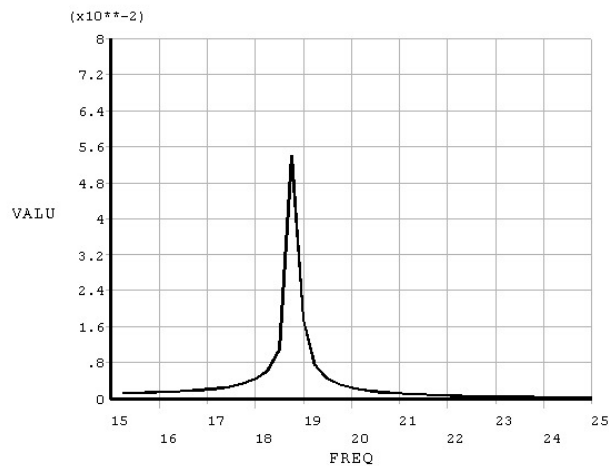


Figura 2.58: Spostamento del punto di presa in funzione della frequenza eccitatrice

Emerge ancora una volta la criticità delle condizioni di lavoro della macchina, soprattutto se si tiene conto della variabilità delle condizioni di presa: la frequenza propria del sistema può coincidere, in determinate condizioni di presa, con la frequenza eccitatrice sottoponendo il sistema di trasmissione a



sollecitazioni elevate e provocando vibrazioni accentuate che si ripercuotono sul comfort nell'utilizzo della macchina. Si nota come sia sufficiente un leggero allontanamento dalle condizioni di risonanza per avere un immediato abbattimento delle vibrazioni trasmesse all'operatore con sensibile miglioramento del comfort di utilizzo.

### 2.3.5 Effetto dello smorzamento

Nelle analisi fin qui svolte non si è tenuto conto di un possibile smorzamento della struttura; i tipi di dispersione di energia che possono verificarsi sono lo smorzamento interno del materiale di albero e carter, lo smorzamento dovuto ai cuscinetti, ai giunti, alla presa dell'operatore e ad altri effetti difficilmente quantificabili con accuratezza sufficiente. Inoltre, l'imposizione di condizioni al contorno dipendenti dal tempo a cui si ricorre per inserire smorzamenti concentrati rende impossibile la separazione delle variabili e l'impostazione del problema seguendo la metodologia illustrata nel paragrafo 2.3.3. Si rende necessaria una analisi nel dominio del tempo da implementare con software di calcolo numerico dedicato, inoltre le grandezze fisiche di cui tener conto presentano una elevata dispersione e sono difficilmente determinabili, in modo particolare per quanto riguarda lo smorzamento della presa e dei cuscinetti.

Bisogna altresì sottolineare che gli smorzamenti della struttura tendono a diminuire le ampiezze di oscillazione, le vibrazioni trasmesse e le sollecitazioni del materiale; ne consegue che l'analisi fin qui svolta risulta cautelativa. Si può inoltre prevedere che, dati i bassi valori di smorzamento in gioco, le differenze con il modello non smorzato siano molto ridotte e trascurabili.

Come verifica si esegue uno studio della risposta dinamica del sistema includendo gli effetti dello smorzamento interno dell'Alluminio di carter ed albero interno. Tale analisi è eseguibile analiticamente una volta calcolato il coefficiente di smorzamento del materiale che si indica con  $\zeta$ .

Si procede quindi alla determinazione di un valore stimato di  $\zeta$  per l'Alluminio. I valori dipendono fortemente dal tipo di materiale e dalle lavorazioni a cui è stato sottoposto; data l'elevata dispersione dei dati in esame, per quanto riguarda l'alluminio, in letteratura viene fornito un ampio campo di variabilità. Risultati sperimentali riportati in [24] hanno dato come risultato  $\zeta \approx 0,1 \cdot 10^{-4}$ ; all'interno della stessa fonte si fa riferimento ad altri dati reperibili in [25] ed in [26] che forniscono, rispettivamente, i seguenti campi di variabilità:  $0,75 \cdot 10^{-4} < \zeta < 7 \cdot 10^{-3}$  e  $0,5 \cdot 10^{-4} < \zeta < 0,6 \cdot 10^{-4}$ ; tali valori sono sostanzialmente in accordo con i dati forniti in [27]:  $2 \cdot 10^{-5} < \zeta < 2 \cdot 10^{-3}$  ed in [28]:  $\zeta \approx 5 \cdot 10^{-4}$

si sceglie un campo di variabilità per il parametro  $\zeta$  tale da comprendere

la maggior parte dei valori incontrati:

$$1 \cdot 10^{-5} < \zeta < 1 \cdot 10^{-3}$$

Per includere l'effetto dello smorzamento nel calcolo della risposta dinamica si segue il procedimento indicato in [22] che fornisce la seguente soluzione:

$$T_{np}(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t q_n(\tau) e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \sin [\omega_n (t - \tau)] d\tau \quad (2.40)$$

Una volta determinato il termine  $T_{np}(t)$  l'analisi prosegue in modo del tutto analogo a quanto già visto nel paragrafo 2.3.3.7.2 considerando i soli modi propri che influiscono in modo determinante sulla risposta dinamica del sistema.

Si può utilizzare il software *Ansys*<sup>©</sup> per introdurre uno smorzamento distribuito nella struttura (attraverso il comando *dmprat*), il software fornisce la risposta dinamica del materiale considerando uno smorzamento interno pari al valore di  $\zeta$  imposto.

I risultati ottenuti sono analoghi a quelli già presentati per il caso non smorzato, gli spostamenti e le deformate sono solo in minima parte modificati e l'effetto dello smorzamento, oltre ad essere cautelativo, risulta di entità ridotta ed ampiamente trascurabile come previsto. Come esempio in tabella 2.26 si mettono a confronto il massimo valore dello spostamento del punto medio del carter, ottenuti utilizzando i due metodi descritti per diversi valori di smorzamento  $\zeta$  a parità delle altre condizioni di carico e di vincolo.

$\zeta$	$u_{\max,M}$	$u_{\max,A}$
$10^{-3}$	7.0 mm	7.1 mm
$10^{-4}$	7.2 mm	7.2 mm
$10^{-5}$	7.3 mm	7.3 mm
0	7.5 mm	7.3 mm

Tabella 2.26: Massimi spostamenti del punto medio del carter ottenuti con *Mathcad* ( $u_{\max,M}$ ) ed *Ansys* ( $u_{\max,A}$ ) per alcuni valori di smorzamento  $\zeta$

Gli effetti dello smorzamento non sono rilevanti nelle condizioni standard in cui non si ha una perfetta coincidenza della frequenza della forzante con la pulsazione propria. Nei casi in cui queste risultano sufficientemente vicine, lo smorzamento diventa non trascurabile ed i dati ottenuti senza tenerne conto non sono fisicamente accettabili.

Considerando però l'impossibilità di assegnare, con sufficiente approssimazione, valori numerici di smorzamento, soprattutto per quanto riguarda

la presa dell'operatore, per la dispersione propria del fenomeno fisico, e tenendo conto del fatto che l'obiettivo principale della riprogettazione della trasmissione è l'allontanamento dalle condizioni di risonanza, non si ritiene necessario considerare gli effetti dello smorzamento e ci si limiterà a studiare il comportamento dinamico della macchina in condizioni non prossime a quelle di risonanza.

### 2.3.6 Vibrazioni trasmesse all'operatore

Un parametro significativo per valutare la qualità della dinamica della macchina può essere ottenuto analizzando le vibrazioni trasmesse all'operatore nei punti di presa. Come riportato in [5], la vibrazione di parti del corpo e le vibrazioni percepite sono spesso causa di malessere e di riduzione del rendimento. È stato dimostrato che l'uso continuo e abituale di macchine vibranti è collegato a diversi tipi di disturbi vascolari e neurologici e di lesioni a carico delle ossa, delle articolazioni, dei muscoli o dei tessuti connettivi della mano e dell'avambraccio.

Da sottolineare come le normative si riferiscono a dati rilevati sperimentalmente su macchine esistenti e definiscono le misure di sicurezza da utilizzare nell'uso di tali attrezzature; la linea guida ed i parametri forniti, possono comunque essere impiegati nello sviluppo di nuove macchine utensili portatili, per ridurre il rischio connesso e valutare gli effetti di interventi di miglioramento sulla dinamica della macchina già in fase progettuale.

Non si conoscono con precisione i livelli di esposizione alle vibrazioni necessari a determinare questi disturbi, né per quanto riguarda l'intensità e il contenuto spettrale delle vibrazioni, né per quanto riguarda la durata giornaliera e complessiva dell'esposizione.

L'insieme dei disturbi vascolari, neurologici e muscolo-scheletrici periferici causati dall'esposizione a vibrazioni mano-braccio viene comunemente indicato con il termine *sindrome da vibrazioni mano-braccio*. Le lesioni vascolari e osteoarticolari degli arti superiori causate da vibrazioni sono considerate malattie professionali indennizzabili in numerosi Paesi.

I lavoratori esposti a vibrazioni mano-braccio possono presentare episodi di pallore alle dita delle mani. Si tratta di un disturbo vascolare dovuto ad un temporaneo arresto della circolazione del sangue nelle dita. Tali disturbi sono stati descritti con diversi sinonimi: *dito morto* o *bianco*, *fenomeno di Raynaud di origine occupazionale*,... più recentemente, viene indicata come *dito bianco causato dalle vibrazioni* (*Vibration-induced White Finger, VWF*). Il VWF è considerato una malattia professionale e come tale è indennizzato in molti Paesi.

Durante la fase di pallore i lavoratori affetti possono sperimentare formicolii e torpore alle mani, debolezza muscolare, dolore alle mani ed alle braccia fino ad una perdita completa della sensibilità tattile e della capacità di manipolazione; perdurando l'esposizione, tali sintomi tendono a peggiorare e possono interferire con la capacità lavorativa e le attività della vita quotidiana fino a condurre ad inabilità lavorativa.

Per valutare l'entità delle vibrazioni trasmesse si considerano i punti di presa; nel modello utilizzato tali oscillazioni sono disposte su un piano ed agiscono in una direzione definita. L'ampiezza di tale vibrazione è nota dalla dinamica del sistema e sono note anche velocità ed accelerazione nei punti di presa. Si riportano in tabella 2.27 le massime ampiezze di oscillazione nei punti di presa ottenute attraverso *Mathcad*<sup>©</sup> ( $u_{p,max,M}$ ) e *Ansys*<sup>©</sup> ( $u_{p,max,A}$ ).

$$\frac{u_{p,max,M}}{4.1 \text{ mm}} \quad \frac{u_{p,max,A}}{3.9 \text{ mm}}$$

Tabella 2.27: Massimi spostamenti nei punti di presa ottenuti con *Mathcad* ( $u_{p,max,M}$ ) ed *Ansys* ( $u_{p,max,A}$ )

Conoscendo i massimi spostamenti ed ipotizzando, cautelativamente, una oscillazione sinusoidale avente ampiezza pari al valore massimo e pulsazione pari a quella della forzante, si può ricavare la funzione di spostamento dei punti in esame e ricavare le accelerazioni di tali punti. Si considera il più alto dei valori ottenuti nei due punti di presa in modo da valutare il punto di presa più affaticante.

L'esposizione alla vibrazione giornaliera definita in [5] è derivata dall'ampiezza della vibrazione e dalla durata dell'esposizione giornaliera e si esprime con l'equazione:

$$A_8 = a_{hv} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad (2.41)$$

dove  $T$  è la durata giornaliera totale dell'esposizione alla vibrazione  $a_{hv}$  e  $T_0$  è la durata di riferimento di otto ore. Nel caso in esame si considera una pulsazione della forzante costante in tutta la durata dell'utilizzo della macchina e pari a 1100 rpm ed una esposizione giornaliera che copre tutte le otto ore lavorative della giornata; nel periodo di raccolta infatti l'utilizzo dell'abbacchiatore è notevolmente intenso, continuato nel tempo e assorbe la totalità dell'attività lavorativa degli operatori. Semplificando quindi l'equazione 2.41 si ottiene:  $A_8 = a_{hv}$ .

Il termine  $a_{hv}$  è l'accelerazione quadratica media ponderata in frequenza e si ottiene calcolando l'accelerazione istantanea della vibrazione trasmessa

alla mano ( $a_{t,hv}(t)$ ), a cui si applica il filtro di ponderazione  $w_{hi}$  riportato in [5]; si calcola quindi il massimo spostamento nei punti di presa, si ricava l'accelerazione in tali punti e si ricava:

$$A_8 = a_{hv} = w_{hi} \sqrt{\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} [u_{\max} \omega_f^2 \sin(\omega_f t)]^2 dt}$$

Nel caso in esame, per condizioni di presa standard si ottiene:

$$A_8 \approx 4.9 \text{ m/s}^2 \quad (2.42)$$

Come valori di riferimento si possono assumere i dati relativi alla sindrome del dito bianco riportati in [5] e in [6]; la probabilità di occorrenza dei sintomi di pallore digitale e la loro gravità dipendono da numerosi fattori quali le caratteristiche dell'esposizione alle vibrazioni (frequenza, ampiezza, direzione, impulsività, durata), il tipo di utensile e di processo lavorativo, le condizioni ambientali (temperatura e velocità dell'aria, tasso di umidità, presenza di rumore), fattori biodinamici ed ergonomici (forza di prensione dell'impugnatura, forza di spinta sull'utensile, postura delle braccia), e alcune caratteristiche individuali (susceptibilità, stato di salute e fattori che possono influenzare il circolo periferico, per esempio il fumo di tabacco e l'assunzione di alcuni farmaci).

Si evince che vi è una complessa relazione tra l'esposizione a vibrazioni mano-braccio e la comparsa dei sintomi di pallore digitale. Gli studi epidemiologici indicano che la probabilità di comparsa del pallore digitale aumenta con l'aumentare dell'esposizione alle vibrazioni.

Vi sono stati tentativi di stimare l'esposizione alle vibrazioni necessaria per produrre differenti tassi di prevalenza di pallore digitale in gruppi di operatori che eseguono lavori con caratteristiche di esposizione simili per tipo di utensile/i usato/i o per tipologia di processi industriali.

$D_y$ (anni)	1	2	4	8
$A_8$ (m/s <sup>2</sup> )	26	14	7	3.7

Tabella 2.28: Valori di esposizione a vibrazione giornaliera  $A_8$  che possono dare luogo all'insorgenza di episodi di scolorimento delle dita nel 10% delle persone esposte per un determinato numero di anni  $D_y$

La tabella 2.28 mostra l'esposizione giornaliera alle vibrazioni,  $A_8$ , che si stima necessaria per produrre il fenomeno del dito bianco nel 10% delle persone esposte. I tassi di prevalenza sono stimati sulla base di una esposizione media totale  $D_y$  (vita lavorativa) del gruppo di lavoratori compresa da 1 anno a 10 anni.

È consentita l'interpolazione dei valori per le condizioni di esposizione indicate in tabella 2.28. A tale scopo, può essere utilizzata la seguente relazione:

$$\frac{D_y}{\text{anno}} = 31.8 \left( \frac{A_8}{\text{m/s}^2} \right)^{-1.06}$$

Nel determinare i limiti per il caso in esame si considera un utilizzo della macchina per otto ore giornaliere esclusivamente nel periodo di raccolta. Tenendo conto del fatto che la macchina può essere utilizzata anche per la raccolta di altri frutti, si stima un utilizzo medio annuo pari a tre mesi. Ipotizzando una vita lavorativa di trenta anni si ottiene un valore di esposizione alla vibrazione in anni pari a  $A_E \approx 7.5$ . Si può quindi cautelativamente considerare il valore di otto anni per il limite di esposizione richiesto:

$$A_{8,\text{amm}} = 3.7 \text{ m/s}^2$$

Il valore calcolato per *Alice* è significativamente superiore al limite ammesso; sebbene nell'analisi siano state eseguite una serie rilevante di approssimazioni, il parametro ricavato può essere considerato un indice importante per valutare la qualità della macchina sotto il punto di vista del comfort dell'operatore che influisce sul suo affaticamento e sulla sua salute e conseguentemente sulla produttività e sui costi di produzione.

### 2.3.7 Sensibilità ai parametri progettuali

Le analisi fin qui svolte sono state eseguite impostando delle condizioni di presa di tipo standard definite nel paragrafo 2.1. Sebbene tali condizioni siano rappresentative delle condizioni di funzionamento, una loro variazione influisce in modo determinante sulla dinamica del sistema modificando sensibilmente il valore delle frequenze proprie e della risposta dinamica. Per quanto riguarda la terza frequenza propria, di maggior interesse pratico in quanto prossima alle condizioni di funzionamento, l'analisi è già stata affrontata nel paragrafo 2.3.3.1.3.3.

Si analizza l'influenza dei parametri di presa sulla risposta dinamica del sistema, in particolare si considera il massimo spostamento del punto medio del carter ed il termine  $A_8$  rappresentativo delle vibrazioni trasmesse all'operatore e del comfort di utilizzo di *Alice*.

Analizzando la rigidità della presa emerge la sua quasi totale ininfluenza sul comportamento dinamico della macchina e sulle vibrazioni trasmesse, in modo particolare se si scende al di sotto di 100 N/m le variazioni sono nulle, come emerge in tabella 2.29.

$k_p$ (N/m)	1	10	100	1000
$u_{p,max}$ (mm)	4.3	4.3	4.0	2.2
$A_g$ (m/s <sup>2</sup> )	5.1	5.1	4.9	2.6

Tabella 2.29

Il sistema mostra una maggiore sensibilità rispetto alla massa della mano dell'operatore, si riportano i grafici (figura 2.59) degli andamenti di massimo spostamento nel punto di presa ed esposizione alle vibrazioni  $A_g$  che ne derivano. Un aumento di massa porta ad un sensibile abbassamento della frequenza propria che, in determinate condizioni, diventa coincidente con la pulsazione della forzante, questo causa il picco che si nota in figura 2.59 che si verifica in condizioni di risonanza. Da sottolineare come il valore numerico di picco rappresentato in figura non sia significativo dal punto di vista fisico. In tali condizioni infatti diventa determinante lo smorzamento interno del materiale, gli altri smorzamenti presenti ed in particolare quello della presa dell'operatore che non è stato modellato. Si possono comunque trarre delle informazioni importanti per la comprensione dei fenomeni fisici e delle grandezze che governano il comportamento del sistema.

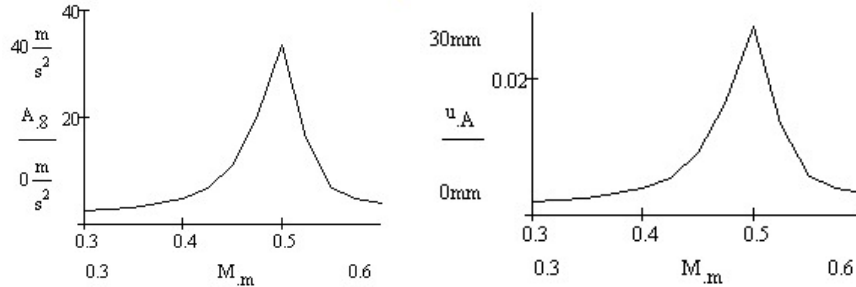


Figura 2.59: Andamento degli spostamenti e delle vibrazioni trasmesse in funzione di  $M_m$

Andamento del tutto analogo hanno gli spostamenti e l'esposizione al variare dell'ampiezza di presa; infatti anche in questo caso, aumentando la quota *ab1* si ha un sensibile abbassamento della frequenza propria con il picco di vibrazioni che si può notare nella figura 2.60; anche in questo caso il valore numerico del picco non è significativo non tenendo conto degli smorzamenti presenti.

Risulta evidente dall'analisi appena svolta, la necessità di eseguire una progettazione del sistema di trasmissione che permetta di innalzare le frequenze proprie, ed in particolare la terza, in modo da allontanare il sistema

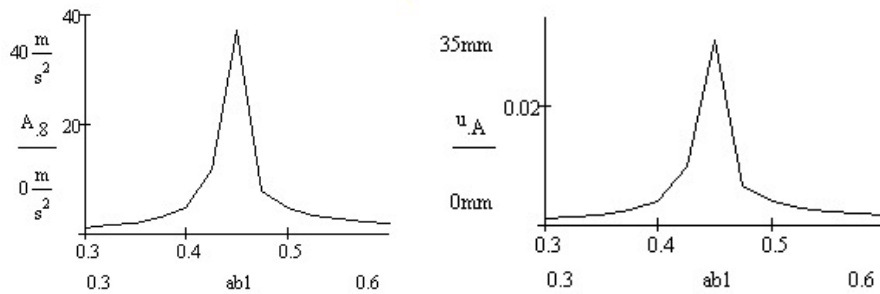


Figura 2.60: Andamento degli spostamenti e delle vibrazioni trasmesse in funzione di  $ab1$

dalle condizioni di risonanza che possono verificarsi in determinate condizioni di presa.

### 2.3.8 Verifica dei componenti

Si esegue una verifica dei componenti della macchina nelle condizioni standard di funzionamento. In particolare si studiano carter ed albero interno in modo da avere una stima delle tensioni agenti e ricavarne il coefficiente di sicurezza.

Si considerano le condizioni di presa standard già definite e si prende in esame la configurazione con massimo spostamento del punto medio del carter; infatti, considerando la deformata assunta dal sistema, ed essendo i carichi e le caratteristiche di sollecitazione, funzione della deformata stessa, le condizioni critiche si avranno in corrispondenza della massima deformata.

Conoscendo la l'andamento di  $u(z, t)$  che rappresenta la deformata delle travi nel tempo, si possono calcolare le caratteristiche di sollecitazione all'istante  $\tau$  utilizzando l'equazione della linea elastica dinamica:

$$M(z) = EIu(z, \tau)^{II}$$

$$T(z) = EIu(z, \tau)^{III}$$

Si riportano in figura 2.61 il momento flettente ( $Mc_\tau(z)$ ) ed il taglio ( $Tc_\tau(z)$ ) agenti sul carter. Si nota come il momento abbia andamento continuo ma la sua derivata, il taglio, presenti delle discontinuità in corrispondenza dei punti di presa e dei cuscinetti dove si hanno dei carichi concentrati applicati.

Il massimo valore del momento flettente per il carter vale:

$$Mc_{\max} \approx 18 \text{ Nm}$$



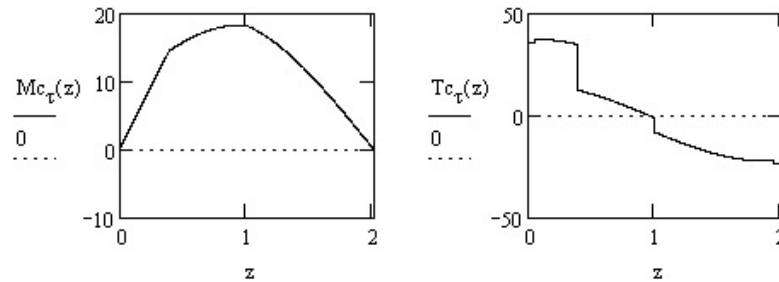


Figura 2.61: Momento e taglio agenti sul carter

che comporta delle tensioni massime pari a:

$$\sigma \approx 25 \text{ MPa}$$

Il taglio, come prevedibile, provoca delle tensioni notevolmente inferiori alla flessione che assumono valore massimo pari a  $\tau \approx 1 \text{ MPa}$  e risulta del tutto trascurabile. Tali tensioni sono di tipo affaticante ed hanno valor medio nullo e componente alternata pari a  $\sigma$ .

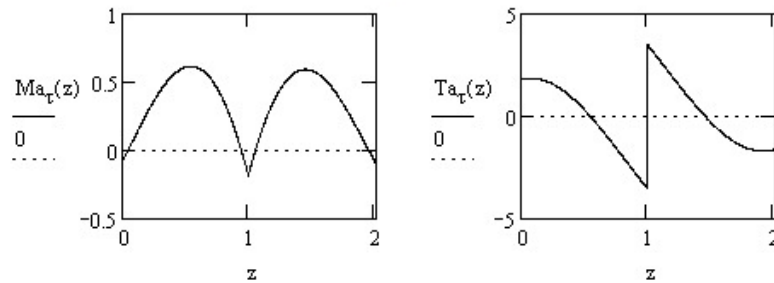


Figura 2.62: Momento e taglio dell'albero di trasmissione

I grafici di momento flettente e taglio per l'albero sono rappresentati in figura 2.62 e presentano discontinuità in corrispondenza dei carichi concentrati applicati attraverso i cuscinetti.

Per l'albero, si ottengono le seguenti tensioni massime:

$$\sigma \approx 12 \text{ MPa}$$

$$\tau \approx 0.05 \text{ MPa}$$

anche in questo caso le tensioni di taglio sono del tutto trascurabili.

Sull'albero di trasmissione, oltre ai carichi dinamici fin qui considerati, si ha il momento torcente trasmesso attraverso il motore elettrico ed il riduttore. Si ha un momento motore pari a  $T_m = 0.33 \text{ Nm}$  ed un rapporto di riduzione  $\tau_r = 3.18$ ; questi dati nominali si riferiscono al funzionamento in condizioni normali, con un momento resistente costante applicato ai pettini sulla testa. Quando l'abbacchiatore viene utilizzato su fronde molto fitte o rimane incastrato tra i rami della pianta, il momento resistente tende a salire ed il momento motore manifesta un picco. Grazie alla presenza del limitatore di alimentazione si ha una coppia massima del motore elettrico pari a tre volte il valore nominale. Si ottiene quindi il massimo momento torcente che può agire sull'albero di trasmissione:

$$T_{\max} \approx 3.2 \text{ Nm}$$

Considerando la sezione tubolare dell'albero si ricavano le seguenti tensioni di taglio:

$$\tau_{\theta,z} \approx 6.6 \text{ MPa}$$

In questo caso le tensioni sono di tipo statico, sia per quanto riguarda il momento torcente sia per la flessione. L'albero infatti, ha un moto dato dalla sovrapposizione di un moto rotatorio attorno all'asse deformato e di un moto precessionale o di *whirling* dell'asse attorno all'asse ideale indeformato. Avendo quindi la combinazione di due moti armonici aventi la stessa pulsazione, le tensioni saranno di tipo statico, almeno durante il funzionamento a regime. Bisogna però tenere presente che in due accensioni successive della macchina, o nel passaggio da una velocità di funzionamento all'altra, le fibre sottoposte a tensioni derivanti dal momento flettente possono cambiare ed il carico può divenire affaticante nel passaggio da una configurazione all'altra o in due o più accensioni successive. In modo largamente cautelativo, si considererà anche tale carico di tipo affaticante. Si hanno quindi una componente media  $\sigma_m$  ed una alternata  $\sigma_a$  delle tensioni agenti sull'albero che risultano:

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \sqrt{3\tau_{\theta,z}^2} \approx 11 \text{ MPa} \\ \sigma_a &= \sigma_{\max} \approx 11 \text{ MPa}\end{aligned}$$

La lega di Alluminio con cui sono realizzati carter ed albero ha le seguenti tensioni di rottura ( $S_u$ ) e snervamento ( $S_y$ ):

$$\begin{aligned}S_u &\approx 215 \text{ MPa} \\ S_y &\approx 160 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Per la verifica dei componenti si segue quanto indicato in [21] ed in [29] e si considera un numero di cicli pari ad  $n \approx 5 \cdot 10^8$ ; valore convenzionalmente utilizzato per la verifica a vita infinita di componenti in alluminio che non presenta un limite di fatica  $S_n$  definito. Per ricavare il valore di  $S_n$  sulla base di  $S_u$  si definisce il rapporto  $\beta$  ricavabile dall'equazione suggerita in [30] e riportata in [29, p.47]:

$$\frac{S_n}{S_u} = \beta = \frac{1 + \frac{0.031n^4}{1+0.0065S_u}}{1 + 0.031n^4} \approx 0.42$$

si utilizza poi il coefficiente  $C_s \approx 0.74$  per tenere conto della finitura superficiale delle travi e si ottiene così

$$S_n \approx 63 \text{ MPa}$$

Per quanto riguarda il carter si ricava immediatamente il coefficiente di sicurezza a fatica che risulta pari a:

$$\eta_c = \frac{S_n}{\sigma_{c,\max}} \approx 2.5$$

Per l'albero interno, avendo sia tensioni di tipo statico che di tipo affaticante si utilizza il criterio di *Goodman* secondo la metodologia riportata in [21]. A tal fine si definiscono tre rette:

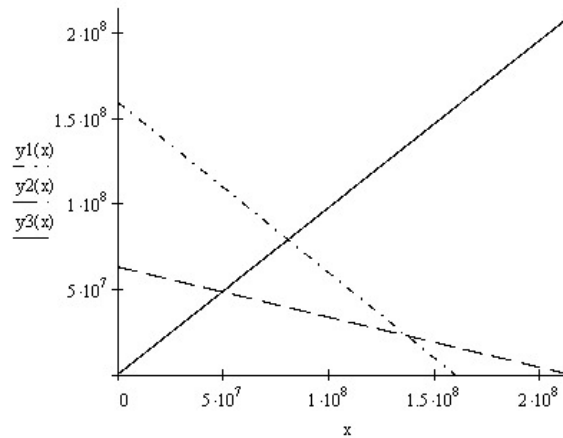
$$\begin{aligned} y1(x) &= -x + S_y \\ y2(x) &= -\frac{S_n}{S_u} + S_n \\ y3(x) &= \frac{\sigma_a}{\sigma_m} x \end{aligned}$$

dove sull'asse  $y$  si rappresenta la componente alternata delle tensioni, mentre sull'asse  $x$  la componente media. Si riporta in figura 2.63 le rette rappresentando in tratto continuo la retta di carico  $y3(x)$  ed a linea tratteggiata le altre due rette.

Il coefficiente di sicurezza si ottiene considerando l'intersezione della retta di carico  $y3$  con la retta  $y2$  e fornisce:

$$\eta_a \approx 4.4$$

Il sistema risulta quindi verificato nelle condizioni standard di funzionamento e di presa. La macchina, nei vari test effettuati da *Scienza Macchinale S.r.l.*, non ha presentato rotture anomale nonostante le vibrazioni manifestate. Risulta comunque utile intervenire sul sistema di trasmissione in modo da garantire il funzionamento della macchina anche in condizioni diverse di presa in cui si possono manifestare fenomeni di risonanza e ridurre il più possibile le vibrazioni trasmesse ed aumentare così il comfort di utilizzo.

Figura 2.63: Applicazione del criterio di *Goodman*

## 2.4 Analisi dei risultati ed indicazioni progettuali

Lo studio fin qui svolto di *Alice* fornisce una serie di informazioni ed indicazioni utili per affrontare con successo un suo sviluppo, in particolare per quanto riguarda la trasmissione. Emerge l'esigenza di innalzare la terza frequenza propria del sistema intervenendo sulla rigidità della struttura. Può essere utile prendere in considerazione l'utilizzo di materiali diversi dall'alluminio in modo da ridurre anche il peso complessivo dell'abbacchiatore; altro elemento su cui è possibile intervenire sono la rigidità ed il numero dei cuscinetti. Tutti questi argomenti sono dettagliatamente affrontati nel paragrafo 3.

## Capitolo 3

# Sviluppo della trasmissione

Grazie all'approfondita analisi della macchina fin qui svolta, è possibile pianificare degli interventi di modifica sulla trasmissione in modo da migliorarne le prestazioni e le caratteristiche. In particolare risultano di importanza prioritaria le vibrazioni trasmesse che influenzano il comfort di utilizzo ed il peso complessivo della trasmissione che influisce sul peso della macchina e sulla sua maneggevolezza.

È emerso come la macchina funzioni in condizioni prossime a quelle di risonanza mostrando evidenti fenomeni vibratorii. Risulta quindi necessario un innalzamento delle frequenze proprie, in particolare quelle più prossime alle velocità di rotazione dell'albero di trasmissione.

Con queste premesse un primo possibile intervento è la modifica della sezione dei tubi. Bisogna però tenere presente che il diametro esterno del carter è imposto da esigenze ergonomiche in modo da rendere agevole l'impugnatura da parte dell'operatore in un punto qualsiasi della macchina. Si potrebbe intervenire sul diametro interno, ma questo porterebbe ad un sensibile aumento del peso della macchina senza però innalzare significativamente le frequenze proprie del sistema. Risulta infatti determinante la rigidità specifica delle travi, aumentando la sezione, si irrigidisce da un lato la struttura, ma se ne aumenta il peso con conseguente incremento delle forze d'inerzia. Anche la forma delle sezioni non può evidentemente essere modificata.

Un intervento del genere risulta così inefficace o non realizzabile.

Un altro possibile campo di intervento è una modifica della geometria dei cuscinetti o del loro materiale in modo da modificarne la rigidità. Sulla base dei risultati fin qui illustrati, si deduce immediatamente che tale effetto è di entità ridotta: infatti, osservando i valori delle frequenze proprie ottenute per il sistema con cuscinetti rigidi, si nota come le differenze con il sistema con cuscinetti elastici siano notevolmente ridotte; un irrigidimento dei cuscinetti non modifica in modo determinante la dinamica del sistema e presenta pro-

blemi di montaggio in quanto diminuisce la compensazione delle imperfezioni geometriche di carter ed albero interno.

Anche una modifica della rigidità dei cuscinetti è quindi da escludere.

Si può però intervenire sul numero: questo renderebbe l'albero interno fissato in modo più rigido al carter con una spesa in termini sia economici che di difficoltà di montaggio e complessità della macchina relativamente contenuta. L'analisi dettagliata della risposta del sistema al variare del numero e della rigidità dei cuscinetti viene affrontata nel paragrafo 3.1.

Sono possibili modifiche alla rigidità dei tubi modificando il materiale utilizzato. Come già accennato, la grandezza che maggiormente influenza il valore delle frequenze proprie risulta essere la rigidità specifica definita come:

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Un aumento di  $\nu$  è ottenibile aumentando il modulo elastico o diminuendo la densità del materiale; è questo il tipico campo di applicazione dei materiali compositi i quali hanno una elevata rigidità con un ridotto peso specifico e possono aumentare sensibilmente le frequenze proprie del sistema.

Elementi tubolari in fibra di carbonio o di vetro possono essere utilizzati per la realizzazione sia dell'albero interno che del carter; l'analisi dettagliata delle possibili soluzioni in questa direzione è affrontata al paragrafo 3.2.

### 3.1 Modifica dei cuscinetti

Come già accennato, si può dimostrare, analizzando i risultati ottenuti per i modelli realizzati, l'inefficacia di un aumento di  $k_c$  sulle frequenze proprie. Si considerino a tale scopo gli schemi B2 e B3 descritti ai paragrafi relativi, in cui si sono calcolate le frequenze proprie considerando rispettivamente cuscinetti infinitamente rigidi ed elastici. Nel primo caso si è ottenuta una frequenza pari a  $\omega_1 \approx 1470$  rpm, mentre nel secondo  $\omega_1 \approx 1480$  rpm (tabella 2.2 e tabella 2.3). Tali valori possono essere considerati coincidenti se si tiene conto delle approssimazioni e delle ipotesi assunte nella realizzazione del modello.

Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte osservando i valori riportati in tabella 2.10 e tabella 2.11, che si riferiscono al sistema completo con cuscinetti rigidi ed elastici per cui si è ottenuto rispettivamente,  $\omega_1 \approx 1300$  rpm  $\omega_1 \approx 1290$  rpm. Anche tali valori possono considerarsi coincidenti e forniscono una ulteriore prova del fatto che non sia conveniente irrigidire i cuscinetti.

Si valuta quindi l'influenza di una aumento dei cuscinetti sulla dinamica della struttura. Si dispongono in modo che siano distribuiti in modo omogeneo lungo tutta la lunghezza dell'albero, secondo lo schema riportato in figura 3.1 che rappresenta lo schema completo della trasmissione in cui si tiene conto degli effetti della presa dell'operatore già descritto al paragrafo 2.3.3.1.3.3.

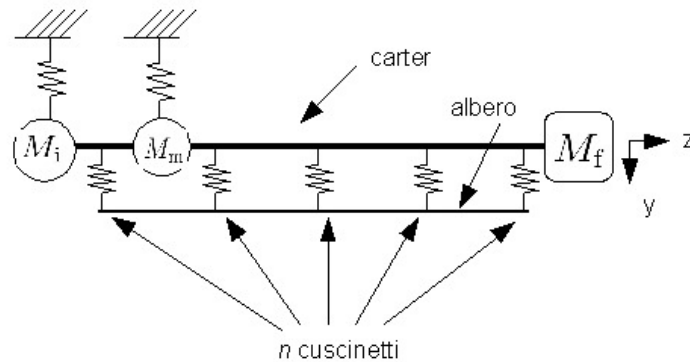


Figura 3.1: Schema della trasmissione con  $n$  cuscinetti

Per l'analisi si utilizza il software *Ansys*® attraverso un file di comandi (vedi appendice G) in cui si parametrizza il modello rispetto al numero dei cuscinetti. Si esegue così il calcolo delle frequenze proprie del sistema al variare del numero  $n$  dei cuscinetti. Si riportano tabella 3.1 i valori della terza e quarta frequenza propria di maggiore interesse pratico in quanto più vicine alle condizioni di funzionamento. Tutti i valori sono stati ottenuti imponendo i valori standard per i parametri di presa definiti nel paragrafo 2.1.

$n$	3	4	5	6	7
$\omega_3$ (rpm)	1130	1150	1150	1140	1140
$\omega_4$ (rpm)	1650	3480	3620	3640	3650

Tabella 3.1: Variazione di  $\omega_3$  e  $\omega_4$  al variare di  $n$

Si può immediatamente notare come le variazioni siano del tutto trascurabili per la terza frequenza propria. Questo era prevedibile considerando la forma modale corrispondente, riportata in figura 2.44 in cui si può notare come sia il carter a deformarsi in modo significativo e l'albero interno segua tale deformazione senza produrre elevati spostamenti relativi tra asse del carter ed asse dell'albero. L'influenza dei cuscinetti è così quasi nulla.

L'influenza è maggiore sulla quarta frequenza propria in particolare nel passaggio da tre a quattro cuscinetti. Anche questo risultato è in accordo con i

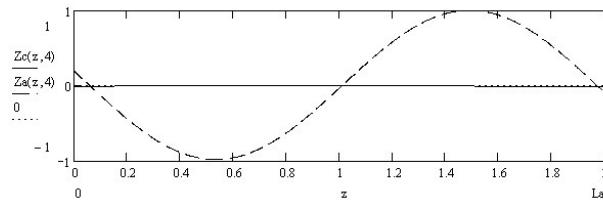


Figura 3.2: Quarta frequenza propria con tre cuscinetti

risultati ottenuti come si può notare osservando la forma modale di figura 3.2: il carter è praticamente indeformato, l'albero ha la forma modale corrispondente a quella di una trave su tre appoggi, aumentando il numero di appoggi, tale deformata viene impedita e la frequenza propria sale notevolmente.

Si riportano in figura 3.3 le variazioni della terza e quarta frequenza propria al variare del numero dei cuscinetti, dove si rappresenta con linea a punti il valore della frequenza eccitatrice.

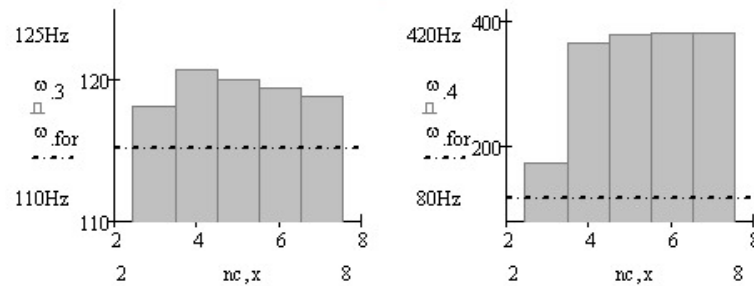


Figura 3.3: Variazione di  $\omega_3$  e  $\omega_4$  al variare di  $n$

Anche un intervento sul numero dei cuscinetti risulta così inefficace mantenendo invariato il valore della frequenza propria di interesse pratico. L'aumento di  $\omega_4$  che ne deriva non è necessario in quanto tale frequenza non influenza in modo significativo il comportamento della trasmissione nelle condizioni di funzionamento come mostrato al paragrafo 2.3.3.7.3.

## 3.2 Aumento di rigidezza specifica dei tubi

Un aumento della rigidezza specifica dei tubi comporta un deciso aumento delle frequenze proprie del sistema. Questo è realizzabile utilizzando materiali diversi dall'alluminio ed in particolare attraverso l'impiego di materiali compositi.



Tra le numerose categorie e tipologie di materiali compositi esistenti, si fa riferimento esclusivamente a quelli costituiti da fibre continue con elevate caratteristiche di resistenza e rigidità immerse in una matrice ad elevata duttilità.

La gamma di materiali disponibili per la realizzazione di materiali compositi è notevolmente ampia ed in continua evoluzione sia per quanto riguarda le matrici sia per le fibre. Le proprietà dei materiali e le tecnologie produttive variano notevolmente in base al tipo di applicazione ed alle caratteristiche meccaniche desiderate. Essendo interessati alla realizzazione di elementi tubolari in materiale composito ad elevata rigidità specifica, si fa riferimento esclusivamente alle tipologie applicabili e di maggiore interesse pratico per il caso in esame.

Per la realizzazione di tubi le fibre utilizzate possono essere in carbonio con caratteristiche variabili di rigidità e resistenza, oppure in fibra di vetro e aramidiche; per le matrici si utilizzano principalmente poliesteri o resine epossidiche.

Anche le tecnologie produttive sono molteplici e notevolmente diverse tra loro. Quelle più adatte per la realizzazione di elementi tubolari su larga scala sono il *Filament winding* e la *Pultrusione*.

Nel *Filament winding*, fibre di tipo continuo vengono avvolte attorno ad un mandrino rotante secondo una disposizione ed un angolo di avvolgimento definito. Si ottengono ottimi risultati per quanto riguarda il controllo della disposizione delle fibre e l'uniformità della struttura grazie all'automatizzazione del processo. Le fibre possono essere fornite in nastri (*tape*) pre-impregnati nella matrice per poi essere avvolti a *secco* (*dry*) eventualmente con preriscaldamento in modo da ammorbidire la resina; in alternativa si possono impregnare le fibre immergendole in un bagno di resina immediatamente prima dell'avvolgimento secondo una metodologia di tipo *wet*. Quando il numero richiesto di strati è stato avvolto, l'elemento viene sottoposto ad una *cura* in autoclave in modo da polimerizzare la resina, eliminare l'aria e gli altri elementi volatili rimasti intrappolati e a rimuovere l'eccesso di resina. Questa tecnologia produttiva è nata verso la fine degli anni '40 e si è notevolmente sviluppata e diffusa, si presta a produzioni su larga scala ed i costi sono contenuti.

La pultrusione (o *pultrusion*) è un processo che richiama in certa misura il processo di estrusione largamente utilizzato nei materiali metallici. Le fibre di rinforzo e la resina vengono tirate attraverso una matrice o una serie di matrici che conferiscono la forma desiderata alla sezione. Anche per questo processo sono possibili due tipologie di realizzazione, di tipo *wet* e di tipo *dry*. La tecnologia, nata negli anni '50 si è notevolmente sviluppata, si presta

ad una elevata automatizzazione e produzione su larga scala e consente di orientare le fibre in direzione assiale con angolo di avvolgimento nullo.

### 3.2.1 Applicazione di materiali compositi

Tenendo presente la tecnologia produttiva, si considera il generico tubo come costituito da una serie di strati o lamine con le fibre orientate in modo *angle ply*, cioè con angoli di avvolgimento che risultano alternativamente  $\pm\alpha$  e si indicano, utilizzando la classica nomenclatura per i laminati, con:  $[+\alpha, -\alpha]n$ , dove  $\alpha$  è l'angolo di avvolgimento di ciascuno strato (figura 3.4) ed  $n$  è il numero di volte in cui la sequenza viene ripetuta.

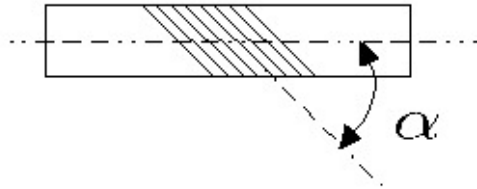


Figura 3.4: Angolo di avvolgimento

Si vuole calcolare la rigidezza flessionale di un generico tubo in materiale composito avvolto secondo la sequenza di impilamento appena definita. A tale scopo si considera quindi la singola lamina rappresentata in figura 3.5 con fibre orientate secondo un angolo generico  $\alpha$  e si definiscono due sistemi di riferimento: il primo orientato come le fibre che si indica con i pedici 123, il secondo orientato secondo l'asse del tubo che si indica con i pedici  $xyz$ .

Ciascuna lamina può essere considerata ortotropa e trasversalmente isotropa, essendo inoltre di spessore notevolmente sottile si può assumere l'ipotesi di stato di tensione piano (*plain stress*) come suggerito anche in [31]; si segue la metodologia ivi riportata per la modellazione della lamina. Avendo assunto uno stato di tensione piano si ha:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix}$$

Essendo  $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  si possono scrivere i termini in forma

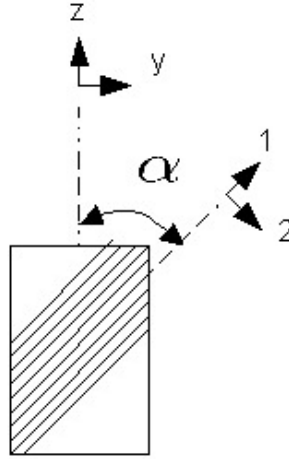


Figura 3.5: Rappresentazione di una lamina

vettoriale ottenendo:

$$\boldsymbol{\epsilon}^v = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{22}}{E_{22}} & 0 \\ \frac{-\nu_{11}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}^v \quad (3.1)$$

dove  $\mathbf{S}$  è la matrice di *compliance*,  $E_{11}$  ed  $E_{22}$ , sono i moduli di rigidezza rispettivamente in direzione delle fibre (asse 1) e perpendicolarmente alle fibre (asse 2), e  $G_{12}$  è il modulo di taglio. Dalla equazione 3.1 si può ricavare la relazione inversa che fornisce le tensioni date le deformazioni:

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \mathbf{Q}\boldsymbol{\epsilon}^v \quad (3.2)$$

Tutte le grandezze sono definite nel sistema di riferimento orientato come le fibre, per passare da un sistema di riferimento all'altro sarà necessario applicare la trasformazione definita in [31] e [32]:

$$\mathbf{T}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

ottenendo:

$$\boldsymbol{\sigma}_{123}^v = \mathbf{T}(\alpha)\boldsymbol{\sigma}_{xyz}^v$$

per le deformazioni la relazione è del tutto analoga.

Quindi, tramite le relazioni esposte, si possono ricavare tensioni, deformazioni e caratteristiche elastiche di una lamina con fibre orientate di secondo un angolo  $\alpha$ :

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}(\alpha)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}(\alpha)$$

Mentre la matrice  $\mathbf{Q}$  definita nel sistema di riferimento 123 ha dei termini nulli, la  $\bar{\mathbf{Q}}$  risulta in generale piena facendo riferimento alle coordinate  $xyz$  ed è variabile da una lamina all'altra in funzione dell'angolo di orientamento delle fibre.

Il tubo è costituito da una serie di lamine sovrapposte, si rende quindi necessario analizzare il laminato nel suo complesso a partire dalle caratteristiche delle lamine e dal loro orientamento in modo da modellare il comportamento dinamico della trave. Partendo dalle dimensioni dei diametri e dallo spessore medio di una lamina, che si indica con  $h$ , si ricava il numero  $n$  di strati con sui sono costituiti i due tubi. Si conosce la sequenza di impilamento derivante dalla tecnologia di fabbricazione e l'angolo di avvolgimento che è un parametro progettuale.

Per ricavare le caratteristiche del laminato si segue il procedimento suggerito in [31] che, assumendo valida l'ipotesi di sezioni piane, permette di ricavare i legami tra azioni agenti sul laminato e deformazioni che ne derivano. Si ipotizzano spessori costanti delle lamine e si ipotizza una perfetta adesione tra i vari strati. Non si considerano inoltre eventuali carichi equivalenti dovuti all'azione di temperatura ed umidità.

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{yy} \\ N_{zy} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \epsilon_{zz}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \epsilon_{zy}^0 \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} k_{zz} \\ k_{yy} \\ k_{zy} \end{pmatrix}$$

dove  $\mathbf{A}$  è una matrice di tipo costitutivo e  $\mathbf{B}$  è un effetto dovuto ad accoppiamenti tra azioni membranali e curvature e si calcolano attraverso le relazioni:

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{i,j}(k) h$$

$$B_{i,j} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{i,j}(k) h z(k)$$

dove  $z(k)$  è la distanza del punto medio della lamina  $k$  rispetto alla fibra baricentrica ed  $n$  è il numero totale delle lamine.

Si deve analizzare il comportamento a flessione della trave tubolare che è determinato dal modulo di rigidezza del laminato in direzione assiale ( $z$ ).

Infatti, le tensioni agenti sulla sezione sono di tipo assiale ( $\sigma_{zz}$ ) e sarà proprio la matrice  $\mathbf{A}$  del laminato ad influire sull'elasticità della trave ed in particolare il suo primo termine  $A_{1,1}$ . Tutti gli altri termini, tenendo conto della particolare sequenza di impilamento e della simmetria della sezione sono del tutto trascurabili.

Quindi, conoscendo le caratteristiche del tape utilizzato nella realizzazione del tubo, ed una volta scelto l'angolo  $\alpha$  di avvolgimento, si ricava una rigidezza equivalente della trave  $E_{eq}$  che può essere utilizzata nel calcolo delle frequenze proprie e della risposta dinamica del sistema.

### 3.2.2 Irrigidimento dell'albero

Ipotizzando di utilizzare un tubolare in fibra di carbonio per la realizzazione dell'albero di trasmissione, si valuta l'influenza di tale modifica imponendo una densità dell'albero pari a  $1600 \text{ kg/m}^3$  ed una rigidezza variabile tra 60 GPa e 180 GPa. Si lascia inalterato il carter che risulta così di alluminio con rigidezza e densità invariate. Si calcolano le frequenze proprie del sistema così modificato imponendo come valori dei parametri di presa le condizioni critiche, che comportano i più bassi valori delle frequenze proprie:  $ab1 = 600 \text{ mm}$ ,  $k_p = 100 \text{ N/m}$ ,  $M_m = 0.6 \text{ kg}$ .

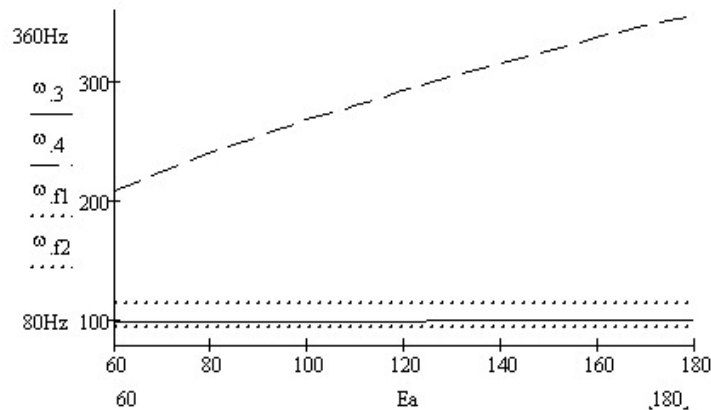


Figura 3.6: Andamento di  $\omega_3$  (linea continua) e di  $\omega_4$  (linea tratteggiata) al variare di  $E_a$

Dai risultati emerge come la terza frequenza propria non risulti modificata se non in minima parte, l'influenza di un irrigidimento dell'albero su  $\omega_3$  è quindi trascurabile; l'effetto è invece significativo sulla quarta frequenza che tende ad aumentare al crescere della rigidezza. Si riporta in figura 3.6 l'andamento di  $\omega_3$  (linea continua) e di  $\omega_4$  (linea tratteggiata) al variare di

$E$ ; nel grafico sono indicate anche le due velocità di funzionamento pari a 900 rpm e 1100 rpm (linea punteggiata).

Si ha una riduzione di massa della macchina, di entità molto contenuta date le piccole dimensioni dell'albero; la riduzione è all'incirca pari al 2% e non è quindi significativa.

Emerge l'inefficacia di un intervento sulla rigidezza dell'albero che non giustifica un aumento di spesa per l'eventuale realizzazione del componente in fibra di carbonio.

### 3.2.3 Irrigidimento del carter

Un aumento di rigidezza del carter sarà sicuramente più efficace e influirà maggiormente sulla dinamica del sistema ed in particolare sulle sue frequenze proprie. Mantenendo quindi l'albero interno invariato si valuta l'andamento delle frequenze proprie al variare della rigidezza del carter  $E_c$ .

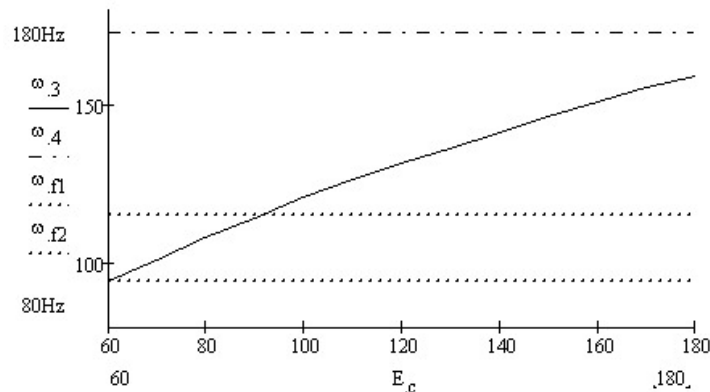


Figura 3.7: Andamento di  $\omega_3$  (linea continua) e di  $\omega_4$  (linea tratteggiata) al variare di  $E_c$

In questo caso rimane costante la quarta frequenza propria ma si innalza in modo determinante il valore di  $\omega_3$  permettendo così al sistema di uscire dalle condizioni critiche come emerge in figura 3.7.

Inoltre la riduzione di massa è aumentata essendo il carter di dimensioni maggiori rispetto all'albero, ed è all'incirca pari al 6%.

Una terza ipotesi percorribile è quella di utilizzare tubi in fibra di carbonio sia per il carter che per l'albero interno. Tale soluzione non risulta però conveniente dal punto di vista economico; infatti l'aumento di costo per la modifica dell'albero, non è giustificato da sensibili miglioramenti nella dinamica del sistema ed anche il suo peso complessivo risulterebbe ridotto del 7%,

senza cioè rilevanti cambiamenti rispetto alla sola modifica del carter. Come esempio si riporta in figura 3.8 l'adamento della terza frequenza propria avendo posto il carter in carbonio, nei due casi di albero in alluminio ( $\omega_{3a}$ ) ed in carbonio ( $\omega_{3b}$ ). Come si vede dal grafico le differenze non sono significative.

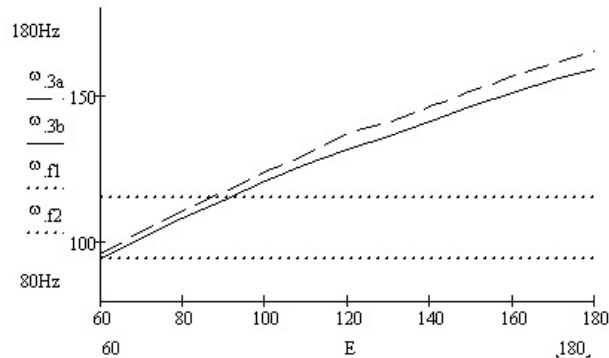


Figura 3.8: Andamento di  $\omega_{3a}$  (linea tratteggiata) e di  $\omega_{3b}$  (linea continua) al variare di  $E$

### 3.3 Rigidezza minima richiesta

Considerando i bassi carichi agenti sul sistema, le condizioni maggiormente restrittive per la progettazione sono sicuramente i vincoli imposti da esigenze di rigidezza. Si esegue quindi un dimensionamento tenendo conto di tale grandezza e si esegue in una seconda fase una verifica a resistenza.

Sulla base dello studio fin qui svolto, è possibile definire una rigidezza minima richiesta sulla base di diversi criteri. Uno possibile criterio è un imposto allontanamento della frequenza propria dalle condizioni di risonanza. Si sceglie cioè un minimo valore del termine  $\delta = \omega_3 - \omega_f$  in modo da garantire con un ampio margine di sicurezza l'assenza di fenomeni di risonanza.

Un altro possibile criterio è basato sulle tensioni agenti sui componenti: sulla base della rigidezza è possibile calcolare le tensioni agenti sul carter e sull'albero e quindi imporre dei limiti a tali valori sulla base dei quali definire la  $E_e$  richiesta.

Infine, si possono calcolare le vibrazioni trasmesse all'operatore utilizzando la metodologia definita in [5] e descritta al paragrafo 2.3.6 e determinare una soglia massima ammessa.

Tra i tre criteri il più efficace e restrittivo risulta essere l'ultimo; le tensioni agenti sui componenti scendono rapidamente a zero non appena ci si allontana dalle condizioni di risonanza quando ancora le vibrazioni trasmesse

all'operatore sono significative; il termine  $\delta$  invece risulta del tutto arbitrario e solo indicativo del reale comportamento dinamico della macchina nelle condizioni di funzionamento.

$E_c$ (GPa)	90	100	110	120	130	140	150
$A_8$ (m/s <sup>2</sup> )	9.5	3.2	1.6	1.1	0.8	0.7	0.6

Tabella 3.2

Si riportano in tabella 3.2 alcuni valori delle vibrazioni trasmesse all'operatore  $A_8$  al variare della rigidità del carter. Dal grafico riportato in figura 3.9 si nota come le vibrazioni scendano rapidamente all'aumentare di  $E$  e come poi tendano a stabilizzarsi ad un valore pressoché costante per valori di  $E$  superiori ai 120 GPa.

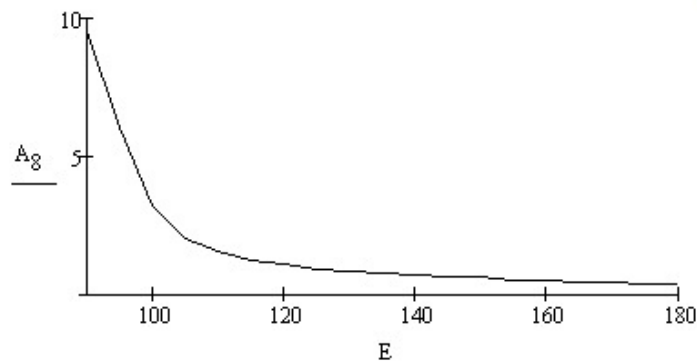


Figura 3.9

Si può così scegliere la rigidità minima richiesta tenendo conto del fatto che non è influente un ulteriore irrigidimento della struttura ai fini delle vibrazioni trasmesse:

$$E_{\min} = 120 \text{ GPa}$$

### 3.4 Ottimizzazione della sequenza di impilamento

Avendo ricavato la rigidità richiesta al tubo, si può eseguire una ottimizzazione dei parametri di realizzazione del componente; si possono scegliere il materiale di fibra e matrice da utilizzare e l'angolo di avvolgimento; si utilizza il metodo già illustrato al paragrafo 3.2.



Uno studio dell'avvolgimento delle fibre del carter che tenga conto esclusivamente della rigidità conduce immediatamente alla scelta di un valore di  $\alpha$  pari a zero, cioè con fibre parallele all'asse dell'albero.

Una soluzione di questo tipo non è realizzabile con tecnologia filament winding ma esclusivamente tramite pultrusione e presenta una serie di problematiche e limiti. Un componente con fibre unidirezionali presenta le massime caratteristiche nella direzione delle fibre e scarsa robustezza e resistenza nelle altre direzioni. L'anisotropia dell'elemento diventa massima, condizione spesso da evitare soprattutto per componenti soggetti a carichi accidentali. L'abbacchiatore infatti viene utilizzato all'aperto, può subire degli urti imprevisti sia contro i rami degli alberi che per un accidentale caduta a terra; si possono così avere dei carichi imprevisti di intensità non trascurabile in direzioni qualunque che potrebbero portare alla rottura del componente.

Si sceglie quindi di utilizzare l'angolo di avvolgimento massimo tale da garantire la rigidità minima richiesta, ma allo stesso tempo fornire alla macchina una sufficiente resistenza a carichi accidentali; il valore dell'angolo dipende dalle caratteristiche della lamina e del pre-impregnato scelto.

Si considerano le lamine più comuni (in appendice H si riportano tutte le lamine considerate e le relative caratteristiche principali) e più spesso utilizzate per la realizzazione di componenti in fibra di carbonio. Tra le varie possibilità, tenendo conto della rigidità richiesta e dei dati a disposizione, si sono selezionati tre generici pre impregnati da confrontare, il primo con carbonio di tipo *T300* e matrice epossidica avente le caratteristiche di tabella 3.3 reperite in [33]:

$\mathbf{E}_{11}$ (GPa)	$\mathbf{E}_{22}$ (GPa)	$\mathbf{G}_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
200	11	9	0.32
$\mathbf{S}_{11}$ (MPa)	$\mathbf{S}_{22}$ (MPa)	$\mathbf{S}_{12}$ (MPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
3500	56	98	1600

Tabella 3.3: Caratteristiche di una lamina con carbonio T300 e resina epossidica

Utilizzando fibre di carbonio a più elevata rigidità (*GY70*) si realizza un preimpregnato aventi le caratteristiche riportate in tabella 3.4 e reperibili in [34]:

Nel caso in cui si vogliono utilizzare elementi tubolari in fibra di vetro le principali caratteristiche sono riportate in tabella 3.5 ([35]).

Non si considerano fibre di tipo aramidico in quanto hanno costi elevati e non è giustificato un loro utilizzo nell'applicazione in esame.

$\mathbf{E}_{11}$ (GPa)	$\mathbf{E}_{22}$ (GPa)	$\mathbf{G}_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
300	7	5	0.23
$\mathbf{S}_{11}$ (MPa)	$\mathbf{S}_{22}$ (MPa)	$\mathbf{S}_{12}$ (MPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
600	30	50	1600

Tabella 3.4: Caratteristiche di una lamina con carbonio GY70 e resina epossidica

$\mathbf{E}_{11}$ (GPa)	$\mathbf{E}_{22}$ (GPa)	$\mathbf{G}_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$
40	9	4	0.28
$\mathbf{S}_{11}$ (MPa)	$\mathbf{S}_{22}$ (MPa)	$\mathbf{S}_{12}$ (MPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1080	40	90	2100

Tabella 3.5: Caratteristiche di una lamina in fibra di vetro

Utilizzando i dati ottenuti, si può calcolare, per ciascuno dei tre materiali, l'angolo di avvolgimento massimo  $\alpha_{\max}$  consentito tale da garantire una rigidezza almeno pari o superiore ai 120 GPa richiesti.

In particolare per fibre di carbonio di tipo T300 è richiesto un angolo pari a circa 30 deg mentre per fibre GY70 si ha  $\alpha_{\max} \approx 38$  deg.

Per quanto riguarda la fibra di vetro, non è possibile raggiungere le rigidezze richieste, si esclude quindi per il carter un suo utilizzo. Il materiale può essere comunque preso in considerazione per la realizzazione dell'albero per cui non è richiesta una rigidezza elevata ed in modo da ottenere una riduzione di peso della trasmissione.

Con gli angoli di avvolgimento ricavati è quindi possibile realizzare dei componenti di forma tubolare in fibra di carbonio aventi rigidezza richiesta e sufficiente resistenza ad urti accidentali ed imprevisti.

Tra le proposte, la soluzione ottimale risulta essere la prima. L'utilizzo di carbonio ad elevate caratteristiche e costo elevato non è giustificato nell'applicazione in esame in quanto le rigidezze richieste sono raggiungibili già con fibre di tipo T300 utilizzando angoli di avvolgimento leggermente inferiori.

### 3.5 Caratteristiche e selezione di tubi commerciali

Per eseguire una corretta analisi dei risultati ottenibili tenendo conto anche dei costi di acquisto dei componenti, si sono contattati diversi fornitori

in modo da ottenere dei preventivi di spesa per i tubi aventi le caratteristiche richieste.

Non è stato possibile avere informazioni dettagliate su fibre e matrici utilizzate ed angoli di avvolgimento per esigenze di riservatezza delle aziende che hanno la tendenza a non rivelare dati di fabbricazione e parametri tecnologici utilizzati nella realizzazione dei componenti. Si sono però ottenuti alcuni preventivi per componenti tubolari di varie rigidità ed aventi le caratteristiche geometriche richieste (si riporta in appendice I un elenco dei principali preventivi ottenuti con i relativi dati di costo e caratteristiche meccaniche).

Dopo una selezione dei preventivi pervenuti, si considerano i tubi aventi caratteristiche più vicine a quelle richieste ed i prezzi più competitivi. Si esegue una stima dei parametri progettuali utilizzati, eseguendo delle deduzioni a partire dalle informazioni fornite. I dati ricavati, sebbene non rappresentino dei valori certi, forniscono comunque delle stime utili per verificare a resistenza i componenti. L'approssimazione è comunque accettabile se si tiene conto dei valori notevolmente ridotti delle tensioni applicate agli elementi che si ottengono dal calcolo della risposta dinamica e riportati nell'equazione 3.3.

Un preventivo è stato fornito da *Reglass H.T. S.r.l.* per la realizzazione del carter di rigidità pari a 154 GPa in fibra di carbonio avente  $\rho \approx 1600 \text{ kg/m}^3$ ; il prezzo per il componente, rettificato esternamente, è di 140,00 €.

Un'ulteriore offerta è stata fatta da *Carbon Compositi S.r.l.* di un tubo con 120 GPa di rigidità e densità  $\rho \approx 1600 \text{ kg/m}^3$  ad un prezzo di 100,00 €. Per l'albero interno, un tubo in fibra di vetro avente  $E \approx 30 \text{ GPa}$  viene fornito a 30,00 €.

Considerando le informazioni ed i preventivi a disposizione, si hanno diverse soluzioni possibili, se ne mettono a confronto alcune sulla base delle caratteristiche ottenibili in termini di peso, vibrazioni trasmesse e del costo.

Una soluzione per ottenere un peso minimo della trasmissione senza avere costi eccessivi può essere ottenuta utilizzando componenti *Reglass* in fibra di carbonio per il carter ed in fibra di vetro per l'albero interno.

In questa configurazione la terza e la quarta frequenza propria si invertono; avendo irrigidito il carter ed utilizzando un albero più elastico la  $\omega_3$  aumenta fino a circa 1400 rpm e la  $\omega_4$  scende fino a 1300 rpm. Entrambe risultano comunque sufficientemente distanti dalla frequenza eccitatrice come emerge anche dalle vibrazioni trasmesse dalla cui analisi si ottiene  $A_8 \approx 0.6 \text{ m/s}^2$ . Il peso complessivo stimato della macchina si riduce di circa il 7% con un costo pari a 170,00 €.

Una soluzione intermedia dal punto di vista del costo, può essere ottenuta utilizzando lo stesso tubo per il carter e lasciando l'albero interno in alluminio. Le frequenze proprie diventano in questo caso:  $\omega_3 \approx 1400$  e  $\omega_4 \approx 1650$ , le vibrazioni trasmesse sono equivalenti rispetto al caso preceden-

te ( $A_8 \approx 0.6 \text{ m/s}^2$ ) ed il peso si riduce, rispetto al modello originale del 6%. Si può stimare il costo dei due componenti in 150,00 € inferiore rispetto al precedente, con un aumento di peso della macchina trascurabile.

Una terza soluzione più economica si ottiene utilizzando per il carter il tubo *Carbon Compositi* avente  $E \approx 120 \text{ GPa}$  e mantenendo l'albero di trasmissione in alluminio. Si ottiene  $\omega_3 \approx 1300$  e  $\omega_4 \approx 1650$  da cui si vede come si abbassi esclusivamente la terza frequenza propria e rimanga inalterata la quarta. Le vibrazioni trasmesse sono solo in minima parte aumentate rispetto ai casi precedenti e pari a  $A_8 \approx 1.0 \text{ m/s}^2$  ed il peso subisce una riduzione rispetto al modello originale del 6%; il costo complessivo dei componenti può essere stimato in 110,00 €

soluzione	Riduzione peso (%)	$A_8$ (m/s <sup>2</sup> )	$\omega$ (rpm)	Costo €
1	7%	0.6	1300	170,00 €
2	6%	0.6	1400	150,00 €
3	6%	1.0	1300	110,00 €

Tabella 3.6: Confronto tra le tre soluzioni ipotizzate

In tabella 3.6 si mettono a confronto i risultati ottenuti nelle tre soluzioni ipotizzate ed emerge come non siano convenienti le prime due soluzioni in quanto, ad un notevole aumento di spesa, portano il solo vantaggio di una esigua, se non trascurabile, riduzione delle vibrazioni trasmesse e della massa della macchina.

Si sceglie quindi la più economica tra le soluzioni e se ne calcolano le tensioni agenti su carter (pedice c) ed albero (pedice a). Nel sistema di riferimento dell'albero indicato con  $xyz$  le tensioni risultano:

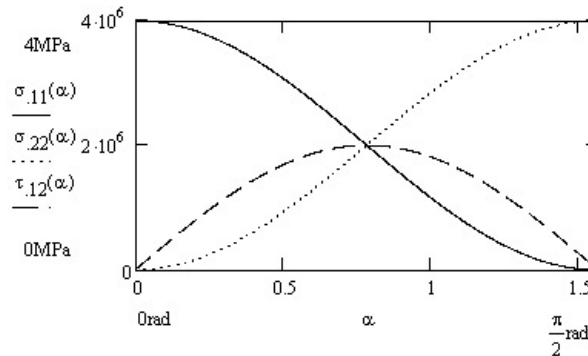
$$\sigma_{c,zz} \approx 4 \text{ MPa} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{a,zz} \approx 1 \text{ MPa} \quad (3.4)$$

$$\tau_{a,z\theta} \approx 7 \text{ MPa} \quad (3.5)$$

Non avendo a disposizione gli angoli di avvolgimento dei tubi si calcolano i valori delle tensioni agenti sul carter in funzione dell'angolo  $\alpha$ .

In modo cautelativo si possono considerare i valori massimi assunti da tali tensioni per la verifica dei componenti; si ottengono, per il carter, i seguenti valori di tensione nel sistema di riferimento delle fibre:

Figura 3.10: Andamento delle tensioni in funzione di  $\alpha$ 

$$\sigma_{c,11} \approx 4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c,22} \approx 4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{c,12} \approx 2 \text{ MPa}$$

Considerando gli andamenti delle tensioni riportati in figura 3.10 i ridotti valori di tensione ottenuti (equazione 3.3), il componente risulta verificato con un margine di sicurezza notevolmente ampio indipendentemente dall'angolo di avvolgimento. Se si considerano i valori di resistenza forniti per un pre-impregnato definiti in tabella 3.3 il coefficiente di sicurezza risulta superiore a 10 utilizzando come criterio di rottura quello della tensione massima riportato in [32] e [31].

Considerando i bassi valori di tensione e l'abbondante margine di sicurezza ricavato, non si ritiene necessario eseguire una verifica utilizzando criteri che tengano conto di effetti sinergici e delle differenze tra trazione e compressione come i criteri di massima deformazione, di *Tsai-Hill* e di *Tsai-Wu*; tali criteri sono infatti più vicini al comportamento reale del materiale ma le approssimazioni assunte nel calcolo delle tensioni e nella modellazione del sistema risultano comunque predominanti rispetto agli effetti trascurati con il criterio utilizzato.

Per quanto riguarda l'albero interno, si esegue una verifica seguendo un procedimento del tutto analogo a quanto descritto nel paragrafo 2.3.8. Essendo le tensioni inferiori rispetto al progetto originale, il coefficiente di sicurezza ne risulta aumentato e pari a:

$$\eta_a \approx 14$$

I componenti risultano così verificati con un margine di sicurezza decisamente maggiore rispetto al progetto originale; questo rende la nuova *Alice* più robusta e resistente rispetto ad eventuali carichi accidentali ed imprevisti; il suo peso risulta inferiore e le vibrazioni trasmesse vengono significativamente abbassate con un miglioramento complessivo delle principali caratteristiche della macchina ed un aumento di coto contenuto.

## Conclusioni e sviluppi futuri

Dopo uno studio approfondito della dinamica del sistema, si è studiata la variazione della risposta dinamica al variare dei principali parametri progettuali. Tra le varie possibili modifiche si sono individuate le più efficaci ed è stato possibile eseguire una ottimizzazione dei parametri progettuali, sulla base delle vibrazioni trasmesse, del peso della macchina e della stima del costo, in modo da ottenere un buon compromesso tra prezzo e prestazioni.

In particolare si è ottenuta una leggera diminuzione della massa della macchina (pari a circa il 6%), un significativo allontanamento dalle condizioni di risonanza e soprattutto una sensibile diminuzione delle vibrazioni trasmesse all'operatore. In tabella 3.7 si mettono a confronto le caratteristiche del modello attuale con il modello sviluppato nelle condizioni medie di presa definite al paragrafo 2.1; si riportano la massa  $M$  della macchina, la velocità critica  $\omega_c$  più vicina alle condizioni di risonanza (si ricorda che la pulsazione massima della forzante è pari a 1100 rpm), le vibrazioni trasmesse (attraverso il termine  $A_8$ , sulla base delle normative di riferimento [5]), il costo stimato  $C_t$  dei componenti della trasmissione ed il coefficiente di sicurezza  $\eta$ .

	Progetto originale	Nuova <i>Alice</i>
$M$ (kg)	3.5	3.3
$\omega_c$ (rpm)	1100	1600
$A_8$ (m/s <sup>2</sup> )	4.9	0.3
$C_t$ (€)	50,00	110,00
$\eta$	2.5	10

Tabella 3.7: Analisi dei miglioramenti ottenuti

Tali miglioramenti portano ad un maggiore comfort per l'operatore con suo minor affaticamento e conseguente aumento di produttività oltre a ridurre fino a quasi annullare la possibilità di sindrome da vibrazioni mano-braccio; gli elevati coefficienti di sicurezza infine forniscono delle solide garanzie di

robustezza della macchina. Tale miglioramento è ottenibile con un aumento di costo contenuto, soprattutto se si tiene conto della possibile riduzione nel caso di produzione su larga scala.

Il prodotto si configura così tra i più competitivi sul mercato grazie al suo peso contenuto, all'elevata produttività, alle minime vibrazioni trasmesse ed all'assenza di rumorosità ed altri disagi per il personale.

Il presente studio, apre inoltre la strada a possibili ulteriori sviluppi della macchina; se ne segnalano alcuni, tra i vari possibili, che potrebbero dimostrarsi i più efficaci per un successivo ed ulteriore miglioramento e sviluppo del progetto.

**Trasmissione telescopica:** l'applicazione dei materiali compositi ed in particolare della fibra di carbonio, grazie alla sua elevata rigidità specifica, può permettere un ulteriore allungamento del carter. Per non compromettere il comfort nell'utilizzo sulle fronde più basse è necessario prevedere un modello con sistema di trasmissione telescopico regolabile in lunghezza in modo da permettere di raggiungere i rami più alti delle piante ma mantenere la maneggevolezza e praticità dello strumento anche nelle aree più basse.

**Realizzazione ed analisi di un prototipo:** la realizzazione di un prototipo utilizzando elementi tubolari in fibra di carbonio, permetterebbe di misurare gli effettivi miglioramenti ottenuti in particolare per quanto riguarda le vibrazioni trasmesse all'operatore; consentirebbe inoltre di individuare eventuali nuovi campi di intervento.

**Studio approfondito della presa dell'operatore:** si è infatti utilizzato un modello di presa che, pur essendo adeguato al raggiungimento degli obiettivi preposti, potrebbe essere migliorato ed approfondito tenendo conto degli effetti di smorzamento ed utilizzando modelli più complessi ed articolati. Il modello sviluppato potrebbe essere utilizzato non solo per la macchina in esame ma anche per tutte le attrezzature impugnabili direttamente dall'operatore.

**Sistemi di isolamento da vibrazioni:** al fine di ridurre ulteriormente le vibrazioni trasmesse all'operatore, potrebbero essere sviluppati dei sistemi di impugnatura isolanti che rispettino la condizione di non limitare la libertà di presa in tutta la lunghezza del carter; si potrebbe inoltre sviluppare un sistema di supporto che, indossato dal personale, permetta di scaricare parte del peso e delle vibrazioni dello strumento sul busto e non esclusivamente sul sistema mano-braccio.



**Sviluppo ed ottimizzazione di altri componenti della macchina:** altri possibili sviluppi potrebbero riguardare l'applicazione di materiali compositi o comunque a basso peso specifico ad altri componenti della macchina, con particolare riferimento agli assiemi della testa e dell'impugnatura

# Appendice A

## File Mathcad analisi statica

## Analisi Statica

➔ Reference:D:\local\_data\_wildfire2\Dinamica\appendici\funzioni utili.xmcd(R)

### Caratteristiche geometriche

#### Carter

$$De := 34\text{mm}$$

$$Di := 32.3\text{mm}$$

$$La := 2.025\text{m}$$

#### Albero interno

$$De_i := 9.9\text{mm}$$

$$Di_i := 8\text{mm}$$

$$La_i := 2.025\text{m}$$

$$As := \pi \left[ \left( \frac{De}{2} \right)^2 - \left( \frac{Di}{2} \right)^2 \right]$$

$$As_i := \pi \left[ \left( \frac{De_i}{2} \right)^2 - \left( \frac{Di_i}{2} \right)^2 \right]$$

### Parametri

$$Mi := 1.752\text{kg} \text{ massa all'impugnatura}$$

$$Mf := 1.176\text{kg} \text{ massa sulla testa}$$

$$ab1 := 400\text{mm} \text{ Ampiezza di presa}$$

$$MM := 0.4\text{kg} \text{ Massa mano operatore}$$

$$kp := 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \text{ Rigidezza di presa}$$

$$\rho_i := 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_e := 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$M_c := \rho_e \cdot As \cdot La$$

$$M_c = 0.502 \text{ kg}$$

$$M_a := \rho_i \cdot As_i \cdot La$$

$$M_a = 0.151 \text{ kg}$$

$$M_{asta} := M_c + 1M_a$$

$$M_{asta} = 0.653 \text{ kg}$$

$$M_{tot} := M_{asta} + Mi + Mf$$

$$M_{tot} = 3.581 \text{ kg}$$

### Momenti di inerzia

$$J_{G1} := M_c \frac{3 \cdot \left( \frac{De}{2} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{Di}{2} \right)^2 + La^2}{12} + M_a \frac{3 \cdot \left( \frac{De_i}{2} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{Di_i}{2} \right)^2 + La_i^2}{12}$$

$$J_{G1} = 0.223 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

### Baricentro globale:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ ab1 \\ \frac{La}{2} \\ La \end{pmatrix} \quad Mx := \begin{pmatrix} Mi \\ 0 \\ M_{asta} \\ Mf \end{pmatrix} \quad i := 1..4 \quad xg := \frac{\sum_{i=1}^4 (Mx_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^4 Mx_i} \quad xg = 849.657\text{mm}$$

### Bracci

$$GG1 := \frac{La}{2} - xg \text{ distanza tra il baricentro dell'asta ed il baricentro globale}$$

$$AG := xg \text{ distanza tra il punto A ed il baricentro globale}$$

$EG := |La - xg|$  Distanza tra punto E e baricentro G

$BG := |xg - ab|$  Distanza tra il punto di presa B ed il baricentro G

$J_{G,asta} := J_{G1} + M_{asta} \cdot GG^2$  Momento di inerzia dell'asta rispetto al baricentro della struttura

$$J_{G,asta} = 0.241 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$J_G := (Mi + MM) \cdot AG^2 + MM \cdot BG^2 + Mf \cdot EG^2 + J_{G,asta}$

$$J_G = 3.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

momento di inerzia della struttura rispetto al suo baricentro

Si calcola l'inerzia a rotazione in funzione dei punti di presa.

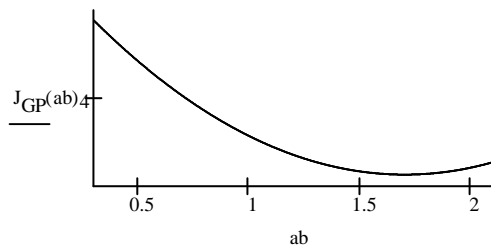
L'inerzia a rotazione da calcolare è quella rispetto al punto medio tra A e B1 e quindi dipende dall'ampiezza di presa

Distanze rispetto al punto GP

$$GPG1(ab) := \left| \frac{La}{2} - \frac{ab}{2} \right| \quad GPE(ab) := \left| La - \frac{ab}{2} \right|$$

$$J_{GP}(ab) := J_{G1} + M_{asta} \cdot GPG1(ab)^2 + Mi \cdot \left( \frac{ab}{2} \right)^2 + Mf \cdot GPE(ab)^2$$

$$J_{Alice}(ab) := J_{GP}(ab)$$



valore

$$J_{GP}(0.3\text{m}) = 4.883 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$P_{TOT} := M_{tot} \cdot g$$

$$A_x(\alpha) := P_{TOT} \cdot \sin(\alpha) \quad B_y(ab, \alpha) := P_{TOT} \cdot \frac{xg \cdot \cos(\alpha)}{ab} \quad A_y(ab, \alpha) := -B_y(ab, \alpha) + P_{TOT} \cdot \cos(\alpha)$$

$$A_r(ab, \alpha) := \sqrt{A_x(\alpha)^2 + A_y(ab, \alpha)^2}$$

$$\alpha_0 := 0$$

$$\alpha_1 := 45$$

$$\alpha_2 := 70$$

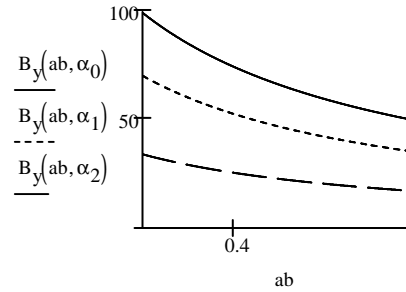
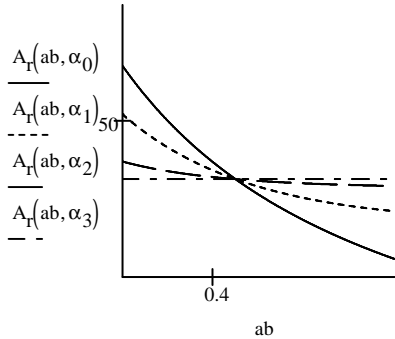
$$\alpha_3 := 90$$

$$\alpha_0 := \text{trad}(\alpha_0)$$

$$\alpha_1 := \text{trad}(\alpha_1)$$

$$\alpha_2 := \text{trad}(\alpha_2)$$

$$\alpha_3 := \text{trad}(\alpha_3)$$



$$A_I(0.4m, \alpha_1) = 37.365 \text{ N}$$

$$A_I(0.3m, \alpha_0) = 64.349 \text{ N}$$

$$B_Y(0.4m, \alpha_1) = 52.752 \text{ N}$$

$$B_Y(0.3m, \alpha_0) = 99.47 \text{ N}$$

Stima per il bilanciamento di  
"Giulivo":

$$M_{TOT} := 2.0 \text{ kg}$$

$$L_{ag} := 2.5 \text{ m}$$

Dati ottenuti dal catalogo  
Volpi

$$\rho_c := 1600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dato medio per fibre di  
carbonio

$$M_c := \rho_c \cdot A_s \cdot L_{ag} \quad M_c = 0.354 \text{ kg}$$

$$M_{tg} := M_{TOT} - M_c \quad M_{tg} = 1.646 \text{ kg}$$

Posizione del

$$x := \begin{pmatrix} \frac{L_{ag}}{2} \\ L_{ag} \end{pmatrix} \quad M_x := \begin{pmatrix} M_c \\ M_{tg} \end{pmatrix}$$

$$k := 1..2$$

$$x_G := \frac{\sum_{k=1}^2 (M_{x_k} \cdot x_k)}{\sum_{k=1}^2 M_{x_k}}$$

$$x_G = 2.279 \text{ m}$$

Calcolo del momento di

$$J_{G1} := M_c \cdot \frac{3 \cdot \left(\frac{D_e}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{D_i}{2}\right)^2 + L_{ag}^2}{12}$$

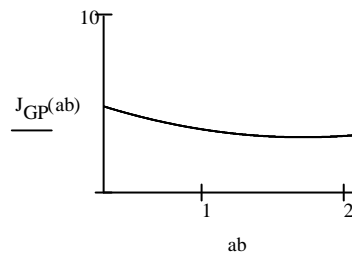
$$J_{G1} = 0.223 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

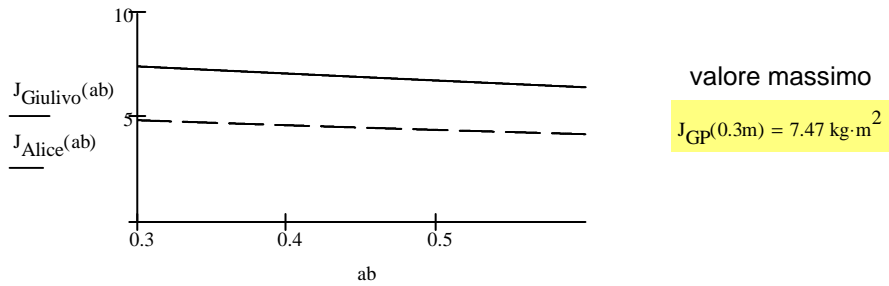
$$GPG1(ab) := \left| \frac{L_{ag}}{2} - \frac{ab}{2} \right|$$

$$GPE(ab) := \left| L_{ag} - \frac{ab}{2} \right|$$

$$J_{GP}(ab) := J_{G1} + M_{asta} \cdot GPG1(ab)^2 + M_f \cdot GPE(ab)^2$$

$$J_{Giulivo}(ab) := J_{GP}(ab)$$





Calcolo delle reazioni per Giulivo

$$P_{TOT} := M_{TOT} \cdot g$$

$$A_x(\alpha) := P_{TOT} \sin(\alpha) \quad B_y(ab, \alpha) := P_{TOT} \frac{x_G \cdot \cos(\alpha)}{ab} \quad A_y(ab, \alpha) := B_y(ab, \alpha) - P_{TOT} \cos(\alpha)$$

$$A_r(ab, \alpha) := \sqrt{A_x(\alpha)^2 + A_y(ab, \alpha)^2}$$

$$\alpha_0 := 0$$

$$\alpha_1 := 45$$

$$\alpha_2 := 70$$

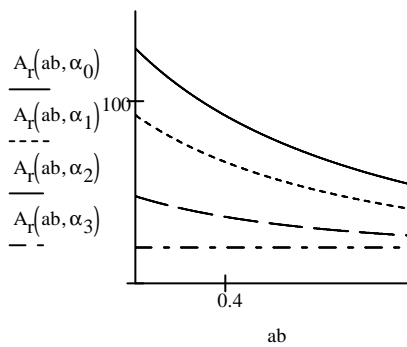
$$\alpha_3 := 90$$

$$\alpha_0 := \text{trad}(\alpha_0)$$

$$\alpha_1 := \text{trad}(\alpha_1)$$

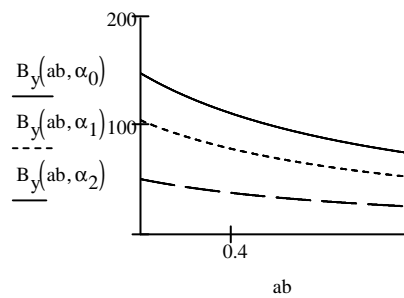
$$\alpha_2 := \text{trad}(\alpha_2)$$

$$\alpha_3 := \text{trad}(\alpha_3)$$



$$A_r(0.3m, \alpha_0) = 129.362 \text{ N}$$

$$B_y(0.3m, \alpha_0) = 148.976 \text{ N}$$



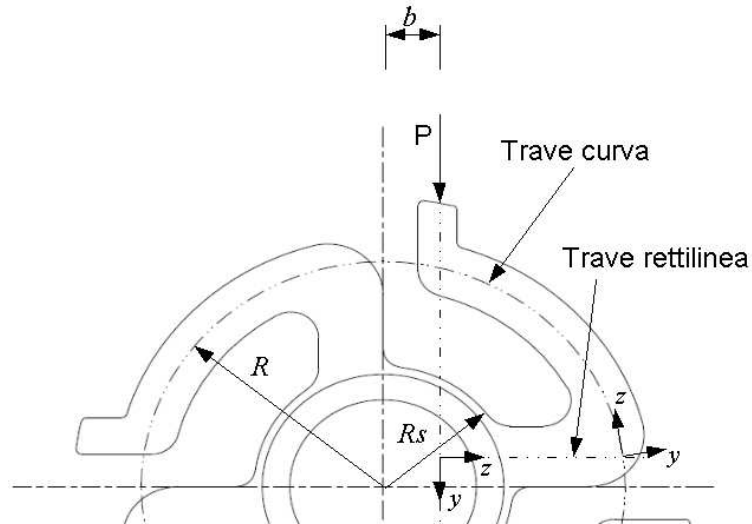
Le forze esercitate dall'operatore sono maggiori rispetto ad Aice.

## Appendice B

### File Mathcad Rigidezza cuscinetti

## Studio della rigidezza dei cuscinetti

➔ Reference:D:\local\_data\_wildfire2\Dinamica\Libreria Materiali.xmcd



### Materiale:

$$E_p := 3 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu_p := 0.4$$

$$\rho_p := 1.4 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$$

$$G_t := 1.071 \times 10^9 \text{ Pa}$$

### Caratteristiche geometriche

Si dividono le "alette" del cuscinetto in due tratti, uno rettilineo ed uno curvilineo

Raggio di curvatura

$$R_e := 14.5 \text{ mm} \quad \text{Raggio esterno del tratto curvo}$$

$$R_i := 11.5 \text{ mm} \quad \text{Raggio interno del tratto curvo}$$

$$R_o := \frac{R_e + R_i}{2} \quad \text{Raggio dell'asse (medio) del tratto curvo}$$

$$R_o = 0.013 \text{ m} \quad \text{corrisponde ad } R \text{ in figura}$$

$$b_b := 1.6 \text{ mm} \quad \text{distanza tra punto di applicazione del carico ed asse di rotazione del cuscinetto (quota } b \text{ in figura)}$$

$$R_s := 7 \text{ mm} \quad \text{Raggio della circonferenza da cui inizia il tratto rettilineo di trave (} R_s \text{ in figura)}$$

$$\text{Altezza tratto curvo} \quad h := R_e - R_i \quad h = 3 \text{ mm}$$

$$\text{Altezza sezione tratto rettilineo} \quad h_r := 3 \text{ mm}$$



Lunghezza trave curva  $l_c := Ro \cdot \frac{\pi}{2} - bb$   $l_c = 18.82\text{mm}$   
 Lunghezza trave rettilinea  $l_r := Ro - Rs$   $l_r = 6\text{mm}$

Base della sezione:  $b := 5\text{mm}$

tratto curvo  $Asp := b \cdot h$   $Asp = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$   $I_{xp} := \frac{b \cdot h^3}{12}$   $I_{xp} = 1.125 \times 10^{-11} \text{ m}^4$

tratto rettilineo  $Asp_r := b \cdot h_r$   $Asp_r = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$   $I_{xp_r} := \frac{b \cdot h_r^3}{12}$   $I_{xp_r} = 1.125 \times 10^{-11} \text{ m}^4$

Distanza tra asse centrale ed asse neutro (teoria delle travi

cu  $ecp := Ro - \frac{h}{\ln \left( \frac{Ro + \frac{h}{2}}{Ro - \frac{h}{2}} \right)}$   $ecp = 0.058\text{mm}$

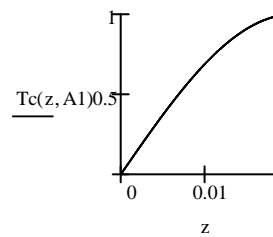
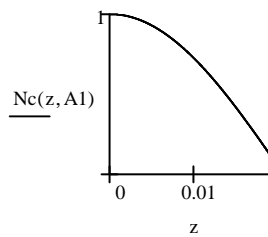
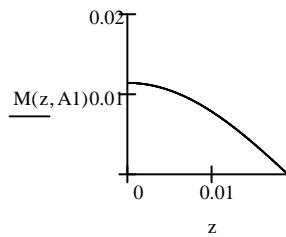
$ec2p := \frac{I_{xp}}{Ro \cdot Asp}$   $ec2p = 0.058\text{mm}$

### Caratteristiche di sollecitazione

Tratto curvo

$A1 := 1\text{N}$  Carico esploratore unitario

$M(z, P) := P \cdot Ro \cdot \cos\left(\frac{z}{Ro}\right) - P \cdot bb$   $Nc(z, P) := P \cdot \cos\left(\frac{z}{Ro}\right)$   $Tc(z, P) := P \cdot \sin\left(\frac{z}{Ro}\right)$



### Calcolo del lavoro di deformazione

$Lav_f := \frac{1}{2E_p \cdot I_{xp}} \left( \int_0^{l_c} M(z, A1)^2 dz \right)$   $Lav_f = 1.831 \times 10^{-5} \text{ J}$  Lavoro a flessione del tratto curvo senza considerare la teoria delle travi curve

$\chi_t := \frac{5}{6}$   $Lav_t := \int_0^{l_c} \frac{Tc(z, A1)^2}{2 \left( \frac{Gt \cdot Asp}{\chi_t} \right)} dz$   $Lav_t = 2.235 \times 10^{-7} \text{ J}$  Lavoro a taglio del tratto curvo

$$L_{av_n} := \int_0^{l_c} \frac{N_c(z, A1)^2}{2E_p \cdot Asp} dz \quad L_{av_n} = 1.134 \times 10^{-7} \text{ J} \quad \text{Lavoro a forza normale del tratto curvo}$$

Il lavoro flessionale è decisamente prevalente, come prevedibile. Ci sono due ordini di grandezza di differenza, in ogni caso si considerano tutti i contributi.

$$L_{av_c} := L_{av_f} + L_{av_t} + L_{av_n}$$

### Calcolo della rigidezza

$$\delta_c := \frac{2 \cdot L_{av_c}}{A1} \quad \delta_c = 0.037 \text{ mm} \quad k_c := \frac{A1}{\delta_c} \quad k_c = 26.82 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{Solo tratto curvo di trave, senza utilizzare la teoria delle travi curve}$$

### Caratteristiche di sollecitazione

#### Tratto rettilineo

Si posiziona il sistema di rif. con origine di z posizionato in linea con il carico in modo da rendere semplice la scrittura del momento. Dovrò tenerne conto nell'integrale considerando gli estremi giusti.

$$M_r(z, P) := P \cdot z \quad T_r(z, P) := P$$

### Calcolo del lavoro di deformazione

L'integrazione deve partire dal punto di inizio della trave che corrisponde a z=Ro-bb. L'altro estremo sarà la fine della trave e quindi Ro-bb.

$$L_{av_{rf}} := \frac{1}{2E_p \cdot I_{x_{r_f}}} \int_{R_s-bb}^{R_o-bb} M_r(z, A1)^2 dz \quad L_{av_{rf}} = 6.539 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$L_{av_{rt}} := \int_0^{l_r} \frac{T_c(z, A1)^2}{2 \left( \frac{Gt \cdot Asp_r}{\chi t} \right)} dz \quad L_{av_{rt}} = 1.059 \times 10^{-8} \text{ J}$$

$$L_{av_r} := L_{av_{rf}} + L_{av_{rt}} \quad \text{Lavoro del tratto rettilineo}$$

$$L_{av} := L_{av_c} + L_{av_r} \quad \text{Lavoro totale}$$

### Calcolo della rigidezza

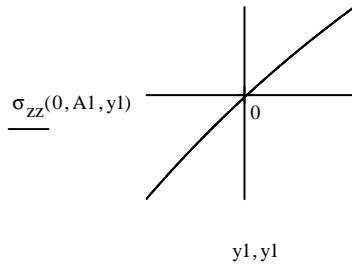
$$\delta_{rc} := \frac{2 \cdot L_{av}}{A1} \quad \delta_{rc} = 0.05 \text{ mm} \quad k_1 := \frac{A1}{\delta_{rc}} \quad k_1 = 19.848 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{Due tratti di trave, senza teoria travi curve}$$

Fin qui non si è utilizzata la teoria delle travi curve, si è studiata la trave come se fosse rettilinea. Si potrebbero avere delle differenze nel tratto curvo di trave.

### Calcolo del lavoro di deformazione (teoria delle travi curve)

Le tensioni in direzione z risultano

$$\rho_0 := R_0 - e_{cp} \quad \sigma_{zz}(z, P, y1) := \frac{M(z, P)}{e_{cp} \cdot A_{sp}} \cdot \frac{y1}{y1 + \rho_0}$$



la tensione è funzione di z e di y.  
Si integra sull'area e poi sulla lunghezza per trovare il momento totale, moltiplicando anche per le deformazioni, anch'esse integrate sul dominio, si ricava il lavoro.

Essendo:  $L = \sigma \cdot \epsilon$      $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$      $L = \frac{\sigma^2}{E}$

Si ha:

$$L_{av_{fc}} := b \cdot \int_0^{lc} \left( \int_{\frac{-h}{2} + e_{cp}}^{\frac{h}{2} + e_{cp}} \frac{\sigma_{zz}(z, A1, y1)^2}{E_p} dy1 \right) dz$$

Si trascura l'effetto della curvatura nel taglio

$L_{av_{fc}} = 3.674 \times 10^{-5} \text{ J}$     Lavoro flessionale del tratto curvo utilizzando la teoria delle travi curve

$L_{av_t} = 2.235 \times 10^{-7} \text{ J}$     Lavoro dovuto al taglio del tratto curvo (comunque è trascurabile)

$L_{av_n} = 1.134 \times 10^{-7} \text{ J}$     Lavoro "normale" del tratto curvo (comunque è trascurabile)

$L_{av_r} = 6.549 \times 10^{-6} \text{ J}$     Lavoro del tratto rettilineo di trave

$L_{av_{tot}} := L_{av_{fc}} + L_{av_t} + L_{av_n} + L_{av_r}$      $L_{av_{tot}} = 4.363 \times 10^{-5} \text{ J}$     Lavoro totale

### Calcolo della rigidezza

$\delta_3 := \frac{2 \cdot L_{av_{tot}}}{A1}$      $\delta_3 = 0.087 \text{ mm}$      $kk := \frac{A1}{\delta_3}$

$$k_k = 11.46 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Due tratti di trave, con la teoria delle travi curve

### Rigidezza complessiva del cuscinetto

Quindi ogni "aletta" ha rigidezza pari a  $k_2$ . abbiamo 4 alette, due in direzione x e due in direzione y, tutte montate in parallelo (le rigidezze quindi si sommano). Quindi in ciascuna direzione avremo delle molle di rigidezza  $k_x$  e  $k_y$  uguali tra loro

$$k_2 := 2 \cdot k_k$$

$$k_y := k_2$$

$$k_2 = 22.921 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Considerando solo la flessione si otterrebbe:

$$L_{av_{tot}} := L_{av_{fc}} + L_{av_{rf}} \quad L_{av_{tot}} = 4.328 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$\delta_3 := \frac{2 \cdot L_{av_{tot}}}{A_1} \quad \delta_3 = 0.087 \text{ mm} \quad k_{k_f} := \frac{A_1}{\delta_3} \quad k_{k_f} = 11.552 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{Due tratti di trave, con la teoria delle travi curve, solo flessione}$$

$$k_{2_f} := 2 \cdot k_{k_f}$$

$$k_{2_f} = 23.105 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

I due valori possono considerarsi coincidenti.

# Appendice C

## File Mathcad Schema C3

## Analisi della trasmissione

ORIGIN := 1

### Funzioni varie

$\text{rpm} := 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}$  definizione unità: rotazioni per minuto.       $\text{trad}(\delta) := \delta \cdot \frac{2\pi}{360}$       Funzioni di conversione  
 $\text{Tp}(\omega) := \frac{2\pi \text{rad}}{\omega}$  Funzione per ottenere il periodo da  $\omega$        $\text{grad}(\delta) := \delta \cdot \frac{360}{2\pi}$

### Scelta dei parametri di progetto

Materiale:

(2 "Alluminio")
(3 "Acciaio generico")
(4 "PVC")
(5 "AS4/APC2 Carbon/PEEK")
(6 "Generic IM6/Epoxy Carbon/Epoxy")
(7 "Generic E-Glass/Epoxy")
(8 ""CFS/LTM25")
(9 ""GY70Carbon/934Epoxy")
(10 ""IM6Carbon/SC1081Epoxy")
(11 "ModlCarbon/WRD9371Polymide")
(12 "MR50Carbon/LTM25Epoxy")
(13 "NAS-S12KCarbon/NCT321Epoxy")
(14 ""T300Carbon/5208Epoxy")
(15 ""T300Carbon/934Epoxy")
(16 ""149AramidKevlar/Generic Epoxy")

Legenda =

Albero esterno (carter)      **mat\_e := 2**      Albero interno (trasmissione)      **mat\_i := 2**

Da qui si può scegliere il materiale (identificato dal numero in legenda) le caratteristiche tecniche complete sono riportate nel file "Libreria materiali" dove si possono aggiungere nuovi materiali

Angolo di orientamento delle fibre (in gradi):

si riferisce all'angolo con cui viene avvolto il tape nella realizzazione del tubolare. si considera una sequenza di impilamento angle ply ([+ $\alpha$ , - $\alpha$ ] $n$ ). Se il materiale scelto è omogeneo, il dato è ininfluente

Carter      Albero interno (trasmissione)  
 **$\alpha_{0e} := 22.5$**        **$\alpha_{0i} := 20$**

### Calcolo della rigidezza equivalente

Caratteristiche delle lamine

Reference:D:\local\_data\_wildfire2\Dinamica\Libreria Materiali V2.x, richiama il file da cui legge i dati del materiale

$E_{e11} := \text{GPaMaterials}_{\text{mat}_e, 2}$        $E_{e11} = 72 \text{ GPa}$        $E_{i11} := \text{GPaMaterials}_{\text{mat}_i, 2}$        $E_{i11} = 72 \text{ GPa}$

$E_{e22} := \text{GPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_e,3}$	$E_{e22} = 72 \text{ GPa}$	$E_{i22} := \text{GPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_i,3}$	$E_{i22} = 72 \text{ GPa}$
$G_{e12} := \text{GPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_e,4}$	$G_{e12} = 27.273 \text{ GPa}$	$G_{i12} := \text{GPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_i,4}$	$G_{i12} = 27.273 \text{ GPa}$
$\nu_{e12} := \text{Materiali}_{\text{mat}_e,5}$	$\nu_{e12} = 0.32$	$\nu_{i12} := \text{Materiali}_{\text{mat}_i,5}$	$\nu_{i12} = 0.32$
$\rho_e := \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{Materiali}_{\text{mat}_e,6}$	$\rho_e = 2.8 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\rho_i := \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{Materiali}_{\text{mat}_i,6}$	$\rho_i = 2.8 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\nu_{e21} := \nu_{e12} \frac{E_{e22}}{E_{e11}}$	$\nu_{e21} = 0.32$	$\nu_{i21} := \nu_{i12} \frac{E_{i22}}{E_{i11}}$	$\nu_{i21} = 0.32$
$F_{e1t} := \text{MPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_e,10}$	$F_{e1t} = 0 \text{ Pa}$	$F_{i1t} := \text{MPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_i,10}$	$F_{i1t} = 0 \text{ Pa}$
$F_{e2t} := \text{MPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_e,11}$	$F_{e2t} = 0 \text{ Pa}$	$F_{i2t} := \text{MPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_i,11}$	$F_{i2t} = 0 \text{ Pa}$
$F_{e6} := \text{MPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_e,12}$	$F_{e6} = 0 \text{ Pa}$	$F_{i6} := \text{MPa} \text{Materiali}_{\text{mat}_i,12}$	$F_{i6} = 0 \text{ Pa}$

▲ Caratteristiche delle lamine

▼ Caratteristiche geometriche

Carter

$La := 2.025\text{m}$        $De := 0.034\text{m}$        $Di := 0.0323\text{m}$

Sezione       $As := \pi \left[ \left( \frac{De}{2} \right)^2 - \left( \frac{Di}{2} \right)^2 \right]$

Momento       $I_x := \frac{\pi}{64} (De^4 - Di^4)$

Albero interno (trasmissione)

$La_i := 2.025\text{m}$        $De_i := 0.0099\text{m}$        $Di_i := 0.008\text{m}$

Sezione       $As_i := \pi \left[ \left( \frac{De_i}{2} \right)^2 - \left( \frac{Di_i}{2} \right)^2 \right]$

Momento       $I_{x_i} := \frac{\pi}{64} (De_i^4 - Di_i^4)$

Spessore e diametro medio

$se_{\text{tot}} := \frac{De - Di}{2}$        $Dme := \frac{De + Di}{2}$        $si_{\text{tot}} := \frac{De_i - Di_i}{2}$        $Dmi := \frac{De_i + Di_i}{2}$

massa      appoggi      massa

A      B      C      D      E

$ab := 55\text{mm}$        $ae := La$        $de := ab$

$ad := ae - de$        $bd := ae - ab - de$

$ac := ab + \frac{bd}{2}$        $ad := ab + bd$

▲ Caratteristiche geometriche

Analisi di una lamina

Consideriamo due sistemi di riferimento: il primo orientato come l'asse del tubo (x-y-z) con l'asse z coincidente con l'asse di rotazione; il secondo orientato secondo le fibre (1-2-3) con l'asse 1 allineato con le fibre.

Per passare da in sistema di riferimento all'altro utilizziamo la matrice di trasformazione T, con l'angolo b da esprimere

$$\text{Tr}(\beta) := \begin{pmatrix} \cos(\beta)^2 & \sin(\beta)^2 & 2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\beta)^2 & \cos(\beta)^2 & -2 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \cdot \sin(\beta) & \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) & \cos(\beta)^2 - \sin(\beta)^2 \end{pmatrix}$$

Matrice di compliance scritta nel sistema di riferimento orientato come le fibre (1-2-3)

$$\text{Ce}_{123} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{Ee}_{11}} & \frac{-\nu\text{e}_{12}}{\text{Ee}_{11}} & 0 \\ \frac{-\nu\text{e}_{12}}{\text{Ee}_{11}} & \frac{1}{\text{Ee}_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2 \cdot \text{Ge}_{12}} \end{pmatrix} \quad \text{Ci}_{123} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{Ei}_{11}} & \frac{-\nu\text{i}_{12}}{\text{Ei}_{11}} & 0 \\ \frac{-\nu\text{i}_{12}}{\text{Ei}_{11}} & \frac{1}{\text{Ei}_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2 \cdot \text{Gi}_{12}} \end{pmatrix}$$

Spostamento nel sistema xyz, orientato secondo l'asse di rotazione

$$\text{Ce}_{\text{xyz}}(\theta) := \text{Tr}(-\theta) \cdot \text{Ce}_{123} \cdot \text{Tr}(\theta)$$

$$\text{Ci}_{\text{xyz}}(\theta) := \text{Tr}(-\theta) \cdot \text{Ci}_{123} \cdot \text{Tr}(\theta)$$

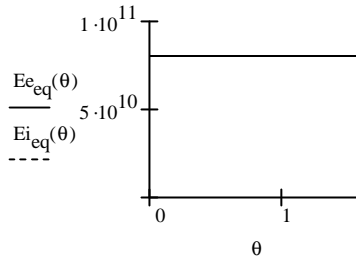
$$\text{Qe}_{\text{xyz}}(\theta) := \text{Ce}_{\text{xyz}}(\theta)^{-1}$$

$$\text{Qi}_{\text{xyz}}(\theta) := \text{Ci}_{\text{xyz}}(\theta)^{-1}$$

Modulo equivalente, in funzione dell'angolo di fibra

$$\text{Ee}_{\text{eq}}(\theta) := \text{Qe}_{\text{xyz}}(\theta)_{1,1}$$

$$\text{Ei}_{\text{eq}}(\theta) := \text{Qi}_{\text{xyz}}(\theta)_{1,1}$$



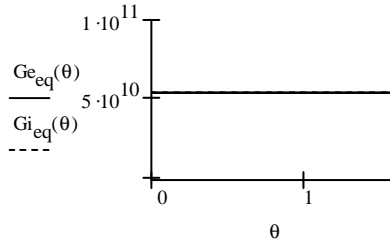
Il valore è costante se il materiale è isotropo, varia nel caso di materiali compositi. Per fibre orientate secondo l'asse otteniamo esattamente il valore E11, per angoli di 90° si ha un minimo ed otteniamo E22 pari al modulo della matrice.

Modulo di taglio equivalente, in funzione dell'angolo di fibra

$$\text{Ge}_{\text{eq}}(\theta) := \text{Qe}_{\text{xyz}}(\theta)_{3,3}$$

$$\text{Gi}_{\text{eq}}(\theta) := \text{Qi}_{\text{xyz}}(\theta)_{3,3}$$



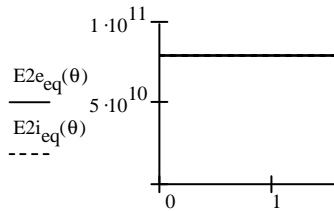


La rigidità a taglio è massima per fibre orientate a 45, (direzione di massima sollecitazione), mentre assume valori minimi per angoli pari a 0° e 90°. Ovviamente risulta costante per un materiale isotropo

$$E2e_{eq}(\theta) := Q_{e_{xyz}}(\theta)_{2,2}$$

$$E2i_{eq}(\theta) := Q_{i_{xyz}}(\theta)_{2,2}$$

La E2 assume un andamento "complementare" alla Eeq, con massimo a 90° e minimo a 0°.



E' costante per un materiale isotropo

▲ Analisi di una lamina

▼ Analisi del laminato

Carter

$$se_1 := \text{Materiali}_{mat\_e,9} \text{ mm}$$

$$\text{isotropo}_e := \text{Materiali}_{mat\_e,8}$$

$$se_1 := \begin{cases} se_{tot} & \text{if } \text{isotropo}_e = 1 \\ se_1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad se_{tot} = 0.85 \text{ mm}$$

$$se_1 = 8.5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$ne := \text{round}\left(\frac{se_{tot}}{se_1}\right)$$

$$ne = 1$$

$$Setot := ne \cdot se_1 \quad Setot = 8.5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$ke := 1..ne$$

Albero interno (trasmissione)

$$si_1 := \text{Materiali}_{mat\_i,9} \text{ mm}$$

$$\text{isotropo}_i := \text{Materiali}_{mat\_i,8}$$

$$si_1 := \begin{cases} si_{tot} & \text{if } \text{isotropo}_i = 1 \\ si_1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad si_{tot} = 0.95 \text{ mm}$$

$$si_1 = 9.5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$ni := \text{round}\left(\frac{si_{tot}}{si_1}\right)$$

$$ni = 1$$

$$Sitot := ni \cdot si_1 \quad Sitot = 9.5 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$ki := 1..ni$$

Definizione dei bordi delle lamine in un sistema di riferimento centrato a metà spessore

$$ze_{ke} := se_1 \cdot ke - \frac{ne \cdot se_1}{2}$$

$$zme_{ke} := ze_{ke} - \frac{se_1}{2}$$

$$zi_{ki} := si_1 \cdot ki - \frac{ni \cdot si_1}{2}$$

$$zmi_{ki} := zi_{ki} - \frac{si_1}{2}$$

Trattandosi di un tubo in materiale composito, prodotto con tecnica Filament winding, si considerano sequenze di impilamento angle ply del tipo  $[\alpha, -\alpha]_m$  con  $m=n/2$

$$\alpha1e := \text{trad}(\alpha0e) \quad \alpha1i := \text{trad}(\alpha0i)$$

$$\alpha_{2e}(ke) := \begin{cases} \alpha_{1e} & \text{if } \text{mod}(ke, 2) = 0 \\ -\alpha_{1e} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha_{2i}(ki) := \begin{cases} \alpha_{1i} & \text{if } \text{mod}(ki, 2) = 0 \\ -\alpha_{1i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha_{e_{ke}} := \alpha_{2e}(ke)$$

$$\alpha_{i_{ki}} := \alpha_{2i}(ki)$$

La matrice Q, nel caso di un materiale anisotropo, è diversa per ogni lamin

$$Q_{e_{lam_{ke}}} := C_{e_{xyz}}(\alpha_{e_{ke}})^{-1}$$

$$Q_{i_{lam_{ki}}} := C_{i_{xyz}}(\alpha_{i_{ki}})^{-1}$$

Calcolo delle matrici globali

$$A_{ge} := \sum_{ke=1}^{ne} (Q_{e_{lam_{ke}}} \cdot s_{e1})$$

$$A_{gi} := \sum_{ki=1}^{ni} (Q_{i_{lam_{ki}}} \cdot s_{i1})$$

$$B_{ge} := \sum_{ke=1}^{ne} (Q_{e_{lam_{ke}}} \cdot s_{e1} \cdot z_{m_{e_{ke}}})$$

$$B_{gi} := \sum_{ki=1}^{ni} (Q_{i_{lam_{ki}}} \cdot s_{i1} \cdot z_{m_{i_{ki}}})$$

$$D_{ge} := \sum_{ke=1}^{ne} \left[ Q_{e_{lam_{ke}}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ \left[ -(z_{e_{ke}} - s_{e1}) \right]^3 + (z_{e_{ke}})^3 \right] \right] \quad D_{gi} := \sum_{ki=1}^{ni} \left[ Q_{i_{lam_{ki}}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ \left[ -(z_{i_{ki}} - s_{i1}) \right]^3 + (z_{i_{ki}})^3 \right] \right]$$

#### Analisi del laminato

#### Rigidezza equivalente

Consideriamo il laminato come un elemento trave, di tipo angle ply.

Per la particolare sequenza di impilamento, il modulo elastico in direzione assiale ( $E_{xx}$ ) sarà lo stesso per ogni lamina. Dato che il tubo sottoposto a flessione, lavora in modo prevalentemente membranale, sarà sufficiente moltiplicare tale valore di E per il momento di inerzia della sezione.

$$E_{e_{lam_{ke}}} := E_{e_{eq}}(\alpha_{2e}(ke))$$

$$E_{i_{lam_{ki}}} := E_{i_{eq}}(\alpha_{2i}(ki))$$

$$E_{l_{e_1}} := E_{e_{lam_1}} \cdot I_x$$

$$E_{l_{i_1}} := E_{i_{lam_1}} \cdot I_x$$

$$E_{e_{eq}} := \begin{cases} E_{e_{11}} & \text{if } \text{isotropo}_e = 1 \\ E_{e_{lam_1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_{i_{eq}} := \begin{cases} E_{i_{11}} & \text{if } \text{isotropo}_i = 1 \\ E_{i_{lam_1}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Volendo modificare i valori di rigidezza e densità dei componenti indipendentemente dal materiale scelto (utile in fase progettuale per stimare gli effetti delle variazioni delle grandezze progettuali), abilitare la valutazione delle seguenti equazioni ed impostare i valori richiesti

$$E_{e_{eq}} := 170 \text{ GPa}$$

$$\rho_e := 1.6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$E_{i_{eq}} := 70 \text{ GPa}$$

$$\rho_i := 1.6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$E_{l_e} := E_{e_{eq}} \cdot I_x$$

$$E_{l_i} := E_{i_{eq}} \cdot I_x$$

#### Rigidezza equivalente

Carter

$$E_{eq_e} = 72 \text{ GPa}$$

Albero interno (trasmissione)

$$E_{eq_i} = 72 \text{ GPa}$$

### Parametri di presa

$$k_{2c} := 23.317 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad \text{Rigidezza dei cuscinetti, calcolata nel file: cuscinetti}$$

$$k_p := 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{Rigidezza presa operatore}$$

$$ab1 := 400 \text{ mm} \quad \text{Ampiezza di presa}$$

$$MM := 0.4 \text{ kg} \quad \text{Massa mano}$$

$$Mi := 1.752 \text{ kg} \quad \text{Massa punto A (impugnatura)}$$

$$Mf := 1.176 \text{ kg} \quad \text{Massa punto E (testa)}$$

#### ▾ Stima massa totale

$$M_e := A_s \cdot La \cdot \rho_e$$

$$M_e = 0.502 \text{ kg}$$

$$M_i := A_{s_i} \cdot La \cdot \rho_i$$

$$M_i = 0.151 \text{ kg}$$

$$M_{TOT} := M_i + M_f + M_e + M_i$$

Stima della massa totale della macchina:  $M_{TOT} = 3.581 \text{ kg}$

#### ▢ Stima massa totale

### Analisi modale del sistema completo

#### ▾ Parametri adimensionali

$$v_{fi} := \sqrt{\frac{EI_i}{\rho_i \cdot A_{s_i}}} \quad v_{fe} := \sqrt{\frac{EI_e}{\rho_e \cdot A_s}} \quad r := \frac{M_i + MM}{M_f} \quad \lambda_p := \frac{EI_e}{k_p \cdot La^3} \quad \lambda_2 := \frac{EI_i}{k_{2c} \cdot La^3} \quad \lambda_1 := \frac{EI_e}{k_{2c} \cdot La^3} \quad \delta_1 := EI_e$$

$$\phi := \sqrt{\frac{v_{fe}}{v_{fi}}} \quad \alpha := \frac{M_f \cdot v_{fe}^2}{La} \quad \alpha_p := \frac{MM \cdot v_{fe}^2}{La^4 \cdot k_p} \quad \alpha_{pi} := \frac{(MM + M_i) \cdot v_{fe}^2}{La^4 \cdot k_p} \quad \delta_2 := EI_i \quad B := \frac{ab}{La} \quad C := \frac{ac}{La}$$

$$D := \frac{ad}{La} \quad BB := \frac{ab1}{La}$$

#### ▢ Parametri adimensionali

#### ▾ Funzioni di spostamento

$$Z(\Psi, \epsilon_1) := (\cos(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \sin(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \cosh(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \sinh(\Psi \cdot \epsilon_1))$$

$$Z_I(\Psi, \epsilon_1) := (-\sin(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \cos(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \sinh(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \cosh(\Psi \cdot \epsilon_1))$$

$$Z_{II}(\Psi, \epsilon_1) := (-\cos(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad -\sin(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \cosh(\Psi \cdot \epsilon_1) \quad \sinh(\Psi \cdot \epsilon_1))$$

$$Z_{III}(\Psi, \varepsilon 1) := (\sin(\Psi \cdot \varepsilon 1) \quad -\cos(\Psi \cdot \varepsilon 1) \quad \sinh(\Psi \cdot \varepsilon 1) \quad \cosh(\Psi \cdot \varepsilon 1))$$

▣ Funzioni di spostamento

▣ Condizioni al contorno

Funzione nulla     zero(x, y) := 0

Matrice di zeri     o := matrix(1, 4, zero)

$$MA(\varepsilon 1) := \begin{bmatrix} (1 - \alpha p \cdot \varepsilon 1^4) \cdot Z(0, \varepsilon 1) + \lambda p \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(0, \varepsilon 1) & o & o & o & o & o & o \\ Z_{II}(0, \varepsilon 1) & o & o & o & o & o & o \end{bmatrix}$$

$$MB(\varepsilon 1) := \begin{bmatrix} Z(B, \varepsilon 1) & -Z(B, \varepsilon 1) & o & o & o & o & o \\ Z_I(B, \varepsilon 1) & -Z_I(B, \varepsilon 1) & o & o & o & o & o \\ Z_{II}(B, \varepsilon 1) & -Z_{II}(B, \varepsilon 1) & o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o & Z_{II}(B \cdot \phi, \varepsilon 1) & o \\ \lambda 1 \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(B, \varepsilon 1) & -\lambda 1 \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(B, \varepsilon 1) - Z(B, \varepsilon 1) & o & o & o & Z(B \cdot \phi, \varepsilon 1) & o \\ o & Z(B, \varepsilon 1) & o & o & o & \lambda 2 \cdot (\varepsilon 1 \cdot \phi)^3 \cdot Z_{III}(B \cdot \phi, \varepsilon 1) - Z(B \cdot \phi, \varepsilon 1) & o \end{bmatrix}$$

$$MBB(\varepsilon 1) := \begin{bmatrix} o & Z(BB, \varepsilon 1) & -Z(BB, \varepsilon 1) & o & o & o & o \\ o & Z_I(BB, \varepsilon 1) & -Z_I(BB, \varepsilon 1) & o & o & o & o \\ o & Z_{II}(BB, \varepsilon 1) & -Z_{II}(BB, \varepsilon 1) & o & o & o & o \\ o & \lambda p \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(BB, \varepsilon 1) + (\alpha p \cdot \varepsilon 1^4 - 1) \cdot Z(BB, \varepsilon 1) & -\lambda p \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(BB, \varepsilon 1) & o & o & o & o \end{bmatrix}$$

$$MC(\varepsilon 1) := \begin{bmatrix} o & o & Z(C, \varepsilon 1) & -Z(C, \varepsilon 1) & o & o & o \\ o & o & Z_I(C, \varepsilon 1) & -Z_I(C, \varepsilon 1) & o & o & o \\ o & o & Z_{II}(C, \varepsilon 1) & -Z_{II}(C, \varepsilon 1) & o & o & o \\ o & o & o & o & o & Z(C \cdot \phi, \varepsilon 1) & o \\ o & o & o & o & o & Z_I(C \cdot \phi, \varepsilon 1) & o \\ o & o & o & o & o & Z_{II}(C \cdot \phi, \varepsilon 1) & o \\ o & o & \lambda 1 \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(C, \varepsilon 1) - Z(C, \varepsilon 1) & -\lambda 1 \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(C, \varepsilon 1) & o & Z(C \cdot \phi, \varepsilon 1) & o \\ o & o & Z(C, \varepsilon 1) & o & o & \lambda 2 \cdot (\varepsilon 1 \cdot \phi)^3 \cdot Z_{III}(C \cdot \phi, \varepsilon 1) - Z(C \cdot \phi, \varepsilon 1) & -\lambda 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Z(C \cdot \phi, \epsilon 1) \\ -Z_I(C \cdot \phi, \epsilon 1) \\ -Z_{II}(C \cdot \phi, \epsilon 1) \\ 0 \\ 2 \cdot (\epsilon 1 \cdot \phi)^3 \cdot Z_{III}(C \cdot \phi, \epsilon 1) \end{bmatrix}$$

$$MD(\varepsilon 1) := \begin{pmatrix} o & o & o & Z(D, \varepsilon 1) & -Z(D, \varepsilon 1) & o & o \\ o & o & o & Z_I(D, \varepsilon 1) & -Z_I(D, \varepsilon 1) & o & o \\ o & o & o & Z_{II}(D, \varepsilon 1) & -Z_{II}(D, \varepsilon 1) & o & o \\ o & o & o & o & o & o & Z_{II}(D \cdot \phi, \varepsilon 1) \\ o & o & o & \lambda 1 \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(D, \varepsilon 1) - Z(D, \varepsilon 1) & -\lambda 1 \cdot \varepsilon 1^3 \cdot Z_{III}(D, \varepsilon 1) & o & Z(D \cdot \phi, \varepsilon 1) \\ o & o & o & Z(D, \varepsilon 1) & o & o & \lambda 2 \cdot (\varepsilon 1 \cdot \phi)^3 \cdot Z_{III}(D \cdot \phi, \varepsilon 1) - Z(D \cdot \phi, \varepsilon 1) \end{pmatrix}$$

$$ME(\varepsilon 1) := \begin{pmatrix} o & o & o & \frac{-\alpha \cdot \varepsilon 1}{\delta 1} \cdot Z(I, \varepsilon 1) - Z_{III}(I, \varepsilon 1) & o & o \\ o & o & o & Z_{II}(I, \varepsilon 1) & o & o \end{pmatrix}$$

▣ Condizioni al contorno

▣ Assemblaggio matrici

$$MA1(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MA(\varepsilon 1)_{1,1}, MA(\varepsilon 1)_{1,2}, MA(\varepsilon 1)_{1,3}, MA(\varepsilon 1)_{1,4}, MA(\varepsilon 1)_{1,5}, MA(\varepsilon 1)_{1,6}, MA(\varepsilon 1)_{1,7} \right) \right)$$

$$MA2(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MA(\varepsilon 1)_{2,1}, MA(\varepsilon 1)_{2,2}, MA(\varepsilon 1)_{2,3}, MA(\varepsilon 1)_{2,4}, MA(\varepsilon 1)_{2,5}, MA(\varepsilon 1)_{2,6}, MA(\varepsilon 1)_{2,7} \right) \right)$$

$$MA(\varepsilon 1) := \text{stack}(MA1(\varepsilon 1), MA2(\varepsilon 1))$$

$$MB1(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MB(\varepsilon 1)_{1,1}, MB(\varepsilon 1)_{1,2}, MB(\varepsilon 1)_{1,3}, MB(\varepsilon 1)_{1,4}, MB(\varepsilon 1)_{1,5}, MB(\varepsilon 1)_{1,6}, MB(\varepsilon 1)_{1,7} \right) \right)$$

$$MB2(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MB(\varepsilon 1)_{2,1}, MB(\varepsilon 1)_{2,2}, MB(\varepsilon 1)_{2,3}, MB(\varepsilon 1)_{2,4}, MB(\varepsilon 1)_{2,5}, MB(\varepsilon 1)_{2,6}, MB(\varepsilon 1)_{2,7} \right) \right)$$

$$MB3(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MB(\varepsilon 1)_{3,1}, MB(\varepsilon 1)_{3,2}, MB(\varepsilon 1)_{3,3}, MB(\varepsilon 1)_{3,4}, MB(\varepsilon 1)_{3,5}, MB(\varepsilon 1)_{3,6}, MB(\varepsilon 1)_{3,7} \right) \right)$$

$$MB4(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MB(\varepsilon 1)_{4,1}, MB(\varepsilon 1)_{4,2}, MB(\varepsilon 1)_{4,3}, MB(\varepsilon 1)_{4,4}, MB(\varepsilon 1)_{4,5}, MB(\varepsilon 1)_{4,6}, MB(\varepsilon 1)_{4,7} \right) \right)$$

$$MB5(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MB(\varepsilon 1)_{5,1}, MB(\varepsilon 1)_{5,2}, MB(\varepsilon 1)_{5,3}, MB(\varepsilon 1)_{5,4}, MB(\varepsilon 1)_{5,5}, MB(\varepsilon 1)_{5,6}, MB(\varepsilon 1)_{5,7} \right) \right)$$

$$MB6(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MB(\varepsilon 1)_{6,1}, MB(\varepsilon 1)_{6,2}, MB(\varepsilon 1)_{6,3}, MB(\varepsilon 1)_{6,4}, MB(\varepsilon 1)_{6,5}, MB(\varepsilon 1)_{6,6}, MB(\varepsilon 1)_{6,7} \right) \right)$$

$$MB(\varepsilon 1) := \text{stack}(MB1(\varepsilon 1), MB2(\varepsilon 1), MB3(\varepsilon 1), MB4(\varepsilon 1), MB5(\varepsilon 1), MB6(\varepsilon 1))$$

$$MBB1(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MBB(\varepsilon 1)_{1,1}, MBB(\varepsilon 1)_{1,2}, MBB(\varepsilon 1)_{1,3}, MBB(\varepsilon 1)_{1,4}, MBB(\varepsilon 1)_{1,5}, MBB(\varepsilon 1)_{1,6}, MBB(\varepsilon 1)_{1,7} \right) \right)$$

$$MBB2(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MBB(\varepsilon 1)_{2,1}, MBB(\varepsilon 1)_{2,2}, MBB(\varepsilon 1)_{2,3}, MBB(\varepsilon 1)_{2,4}, MBB(\varepsilon 1)_{2,5}, MBB(\varepsilon 1)_{2,6}, MBB(\varepsilon 1)_{2,7} \right) \right)$$

$$MBB3(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MBB(\varepsilon 1)_{3,1}, MBB(\varepsilon 1)_{3,2}, MBB(\varepsilon 1)_{3,3}, MBB(\varepsilon 1)_{3,4}, MBB(\varepsilon 1)_{3,5}, MBB(\varepsilon 1)_{3,6}, MBB(\varepsilon 1)_{3,7} \right) \right)$$

$$MBB4(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MBB(\varepsilon 1)_{4,1}, MBB(\varepsilon 1)_{4,2}, MBB(\varepsilon 1)_{4,3}, MBB(\varepsilon 1)_{4,4}, MBB(\varepsilon 1)_{4,5}, MBB(\varepsilon 1)_{4,6}, MBB(\varepsilon 1)_{4,7} \right) \right)$$

$$MBB(\varepsilon 1) := \text{stack}(MBB1(\varepsilon 1), MBB2(\varepsilon 1), MBB3(\varepsilon 1), MBB4(\varepsilon 1))$$

$$MC1(\varepsilon 1) := \left( \text{augment} \left( MC(\varepsilon 1)_{1,1}, MC(\varepsilon 1)_{1,2}, MC(\varepsilon 1)_{1,3}, MC(\varepsilon 1)_{1,4}, MC(\varepsilon 1)_{1,5}, MC(\varepsilon 1)_{1,6}, MC(\varepsilon 1)_{1,7} \right) \right)$$

$e1)_{1,7})$

$e1)_{2,7})$

$e1)_{3,7})$

$e1)_{4,7})$

$$\begin{aligned} \text{MC2}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MC}(\epsilon 1)_{2,1}, \text{MC}(\epsilon 1)_{2,2}, \text{MC}(\epsilon 1)_{2,3}, \text{MC}(\epsilon 1)_{2,4}, \text{MC}(\epsilon 1)_{2,5}, \text{MC}(\epsilon 1)_{2,6}, \text{MC}(\epsilon 1)_{2,7} \right) \right) \\ \text{MC3}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MC}(\epsilon 1)_{3,1}, \text{MC}(\epsilon 1)_{3,2}, \text{MC}(\epsilon 1)_{3,3}, \text{MC}(\epsilon 1)_{3,4}, \text{MC}(\epsilon 1)_{3,5}, \text{MC}(\epsilon 1)_{3,6}, \text{MC}(\epsilon 1)_{3,7} \right) \right) \\ \text{MC4}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MC}(\epsilon 1)_{4,1}, \text{MC}(\epsilon 1)_{4,2}, \text{MC}(\epsilon 1)_{4,3}, \text{MC}(\epsilon 1)_{4,4}, \text{MC}(\epsilon 1)_{4,5}, \text{MC}(\epsilon 1)_{4,6}, \text{MC}(\epsilon 1)_{4,7} \right) \right) \\ \text{MC5}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MC}(\epsilon 1)_{5,1}, \text{MC}(\epsilon 1)_{5,2}, \text{MC}(\epsilon 1)_{5,3}, \text{MC}(\epsilon 1)_{5,4}, \text{MC}(\epsilon 1)_{5,5}, \text{MC}(\epsilon 1)_{5,6}, \text{MC}(\epsilon 1)_{5,7} \right) \right) \\ \text{MC6}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MC}(\epsilon 1)_{6,1}, \text{MC}(\epsilon 1)_{6,2}, \text{MC}(\epsilon 1)_{6,3}, \text{MC}(\epsilon 1)_{6,4}, \text{MC}(\epsilon 1)_{6,5}, \text{MC}(\epsilon 1)_{6,6}, \text{MC}(\epsilon 1)_{6,7} \right) \right) \\ \text{MC7}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MC}(\epsilon 1)_{7,1}, \text{MC}(\epsilon 1)_{7,2}, \text{MC}(\epsilon 1)_{7,3}, \text{MC}(\epsilon 1)_{7,4}, \text{MC}(\epsilon 1)_{7,5}, \text{MC}(\epsilon 1)_{7,6}, \text{MC}(\epsilon 1)_{7,7} \right) \right) \\ \text{MC8}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MC}(\epsilon 1)_{8,1}, \text{MC}(\epsilon 1)_{8,2}, \text{MC}(\epsilon 1)_{8,3}, \text{MC}(\epsilon 1)_{8,4}, \text{MC}(\epsilon 1)_{8,5}, \text{MC}(\epsilon 1)_{8,6}, \text{MC}(\epsilon 1)_{8,7} \right) \right) \\ \text{MC}(\epsilon 1) &:= \text{stack}(\text{MC1}(\epsilon 1), \text{MC2}(\epsilon 1), \text{MC3}(\epsilon 1), \text{MC4}(\epsilon 1), \text{MC5}(\epsilon 1), \text{MC6}(\epsilon 1), \text{MC7}(\epsilon 1), \text{MC8}(\epsilon 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MD1}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MD}(\epsilon 1)_{1,1}, \text{MD}(\epsilon 1)_{1,2}, \text{MD}(\epsilon 1)_{1,3}, \text{MD}(\epsilon 1)_{1,4}, \text{MD}(\epsilon 1)_{1,5}, \text{MD}(\epsilon 1)_{1,6}, \text{MD}(\epsilon 1)_{1,7} \right) \right) \\ \text{MD2}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MD}(\epsilon 1)_{2,1}, \text{MD}(\epsilon 1)_{2,2}, \text{MD}(\epsilon 1)_{2,3}, \text{MD}(\epsilon 1)_{2,4}, \text{MD}(\epsilon 1)_{2,5}, \text{MD}(\epsilon 1)_{2,6}, \text{MD}(\epsilon 1)_{2,7} \right) \right) \\ \text{MD3}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MD}(\epsilon 1)_{3,1}, \text{MD}(\epsilon 1)_{3,2}, \text{MD}(\epsilon 1)_{3,3}, \text{MD}(\epsilon 1)_{3,4}, \text{MD}(\epsilon 1)_{3,5}, \text{MD}(\epsilon 1)_{3,6}, \text{MD}(\epsilon 1)_{3,7} \right) \right) \\ \text{MD4}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MD}(\epsilon 1)_{4,1}, \text{MD}(\epsilon 1)_{4,2}, \text{MD}(\epsilon 1)_{4,3}, \text{MD}(\epsilon 1)_{4,4}, \text{MD}(\epsilon 1)_{4,5}, \text{MD}(\epsilon 1)_{4,6}, \text{MD}(\epsilon 1)_{4,7} \right) \right) \\ \text{MD5}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MD}(\epsilon 1)_{5,1}, \text{MD}(\epsilon 1)_{5,2}, \text{MD}(\epsilon 1)_{5,3}, \text{MD}(\epsilon 1)_{5,4}, \text{MD}(\epsilon 1)_{5,5}, \text{MD}(\epsilon 1)_{5,6}, \text{MD}(\epsilon 1)_{5,7} \right) \right) \\ \text{MD6}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{MD}(\epsilon 1)_{6,1}, \text{MD}(\epsilon 1)_{6,2}, \text{MD}(\epsilon 1)_{6,3}, \text{MD}(\epsilon 1)_{6,4}, \text{MD}(\epsilon 1)_{6,5}, \text{MD}(\epsilon 1)_{6,6}, \text{MD}(\epsilon 1)_{6,7} \right) \right) \\ \text{MD}(\epsilon 1) &:= \text{stack}(\text{MD1}(\epsilon 1), \text{MD2}(\epsilon 1), \text{MD3}(\epsilon 1), \text{MD4}(\epsilon 1), \text{MD5}(\epsilon 1), \text{MD6}(\epsilon 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ME1}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{ME}(\epsilon 1)_{1,1}, \text{ME}(\epsilon 1)_{1,2}, \text{ME}(\epsilon 1)_{1,3}, \text{ME}(\epsilon 1)_{1,4}, \text{ME}(\epsilon 1)_{1,5}, \text{ME}(\epsilon 1)_{1,6}, \text{ME}(\epsilon 1)_{1,7} \right) \right) \\ \text{ME2}(\epsilon 1) &:= \left( \text{augment} \left( \text{ME}(\epsilon 1)_{2,1}, \text{ME}(\epsilon 1)_{2,2}, \text{ME}(\epsilon 1)_{2,3}, \text{ME}(\epsilon 1)_{2,4}, \text{ME}(\epsilon 1)_{2,5}, \text{ME}(\epsilon 1)_{2,6}, \text{ME}(\epsilon 1)_{2,7} \right) \right) \\ \text{ME}(\epsilon 1) &:= \text{stack}(\text{ME1}(\epsilon 1), \text{ME2}(\epsilon 1)) \end{aligned}$$

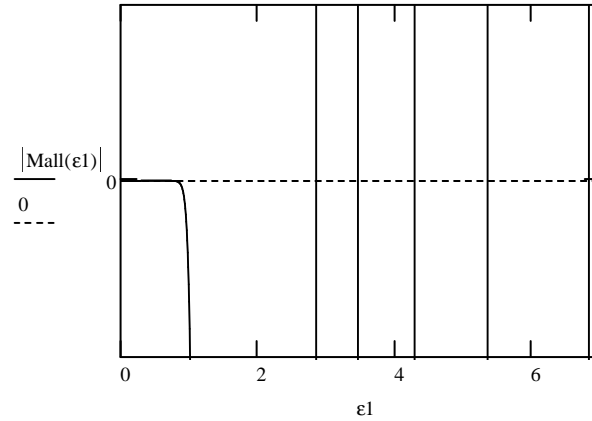
$$\text{Mall}(\epsilon 1) := \text{stack}(\text{MA}(\epsilon 1), \text{MB}(\epsilon 1), \text{MBB}(\epsilon 1), \text{MC}(\epsilon 1), \text{MD}(\epsilon 1), \text{ME}(\epsilon 1))$$

▲ Assemblaggio matrici

▼ Radici del determinante

Andamento del determinante: il grafico è utile per valutare dove la funzione interseca l'asse nullo ed impostare dei valori adeguati (ss) per la ricerca della soluzione.





Calcolo delle radici

ss := 0.2 valore di partenza

$\epsilon f_0 := \text{root}(|\text{Mall}(ss)|, ss) \quad \epsilon f_0 = 0.2 \quad |\text{Mall}(\epsilon f_0)| = 0$

$ss := 1.0 \quad \epsilon f_1 := \text{root}(|\text{Mall}(ss)|, ss) \quad \epsilon f_1 = 0.742 \quad |\text{Mall}(\epsilon f_1)| = -9.088 \times 10^{-13}$

$ss := 3.0 \quad \epsilon f_2 := (\text{root}(|\text{Mall}(ss)|, ss)) \quad \epsilon f_2 = 2.853 \quad |\text{Mall}(\epsilon f_2)| = 0$

$ss := 3.5 \quad \epsilon f_3 := \text{root}(|\text{Mall}(ss)|, ss) \quad \epsilon f_3 = 3.463 \quad |\text{Mall}(\epsilon f_3)| = -1.215 \times 10^{-5}$

$ss := 4.5 \quad \epsilon f_4 := \text{root}(|\text{Mall}(ss)|, ss) \quad \epsilon f_4 = 4.288 \quad |\text{Mall}(\epsilon f_4)| = 0$

$ss := 5.5 \quad \epsilon f_5 := \text{root}(|\text{Mall}(ss)|, ss) \quad \epsilon f_5 = 5.349 \quad |\text{Mall}(\epsilon f_5)| = 0$

▲ Radici del determinante

$\epsilon f := \epsilon f_2$  Scelta della frequenza propria da rappresentare

$\omega f_e := \left(\frac{\epsilon f}{La}\right)^2 \cdot v_{fe}$

$\omega f_i := \left(\frac{\epsilon f \cdot \phi}{La}\right)^2 \cdot v_{fi}$

$\chi_e := \frac{\epsilon f}{La}$

$\chi_i := \frac{\epsilon f \cdot \phi}{La}$

$\omega f_e = 118.007 \frac{1}{s} \text{ rad}$

$\omega f_e = 1.127 \times 10^3 \text{ rpm}$

$\omega f_i = 118.007 \frac{1}{s} \text{ rad}$

$\omega f_i = 1.127 \times 10^3 \text{ rpm}$

$\omega f_e = 18.78146 \text{ Hza}$

### Forme Modali

▼ Carter

```

i := 1..8      Mat1 := Mall(|ef|)

w := eigenvals(Mat1)      Y := eigenvec(Mat1, 0)

Z1(x) := Y1·cos(χe·x) + Y2·sin(χe·x) + Y3·cosh(χe·x) + Y4·sinh(χe·x)
Z2(x) := Y5·cos(χe·x) + Y6·sin(χe·x) + Y7·cosh(χe·x) + Y8·sinh(χe·x)
Z3(x) := Y9·cos(χe·x) + Y10·sin(χe·x) + Y11·cosh(χe·x) + Y12·sinh(χe·x)
Z4(x) := Y13·cos(χe·x) + Y14·sin(χe·x) + Y15·cosh(χe·x) + Y16·sinh(χe·x)
Z5(x) := Y17·cos(χe·x) + Y18·sin(χe·x) + Y19·cosh(χe·x) + Y20·sinh(χe·x)

Zcarter(z) := if(z < ab, Z1(z), Z2(z))
Zcarter(z) := if(z < ab1, Zcarter(z), Z3(z))
Zcarter(z) := if(z < ac, Zcarter(z), Z4(z))
Zcarter(z) := if(z < ad, Zcarter(z), Z5(z))

```

▲ Carter

▼ Normalizzazione ad uno

```

Zcarterabs(x) := |Zcarter(x)|      d := 1m

xm := Maximize(Zcarterabs, d)

ZcarterMax := Zcarterabs(xm)

CC :=  $\frac{1}{Zcarter_{Max}}$       CC = 14.07

ZcarterN(x) := CC·Zcarter(x)

```

▲ Normalizzazione ad uno

▼ Albero

```

Z5(x) := Y21·cos(χi·x) + Y22·sin(χi·x) + Y23·cosh(χi·x) + Y24·sinh(χi·x)
Z6(x) := Y25·cos(χi·x) + Y26·sin(χi·x) + Y27·cosh(χi·x) + Y28·sinh(χi·x)

Zalbero(z) := if(z < ac, Z5(z), Z6(z))

```

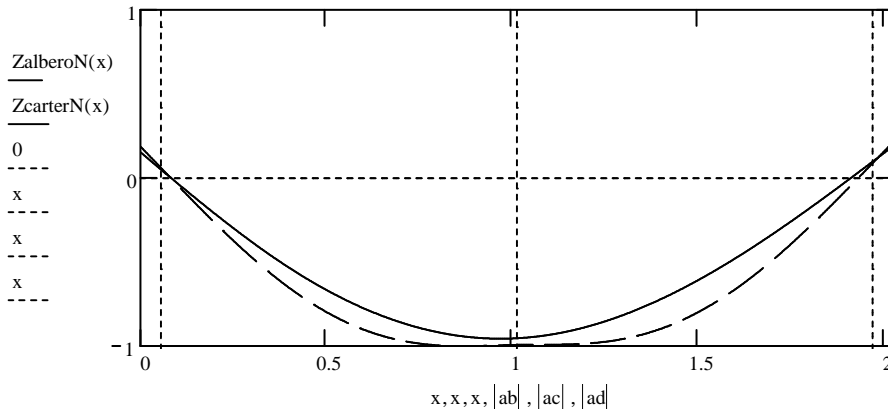
▲ Albero

▢ Normalizzazione Albero

E' del tutto analoga alla corrispondente del carter, si esclude dalla stampa rachiudendola in un area

$$CC3 := \min(CC, CC2) \quad CC3 = 13.445$$

$$ZcarterN(x) := CC3 \cdot Zcarter(x) \quad ZalberoN(x) := CC3 \cdot Zalbero(x)$$



Analisi risposta armonica con forzante nota

▣ Analisi della forzante

$$Xg := \text{...} \quad \text{importazione dati di spostamento del baricentro da file esterno}$$

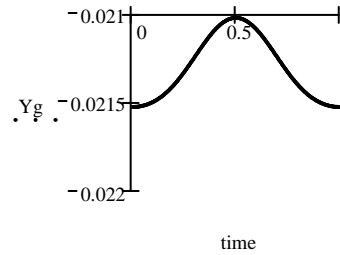
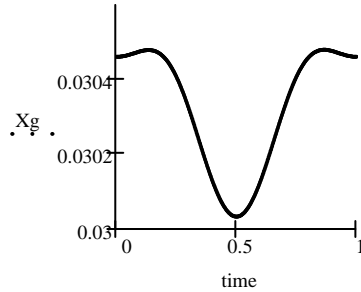
$$Yg := \text{...}$$

$$time := \text{...}$$

$$Xg := Xg \cdot mm \quad Yg := Yg \cdot mm \quad time := time \cdot s$$

$$rTT := \text{rows}(Xg)$$

$$i := 1..rTT$$



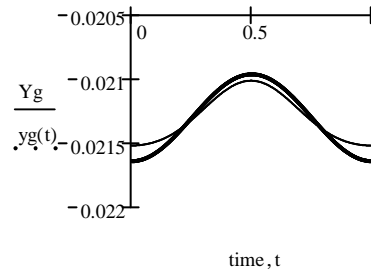
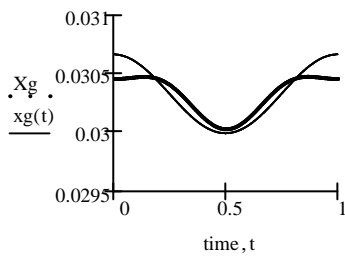
$$T_p := 1s \quad \omega_t := \frac{2 \cdot \pi}{T_p}$$

$$a_1 := \frac{2}{T_p} \cdot \sum_{i=1}^{rTT} \left( X_{g_i} \cdot \frac{T_p}{rTT} \right) \quad a_2 := \frac{2}{T_p} \cdot \sum_{i=1}^{rTT} \left[ \left( X_{g_i} \cdot \cos(\omega_t \cdot \text{time}_i) \right) \cdot \frac{T_p}{rTT} \right]$$

$$aa_1 := \frac{2}{T_p} \cdot \sum_{i=1}^{rTT} \left( Y_{g_i} \cdot \frac{T_p}{rTT} \right) \quad aa_2 := \frac{2}{T_p} \cdot \sum_{i=1}^{rTT} \left[ \left( Y_{g_i} \cdot \cos(\omega_t \cdot \text{time}_i) \right) \cdot \frac{T_p}{rTT} \right]$$

$$y_g(t) := \left[ \frac{aa_1}{2} + (aa_2 \cdot \cos(\omega_t \cdot t)) \right]$$

$$x_g(t) := \left( \frac{a_1}{2} + a_2 \cdot \cos(\omega_t \cdot t) \right)$$



$$m_r := 0.8kg$$

Massa dei componenti rotanti

$$\omega_{for} := 1100rpm$$

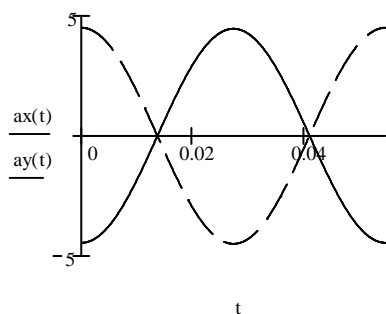
velocità di rotazione

$$T\omega := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{for}}$$

Accelerazione del baricentro nelle due direzioni

$$ax(t) := -a_2 \cdot \omega_{for}^2 \cdot \cos(\omega_{for} \cdot t)$$

$$ay(t) := -aa_2 \cdot \omega_{for}^2 \cdot \cos(\omega_{for} \cdot t)$$



Quindi la forza normale  $x$  dà sempre un momento in opposizione a quello generato dalla forza in direzione  $y$ , quindi trascurare il momento dovuto ad FN è cautelativo

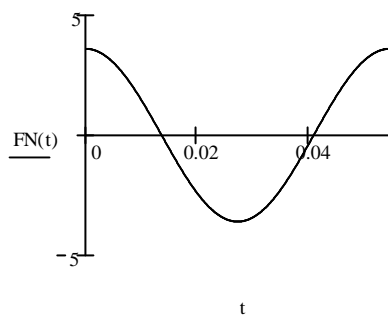
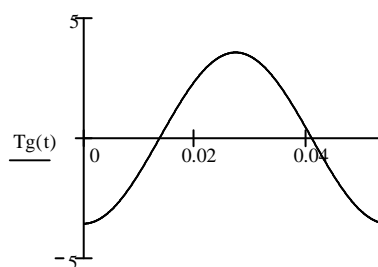
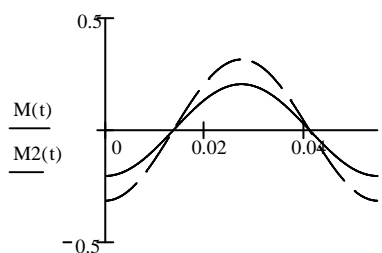
forza di taglio  $Tg(t) := m \cdot r \cdot ax(t)$

Forza normale  $FN(t) := m \cdot r \cdot ay(t)$

Momento braccio := 110·mm bracciox := -30mm

$M(t) := Tg(t) \cdot (\text{braccio} + yg(t)) + FN(t) \cdot (xg(t))$

$M2(t) := Tg(t) \cdot (\text{braccio} + 1 \cdot yg(t))$



▲ Analisi della forzante



$$\varepsilon_r := \begin{pmatrix} \varepsilon_f_0 \\ \varepsilon_f_1 \\ \varepsilon_f_2 \\ \varepsilon_f_3 \\ \varepsilon_f_4 \\ \varepsilon_f_5 \end{pmatrix} \quad k := 1..6$$

$$YY_k := \text{eigenvec}\left(\text{Mall}\left(\left|\varepsilon_r\right|\right), 0\right)$$

$$\chi_k^e := \frac{\varepsilon_r}{La} \quad \chi_k^i := \frac{\varepsilon_r \cdot \phi}{La} \quad \omega_k := \left(\frac{\varepsilon_r}{La}\right)^2 \cdot v_{fe}$$

$$\begin{aligned} ZZ1(x, k) &:= (YY_k)_1 \cdot \cos(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_2 \cdot \sin(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_3 \cdot \cosh(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_4 \cdot \sinh(\chi_k^e \cdot x) \\ ZZ2(x, k) &:= (YY_k)_5 \cdot \cos(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_6 \cdot \sin(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_7 \cdot \cosh(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_8 \cdot \sinh(\chi_k^e \cdot x) \\ ZZ3(x, k) &:= (YY_k)_9 \cdot \cos(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{10} \cdot \sin(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{11} \cdot \cosh(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{12} \cdot \sinh(\chi_k^e \cdot x) \\ ZZ4(x, k) &:= (YY_k)_{13} \cdot \cos(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{14} \cdot \sin(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{15} \cdot \cosh(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{16} \cdot \sinh(\chi_k^e \cdot x) \\ ZZ5(x, k) &:= (YY_k)_{17} \cdot \cos(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{18} \cdot \sin(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{19} \cdot \cosh(\chi_k^e \cdot x) + (YY_k)_{20} \cdot \sinh(\chi_k^e \cdot x) \\ ZZ6(x, k) &:= (YY_k)_{21} \cdot \cos(\chi_k^i \cdot x) + (YY_k)_{22} \cdot \sin(\chi_k^i \cdot x) + (YY_k)_{23} \cdot \cosh(\chi_k^i \cdot x) + (YY_k)_{24} \cdot \sinh(\chi_k^i \cdot x) \\ ZZ7(x, k) &:= (YY_k)_{25} \cdot \cos(\chi_k^i \cdot x) + (YY_k)_{26} \cdot \sin(\chi_k^i \cdot x) + (YY_k)_{27} \cdot \cosh(\chi_k^i \cdot x) + (YY_k)_{28} \cdot \sinh(\chi_k^i \cdot x) \end{aligned}$$

$$ZZc(x, k) := \text{if}(x < ab, ZZ1(x, k), ZZ2(x, k))$$

$$ZZc(x, k) := \text{if}(x < ab1, ZZc(x, k), ZZ3(x, k))$$

$$ZZc(x, k) := \text{if}(x < ac, ZZc(x, k), ZZ4(x, k))$$

$$ZZc(x, k) := \text{if}(x < ad, ZZc(x, k), ZZ5(x, k))$$

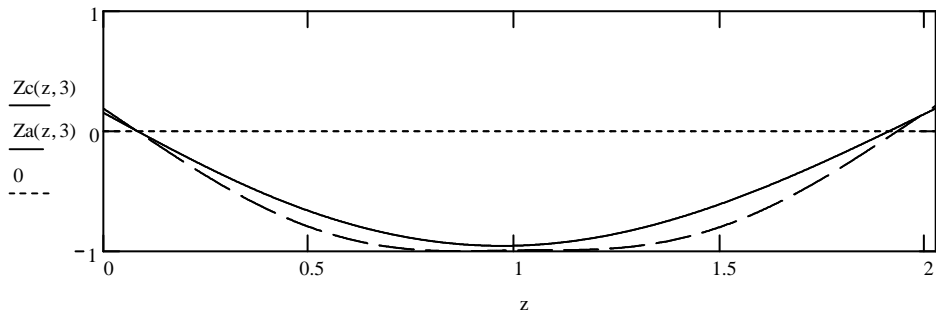
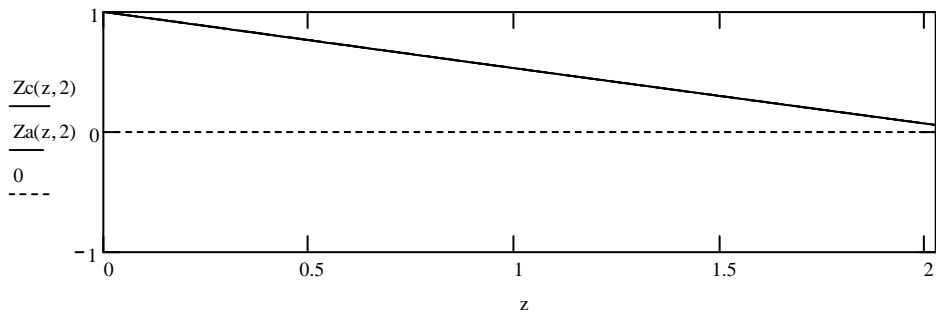
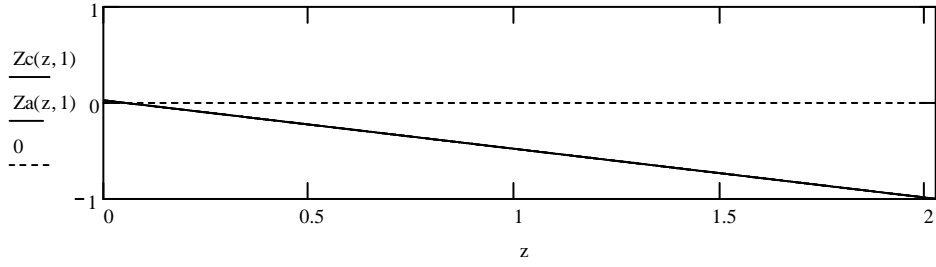
$$ZZa(x, k) := \text{if}(x < ac, ZZ6(x, k), ZZ7(x, k))$$

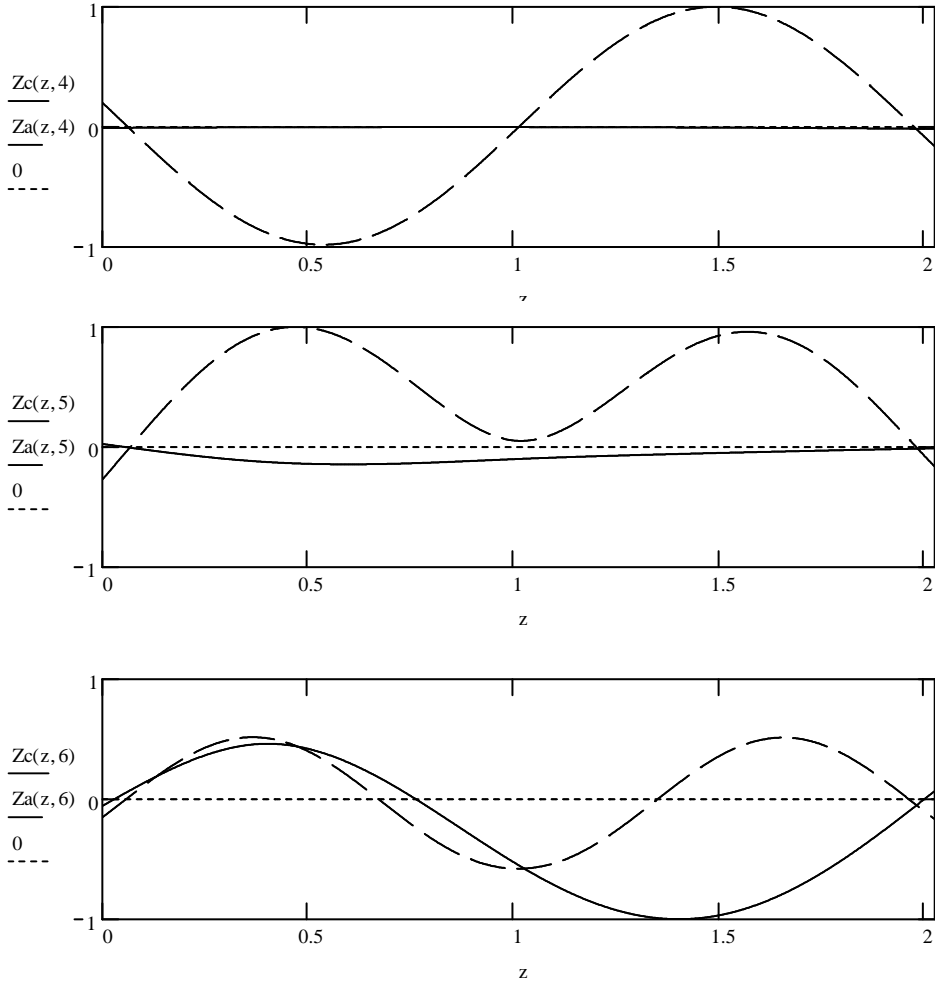


► normalizzazione ad 1

Analoga alla precedente, si omette dalla stampa.







Derivata prima

Derivata prima (rotazioni)

Il calcolo è impostato manualmente in modo da alleggerire il più possibile il foglio di calcolo e ridurre i tempi di computazione

$$\begin{aligned}
 Z1I(x, k) &:= \chi_{e_k} \cdot \left[ -\left(YY_k\right)_1 \cdot \sin(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_2 \cdot \cos(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_3 \cdot \sinh(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_4 \cdot \cosh(\chi_{e_k} \cdot x) \right] \\
 Z2I(x, k) &:= \chi_{e_k} \cdot \left[ -\left(YY_k\right)_5 \cdot \sin(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_6 \cdot \cos(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_7 \cdot \sinh(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_8 \cdot \cosh(\chi_{e_k} \cdot x) \right] \\
 Z3I(x, k) &:= \chi_{e_k} \cdot \left[ -\left(YY_k\right)_9 \cdot \sin(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{10} \cdot \cos(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{11} \cdot \sinh(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{12} \cdot \cosh(\chi_{e_k} \cdot x) \right] \\
 Z4I(x, k) &:= \chi_{e_k} \cdot \left[ -\left(YY_k\right)_{13} \cdot \sin(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{14} \cdot \cos(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{15} \cdot \sinh(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{16} \cdot \cosh(\chi_{e_k} \cdot x) \right]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} Z5I(x, k) &:= \chi_{e_k} \cdot \left[ -\left(YY_k\right)_{17} \cdot \sin(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{18} \cdot \cos(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{19} \cdot \sinh(\chi_{e_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{20} \cdot \cosh(\chi_{e_k} \cdot x) \right] \\ Z6I(x, k) &:= \chi_{i_k} \cdot \left[ -\left(YY_k\right)_{21} \cdot \sin(\chi_{i_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{22} \cdot \cos(\chi_{i_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{23} \cdot \sinh(\chi_{i_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{24} \cdot \cosh(\chi_{i_k} \cdot x) \right] \\ Z7I(x, k) &:= \chi_{i_k} \cdot \left[ -\left(YY_k\right)_{25} \cdot \sin(\chi_{i_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{26} \cdot \cos(\chi_{i_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{27} \cdot \sinh(\chi_{i_k} \cdot x) + \left(YY_k\right)_{28} \cdot \cosh(\chi_{i_k} \cdot x) \right] \end{aligned}$$

$$ZcI(x, k) := \text{if}(x < ab, Z1I(x, k), Z2I(x, k))$$

$$ZcI(x, k) := \text{if}(x < ab1, ZcI(x, k), Z3I(x, k))$$

$$ZcI(x, k) := \text{if}(x < ac, ZcI(x, k), Z4I(x, k))$$

$$ZcI(x, k) := \text{if}(x < ad, ZcI(x, k), Z5I(x, k))$$

$$ZaI(x, k) := \text{if}(x < ac, Z6I(x, k), Z7I(x, k))$$

▣ Derivata prima

Sono analoghe alla derivata prima, si omettono

▣ Derivata seconda

▣ Derivata terza

▣ Derivata quarta

▣ Normalizzazione rispetto alla massa

$$\text{beta1}_k := (Mi + MM) \cdot ZZc(0-m, k) \cdot ZZc(0-m, k) + MM \cdot (ZZc(ab1, k) \cdot ZZc(ab1, k)) + Mf \cdot (ZZc(La, k) \cdot ZZc(La, k))$$

$$\text{beta2}_k := \int_0^{La} \frac{\rho e \cdot As}{1} \cdot ZZc(x, k) \cdot ZZc(x, k) \, dx + \int_{ab}^{ad} \frac{\rho i \cdot As_i}{1} \cdot ZZa(x, k) \cdot ZZa(x, k) \, dx$$

$$\text{beta}_k := \text{beta1}_k + \text{beta2}_k$$

$$\text{beta} := \frac{\text{beta}}{\text{kg}}$$

$$\text{CCM2}_k := \frac{1}{\sqrt{\text{beta}_k}}$$

$$\text{CCM}_k := \text{CCM2}_k$$

$$ZZc(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZZc(x, k) \quad ZcI(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZcI(x, k) \quad ZZa(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZZa(x, k)$$

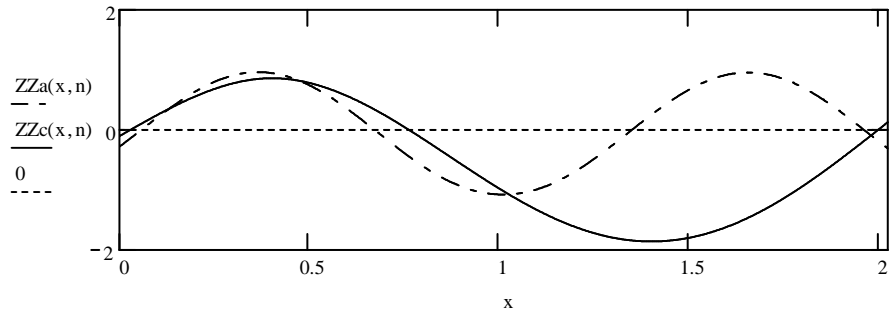
$$ZcII(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZcII(x, k) \quad ZcIII(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZcIII(x, k) \quad ZaII(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZaII(x, k)$$

$$ZaI(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZaI(x, k) \quad ZaIII(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZaIII(x, k)$$

$$ZaIII(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZaIII(x, k) \quad ZcIII(x, k) := \text{CCM}_k \cdot ZcIII(x, k)$$

Numero di frequenza propria da visualizzare nel grafico

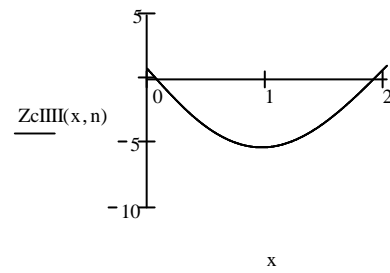
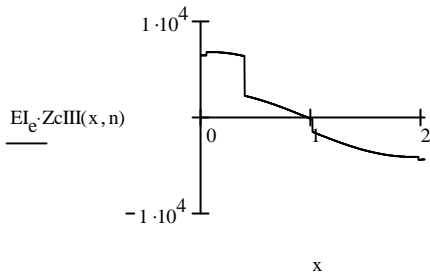
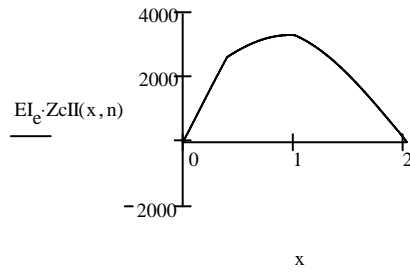
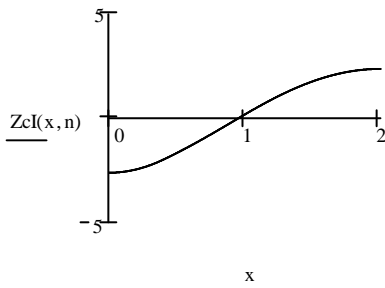
$n := 6$

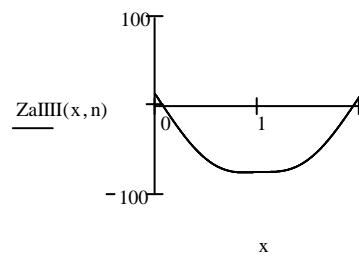
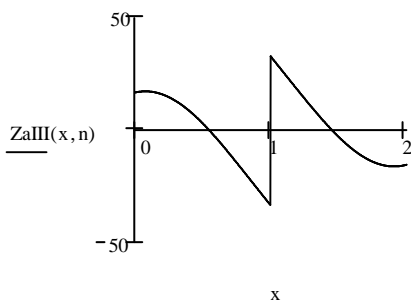
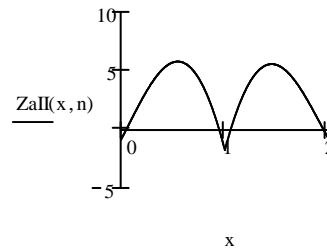
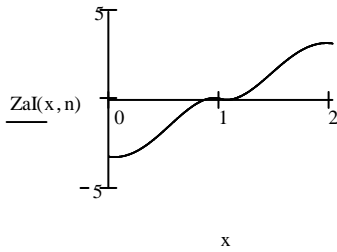


Normalizzazione rispetto alla massa

Caratteristiche di sollecitazione

$n := 3$





Le caratteristiche di sollecitazione sono proporzionali alle derivate delle deformate. La derivata prima, che rappresenta le rotazioni, è continua non presenta singolarità. La derivata seconda (momento) è continua ma presenta delle cuspidi in corrispondenza dei carichi di taglio concentrati. La derivata terza (taglio) non è continua a causa della presenza dei carichi di taglio concentrati. Il carico distribuito invece è continuo.

Il tutto è congruente con le condizioni fisiche di carico.



☑ Applicazione della forzante

Punto di applicazione della forza  $pf := La + 110\text{mm}$

Consideriamo la risposta della trave soggetta ad una forza distribuita del tipo  $p(x,t)$ .

Si scrive una funzione  $px$  che descriva in modo accettabile la forza  $p(t)$  applicata all'estremo libero.

Utilizzo una funzione iperbolica ed impongo che per  $x=La$  la funzione abbia valore pari a 1.

La funzione è adatta in quanto è piccola da zero fino all'asintoto verticale e può approssimare una forza concentrata.

$p := 100$  aumentando il valore di pot, la funzione diventa sempre più concentrata all'estremo e più vicina a zero altrove

$$px(b, \xi) := \left( \frac{-b}{b - \xi} \right)^p \cdot \frac{1}{La}$$

$\xi := 4\text{m}$  valore di partenza per il calcolo numerico della soluzione

$p = 100$

Given

$$\int_0^{pf} p_x(x, \xi) dx = 1$$

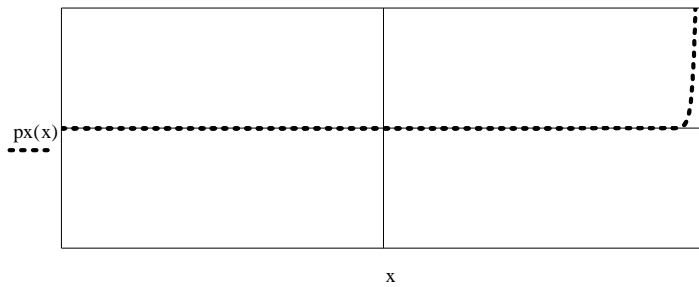
$\xi := \text{Find}(\xi)$

$\xi = 4.16 \text{ m}$

$$p_x(x) := \left( \frac{-x}{x - \xi} \right)^p \cdot \frac{1}{La}$$

$$p(x, t) := p_x(x) \cdot T_g(t)$$

$La = 2.025 \text{ m}$



▣ Applicazione della forzante

$$p_n(t, k) := \int_0^{pf} p(x, t) \cdot ZZ_c(x, k) dx$$

$$T_p(t, k) := \frac{1}{(\omega_k) \cdot kg} \int_0^t p_n(\tau, k) \cdot \sin[\omega_k \cdot (t - \tau)] d\tau$$

Scelta del numero di frequenze proprie da utilizzare

Per valutare il numero di frequenze proprie necessarie per avere una approssimazione sufficiente, si considera il termine  $T_p(t, k)$ . Infatti, la  $k$ -esima forma modale viene moltiplicata per tale termine, essendo le forme modali dello stesso ordine di grandezza, diventa determinante l'ordine di grandezza di  $T_p(t, k)$  per determinare l'influenza dell'armonica sulla risposta dinamica.

$$\omega_b := \frac{|\omega_{for} - \omega_3|}{2} \quad \text{pulsazione dei battimenti}$$

$$T_b := \frac{2\pi}{\omega_b}$$

Si definisce il tempo di inizio calcolo ( $T_i$ ) e un delta di tempo ( $T_f$ ) su cui eseguire il calcolo. Dovendo discretizzare, si divide tale delta in intervalli ( $tt$ )

$T_i := 0.25 \cdot T_b - 1.5 \cdot T_0$

$T_f := 2 \cdot T_0$

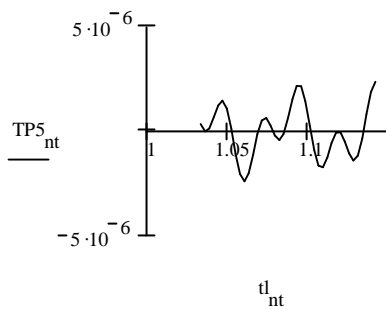
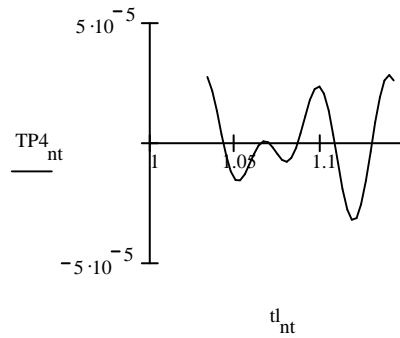
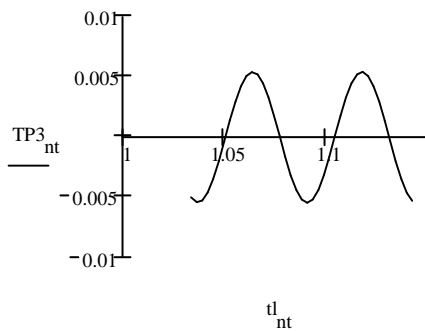
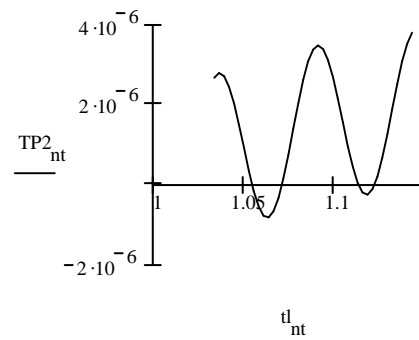
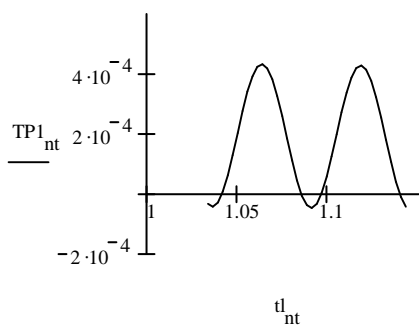
$tt := 40$



$$nt := 1..tt + 1$$

$$t_{nt} := (nt - 1) \cdot \left(\frac{Tf}{tt}\right) + Ti$$

$$TP1_{nt} := Tp(t_{nt}, 1) \quad TP2_{nt} := Tp(t_{nt}, 2) \quad TP3_{nt} := Tp(t_{nt}, 3) \quad TP4_{nt} := Tp(t_{nt}, 4) \quad TP5_{nt} := Tp(t_{nt}, 5)$$



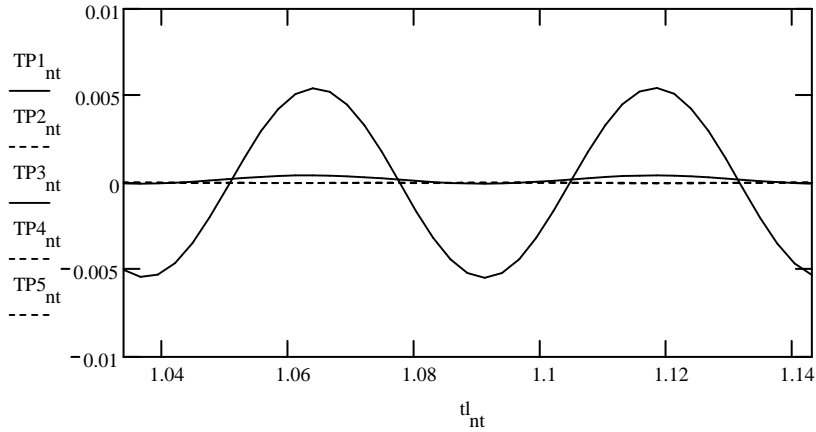
$$\max(TP1) = 4.333 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \min(TP1) = -4.609 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$\max(TP2) = 3.813 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \min(TP2) = -8.015 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\max(TP3) = 5.449 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \min(TP3) = -5.449 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\max(TP4) = 2.85 \times 10^{-5} \text{ m} \quad \min(TP4) = -3.186 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$\max(TP5) = 2.398 \times 10^{-6} \text{ m} \quad \min(TP5) = -2.387 \times 10^{-6} \text{ m}$$



Risultano di interesse pratico solo la prima e la terza frequenza propria in quanto il contributo delle altre è trascurabile perché praticamente nullo.

Cambiando la velocità di rotazione e quindi la pulsazione della forzante, cambierebbero anche i contributi di ciascuna frequenza propria e quindi potrebbe cambiare anche il numero di frequenze proprie da considerare

$$f := 2$$

$$uc(x, t) := \sum_{k=1}^f (ZZc(x, k) \cdot Tp(t, k))$$

$$ua(x, t) := \sum_{k=1}^f (ZZa(x, k) \cdot Tp(t, k))$$



### calcolo della massima

#### deformata

si scrive esplicitamente la deformata utilizzando le frequenze proprie non trascurabili

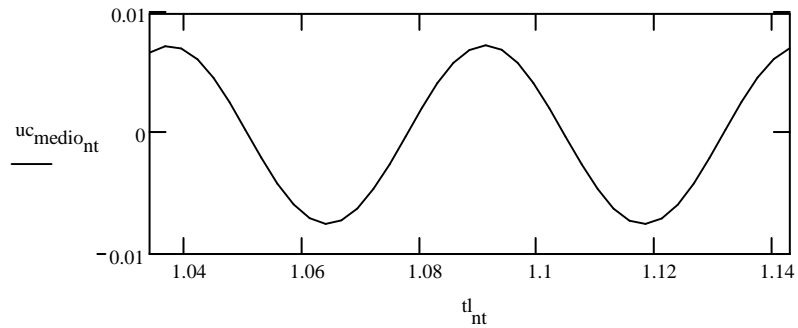
$$ZZc1(x) := ZZc(x, 1) \quad ZZc3(x) := ZZc(x, 3) \quad ZZc4(x) := ZZc(x, 4)$$

$$Tp1(t) := Tp(t, 1) \quad Tp3(t) := Tp(t, 3) \quad Tp4(t) := Tp(t, 4)$$

$$uc12(x, t) := ZZc1(x) \cdot Tp1(t) + ZZc3(x) \cdot Tp3(t) + ZZc4(x) \cdot Tp4(t)$$

considerando che il punto di massima deformazione si ha intorno al punto medio della trave, si cerca il massimo dello spostamento in tale punto in modo da individuare la massima deformazione del carter

$$uc_{medio\_nt} := uc12\left(\frac{La}{2}, t_{l\_nt}\right)$$



..\Ucmedio.xls

$$uc_{medio} \cdot 10^3$$

$$muc1 := \max(uc_{medio}) \quad muc2 := \min(uc_{medio})$$

$$muc := \begin{cases} muc2 & \text{if } |muc2| \geq muc1 \\ muc1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$muc = -7.517 \text{ mm}$$

$$TOL := 10^{-10}$$

$$nw := \left| \text{match}(muc, uc_{medio}) \right|$$

$$tw := t_{nw}$$

$$tw = 1.118 \text{ s}$$



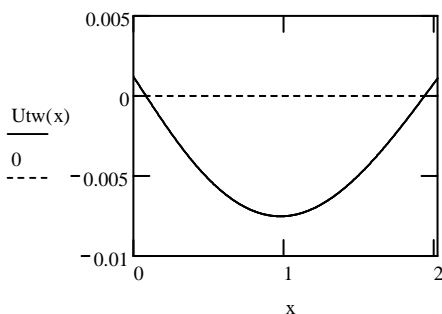
Calcolo dei contributi di ciascun modo proprio all'istante tw:

$$Tp1_{tw} := Tp1(tw) \quad Tp3_{tw} := Tp3(tw) \quad Tp4_{tw} := Tp4(tw)$$

$$Tp1_{tw} = 0.429 \text{ mm} \quad Tp3_{tw} = 5.449 \text{ mm} \quad Tp4_{tw} = -0.032 \text{ mm}$$

All'istante tw la deformata della trave risulta:

$$U_{tw}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZZc1(x) + Tp3_{tw} \cdot ZZc3(x) + Tp4_{tw} \cdot ZZc4(x)$$



Per calcolare le caratteristiche di sollecitazione al tempo  $t_w$  si dovrà derivare la funzione  $U_{tw}$  rispetto a  $x$ .

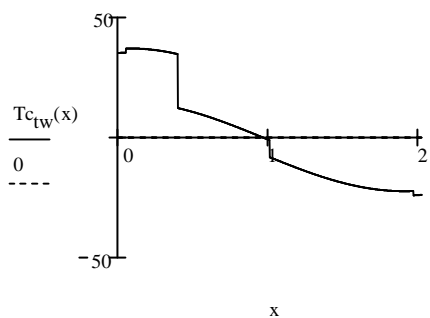
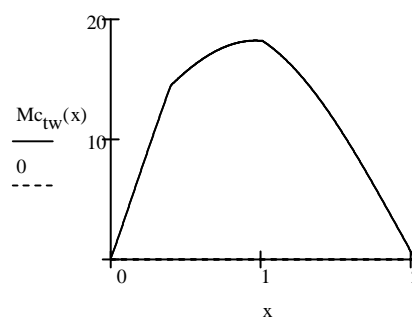
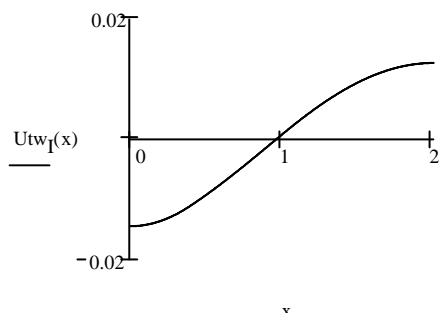
$$U_{tw_I}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZcI(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZcI(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZcI(x, 4)$$

$$U_{tw_{II}}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZcII(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZcII(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZcII(x, 4)$$

$$U_{tw_{III}}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZcIII(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZcIII(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZcIII(x, 4)$$

$$U_{tw_{IV}}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZcIV(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZcIV(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZcIV(x, 4)$$

$$Mc_{tw}(x) := EI_e \cdot U_{tw_{II}}(x) \quad Tc_{tw}(x) := EI_e \cdot U_{tw_{III}}(x)$$



$$x_{temp} := \frac{La}{2}$$



Given

$$x_{\text{temp}} \leq L_a$$

$$x_{\text{temp}} \geq 0$$

$$x_{\text{max}} := \text{Maximize}(M_{c_{\text{tw}}}, x_{\text{temp}})$$

$$x_{\text{max}} = 0.966 \text{ m}$$

Given

$$x_{\text{temp}} \leq L_a$$

$$x_{\text{temp}} \geq 0$$

$$x_{\text{min}} := \text{Minimize}(M_{c_{\text{tw}}}, x_{\text{temp}})$$

$$x_{\text{min}} = 2.025 \text{ m}$$

$$M_{c_{\text{max}}} := \begin{cases} M_{c_{\text{tw}}}(x_{\text{min}}) & \text{if } |M_{c_{\text{tw}}}(x_{\text{min}})| \geq M_{c_{\text{tw}}}(x_{\text{max}}) \\ M_{c_{\text{tw}}}(x_{\text{max}}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M_{c_{\text{max}}} = 18.216 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Tensioni che ne derivano:

$$\sigma_{\text{f}_{\text{max}}} := \frac{M_{c_{\text{max}}}}{I_x} \cdot \frac{D_e}{2}$$

$$\sigma_{\text{f}_{\text{max}}} = 25.45 \text{ MPa}$$

Taglio

$$x_{\text{max}} := \text{Maximize}(T_{c_{\text{tw}}}, x_{\text{temp}})$$

$$x_{\text{max}} = 0.082 \text{ m}$$

$$T_{c_{\text{max}}} := T_{c_{\text{tw}}}(x_{\text{max}})$$

$$T_{c_{\text{max}}} = 37.035 \text{ N}$$

Tensioni

$$\mu := 2$$

$$\tau_{c_{\text{xy}}} := \mu \cdot \frac{T_{c_{\text{max}}}}{A_s}$$

$$\tau_{c_{\text{xy}}} = 0.837 \text{ MPa}$$

Come prevedibile, le tensioni di taglio sono trascurabili

Considerando un materiale composito si calcolano le tensioni agenti nel sistema di riferimento della lamina in modo da stimare il coefficiente di sicurezza per il composito:

$$Svxy := \begin{pmatrix} \sigma_{\max}^f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I valori si useranno solo nel caso di carter in materiale composito.

$$S12 := \text{Tr}(-\alpha 1e) \cdot Svxy$$

$$S12 = \begin{pmatrix} 21.723 \\ 3.727 \\ 8.998 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

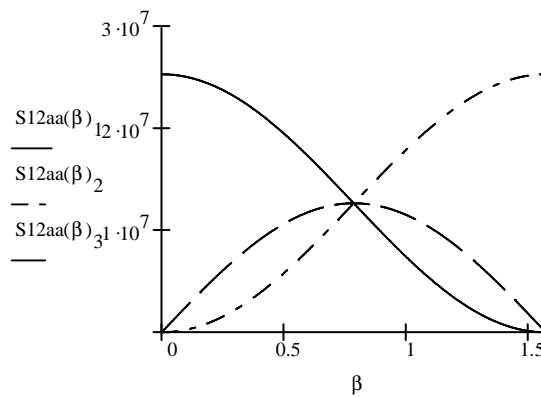
$$\eta_{1\text{comp}} := \frac{Fe_{1t}}{S12_1} \quad \eta_{3\text{comp}} := \frac{Fe_6}{S12_3}$$

$$\eta_{2\text{comp}} := \frac{Fe_{2t}}{S12_2}$$

$$\eta_{\text{comp}} := \min(\eta_{1\text{comp}}, \eta_{2\text{comp}}, \eta_{3\text{comp}})$$

$$S12aa(\beta) := \text{Tr}(-\beta) \cdot Svxy$$

$$\eta_{\text{comp}} = 0$$



Si esegue la stessa verifica per l'albero

$$Uatw(x) := Tp1_{tw} \cdot ZZa(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZZa(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZZa(x, 4)$$

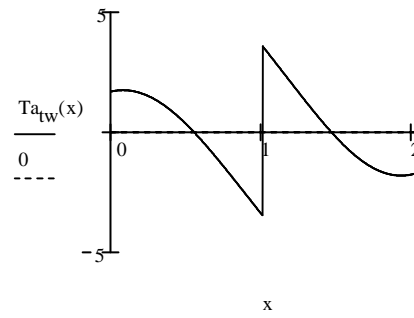
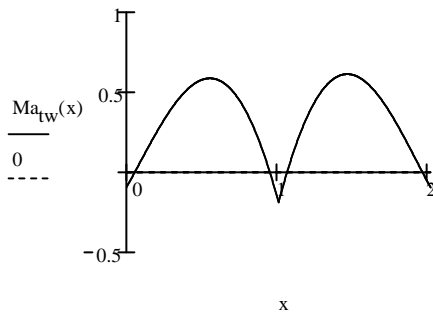
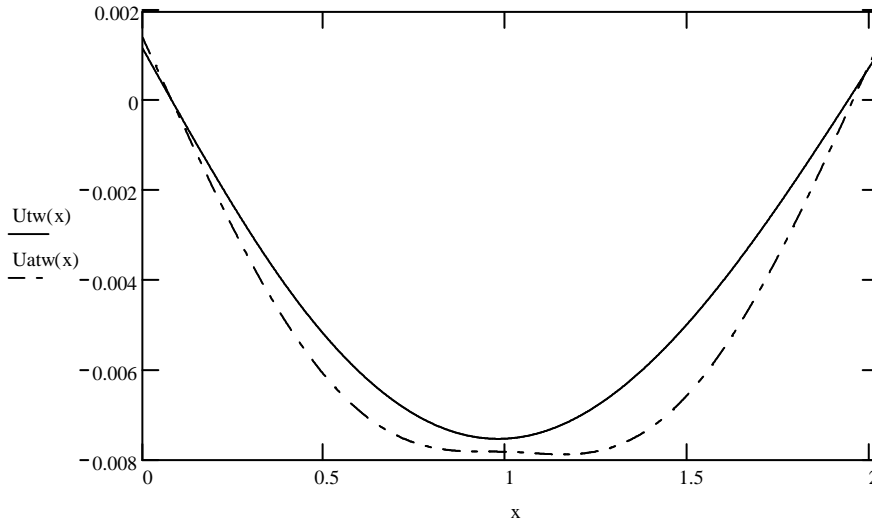
$$Uatw_I(x) := Tp1_{tw} \cdot Zal(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot Zal(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot Zal(x, 4)$$

$$Uatw_{II}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZaII(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZaII(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZaII(x, 4)$$

$$Uatw_{III}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZaIII(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZaIII(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZaIII(x, 4)$$

$$Uatw_{III}(x) := Tp1_{tw} \cdot ZaIII(x, 1) + Tp3_{tw} \cdot ZaIII(x, 3) + Tp4_{tw} \cdot ZaIII(x, 4)$$

$$Ma_{tw}(x) := EI_1 \cdot Uatw_{II}(x) \quad Ta_{tw}(x) := EI_1 \cdot Uatw_{III}(x)$$



$$x_{temp} := 1m$$

Given

$$x_{temp} \leq La$$

$$x_{temp} \geq 0$$

$$x_{max} := \text{Maximize}(Ma_{tw}, x_{temp})$$

Given

$$x_{temp} \leq La$$

$$x_{temp} \geq 0$$

$$x_{min} := \text{Minimize}(Ma_{tw}, x_{temp})$$

$$Ma_{max} := \begin{cases} Ma_{tw}(x_{min}) & \text{if } |Ma_{tw}(x_{min})| \geq Ma_{tw}(x_{max}) \\ Ma_{tw}(x_{max}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Ma_{max} = 0.586N \cdot m$$

Tensioni che ne conseguono:

$$\sigma_{fa_{max}} := \frac{Ma_{max}}{Ix_i} \cdot \frac{De_i}{2} \quad \sigma_{fa_{max}} = 10.727 \text{ MPa}$$

Taglio

$$x_{temp} := La$$

Given

$$x_{temp} \leq La$$

$$x_{temp} \geq 0$$

$$x_{max} := \text{Maximize}(Ta_{tw}, x_{temp})$$

$$x_{max} = 0.082 \text{ m}$$

$$Ta_{max} := Ta_{tw}(x_{max})$$

$$Ta_{max} = 1.747 \text{ N}$$

Tensioni

$$\mu := 2 \quad \tau_{a_{xy}} := \mu \cdot \frac{Ta_{max}}{As}$$

$$\tau_{a_{xy}} = 0.039 \text{ MPa}$$

Come prevedibile, le tensioni di taglio sono trascurabili

Nell'albero di trasmissione è applicato anche un momento torcente, tale momento ha un valore nominale a regime pari a:

$$M_m := 0.33 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Momento motore} \quad \tau_r := 3.18 \quad \text{Rapporto di riduzione}$$

Il motore può fornire una coppia di picco pari a tre volte la coppia nominale

$$c_{peak} := 3$$

Il momento che può essere applicato all'albero interno risulta quindi

$$C_a := M_m \cdot \tau_r \cdot c_{pea}$$

Ne derivano delle tensioni di taglio:

$$r_m := \frac{De_i + Di_i}{2} \quad \delta t := \frac{De_i - Di_i}{2}$$

$$\tau_{\theta z} := \frac{C_a}{2 \cdot \pi \cdot r_m^2 \cdot \delta t} \quad \tau_{\theta z} = 6.584 \text{ MPa}$$

Dal punto di vista statico l'albero risulta verificato infatti abbiamo una tensione equivalente pari a:

$$\sigma_{a_{eq}} := \sqrt{\sigma_{fa_{max}}^2 + 3 \cdot \tau_{\theta z}^2} \quad \sigma_{a_{eq}} = 15.657 \text{ MPa}$$

Il procedimetro è valido per materiale isotropo. Non per composito. I valori verranno usati solo nel caso di isotropo

Per la verifica a fatica abbiamo una componente media ed una alternata delle tensioni che risultano, questi valori si useranno nel caso di albero in materiale isotropo:

$$\sigma_m := \sqrt{3 \cdot \tau_{\theta z}^2} \quad \sigma_m = 11.404 \text{ MPa} \quad \sigma_a := \sigma_{fa_{max}} \quad \sigma_a = 10.727 \text{ MPa}$$

La retta di carico risulta:  $y_3(x) := \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \cdot x$

Considerando un materiale composito si ha:

$$S_{vxy} := \begin{pmatrix} \sigma_{fa_{max}} \\ 0 \\ -7 \text{ MPa} \end{pmatrix} \quad S_{12a} := \text{Tr}(-\alpha 1 e) \cdot S_{vxy}$$

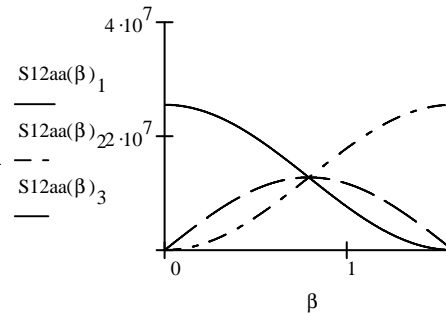
questi valori si usano invece nel caso di albero in materiale composito:

$$S_{12a} = \begin{pmatrix} 14.106 \\ -3.379 \\ -1.157 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad S_{12aa}(\beta) := \text{Tr}(-\beta) \cdot S_{vxy}$$

$$\eta_{1acom} := \frac{F_{1t}}{S_{12a_1}} \quad \eta_{2acom} := \frac{F_{2t}}{S_{12a_2}} \quad \eta_{3acom} := \frac{F_{16}}{S_{12a_3}}$$

$$\eta_{acom} := \min(\eta_{1acom}, \eta_{2acom}, \eta_{3acom})$$

$$\eta_{acom} = 0$$



### Caratteristiche Alluminio

Si considera una lega di alluminio 6060 T66 avente le seguenti caratteristiche:

$$S_u := 215 \text{ MPa} \quad \text{Tensione di rottura} \quad S_y := 160 \text{ MPa} \quad \text{Tensione di snervamento}$$

Calcolo della resistenza a fatica:

Numero di cicli  $n := 5 \cdot 10^8$

Rapporto tra tensione di rottura e resistenza a fatica  $\beta := 0.417$

Coefficiente che tiene conto della finitura superficiale  $C_S := 0.743$

Effetto delle condizioni di carico  $C_G := 0.95$

$$S_n := C_G \cdot C_S \cdot \beta \cdot S_u \quad y1(x) := -x + S_y \quad y2(x) := \frac{-S_n}{S_u} \cdot x + S_n$$

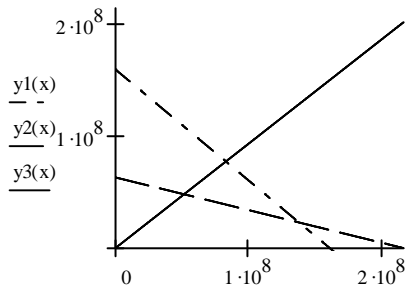


grafico valido per l'albero interno nel caso in cui questo sia in materiale isotropo



Coefficiente di sicurezza statico

$$\eta_{sa} := \frac{S_y}{\sigma_{a,eq}} \quad \eta_{sa} = 10.219$$

Coefficiente di sicurezza a fatica

$$x_1 := \frac{S_n}{\frac{\sigma_a}{\sigma_m} + \frac{S_n}{S_u}} \quad x_1 = 51.243 \text{ MPa} \quad \eta_{faom} := \frac{x_1}{\sigma_m}$$

$$\eta_{faom} = 4.493$$

$$\eta_{fcom} := \frac{S_n}{\sigma_{f,max}^2}$$

$$\eta_{fc} := \begin{cases} \eta_{fcom} & \text{if isotropo}_e = 1 \\ \eta_{ccomp} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\eta_{fa} := \begin{cases} \eta_{faom} & \text{if isotropo}_i = 1 \\ \eta_{acom} & \text{otherwise} \end{cases}$$



**Carter**

$$\eta_{fc} = 2.487$$

**Albero**

$$\eta_{fa} = 4.493$$

I coefficienti ottenuti sono validi sia ne caso di materiale isotropo ed omogeneo per cui la verifica è a fatica. Nel caso di materiale composito con sequenza angle ply, i coefficienti si riferiscono alla verifica statica avendo utilizzato il criterio di massima tensione ammissibile.

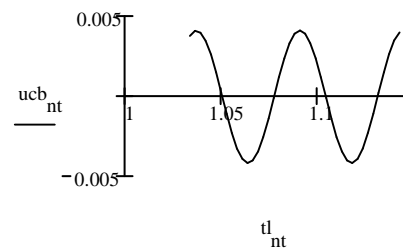
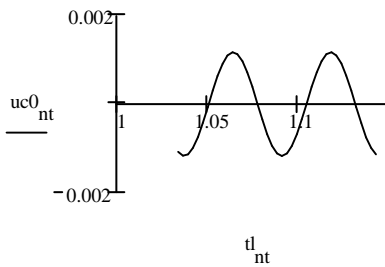


**Analisi delle vibrazioni trasmesse all'operatore**

Per eseguire l'analisi si considerano i due punti di presa  $x=0$  e  $x=ab1$  del carter

$$uc0_{nt} := uc12(0, tl_{nt})$$

$$ucb_{nt} := uc12(ab1, tl_{nt})$$



$$mub1 := \max(ucb) \quad mub2 := \min(ucb)$$

$$mu01 := \max(uc0) \quad mu02 := \min(uc0)$$

$$mub := \begin{cases} |mub2| & \text{if } |mub2| \geq mub1 \\ |mub1| & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$mu0 := \begin{cases} mu02 & \text{if } |mu02| \geq mu01 \\ mu01 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$mu := \max(mub, mu0)$$

$$mu = 4.17 \text{ mm}$$

Calcolo dell'accelerazione efficace:

$$a(t) := -mub \cdot \omega_{for}^2 \cdot \sin(\omega_{for} \cdot t)$$

$$TT := 1 \cdot T\omega$$

$$a_w := \sqrt{\frac{1}{TT} \int_0^{TT} \left( -mub \cdot \omega_{for}^2 \cdot \sin(\omega_{for} \cdot t) \right)^2 dt}$$

$W_{hi} := 0.127$     **fattore di ponderazione secondo norma uni 5349**

$$A_g := W_{hi} \cdot a_w$$



$$A_g = 4.975 \frac{m}{s}$$



# Appendice D

## File comandi Ansys schema B3

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE, B3 albero interno su tre cuscinetti elastici
/FILNAME,albero_ae,0 ! Nome del file
/PREP7
! parametri
pi=3.141593 ! p GRECO
TT=0.1 ! lunghezza cuscinetti
kp=10E10 ! N/m Rigidezza della presa dell'operatore
KC=23320 ! N/m Rigidezza dei cuscinetti
! GEOMETRIA
! lunghezza dei tratti di albero
La=2.025 ! m lunghezza totale albero
c=(La/2) ! mm - posizione cuscinetto C (centrale)
! DIAMETRI, SEZIONI E MOMENTI DI INERZIA
De=0.0099 ! m diametro esterno
Di=0.008 ! m diametro interno
Ac=pi*((De/2)**2-(Di/2)**2) ! Sezione
Izz=(pi/64)*((De)**4-(Di)**4) ! mom inerzia in z ed y
! MATERIALE
rho=2800 ! kg/m^3 densità
E=7.2e10 ! modulo elastico
p=0.32 ! modulo di poisson
! Definizione elementi
ET,2,BEAM3 ! Trave
MP,EX,1,E
MP,PRXY,1,p
MP,DENS,1,rho
```

```
R,3,Ac,Izz,Izz
ET,3,COMBIN14,0,2 !MOLLA
MP,DAMP,3,0
R,4,Kc
!
! KEYPOINTS
!
k,1
K,2,C,0,0 ! CUSCINETTO C
K,3,La,0,0 !
k,11,0,-TT
K,21,C,-TT
K,31,La,-TT
NKPT,1,1
NKPT,2,2
nkpt,3,3
NKPT,11,11
NKPT,21,21
nkpt,31,31
!
D,11,UY,0
D,21,UY,0
D,31,UY,0
! linee
L,1,2
L,2,3
! elementi
TYPE,3
REAL,4
E,1,11
E,2,21
E,3,31
!
type,2
REAL,3
ESIZE,0.05 ! DIVISIONE TRAVE
LMESH,ALL ! MESHATURA TRAVE
NUMMRG,NODE
NUMMRG,KP
dtran
FINISH
```

```
!  
/SOLU  
ANTYPE,MODAL ! ANALISI MODALE  
MODOPT,SUBSP,20  
MXPAND,20  
!  
SOLVE  
FINISH  
/POST1
```

# Appendice E

## File comandi Ansys schema A3

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE, A3 carter con masse, rigidezza e masse presa
/FILNAME,carter_m_pe_mr,0 ! Nome del file
/PREP7
! parametri
pi=3.141593
b=0.4 ! m distanza di presa dell'operatore
kp=100 ! N/m Rigidezza della presa dell'operatore
TT=0.3
! GEOMETRIA
! lunghezza dei tratti di albero
La=2.025 ! m lunghezza totale albero
De=0.034 ! m diametro esterno
Di=0.0323 ! m diametro interno
Ac=pi*((De/2)**2-(Di/2)**2) ! Sezione
Izz=(pi/64)*((De)**4-(Di)**4) ! mom inerzia in z ed y
! MATERIALE
rho=2800 ! kg/m^3 densità
E=7.2e10 ! modulo elastico
p=0.32 ! modulo di piosson
! MASSE
Mi=1.752 ! kg impugnatura
Mf=1.176 ! kg testa
MM=0.400 ! kg massa della mano dell'operatore
! Definizione elementi
ET,1,MASS21,0,,2 ! Massa
R,1,(Mi+MM)
```

```
R,2,Mf
R,5,MM
ET,2,BEAM3 ! Trave
MP,EX,1,E
MP,PRXY,1,p
MP,DENS,1,rho
R,3,Ac,Izz,Izz
ET,3,COMBIN14,0,2 !MOLLA IN Y
MP,DAMP,3,0
R,4,KP,0,0
! KEYPOINTS
K,1,0,0 !inizio trave
K,2,La,0,0 ! fine trave
K,3,b,0,0 ! punto di presa
K,4,0,-TT,0 ! molla y
!K,5,0,0,TT ! molla z
K,6,b,-TT,0 ! molla in b, y
!K,7,b,0,TT ! molla in b, z
NKPT,1,1
NKPT,2,2
nkpt,3,3
NKPT,4,4
!NKPT,5,5
NKPT,6,6
! VINCOLI
D,4,UY,0
D,6,UY,0
! linee
L,1,3
L,3,2
! elementi
TYPE,3
REAL,4
E,1,4
E,3,6
TYPE,1
REAL,1
E,1 ! MASSA 1 (BASE)
REAL,2
E,2 ! MASSA 2 (TESTA)
REAL,5 ! MASSA PRESA OPERATORE
```

```
E,3
type,2
REAL,3
ESIZE,0.05 ! DIVISIONE TRAVE
LMESH,ALL ! MESHATURA TRAVE
NUMMRG,NODE
FINISH
!
/SOLU
ANTYPE,MODAL ! ANALISI MODALE
MODOPT,SUBSP,20
MXPAND,20
!
SOLVE
FINISH
!
/POST1
```

# Appendice F

## File comandi Ansys schema C3

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE, C3 sistema completo
/FILNAME,completo_c3,0 ! Nome del file
/PREP7
! parametri
pi=3.141593
b=0.400 ! m distanza di presa dell'operatore
kp=100 ! N/m Rigidezza della presa dell'operatore
Kc=23317 ! N/m rigidezza dei cuscinetti
NM=10 ! Parametro per definire la finitura della mesh
TT=0.3
! GEOMETRIA
! lunghezza dei tratti di albero
La=2.025 ! m lunghezza totale
BB=0.055 ! m distanza cuscinetto B
C=1.012 ! m cuscinetto C
D=1.97 ! m cuscinetto D
!
De1=0.034 ! m diametro esterno
Di1=0.0323 ! m diametro interno
Ac1=pi*((De1/2)**2-(Di1/2)**2) ! Sezione
Izz1=(pi/64)*((De1)**4-(Di1)**4) ! mom inerzia in z ed y
!
De2=0.0099 ! m diametro esterno
Di2=0.008 ! m diametro interno
Ac2=pi*((De2/2)**2-(Di2/2)**2) ! Sezione
Izz2=(pi/64)*((De2)**4-(Di2)**4) ! mom inerzia in z ed y
```

```
! MATERIALE
rho=2800 ! kg/m^3 densità
E=72e9 ! modulo elastico
p=0.32 ! modulo di piosson
zeta=0.5E-4
! MASSE
MM=0.400 ! kg mano operatore 0.4 kg
Mi=1.752 ! kg impugnatura
Mf=1.176 ! kg testa
! FORZANTE
! FORZA
mr=0.8 ! kg massa corpi rotanti
A1=2*(3.36E-4) ! m Ampiezza
Wfa=18.333
wf=Wfa*2*PI !115.2 ! rad/s pulsazione forzante
AF=mr*A1*wf*wf
! MOMENTO
bm=0.11
MF2=mr*A1*bm*wf*wf
! Definizione elementi
ET,1,MASS21,0,,4 ! Massa
R,1,(Mi+MM)
R,2,Mf
R,7,MM
ET,2,BEAM3 ! Trave
MP,EX,1,E
MP,PRXY,1,p
MP,DENS,1,rho
!MP,DMPR,1,zeta
R,3,Ac1,Izz1,Izz1
R,5,Ac2,Izz2,Izz2
ET,3,COMBIN14,0,2 ! MOLLA IN Y
MP,DAMP,3,0
R,4,KP
R,6,Kc
! NODI
! CARTER
N,NM,0,0 ! inizio carter
N,NM*2,BB,0,0 ! punto BB (cuscinetto)
FILL,NM,2*NM
N,NM*3,B,0,0 ! punto B (presa)
```



```
FILL,2*NM,3*NM
N,NM*4,C,0,0 ! punto C
FILL,3*NM,4*NM
N,NM*5,D,0,0 ! punto D
FILL,4*NM,5*NM
N,NM*6,La,0,0 ! fine carter
FILL,5*NM,6*NM
! ALBERO
N,7*NM,BB,0,0
N,8*NM,C,0,0
FILL,7*NM,8*NM
N,9*NM,D,0,0
FILL,8*NM,9*NM
! PUNTI DI PRESA
N,1,0,-TT
N,2,B,-TT
! GENERAZIONE ELEMENTI
! CARTER
type,2
REAL,3
E,NM,NM+1
EGEN,5*NM,1,1,5*NM,1
! ALBERO
TYPE,2
REAL,5
E,7*NM,7*NM+1
EGEN,2*NM,1,5*NM+1,6*NM
! MASSE
TYPE,1
REAL,1
E,NM ! MASSA 1 (BASE)
REAL,2
E,6*NM ! MASSA 2 (TESTA)
REAL,7
E,3*NM ! MASSA PRESA
! CUSCINETTI
TYPE,3
REAL,6
E,2*NM,7*NM
E,4*NM,8*NM
E,5*NM,9*NM
```

```
! PRESA
REAL, 4
E, NM, 1
E, 3*NM, 2
! VINCOLI
D, 1, ALL, 0
D, 2, ALL, 0
F, 6*NM, FY, AF
F, 6*NM, MZ, MF2
!
FINISH
/solu
antype, modal
modopt, subsp, 20
mxpand, 20
OUTPR, NSOL, all
SAVE
solve
finish
!
/SOLU
ANTYPE, HARMIC
HROPT, MSUP, 30
HROUT, OFF, , ON
!OUTPR, NSOL
KBC, 1
!
HARFRQ, 15, 25 ! RANGE FREQUENZE (Hza)
NSUBST, 40
save
SOLVE
FINISH

/POST26
NSOL, 2, 4*NM, U, Y, y_C ! spostamento punto C
nsol, 3, nm, U, Y, y_A ! spostamento punto A
nsol, 4, 3*nm, u, y, y_b ! spostamento punto di presa

/EOF
```

```
FILE,'completo_libero_cr','rst','.'
/UI,COLL,1
!NUMVAR,200
SOLU,191,NCMIT
STORE,MERGE
! PLCPLX,0
! PRCPLX,1
FILLDATA,191,,,,1,1
REALVAR,191,191
!*
NSOL,2,4*NM,U,Y,y_medio
STORE,MERGE
```

# Appendice G

## File comandi Ansys schema C3 con numero variabile di cuscinetti

```
FINISH
/CLEAR
/TITLE, C3 sistema completo con numero cuscinetti variabile
/FILNAME,completo_c3_cv,0 ! Nome del file
/PREP7
! parametri
pi=3.141593
b=0.400 ! m distanza di presa dell'operatore
kp=100 ! N/m Rigidezza della presa dell'operatore
Kc=23317 ! N/m rigidezza dei cuscinetti
NM=10
NC=4 ! Numero di cuscinetti
TT=0.3
! GEOMETRIA
!
La=2.025 ! m lunghezza totale carter
BB=0.055 ! m distanza cuscinetto B
C=1.012 ! m cuscinetto C
D=1.97 ! m cuscinetto D
!
De1=0.034 ! m diametro esterno
Di1=0.0323 ! m diametro interno
Ac1=pi*((De1/2)**2-(Di1/2)**2) ! Sezione
Izz1=(pi/64)*((De1)**4-(Di1)**4) ! mom inerzia in z ed y
!
De2=0.0099 ! m diametro esterno
```

```
Di2=0.008 ! m diametro interno
Ac2=pi*((De2/2)**2-(Di2/2)**2) ! Sezione
Izz2=(pi/64)*((De2)**4-(Di2)**4) ! mom inerzia in z ed y
! MATERIALE
rho=2800 ! kg/m^3 densità
Ea=72e9 ! modulo elastico albero
Ec=72e9 ! modulo elastico carter
p=0.32 ! modulo di piosson
zeta=0.5E-4
! MASSE
MM=0.400 ! kg mano operatore 0.4 kg
Mi=1.752 ! kg impugnatura
Mf=1.176 ! kg testa
! FORZANTE
! FORZA
mr=0.8 ! kg massa corpi rotanti
A1=1*(3.36E-4) ! m Ampiezza
Wfa=18.333
wf=Wfa*2*PI !115.2 ! rad/s pulsazione forzante
AF=mr*A1*wf*wf
! MOMENTO
bm=0.11
MF2=mr*A1*bm*wf*wf
! Definizione elementi
ET,1,MASS21,0,,4 ! Massa
R,1,(Mi+MM)
R,2,Mf
R,7,MM
ET,2,BEAM3 ! Trave Carter
MP,EX,1,Ec
MP,PRXY,1,p
MP,DENS,1,rho
!
ET,4,BEAM3 ! Trave albero
MP,EX,4,Ea
MP,PRXY,1,p
MP,DENS,1,rho
!
!MP,DMPR,1,zeta
R,3,Ac1,Izz1,Izz1
R,5,Ac2,Izz2,Izz2
```

```
!  
ET,3,COMBIN14,0,2 ! MOLLA IN Y  
MP,DAMP,3,0  
R,4,KP  
R,6,Kc  
! NODI  
! CARTER  
N,NM,0,0 ! inizio carter  
N,NM*2,BB,0,0 ! punto BB (cuscinetto)  
FILL,NM,2*NM  
N,NM*(NC+1),D,0,0 ! punto D  
FILL,2*NM,NM*(NC+1)  
N,NM*(NC+2),La,0,0 ! fine carter  
FILL,NM*(NC+1),NM*(NC+2)  
!  
! GENERAZIONE ELEMENTI  
! CARTER  
TYPE,2  
REAL,3  
E,NM,NM+1  
EGEN,(2+NC-1)*NM,1,1,(2+NC-1)*NM,1  
!  
! NODI ALBERO  
NA=NC+3  
N,NM*NA,BB,0,0 ! inizio albero  
N,NM*(NA+NC-1),D,0,0 ! fine albero  
FILL,NM*NA,NM*(NA+NC-1)  
!  
! ELEMENTI ALBERO  
TYPE,4  
REAL,5  
E,NM*NA,NM*NA+1  
EGEN,NM*(NC-1),1,(2+NC-1)*NM+1,2*NM*(NC-1),1  
!  
! MASSE  
TYPE,1  
REAL,1  
E,NM ! MASSA 1 (BASE)  
!  
REAL,2  
E,NM*(NC+2) ! MASSA 2 (TESTA)
```

```
!  
TOL=0.5*(D-BB)/((NC-1)*NM)  
SELTOL,TOL  
NSEL,S,LOC,X,b  
*GET,NODOPRESA,NODE,0,NUM,MIN  
*GET,NODOPRESAX,NODE,NODOPRESA,LOC,X  
REAL,7  
E,NODOPRESA ! MASSA PRESA  
!  
! CUSCINETTI  
TYPE,3  
REAL,6  
E,NM*2,NM*NA ! Cuscinetto in BB (primo)  
E,NM*(NC+1),NM*(NA+NC-1) ! Cuscinetto in D (ultimo)  
!  
! CICLO PER DEFINIRE GLI ALTRI CUSCINETTI  
*DO,ITERAZIONE,1,NC-2  
E,NM*2+(NM*ITERAZIONE),(NA*NM)+(NM*ITERAZIONE)  
*ENDDO  
!  
! PRESA  
! PUNTI DI PRESA  
N,1,0,-TT  
N,2,NODOPRESAX,-TT  
!  
REAL,4  
E,NM,1  
E,NODOPRESA,2  
!  
! VINCOLI  
D,1,ALL,0  
D,2,ALL,0  
!  
F,6*NM,FY,AF  
F,6*NM,MZ,MF2  
!  
FINISH  
/solu  
antype,modal  
modopt,subsp,20  
mexpand,20
```

```
OUTPR,NSOL,all  
solve  
finish
```



# Appendice H

## Elenco completo pre-impregnati

Si riporta l'elenco dei pre-impregnati con le caratteristiche relative reperibili in [36].

Fibra	Matrice	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$S_{11}$ (MPa)	$S_{22}$ (MPa)	$S_{12}$ (MPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
AS Carbon	3501 Epoxy	138	9	7	0.30	1447	52	93	1600
IM6 Carbon	Generic Epoxy	203	11	8	0.32	3500	56	98	1600
CFS	LTM25	54	55	3	0.42	618	652	84	1450
GY70 Carbon	934 Epoxy	294	6	5	0.23	589	30	50	1600
IM6 Carbon	SC1081 Epoxy	177	11	8	0.27	2860	49	83	1600
Mod I Carbon	WRD9371 Polyimide	216	5	5	0.25	807	15	22	1540
MR50 Carbon	LTM25 Epoxy	155	7	4	0.35	2020	21	89	1520
NAS S12K Carbon	NCT321 Epoxy	129	8	4	0.32	39	1	3	1490
T300 Carbon	5208 Epoxy	181	10	7	0.28	1500	40	68	1600
T300 Carbon	934 Epoxy	148	10	5	0.3	1320	43	48	1500
Generic E-Glass	Generic Epoxy	39	9	4	0.28	1080	40	90	2100
Generic S-Glass	Generic Epoxy	43	9	5	0.27	1280	49	69	2000
Glass	524SC Epoxy	30	30	5	0.17	367	367	97	2200
149 Aramid Kevlar	Generic Epoxy	87	6	2	0.34	1280	30	49	1380

Tabella H.1: Elenco caratteristiche prepreg

# Appendice I

## Elenco preventivi

Si riporta l'elenco dei preventivi con le principali informazioni, forniti dalle aziende contattate.

Azienda	Componente	$E_{eq}$ (GPa)	Costo un. (€)	Tecn. prod.	Materiale	Note
Vegatech Srl	Carter	120	-	Fil. winding	Carbonio	
Lamiflex Srl	Carter	120	30,00	Pullwinding	Carbonio	$L_{max} = 2$ m
Lamiflex Srl	Albero	120	15,00	Pullwinding	Carbonio	$L_{max} = 1$ m
Carbon Comp. Srl	Carter	120	100,00	-	Carbonio	
Carbon Comp. Srl	Carter	55	55,00	-	Vetro	
Carbon Comp. Srl	Albero	140	45,00	-	Carbonio	
Carbon Comp. Srl	Albero	100	25,00	-	Vetro	
Bardo Srl	Carter	125	-	Pullwinding	Carbonio	
Reglass Srl	Carter	76	125,00	Fil. winding	Carbonio	
Reglass Srl	Carter	154	140,00	Fil. winding	Carbonio	
Italcanna Srl	Carter	82	100,00	-	Carbonio	
Italcanna Srl	Carter	125	235,00	-	Carbonio	
Italcanna Srl	Carter	40	40,00	-	Vetro	

Tabella I.1: Elenco preventivi

# Bibliografia

- [1] Antinelli, A. e Zimpi, E. La struttura dei costi dell'olivicoltura laziale nella raccolta tradizionale e meccanizzata. *L'informatore agrario*, 48(43):73–76, 1992.
- [2] Biocca, M. e Sperandio, G. La raccolta delle olive con macchine agevolatrici. [http://web.tiscali.it/macchineoperatrici/tecnolea1\\_%20testo.pdf](http://web.tiscali.it/macchineoperatrici/tecnolea1_%20testo.pdf), 1999. Data di consultazione: 11-03-2008.
- [3] ISTAT. Struttura e produzioni delle aziende agricole. *Informazioni*, (98), 1998.
- [4] UNI EN 1005-2. *Sicurezza del macchinario — Prestazione fisica umana — Parte 2: Movimentazione manuale di macchinario e di parti componenti il macchinario*, Novembre 2004.
- [5] UNI EN ISO 5349-1. *Vibrazioni meccaniche — Misurazione e valutazione dell'esposizione dell'uomo alle vibrazioni trasmesse alla mano — Parte 1: Requisiti generali*, Settembre 2004.
- [6] UNI EN ISO 5349-2. *Vibrazioni meccaniche — Misurazione e valutazione dell'esposizione dell'uomo alle vibrazioni trasmesse alla mano - Parte 2: Guida pratica per la misurazione al posto di lavoro*, Dicembre 2004.
- [7] [http://www.volpiororiginale.it/giulivo3\\_it.html](http://www.volpiororiginale.it/giulivo3_it.html). Data di consultazione: 11-03-2008.
- [8] <http://www.innovazionitecnologiche.com/classic/classic-scheda.htm>. Data di consultazione: 11-03-2008.
- [9] <http://www.coimaitaly.com/>. Data di consultazione: 11-03-2008.
- [10] <http://www.imbriano.com/>. Data di consultazione: 11-03-2008.
- [11] [http://www.lisam.it/prodotti\\_scheda.php?lang=1&id\\_cat=2&id\\_prodotti=26](http://www.lisam.it/prodotti_scheda.php?lang=1&id_cat=2&id_prodotti=26). Data di consultazione: 11-03-2008.

- [12] [http://www.zanon.it/ita/abbacchiatore\\_\\_electric\\_\\_mambo.php](http://www.zanon.it/ita/abbacchiatore__electric__mambo.php). Data di consultazione: 11-03-2008.
- [13] [http://www.pellencitalia.com/olivium/dati\\_\\_tecnici-lixion.htm](http://www.pellencitalia.com/olivium/dati__tecnici-lixion.htm). Data di consultazione: 11-03-2008.
- [14] <http://www.campagnola.it/webapp/campagnola/news-man.nsf/idadit/rmao-757a4q>. Data di consultazione: 11-03-2008.
- [15] UNI EN 547-3. *Sicurezza del macchinario — Misure del corpo umano — Dati antropometrici*, Settembre 1998.
- [16] UNI EN ISO 7250. *Misurazioni di base del corpo umano per la progettazione tecnologica.*, Febbraio 2000.
- [17] UNI EN ISO 14738. *Sicurezza del macchinario — Requisiti antropometrici per la progettazione di postazioni di lavoro sul macchinario*, Aprile 2004.
- [18] V. Zatsiorsky. The mass and inertia characteristics of the main segments of the human body. *Biomechanics*, V(IIB):1152–1159, 1983.
- [19] Research institute of human engineering for quality life. Report of measurement and evaluation of the human dynamic characteristics. *J. Biomech.*, 29(4):443–450, 1996.
- [20] AA. VV. *Fundamentals of Engineering supplied-reference handbook*. National Council of Examiners for Engineering and Surveying®, fourth edition, 2000. [www.ncees.org](http://www.ncees.org).
- [21] Juvinall, Robert C. e Marshek, Kurt M. *Fondamenti della progettazione dei componenti delle macchine*. Edizioni ETS, 1993.
- [22] C. Carmignani. *Dinamica strutturale*. Edizioni ETS, 2004.
- [23] ISO 1940-1. *Mechanical vibration — Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state — Part 1: Specification and verification of balance tolerances*, Settembre 2003.
- [24] A. Paolini, G. e Lo Conte. Smorzamento delle oscillazioni libere di un pendolo torsionale dovuto all'effetto termoelastico. In *XXXI Convegno Nazionale*. Associazione italiana per l'analisi delle sollecitazioni (AIAS), 18-21 Settembre 2002.

- [25] E. A. Brandes. *Smithells Metals Reference Book*. Butterworth Heinemann, seventh edition, 1992.
- [26] Postnikov, V.S. e Tavadze, F. N. e Gordienko, L. K. *Internal friction in metals and alloy*. Consultant Bureau, New York, 1967.
- [27] C. F. Beards. *Structural vibration: analysis and damping*. Arnold – Hodder Headline Group, first edition, 1996.
- [28] Randall F. Barron. *Industrial noise control and acoustics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2003.
- [29] Frost, N. E. e Marsh, K. J. e Pook, L. P. *Metal Fatigue*. Clarendon Press - Oxford, 1974.
- [30] R. B. Heywood. *Designing against fatigue*. Chapman and Hall, 1962.
- [31] J.R. Vinson. *The behavior of structures composed of composite materials*. Kluwer Academic publishers, second edition, 2002.
- [32] M. W. Hyer. *Stress Analysis of Fiber-reinforced Composite Materials*. McGraw-Hill, 1997.
- [33] <http://composite.about.com/library/data/blc-im6epoxy.htm>. Data di consultazione: 11-01-2008.
- [34] <http://composite.about.com/library/data/blc-im6epoxy.htm>. Data di consultazione: 11-01-2008.
- [35] [http://composite.about.com/od/data/l/blg\\_egepoxy.htm](http://composite.about.com/od/data/l/blg_egepoxy.htm). Data di consultazione: 11-01-2008.
- [36] <http://composite.about.com/cs/databases/l/bldata.htm>. Data di consultazione: 18-03-2008.
- [37] Harris, Cyril M. e Crede, Charles E. *Shock and vibration handbook*, volume 2. Mc-Graw-Hill Book company, 1961.
- [38] Esteki, A. e Mansour, M. An experimentally based nonlinear viscoelastic model of joint passive moment. *J. Biomech.*, 29(4):443–450, 1996.
- [39] UNI EN 1005-1. *Sicurezza del macchinario — Prestazione fisica umana — Termini e definizioni*, Luglio 2003.

- [40] UNI EN 1005-3. *Sicurezza del macchinario — Prestazione fisica umana — Limiti di forza raccomandati per l'utilizzo del macchinario*, Luglio 2003.
- [41] UNI EN 1005-4. *Sicurezza del macchinario — Prestazione fisica umana — Parte 4: Valutazione delle posture e dei movimenti lavorativi in relazione al macchinario*, Luglio 2003.
- [42] UNI EN 547-1. *Sicurezza del macchinario — Misure del corpo umano — Principi per la determinazione delle dimensioni richieste per le aperture per l'accesso di tutto il corpo nel macchinario*, Settembre 1998.
- [43] UNI EN 547-2. *Sicurezza del macchinario — Misure del corpo umano — Principi per la determinazione delle dimensioni richieste per le aperture di accesso*, Settembre 1998.
- [44] UNI EN 614-1. *Sicurezza del macchinario — Principi ergonomici di progettazione — Parte 1: Terminologia e principi generali*, Settembre 2006.
- [45] UNI EN 614-2. *Sicurezza del macchinario — Principi ergonomici di progettazione — Interazioni tra la progettazione del macchinario e i compiti lavorativi*, Settembre 2002.
- [46] G. Mattei. *Lezioni di meccanica razionale*. SEU, giugno 2002.
- [47] G. Mattei, G. e Remorini. *Esercizi di meccanica razionale*. SEU, settembre 2002.
- [48] M. Abate. *Geometria*. McGraw-Hill Companies, 1996.
- [49] M. Abate. *Esercizi di geometria*. McGraw-Hill Companies, 1999.

## Ringraziamenti

*M'appresto a ringraziare un po' ansimante  
chiedendo prontamente grande aiuto  
a chi lo può donare assai abbondante;*

*e voglio ricordare chi ha voluto  
prima di me invocare dive e muse.  
Me stesso non ritengo sì arguto*

*e certo loro non saran deluse  
ché disturbarle or sarebbe vano,  
io credo accetteranno le mie scuse.*

*Per render grazie scelgo un modo strano  
mi auguro che a tutti voi piaccia  
e spero non sembrare un villano.*

*Di certo non farò una figuraccia  
a cominciar dal bravo professore  
che – povero – si lesse 'sta “robaccia”*

*il prof. Beghini primo relatore  
che insieme all'amico prof. Bertini  
mi ha guidato con mio grande onore.*

*Molti gli aiuti grandi e piccolini  
mi ha dato tutti i giorni Bacchereti  
si lavorava noi spesso vicini*

*e mi ha svelato molti dei segreti  
per tirar giù dagli alberi 'sti frutti  
che riempiono in ottobre gli oliveti.*

*Per questo lo ringrazio più di tutti  
ed anche tutta Scienza Machinale  
perché non ci son stati giorni brutti*

*e questo è merito del personale  
i nomi qui di tutti non riporto  
son certo non se ne avranno a male.*

*Ed ora qui io cito con trasporto  
gli amici che mi sono stati accanto  
nel nostro studio a volte un po' sofferto  
e voglio salutar quel “bravo fanto”  
che mi ha aiutato in più di un progetto*

*gli faccio un grande in bocca al lupo, intanto  
scieremo prima o poi, te lo prometto.  
Confesso proprio qui la mia fortuna  
di viaggiare insieme a un bel gruppetto  
con cui divider ogni avventura  
sono molto più che amici e so perché:  
son pronti a dar la vita addirittura  
Daniele, Marco, Carlo, Francesco, Ste',  
Ale, Riccardo, Angelo, Giovanni...  
vi metterei qui tutti fosse per me  
ma non mi basterebbero degli anni.  
Noi che sappiamo, in fondo al nostro cuore  
che sono un dono anche i grandi affanni  
affronterem così ogni dolore.  
Quando per dormir chiedevo un posto  
mi hanno accolto sempre con calore  
lor lo sanno, non è solo per questo  
che io son loro molto affezionato.  
Ed è col cuore in mano che mi appresto  
a salutare chi, da che son nato  
con tanto affetto e stima mi ha cresciuto:  
o saggio zio, molto mi hai insegnato;  
zie e cugini han per me avuto  
braccia sempre aperte e bei sorrisi.  
I miei grandi fratelli han voluto  
donarmi molte volte i lor servigi  
un grande esempio sono stati e sono,  
con loro erano belli anche i litigi.  
Se chiudo gli occhi sento ancora il suono  
care nonne, è la vostra voce dolce  
che giunge alla mia mente come un dono,  
rischiara tutto, più di mille torce;  
insieme ai nonni adesso io vi penso  
e dentro me un sole nuovo sorge.  
Ma tutto questo non avrebbe senso  
nel dirlo se non essere in ritardo  
travolgon sempre con amore immenso*



*il cuore mio a volte un po' testardo,  
se qualcosa, di bello in me è presente  
merito a voi, non ditemi bugiardo  
babbo e mamma, lo dico chiaramente  
siete sempre il mio porto sicuro  
e quando il mondo intorno è avvilito  
ed ogni passo sembra troppo duro  
io guardo voi e trovo in me la forza  
di affrontar presente e futuro.*

*Ma ora a lei, che toglie in me ogni scorza  
di egoismo, noia e pigrizia.  
Continuiamo insieme la nostra corsa  
verso un futuro pieno di letizia,  
se la paura a volte il cuore assale  
noi sappiamo guardare con astuzia  
dentro di noi, come in pieno sole,  
chiara, forte e limpida certezza:  
sappremo affrontar il temporale  
che la vita offre con prontezza;  
ché Uniti, siamo più di quel che siamo  
così sparisce ogni insicurezza;  
grido forte, con la mia vita in mano  
insieme e in alto volgiamo i nostri passi  
questa strada ci porterà lontano.*

*Il lettore, tranquillo, si rilassi  
la sua tortura è oramai finita  
è già un eroe, ora non collassi;  
come un cerchio, ben chiuso a matita  
ritorno a dir dell'abbondante aiuto  
che chiesi cominciando la "partita"  
questo è solo un piccolo tributo  
a Lui, che da nessuno si allontana,  
pagò già di persona ogni rifiuto  
e che, malgrado me, ancor mi ama.*

Matteo