

UNIVERSITÀ DI PISA

Scuola di Dottorato in Ingegneria
"Leonardo da Vinci"



Dottorato in Veicoli Terrestri e Sistemi di Trasporto

Tesi di Dottorato di Ricerca

ANALISI DINAMICA DI VEICOLI

**Studio di uno scooter basculante a tre ruote.
Revisione critica dell'handling diagram.**

Antonio Sponziello

Anno 2008

UNIVERSITÀ DI PISA

Scuola di Dottorato in Ingegneria
"Leonardo da Vinci"



Dottorato in Veicoli Terrestri e Sistemi di Trasporto

Tesi di Dottorato di Ricerca

ANALISI DINAMICA DI VEICOLI
Studio di uno scooter basculante a tre ruote.
Revisione critica dell'handling diagram.

Antonio Sponziello

Tutori:

Prof. Ing. Massimo Guiggiani

Ing. Francesco Frendo

Anno 2008

*Con affetto,
ai miei genitori*

Sommario

L'attività di modellazione e simulazione nel campo della dinamica del veicolo va assumendo un'importanza sempre più crescente in campo industriale perché permette la diminuzione dei tempi e dei costi di un determinato prodotto. Il lavoro presentato nella tesi si inserisce all'interno di questo contesto e lo fa seguendo due filoni principali.

Il primo, di carattere più applicativo, verrà discusso nella prima parte della tesi e riguarda la modellazione di una nuova tipologia di scooter introdotta nel mercato dalla Piaggio & C. SpA qualche anno fa. La caratteristica evidente di questa categoria di scooter è quella di possedere due ruote anteriori ed una posteriore. L'obiettivo è quello di investigare, mediante la realizzazione di modelli, le diversità che eventualmente intercorrono tra tale tipo di scooter ed uno di tipo tradizionale con una sola ruota anteriore. Tra i risultati prevale l'effetto di maggiore tenuta di strada presentato dall'anteriore dell'MP3.

La seconda parte della tesi è invece di carattere più teorico e va ad interessare le fondamenta della dinamica dell'autoveicolo ed, in particolare, il concetto di sottosterzo e il diagramma di maneggevolezza. L'obiettivo è quello di capire se tali strumenti, largamente usati, continuano a rimanere validi per veicoli che non rientrano all'interno della categoria rappresentata dal modello monotraccia da cui essi traggono origine. Si fa riferimento, tanto per fare qualche esempio, a veicoli con differenziale bloccato o parzialmente bloccabile o a veicoli che possiedono più di due assali.

Abstract

This thesis is divided into two parts: the first one is related to the analysis of a three-wheeled motorcycle, while the second one deals with the critical review of the understeer gradient concept for a vehicle.

The three-wheeled motorcycle, called MP3, was introduced into the market by Piaggio & C. SpA two years ago. This motorcycle has two front wheels and one rear wheel. However, it can be driven like a common motorcycle. Two different models have been set up in order to carry out handling and comfort analyses: a model including suspensions and tire deformation and a more simplified one where the suspensions are locked and the tires are thin and rigid. Comparing the dynamical analysis of the MP3 to that of a conventional motorscooter, the main result is that the three-wheeler shows a somewhat enhanced safety.

In the second part of this thesis, the understeer gradient concept is discussed by using a simplified model of a vehicle fitted with a locked differential, but the same approach can be used to analyze the dynamic behaviour of almost all four-wheeled vehicles. The main result is that the classical understeer gradient and the handling diagram are not sufficient to describe the steady-state behaviour of any vehicle.

Indice

Sommario	7
Abstract	9
I Studio di uno scooter basculante a tre ruote	17
1 Introduzione	19
2 Descrizione del modello	23
2.1 Lo scooter MP3	23
2.2 Ipotesi di sviluppo del modello	26
2.2.1 Scooter	26
2.2.2 Pilota	27
2.2.3 Strada	27
2.3 Geometria dello scooter	27
2.3.1 Rollio della motocicletta	27
2.3.2 Beccheggio del motore e del telaio	29
2.3.3 Rotazione del parallelogramma	29
2.3.4 Assi di sterzo	30
2.3.5 Angolo di sterzo	31
2.3.6 Angolo di beccheggio dei biscottini anteriori	32
2.3.7 Versori ausiliari	33
2.4 Gradi di libertà	33

2.5	Modello di pneumatico	35
2.5.1	Angolo di camber ed angolo di sterzo a terra	38
2.5.2	Rigidezza verticale del pneumatico	41
2.6	Equilibrio dinamico	44
2.6.1	Espressione dell'energia cinetica rotatoria	45
2.6.2	Espressione dell'energia cinetica traslatoria	49
2.6.3	Equazioni di Lagrange per quasi-coordinate	51
2.6.4	Componenti lagrangiane delle forze attive	53
2.6.5	Osservazioni sull'implementazione delle equazioni di Lagrange	62
2.7	Controllore virtuale	63
3	Simulazioni e risultati	67
3.1	Validazione del modello	67
3.2	Steering pad e cambio di corsia	71
3.3	Perdita di aderenza su una ruota anteriore	74
3.4	Tenuta di strada su terreno sconnesso	80
4	Analisi di stabilità	87
4.1	Introduzione	87
4.2	Descrizione del modello	88
4.3	Modi propri in rettilineo	91
4.4	Modi propri in curva	93
5	Conclusioni	99
II	Revisione critica dell'handling diagram	103
1	Introduzione	105
2	Veicolo con differenziale bloccato	107
2.1	Modello monotraccia	107
2.2	Diagramma di maneggevolezza e gradiente di sottosterzo	109
2.3	Modello di veicolo con differenziale bloccato	111

2.3.1	Equazioni di equilibrio	112
2.3.2	Modello di pneumatico	113
2.3.3	Espressione degli scorrimenti teorici	113
2.3.4	Stima dei carichi verticali	115
2.4	Comportamento stazionario in curva	118
2.4.1	Diagrammi di maneggevolezza	120
3	Dal diagramma alla superficie di maneggevolezza	123
3.1	Forma generale dei modelli di veicolo	123
3.2	Analisi dell'equilibrio in curva	124
3.3	Interpretazione geometrica del gradiente di sottosterzo . . .	129
3.4	Caso del modello monotraccia	131
3.5	Analisi delle condizioni stazionarie mediante una sola superficie	134
3.6	Come misurare il gradiente \mathbf{w}	140
4	Conclusioni e sviluppi futuri	143

Ringraziamenti

Quando arrivi alla fine di un ciclo e ti guardi indietro, ti accorgi, che le persone che hanno contribuito alla tua formazione umana e professionale, sono così tante che sarebbe impensabile ricordarle tutte. In ogni caso, alcune più di altre hanno lasciato un segno più profondo. Tra queste, sicuramente ci sono i miei due tutori, il prof. Massimo Guiggiani e l'Ing. Francesco Frenzo, che giorno per giorno mi hanno supportato professionalmente ed umanamente in questo cammino.

Ringrazio l'Ing. Santucci e l'Ing. Di Tanna della Piaggio per il supporto tecnico che mi hanno dato durante lo studio sullo scooter MP3 e per aver dato la possibilità al nostro gruppo di lavorare su un progetto così interessante.

Tra i colleghi del dipartimento di meccanica, un doveroso grazie va ad Alessio Artoni, Marco Gabiccini, Gabriele Melani, Giordano Greco e Francesco Bartaloni per la disponibilità dimostrata nel chiarirmi ogni dubbio e nell'aiutarmi in qualsiasi mia esigenza.

Ringrazio i miei amici d'infanzia con cui ci si incontra ad ogni occasione e che mi insegnano ogni volta qualcosa in più: Daniele, Walter, Stefano, Sandro,...

E infine, voglio dire grazie soprattutto alla mia ragazza Alessia, ai miei genitori ed ai miei fratelli Alessandro e Gabriele, per essermi stati accanto sia nei momenti tranquilli che in quelli difficili e per avermi sempre incoraggiato ad andare avanti e a non arrendermi mai,...per tutto questo, grazie!

Parte I

Studio di uno scooter
basculante a tre ruote

Capitolo 1

Introduzione

Tutti hanno un'idea chiara su che cosa sia una motocicletta. Da poco tempo, tuttavia, sono usciti sul mercato (con un certo successo) dei veicoli quantomeno curiosi, aventi due ruote anteriori ed una posteriore; si fa riferimento allo scooter Piaggio MP3 (capostipite di questa categoria) introdotto dalla Piaggio & C. SpA qualche anno fa.

La caratteristica essenziale di questo particolare veicolo è che, nel guidarlo, dà le stesse sensazioni di uno scooter di tipo tradizionale, nonostante le due ruote anteriori. Infatti, l'MP3 può raggiungere angoli di rollio molto elevati (tipici di una motocicletta) grazie al cinematismo con cui le ruote anteriori sono vincolate al telaio.

I giudizi dei collaudatori ed i risultati dei test sembrano essere positivi sotto molti aspetti. In particolare, sembra che il veicolo trasmetta una sensazione di maggiore sicurezza al pilota rispetto ad un scooter avente caratteristiche simili. Inoltre, da misure sperimentali si è visto che la tenuta in curva è maggiore e che gli spazi di frenata risultano ridotti.

L'obiettivo della prima parte della tesi è proprio quello di indagare sulla dinamica di questo "tre ruote" per capire in che cosa si somiglia ed in che cosa si distingue da uno scooter di tipo tradizionale.

Essendo un prodotto innovativo, non esistono in letteratura dei riferimenti che possano essere di ausilio per introdursi allo studio della dinamica

di questi veicoli. Di conseguenza, si è fatto riferimento alla tradizionale dinamica della motocicletta adattandola a questo scopo [4, 5, 21, 22, 23, 24].

In particolare, per raggiungere l'obiettivo di cui si è detto sopra, sono stati sviluppati dei modelli che riproducano la dinamica sia dello scooter MP3 sia di uno scooter tradizionale avente caratteristiche simili in modo da poter fare il confronto fra le due tipologie. Due modelli con differente complessità sono stati implementati. Quello descritto in maniera ampia nel secondo capitolo è il più complesso (14 gradi di libertà) e tiene conto della presenza delle sospensioni e della deformabilità radiale dei pneumatici. Tale modello può, quindi, essere usato sia per simulare manovre di handling su strada piatta, sia per simulare manovre su strada sconnessa per valutare il comfort e la tenuta di strada del veicolo. Un modello più semplificato, in cui le sospensioni sono bloccate e le ruote rigide e lenticolari, è stato usato per fare l'analisi di stabilità in rettilineo ed in curva (quarto capitolo).

Oltre alla modellazione della motocicletta intesa come sistema meccanico a sé stante, per poter effettuare delle manovre, è stato necessario realizzare un controllore che simuli il comportamento di un pilota umano. Il modello di pilota implementato è molto semplice, in quanto è supposto fisso rispetto al telaio ed agisce sulla coppia di sterzo e sulla coppia motrice per seguire una prestabilita traiettoria alla velocità desiderata.

Nel terzo e quarto capitolo vengono riportati i risultati ottenuti simulando delle manovre che cerchino di mettere in evidenza le differenze esistenti tra le due tipologie di motocicletta.

Prima di cominciare a descrivere il modello sviluppato, è possibile fare alcune osservazioni di carattere più che altro qualitativo che sicuramente aiutano ad introdursi nell'analisi dinamica di questo veicolo. La prima osservazione è che due ruote anteriori sicuramente aumentano il peso gravante sull'anteriore rispetto ad una motocicletta con una sola ruota. Tuttavia, grazie al quadrilatero con cui esse sono collegate al telaio (per una descrizione più dettagliata si veda il capitolo successivo), il peso è circa equamente suddiviso tra i due pneumatici (sia in condizioni stazionarie che dinamiche). Questo permette di avere sulla singola ruota un carico verticale che è solo un po' più alto della metà di quello gravante sull'anteriore di uno scooter tradizionale. È ben noto che un generico pneumatico ha una risposta meno

che lineare con l'aumento del carico verticale e, di conseguenza, due ruote su cui ridistribuire il carico possono offrire dei vantaggi in termini di riduzione degli spazi di frenata e di un aumento della tenuta laterale. Infine, si vuole osservare che le due ruote offrono un effetto giroscopico più alto con delle conseguenze sia sulla stabilità del veicolo, sia nei cambi di direzione che possono risultare più lenti.

Capitolo 2

Descrizione del modello

2.1 Lo scooter MP3

In questo capitolo verrà fatta una descrizione del modello sviluppato per l'analisi dinamica dello scooter MP3. Il primo passo è, quindi, quello di avere un'idea chiara di come sia fatto e, in particolare, quello di capire il funzionamento cinematico del sistema anteriore.

Un'immagine dello scooter oggetto dello studio è visibile in figura 2.1. Sono chiaramente visibili le due ruote anteriori. La caratteristica essenziale di questo scooter è che può essere guidato come qualsiasi altro, raggiungendo angoli di rollio anche fino a 40° e tutto questo grazie al modo, tra l'altro molto semplice ed economico, con cui le due ruote sono collegate al telaio.

Per illustrare la sua struttura cinematica, si utilizzeranno alcuni disegni CAD. Il retrotreno è del tutto simile a quella di uno scooter di tipo tradizionale: la figura 2.2 mostra, infatti, che la sospensione posteriore (in blu) è un classico forcellone oscillante che incorpora anche il motore ed il cambio CVT.

Sicuramente innovativa è la struttura del cinematismo anteriore. Questo è composto da un parallelogramma vincolato al telaio mediante due cerniere. In particolare, esso è formato da due bracci orizzontali (in rosso) e due verticali (in verde) che vanno quindi a costituire i quattro lati del pa-



Figura 2.1: Un immagine dello scooter MP3.

rallelogramma. La cerniera che vincola ciascun braccio orizzontale al telaio ha un asse che è parallelo e planare con gli assi delle cerniere di estremità che lo collegano ai due bracci verticali. Grazie a questa semplice struttura i bracci verticali hanno un moto di semplice traslazione rispetto al telaio. Questi ultimi sono cavi internamente in modo tale da ospitare i tubi di sterzo di ogni ruota anteriore (in blu). L'asse di rotazione di ogni tubo di sterzo rappresenta, quindi, l'asse di sterzo della corrispondente ruota. Si specifica, inoltre, che tali assi di sterzo giacciono nel piano passante per gli assi delle due cerniere di ogni braccio verticale.

La rotazione di ogni tubo di sterzo viene ottenuta grazie alla rotazione del manubrio (non visibile in figura) il quale è collegato ai due tubi con un altro parallelogramma (in giallo) che funge da sistema di sterzo. Il rapporto

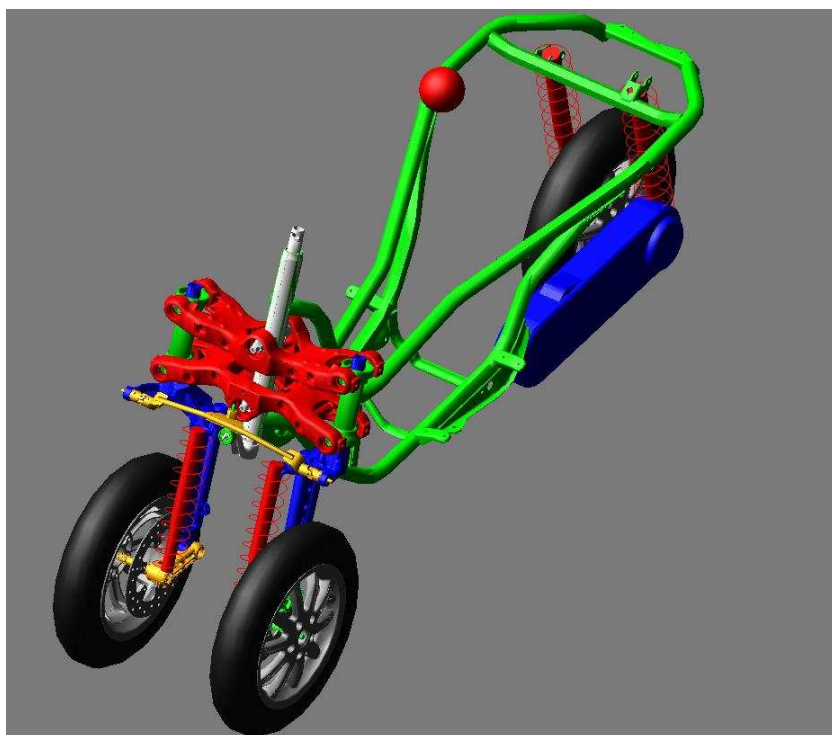


Figura 2.2: Schema CAD dello scooter MP3.

di trasmissione tra manubrio e tubi di sterzo è 1:1. Il manubrio ruota in un tubo incastrato al telaio (rappresentato in grigio) il cui asse è ancora parallelo ai due assi di sterzo. È importante sottolineare che gli assi di sterzo non sono perpendicolari agli assi delle cerniere del parallelogramma e che durante il moto dello scooter rimangono sempre paralleli tra di loro e con l'asse del manubrio.

Infine, ciascuna ruota è collegata al corrispondente tubo di sterzo mediante una sospensione a braccio spinto (sono visibili in giallo i due biscottini).

2.2 Ipotesi di sviluppo del modello

2.2.1 Scooter

Dopo aver descritto in maniera qualitativa la struttura cinematica dello scooter, per poter realizzare un modello che ne descriva la dinamica, è necessario fare alcune ipotesi semplificative.

La prima importante ipotesi è quella di supporre che tutti gli elementi costituenti il sistema siano rigidi. Pertanto, è possibile individuare i seguenti corpi rigidi vincolati opportunamente tra di loro:

- il forcellone posteriore (comprensivo del motore);
- il telaio;
- il manubrio;
- i quattro bracci costituenti il parallelogramma;
- i due tubi di sterzo;
- i due biscottini delle sospensioni anteriori.

Si trascura la massa degli elementi che trasmettono il moto dal manubrio ai due tubi di sterzo. Allo stesso modo viene trascurata la massa degli ammortizzatori. Di tutti i corpi elencati in precedenza si conoscono le caratteristiche inerziali, cioè la massa, la posizione del baricentro e il tensore d'inerzia.

Per quanto riguarda le ruote, va fatto un discorso a parte. Infatti, esse risultano composte dal cerchione, che può essere considerato rigido, e dal pneumatico, che invece è molto deformabile. Tuttavia, nello sviluppare le equazioni di equilibrio dinamico, al cerchione vengono associate le caratteristiche inerziali dell'intera ruota con pneumatico indeformato. Al contrario, il pneumatico verrà considerato privo di massa e di esso si terrà conto per ciò che concerne l'elasticità radiale (come si vedrà in seguito). In pratica, la ruota con pneumatico (deformabile) viene virtualmente sostituita dal corpo rigido "cerchione". Ciò permette di considerare la motocicletta composta solo da corpi rigidi e quindi "facile" da trattare.

2.2.2 Pilota

L'esperienza comune insegna che un pilota di motocicletta condiziona in diversi modi e in maniera fondamentale la sua dinamica. Infatti, è solo grazie al suo controllo che è possibile stabilizzare il sistema "motocicletta" e realizzare determinate traiettorie.

Per effettuare ciò, il pilota agisce sulla coppia di sterzo e sulla coppia frenante e motrice. È ben noto, inoltre, che anche la posizione che egli assume rispetto al telaio influenza in maniera sostanziale il comportamento dinamico.

Nel modello descritto in seguito si trascura quest'ultimo aspetto. Di conseguenza, il pilota verrà visto come un corpo rigido solidale al telaio. In ogni caso, ha comunque la possibilità di controllare lo scooter agendo sul manubrio, sul freno e sull'acceleratore.

2.2.3 Strada

Per le analisi di handling la strada verrà supposta piatta e orizzontale. Al contrario, per le analisi di comfort e tenuta di strada si considereranno le irregolarità stradali includendo una semplice estensione nel modello utilizzato per le analisi di handling.

2.3 Geometria dello scooter

Per descrivere in maniera chiara e sistematica la geometria e la cinematica dello scooter MP3 verranno individuate con dei versori delle direzioni "notevoli", note le quali è definita in maniera univoca la configurazione del sistema.

2.3.1 Rollio della motocicletta

Per cominciare, è conveniente introdurre un versore \mathbf{k} perpendicolare al *piano stradale* e un versore \mathbf{n}_2 parallelo all'asse della ruota posteriore (figura 2.3).

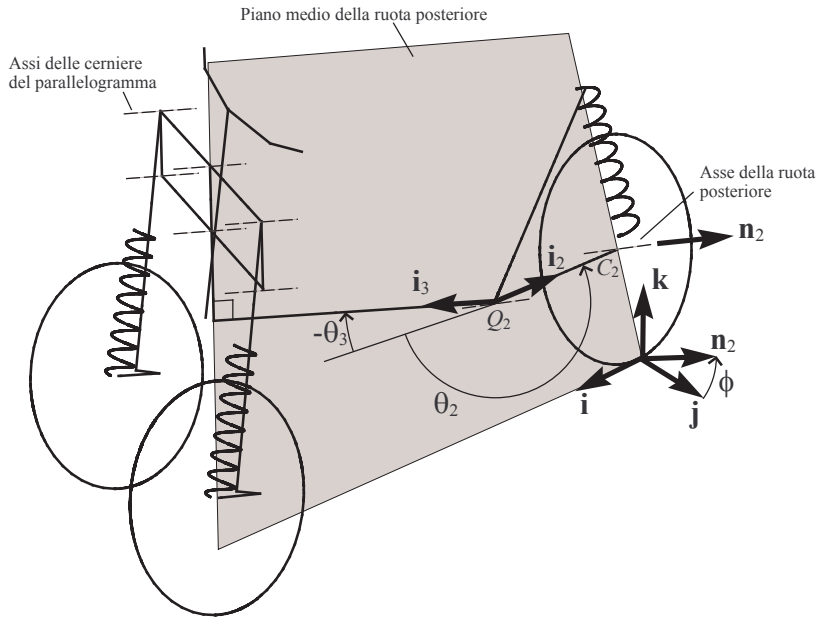


Figura 2.3: Schematizzazione della geometria del retrotreno dello scooter.

Inoltre, può essere utile individuare il piano medio della ruota posteriore. Tale piano è perpendicolare all'asse ruota e posizionato in modo tale da risultare piano di simmetria per la ruota stessa. La sua intersezione con il piano stradale produce una retta che definisce la direzione di avanzamento del veicolo la quale viene individuata dal versore \mathbf{i} .

A questo punto si definisce il versore \mathbf{j} in modo tale che sia perpendicolare sia ad \mathbf{i} che a \mathbf{k} . Per cui risulta,

$$\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}. \quad (2.1)$$

Se si indica con ϕ l'angolo di rollio, ossia l'angolo di cui è inclinato il piano medio della ruota posteriore rispetto alla verticale, è possibile introdurre

il versore \mathbf{n}_2 normale al suddetto piano:

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{k} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi. \quad (2.2)$$

In modo compatto si può dire che \mathbf{n}_2 è la rotazione di \mathbf{j} attorno ad \mathbf{i} dell'angolo ϕ .

2.3.2 Beccheggio del motore e del telaio

Sia il gruppo motore che il telaio hanno la possibilità di ruotare nel piano medio della ruota posteriore. Si vuole definire in modo chiaro questa rotazione.

A tal fine, si osservi (figura 2.3) che il suddetto piano interseca l'asse della ruota e l'asse della cerniera che vincola il motore al telaio rispettivamente nei punti C_2 e Q_2 . Si introduce il versore \mathbf{i}_2 avente la direzione del segmento C_2Q_2 e verso che va da Q_2 a C_2 . È possibile esprimere \mathbf{i}_2 in questo modo:

$$\mathbf{i}_2 = \mathbf{i} \cos \theta_2 + (\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{i}) \sin \theta_2, \quad (2.3)$$

dove con l'angolo θ_2 viene indicato il *beccheggio della sospensione posteriore*. In pratica, \mathbf{i}_2 è la rotazione di \mathbf{i} attorno ad \mathbf{n}_2 dell'angolo θ_2 .

Si procede ora a definire l'angolo di beccheggio del telaio θ_3 . Anche in questo caso si individua un versore la cui direzione è parallela agli assi delle cerniere del parallelogramma (figura 2.3). Esso viene indicato con \mathbf{i}_3 e rappresenta la rotazione di \mathbf{i} attorno ad \mathbf{n}_2 dell'angolo θ_3 . Quindi,

$$\mathbf{i}_3 = \mathbf{i} \cos \theta_3 + (\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{i}) \sin \theta_3. \quad (2.4)$$

2.3.3 Rotazione del parallelogramma

Indicando con β la rotazione del parallelogramma, si definisce il versore \mathbf{b} (figura 2.4) come la rotazione di \mathbf{n}_2 attorno ad \mathbf{i}_3 dell'angolo β . Quindi, si può scrivere

$$\mathbf{b} = \mathbf{n}_2 \cos \beta + (\mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{n}_2) \sin \beta. \quad (2.5)$$

Si intuisce che \mathbf{b} è sempre perpendicolare alle cerniere del parallelogramma e parallelo al piano individuato dagli assi delle tre cerniere di uno stesso braccio orizzontale.

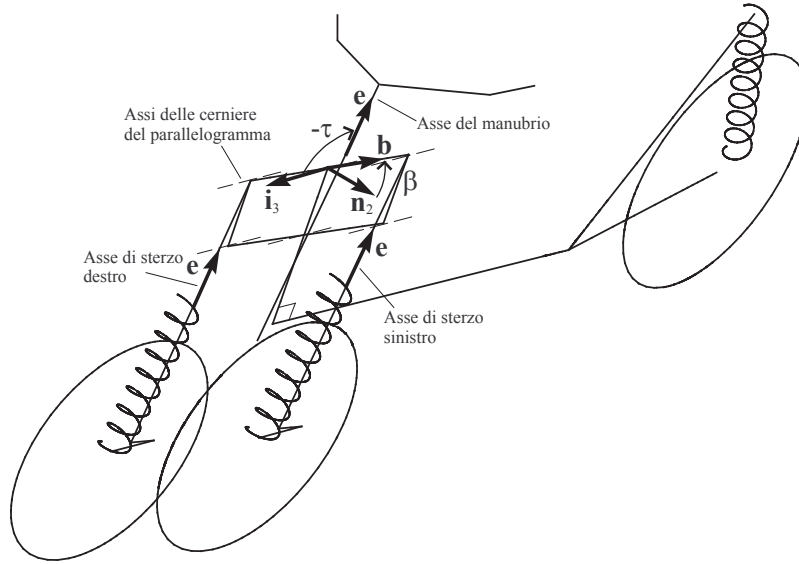


Figura 2.4: Schematizzazione della geometria del parallelogramma dello scooter.

2.3.4 Assi di sterzo

Si è detto in precedenza che i due assi di sterzo hanno un movimento di semplice traslazione rispetto al telaio, per cui la loro direzione è indipendente dalla rotazione β del parallelogramma. Questo vuol dire che rimangono sempre paralleli tra di loro e con l'asse del manubrio. Pertanto, si introduce il versore \mathbf{e} (figura 2.4) per individuare la loro direzione. Esso è ottenuto con una rotazione di \mathbf{i}_3 attorno ad \mathbf{n}_2 dell'angolo τ (per lo scooter MP3 l'angolo τ vale -99°):

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}_3 \cos \tau + (\mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{n}_2) \sin \tau. \quad (2.6)$$

2.3.5 Angolo di sterzo

La rotazione del manubrio rispetto al telaio viene indicata con δ . Si introduce il versore \mathbf{n}_1 parallelo agli assi delle ruote anteriori. È sufficiente un unico versore per i due assi ruota poiché il sistema basculante ne garantisce il parallelismo in ogni configurazione (ovviamente, nell'ipotesi di corpi rigidi).

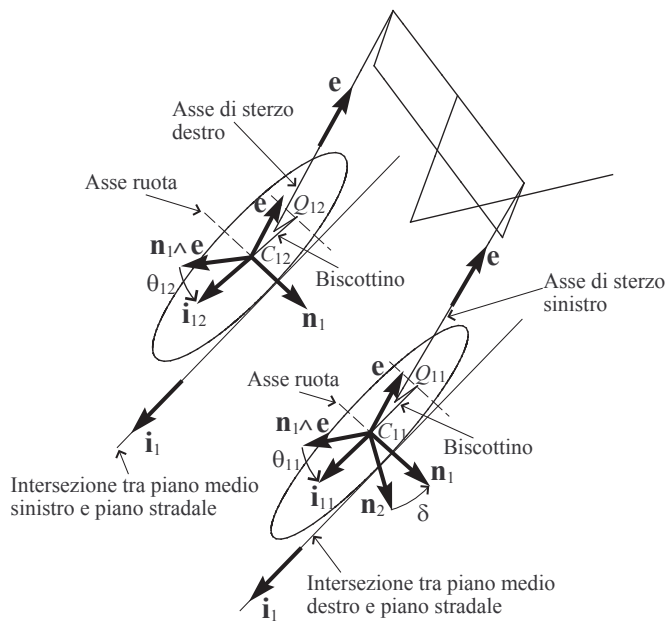


Figura 2.5: Schematizzazione della geometria del sistema di sterzo dello scooter.

Quando l'angolo di sterzo è nullo gli assi delle ruote anteriori sono normali al piano medio della ruota posteriore e quindi \mathbf{n}_1 coincide con \mathbf{n}_2 . Una rotazione del manubrio induce una rotazione di \mathbf{n}_1 attorno ad \mathbf{e} dell'angolo

di sterzo δ . Pertanto, si può scrivere che

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \cos \delta + (\mathbf{e} \wedge \mathbf{n}_2) \sin \delta. \quad (2.7)$$

2.3.6 Angolo di beccheggio dei biscottini anteriori

Analogamente a quanto fatto per il posteriore, è utile individuare i piani medi delle ruote anteriori. Infatti, ciascun biscottino ha la possibilità di ruotare nel piano medio della corrispondente ruota. Si indica con θ_{12} l'angolo di beccheggio della sospensione destra e con θ_{11} l'angolo di beccheggio della sospensione sinistra.

Per comprendere come sono definiti, si osservi (figura 2.5) che il piano medio destro interseca l'asse della ruota e l'asse della cerniera che vincola il biscottino al tubo di sterzo rispettivamente nei punti C_{12} e Q_{12} . Analogamente, il piano medio sinistro interseca l'asse della ruota e l'asse della cerniera che vincola il biscottino al tubo di sterzo rispettivamente nei punti C_{11} e Q_{11} . A questo punto, si definiscono i versori \mathbf{i}_{12} e \mathbf{i}_{11} aventi rispettivamente la direzione del segmento $C_{12}Q_{12}$ e del segmento $C_{11}Q_{11}$ e verso che va dal tubo di sterzo all'asse ruota.

Il versore \mathbf{i}_{12} viene espresso con una rotazione di $(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{e})$ attorno ad \mathbf{n}_1 dell'angolo θ_{12} . Allo stesso modo, il versore \mathbf{i}_{11} viene espresso con una rotazione di $(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{e})$ attorno ad \mathbf{n}_1 dell'angolo θ_{11} . Questo definisce in modo univoco gli angoli di beccheggio θ_{12} e θ_{11} del biscottino destro e del biscottino sinistro.

Si può, quindi, scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{11} &= (\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{e}) \cos \theta_{11} - \mathbf{e} \sin \theta_{11}, \\ \mathbf{i}_{12} &= (\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{e}) \cos \theta_{12} - \mathbf{e} \sin \theta_{12}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Si osservi, infine, che mentre gli angoli di beccheggio del telaio e del motore sono definiti relativamente alla strada, gli angoli di beccheggio θ_{11} e θ_{12} , invece, sono stati definiti relativamente al tubo di sterzo. Si è constatato, infatti, che tale scelta rende meno pesante il modello.

2.3.7 Versori ausiliari

Per lo sviluppo del modello, è utile individuare la direzione delle rette di intersezione tra i piani medi delle ruote anteriori ed il piano stradale (figura 2.5). Si definisce pertanto il versore \mathbf{i}_1 lungo tale direzione nel seguente modo

$$\mathbf{i}_1 = \frac{\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{k}}{\sqrt{1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k})^2}}. \quad (2.9)$$

2.4 Gradi di libertà

Il numero di gradi di libertà necessario per individuare la configurazione del sistema è 14. Una possibile scelta di 14 coordinate lagrangiane è visualizzata in figura 2.6.

Sono necessarie le tre coordinate x , y e ψ per individuare la posizione e l'orientazione della motocicletta nel piano stradale. In pratica, ψ (detto *angolo di imbardata*) rappresenta l'angolo formato tra il versore \mathbf{i} e l'asse x_0 di un sistema di riferimento $(x_0, y_0, z_0; O)$ solidale alla strada (detto in seguito sistema di *assi suolo*), con l'asse z_0 parallelo a \mathbf{k} . Come visibile in figura, x e y sono, invece, le coordinate del punto P_2 rispetto al sistema di assi suolo. P_2 è il cosiddetto *centro dell'impronta* della ruota posteriore, ossia, la proiezione del punto C_2 (detto *centro ruota*) sull'intersezione del piano medio della ruota posteriore con il piano stradale. Allo stesso modo è utile definire anche il centro dell'impronta della ruota sinistra P_{12} e della ruota destra P_{11} come la proiezione dei rispettivi centri ruota C_{11} e C_{12} sull'intersezione dei piani medi delle ruote con il piano stradale. I tre centri d'impronta sono semplicemente dei punti geometrici che si muovono sul piano stradale.

A questo punto per definire la configurazione della motocicletta si può scegliere di assegnare l'angolo di rollio ϕ , la distanza r_2 tra C_2 e P_2 , gli angoli di beccheggio θ_2 e θ_3 , la rotazione β del parallelogramma, l'angolo di sterzo δ e gli angoli di beccheggio θ_{11} e θ_{12} . Ai precedenti parametri vanno aggiunti gli angoli di rotazione delle ruote: si indica con χ_2 la rotazione della ruota posteriore relativamente ad un sistema di riferimento solidale

alla terna di versori $(\mathbf{i}, \mathbf{n}_2, \mathbf{i} \wedge \mathbf{n}_2)$ e con χ_{11} e χ_{12} rispettivamente la rotazione della ruota sinistra e della ruota destra relativamente ai biscottini delle sospensioni anteriori.

Si osservi che è stato necessario introdurre la coordinata lagrangiana r_2 poiché, a causa della deformabilità del pneumatico, non è nota a priori la distanza tra C_2 ed P_2 .

Infine, si definisce con \mathbf{q} un vettore che raccoglie tutte le coordinate lagrangiane del sistema:

$$\mathbf{q} = [x \ y \ \phi \ r_2 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \beta \ \delta \ \theta_{11} \ \theta_{12} \ \chi_2 \ \chi_{11} \ \chi_{12}]^T. \quad (2.10)$$

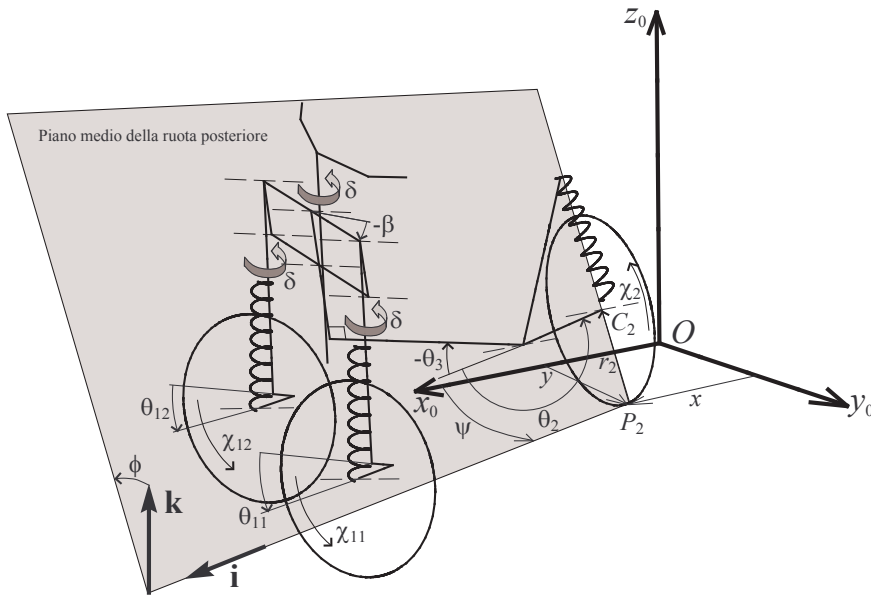


Figura 2.6: Coordinate lagrangiane.

2.5 Modello di pneumatico

Nella modellazione di un veicolo il modello di pneumatico è molto probabilmente l'elemento più delicato. Infatti, la sua risposta influenza fortemente il comportamento dinamico del veicolo stesso. Per prevedere l'interazione pneumatico-strada, si usano generalmente dei modelli teorici che, a partire da alcune misure sperimentali, cercano di calcolare la risposta del pneumatico in un range abbastanza vasto di condizioni di funzionamento.

Per i pneumatici dello scooter MP3, è stato utilizzato il ben noto modello di Pacejka, che va sotto il nome di "Magic Formula". In particolare, il TNO Automotive di Delft, autorevole centro di ricerca sui pneumatici, ha effettuato le misure sperimentali fornendo un blocchetto Simulink (figura 2.7) del modello di pneumatico pronto per essere inserito direttamente nel modello di motocicletta. All'interno del blocchetto Simulink di figura 2.7 è



Figura 2.7: Blocchetto Simulink del modello di pneumatico.

implementato il modello di Pacejka. Esso legge da un file testo i numerosi parametri della "Magic Formula" ricavati dalle misure sperimentali.

Dalla figura 2.7 si nota che il modello richiede in ingresso delle variabili e da in uscita dei segnali che rappresentano la risposta del pneumatico. Per definirli correttamente, si faccia riferimento alla figura 2.8 dove è rappresentato un generico pneumatico toroidale. È stato indicato con C il

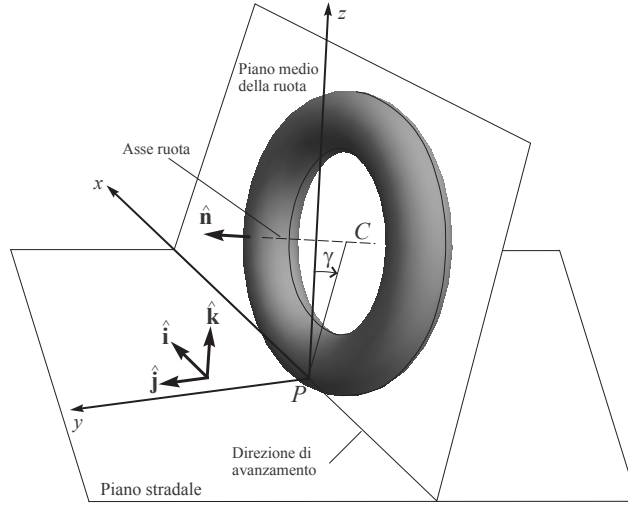


Figura 2.8: Sistema di riferimento per una ruota con pneumatico.

centro ruota (punto di intersezione tra l'asse e il piano medio della ruota) e con P il centro dell'impronta, ossia la proiezione di C sulla direzione di avanzamento (intersezione tra piano medio e piano stradale). Si definisce poi un sistema di riferimento S avente origine nel centro dell'impronta P , l'asse x parallelo alla direzione di avanzamento e diretto nel senso di marcia della ruota e l'asse z ortogonale alla strada e orientato verso l'alto. L'asse y è ortogonale agli altri due e orientato in modo da considerare positive le rotazioni antiorarie. Lungo i tre assi x , y e z vengono individuati rispettivamente i tre versori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$. Infine, si introduce il versore $\hat{\mathbf{n}}$ parallelo all'asse ruota ed orientato dalla parte positiva dell'asse y .

La forza risultante \mathbf{F} delle azioni trasmesse dalla strada alla ruota può essere espressa in questo modo:

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.11)$$

la quale in generale ha un momento \mathbf{M}_P rispetto al centro dell'impronta P

$$\mathbf{M}_P = M_x \hat{\mathbf{i}} + M_y \hat{\mathbf{j}} + M_z \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.12)$$

Il carico verticale F_z è una delle variabili di ingresso per il modello di figura 2.7, mentre tutte le altre componenti della forza (F_x ed F_y) e del momento (M_x, M_y, M_z) sono dei segnali di uscita.

Il modello richiede la conoscenza dell'angolo di camber γ del pneumatico (figura 2.8), ossia dell'inclinazione del piano medio rispetto alla verticale, che può essere espresso nel seguente modo

$$\gamma = \arcsin(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}). \quad (2.13)$$

Essendo il cerchione un corpo rigido, ha senso trovare la sua velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$. A tal fine, si osservi che il sistema di riferimento \mathbf{S} ha sempre moto piano ed ha una velocità angolare $\xi \hat{\mathbf{k}}$ parallela all'asse z (*velocità di imbardata del pneumatico*). In questo modo, è possibile scrivere

$$\boldsymbol{\Omega} = \xi \hat{\mathbf{k}} + \dot{\gamma} \hat{\mathbf{i}} + \omega \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.14)$$

dove ω è la rotazione del cerchione rispetto al suo asse. Sia ω che ξ sono delle variabili di input per il modello di pneumatico.

Altri segnali di input sono la componente longitudinale della velocità \mathbf{V}_C del centro ruota, ossia $\mathbf{V}_C \cdot \hat{\mathbf{i}}$, e la componente laterale della velocità \mathbf{V}_P del centro dell'impronta, ossia $\mathbf{V}_P \cdot \hat{\mathbf{j}}$. Si ricorda che il punto P è un punto geometrico che si muove sul piano stradale e, pertanto, la sua velocità non ha componente lungo il versore $\hat{\mathbf{k}}$.

In pratica, il modello di figura 2.7 determina le azioni trasmesse dalla strada al pneumatico sulla base della conoscenza del carico verticale F_z e dello stato cinematico del cerchione ($\gamma, \xi, \omega, \mathbf{V}_C \cdot \hat{\mathbf{i}}, \mathbf{V}_P \cdot \hat{\mathbf{j}}$). In generale, il legame che c'è tra le variabili di ingresso e di uscita è di tipo differenziale. Tuttavia, c'è la possibilità di impostare un legame stazionario (che non tiene conto di eventuali ritardi di risposta) tra ingresso ed uscita quando le frequenze in gioco sono minori di 1 Hz. In tali casi, ciò permette di ridurre i tempi di calcolo.

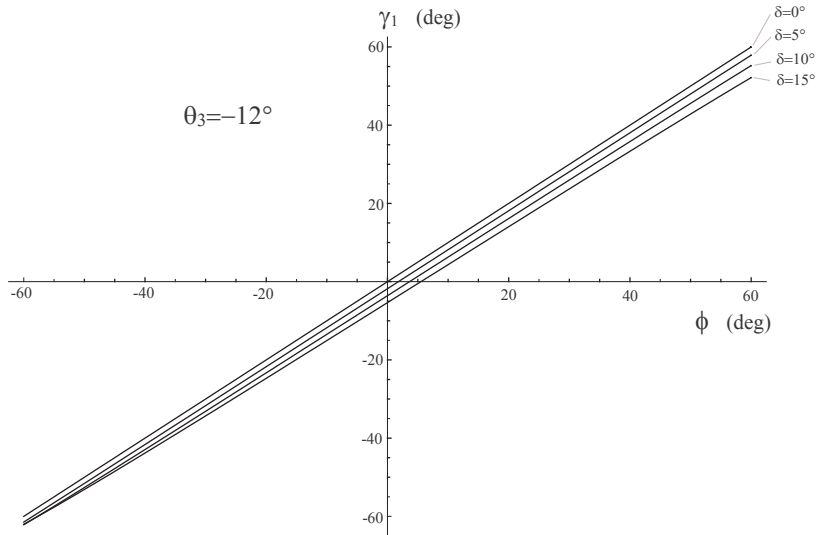


Figura 2.9: Camber delle ruote anteriori in funzione dell'angolo di rollio per diversi valori dell'angolo di sterzo e beccheggio del telaio fissato.

2.5.1 Angolo di camber ed angolo di sterzo a terra

La formula (2.13) si specializza nel seguente modo per i pneumatici dello scooter MP3

$$\gamma_2 = \arcsin(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{k}) = \phi, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \arcsin(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{k}) \\ &= \arcsin(\cos(\tau + \theta_3) \cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(\delta) \sin(\phi)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove il pedice 1 si riferisce alle ruote anteriori, mentre il pedice 2 alla ruota posteriore. Si noti che il camber anteriore dipende dal beccheggio del telaio, dal rollio e dall'angolo di sterzo (figura 2.9).

Si vogliono esplicitare ora la velocità di imbardata $\dot{\xi}$ e la velocità angolare ω per i tre cerchi dell'MP3. Ciò è banale per il cerchione posteriore,

in quanto risulta che

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2 &= \dot{\psi} = r, \\ \omega_2 &= \dot{\chi}_2,\end{aligned}\tag{2.17}$$

dove si indica con $r = \dot{\psi}$ la velocità di imbardata del veicolo.

Per trovare la velocità di imbardata delle ruote anteriori occorre definire una nuova quantità, il cosiddetto *angolo di sterzo a terra* δ_t . Esso è l'angolo formato tra il versore \mathbf{i} ed il versore \mathbf{i}_1 (figura 2.10). Pertanto, è possibile esprimerlo nel seguente modo

$$\begin{aligned}\delta_t &= \arcsin(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}) \\ &= -\arcsin \left[\frac{\sin(\delta) \sin(\tau + \theta_3)}{\sqrt{1 - (\cos(\tau + \theta_3) \cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(\delta) \sin(\phi))^2}} \right].\end{aligned}\tag{2.18}$$

Come per il camber delle ruote anteriori, anche δ_t dipende dal rollio, dall'angolo di sterzo e dal beccheggio del telaio. Si noti, inoltre, che l'aver individuato in precedenza una serie di versori "notevoli" permette di ottenere con una certa semplicità le diverse variabili cinematiche del veicolo senza fare complicati ragionamenti di geometria spaziale. A questo punto è semplice esprimere la velocità di imbardata delle ruote anteriori $\dot{\xi}_1$, che sarà

$$\dot{\xi}_1 = r + \dot{\delta}_t.\tag{2.19}$$

Per quanto riguarda ω_{11} e ω_{12} si devono prima trovare le velocità angolare dei cerchioni anteriori $\boldsymbol{\Omega}_{11}$ e $\boldsymbol{\Omega}_{12}$ (il pedice 11 si riferisce alla ruota sinistra, mentre il pedice 12 alla ruota destra). Se si utilizza il teorema di composizione delle velocità angolari è possibile scrivere

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{11} &= r\mathbf{k} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\delta}\mathbf{e} + (\dot{\theta}_{11} + \dot{\chi}_{11})\mathbf{n}_1, \\ \boldsymbol{\Omega}_{12} &= r\mathbf{k} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\delta}\mathbf{e} + (\dot{\theta}_{12} + \dot{\chi}_{12})\mathbf{n}_1.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Ma nello stesso tempo, utilizzando la (2.14), risulta

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{11} &= \dot{\xi}_1\mathbf{k} + \dot{\gamma}_1\mathbf{i}_1 + \omega_{11}\mathbf{n}_1, \\ \boldsymbol{\Omega}_{12} &= \dot{\xi}_1\mathbf{k} + \dot{\gamma}_1\mathbf{i}_1 + \omega_{12}\mathbf{n}_1.\end{aligned}\tag{2.21}$$

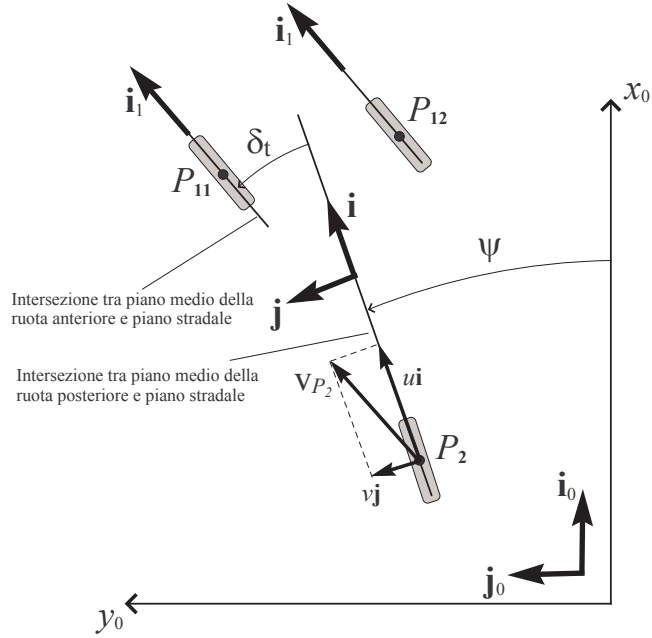


Figura 2.10: Angolo di sterzo a terra.

Moltiplicando ambo i membri delle equazioni precedenti scalarmente per \mathbf{n}_1 , è possibile ricavare l'espressione della ω_{11} e ω_{12}

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= \dot{\chi}_{11} + \dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_3 \cos(\delta) - \dot{\delta}_t \sin(\delta), \\ \omega_{12} &= \dot{\chi}_{12} + \dot{\theta}_{12} + \dot{\theta}_3 \cos(\delta) - \dot{\delta}_t \sin(\delta).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Osservando la precedente espressione, si può sicuramente intuire che in normali condizioni di esercizio i termini $\dot{\chi}_{11}$ e $\dot{\chi}_{12}$ sono preponderante su tutti gli altri. Pertanto, nel modello è stata fatta la seguente approssimazione:

$$\begin{aligned}\omega_{11} &\simeq \dot{\chi}_{11}, \\ \omega_{12} &\simeq \dot{\chi}_{12}.\end{aligned}\quad (2.23)$$

2.5.2 Rigidezza verticale del pneumatico

Quando si deve valutare il comfort e la tenuta di strada di un veicolo è importante considerare la deformabilità verticale del pneumatico. Potrebbe invece essere trascurata (considerando, quindi, il pneumatico indeformabile) se si studia l'handling, cioè, il moto su strada piatta. Il modello che è stato usato per tener conto della rigidezza verticale è visualizzato in figura 2.11. Ciò che verrà fatto è mettere in relazione il carico verticale scambiato tra ciascuna ruota e la strada con lo schiacciamento del pneumatico.

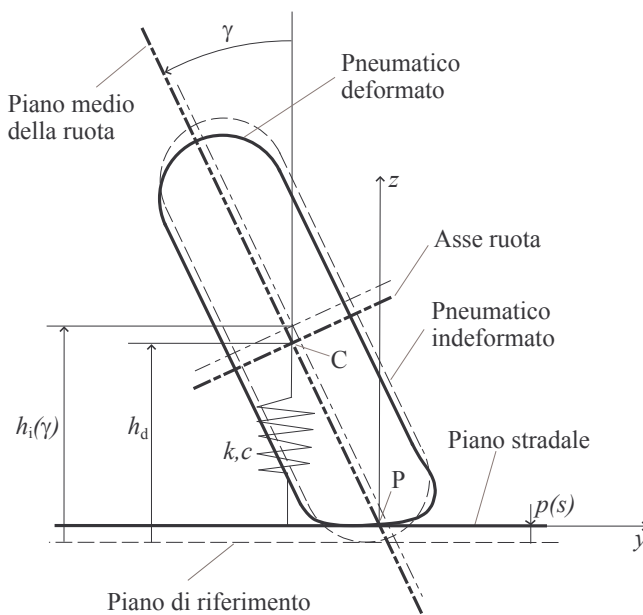


Figura 2.11: Modello per la deformabilità verticale del pneumatico.

La figura 2.11 rappresenta la sezione di un pneumatico in una generica condizione di funzionamento in contatto con il piano stradale (linee continue). In linea tratteggiata è stato, invece, rappresentato il pneumatico

indeformato in contatto con un piano di riferimento. Lo scostamento che esiste tra il piano stradale ed il piano di riferimento è il *profilo stradale* $p(s)$, dove si è indicata con s la posizione del centro dell'impronta P del pneumatico rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Si osservi che, a rigore, p dovrebbe essere una funzione di due variabili poiché per individuare la posizione della ruota nel piano sono necessarie due coordinate. Tuttavia, l'analisi del comfort e della tenuta di strada viene generalmente fatta in rettilineo, per cui s rappresenta semplicemente la distanza percorsa dal pneumatico a partire dall'istante iniziale. Inoltre, la funzione $p(s)$ non è il profilo stradale così come viene misurato, ma il profilo stradale filtrato, ossia il profilo disegnato dall'asse della ruota quando questa rotola indeformata (con angolo di camber nullo) sul profilo misurato. È intuitivo che il profilo filtrato differisce dal profilo misurato quando la lunghezza d'onda delle componenti spettrali contenute nel profilo reale diviene paragonabile con il raggio del pneumatico. La figura 2.12 mostra la differenza esisten-

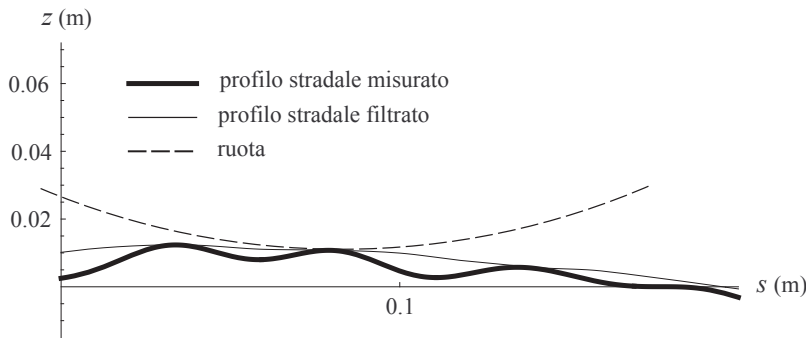


Figura 2.12: Profilo misurato e profilo filtrato.

te tra profilo filtrato e profilo misurato. Per quanto riguarda la scelta del piano di riferimento rispetto al quale riferire il profilo stradale, essa è abbastanza arbitraria, ma non dovrebbe discostarsi eccessivamente da una sorta di piano medio del profilo.

Ritornando alla figura 2.11, h_i è la distanza del centro ruota del pneumatico indeformato dal piano di riferimento. Tale distanza è una funzione dell'angolo di camber γ , il cui andamento dipende dal profilo della sezione del pneumatico indeformato. Ad esempio, per un pneumatico toroidale risulta

$$h_i(\gamma) = R_p + (R - R_p) \cos(\gamma), \quad (2.24)$$

dove R è il raggio massimo della superficie toroidale ed R_p il raggio del suo profilo. È importante includere l'effetto del camber sullo schiacciamento anche in rettilineo perché, avendo lo scooter MP3 due ruote anteriori, profili stradali differenti sotto le due ruote potrebbero innescare moti di rollio della motocicletta e quindi angoli di camber non nulli. Al contrario, non sarebbe necessario includere l'effetto del camber in una motocicletta di tipo tradizionale in moto rettilineo.

Durante una simulazione, a causa dello schiacciamento del pneumatico, la distanza tra il centro ruota C ed il piano di riferimento varia e viene rappresentata dalla funzione del tempo $h_d(t)$. A questo punto è possibile determinare la compressione radiale del pneumatico δ_r e la sua derivata $\dot{\delta}_r$, che sono date da

$$\begin{aligned} \delta_r &= h_i(\gamma) + p(s) - h_d, \\ \dot{\delta}_r &= \frac{dh_i}{d\gamma} \dot{\gamma} + \frac{dp}{ds} \dot{s} - \dot{h}_d. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Quindi, il carico verticale F_z tra il pneumatico e la strada sarà

$$F_z = k\delta_r + c\dot{\delta}_r, \quad (2.26)$$

dove k è il coefficiente di rigidità radiale e c il coefficiente di smorzamento del pneumatico. In generale, k e c sono funzioni non lineari dello schiacciamento δ_r .

Come visibile dalla figura 2.7, il carico verticale F_z è un ingresso per il modello di pneumatico. Se il valore di F_z diviene negativo, vuol dire che la ruota ha perso contatto con il suolo. In tali situazioni il modello simulink filtra il segnale F_z rendendolo nullo e fornendo in uscita un segnale filtrato (non visibile in figura 2.7) che rappresenta il “vero” carico verticale che agi-

sce sulla ruota. Questo significa che il modello di pneumatico, permettendo il distacco della ruota, è stato implementato come un vincolo unilaterale.

Infine, si vuole fare un'ultima considerazione sul profilo stradale filtrato. Infatti, quando quest'ultimo è molto differente dal profilo misurato, l'uso del semplice modello descritto in questa sezione è un pò forzato perché in tali condizioni l'interazione reale tra pneumatico e strada avviene in più zone (corrispondenti a due o più asperità consecutive del suolo) con degli effetti non previsti dal modello di figura 2.11.

2.6 Equilibrio dinamico

Per scrivere l'equilibrio dinamico del sistema di figura 2.6 è possibile utilizzare le ben note *equazioni di Lagrange* poste nella forma seguente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \left[\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right] = \mathbf{Q}, \quad (2.27)$$

dove $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è l'energia cinetica del sistema che dipenderà in generale dal vettore \mathbf{q} delle coordinate lagrangiane e dalla sua derivata, mentre \mathbf{Q} è il vettore delle componenti lagrangiane delle forze attive.

Occorre, quindi, prima di tutto calcolare l'energia cinetica del sistema, che sarà data dalla somma dell'energia cinetica dei singoli corpi rigidi che lo compongono. Si ricorda che l'energia cinetica di un corpo rigido può essere scritta nella forma seguente

$$T_r = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_G \cdot \mathbf{V}_G + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^T \mathbf{I}_G \tilde{\boldsymbol{\Omega}}, \quad (2.28)$$

dove m è la massa del corpo rigido ed \mathbf{I}_G è la matrice del tensore d'inerzia baricentrico espresso in un sistema di riferimento $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ solidale al corpo. \mathbf{V}_G è la velocità del baricentro, mentre $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ è il seguente vettore colonna

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\mathbf{i}} \\ \boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\mathbf{j}} \\ \boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

dove $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare del corpo rigido e $\tilde{\mathbf{i}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ e $\tilde{\mathbf{k}}$ sono dei versori diretti rispettivamente come gli assi \tilde{x} , \tilde{y} e \tilde{z} .

Prima di procedere oltre, si vuole osservare che sono state utilizzate due formulazioni differenti per esprimere la parte traslatoria e la parte rotatoria dell'energia cinetica di un corpo rigido. Infatti, la parte rotatoria è stata espressa come prodotto tra matrici e vettori, mentre la parte traslatoria come prodotto scalare della velocità del baricentro per se stessa. Sebbene la scrittura della parte traslatoria sia corretta, per trattarla numericamente è utile esprimere anch'essa come prodotto tra matrici e vettori. Un modo potrebbe essere sicuramente il seguente

$$T_r = \frac{1}{2}m\tilde{\mathbf{V}}_G^T\tilde{\mathbf{V}}_G + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^T\mathbf{I}_G\tilde{\boldsymbol{\Omega}}, \quad (2.30)$$

dove $\tilde{\mathbf{V}}_G$ è il vettore delle componenti della velocità del baricentro secondo una qualsiasi terna cartesiana ortogonale, ad esempio quella individuata dai versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} di figura 2.4:

$$\tilde{\mathbf{V}}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_G \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{V}_G \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{V}_G \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Anche se il passaggio dalla (2.28) alla (2.30) può sembrare banale, in realtà esso sta a sottolineare il fatto che nella dinamica dei corpi si ha a che fare con entità (come, ad esempio, velocità di un punto, velocità angolare di un corpo rigido, tensore d'inerzia) che per poter “esistere” non hanno bisogno di un sistema di riferimento. Solo nel momento in cui c'è bisogno di manipolarle algebricamente e numericamente è necessario introdurre dei sistemi di riferimento in modo tale da poterle “vedere” come delle matrici di numeri. Ovviamente, i risultati sono indipendenti dal modo utilizzato per descrivere la dinamica del problema.

2.6.1 Espressione dell'energia cinetica rotatoria

Utilizzando il teorema di composizione delle velocità angolari è molto semplice scrivere la velocità angolare di ogni corpo rigido dello scooter MP3. Infatti si ha:

- per la ruota posteriore

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\chi}_2\mathbf{n}_2;$$

- per il forcellone posteriore

$$\boldsymbol{\Omega}_{s_2} = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_2\mathbf{n}_2;$$

- per il telaio, i due bracci laterali del parallelogramma ed il pilota

$$\boldsymbol{\Omega}_3 = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2;$$

- per il manubrio e i due tubi di sterzo

$$\boldsymbol{\Omega}_m = \boldsymbol{\Omega}_3 + \dot{\delta}\mathbf{e} = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\delta}\mathbf{e};$$

- per bracci orizzontali del parallelogramma

$$\boldsymbol{\Omega}_b = \boldsymbol{\Omega}_3 + \dot{\beta}\mathbf{i}_3 = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\beta}\mathbf{i}_3;$$

- per il biscottino sinistro

$$\boldsymbol{\Omega}_{s_{11}} = \boldsymbol{\Omega}_m + \dot{\theta}_{11}\mathbf{n}_1 = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\delta}\mathbf{e} + \dot{\theta}_{11}\mathbf{n}_1;$$

- per il biscottino destro

$$\boldsymbol{\Omega}_{s_{12}} = \boldsymbol{\Omega}_m + \dot{\theta}_{12}\mathbf{n}_1 = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\delta}\mathbf{e} + \dot{\theta}_{12}\mathbf{n}_1;$$

- per la ruota sinistra

$$\boldsymbol{\Omega}_{11} = \boldsymbol{\Omega}_{s_{11}} + \dot{\chi}_{11}\mathbf{n}_1 = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\delta}\mathbf{e} + \dot{\theta}_{11}\mathbf{n}_1 + \dot{\chi}_{11}\mathbf{n}_1;$$

- per la ruota destra

$$\boldsymbol{\Omega}_{12} = \boldsymbol{\Omega}_{s_{12}} + \dot{\chi}_{12}\mathbf{n}_1 = r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i} + \dot{\theta}_3\mathbf{n}_2 + \dot{\delta}\mathbf{e} + \dot{\theta}_{12}\mathbf{n}_1 + \dot{\chi}_{12}\mathbf{n}_1.$$

Ciascuna espressione precedente può essere scritta come il prodotto di una matrice (dipendente solo dalle coordinate lagrangiane \mathbf{q}) per il vettore $\dot{\mathbf{q}}$ delle velocità lagrangiane. Per ottenere questo risultato, tutti i versori che vanno dalla (2.1) alla (2.8) sono stati scritti come vettori delle loro componenti rispetto alla terna di versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} . Ad esempio, \mathbf{n}_2 sarà

$$\mathbf{n}_2 = [0 \ \cos \phi \ \sin \phi]^T.$$

Quindi, è possibile esplicitare la velocità angolare della ruota posteriore nel seguente modo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_2 &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \phi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{J}_\omega^2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

dove la matrice rettangolare \mathbf{J}_ω^2 dipende solo dalle coordinate lagrangiane \mathbf{q} . La formula precedente fornisce la velocità angolare della ruota posteriore espressa nella terna di versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} . Allo stesso modo, è possibile ottenere tutte le altre matrici $\mathbf{J}_\omega^i(\mathbf{q})$ relative alla velocità angolare degli altri corpi rigidi:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\omega^{s2} &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{J}_\omega^3 &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{J}_\omega^m &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{e} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{J}_\omega^b &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{i}_3 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{J}_\omega^{s11} &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{e} \ \mathbf{n}_1 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{J}_\omega^{s12} &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{e} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_1 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{J}_\omega^{11} &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{e} \ \mathbf{n}_1 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_1 \ \mathbf{0}], \\ \mathbf{J}_\omega^{12} &= [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{k} \ \mathbf{i} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{0} \ \mathbf{e} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_1 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{n}_1]. \end{aligned}$$

Ritornando alla formula (2.30), è necessario trovare un'espressione conveniente per la $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ di ogni corpo rigido. Ad esempio può essere riscritta nella seguente forma

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = [\tilde{\mathbf{i}} \ \tilde{\mathbf{j}} \ \tilde{\mathbf{k}}]^T \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}, \quad (2.32)$$

dove sia $\mathbf{\Omega}$ che i versori $\tilde{\mathbf{i}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ e $\tilde{\mathbf{k}}$ sono espressi nella terna di versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} . È evidente che la \mathbf{R} non è altro che una matrice di rotazione.

A questo punto, per il generico corpo rigido che costituisce la motocicletta è possibile scrivere

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{\Omega}_i = \mathbf{R}_i(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\omega^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.33)$$

dove sia le matrici di rotazione \mathbf{R}_i che le matrici $\tilde{\mathbf{\Omega}}_i$ dipendono dalle sole coordinate lagrangiane \mathbf{q} .

Utilizzando la (2.33) è possibile ora riscrivere la parte rotatoria dell'energia cinetica nel seguente modo

$$\begin{aligned} T_\omega^i &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{\Omega}}_i^T \mathbf{I}_G \tilde{\mathbf{\Omega}}_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i)^T \mathbf{I}_G^i \mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_\omega^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

dove è stata introdotta la matrice simmetrica $\mathbf{B}_\omega^i = (\mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i)^T \mathbf{I}_G^i \mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i$ dipendente dalle sole coordinate lagrangiane \mathbf{q} .

Ecco l'elenco delle matrici \mathbf{R}_i per ogni corpo rigido:

- per la ruota posteriore

$$\mathbf{R}_2 = [\mathbf{i} \quad \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{i} \wedge \mathbf{n}_2]^T$$

- per il forcellone posteriore

$$\mathbf{R}_{s_2} = [\mathbf{i}_2 \quad \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{i}_2]^T$$

- per il telaio, i due bracci laterali del parallelogramma ed il pilota

$$\mathbf{R}_3 = [\mathbf{i}_3 \quad \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{n}_2]^T$$

- per il manubrio ed i due tubi di sterzo

$$\mathbf{R}_m = [\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{e} \quad \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{e}]^T$$

- per i bracci orizzontali del parallelogramma

$$\mathbf{R}_b = [\mathbf{i}_3 \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{b}]^T$$

- per il biscottino sinistro e la ruota sinistra

$$\mathbf{R}_{11} = [\mathbf{i}_{11} \quad \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{i}_{11} \wedge \mathbf{n}_1]^T$$

- per il biscottino destro e la ruota destra

$$\mathbf{R}_{12} = [\mathbf{i}_{12} \quad \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{i}_{12} \wedge \mathbf{n}_1]^T$$

2.6.2 Espressione dell'energia cinetica traslatoria

Un'espressione simile alla (2.34) vale anche per l'energia cinetica traslatoria. Per ottenerla, è necessario scrivere la velocità del baricentro di ogni corpo.

Si incomincia con la velocità del baricentro della ruota posteriore che si suppone coincida con il suo centro ruota C_2 . Se $\mathbf{V}_{P_2} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ è la velocità del centro dell'impronta della ruota posteriore (figura 2.10), allora la velocità del punto C_2 sarà

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{C_2} &= u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (r\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{i}) \wedge r_2(\mathbf{i} \wedge \mathbf{n}_2) + \dot{r}_2\mathbf{i} \wedge \mathbf{n}_2 \\ &= u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + r r_2 \sin \phi \mathbf{i} - \dot{\phi} r_2 \mathbf{n}_2 + \dot{r}_2 \mathbf{i} \wedge \mathbf{n}_2 \\ &= [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad r_2 \sin \phi \mathbf{i} \quad -r_2 \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{i} \wedge \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{J}_v^2(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

dove si è introdotta la matrice \mathbf{J}_v^2 che dipende dalle sole coordinate lagrangiane ed il vettore $\dot{\mathbf{q}}$ che differisce dal vettore $\dot{\mathbf{q}}$ per il solo fatto che al posto delle componenti \dot{x} e \dot{y} ci sono le componenti u e v (rispettivamente, la componente longitudinale e laterale della velocità del punto P_2). Le componenti x ed y sono dette *vere coordinate*, mentre u e v sono dette *quasi-coordinate*. La loro differenza è fondamentale perchè le quasi-coordinate non sono esprimibili come derivate temporali di vere coordinate. Come

si vedrà nel paragrafo successivo, di questo fatto se ne dovrà tener conto quando si andranno a sviluppare le equazioni di Lagrange.

Una volta determinata la velocità del punto C_2 , utilizzando la formula fondamentale della cinematica del corpo rigido, si può procedere ad esprimere la velocità del baricentro del gruppo motore G_{s_2} , che sarà

$$\mathbf{V}_{G_{s_2}} = \mathbf{V}_{C_2} + \boldsymbol{\Omega}_{s_2} \wedge C_2 G_{s_2}, \quad (2.36)$$

dove il vettore $C_2 G_{s_2} = \tilde{x}_{s_2} \mathbf{i}_2 + \tilde{y}_{s_2} \mathbf{n}_2 + \tilde{z}_{s_2} \mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{i}_2$ individua la posizione del baricentro G_{s_2} . Poiché la terna di versori \mathbf{i}_2 , \mathbf{n}_2 e $\mathbf{n}_2 \wedge \mathbf{i}_2$ (la stessa utilizzata per esprimere il vettore $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{s_2}$) è solidale al gruppo motore, le componenti \tilde{x}_{s_2} , \tilde{y}_{s_2} e \tilde{z}_{s_2} sono costanti nel tempo. A questo punto, è possibile riscrivere la (2.36) in questo modo

$$\mathbf{V}_{G_{s_2}} = \mathbf{J}_v^2 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_{s_2}^T \mathbf{X}_{s_2} \mathbf{R}_{s_2} \mathbf{J}_\omega^{s_2} \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{J}_v^2 + \mathbf{R}_{s_2}^T \mathbf{X}_{s_2} \mathbf{R}_{s_2} \mathbf{J}_\omega^{s_2}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_v^{s_2} \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.37)$$

dove la matrice \mathbf{X}_{s_2} è la seguente

$$\mathbf{X}_{s_2} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{z}_{s_2} & -\tilde{y}_{s_2} \\ -\tilde{z}_{s_2} & 0 & \tilde{x}_{s_2} \\ \tilde{y}_{s_2} & -\tilde{x}_{s_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso, la velocità del baricentro G_{s_2} risulta essere il prodotto di una matrice dipendente dalle sole coordinate lagrangiane ($\mathbf{J}_v^{s_2} = \mathbf{J}_v^2 + \mathbf{R}_{s_2}^T \mathbf{X}_{s_2} \mathbf{R}_{s_2} \mathbf{J}_\omega^{s_2}$) per il vettore delle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$.

Procedendo in maniera analoga per gli altri corpi rigidi, si arriva a costruire le matrici \mathbf{J}_v^i che moltiplicate per il vettore delle velocità lagrangiane $\dot{\mathbf{q}}$ forniscono la velocità del baricentro G_i del corpo rigido che si sta considerando. Infatti, la velocità del generico baricentro G_i può essere ottenuta partendo dalla conoscenza della velocità di un qualsiasi altro punto Q dello stesso corpo rigido (di cui si suppone si sia già calcolata la corrispondente matrice \mathbf{J}_v^Q) nel modo seguente

$$\mathbf{V}_{G_i} = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\Omega}_i \wedge Q G_i, \quad (2.38)$$

dove $Q G_i = \tilde{x}_i \tilde{\mathbf{i}} + \tilde{y}_i \tilde{\mathbf{j}} + \tilde{z}_i \tilde{\mathbf{k}}$, con la terna di versori $\tilde{\mathbf{i}}$, $\tilde{\mathbf{j}}$ e $\tilde{\mathbf{k}}$ che è la stessa utilizzata per esprimere la corrispondente velocità angolare $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i$.

Poiché le componenti \tilde{x}_i , \tilde{y}_i e \tilde{z}_i sono costanti perché la terna $(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}})$ è solida al corpo rigido in considerazione, si può riscrivere la formula precedente in questo modo

$$\mathbf{V}_{G_i} = \mathbf{J}_v^Q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}_i^T \mathbf{X}_i \mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{J}_v^Q + \mathbf{R}_i^T \mathbf{X}_i \mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_v^i \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.39)$$

che definisce la nuova matrice \mathbf{J}_v^i relativa al baricentro G_i e dove \mathbf{X}_i è

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{z}_i & -\tilde{y}_i \\ -\tilde{z}_i & 0 & \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i & -\tilde{x}_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando le matrici \mathbf{J}_v^i , si può scrivere l'energia cinetica traslatoria di ogni corpo rigido che compone lo scooter MP3 in modo molto compatto:

$$T_v^i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_v^i(\mathbf{q})^T \mathbf{J}_v^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_v^i \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.40)$$

la quale definisce anche la matrice $\mathbf{B}_v^i(\mathbf{q}) = m_i \mathbf{J}_v^i(\mathbf{q})^T \mathbf{J}_v^i(\mathbf{q})$ che, analogamente alla \mathbf{B}_ω^i , dipende solo dalle coordinate lagrangiane \mathbf{q} .

2.6.3 Equazioni di Lagrange per quasi-coordinate

Utilizzando le matrici \mathbf{B}_v^i e \mathbf{B}_ω^i definite nei precedenti paragrafi, è possibile scrivere l'energia cinetica totale della motocicletta in questo modo

$$T = T_v + T_\omega = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_v(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}_\omega(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.41)$$

dove

$$\mathbf{B}_v = \sum \mathbf{B}_v^i, \quad \mathbf{B}_\omega = \sum \mathbf{B}_\omega^i. \quad (2.42)$$

Poiché l'energia cinetica rotatoria non dipende dalla velocità del centro dell'impronta posteriore P_2 , è possibile usare indifferentemente $\dot{\mathbf{q}}$ o $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$. Questo permette di sommare le matrici \mathbf{B}_v e \mathbf{B}_ω e scrivere quindi l'energia cinetica totale in maniera ancora più compatta

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{B}_v(\mathbf{q}) + \mathbf{B}_\omega(\mathbf{q})) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.43)$$

È importante osservare che la matrice \mathbf{B} non dipende dalle coordinate lagrangiane x , y , ψ , χ_2 , χ_{11} e χ_{12} . Infatti, il moto del veicolo non può dipendere da dove è posizionato nel piano o dall'angolo di rotazione delle ruote. Inoltre, le velocità u e v sono legate alle vere coordinate dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} u &= \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi \\ v &= \dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi, \end{aligned} \quad (2.44)$$

il che può essere posto anche in forma matriciale nel seguente modo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & \mathbf{0} \\ -\sin \psi & \cos \psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.45)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità di dimensione 12×12 .

A questo punto, utilizzando le regole di derivazione delle funzioni composte, si può riscrivere la (2.27) in questo modo

$$\begin{aligned} & \dot{\mathbf{C}}^T \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] + \mathbf{C}^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \left[\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ &= \dot{\mathbf{C}}^T \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] + \mathbf{C}^T \left(\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{q} \partial \dot{\mathbf{q}}} \right] + \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} \right] \ddot{\mathbf{q}} \right) - \left[\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right] = \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

e sostituendo la (2.43) nella precedente si ottiene

$$\dot{\mathbf{C}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \left(\dot{\mathbf{q}}^T \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} \right) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}.$$

Successivamente, premoltiplicando la precedente equazione per \mathbf{C} in modo che $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$, risulta

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}.$$

Poichè, come detto in precedenza, \mathbf{B} non dipende da x e y è possibile usare $\dot{\mathbf{q}}$ al posto di \mathbf{q} e togliere la matrice \mathbf{C} dal termine $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$. In questo

modo si perviene alla massima semplificazione delle equazioni di Lagrange per quasi-coordinate:

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}, \quad (2.46)$$

Dove il prodotto $\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T$ risulta pari a

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T = \begin{bmatrix} 0 & -r & \mathbf{0} \\ r & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

2.6.4 Componenti lagrangiane delle forze attive

Si vogliono esprimere in modo conveniente le componenti lagrangiane delle forze attive che agiscono sullo scooter. A tal fine, occorre avere un'idea chiara di quali siano le forze attive e dove esse agiscano. Eccone l'elenco:

- Forza peso, che può essere pensata applicata al baricentro di ogni corpo rigido.
- Forze e momenti trasmessi dalla strada alle ruote. Le forze sono riferite al punto solidale al cerchione (inteso nell'accezione vista nel paragrafo 2.2.1) che in un dato istante si sovrappone al centro dell'impronta.
- Forze elastiche e smorzanti degli ammortizzatori anteriori e posteriori. Ovviamente, esse agiscono nei punti di attacco di ogni ammortizzatore.
- Coppia motrice posteriore (e sua reazione).
- Forze frenanti (e loro reazioni).
- Coppia di sterzo (e sua reazione).
- Coppia dovuta allo smorzamento di sterzo (e sua reazione).

- Resistenza aerodinamica.

Nell'elenco precedente, la forza peso, la resistenza aerodinamica e le azioni trasmesse dalla strada alle ruote sono forze esterne. Tutte le altre forze sono interne.

Si ricorda che il contributo alla generica componente lagrangiane Q_h di una forza \mathbf{F}_i applicata nel punto P_i di un corpo rigido è

$$Q_h^i = \mathbf{F}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}_i}{\partial q_h}. \quad (2.48)$$

Nel caso dello scooter, la precedente può essere riscritta nel seguente modo

$$Q_h^i = \mathbf{F}^i \cdot \frac{\partial (\mathbf{OP}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{P}_i)}{\partial q_h} = \mathbf{F}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{OP}_2}{\partial q_h} + \mathbf{F}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_2\mathbf{P}_i}{\partial q_h}, \quad (2.49)$$

dove P_2 è il centro dell'impronta della ruota posteriore (figura 2.10). Utilizzando i versori \mathbf{i}_0 e \mathbf{j}_0 paralleli rispettivamente agli assi x_0 e y_0 del sistema di assi suolo, il vettore \mathbf{OP}_2 risulta:

$$\mathbf{OP}_2 = x\mathbf{i}_0 + y\mathbf{j}_0. \quad (2.50)$$

Al contrario, il vettore $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_i$ può essere espresso usando la terna di versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} che si muove insieme al veicolo

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}. \quad (2.51)$$

È semplice, a questo punto, calcolare le derivate parziali presenti nella (2.49), che sono

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathbf{OP}_2}{\partial \mathbf{q}} \right] &= [\mathbf{i}_0 \ \mathbf{j}_0 \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \\ \frac{\partial \mathbf{P}_2\mathbf{P}_i}{\partial q_h} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \mathbf{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_h} \mathbf{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_h} \mathbf{k} \quad (\text{se } q_h \neq x, y, \psi), \\ \frac{\partial \mathbf{P}_2\mathbf{P}_i}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{P}_2\mathbf{P}_i}{\partial y} = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathbf{P}_2\mathbf{P}_i}{\partial \psi} &= x_i\mathbf{j} - y_i\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Infine, eseguendo il prodotto scalare presente nella (2.49) e premoltiplicando per la matrice \mathbf{C} si ottiene il vettore \mathbf{CQ}^i relativo alla forza i -esima, che può essere organizzato in questo modo

$$\mathbf{CQ}^i = \begin{bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_y^i x_i - F_x^i y_i \\ \frac{\partial x_i}{\partial \phi} F_x^i + \frac{\partial y_i}{\partial \phi} F_y^i + \frac{\partial z_i}{\partial \phi} F_z^i \\ \frac{\partial x_i}{\partial r_2} F_x^i + \frac{\partial y_i}{\partial r_2} F_y^i + \frac{\partial z_i}{\partial r_2} F_z^i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

dove F_x^i ed F_y^i sono rispettivamente le componenti lungo \mathbf{i} e lungo \mathbf{j} della forza \mathbf{F}^i . Si può notare che, in pratica, le prime tre componenti del vettore \mathbf{CQ} possono essere semplicemente ottenute determinando nell'ordine la risultante delle forze esterne lungo \mathbf{i} , lungo \mathbf{j} e la componente verticale del momento attorno al punto P_2 delle forze esterne. Essendo le forze interne auto-equilibrate, esse non contribuiscono a queste prime tre componenti. Tutte le altre componenti del vettore \mathbf{CQ} possono essere ottenute pensando la terna di versori $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ fissa, senza la necessità di conoscere la posizione del veicolo nel piano. Da un punto di vista fisico, le prime tre componenti lagrangiane sono responsabili della variazione di posizione (e orientazione) del veicolo nel piano, mentre, tutte le altre componenti (a cui contribuiscono sia forze interne che forze esterne) sono responsabili della variazione di assetto del veicolo.

Equilibrio globale

Osservando la figura 2.13, si procede a scrivere la risultante delle forze esterne nelle direzioni longitudinale e laterale e la componente verticale del momento delle forze esterne attorno al punto P_2 . Sono state indicate con $F_{x_{ij}}$ e $F_{y_{ij}}$ rispettivamente le componenti longitudinali e trasversali delle forze trasmesse dalla strada alle ruote. Come già detto, l'indice i discrimina tra le ruote anteriori e posteriori, mentre l'indice j discrimina (sull'anteriore) tra destra e sinistra. $M_{z_{ij}}$ sono i momenti di autoallineamento dei tre

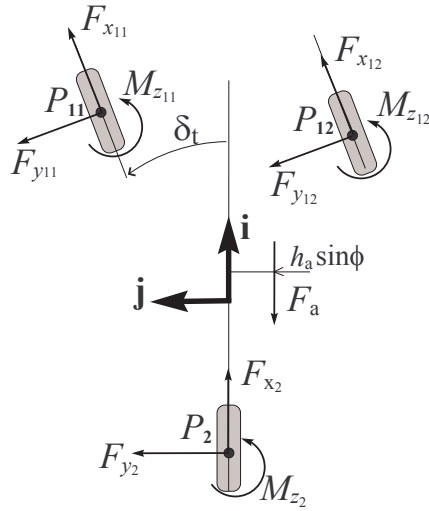


Figura 2.13: Equilibrio globale del veicolo.

pneumatici, mentre F_a è la resistenza aerodinamica, che si suppone agisca nel piano medio della ruota posteriore ad una distanza h_a dalla direzione di avanzamento. Nel presente modello è stata presa in considerazione solo la componente longitudinale della forza aerodinamica.

All'equilibrio longitudinale concorrono sia le forze esercitate dal suolo sui pneumatici, sia la resistenza aerodinamica F_a . Pertanto, la prima componente del vettore \mathbf{CQ} sarà:

$$F_x = F_{x2} + (F_{x11} + F_{x12}) \cos \delta_t - (F_{y11} + F_{y12}) \sin \delta_t - F_a. \quad (2.53)$$

Per l'equilibrio laterale, si ha

$$F_y = F_{y2} + (F_{x11} + F_{x12}) \sin \delta_t + (F_{y11} + F_{y12}) \cos \delta_t. \quad (2.54)$$

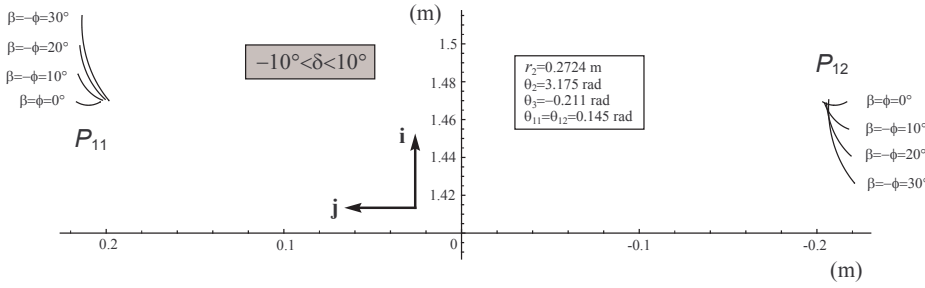


Figura 2.14: Variazione di posizione dei centri d'impronta anteriori.

Infine, il momento globale M_z rispetto al punto P_2 è

$$M_z = P_2 P_{11} \wedge \mathbf{F}_{11} + P_2 P_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + M_{z_2} + M_{z_{11}} + M_{z_{12}} - F_a h_a \sin \phi, \quad (2.55)$$

dove

$$\mathbf{F}_{11} = F_{x_{11}} \mathbf{i}_1 + F_{y_{11}} \mathbf{j}_1, \quad \mathbf{F}_{12} = F_{x_{12}} \mathbf{i}_1 + F_{y_{12}} \mathbf{j}_1,$$

essendo $\mathbf{j}_1 = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}_1$.

Le espressioni precedenti potrebbero essere semplificate se si pensa che di solito l'angolo di sterzo a terra è piccolo e quindi è possibile confondere il seno con l'angolo e mettere 1 al posto del coseno. Inoltre, i tre momenti di autoallineamento hanno poca influenza sull'equilibrio globale e, quindi potrebbero essere trascurati. Ovviamente, non possono essere trascurati se si sta studiando la dinamica dell'avantreno.

Per quanto riguarda la posizione dei centri d'impronta anteriori, essa dipende in maniera abbastanza complicata dalle coordinate lagrangiane. Tuttavia, si può vedere che la variazione di posizione rispetto alla configurazione di riferimento in rettilineo è dell'ordine di qualche cm (trascurabile rispetto al passo ed alla carreggiata del veicolo). Ad esempio, nella figura 2.14 vengono rappresentate le traiettorie dei punti P_{11} e P_{12} ottenute facendo variare l'angolo di sterzo δ tra -10° e 10° in corrispondenza di diverse

configurazioni. In particolare, alle coordinate r_2 , θ_2 , θ_3 , θ_{11} e θ_{12} è stato assegnato il valore corrispondente all'equilibrio in rettilineo (non ci si aspetta, infatti, che ci sia una grande dipendenza da queste variabili), mentre, per quanto riguarda l'angolo di rollio, sono state esaminate diverse situazioni (0° , -10° , -20° , -30°). Infine, all'angolo di rotazione β del quadrilatero è stato dato un valore opposto all'angolo di rollio (se si osserva la cinematica dell'avantreno, questo fatto è abbastanza realistico durante il moto dello scooter). Concludendo, si assume che, *solo* ai fini dell'equilibrio globale, la posizione dei centri d'impronta rimanga quella della configurazione di riferimento (rettilineo) anche durante il moto in curva.

Grazie alla precedente semplificazione, è possibile calcolare in modo agevole la componente laterale delle velocità dei punti P_{11} e P_{12} , che si è visto essere un input per il modello di pneumatico. Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{P_{11}} \cdot \mathbf{j}_1 &= (\mathbf{V}_{P_2} + r\mathbf{k} \wedge \mathbf{P}_2\mathbf{P}_{11}) \cdot \mathbf{j}_1 \\
 &= (v + lr) \cos \delta_t - \left(u - \frac{t}{2}r\right) \sin \delta_t, \\
 \mathbf{V}_{P_{12}} \cdot \mathbf{j}_1 &= (\mathbf{V}_{P_2} + r\mathbf{k} \wedge \mathbf{P}_2\mathbf{P}_{12}) \cdot \mathbf{j}_1 \\
 &= (v + lr) \cos \delta_t - \left(u + \frac{t}{2}r\right) \sin \delta_t,
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

in cui l è il passo del veicolo e t la carreggiata anteriore in condizioni di rettilineo.

Contributo dei pneumatici

Si è detto che le forze ed i momenti che la strada trasmette ai pneumatici vengono riferiti al punto solidale al cerchione che in un certo istante si sovrappone al centro dell'impronta. Essendo il cerchione un corpo rigido, è possibile sostituire questo sistema di forze con uno equivalente avente la risultante applicata nel centro ruota (figura 2.15). In questo caso, agirà sul cerchione un momento \mathbf{M}_C dato da:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_P + \mathbf{CP} \wedge \mathbf{F}, \tag{2.57}$$

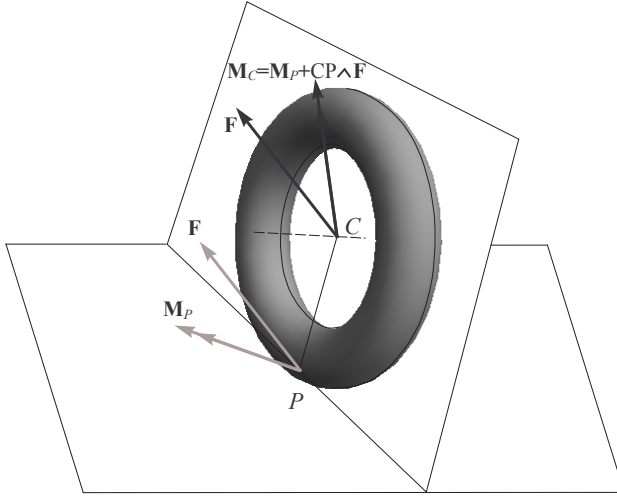


Figura 2.15: Sistema di forze equivalente alle azioni trasmesse dalla strada sul pneumatico.

dove \mathbf{M}_P e \mathbf{F} sono dati dalla (2.11) e dalla (2.12).

In questo modo, il contributo delle risultanti alla componente h -esima del vettore \mathbf{CQ} sarà:

- $\mathbf{F}_2 \cdot \frac{\partial P_2 C_2}{\partial q_h}$, per il pneumatico posteriore;
- $\mathbf{F}_{11} \cdot \frac{\partial P_2 C_{11}}{\partial q_h}$, per il pneumatico anteriore sinistro;
- $\mathbf{F}_{12} \cdot \frac{\partial P_2 C_{12}}{\partial q_h}$, per il pneumatico anteriore destro.

Si può dimostrare che il contributo del momento posteriore \mathbf{M}_{C_2} al vettore \mathbf{CQ} è

$$[0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{M}_{C_2} \cdot \mathbf{i} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{M}_{C_2} \cdot \mathbf{n}_2 \ 0 \ 0]^T.$$

Per quanto riguarda il contributo dei momenti anteriori $\mathbf{M}_{C_{1i}}$ ($i = 1$: sinistro, $i = 2$: destro) alla componente h -esima del vettore \mathbf{CQ} , si ha:

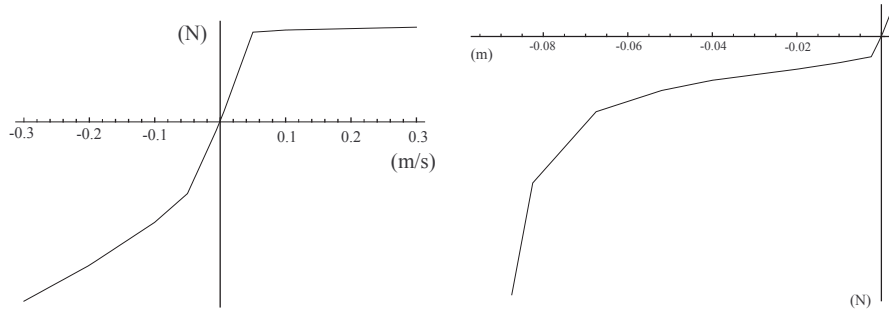


Figura 2.16: Caratteristiche elastiche e smorzanti degli ammortizzatori anteriori.

- per la forza peso, si ha

$$-m_i g \mathbf{k} \cdot \frac{\partial P_2 G_i}{\partial q_h};$$

- per le forze elastiche e smorzanti, supponendo che S_i sia il generico punto di attacco di un ammortizzatore e che \mathbf{F}_i sia la generica forza esplicita dall'ammortizzatore in quel punto di attacco, si ha

$$\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial P_2 S_i}{\partial q_h}.$$

La forza \mathbf{F}_i ha la direzione dell'asse dell'ammortizzatore ed un modulo che dipende dalla sua compressione e dalla velocità di compressione. Per tal motivo, sono state eseguite delle misure sperimentali in Piaggio per determinare le caratteristiche elastiche e smorzanti degli ammortizzatori (quelle anteriori sono visibili in figura 2.16).

- per la resistenza aerodinamica, supponendo per semplicità che sia applicata al telaio in un punto A , si ha

$$-F_a \mathbf{i} \cdot \frac{\partial P_2 A}{\partial q_h}.$$

2.6.5 Osservazioni sull'implementazione delle equazioni di Lagrange

Sebbene l'implementazione delle equazioni di Lagrange nella forma (2.46) può sembrare ad un primo impatto alquanto laboriosa, in realtà presenta una notevole sistematicità che semplifica di molto il lavoro.

Infatti, per costruire la matrice \mathbf{B} è necessario determinare le varie matrici \mathbf{R}_i , \mathbf{J}_ω^i , \mathbf{J}_v^i , che a loro volta non sono altro che un accorpamento, fatto in modo opportuno, dei (pochi) versori definiti all'inizio del capitolo. È sufficiente, dunque, esprimere questi versori come vettori delle loro componenti rispetto alla terna \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} e successivamente metterli "insieme" per costruire le matrici di interesse.

Anche le matrici $\frac{d\mathbf{B}}{dq_h}$ hanno una struttura molto simile. Infatti, anche in questo caso, per determinarle è sufficiente conoscere i versori di cui si parlava poc'anzi e le derivate delle loro componenti rispetto alle coordinate lagrangiane (lo stesso dicasi per la determinazione delle componenti lagrangiane delle forze attive). Tanto per fare un esempio, si voglia determinare la $\frac{d\mathbf{B}_\omega^i}{dq_h}$. Utilizzando la definizione di \mathbf{B}_ω^i , essa risulta

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{B}_\omega^i}{dq_h} = & (\mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i)^T \mathbf{I}_G^i \left(\frac{d\mathbf{R}_i}{dq_h} \mathbf{J}_\omega^i + \mathbf{R}_i \frac{d\mathbf{J}_\omega^i}{dq_h} \right) \\ & + \left(\frac{d\mathbf{R}_i}{dq_h} \mathbf{J}_\omega^i + \mathbf{R}_i \frac{d\mathbf{J}_\omega^i}{dq_h} \right)^T \mathbf{I}_G^i \mathbf{R}_i \mathbf{J}_\omega^i, \end{aligned}$$

in cui le varie matrici sono costituite dalle componenti dei suddetti versori e dalle loro derivate rispetto alle q_h .

L'implementazione è stata fatta sia in ambiente *Mathematica* che in ambiente *Matlab-Simulink*. L'implementazione in Simulink è stata meno immediata, ma si è resa necessaria dal momento che il modello di pneumatico è stato fornito dal TNO in questo ambiente. Al contrario, in *Mathematica* è stato implementato un modello più semplificato di quello esposto nel presente capitolo. Tale modello è stato utilizzato per determinare i modi propri di vibrare dello scooter e verrà descritto successivamente.

Il modello descritto in questo capitolo è abbastanza raffinato (anche se

può essere sempre migliorato) e può essere utile, come si vedrà successivamente, per ottenere dei risultati in termini quantitativi. Tuttavia, essendo i parametri geometrici ed inerziali numerosi, si presta ben poco a capire gli effetti di una modifica di alcune caratteristiche della motocicletta. Cosa che, invece, può essere fatta utilizzando il modello più semplificato, dove il numero dei parametri da controllare è minore.

Infine, durante il corso del capitolo si è fatto riferimento sempre allo scooter a tre ruote. Nella realtà un analogo modello è stato sviluppato per uno scooter di tipo tradizionale avente delle caratteristiche inerziali simili all'MP3 e prodotto dalla stessa casa costruttrice Piaggio & C. SpA. La logica di lavoro che ha portato al modello dello scooter a due ruote è esattamente la stessa di quella utilizzata per ottenere quello del tre ruote. Come già detto nel capitolo introduttivo, l'obiettivo dell'attività di modellazione è stato quello di paragonare le prestazioni dell'MP3 a quelle di uno scooter di tipo tradizionale in modo da evidenziarne le eventuali differenze.

2.7 Controllore virtuale

Fino ad ora è stato descritto un possibile modello per il sistema “motocicletta”, inteso come sistema meccanico a sé stante. Gli input per tale modello sono le coppie frenanti e motrici e la coppia di sterzo. Per poter effettuare delle simulazioni è necessario inserire un controllore che simuli il comportamento di un pilota.

È facile intuire che la modellazione delle motociclette non può prescindere dall'utilizzo di un controllore (al contrario delle autovetture) e questo oltre che essere una complicazione, ne rappresenta anche un limite: infatti, il comportamento della motocicletta può variare sensibilmente se il pilota viene modellato in un modo piuttosto che in un altro: ciò implica, a volte, l'impossibilità di trarre delle conclusioni oggettive, che in sostanza sono quelle che interessano per la progettazione di una motocicletta. La modellazione del pilota è, quindi, un punto fondamentale e quanto più realistico è il suo comportamento, tanto più i risultati delle simulazioni saranno vicini alla dinamica reale della motocicletta: il problema è proprio capire come

tradurre il comportamento umano in equazioni matematiche (argomento che può sfociare facilmente in disquisizioni filosofiche).

Il controllore usato per le simulazioni è abbastanza elementare, in quanto è fisso rispetto al telaio ed agisce solo sulla coppia di sterzo e sulle coppie frenanti e motrici per variare la velocità e la posizione della motocicletta. Fino ad ora, l'obiettivo del controllo è stato quello di inseguire una determinata traiettoria ad una certa velocità. Di conseguenza, è necessario che il controllore conosca la traiettoria desiderata in modo da poter valutare in ogni istante gli errori di posizione della motocicletta. Quando è stato possibile, la curva rappresentativa della traiettoria desiderata è stata descritta con una funzione analitica. Ad esempio, ciò accade se si vuole simulare una manovra di steering-pad (traiettoria circolare) o una manovra di cambio di corsia (traiettoria rettilinea).

La legge di controllo sulla coppia di sterzo è fatta in questo modo

$$T = k_0\ddot{\phi} + k_1\dot{\phi} + k_2\phi + k_3\Delta R + k_4\Delta\psi, \quad (2.58)$$

dove ΔR è l'errore di posizione, ossia la distanza del punto P_2 da un punto¹ Q della traiettoria, mentre $\Delta\psi$ è l'errore di imbardata, ossia l'angolo tra la direzione di avanzamento dello scooter e la tangente alla traiettoria nel punto Q definito in precedenza (figura 2.17). I parametri k_i nella (2.58) sono delle costanti che vanno fissate per ogni manovra e determinano lo "stile" di guida del controllore. Quest'ultimo è un punto abbastanza debole, soprattutto in ottica confronto. Infatti, rimane aperta la questione se quando si confrontano due diversi scooter bisogna utilizzare lo stesso controllore. A rigore, se ne dovrebbe usare uno diverso (ma come?), perché in realtà un pilota umano "sente" la motocicletta differente e, quindi, guida in modo diverso. In ogni caso, per il momento è stata scelta la strada più semplice (ma forse più sbagliata) di usare lo stesso controllore.

Per il confronto con i dati sperimentali è stato usato un controllore un pò più semplice, in cui si controlla la derivata temporale della coppia di

¹Va naturalmente definito e non necessariamente si intende il punto della traiettoria più vicino al punto P_2 , ma può anche essere un punto della traiettoria spostato un pò più avanti: si è visto, infatti, che questo rende la soluzione più realistica.

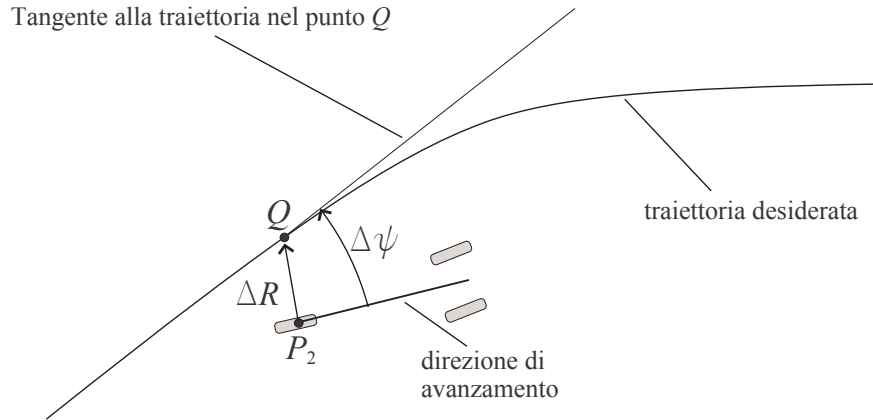


Figura 2.17: Errori di posizione e di imbardata.

sterzo:

$$\dot{T} = k_0 \ddot{\phi} + k_1 \dot{\phi} + k_2 (\phi - \phi_m). \quad (2.59)$$

In questo caso l'input non è la traiettoria desiderata, ma l'angolo di rollio misurato ϕ_m .

Per quanto riguarda il controllo della velocità longitudinale, è stata usata la seguente legge di controllo sulla coppia motrice:

$$C_m = k_5 \dot{u} + k_6 (u - u_d), \quad (2.60)$$

dove u_d è la velocità desiderata lungo la traiettoria (generalmente costante). In questo caso la coppia motrice serve solo a vincere l'inevitabile calo di velocità che c'è a causa della resistenza aerodinamica e della dissipazione di energia dei pneumatici durante il moto in curva.

Capitolo 3

Simulazioni e risultati

3.1 Validazione del modello

Il modello descritto nel secondo capitolo è stato validato confrontando i risultati di alcune simulazioni con quelli di un analogo modello sviluppato in ambiente *Adams/Motorcycle* e con i dati di alcune rilevazioni sperimentali. Quasi sempre è stato trovato un accordo più che soddisfacente.

Le tabelle dalla 3.1 alla 3.4 mostrano in valori di alcune variabili (in condizioni di regime) ottenute con il modello Adams e con quello analitico simulando manovre di steering pad con differenti raggi e differenti velocità. In ogni tabella è riportato l'angolo di rollio ϕ , l'angolo di sterzo δ , gli angoli di deriva anteriori α_1 (si usa un unico simbolo perchè come si vedrà sono praticamente coincidenti) e l'angolo di deriva posteriore α_2 . Si assume la convenzione che l'angolo di deriva sia positivo se orientato in senso orario rispetto ad un asse verticale al suolo e diretto verso l'alto. Si può osservare che c'è sempre un buon accordo tra i due modelli.

Le figure 3.1 e 3.2 confrontano i risultati di una manovra di cambio di corsia ad una velocità di 20 m/s realizzata con entrambi i modelli. Anche in questo caso i due modelli forniscono un ottimo accordo. La figura 3.3 confronta alcune rilevazioni sperimentali con i risultati di una simulazione di cambio di corsia alla velocità di 8.3 m/s (in questo caso, il controllore

Modello	ϕ [deg]	δ [deg]	α_1 [deg]	α_2 [deg]
Adams	6.3	0.77	-0.44	-0.32
Analitico	6.4	0.78	-0.45	-0.33

Tabella 3.1: Steering pad: raggio 100 m, velocità 10 m/s.

Modello	ϕ [deg]	δ [deg]	α_1 [deg]	α_2 [deg]
Adams	24.0	0.74	-1.36	-1.27
Analitico	24.3	0.75	-1.40	-1.30

Tabella 3.2: Steering pad: raggio 100 m, velocità 20 m/s.

riceve in input il segnale del rollio misurato).

Oltre alle simulazioni su strada piatta, sono state condotte delle simulazioni per valutare il comfort e la tenuta di strada del veicolo. In particolare, sono state fatte delle analisi (sia simulate che sperimentali), dette *three post test rig*, in cui i tre pneumatici vengono eccitati dal basso con dei piattelli in modo tale da riprodurre un certo tipo di profilo stradale. Tre differenti tipi di profili sono stati presi in considerazione: un pavè pesante, un acciottolato leggero ed una serie di ostacoli. Le tabelle 3.5 e 3.6 mostrano il valore RMS del carico verticale totale anteriore normalizzato paragonato con i dati sperimentali. Il carico verticale totale anteriore normalizzato è

Modello	ϕ [deg]	δ [deg]	α_1 [deg]	α_2 [deg]
Adams	12.4	1.57	-0.85	-0.66
Analitico	12.6	1.60	-0.87	-0.68

Tabella 3.3: Steering pad: raggio 50 m, velocità 10 m/s.

Modello	ϕ [deg]	δ [deg]	α_1 [deg]	α_2 [deg]
Adams	41.5	1.1	-1.2	-0.85
Analitico	42.0	1.2	-1.3	-1.10

Tabella 3.4: Steering pad: raggio 50 m, velocità 20 m/s.

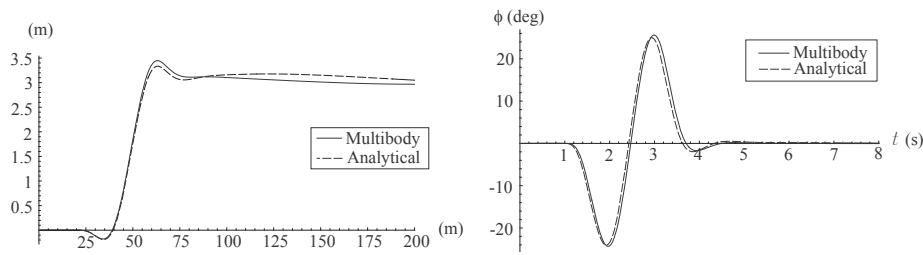


Figura 3.1: Traiettoria (a sinistra) ed angolo di rollio (a destra) durante una manovra di cambio di corsia ad una velocità di 20 m/s.

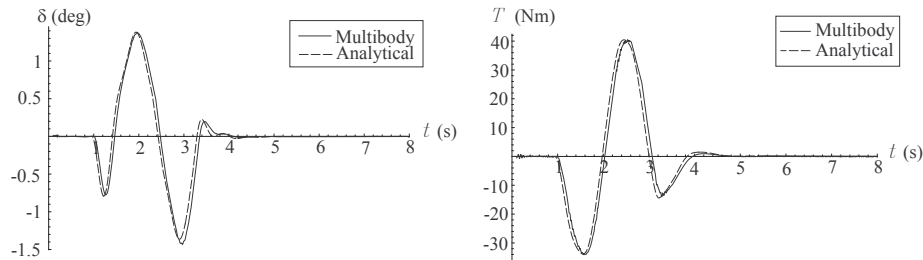


Figura 3.2: Angolo di sterzo (a sinistra) e coppia di sterzo (a destra) durante una manovra di cambio di corsia ad una velocità di 20 m/s.

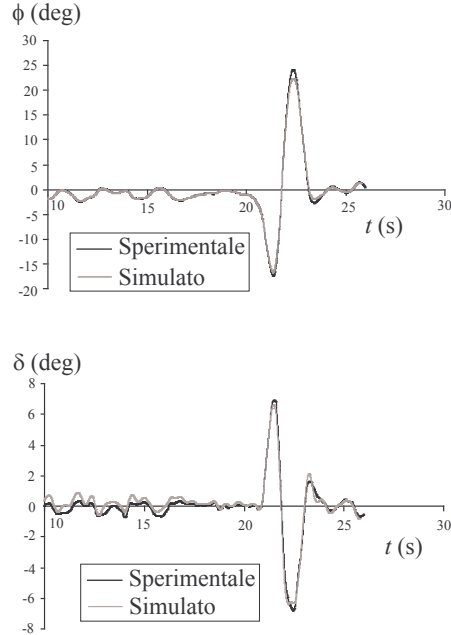


Figura 3.3: Angolo di rollio (in alto) ed angolo di sterzo (in basso) durante una manovra di cambio di corsia ad una velocità di 8.3 m/s.

definito in questo modo

$$f = (F_{z11} + F_{z12})/F_{z10}, \quad (3.1)$$

dove F_{z10} è il carico verticale totale anteriore in condizioni statiche.

La figura 3.4 mostra il carico verticale posteriore e quello frontale destro in funzione del tempo quando l'MP3 percorre un pavè pesante alla velocità di 8.3 m/s; l'accelerazione verticale della sella in funzione del tempo è mostrata in figura 3.5. Infine, la figura 3.6 paragona il carico verticale frontale destro ottenuto dalle simulazioni con i dati sperimentali, quando

Profilo	Sperimentale	Analitico	Adams	Errore % analitico	Errore % Adams
Pavè	764	836	829	9.42	8.51
Acciottolato	919	985	991	7.18	7.83

Tabella 3.5: Valore RMS dei carichi verticali anteriori per due profili stradali alla velocità di 8.3 m/s.

Velocità (m/s)	Sperimentale	Analitico	Adams	Errore % analitico	Errore % Adams
3.3	231	241	246	4.3	6.5
6.6	361	361	363	0.0	0.0
13.3	494	464	469	6.1	5.1
16.6	419	414	415	1.2	1.0

Tabella 3.6: Valore RMS dei carichi verticali anteriori per una serie di ostacoli.

lo scooter percorre una serie di ostacoli alla velocità di 13.3 m/s. Come si può osservare, anche in tutti questi test è stato ottenuto un buon accordo tra i due modelli e i dati sperimentali, con errori relativi minori del 10 %.

3.2 Steering pad e cambio di corsia

Le figure dalla 3.7 alla 3.11 riportano i risultati di una simulazione di steering pad alla velocità di 12 m/s su una traiettoria circolare di raggio 100 m. La simulazione è stata condotta sia per l'MP3 che per uno scooter tradizionale con caratteristiche inerziali molto simili. Le prestazioni di entrambi i veicoli sono state messe a confronto plottando su uno stesso grafico alcune variabili. Inizialmente le motociclette sono in condizioni di marcia rettili-

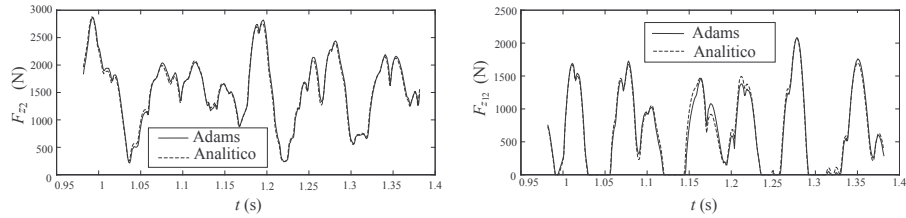


Figura 3.4: Carico verticale posteriore (a sinistra) e carico verticale anteriore destro (a destra) quando l'MP3 percorre un pavè pesante alla velocità di 8.3 m/s.

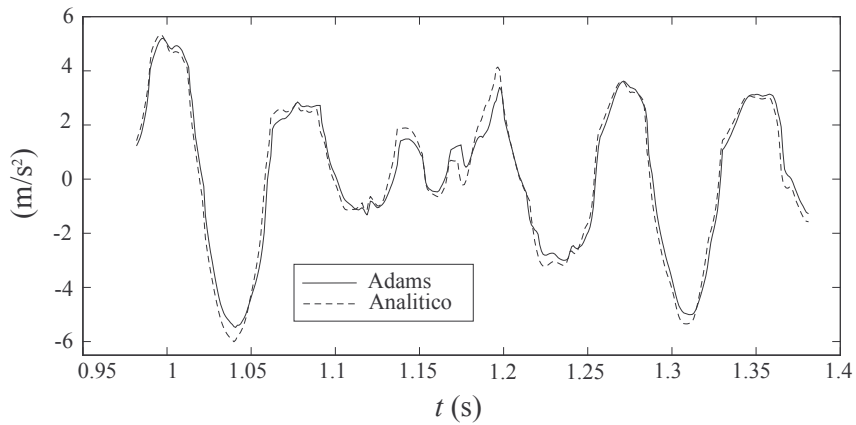


Figura 3.5: Accelerazione verticale di un punto della sella quando l'MP3 percorre un pavè pesante alla velocità di 8.3 m/s.

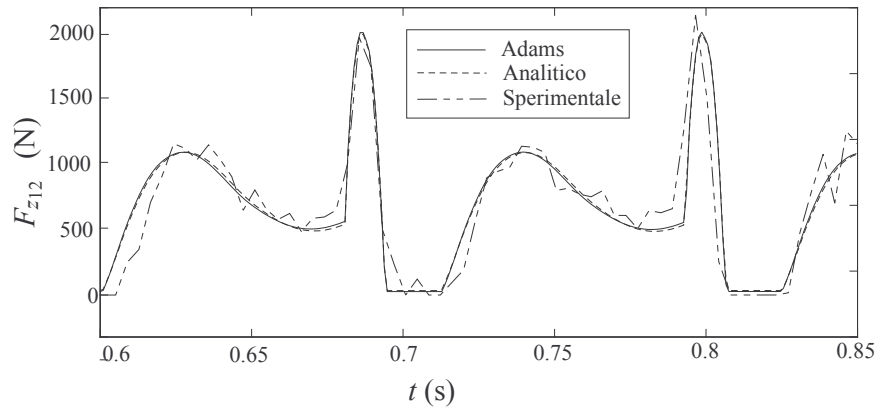


Figura 3.6: Carico verticale destro, quando lo scooter percorre su una serie di ostacoli ad una velocità di 13,3 m/s.

nea e sono situate nel punto di coordinate (100,0) di figura 3.7 con velocità tangente alla traiettoria circolare di riferimento (in grigio).

Si sottolinea che le simulazioni sono state effettuate utilizzando lo stesso controllore per entrambe le motociclette. Questo fatto non permette di trarre delle conclusioni oggettive sulla dinamica delle due motociclette, in quanto i risultati nel transitorio sono fin troppo dipendenti dal controllore usato.

Fatta questa premessa, se si osservano le traiettorie effettuate dalle due motociclette (figura 3.7) risulta che l'MP3 è un pò più lento a portarsi sulla traiettoria circolare di riferimento. Come si è già anticipato nell'introduzione, questo fatto può essere dovuto alla doppia ruota anteriore che causa un effetto giroscopico più grande rendendo meno pronto lo scooter nei cambi di direzione. Anche l'andamento della coppia di sterzo (figura 3.11) conferma questa tendenza dell'MP3. Infatti, occorre una coppia più alta sia durante il transitorio sia in condizioni di regime. Questo risultato è dovuto in parte al più alto contributo del momento giroscopico e in parte al fatto che,

essendoci due ruote sull'anteriore, c'è una massa maggiore davanti all'asse di sterzo. È ben noto, infatti, che in curva la massa oltre l'asse di sterzo tende a raddrizzare il manubrio per effetto centrifugo.

Dai grafici restanti, non si notano particolari differenze tra i due tipi di scooter confermando il fatto che il comportamento dell'MP3 può essere assimilato a tutti gli effetti a quello di una motocicletta tradizionale.

Le figure che vanno dalla 3.12 alla 3.17 riportano i risultati di una simulazione di cambio di corsia alla velocità di 12 m/s condotta per entrambi gli scooter. Essi non fanno altro che confermare quello che già si è detto per la manovra di steering pad. Infatti, l'MP3 impiega più tempo per portarsi a regime e la coppia di sterzo necessaria per effettuare la manovra è mediamente un pò più alta (3.17).

Infine, si vuole far osservare che, come già anticipato in precedenza, gli angoli di deriva anteriori dell'MP3 (figure 3.10 e 3.15) e i singoli carichi verticali anteriori (figura 3.16) risultano praticamente coincidenti durante il moto.

3.3 Perdita di aderenza su una ruota anteriore

Per valutare il comportamento dell'MP3 nei confronti della sicurezza, i modelli sviluppati possono essere utilizzati per simulare degli eventi indesiderati. In questa sezione si simula la perdita di aderenza su una delle due ruote anteriori durante una curva, ad esempio, a causa di una macchia di olio o di ghiaccio.

Per simulare la perdita di aderenza su una curva, il veicolo è stato dapprima stabilizzato su una traiettoria circolare di raggio 100 m alla velocità di 12 m/s e, successivamente, si è ipotizzato che ad un certo istante (60 s) la ruota interna perdesse completamente l'aderenza.

La figura 3.18 mostra che la forza laterale della ruota interna $F_{y_{11}}$ immediatamente va a zero a causa della mancanza di grip. In ogni caso, il controllore è in grado di mantenere il controllo del veicolo aumentando l'angolo di sterzo (figura 3.19) e quindi gli angoli di deriva anteriori α_1 (figura 3.20): in questo modo, egli recupera l'intera forza laterale frontale che

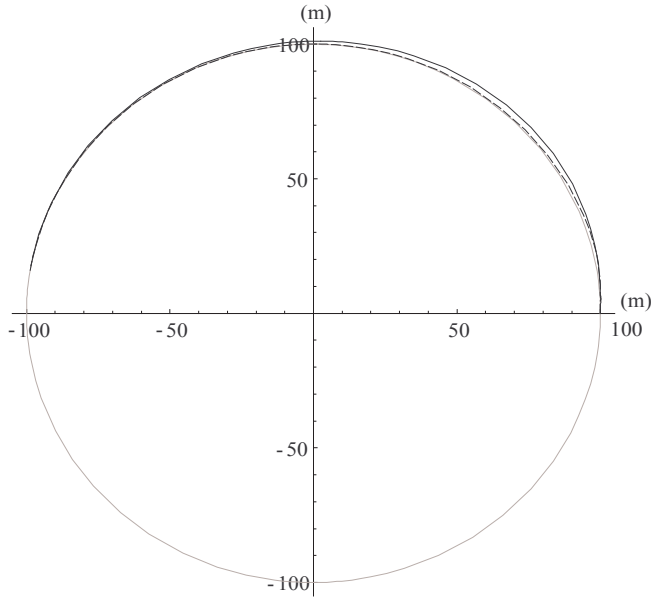


Figura 3.7: Traiettoria in una manovra di steering pad di raggio 100 m ed alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote; linea grigia: circonferenza di riferimento).

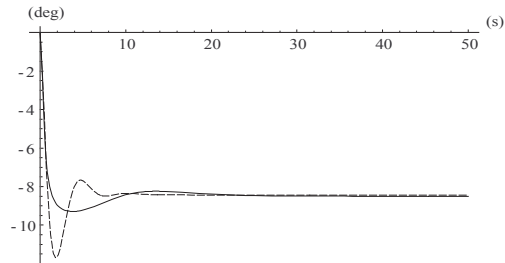


Figura 3.8: Angolo di rollio in una manovra di steering pad di raggio 100 m ed alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

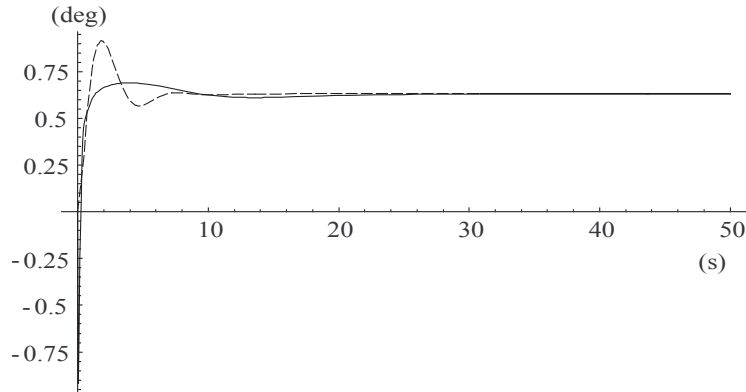


Figura 3.9: Angolo di sterzo in una manovra di steering pad di raggio 100 m ed alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

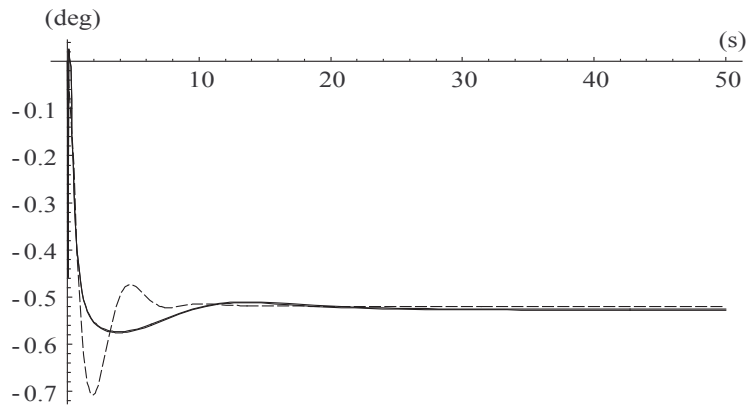


Figura 3.10: Angoli di deriva anteriore in una manovra di steering pad di raggio 100 m ed alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

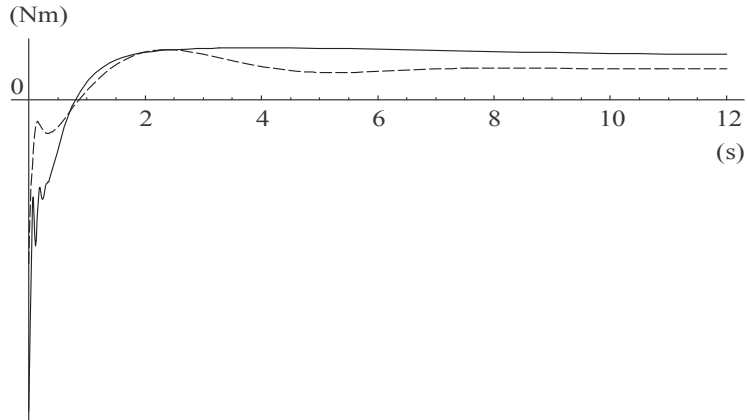


Figura 3.11: Coppia di sterzo in una manovra di steering pad di raggio 100 m ed alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

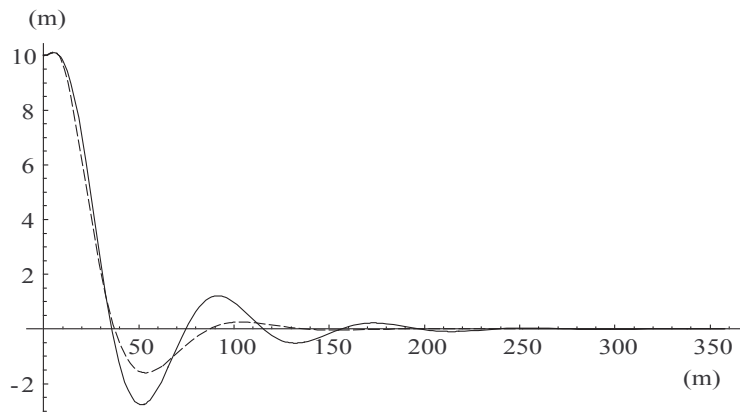


Figura 3.12: Traiettoria in una manovra di cambio di corsia alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote; linea grigia: circonferenza di riferimento).

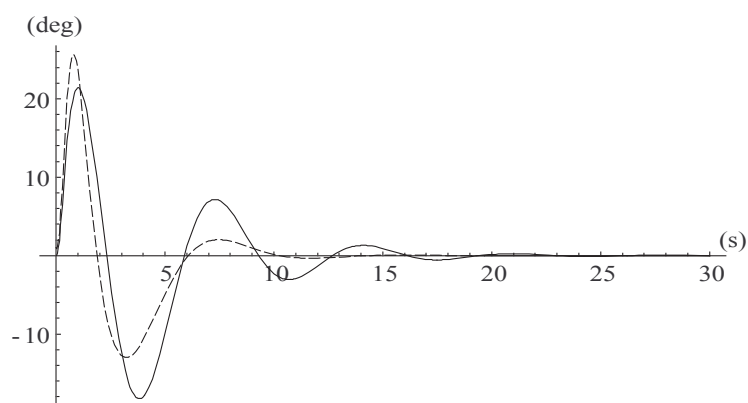


Figura 3.13: Angolo di rollio in una manovra di cambio di corsia alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

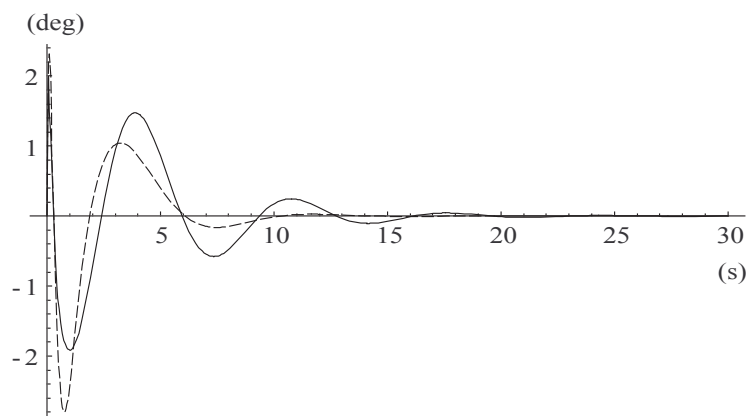


Figura 3.14: Angolo di sterzo in una manovra di cambio di corsia alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

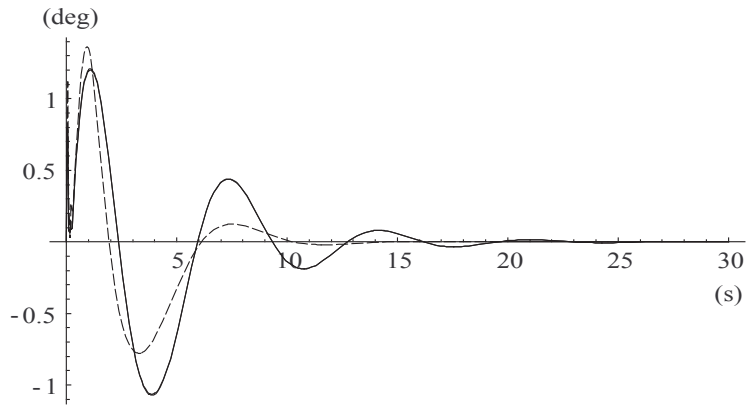


Figura 3.15: Angoli di deriva in una manovra di cambio di corsia alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

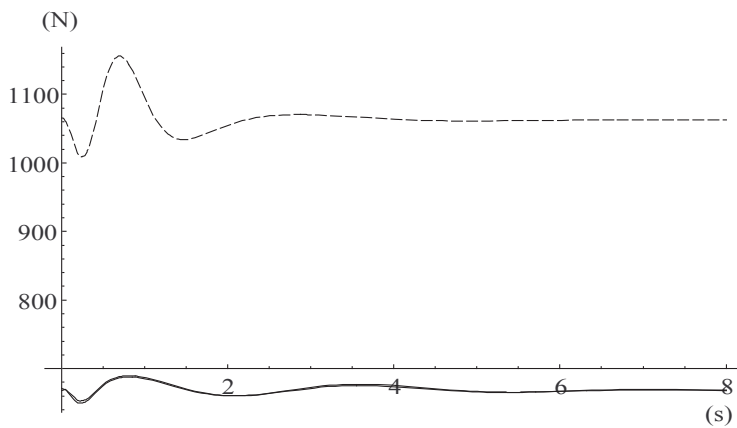


Figura 3.16: Carichi verticali in una manovra di cambio di corsia alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

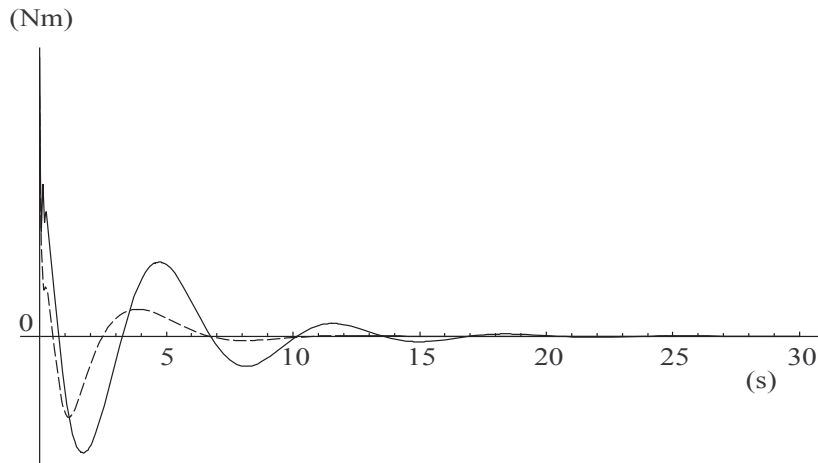


Figura 3.17: Coppia di sterzo in una manovra di cambio di corsia alla velocità di 12 m/s (linea tratteggiata: due ruote; linea continua: tre ruote).

c'era prima della perdita di aderenza, riuscendo a mantenere l'equilibrio della motocicletta (figura 3.18).

Anche se la prova simulata è abbastanza severa perché si ipotizza che la perdita di aderenza si mantenga per tutto il tempo, essa serve ad intuire come l'anteriore dell'MP3 sia meno sensibile di uno scooter tradizionale alle variazioni di aderenza e che nel complesso garantisca un valore medio del coefficiente d'attrito più alto, il che vuol dire una maggiore tenuta di strada.

3.4 Tenuta di strada su terreno sconnesso

In questa sezione vengono riportati i risultati di una simulazione in cui lo scooter MP3 affronta un dosso alla velocità di 30 km/h e di una in cui percorre un pavè alla velocità di 60 km/h. Entrambe le prove sono effettuate

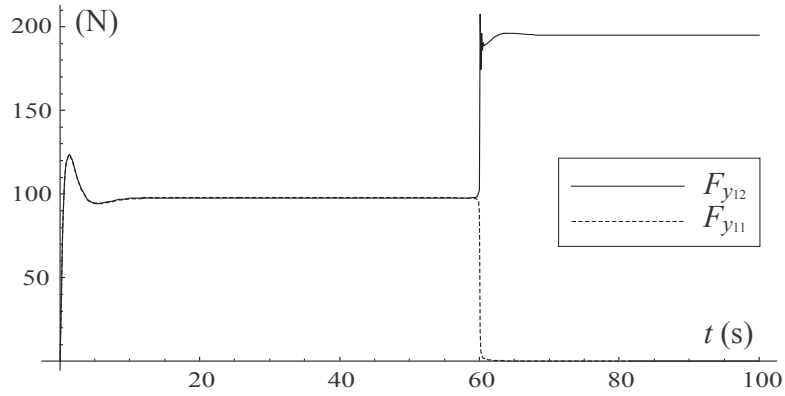


Figura 3.18: Forze laterali anteriori in funzione del tempo. Perdita di aderenza della ruota interna durante una curva di raggio 100 m alla velocità di 12 m/s.

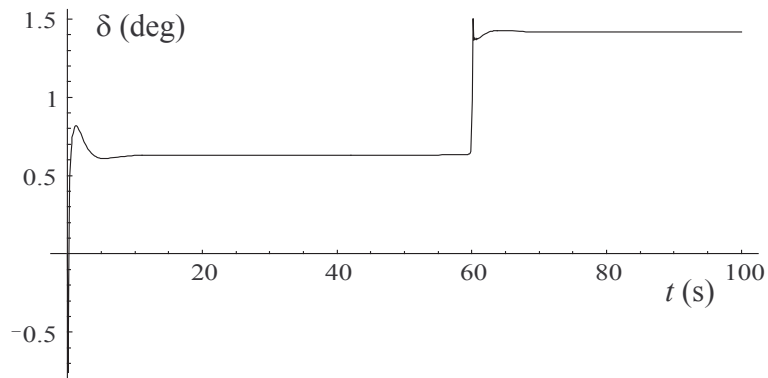


Figura 3.19: Angolo di sterzo in funzione del tempo. Perdita di aderenza della ruota interna durante una curva di raggio 100 m alla velocità di 12 m/s.

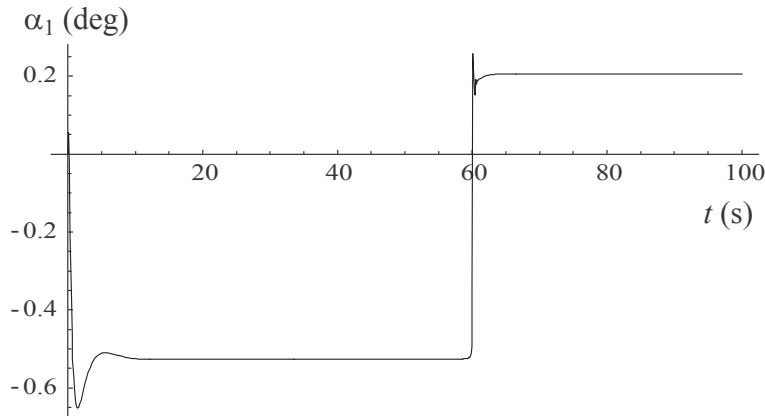


Figura 3.20: Angoli di deriva anteriori in funzione del tempo. Perdita di aderenza della ruota interna durante una curva di raggio 100 m alla velocità di 12 m/s.

in rettilineo e a velocità costante. Le stesse simulazioni sono state fatte per uno scooter di tipo tradizionale in modo da valutarne le differenze.

In figura 3.21 è mostrato il profilo del dosso incontrato dalla ruota destra dello scooter a tre ruote e dalla ruota anteriore dello scooter a due ruote. Le ruote posteriori di entrambi gli scooter e la ruota anteriore sinistra dell'MP3 non incontrano nessun ostacolo (percorrono strada piatta).

Dalla figura 3.22 è possibile notare che per lo scooter MP3 entrambe le forze verticali anteriori si annullano, ma in istanti differenti. Ne consegue che l'intervallo di tempo in cui l'anteriore perde completamente il contatto con il terreno, ossia quando la somma delle forze verticali anteriori si annulla, è molto limitato (linea continua di figura 3.23). Invece, l'intervallo temporale in cui il due ruote perde il contatto con il terreno risulta molto maggiore (linea tratteggiata di figura 3.23). Indubbiamente, tale circostanza rappresenta un vantaggio per lo scooter a tre ruote poichè, mantenendo per più tempo i pneumatici in contatto con il terreno, il pilota ha una mag-

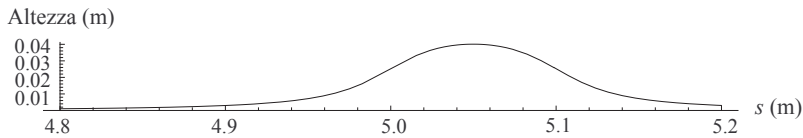


Figura 3.21: profilo del dosso

giore possibilità di controllare il mezzo. Ciò si traduce in una maggiore sicurezza su terreni accidentati.

Infine, si sono simulate delle prove in cui l'MP3 percorre un pavè. Le ruote, sia quelle anteriori che quella posteriore, percorrono profili differenti ed irregolari. La forza verticale anteriore destra (linea continua) e quella anteriore sinistra (linea tratteggiata) sono rappresentate in figura 3.24. Quasi mai le due forze verticali si annullano contemporaneamente e spesso si nota uno sfasamento tra di esse che va a compensare la perdita di contatto di una delle due ruote. Ciò è confermato anche dalla figura 3.25, dove viene confrontato il carico verticale totale dell'anteriore dell'MP3 con quello di uno scooter tradizionale per la stessa simulazione. Si nota, infatti, che l'ampiezza della parte fluttuante del segnale relativo all'MP3 (linea spessa) è più bassa. Questo vuol dire, che l'MP3 risente meno delle oscillazioni indotte dalle asperità stradali e quindi presenta nella media una tenuta di strada maggiore rispetto ad uno scooter tradizionale.

Per concludere, le simulazioni presentate in questa sezione ed in quella precedente dimostrano che l'MP3 risulta meno sensibile di uno scooter tradizionale a variazioni di grip o alle oscillazioni indotte dalle asperità stradali, il che si traduce in una maggiore tenuta di strada e in una maggiore sicurezza stradale, come gli stessi collaudatori sembrano confermare.

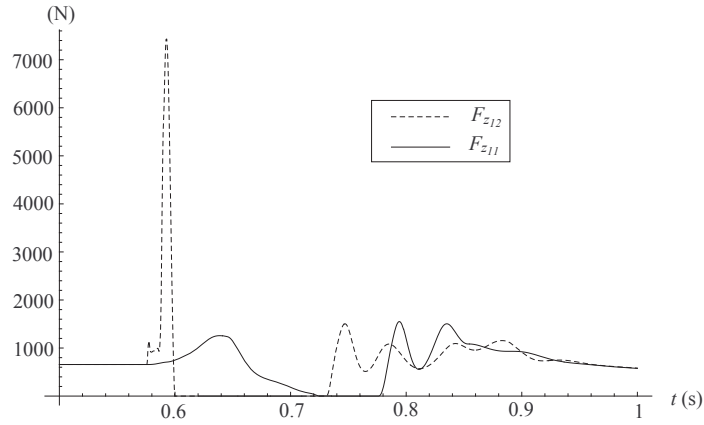


Figura 3.22: Forze verticali agenti sulle ruote anteriori dell'MP3 in prossimità di un dosso: in linea continua la forza anteriore sinistra, in linea tratteggiata la forza anteriore destra.

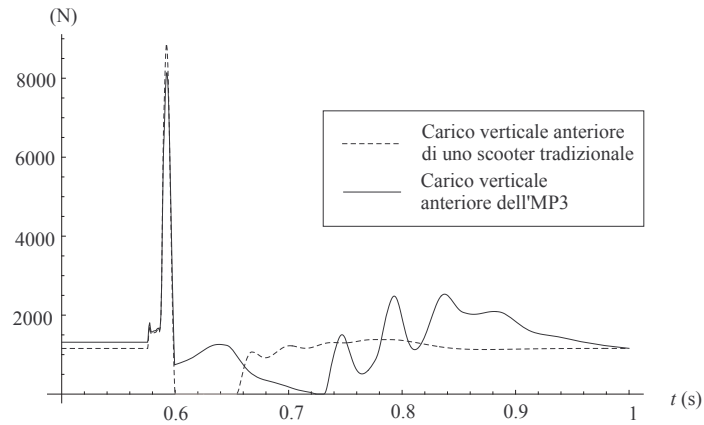


Figura 3.23: Somma delle forze verticali agenti sulle ruote anteriori dell'MP3 e forza verticale agente sul pneumatico anteriore dello scooter a due ruote in prossimità di un dosso

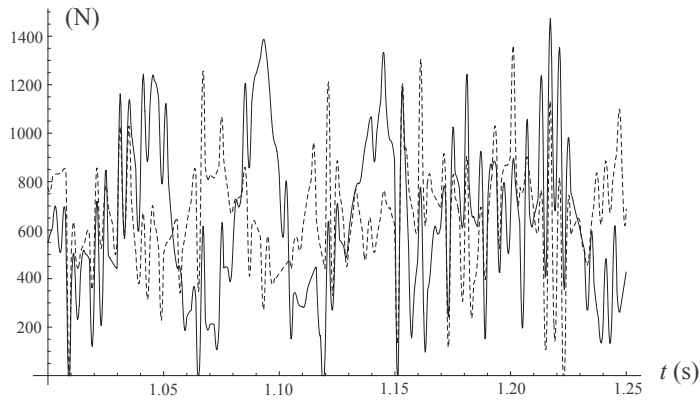


Figura 3.24: Forze verticali agenti sulle ruote anteriori dell'MP3 che percorre un pavè alla velocità di 60 km/h.

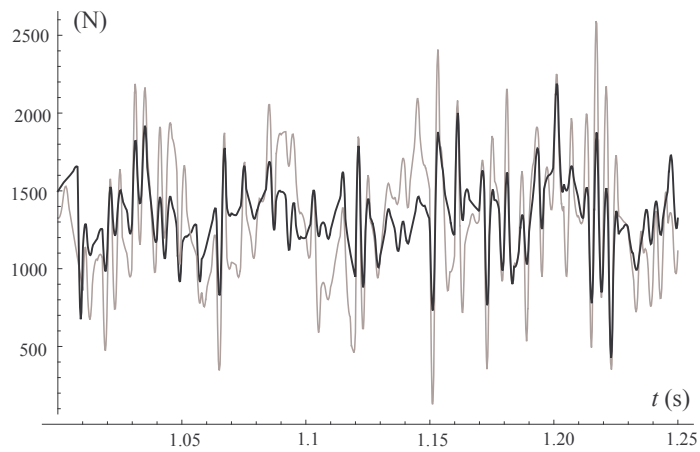


Figura 3.25: Carico verticale totale sull'anteriore dell'MP3 (in nero) e di uno scooter tradizionale (in grigio) quando percorrono un pavè alla velocità di 60 km/h.

Capitolo 4

Analisi di stabilità

4.1 Introduzione

È cosa ben nota che il moto libero di una motocicletta convenzionale è caratterizzato dalla presenza di tre modi propri di vibrare principali:

- modo di caduta laterale non oscillatorio, denominato *capsize*;
- modo oscillatorio di ondeggiamento e di serpeggiamento che coinvolge tutto il veicolo e soprattutto il retrotreno, denominato *weave*;
- modo oscillatorio dell'avantreno attorno all'asse di sterzo, denominato *wobble*.

Al contrario, non esiste nulla in letteratura circa la stabilità di uno scooter fatto come l'MP3. Pertanto, al fine di indagare questo aspetto, è stato realizzato un modello semplificato dello scooter che è stato utilizzato per calcolare gli autovalori del sistema per poi confrontarli con quelli di uno scooter convenzionale con caratteristiche geometriche ed inerziali simili all'MP3.

4.2 Descrizione del modello

Il modello usato per l'analisi di stabilità si differenzia da quello descritto nel secondo capitolo perché le sospensioni sono supposte bloccate e le ruote rigide e lenticolari (spessore nullo). Pertanto, il punto di contatto delle ruote risulta puntiforme e sempre ben definito. Inoltre, per semplificare quanto più possibile il modello, si suppone che le ruote abbiano scorrimento longitudinale nullo (ossia, velocità longitudinale del punto di contatto della ruota nulla); in questo modo, la loro velocità angolare è una funzione ben definita delle variabili cinematiche dello scooter. Per il resto, la motocicletta viene pensata come un insieme di corpi rigidi vincolati opportunamente tra di loro: telaio, ruota posteriore, ruote anteriori, organi componenti il sistema di sterzo ed il sistema basculante. È un modello forse più adatto a descrivere la dinamica di una bicicletta che di una motocicletta.

In tale situazione il sistema possiede cinque gradi di libertà (figura 4.1):

- tre che individuano la posizione sul piano stradale (coordinate x ed y ed angolo di imbardata ψ),
- uno che individua la rotazione relativa tra avantreno e retrotreno (angolo di sterzo δ),
- uno che individua l'inclinazione della motocicletta rispetto alla verticale (angolo di rollio ϕ).

È intuitivo che con questo modello l'angolo β di rotazione del quadrilatero anteriore non è più un grado di libertà del sistema, ma diventa una funzione delle altre variabili cinematiche.

Per quanto riguarda l'equilibrio dinamico del sistema, sono state scritte le seguenti equazioni:

- tre equazioni di equilibrio globale alla traslazione,
- tre equazioni di equilibrio globale a momento,
- due equazioni di equilibrio per l'avantreno. Infatti, quest'ultimo è un cinematismo a due gradi di libertà (δ e β) rispetto al telaio. Per

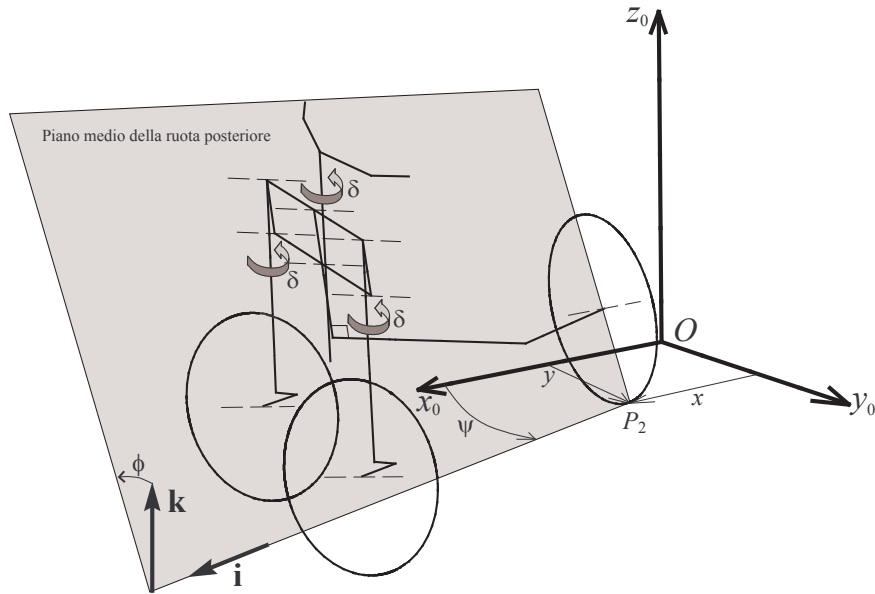


Figura 4.1: Gradi di libertà del modello semplificato.

una motocicletta convenzionale sarebbe stata sufficiente l'equazione di equilibrio a momento dell'avantreno rispetto all'asse di sterzo.

Le forze laterali derivanti dal contatto dei pneumatici con il piano stradale sono considerate funzioni lineari degli angoli di deriva e dell'angolo di camber. Questa assunzione è giustificata dal fatto che, generalmente, in condizioni stazionarie gli angoli di deriva non superano qualche grado; inoltre, la risposta laterale del pneumatico all'angolo di camber è una funzione che, in prima approssimazione, assomiglia molto ad una retta anche fino ad angoli di camber elevati (figura 4.2). Per semplicità, viene trascurato il momento trasmesso dalla strada ai pneumatici.

Il ritardo di risposta delle forze laterali viene introdotto con un'equa-

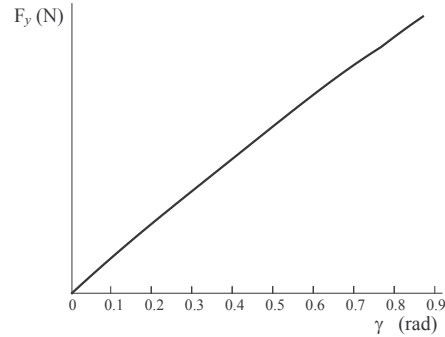


Figura 4.2: Forza laterale in funzione dell'angolo di camber ($\alpha = 0^\circ$, $F_z = 700$ N).

zione differenziale lineare del primo ordine fatta in questo modo:

$$\frac{d}{u} \dot{F}_y + F_y = Y(\alpha, \gamma) = C_\alpha \alpha + C_\gamma \gamma, \quad (4.1)$$

dove d è la lunghezza di rilassamento, mentre C_α e C_γ sono rispettivamente la rigidità di deriva e la rigidità di camber del pneumatico, stimate in corrispondenza del carico verticale statico.

Per quanto riguarda gli angoli di camber, valgono le stesse espressioni trovate nel secondo capitolo. Vengono riportate per completezza:

$$\gamma_1 = \arcsin(\cos(\tau + \bar{\theta}_3) \cos(\phi) \sin(\delta) + \cos(\delta) \sin(\phi)),$$

$$\gamma_2 = \phi,$$

dove $\bar{\theta}_3$ è il valore di θ_3 in condizioni statiche. Gli angoli di deriva possono essere trovati con le seguenti espressioni linearizzate:

$$\alpha_2 \simeq -\frac{v}{u},$$

$$\alpha_1 \simeq \delta_t - \frac{v + r l}{u},$$

dove i simboli hanno lo stesso significato visto nel secondo capitolo. Anche in questo modello per δ_t vale la formula (2.18) valutata in corrispondenza di θ_3 .

Concludendo, il modello semplificato è governato da undici equazioni (otto di equilibrio e tre relative al ritardo di risposta delle tre forze laterali) nelle seguenti undici incognite: la velocità longitudinale $u(t)$, la velocità laterale $v(t)$, la velocità d'imbardata $r(t)$, l'angolo di rollio $\phi(t)$, l'angolo di sterzo $\delta(t)$, i tre carichi verticali $F_{z_{ij}}(t)$ e le tre forze laterali $F_{y_{ij}}(t)$. Gli input per il modello sono la coppia di sterzo T e la forza motrice posteriore F_{x_2} .

Si tratta di un modello più approssimato di quello del secondo capitolo, ma ha il vantaggio della semplicità e di avere un numero di parametri geometrici ed inerziali molto limitato. Pertanto, non può essere utilizzato per estrarre dei risultati di tipo quantitativo, ma di sicuro è utile per capire la direzione di certi fenomeni.

4.3 Modi propri in rettilineo

Il calcolo dei modi propri in rettilineo è relativamente semplice. Infatti, si conosce la configurazione di equilibrio (appunto quella di rettilineo) ed è sufficiente linearizzare le equazioni del moto della motocicletta attorno a tale configurazione per poi calcolare in funzione della velocità gli autovalori della matrice dinamica che si ottiene. Nelle figure 4.3 e 4.4 vengono confrontati i modi propri dello scooter MP3 con quelli di uno scooter a due ruote avente caratteristiche geometriche ed inerziali analoghe. Nel tre ruote è possibile notare alle alte velocità la maggiore stabilità dei modi weave e capsize e la minore stabilità del modo wobble: ciò è dovuto essenzialmente alla presenza della doppia ruota anteriore dell'MP3 che si comporta come una sola ruota, ma con momento d'inerzia doppio rispetto al proprio asse.

Le figure 4.3 e 4.4 sono state ottenute ipotizzando per i due scooter lo stesso valore del coefficiente di smorzamento di sterzo (dovuto all'attrito coulombiano). Tuttavia, è ragionevole ritenere che l'MP3, avendo due tubi di sterzo, abbia un coefficiente di smorzamento maggiore. Pertanto, sono

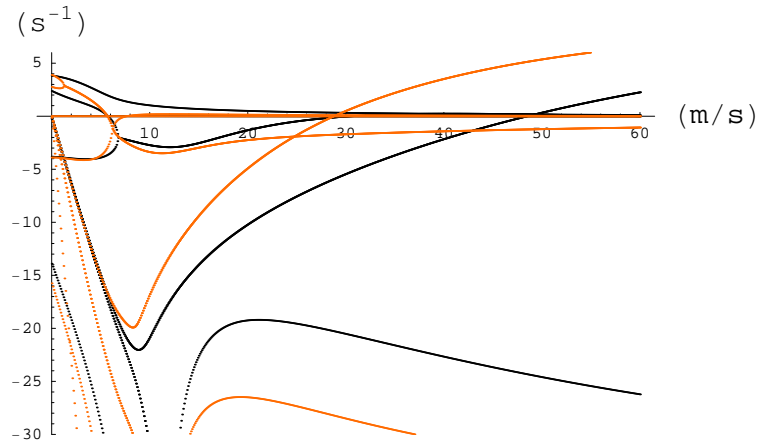


Figura 4.3: Parti reali degli autovalori in rettilineo per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero).

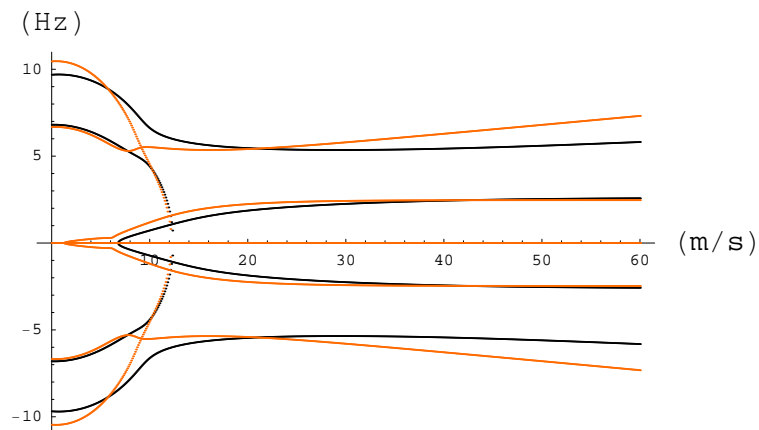


Figura 4.4: Parti immaginarie degli autovalori in rettilineo per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero).

stati calcolati i modi propri ipotizzando per l'MP3 un valore doppio del coefficiente di smorzamento (figure 4.5 e 4.6). In questo modo, migliora decisamente la stabilità del modo wobble del tre ruote, mentre il weave viene influenzato di poco dall'aumento di smorzamento di sterzo, continuando a rimanere molto più stabile del weave del due ruote.

È stata anche fatta un'analisi di sensibilità facendo variare la carreggiata anteriore dell'MP3, ma si è visto che l'andamento dei modi propri è poco sensibile a questo parametro.

4.4 Modi propri in curva

Il calcolo dei modi propri in curva è reso difficoltoso dal fatto che non sono note a priori le configurazioni di equilibrio, e non è semplice conoscerle annullando le derivate temporali, data la forte non linearità delle equazioni differenziali del moto. Per superare questo ostacolo esse vengono calcolate in modo approssimato in corrispondenza di un fissato raggio di curvatura ed in funzione della velocità. La procedura utilizzata è quella di portare inizialmente la motocicletta a regime sulla voluta traiettoria circolare con una velocità "bassa" e successivamente aumentare quest'ultima molto lentamente (continuando a rimanere sulla stessa traiettoria), in modo tale da poter pensare di essere sempre in condizioni di moto stazionario. A questo punto se si vanno a graficare le varie variabili di stato in funzione della velocità (o eventualmente di un'altra variabile) si ottiene l'andamento delle condizioni di equilibrio corrispondente al raggio fissato. Nelle figure 4.7 e 4.8 sono riportati gli andamenti di alcune di queste variabili in funzione della velocità (variabile da 5 m/s a 15 m/s), in corrispondenza di una traiettoria circolare di raggio 13 m.

Una volta noti per ogni velocità i punti di equilibrio, le equazioni del moto della motocicletta vengono linearizzate attorno a tali punti. A questo punto vengono calcolati gli autovalori della matrice dinamica che si ottiene dopo la linearizzazione. Si noti che, a differenza del rettilineo, occorre fare una nuova linearizzazione ad ogni velocità. Pertanto, la procedura è molto più lunga.

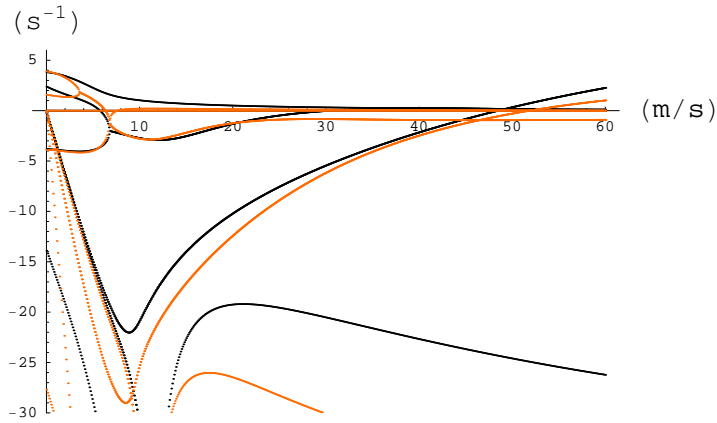


Figura 4.5: Parti reali degli autovalori in rettilineo per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero); smorzamento di sterzo doppio rispetto alla figura 4.3.

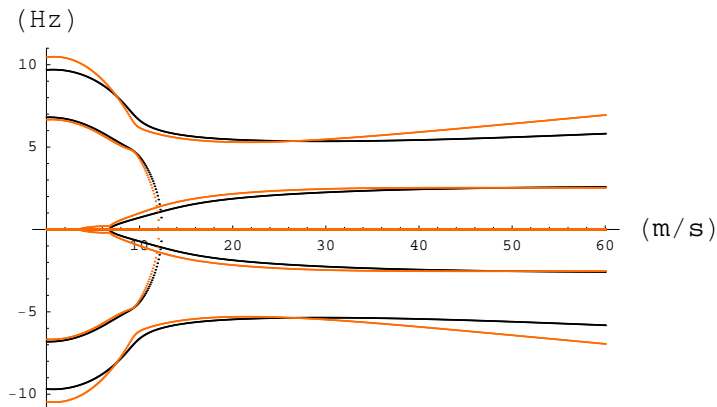


Figura 4.6: Parti immaginarie degli autovalori in rettilineo per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero); smorzamento di sterzo doppio rispetto alla figura 4.4.

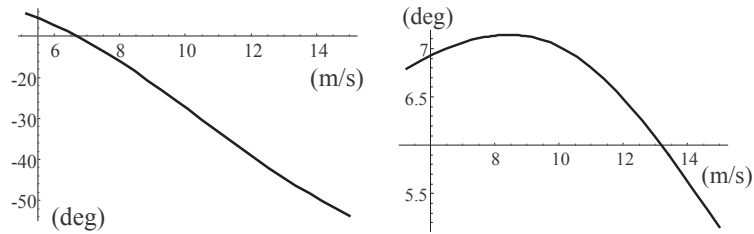


Figura 4.7: Equilibrio su una traiettoria circolare di raggio 13 m per lo scooter MP3: rollio a sinistra, angolo di sterzo a destra.

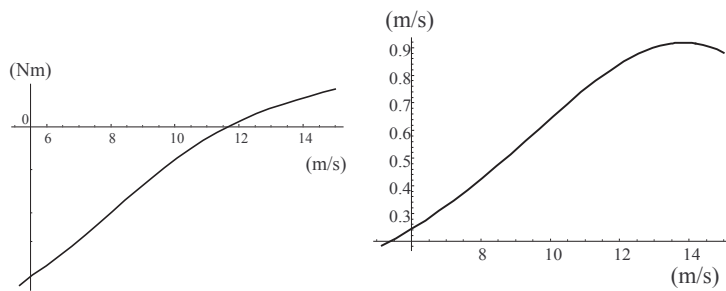


Figura 4.8: Equilibrio su una traiettoria circolare di raggio 13 m per lo scooter MP3: coppia di sterzo a sinistra, velocità laterale a destra.

Nelle figure dalla 4.9 alla 4.12 vengono confrontati gli andamenti degli autovalori prima su una curva di raggio 100 m e poi su una curva di raggio 13 m. Si nota immediatamente che le differenze nei modi propri tra il due ed il tre ruote tendono ad assottigliarsi passando da una curva di grande raggio ad una di piccolo raggio. Questo è dovuto al fatto che in una curva stretta si raggiungono alti valori dell'angolo di rollio con basse velocità, quando cioè gli effetti giroscopici hanno meno importanza sull'intera dinamica del veicolo; di conseguenza, si sentono meno gli effetti della presenza della doppia ruota anteriore nello scooter MP3.

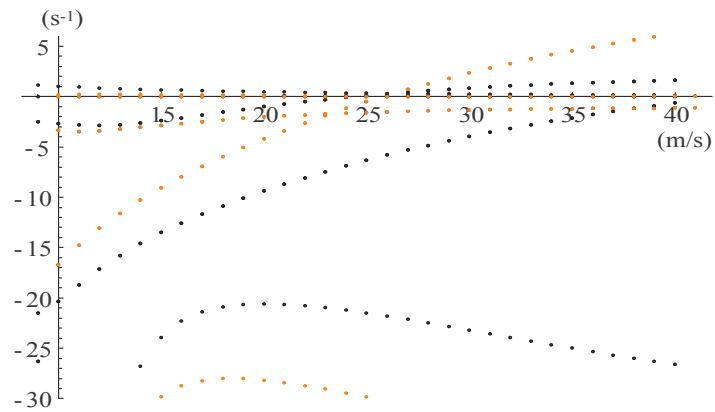


Figura 4.9: Parti reali degli autovalori su una curva di raggio 100 m per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero).

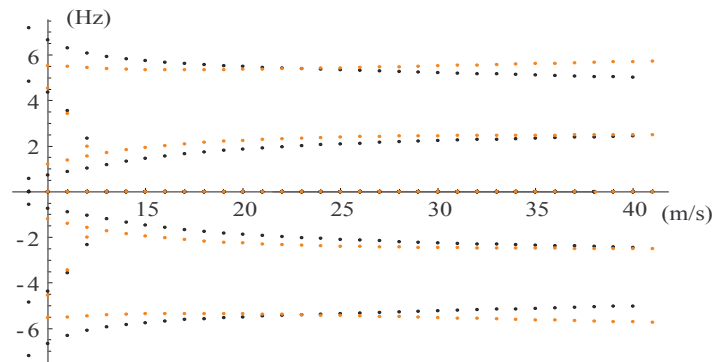


Figura 4.10: Parti immaginarie degli autovalori su una curva di raggio 100 m per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero).

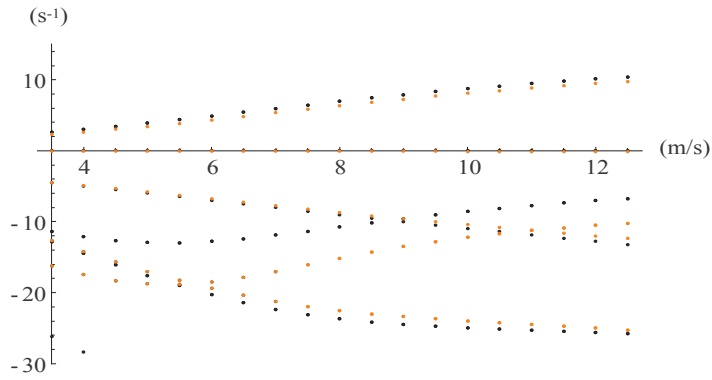


Figura 4.11: Parti reali degli autovalori su una curva di raggio 13 m per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero).

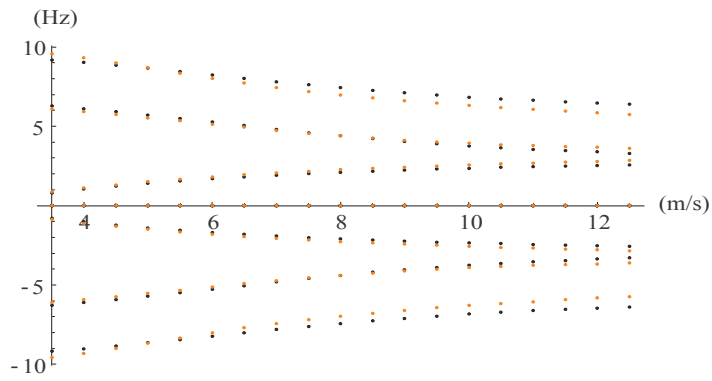


Figura 4.12: Parti immaginarie degli autovalori su una curva di raggio 13 m per l'MP3 (in rosso) e per il due ruote (in nero).

Capitolo 5

Conclusioni

L'obiettivo della prima parte della tesi è stato quello di analizzare la dinamica di uno scooter innovativo introdotto qualche anno fa dalla Piaggio & C. SpA con cui l'attività è stata in collaborazione. La peculiarità di questo scooter è quella di possedere due ruote anteriori collegate al telaio con un parallelogramma articolato in modo da permettergli di rollare come una classica motocicletta.

Per condurre l'analisi è stato sviluppato un modello (implementato in ambiente Matlab-Simulink) che tiene conto della presenza delle sospensioni e della deformabilità radiale del pneumatico. L'impostazione di base data al modello è stata descritta in modo accurato nel secondo capitolo. Sostanzialmente, si tratta di uno schema a corpi rigidi, in cui il pilota è pensato immobile rispetto al telaio. Accanto al modello meccanico di motocicletta, è stato necessario affiancare un modello di pneumatico ed un modello di pilota. Per quanto riguarda il pneumatico, il TNO Automotive di Delft ha effettuato delle misure sperimentali sui pneumatici dello scooter ed ha fornito un blocchetto Simulink all'interno del quale è implementato il modello di Pacejka (Magic Formula). Con riferimento al controllore, è stato realizzato un semplice controllo che sulla base degli errori di posizione e di imbardata determina la coppia di sterzo e la coppia motrice da applicare in modo tale da inseguire una prestabilita traiettoria alla velocità desiderata.

Con il modello sviluppato è possibile realizzare sia manovre su strada piatta per studiare l'handling, sia manovre su terreno sconnesso per valutare la tenuta di strada.

Per la validazione sono stati effettuati dei confronti con delle rilevazioni sperimentali e con i risultati provenienti da un analogo modello dello scooter realizzato in ambiente Adams. In entrambe le situazioni si è verificato che l'accordo è spesso più che soddisfacente.

Nel terzo capitolo sono stati riportati i risultati di alcune simulazioni confrontati con quelli ottenuti da un analogo modello sviluppato per simulare uno scooter di tipo tradizionale con caratteristiche geometriche ed inerziali simili all'MP3. In particolare, sono state effettuate delle simulazioni per esaltare le differenze tra le due tipologie di scooter.

Si è trovato che il comportamento su strada piatta dell'MP3 è in generale molto simile a quello del due ruote. Si rileva, comunque, un leggero ritardo nel concludere la manovra e nel portarsi a regime. Molto probabilmente, questo è dovuto agli effetti giroscopici più grandi a causa della presenza della doppia ruota anteriore. In ogni caso, le maggiori differenze si riscontrano nel comportamento su strada sconnessa o quando il terreno presenta variazioni di aderenza. Infatti, si è riscontrato che l'MP3 risulta meno sensibile di uno scooter tradizionale alle variazioni di grip e alle oscillazioni indotte dalle asperità stradali. Tutto ciò nel complesso garantisce una maggiore tenuta di strada e un valore medio del coefficiente di aderenza più alto sull'anteriore. Questo risultato fornisce sicuramente un contributo ad incrementare la sicurezza stradale.

Nel quarto capitolo è stata condotta l'analisi di stabilità dell'MP3 utilizzando un modello più semplificato in cui le sospensioni sono bloccate e le ruote rigide e lenticolari. Con questa analisi è possibile notare la maggiore stabilità dei modi weave e capsizes e la minore stabilità del modo wobble rispetto ad uno scooter tradizionale: ciò è dovuto essenzialmente alla presenza della doppia ruota anteriore dell'MP3 che si comporta come una sola ruota, ma con momento d'inerzia doppio rispetto al proprio asse. In ogni caso, la tendenza del wobble all'instabilità risulta attenuata se si tiene conto che l'MP3, avendo due tubi di sterzo, ha anche un coefficiente di smorzamento di sterzo maggiore.

Infine, ecco un elenco dei possibili sviluppi futuri e miglioramenti del lavoro svolto:

- implementazione di un modello di pilota che tenga conto della possibilità di movimento rispetto al telaio;
- raffinamento dell'analisi di stabilità con l'inclusione delle sospensioni nel modello;
- implementazione di alcune logiche di controllo per la sicurezza attiva (controllo della trazione, ABS, sospensioni attive).

Parte II

Revisione critica dell'handling diagram

Capitolo 1

Introduzione

Il diagramma di maneggevolezza (*handling diagram*) è uno degli strumenti più famosi nella teoria della dinamica del veicolo e fu introdotto per la prima volta da Pacejka [18]. Esso è costituito da una curva che dipende dalle sole caratteristiche costruttive del veicolo e ne descrive il comportamento direzionale in condizioni stazionarie. Alla sua fama ha contribuito senza dubbio il fatto che esso non è soltanto uno strumento teorico ma può anche essere ottenuto sperimentalmente mediante opportune manovre.

L'handling diagram è usato anche per introdurre il concetto di gradiente di sottosterzo di un veicolo, essendo quest'ultimo la pendenza della suddetta curva. Inoltre, da esso si possono trarre delle conclusioni circa la stabilità del veicolo. Si capisce, dunque, che, nonostante sia uno strumento abbastanza semplice, è in grado di fornire molte informazioni sulle proprietà direzionali del veicolo e che può essere senz'altro usato per valutarne le prestazioni. Dei concetti di diagramma di maneggevolezza e di gradiente di sottosterzo verrà fatto un richiamo nel secondo capitolo di questa seconda parte della tesi.

Nonostante la sua importanza, il diagramma di maneggevolezza è stato ottenuto dal modello (*modello monotraccia*) di una particolare tipologia di veicoli, ossia veicoli con trazione posteriore, differenziale aperto e dove hanno poca importanza gli effetti portanti-deportanti. Di conseguenza, il

suo uso è legittimo solo per quella categoria di veicoli. Ad esempio, se si considerano altre tipologie di veicoli, come veicoli con differenziale bloccato [8] o veicoli con assali multipli [25] o veicoli dove gli effetti deportanti sono importanti (autovetture da corsa), si nota che si ottengono differenti curve di maneggevolezza al variare della manovra. In pratica, a manovre diverse corrispondono curve diverse. Di conseguenza, anche il gradiente di sottosterzo non è più unico per un dato punto di equilibrio, ma viene a dipendere dalla manovra eseguita. Sempre nel secondo capitolo verrà illustrato come, partendo dal modello di un veicolo con differenziale bloccato, si possono ottenere questi risultati.

Con queste considerazioni si potrebbe concludere che il diagramma di maneggevolezza perde gran parte del suo significato, visto che ha un'applicazione limitata ad una specifica categoria di veicoli. Fortunatamente, questo non vuol dire che è necessario sviluppare una teoria diversa per ogni categoria di veicoli, ma il tutto può essere inquadrato all'interno di una visione più generale del problema che porta all'introduzione del concetto di *superficie di maneggevolezza* [9, 10], della quale l'handling diagram non è altro che un caso speciale.

Nel terzo capitolo si vedrà che all'idea della superficie di maneggevolezza si arriva con un approccio allo studio delle condizioni stazionarie che prescinde dalla particolare tipologia di veicolo.

In ogni caso, la conseguenza di tutto ciò è che in generale il gradiente di sottosterzo viene a dipendere dal punto di equilibrio considerato e dalla *direzione* della manovra. Esso perde, dunque, nella sua definizione classica, la proprietà di caratterizzare il comportamento direzionale del veicolo. Questo dovrebbe far riflettere su che cosa debba intendersi effettivamente per sottosterzo di un veicolo e se sia giusto derivarlo dall'insieme delle condizioni di equilibrio, o se, piuttosto, debba anche essere considerato il moto non stazionario (come, a volte, fanno intendere piloti e collaudatori).

L'idea di un grafico tridimensionale è stata accennata anche da Dixon [7], senza, però, indagare sull'influenza della manovra sul comportamento stazionario. Al contrario, nella presente tesi, un approccio più sistematico porta a dei risultati più innovativi, ma che non distruggono quelli legati alla teoria classica del modello monotraccia, anzi, li integrano e li generalizzano.

Capitolo 2

Veicolo con differenziale bloccato

2.1 Modello monotraccia

Lo studio della dinamica del veicolo ha prodotto come risultato di base il cosiddetto modello *monotraccia*. In pratica, tale modello è il risultato dell'analisi di un veicolo a trazione posteriore con differenziale ordinario. Verrà qui fatto un breve richiamo alle caratteristiche essenziali del modello monotraccia.

La Fig. 2.1 rappresenta una schematizzazione del modello. In essa, la posizione del baricentro G del veicolo lungo l'asse è definita dalle lunghezze a_1 ed a_2 che sono rispettivamente il semipasso anteriore e quello posteriore. La somma $l = a_1 + a_2$ è il passo del veicolo. Con u e v si indicano rispettivamente la componente longitudinale e quella laterale della velocità del baricentro \mathbf{V}_G , mentre r è la velocità di imbardata. Infine, δ rappresenta l'angolo di sterzo delle ruote anteriori ed R la distanza del centro delle velocità C del veicolo dal suo asse.

A questo punto è utile introdurre gli angoli di deriva α_1 e α_2 , rispettivamente anteriore e posteriore, che sono legati alle quantità precedente-

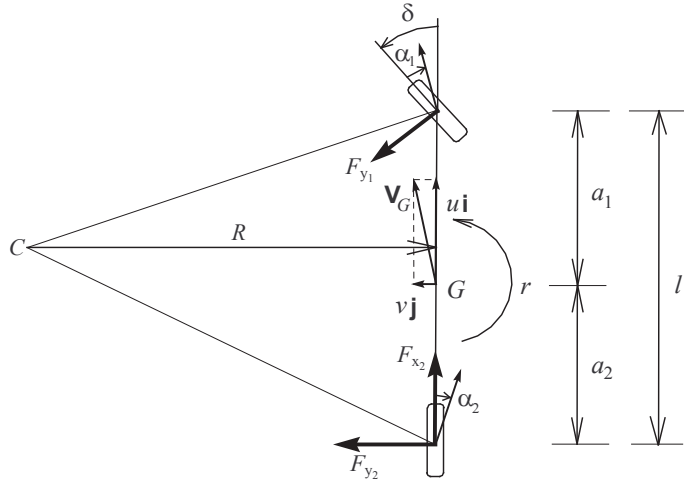


Figura 2.1: Modello monotraccia di un veicolo.

mente definite dalle seguenti relazioni cinematiche (ottenute nell'ipotesi di $u \ll |v + ra_1|$ e $u \ll |v - ra_2|$):

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \delta - \frac{v + ra_1}{u}, \\ \alpha_2 &= -\frac{v - ra_2}{u}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Se si suppone assegnata la velocità longitudinale u , la dinamica del modello è governata dall'equazione di equilibrio laterale e da quella di equilibrio a momento (ad esempio rispetto al baricentro):

$$\begin{aligned}m(\dot{v} + ur) &= F_{y1}(\alpha_1) + F_{y2}(\alpha_2), \\ J_z \dot{r} &= F_{y1}(\alpha_1)a_1 - F_{y2}(\alpha_2)a_2,\end{aligned}\tag{2.2}$$

dove m e J_z sono rispettivamente la massa del veicolo ed il suo momento d'inerzia attorno ad un asse verticale passante per il baricentro. $F_{y_i}(\alpha_i)$ sono

le cosiddette caratteristiche effettive degli assali, cioè le risposte degli assali (in termini di forza laterale) ad un certo angolo di deriva: rappresentano, in pratica, le equazioni costitutive del modello.

Si vuole sottolineare che il modello di figura 2.1 è il risultato di un processo che si basa su una serie di ipotesi che si suppongono note al lettore; in particolare, sono cruciali quei passaggi che portano all'accorpamento delle due ruote di uno stesso assale in una sola ruota "equivalente", tanto che spesso il modello monotraccia viene spesso chiamato "modello a bicicletta".

2.2 Diagramma di maneggevolezza e gradiente di sottosterzo

Si considerino le condizioni di equilibrio a regime che si ottengono dalle (2.2) semplicemente ponendo uguale a zero le derivate. Si ottiene

$$\begin{aligned} m\tilde{a}_y = mur &= F_{y_1}(\alpha_1) + F_{y_2}(\alpha_2), \\ 0 &= F_{y_1}(\alpha_1)a_1 - F_{y_2}(\alpha_2)a_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove $\tilde{a}_y = ur$ rappresenta l'accelerazione laterale a regime. È evidente che, una volta assegnata \tilde{a}_y è possibile risolvere il sistema (2.3) nelle incognite α_1 e α_2 . Questo fatto definisce un legame tra \tilde{a}_y e la coppia (α_1, α_2) che è soluzione del sistema (che può anche essere più di una). Quindi, a regime, sia α_1 che α_2 saranno delle funzioni di \tilde{a}_y . Di conseguenza, anche la differenza $\alpha_1 - \alpha_2$ dipenderà solo dall'accelerazione laterale assegnata.

Tale differenza si dimostra essere uguale alla differenza tra l'angolo di sterzo anteriore δ e l'angolo di Ackermann $s = l/R$. Quindi si può scrivere

$$\delta - s = \delta - \frac{l}{R} = f(\tilde{a}_y). \quad (2.4)$$

La funzione precedentemente introdotta rappresenta uno degli strumenti più utili per l'analisi del comportamento dinamico del veicolo. Essa rappresenta il cosiddetto *diagramma di maneggevolezza*. La Fig. 2.2 ne rappresenta un esempio. La forma del diagramma di maneggevolezza dipende

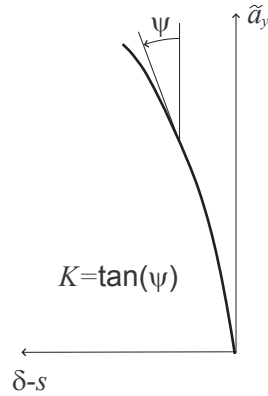


Figura 2.2: Diagramma di maneggevolezza.

da come sono fatte le caratteristiche effettive degli assali. In particolare, è possibile introdurre il *gradiente di sottosterzo* K che non è altro che la pendenza del diagramma di maneggevolezza (Fig. 2.2)

$$K = \frac{d(\delta - s)}{d\tilde{a}_y}. \quad (2.5)$$

Senza soffermarsi sul significato fisico della quantità appena introdotta, un veicolo viene definito sottosterzante in una determinata configurazione di equilibrio (e quindi, in corrispondenza di una certa \tilde{a}_y) se $K > 0$, neutro se $K = 0$ e sovrasterzante se $K < 0$. Inoltre, sempre dallo stesso diagramma, è possibile trarre delle conclusioni sulla stabilità di un veicolo. Ad esempio, se in una data configurazione di equilibrio il veicolo è sottosterzante e le rigidzze di deriva generalizzate anteriore e posteriore sono entrambe positive, allora si può dire con certezza (nei limiti del modello) che il veicolo è stabile. Al contrario, se il veicolo è sovrasterzante, il punto di equilibrio può essere sia stabile che instabile a seconda del raggio della curva su cui si muove il veicolo.

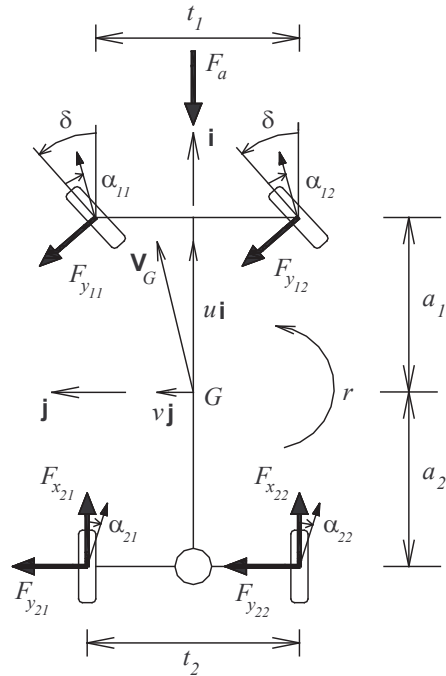


Figura 2.3: Modello di veicolo con differenziale bloccato.

2.3 Modello di veicolo con differenziale bloccato

Si vuole studiare il comportamento direzionale di un veicolo con differenziale bloccato e trazione posteriore. A tal fine, si descriverà un semplice modello, non molto lontano dal monotraccia, che permetterà di valutare l'influenza del differenziale.

Il modello di veicolo è rappresentato in figura 2.3. Si suppone che la strada sia orizzontale e perfettamente piatta e che il moto sia assimilabile ad un moto rigido piano. I simboli hanno lo stesso significato di quelli utilizzati per il modello monotraccia, con l'unica differenza che nel modello

di figura 2.3 non sono state accorpate le due ruote di uno stesso assale (per i motivi che si vedranno); pertanto, sono rappresentati i quattro pneumatici con le azioni esercitate dalla strada su di essi. Nel caso specifico, sulle ruote anteriori c'è solo forza laterale visto che non sono motrici, mentre sulle ruote posteriori c'è sia la reazione laterale che quella longitudinale. Vengono trascurati gli eventuali momenti di rotolamento e di autoallineamento. Si indicano con t_1 e t_2 rispettivamente la carreggiata anteriore e posteriore, mentre la forza $F_a = \rho S C_x u^2 / 2$ rappresenta la resistenza aerodinamica, dove ρ è la densità dell'aria, S l'area frontale e C_x il coefficiente di resistenza aerodinamica. Infine, con il versore \mathbf{i} si individua la direzione longitudinale del veicolo e con il versore \mathbf{j} la direzione laterale.

2.3.1 Equazioni di equilibrio

Nell'ipotesi di piccoli angoli di sterzo δ (quindi, $\sin \delta \simeq \delta$ e $\cos \delta \simeq 1$) si ottengono le seguenti equazioni di equilibrio approssimate per il modello di veicolo con differenziale bloccato

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= F_{x_2} - F_{y_1} \delta - F_a, \\ m(\dot{v} + ur) &= F_{y_1} + F_{y_2}, \\ J\dot{r} &= F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 + M_{z_2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove

$$F_{x_2} = F_{x_{21}} + F_{x_{22}}, \quad F_{y_1} = F_{y_{11}} + F_{y_{12}}, \quad F_{y_2} = F_{y_{21}} + F_{y_{22}}, \quad (2.7)$$

e

$$M_{z_2} = (F_{x_{22}} - F_{x_{21}}) \frac{t_2}{2}. \quad (2.8)$$

A causa della presenza del differenziale bloccato, le due forze longitudinali dell'assale posteriore sono differenti, per cui nell'equazione di equilibrio a momento compare il momento M_{z_2} che rappresenta la sola differenza rispetto al modello monotraccia presentato precedentemente. Tuttavia, come discusso già da molti autori [1, 14, 16, 8], la sua presenza non è trascurabile poiché influenza notevolmente il comportamento del veicolo.

Si noti, infine, che rispetto al modello monotraccia è stata mantenuta l'equazione di equilibrio longitudinale, perchè in questo caso non è possibile prescindere da essa neanche in condizioni stazionarie.

2.3.2 Modello di pneumatico

Si suppone che le forze longitudinali e laterali che nascono nell'interazione pneumatico-strada dipendano dal carico verticale F_z , dallo scorrimento teorico longitudinale σ_x e dallo scorrimento teorico laterale σ_y . Si trascurano eventuali altre dipendenze (come ad esempio, il camber, la temperatura e l'usura). Si suppone inoltre che la risposta del pneumatico sia istantanea: d'altra parte, non sarebbe necessario introdurre un legame di tipo differenziale visto che si vogliono studiare le condizioni di equilibrio. Pertanto, è possibile scrivere che

$$F_{x_{2j}} = X(F_{z_{2j}}, \sigma_{x_{2j}}, \sigma_{y_{2j}}), \quad F_{y_{ij}} = Y(F_{z_{ij}}, \sigma_{x_{ij}}, \sigma_{y_{ij}}), \quad (2.9)$$

dove sono stati utilizzati gli indici i e j per capire a quale ruota si fa riferimento (osservare figura 2.3). Per le forze laterali anteriori è possibile eliminare la dipendenza dagli scorrimenti laterali, poiché, a causa del fatto che le ruote anteriori sono trascinate, questi sono costantemente nulli.

Per esprimere in modo analitico le precedenti funzioni X ed Y è stato utilizzato il modello della Magic Formula [19]. Per semplicità non si riporta la formulazione analitica del modello, perché, in ogni caso, il messaggio che si vuole trasmettere è indipendente dall'espressione utilizzata per le funzioni X ed Y .

2.3.3 Espressione degli scorrimenti teorici

Utilizzando la definizione degli scorrimenti teorici longitudinali e laterali, è possibile metterli in relazione con le variabili cinematiche e geometriche del modello. Infatti, sempre nell'ipotesi di piccoli angoli δ , si ha

- per gli scorrimenti teorici longitudinali:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_{21}} &= \frac{(u - r\frac{t_2}{2}) - \Omega_{21}R_2}{\Omega_{21}R_2}, \\ \sigma_{x_{22}} &= \frac{(u + r\frac{t_2}{2}) - \Omega_{22}R_2}{\Omega_{22}R_2};\end{aligned}\quad (2.10)$$

- per gli scorrimenti teorici laterali:

$$\begin{aligned}\sigma_{y_{11}} &= \frac{-(u - r\frac{t_1}{2})\delta + (v + ra_1)}{\Omega_{11}R_1}, \\ \sigma_{y_{12}} &= \frac{-(u + r\frac{t_1}{2})\delta + (v + ra_1)}{\Omega_{12}R_1}, \\ \sigma_{y_{21}} &= \frac{v - ra_2}{\Omega_{21}R_2}, \\ \sigma_{y_{22}} &= \frac{v - ra_2}{\Omega_{22}R_2},\end{aligned}\quad (2.11)$$

dove le Ω_{ij} sono le velocità angolari dei cerchioni, mentre R_1 ed R_2 sono i raggi di rotolamento rispettivamente delle ruote anteriori e posteriori, che si suppongono essere costanti. Generalmente viene introdotta la quantità adimensionale χ_{ij} definita in questo modo:

$$\frac{\Omega_{ij}R_i}{u} = 1 + \chi_{ij}. \quad (2.12)$$

Considerando che in condizioni normali di guida sono verificate le seguenti relazioni

$$|\chi_{ij}| \ll 1, \quad \frac{|r|t_i}{u} \ll 1, \quad \frac{|r|a_i}{u} \ll 1, \quad \frac{|v|}{u} \ll 1, \quad \frac{|v \pm ra_i|}{u} \ll 1, \quad |\delta| \ll 1, \quad (2.13)$$

è possibile riscrivere gli scorrimenti in modo approssimato:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_{21}} &\simeq -\left(\chi_{21} + \frac{rt_2}{2u}\right), & \sigma_{x_{22}} &\simeq -\left(\chi_{22} - \frac{rt_2}{2u}\right), \\ \sigma_{y_{21}} &\simeq \frac{v - ra_2}{u} = -\alpha_2, & \sigma_{y_{22}} &\simeq \frac{v - ra_2}{u} = -\alpha_2, \\ \sigma_{y_{11}} &\simeq -\delta + \frac{v + ra_1}{u} = -\alpha_1, & \sigma_{y_{12}} &\simeq -\delta + \frac{v + ra_1}{u} = -\alpha_1,\end{aligned}\quad (2.14)$$

nelle quali α_1 ed α_2 sono gli angoli di deriva dell'assale anteriore e posteriore (come risulta dalle relazioni precedenti, $\alpha_1 \simeq \alpha_{11} \simeq \alpha_{12}$ e $\alpha_2 \simeq \alpha_{21} \simeq \alpha_{22}$). Inoltre, essendo il differenziale bloccato, le velocità angolari Ω_{21} e Ω_{22} sono uguali e quindi

$$\chi_{21} = \chi_{22} = \chi. \quad (2.15)$$

2.3.4 Stima dei carichi verticali

Dopo aver trovato le espressioni degli scorrimenti, per completare il modello di pneumatico occorre fare una stima dei carichi verticali $F_{z_{ij}}$. Per far questo è necessario considerare le sospensioni e generalmente si utilizza uno schema a tre corpi rigidi come quello di figura 2.4 (massa sospesa, assale anteriore e assale posteriore), nel quale i due assali sono vincolati alla massa sospesa con delle coppie rotoidale il cui asse comune individua l'asse di rollio del veicolo. Le molle torsionali k_{ϕ_i} , interposte tra cassa e ciascun assale, rappresentano la rigidità di rollio equivalente del corrispondente assale; $k_{\phi} = k_{\phi_1} + k_{\phi_2}$ è la rigidità di rollio del veicolo. h è l'altezza del baricentro dal suolo, mentre d_1 e d_2 individuano l'altezza dell'asse di rollio in corrispondenza di ogni assale. Infine, $d = (a_2d_1 + a_1d_2)/l$ è la distanza tra l'asse di rollio ed il suolo in corrispondenza del baricentro G .

La stima dei carichi verticali viene di solito fatta riferendosi alle condizioni stazionarie ($\dot{u} = \dot{v} = \dot{r} = 0$). In tali condizioni, i trasferimenti globali di carico tra anteriore e posteriore sono trascurabili, per cui, si ha

$$F_{z_1} = F_{z_{11}} + F_{z_{12}} = \frac{mga_2}{l}, \quad F_{z_2} = F_{z_{21}} + F_{z_{22}} = \frac{mga_1}{l}, \quad (2.16)$$

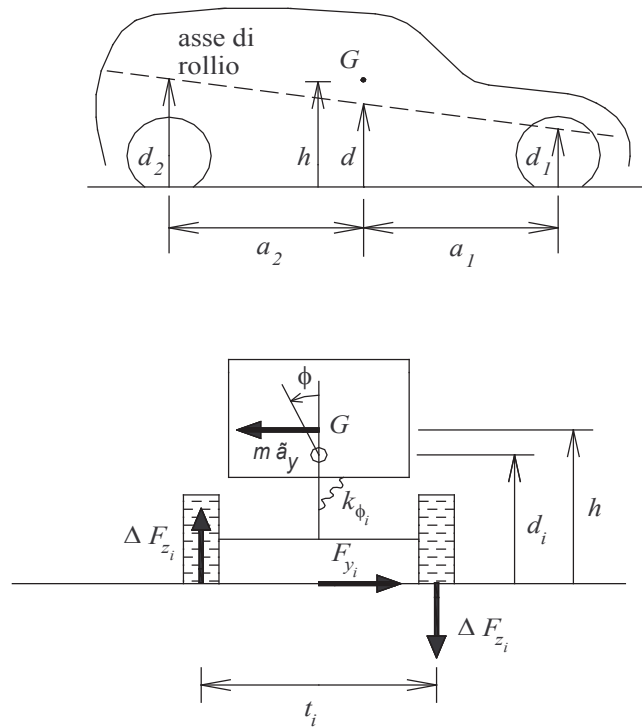


Figura 2.4: Vista laterale e frontale del modello a tre corpi di un veicolo.

in cui g è l'accelerazione di gravità. Pertanto, durante il moto in curva, ci sarà un aumento di carico verticale sulla ruota esterna che sarà compensato da una diminuzione di carico della stessa entità sulla ruota interna dello stesso assale. Verrà indicato con ΔF_{z_1} il trasferimento di carico sull'assale anteriore e con ΔF_{z_2} il trasferimento di carico sull'assale posteriore (figura 2.4).

Supponendo che l'asse di rollio si poco inclinato, l'equilibrio alla rota-

zione della massa sospesa attorno all'asse è

$$m\tilde{a}_y(h-d) - k_\phi\phi = 0, \quad (2.17)$$

da cui è possibile ricavare il rollio della massa sospesa in condizioni stazionarie

$$\phi = m\tilde{a}_y \frac{h-d}{k_\phi}. \quad (2.18)$$

Infine, per l'equilibrio di ciascun assale rispetto all'asse di rollio si ha

$$F_{y_1}d_1 - \Delta F_{z_1}t_1 + k_{\phi_1}\phi = 0, \quad (2.19)$$

$$F_{y_2}d_2 - \Delta F_{z_2}t_2 + k_{\phi_2}\phi = 0, \quad (2.20)$$

dove, le forze laterali F_{y_1} e F_{y_2} esercitate globalmente da ciascuna assale in condizioni stazionarie, possono essere determinate dal sistema di equazioni (2.6):

$$F_{y_1} = m\tilde{a}_y \frac{a_2}{l} - \frac{M_{z_2}}{l}, \quad F_{y_2} = m\tilde{a}_y \frac{a_1}{l} + \frac{M_{z_2}}{l}, \quad (2.21)$$

che sostituite nella (2.19) e nella (2.20) permettono di ricavare i trasferimenti di carico:

$$\begin{aligned} \Delta F_{z_1} &= mB_1\tilde{a}_y - \frac{M_{z_2}}{lt_1}d_1 = mB_1\tilde{a}_y - \frac{F_{x_{22}} - F_{x_{21}}}{2lt_1}t_2d_1, \\ \Delta F_{z_2} &= mB_2\tilde{a}_y + \frac{M_{z_2}}{lt_2}d_2 = mB_2\tilde{a}_y + \frac{F_{x_{22}} - F_{x_{21}}}{2l}d_2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

dove le costanti B_1 e B_2 sono date da

$$B_1 = \frac{1}{t_1} \left(\frac{a_2}{l}d_1 + \frac{k_{\phi_1}}{k_\phi}(h-d) \right), \quad B_2 = \frac{1}{t_2} \left(\frac{a_1}{l}d_2 + \frac{k_{\phi_2}}{k_\phi}(h-d) \right). \quad (2.23)$$

Le formule (2.22) forniscono i trasferimenti di carico in curva per l'anteriore ed il posteriore in condizioni stazionarie. Nonostante ciò, le stesse relazioni vengono usate per semplicità anche in condizioni non stazionarie: l'errore commesso è trascurabile se il modello viene usato per analizzare manovre senza brusche variazioni di stato.

Senza entrare nei dettagli, se tutte le equazioni presentate precedentemente vengono messe a sistema in modo opportuno (le equazioni di equilibrio (2.6), le equazioni costitutive (2.9), le equazioni di congruenza (2.14), i trasferimenti di carico (2.22)) è possibile calcolare per via numerica la soluzione $(u(t), v(t), r(t))$. Rispetto al modello monotraccia le sole differenze (ma sostanziali) sono la presenza del momento M_{z_2} nelle equazioni di equilibrio (2.6) e nei trasferimenti di carico (2.22) e il fatto di aver considerato l'influenza degli scorrimenti longitudinali σ_x nelle equazioni costitutive dei pneumatici (cosa che generalmente viene trascurata nel modello monotraccia).

2.4 Comportamento stazionario in curva

Per studiare il sottosterzo del veicolo con differenziale bloccato, occorre analizzare i punti di equilibrio del sistema e quindi è necessario mettersi in condizioni stazionarie annullando le derivate presenti nelle equazioni di equilibrio ($\dot{u} = \dot{v} = \dot{r} = 0$). In tali condizioni, quest'ultime possono essere riscritte nel seguente modo compatto:

$$\begin{cases} f_1(u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = mvr + F_{x_2} - F_{y_1}\delta - F_a = 0, \\ f_2(u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = -mur + F_{y_1} + F_{y_2} = 0, \\ f_3(u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = F_{y_1}a_1 - F_{y_2}a_2 + (F_{x_{22}} - F_{x_{21}})t_2/2 = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Infatti, se si sostituiscono le espressioni degli scorrimenti (2.14) nelle equazioni costitutive (2.9), le forze longitudinali e laterali risultano nel complesso funzioni di $u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}$ e ΔF_{z_2} :

$$\begin{aligned} F_{y_{11}} &= F_{y_{11}}(u, v, r, \delta, \Delta F_{z_1}), & F_{y_{12}} &= F_{y_{12}}(u, v, r, \delta, \Delta F_{z_1}), \\ F_{y_{21}} &= F_{y_{21}}(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_2}), & F_{y_{22}} &= F_{y_{22}}(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_2}), \\ F_{x_{21}} &= F_{x_{21}}(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_2}), & F_{x_{22}} &= F_{x_{22}}(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_2}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Alle (2.24) vanno aggiunte le equazioni dei trasferimenti di carico laterali

$$\begin{cases} f_4(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = -\Delta F_{z_1} + mB_1ur - \frac{F_{x_{22}} - F_{x_{21}}}{2lt_1}t_2d_1 = 0, \\ f_5(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_2}) = -\Delta F_{z_2} + mB_2ur + \frac{F_{x_{22}} - F_{x_{21}}}{2l}d_2 = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

In sostanza, in condizioni stazionarie sono state ottenute cinque equazioni algebriche nelle sette variabili $u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}$ e ΔF_{z_2} , che possono essere ricapitolate nel seguente sistema:

$$\begin{cases} f_1(u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = 0, \\ f_2(u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = 0, \\ f_3(u, v, r, \chi, \delta, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = 0, \\ f_4(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_1}, \Delta F_{z_2}) = 0, \\ f_5(u, v, r, \chi, \Delta F_{z_2}) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Una volta che due delle sette variabili vengono assegnate, il sistema precedente può essere risolto nelle altre cinque. Ovviamente, data la forte non linearità delle equazioni, solo una risoluzione per via numerica è possibile.

Ad esempio, se si vuole ottenere il diagramma di maneggevolezza per una manovra a velocità costante, si assegna la velocità desiderata e si va a variare l'angolo di sterzo δ all'interno di un determinato range. Quindi, per ogni coppia (u, δ) assegnata si risolve numericamente il sistema (2.27). A questo punto, si può rappresentare l'accelerazione laterale a regime \tilde{a}_y in funzione della differenza $\delta - l/R$, ricordandosi che $\tilde{a}_y = ur$ e che $R = u/r$. La stessa tecnica può essere utilizzata se si vogliono trovare i diagrammi di maneggevolezza in corrispondenza di manovre ad angolo di sterzo costante o a raggio costante. Si ricorda che nel caso del modello monotraccia, la curva di maneggevolezza rimane sempre la stessa al variare della manovra (figura 2.4). Nel seguito verranno, invece, esposti i risultati di ciò che si ottiene nel caso del modello di veicolo con differenziale bloccato.

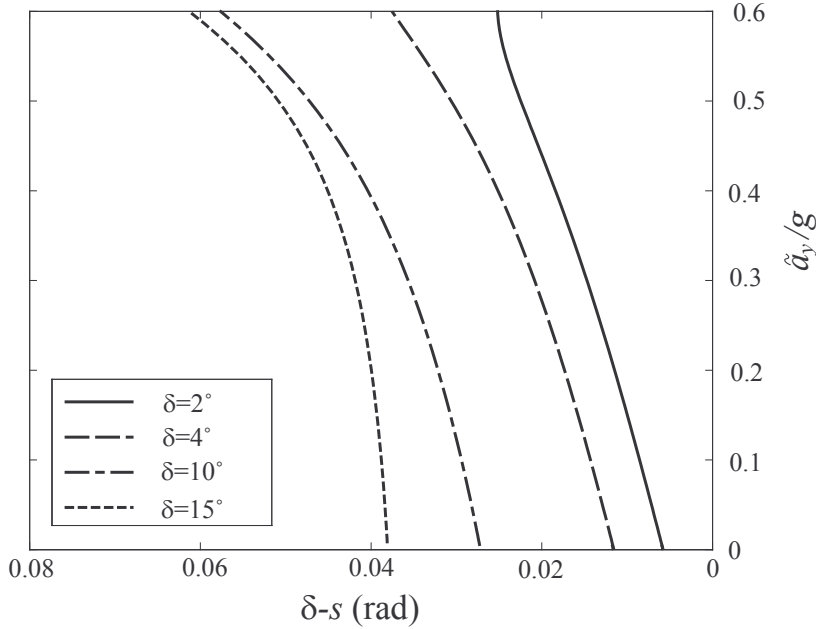


Figura 2.5: Diagrammi di maneggevolezza per un veicolo con differenziale bloccato e manovre ad angolo di sterzo costante.

2.4.1 Diagrammi di maneggevolezza

Nelle figure che vanno dalla 2.5 alla 2.7, sono stati rappresentati i diagrammi di maneggevolezza relativi ad un veicolo con differenziale bloccato e trazione posteriore. Sono state prese in considerazione manovre ad angolo di sterzo costante (figura 2.5), a velocità costante (figura 2.6) e a raggio costante (figura 2.7). Si può notare che si ottengono curve di maneggevolezza diverse al variare della tipologia di manovra, e per la stessa tipologia al variare del parametro che la caratterizza. Lo stesso risultato può essere ottenuto se si analizzano altri tipi di veicoli, come ad esempio veicoli dove ci sono

forti effetti deportanti (autovetture da corsa) o veicoli con più di due assali [25]. Da questo punto di vista, sembra che i risultati ottenuti in questo capitolo rappresentino la generalità dei casi e che l'idea di un'unica curva di maneggevolezza capace di descrivere l'insieme delle condizioni di equilibrio vale solo per il modello monotraccia, che viene, dunque, a rappresentare un caso molto speciale.

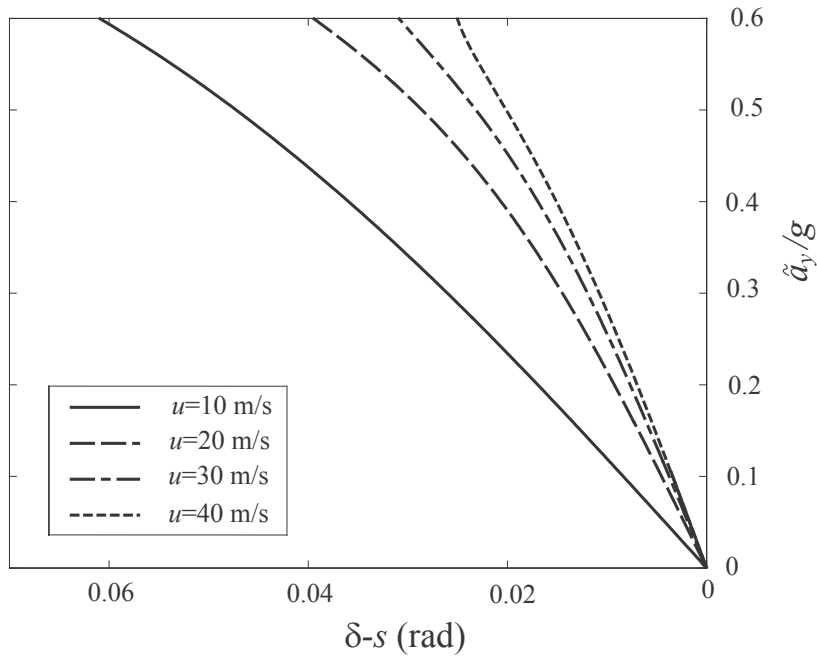


Figura 2.6: Diagrammi di maneggevolezza per un veicolo con differenziale bloccato e manovre a velocità costante.

In aggiunta, la stessa idea di un certo gradiente di sottosterzo associato ad ogni livello di accelerazione laterale (figura 2.2), tipica della teoria classica, deve essere abbandonata o quanto meno criticata. Infatti, si può

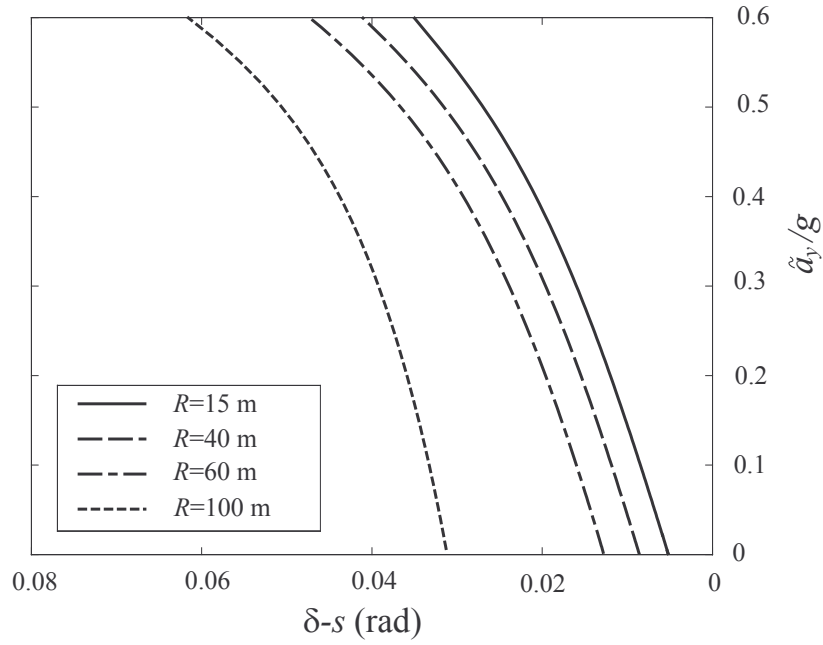


Figura 2.7: Diagrammi di maneggevolezza per un veicolo con differenziale bloccato e manovre a raggio costante.

notare dalle figure precedenti che ad ogni livello di accelerazione laterale, il gradiente di sottosterzo ha un valore diverso a seconda della curva di maneggevolezza considerata.

Capitolo 3

Dal diagramma alla superficie di maneggevolezza

3.1 Forma generale dei modelli di veicolo

Un approccio all'analisi delle condizioni di regime che sia indipendente dalla tipologia di veicolo analizzata, permette di interpretare in modo più sistematico i risultati del capitolo precedente e di inquadrarli all'interno di un teoria più generale.

Infatti, spesso per valutare le prestazioni di un veicolo è necessario sviluppare un modello che lo rappresenti e, quasi sempre, si ha a che fare con sistemi dinamici governati dalla seguente equazione differenziale:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t); \mathbf{p}(t)), \quad (3.1)$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore degli stati e $\mathbf{p}(t)$ è il vettore dei parametri di controllo.

Di solito, nella dinamica del veicolo $\mathbf{p}(t)$ è un vettore di due componenti

$$\mathbf{p}(t) = (u(t), \delta(t)), \quad (3.2)$$

dove δ e u sono, rispettivamente l'angolo di sterzo e la velocità di avanzamento.

Al contrario, il tipo ed il numero delle componenti del vettore degli stati \mathbf{x} dipende dallo specifico modello. In ogni caso, sembra che le componenti v (velocità laterale del baricentro) ed r (velocità d'imbardata del veicolo) appaiano sempre in tutti i modelli di veicolo [18, 8, 25]. Per esempio, per il modello monotraccia, sostituendo le (2.1) nel sistema (2.2) il vettore \mathbf{x} diviene

$$\mathbf{x}(t) = (v(t), r(t)). \quad (3.3)$$

La funzione \mathbf{f} nell'equazione (3.1) dipende dal tipo di veicolo che si sta analizzando (ad esempio, se si tratta di un veicolo con differenziale aperto o chiuso).

La soluzione stazionaria dell'equazione (3.1), corrispondente a valori costanti del vettore dei parametri (3.2), può essere trovata mettendo il termine $\dot{\mathbf{x}}$ uguale a zero, ossia, risolvendo il seguente sistema di equazioni algebriche:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

dove \mathbf{x} è incognita e \mathbf{p} è assegnata e mantenuta costante. In questo modo si ottengono i punti di equilibrio e, in particolare, la dipendenza della velocità laterale v e della velocità d'imbardata r dai controlli δ e u (che rappresentano, dunque, le due “manopole” attraverso cui il punto di equilibrio può essere variato):

$$\begin{aligned} v &= g(u, \delta), \\ r &= h(u, \delta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Poiché le variabili δ e u possono essere controllate dal pilota (mediante l'angolo volante e la forza motrice), sarebbe possibile ottenere le superfici (3.5) anche per via sperimentale.

3.2 Analisi dell'equilibrio in curva

Per analizzare il comportamento stazionario in curva corrispondente alle funzioni (3.5), è utile calcolare la superficie che rappresenta la differenza

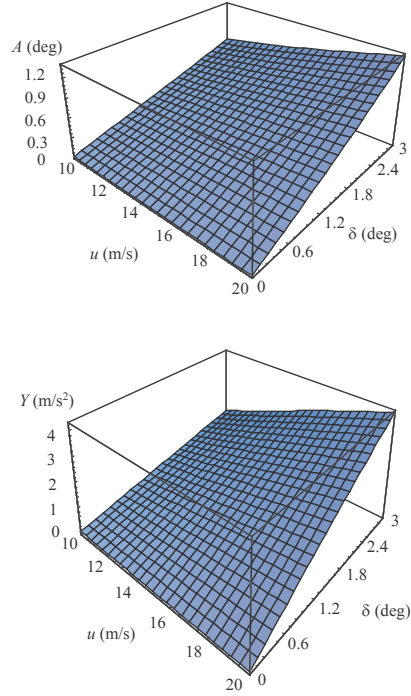


Figura 3.1: Superfici di maneggevolezza $A(u, \delta)$ e $Y(u, \delta)$ per un veicolo con differenziale bloccato.

tra l'angolo di sterzo δ e l'angolo di *Ackermann* $s = l/R$

$$\delta - s = \delta - \frac{l}{R} = \delta - l \frac{r}{u} = \delta - l \frac{h(u, \delta)}{u} = A(u, \delta), \quad (3.6)$$

e la superficie che rappresenta l'accelerazione laterale \tilde{a}_y

$$\tilde{a}_y = u r = u h(u, \delta) = Y(u, \delta). \quad (3.7)$$

Le funzioni $A(u, \delta)$ and $Y(u, \delta)$, ottenute sostituendo solo la seconda delle equazioni (3.5), sono strettamente legate al concetto di sottoster-

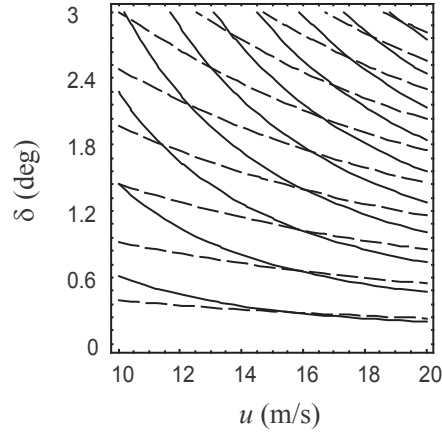


Figura 3.2: Curve di livello per le superfici di maneggevolezza $A(u, \delta)$ (linee tratteggiate) e $Y(u, \delta)$ (linee continue) per un veicolo con differenziale bloccato.

zo. Per tale motivo, queste due superfici rappresentano le superfici di maneggevolezza (*handling surfaces*) A e Y del veicolo.

Per il veicolo con differenziale bloccato, presentato nel capitolo precedente, le superfici di maneggevolezza $A(u, \delta)$ e $Y(u, \delta)$ sono riportate in figura 3.1. Le corrispondenti curve di livello sono mostrate in figura 3.2. Si noti che le curve di livello delle funzioni $A(u, \delta)$ non coincidono con le curve di livello della funzione $Y(u, \delta)$.

Ci si propone, ora, di valutare il gradiente di sottosterzo corrispondente ad un data condizione di equilibrio, rappresentata da un punto nel piano (u, δ) . Come si è visto per il modello monotraccia, nella dinamica del veicolo classica il gradiente di sottosterzo K è semplicemente definito dalla seguente derivata [15]:

$$K = \frac{d}{d\tilde{a}_y} \left(\delta - \frac{l}{R} \right). \quad (3.8)$$

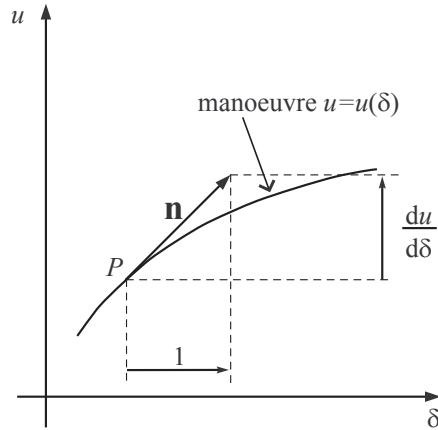


Figura 3.3: Definizione del vettore \mathbf{n} .

Per calcolare la derivata (3.8), è necessario assegnare una specifica manovra, il che vuol dire considerare la velocità di avanzamento come una funzione dell'angolo di sterzo, cioè $u = u(\delta)$, o viceversa l'angolo di sterzo come una funzione della velocità di avanzamento, cioè $\delta = \delta(u)$. Al momento, si supponga di assegnare una manovra considerando la funzione $u = u(\delta)$ (figura 3.3). Lungo la manovra assegnata, la differenza A e l'accelerazione laterale a regime Y divengono funzioni del solo angolo di sterzo:

$$\begin{cases} A_m = A(u(\delta), \delta) = A_m(\delta), \\ Y_m = Y(u(\delta), \delta) = Y_m(\delta). \end{cases} \quad (3.9)$$

Le relazioni (3.9) possono essere interpretate come le equazioni parametriche di una curva sul piano (Y_m, A_m) , dove l'angolo di sterzo δ è il parametro. Tale curva rappresenta la curva di maneggevolezza per la particolare manovra considerata. Poiché A_m può essere considerata (almeno localmente) come una funzione di Y_m , può essere definito il gradiente di sottosterzo K_m

lungo la manovra assegnata in questo modo

$$K_m = \frac{dA_m}{dY_m}. \quad (3.10)$$

A questo punto, tenendo presente che

$$\begin{aligned} \frac{dA_m}{d\delta} &= \frac{\partial A}{\partial u} \frac{du}{d\delta} + \frac{\partial A}{\partial \delta}, \\ \frac{dY_m}{d\delta} &= \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{du}{d\delta} + \frac{\partial Y}{\partial \delta}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

la (3.10) può essere riscritta così

$$K_m = \frac{dA_m}{dY_m} = \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \cdot \left(\frac{du}{d\delta}, 1 \right)}{\left(\frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial \delta} \right) \cdot \left(\frac{du}{d\delta}, 1 \right)} = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}}. \quad (3.12)$$

Nella precedente espressione, il vettore

$$\mathbf{e} = \left(\frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) = \mathbf{e}(u, \delta) \quad (3.13)$$

è il gradiente della funzione $A(u, \delta)$, mentre il vettore

$$\mathbf{f} = \left(\frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial \delta} \right) = \mathbf{f}(u, \delta) \quad (3.14)$$

è il gradiente della funzione $Y(u, \delta)$. Infine, il vettore

$$\mathbf{n} = \left(\frac{du}{d\delta}, 1 \right) \quad (3.15)$$

è tangente alla curva che rappresenta la manovra $u = u(\delta)$ al generico punto P (vedere figura 3.3).

Si analizzi l'espressione (3.12): in essa compaiono dei vettori che dipendono dalle caratteristiche del veicolo e dei vettori che dipendono dalla manovra. Infatti il vettore \mathbf{n} dipende solo dalla particolare manovra assegnata, mentre i vettori \mathbf{e} e \mathbf{f} dipendono solo dalle caratteristiche del veicolo (cioè da come sono fatte le superfici di maneggevolezza) e dal punto di equilibrio che si sta considerando nel piano (u, δ) .

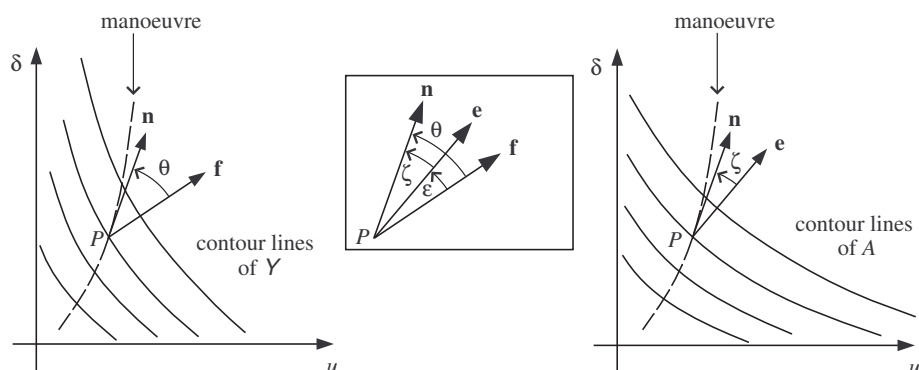


Figura 3.4: Interpretazione geometrica del gradiente di sottosterzo così come definito nell'equazione (3.12).

3.3 Interpretazione geometrica del gradiente di sottosterzo

Alla definizione (3.12) di K_m può essere associato un semplice significato geometrico. Si consideri, infatti, una generica condizione di equilibrio rappresentata da un punto P sul piano (u, δ) . Per definizione, i gradienti \mathbf{e} ed \mathbf{f} sono vettori perpendicolari rispettivamente alle linee di livello di $A(u, \delta)$ e di $Y(u, \delta)$ passanti per il punto P , come si fa vedere nella figura 3.4.

Osservando la formula (3.12), si ha sottosterzo se i prodotti scalari $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}$ e $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ hanno lo stesso segno. In questo caso, la differenza $A = \delta - s$ e l'accelerazione laterale Y aumentano o diminuiscono entrambe lungo la curva che rappresenta la manovra. Al contrario, si ha sovrasterzo se i prodotti scalari hanno segno diverso, il che vuol dire che A diminuisce (aumenta) e Y aumenta (diminuisce) lungo la manovra. Infine, il comportamento è neutro se $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 0$, cioè se la curva che rappresenta la manovra è tangente alla linea di livello della superficie A che passa per il punto P .

Per continuare ad approfondire l'effetto della manovra sul gradiente di

sottosterzo K_m , conviene riscrivere l'equazione (3.12) in una forma ancora differente (figura 3.4),

$$K_m = \frac{|\mathbf{e}| |\mathbf{n}| \cos \zeta}{|\mathbf{f}| |\mathbf{n}| \cos \theta} = \frac{|\mathbf{e}| \cos(\theta - \varepsilon)}{|\mathbf{f}| \cos \theta} = \frac{|\mathbf{e}|}{|\mathbf{f}|} g(\varepsilon, \theta), \quad (3.16)$$

dove

$$g(\varepsilon, \theta) = \frac{\cos(\theta - \varepsilon)}{\cos \theta} = \cos \varepsilon + \tan \theta \sin \varepsilon. \quad (3.17)$$

Gli angoli θ , ε e ζ sono definiti con il loro segno positivo in figura 3.4. Una volta assegnato il veicolo, il termine $|\mathbf{e}| / |\mathbf{f}|$ dipende solo dal punto di equilibrio che si sta considerando. Al contrario, il termine $g(\varepsilon, \theta)$ dipende sia dal punto di equilibrio che dalla manovra. Infatti, l'angolo ε tra \mathbf{f} e \mathbf{e} è una caratteristica del veicolo, mentre l'angolo θ tra \mathbf{f} and \mathbf{n} dipende sia dal veicolo che dalla manovra. Quindi, sulla base della formula (3.17) è possibile dare la seguente regola generale: assegnato un generico punto di equilibrio sul piano (u, δ) , se $\varepsilon = 0$ o $\varepsilon = \pi$ allora il gradiente di sottosterzo non dipende dalla manovra; al contrario, se $\varepsilon \neq (0, \pi)$, a manovre differenti corrispondono valori differenti del gradiente.

Dunque, il gradiente di sottosterzo è unico solo se i vettori \mathbf{e} e \mathbf{f} sono paralleli. Ciò vuol dire che le linee di livello delle superfici A e Y sono tangenti nel punto P considerato. Se tutte le linee di livello della superficie A coincidono con quelle della superficie Y allora la precedente proprietà si verifica in corrispondenza di tutti i punti di equilibrio. Inoltre, in questo caso la curva di maneggevolezza non dipende dalla manovra, ma è unica. Al contrario, se le linee di livello non coincidono, curve di maneggevolezza diverse vengono ottenute per diverse manovre.

Come esempio, si analizzino le figure 3.5 e 3.6, dove due manovre con velocità costante u_1 e u_2 vengono assegnate. Inoltre, vengono presi in considerazione due differenti veicoli. Per il veicolo corrispondente alla figura 3.5 ogni curva di livello di A coincide con una curva di livello di Y e, in questo caso, si intuisce che la curva di maneggevolezza è unica. Al contrario, per il veicolo corrispondente alla figura 3.6 tale proprietà di coincidenza non è verificata e, di conseguenza, si ottengono due diverse curve di maneggevolezza.

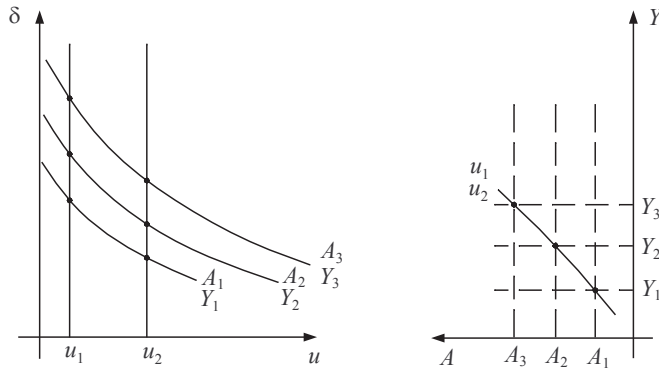


Figura 3.5: Particolare struttura delle linee di livello delle superfici A e Y che permette di ottenere un unico diagramma di maneggevolezza.

Per il veicolo con differenziale bloccato analizzato nel capitolo precedente le linee di livello delle superfici A e Y non coincidono (figura 3.2). Quindi, in questo caso la curva di maneggevolezza e il gradiente di sottosterzo dipendono dalla manovra.

3.4 Caso del modello monotraccia

Sulla base delle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti, si rianalizza il modello monotraccia.

Per quel modello, è ben noto che in condizioni stazionarie, le forze laterali di ogni assale sono legate all'accelerazione laterale dalle seguenti relazioni:

$$F_{y_1} = \frac{ma_2}{l} \tilde{a}_y = \frac{ma_2}{l} Y(u, \delta),$$

$$F_{y_2} = \frac{ma_1}{l} \tilde{a}_y = \frac{ma_1}{l} Y(u, \delta),$$
(3.18)

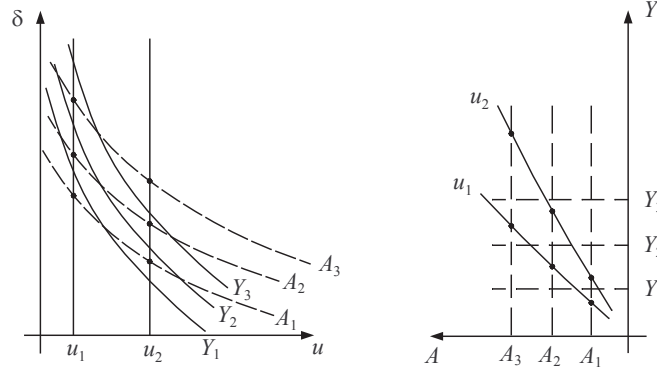


Figura 3.6: Struttura delle linee di livello delle superfici A e Y che fa sì che il diagramma di maneggevolezza dipenda dalla manovra.

dove si ricorda che le F_{y_i} dipendono dai rispettivi angoli di deriva α_1 e α_2 , che sono dati dalle relazioni (2.1). Se nelle (2.1) si sostituiscono le funzioni (3.5), si ottengono gli angoli di deriva in condizioni di regime come funzioni di u e δ :

$$\begin{aligned}\alpha_{1P} &= \delta - \frac{g(u, \delta) + h(u, \delta) a_1}{u}, \\ \alpha_{2P} &= -\frac{g(u, \delta) - h(u, \delta) a_2}{u}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Si introducano, ora, le rigidzze di deriva generalizzate

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \left. \frac{dF_{y_1}}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1 = \alpha_{1P}}, \\ \Phi_2 &= \left. \frac{dF_{y_2}}{d\alpha_2} \right|_{\alpha_2 = \alpha_{2P}},\end{aligned}\quad (3.20)$$

che rappresentano le pendenze delle caratteristiche effettive degli assali in corrispondenza degli angoli di deriva a regime α_{1P} e α_{2P} . Sulla base delle

precedenti definizioni, è possibile ottenere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{y_1}}{\partial u} &= \frac{dF_{y_1}}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \Phi_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \frac{ma_2}{l} \frac{\partial Y}{\partial u}, & \Rightarrow \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} &= \frac{ma_2}{l\Phi_1} \frac{\partial Y}{\partial u}, \\
\frac{\partial F_{y_2}}{\partial u} &= \frac{dF_{y_2}}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \Phi_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \frac{ma_1}{l} \frac{\partial Y}{\partial u}, & \Rightarrow \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} &= \frac{ma_1}{l\Phi_2} \frac{\partial Y}{\partial u}, \\
\frac{\partial F_{y_1}}{\partial \delta} &= \frac{dF_{y_1}}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} = \Phi_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} = \frac{ma_2}{l} \frac{\partial Y}{\partial \delta}, & \Rightarrow \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} &= \frac{ma_2}{l\Phi_1} \frac{\partial Y}{\partial \delta}, \\
\frac{\partial F_{y_2}}{\partial \delta} &= \frac{dF_{y_2}}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} = \Phi_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} = \frac{ma_1}{l} \frac{\partial Y}{\partial \delta}, & \Rightarrow \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} &= \frac{ma_1}{l\Phi_2} \frac{\partial Y}{\partial \delta},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

e quindi, ricordando che $\delta - l/R = \alpha_1 - \alpha_2$, si ottengono le componenti del gradiente della superficie A :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial u} &= \frac{\partial(\alpha_1 - \alpha_2)}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{m}{l} \frac{\Phi_2 a_2 - \Phi_1 a_1}{\Phi_1 \Phi_2}, \\
\frac{\partial A}{\partial \delta} &= \frac{\partial(\alpha_1 - \alpha_2)}{\partial \delta} = \frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{m}{l} \frac{\Phi_2 a_2 - \Phi_1 a_1}{\Phi_1 \Phi_2}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Le precedenti, esprimono il fatto che i vettori \mathbf{e} e \mathbf{f} definiti nella sezione precedente, sono paralleli in ogni punto di equilibrio. Infatti, esse possono essere riscritte in questo modo più compatto:

$$\mathbf{e} = \frac{m}{l} \frac{\Phi_2 a_2 - \Phi_1 a_1}{\Phi_1 \Phi_2} \mathbf{f}. \tag{3.23}$$

Quanto ottenuto dimostra che per il modello monotraccia le curve di livello di A coincidono con quelle di Y e quindi si ha l'indipendenza del diagramma di maneggevolezza e del gradiente di sottosterzo dalla manovra. Questi erano risultati già ben noti, ma ora sono stati inquadrati all'interno di una

visione più generale, che dimostra come il modello monotraccia sia un caso molto particolare che non rappresenta la generalità dei casi.

Infine si osserva che il gradiente di sottosterzo è proprio il coefficiente di proporzionalità che esiste tra i vettori \mathbf{e} ed \mathbf{f} . Infatti, sfruttando le relazioni (3.12) e (3.23), si ha:

$$K_m = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}} = \frac{m}{l} \frac{\Phi_2 a_2 - \Phi_1 a_1}{\Phi_1 \Phi_2} \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}} = \frac{m}{l} \frac{\Phi_2 a_2 - \Phi_1 a_1}{\Phi_1 \Phi_2}, \quad (3.24)$$

che è l'espressione classica del gradiente di sottosterzo per il modello monotraccia.

3.5 Analisi delle condizioni stazionarie mediante una sola superficie

I risultati ottenuti nelle sezioni precedenti, possono essere ritrovati in modo più compatto e forse anche più chiaro se si introduce l'angolo di *Ackermann* $s = l/R$ come funzione di u e δ , insieme con le superfici Y and A

$$\begin{cases} s = \frac{l}{R} = l \frac{r}{u} = l \frac{h(u, \delta)}{u} = S(u, \delta), \\ \delta - s = A(u, \delta), \\ \tilde{a}_y = Y(u, \delta). \end{cases} \quad (3.25)$$

Le relazioni (3.25) possono essere interpretate come le equazioni parametriche di una superficie nello spazio (A, S, Y) , usando come parametri la velocità di avanzamento u e l'angolo di sterzo δ . In questo modo, la differenza $\delta - l/R$ sarebbe funzione dell'accelerazione laterale e dell'angolo di *Ackermann*. Ciò definisce la nuova *handling surface* $H(\tilde{a}_y, s)$

$$\delta - \frac{l}{R} = \delta - s = H(\tilde{a}_y, s). \quad (3.26)$$

Il risultato appena ottenuto mostra che la differenza $\delta - l/R$ è in generale funzione di due variabili: l'accelerazione laterale \tilde{a}_y ed un'altra variabile

che caratterizza il moto del veicolo, in questo caso l'angolo di *Ackermann* l/R . Da questo punto di vista, il modello monotraccia rappresenta un caso particolare di (3.26), in cui H dipende solo dall'accelerazione laterale. Per esempio, la figura 3.7 fa vedere la superficie di maneggevolezza $H(\tilde{a}_y, s)$ e le sue linee di livello per il veicolo con differenziale bloccato presentato nel capitolo precedente.

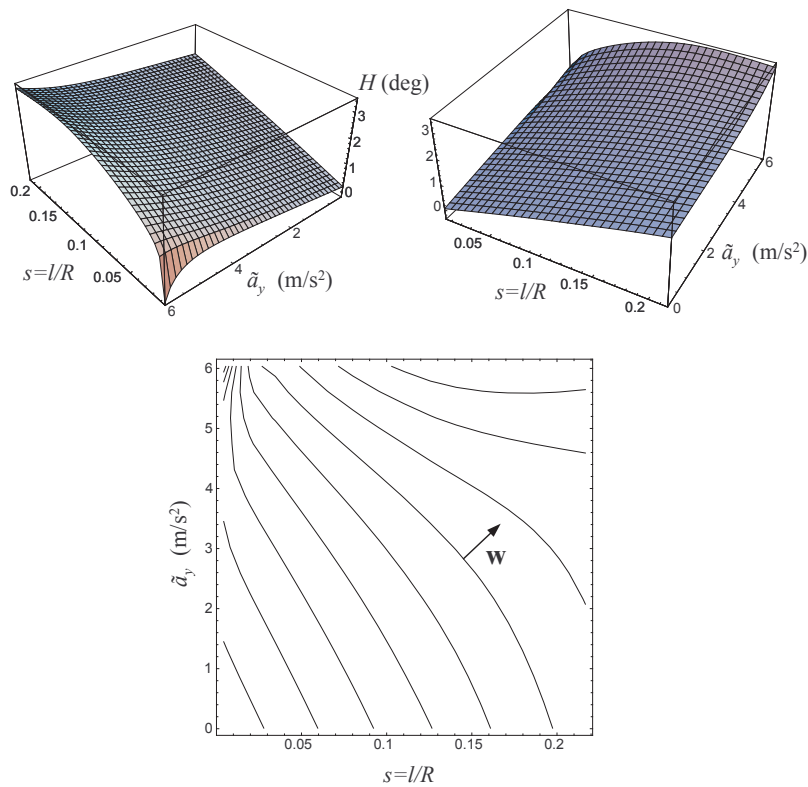


Figura 3.7: Handling surface $H(\tilde{a}_y, s)$ (da due punti di vista) e le sue linee di livello per un veicolo con differenziale bloccato.

Poiché la differenza $\delta - l/R$ dipende da una seconda variabile oltre che dall'accelerazione laterale, la curva di maneggevolezza non è unica, ma dipende dalla manovra eseguita. Infatti, una volta che una manovra $u(\delta)$ viene assegnata, si può vedere che si instaura un legame tra l'angolo di *Ackermann* s e l'accelerazione laterale \tilde{a}_y :

$$\begin{cases} s = S(u(\delta), \delta) = S_m(\delta), \\ \tilde{a}_y = Y(u(\delta), \delta) = Y_m(\delta). \end{cases} \Rightarrow s = s(\tilde{a}_y). \quad (3.27)$$

In questo modo, la corrispondente curva di maneggevolezza H_m viene ottenuta semplicemente sostituendo la (3.27) nella (3.26)

$$H_m = H(\tilde{a}_y, s(\tilde{a}_y)) = H_m(\tilde{a}_y). \quad (3.28)$$

Dall'espressione (3.28) è chiaro che la curva di maneggevolezza H_m dipende dalla specifica manovra, mentre è unica se la superficie H dipende solo dall'accelerazione laterale \tilde{a}_y , come nel modello monotraccia. Per esempio, la figura 3.8 mostra le diverse curve di maneggevolezza (visibili sulla sinistra) ottenute dalla superficie di figura 3.7 con manovre eseguite a velocità u costante. Le curve sono le stesse di quelle rappresentate in figura 2.6 ed ottenute per altra via. In questo esempio, una manovra con velocità costante è data dalla seguente relazione:

$$s = \frac{l}{u^2} \tilde{a}_y. \quad (3.29)$$

Allo stesso modo, possono essere ottenute le curve di maneggevolezza corrispondenti a manovre eseguite a raggio R costante (figura 3.9).

Ancora una volta si è mostrato che il concetto di una singola curva di maneggevolezza, tipica della teoria classica, è inadeguato per alcuni modelli di veicolo e dovrebbe essere sostituito con il concetto della superficie di maneggevolezza, cioè del diagramma tridimensionale della funzione $H = H(\tilde{a}_y, s)$.

Una volta che una manovra è stata assegnata, è facile calcolare il gradiente di sottosterzo K_m , come già fatto nella sezione precedente:

$$K_m = \frac{dH_m}{d\tilde{a}_y} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}. \quad (3.30)$$

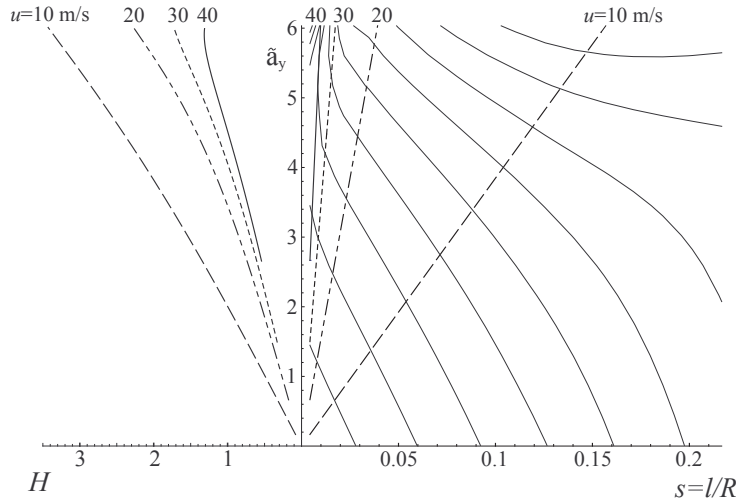


Figura 3.8: Curve di maneggevolezza (sulla sinistra) ottenute dalla superficie di figura 3.7 con manovre a velocità costante (H in gradi, \tilde{a}_y in m/s^2)

Nell'espressione appena trovata, il vettore

$$\mathbf{w} = \text{grad } H = \left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{a}_y}, \frac{\partial H}{\partial s} \right) = \mathbf{w}(\tilde{a}_y, s) \quad (3.31)$$

è il gradiente della funzione $H(\tilde{a}_y, s)$ e dipende solo da come è fatto il veicolo e dal punto di equilibrio considerato sul piano (\tilde{a}_y, s) (figura 3.10). Al contrario, il vettore

$$\mathbf{t} = \left(1, \frac{ds}{d\tilde{a}_y} \right) = (1, q) \quad (3.32)$$

è tangente alla curva che rappresenta la manovra $s = s(\tilde{a}_y)$ (figura 3.11). Il valore di q dipende dalla manovra: ad esempio, $q = q_R = 0$ per una

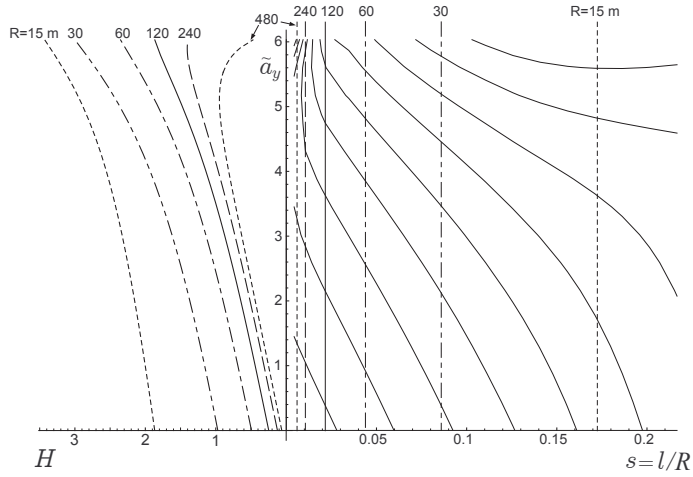


Figura 3.9: Curve di maneggevolezza (sulla sinistra) ottenute dalla superficie di figura 3.7 con manovre a raggio costante (H in gradi, \tilde{a}_y in m/s^2)

manovra a raggio costante e $q = q_u = l/u^2$ per una manovra a velocità costante.

L'espressione (3.30) del gradiente K_m è molto più compatta della (3.12) perché l'influenza delle caratteristiche del veicolo viene sintetizzata nell'unico vettore \mathbf{w} , mentre l'influenza della manovra viene sintetizzata nell'unico vettore \mathbf{t} . Ciò dimostra che, in generale, una volta che una condizione di equilibrio viene assegnata il valore del gradiente non è unico, ma può assumere qualsiasi valore a seconda della manovra eseguita. La figura 3.11 fa vedere come, a seconda dell'angolo esistente tra \mathbf{w} e \mathbf{t} si può avere comportamento sottosterzante (caso a), neutro (caso b), sovrasterzante (caso c) per una stessa condizione di equilibrio. Al limite, si potrebbe avere comportamento sempre neutro se la manovra coincide con una curva di livello.

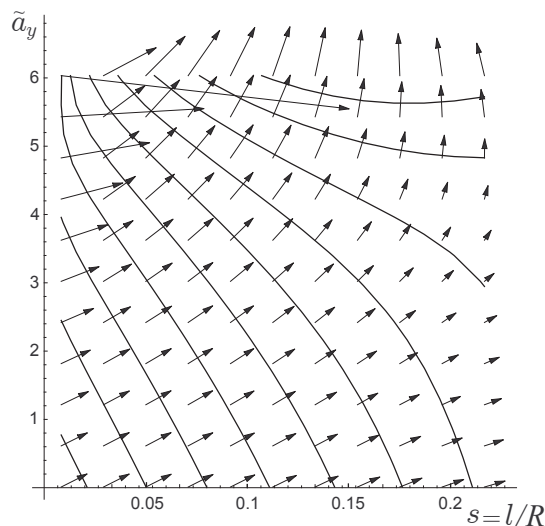


Figura 3.10: Curve di livello e vettori \mathbf{w} per una la superficie di figura 3.7 (\tilde{a}_y in m/s^2). La lunghezza dei vettori è proporzionale al loro modulo.

La conseguenza di tutto ciò è che la definizione classica del gradiente di sottosterzo non può essere uno standard per definire il comportamento direzionale di qualsiasi veicolo. Si potrebbe proporre di assegnare il nome “gradiente di sottosterzo” al vettore \mathbf{w} , ossia al gradiente della superficie H . Infatti, \mathbf{w} è unico per un dato punto di equilibrio e dipende solo dalle caratteristiche costruttive del veicolo.

Ovviamente, K_m è indipendente dalla manovra se la superficie di maneggevolezza dipende solo dall’accelerazione laterale \tilde{a}_y . Infatti, in tale situazione, il gradiente \mathbf{w} diviene

$$\mathbf{w} = \left(\frac{dH}{d\tilde{a}_y}, 0 \right) = (K, 0), \quad (3.33)$$

cioè \mathbf{w} è parallelo all’asse \tilde{a}_y . Come ben noto, questo è il caso del mo-

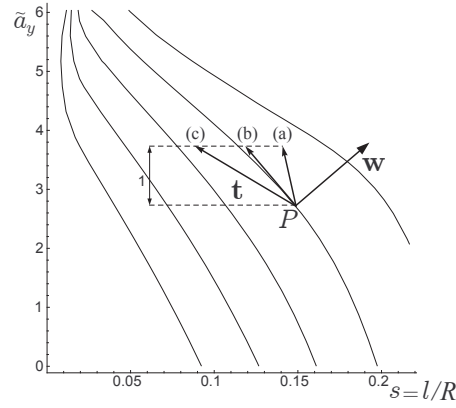


Figura 3.11: Manovre che danno un comportamento sottosterzante (a), neutro (b), sovrasterzante (c) per uno stesso veicolo ed una stessa condizione di equilibrio (\tilde{a}_y in m/s^2).

dello monotraccia [18], per il quale la superficie di maneggevolezza diviene semplicemente un cilindro le cui direttrici sono parallele all'asse s (figura 3.12). Questo dimostra come la teoria presentata non distrugge i classici risultati della dinamica del veicolo, ma li integra in modo quasi naturale e li generalizza in un visione più ampia.

3.6 Come misurare il gradiente \mathbf{w}

Per misurare sperimentalmente il vettore \mathbf{w} in corrispondenza di un punto del piano (\tilde{a}_y, s) sarebbero sufficienti due diverse manovre, per esempio a raggio R costante ed a velocità u costante che passano per il punto considerato.

Infatti, siano $\mathbf{t}_R = (1, q_R) = (1, 0)$ e $\mathbf{t}_u = (1, q_u) = (1, l/u^2)$ le direzioni di due manovre rispettivamente a raggio costante ed a velocità costante, e siano K_R e K_u i corrispondenti valori misurati di K_m , cioè della pendenza

delle corrispondenti curve di maneggevolezza. Inoltre, sia

$$\mathbf{w} = (w_y, w_x) \quad (3.34)$$

il gradiente da determinare nel punto considerato. Sapendo che devono valere contemporaneamente le seguenti relazioni per la formula (3.30)

$$\begin{cases} w_y + w_x q_R = K_R \\ w_y + w_x q_u = K_u \end{cases} \quad (3.35)$$

si possono ricavare facilmente le componenti w_x e w_y :

$$\begin{cases} w_y = K_R \\ w_x = \frac{u^2}{l} (K_u - K_R) \end{cases} \quad (3.36)$$

Questo calcolo può essere fatto utilizzando altre possibili manovre, come, ad esempio, una manovra ad angolo di sterzo δ costante. Infatti, in tal caso

$$q_\delta = -K_\delta \quad (3.37)$$

da cui

$$w_y + w_x q_\delta = w_y - w_x K_\delta = K_\delta \quad (3.38)$$

che fornisce

$$K_\delta = \frac{w_y}{1 + w_x}. \quad (3.39)$$

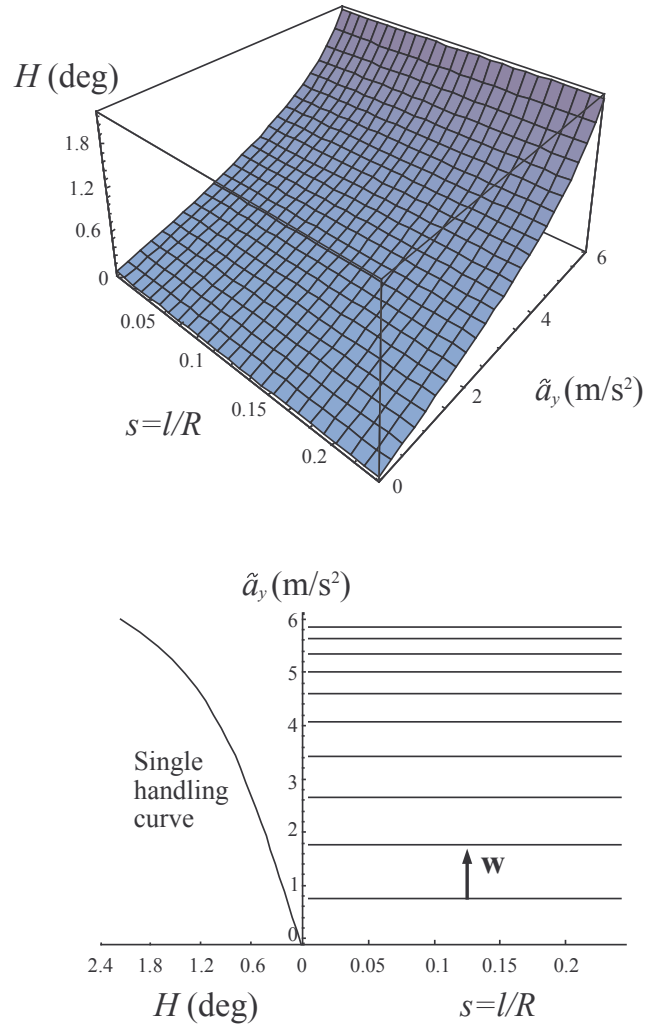


Figura 3.12: Superficie di maneggevolezza, curve di livello e curva di maneggevolezza per il modello monotraccia.

Capitolo 4

Conclusioni e sviluppi futuri

Nella seconda parte della tesi è stata fatta una revisione critica dei classici concetti di diagramma di maneggevolezza e di sottosterzo, che sono alcuni tra i risultati principali della teoria classica della dinamica del veicolo.

Si è visto che essi risultano ben definiti (nel senso dell'unicità) solo per veicoli rappresentabili con il modello monotraccia. Al contrario, per differenti tipologie di veicolo (come, ad esempio, veicoli con differenziale completamente o parzialmente bloccato o veicoli dove non è possibile trascurare gli effetti deportanti) risulta importante il modo con cui viene eseguita la manovra (intesa come successioni di stati di equilibrio) per ottenere il suddetto diagramma. Infatti, sfruttando come esempio il modello di un veicolo con differenziale bloccato (ma se ne potrebbero fare altri), si è visto che a differenti manovre corrispondono differenti diagrammi di maneggevolezza (capitolo secondo). Di conseguenza, anche il concetto di gradiente di sottosterzo, essendo la pendenza della curva di maneggevolezza, perde senso, visto che può assumere qualsiasi valore.

Nel terzo capitolo, partendo da un'analisi delle condizioni di regime che è indipendente dalle caratteristiche costruttive del veicolo stesso, si giunge a dei risultati di carattere più generale che includono, come caso particolare, quelli relativi al modello monotraccia. Infatti, si è trovato che, in generale, per descrivere l'insieme delle condizioni di equilibrio di un veicolo, è possi-

bile usare delle superfici (denominate *superfici di maneggevolezza*), invece che una curva di maneggevolezza. L'idea della superficie di maneggevolezza risulta ben definita, in quanto è unica e dipende solo da come è fatto il veicolo, di cui, in pratica, ne rappresenta l'“impronta”. Inoltre, da essa si possono ottenere tutte le possibili curve di maneggevolezza corrispondenti a diverse manovre.

Rivedendo i risultati del modello monotraccia alla luce di questa nuova idea, si intuisce che anche in quel caso si dovrebbe parlare più correttamente di una superficie, avente la particolarità di essere un cilindro; di conseguenza, è sufficiente conoscere la sua proiezione sul piano $(\delta - s, \tilde{a}_y)$ (figura 3.12). Il fatto che la superficie di maneggevolezza sia un cilindro garantisce l'unicità della curva di maneggevolezza.

La trattazione fatta in questa parte della tesi è di carattere squisitamente teorico e, ad ora, non esiste una campagna di prove sperimentali che evidenzii ciò che viene previsto. Ad ogni modo, sarebbe interessante capire la forma delle superfici al variare della tipologia di veicolo o, magari, come dovrebbe essere fatta affinché il veicolo abbia il comportamento desiderato.

Concludendo, si può dire che l'idea della superficie può benissimo sostituire e generalizzare l'idea della curva di maneggevolezza. La stessa cosa non si può dire circa il gradiente di sottosterzo. Infatti, nel terzo capitolo si è visto che, generalmente, per un dato punto di equilibrio, esso può assumere qualsiasi valore a seconda della manovra: non può, quindi, essere utilizzato come un parametro identificativo del veicolo (a meno che non si faccia riferimento al modello monotraccia). Questo risultato dovrebbe far riflettere su che cosa debba intendersi effettivamente per sottosterzo di un veicolo. Inoltre, si sottolinea che tutta la trattazione è stata fatta analizzando le condizioni di regime, mentre, frequentemente, nel gergo automobilistico sembra che si associ la “sensazione” di sovra-sottosterzo a manovre che avvengono nel non stazionario. Da questo punto di vista, l'indagine per definire correttamente il sovra-sottosterzo dovrebbe spostarsi verso analisi del comportamento non stazionario di un veicolo. In questo caso, la conoscenza delle sole condizioni di equilibrio (o delle superfici di maneggevolezza) potrebbe non essere più sufficiente, ma sarebbero necessarie delle manovre di tipo non stazionario.

Bibliografia

- [1] M. Abe, A theoretical analysis on vehicle cornering behaviors in acceleration and in braking. In: *Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks, Proceedings of 9th IAVSD Symposium*, Linköping, Sweden, June 24–28, 1985, 1–14.
- [2] F. Bartaloni, O. Di Tanna, F. Frendo, M. Guiggiani, M. Parenti, A. Sponziello, Dynamic simulation of a new three-wheeled motorcycle. *Multibody Dynamics 2007*, Milano, 25–28 Giugno 2007.
- [3] F. Bartaloni, F. Frendo, M. Guiggiani, M. Parenti, A. Sponziello, O. Di Tanna. Dynamic analysis of a novel three wheeled tilting vehicle. *IAVSD 2007, 20th International Symposium: Dynamics of Vehicle on Roads and Tracks*, Berkeley, California, August 13-17, 2007.
- [4] V. Cossalter, A. Doria, R. Lot, Steady turning of two wheel vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1999, **31**, 157–181.
- [5] V. Cossalter. *Motorcycle dynamics*. Race Dynamics, Greendale, 2002.
- [6] F. Di Puccio, P. Forte, F. Frendo, M. Guiggiani, W. Shiavi, C. Limone. Sviluppo di uno strumento di simulazione per la valutazione della maneggevolezza di veicoli a due ruote. *AIMETA 2005, XVII Congresso di meccanica teorica e applicata*, Florence, Italy, 2005.
- [7] J.C. Dixon, 1991, *Tyres, Suspension and Handling*. (Cambridge: Cambridge University Press).

-
- [8] F. Frendo, G. Greco, M. Guiggiani, Critical review of handling diagram and understeer gradient for vehicles with locked differential. *Vehicle System Dynamics*, 2006, **44**, 431–447.
- [9] F. Frendo, G. Greco, M. Guiggiani, A. Sponziello, The handling surface: a new perspective in vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 2007, **45**, 1001–1016.
- [10] F. Frendo, G. Greco, M. Guiggiani, A. Sponziello, Evaluation of handling performances by a new approach. *Vehicle System Dynamics*, 2008, preprint.
- [11] T.D. Gillespie, 1992, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. (Warrendale: Society of Automotive Engineers).
- [12] G. Greco, Dynamics of vehicles with controlled limited-slip differential, Tesi di dottorato in veicoli terrestri e sistemi di trasporto, Università di Pisa, 2007.
- [13] M. Guiggiani, 2007, *Dinamica del veicolo*, seconda edizione. (Torino: CittàStudiEdizioni).
- [14] L. C. Hall, The influence of limited slip differentials on torque distribution and steady state handling of four-wheel drive military vehicles, *IMEchE Conference Publications*, 1986, 59–66.
- [15] International Standard ISO 4138, 1982, Road vehicles - Steady state circular test procedure. (Geneva: International Organization for Standardization).
- [16] G. Mastinu, E. Battistini, The influence of limited-slip differentials on the stability of rear-wheel-drive automobiles running on even road with dry surface. *International Journal of Vehicle Design*, 1993, **14**(2/3), 166–183.
- [17] W.F. Milliken, D.L. Milliken, 1995, *Race Car Vehicle Dynamics*. (Warrendale: Society of Automotive Engineers).

-
- [18] H.B. Pacejka, Simplified analysis of steady-state behaviour of motor vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1973, **2**, 161–172, 173–183, 185–204.
- [19] H.B. Pacejka, 2002, Tyre and Vehicle Dynamics. (Butterworth–Heinemann).
- [20] H.B. Pacejka, Spin: camber and turning. *Vehicle System Dynamics*, 2005, **43**, 3–17.
- [21] R. S. Sharp, D. J. N. Limebeer. A motorcycle model for stability and control analysis. *Multibody System Dynamics*, 2001, **6**, 123–142.
- [22] R. S. Sharp. The stability and control of motorcycle. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1971, **13**, 316–329.
- [23] R. S. Sharp. Stability, control and steering responses of motorcycles. *Vehicle System Dynamics*, 2001, **35**, 291–318.
- [24] R. S. Sharp, S. Evangelou, D.J.N. Limebeer. Advances in the modelling of motorcycle dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2004, **12**, 251–283.
- [25] C.B. Winkler, Simplified analysis of the steady-state turning of complex vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1998, **29**, 141–180.