

UNIVERSITÀ DI PISA



Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

Tesi di laurea

**OTTIMIZZAZIONE SISTEMATICA
DI IMPRONTE DI CONTATTO
IN INGRANAGGI SPIROCONICI**

Candidato:

Samuele Rovai

Relatori:

Prof. Ing. Massimo Guiggiani

Ing. Marco Gabiccini

Prof. Ing. Enrico Ciulli

Sessione di Laurea del 27/02/2008

Anno accademico 2006/2007

Consultazione NON consentita

SOMMARIO

La presente tesi propone un metodo sistematico per l'ottimizzazione di impronte di contatto in ingranaggi ipoidi e spiroconici: rispetto alla condizione non ottimizzata, si determinano le variazioni dei parametri macchina del pignone necessarie per ottenere un'impronta di contatto la cui distanza, misurata attraverso un'opportuna metrica, è minima rispetto a quella obiettivo.

Queste sono le fasi in cui si sviluppa la procedura.

- Determinare le superfici B-Spline che interpolano i punti campionati sui denti di una ruota, ottenuti applicando l'approccio invariante della teoria dell'ingranamento al metodo face milling della Gleason®. La superficie del pignone è generata sovrapponendo alla superficie di base quella di spoglia, che viene modificata durante l'ottimizzazione.
- Effettuare l'analisi del contatto rigido (TCA) e quella del contatto esteso simulato (Simulated LTCA); quest'ultima consiste nell'approssimare l'impronta di contatto sotto carico come l'intersezione tra la superficie del pignone e quella della corona con sovrapposto uno strato di pasta.
- Individuare la superficie di spoglia ottima che minimizza la distanza tra l'impronta di contatto target e quella attuale attraverso il metodo di Nelder-Mead.
- Determinare i parametri macchina che minimizzano la distanza tra la superficie di spoglia obiettivo e quella attuale, utilizzando un metodo non lineare ai minimi quadrati, quale l'algoritmo di Levenberg-Marquardt con strategia trust-region.

Il metodo è stato implementato in C++ e validato testando alcune coppie impiegate in campo aerospaziale; sono riportati la struttura del codice con i file di input e i risultati ottenuti. Sono inoltre stati discussi lo stato dell'arte, i possibili sviluppi futuri di questo lavoro e i riferimenti alla normativa vigente.

ABSTRACT

This thesis work presents a systematic and robust methodology to optimize tooth contact patterns in hypoid and spiral bevel gears. The main goals are: (1) to find the shape of the ease off surface that minimizes the distance between the current contact pattern and the target one; (2) to identify the machine setting corrections required to obtain the previously identified ease off surface.

The proposed method consists in the following steps:

- The surfaces of the teeth, generated with the face milling process (Gleason[®]), are modeled using the invariant approach and then interpolated by B-Spline surfaces (the pinion surface is considered as the superposition of the base surface and the ease off surface along the local normals).
- The Tooth Contact Analysis and the Simulated Loaded Tooth Contact Analysis are carried out; in the latter, a marking compound layer is applied on the gear surface and the portion of the compound removed during the simulation of meshing is taken as a valid approximation of the tooth contact pattern.
- The best ease off minimizing the distance between the current contact pattern and the target one is identified employing the Nelder-Mead algorithm.
- The feasible setting machine variations, that allow to achieve the prescribed ease off surface, are detected employing the Levenberg-Marquardt algorithm (a nonlinear least square method) with a trust region strategy.

The method was implemented in C++ language and tested in the optimization of the contact pattern properties of real aerospace drives. The structure of the program along with the input files and the results obtained are also presented. The state of art, some possible future developments with reference to the current standards are discussed.

SINTESI

Le coppie ipoidi e spiroconiche sono trasmissioni a ruote dentate ampiamente diffuse nell'industria automobilistica e aerospaziale. Negli ultimi vent'anni la ricerca, spinta dalle esigenze di mercato, ha cercato di progettare coppie con caratteristiche sempre migliori, ad esempio facendo in modo che durante il contatto le tensioni fossero distribuite lungo il dente il più uniformemente possibile.

La presente tesi si colloca all'interno di un progetto di ricerca in collaborazione con la *Avio S.p.A.*, finalizzato alla modellazione, all'analisi e all'ottimizzazione di una trasmissione impiegata in campo aeronautico: si tratta di determinare un metodo sistematico e robusto per modificare i parametri macchina al fine di ottimizzare, in termini di resistenza, una coppia ipoide generata con metodo *Gleason face milling*. In particolare si tratta della coppia destrorsa *RH_31-50* (31 denti sul pignone e 50 sulla corona) e a essa si riferiscono le immagini riportate nel seguito.

Il lavoro si è sviluppato nelle seguenti fasi:

- descrizione del modello cinematico della macchina utensile e individuazione delle superfici corrispondenti ai denti di pignone e corona;
- analisi del contatto rigido e individuazione di un'approssimazione dell'impronta di contatto;
- definizione dell'impronta di contatto ottima, individuazione della microgeometria superficiale ad essa associata e identificazione dei parametri macchina che permettono di raggiungere tale geometria;
- verifica dei risultati ottenuti e validazione del metodo.

La presente tesi costituisce una breve guida teorica ai modelli e agli algoritmi implementati nel codice *HypOpt* (scritto in C++), il cui impianto generale è schematizzato in Fig. 1.

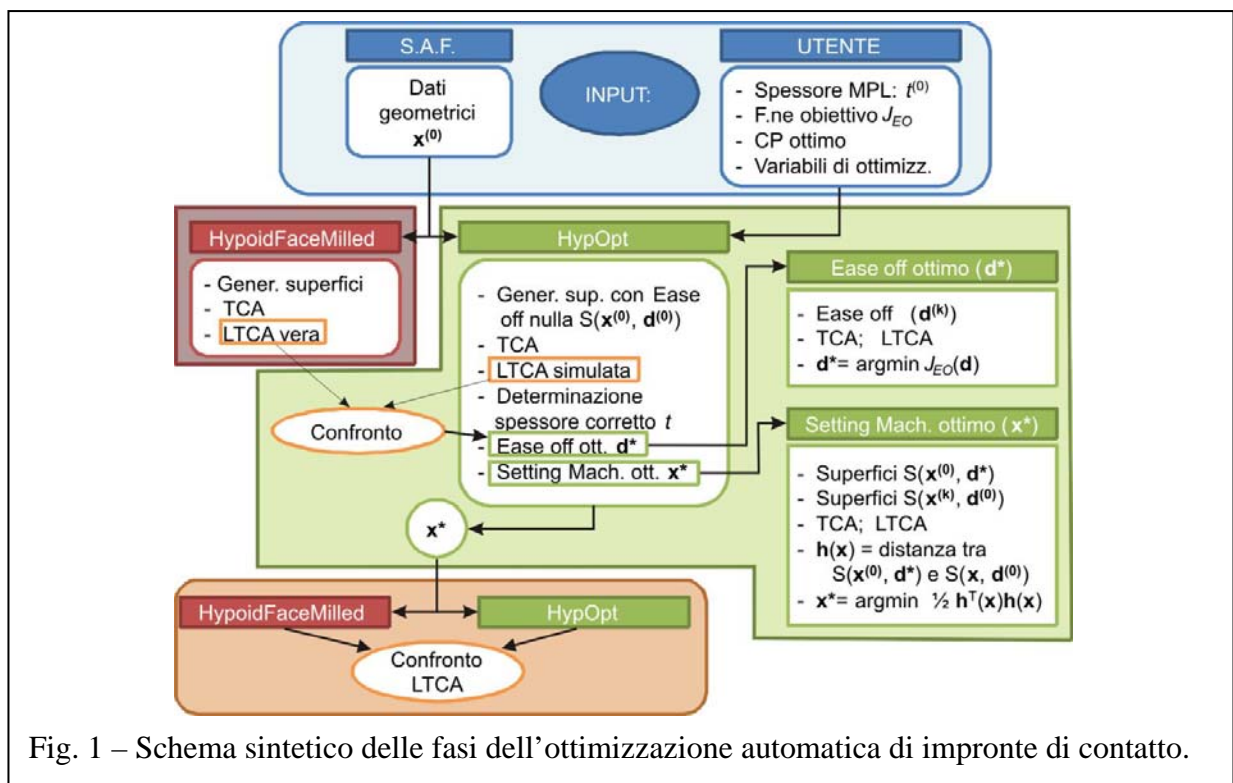


Fig. 1 – Schema sintetico delle fasi dell'ottimizzazione automatica di impronte di contatto.

Analisi geometrica e cinematica del processo di taglio

Il metodo Gleason face milling [1], noto anche come “single indexing cutting process” in quanto viene tagliato un dente alla volta, è caratterizzato dal fatto che la superficie di generazione è una superficie di rivoluzione ottenuta dalla rotazione dei taglienti intorno all’asse della testa rotante, la cui velocità di rotazione è indipendente da quella dello sbozzato (versione *Formate*[®]). Se a questa superficie si aggiunge il moto della culla, la superficie dell’utensile è l’involuppo di una famiglia di superfici: si ottiene così la versione *con moto di generazione*. Solitamente si utilizza quest’ultima per il pignone, in modo da ottenere una microgeometria che permetta di avere le caratteristiche di contatto richieste, mentre quella senza generazione, che consente di avere una produttività maggiore, è impiegata esclusivamente per la corona.

Per descrivere il modello matematico per il taglio e la rettifica di queste ruote, si è utilizzato l’approccio invariante [2], in quanto, a differenza dell’approccio classico [3], permette di scrivere le equazioni cinematiche in termini di vettori puri (e quindi invarianti rispetto al sistema di riferimento) e di introdurre un unico sistema di riferimento solo al termine dell’analisi per ottenere i risultati numerici. Il modello cinematico della macchina utensile implementato corrisponde all’*Universal Motion Concept*, ossia è stato generalizzato il tradizionale modello matematico associato alla *Cradle Style Machine* in modo da permettere diversi moti supplementari: tutte le variabili di giunto della macchina, infatti, possono essere espresse come funzioni polinomiali dell’angolo di rotazione della culla.

Indicando con (ξ, θ) due coordinate gaussiane che identificano un punto dell’utensile e con ϕ il parametro di moto, il vettore posizione di un punto della superficie ipoide del dente è definito come soluzione del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{p}(\xi, \theta, \phi) \\ f(\xi, \theta, \phi) = [\mathbf{p}_{,\xi} \quad \mathbf{p}_{,\theta} \quad \mathbf{p}_{,\phi}] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dove la prima equazione è il vettore posizione della famiglia di superfici e la seconda è l’equazione di ingranamento che, richiedendo la complanarità delle tre derivate parziali, rappresenta la condizione d’involuppo.

Tuttavia, per rendere più snelle le procedure di calcolo, è risultato vantaggioso abbandonare la definizione di una superficie di un dente come soluzione di un sistema e sostituirla con quella di una superficie CAD (B-Spline) che interpola una griglia di punti campionati sul dente stesso.

L’utilizzo delle B-Spline, infatti, permette di definire superfici in forma chiusa, attraverso espressioni relativamente semplici (polinomiali). Il loro dominio (u, v) appartiene all’intervallo $[0, 1] \times [0, 1]$ e ciò permette di avere buoni valori di tentativo (initial guess) per le varie procedure di calcolo, rendendo il problema indipendente (nel dominio) da fattori di scala.

Il generico vettore posizione individuato attraverso il sistema (1) può essere scritto in termini di B-Spline come $\mathbf{s}(u, v)$. La Fig. 2 mostra la corrispondenza tra i punti del dominio di

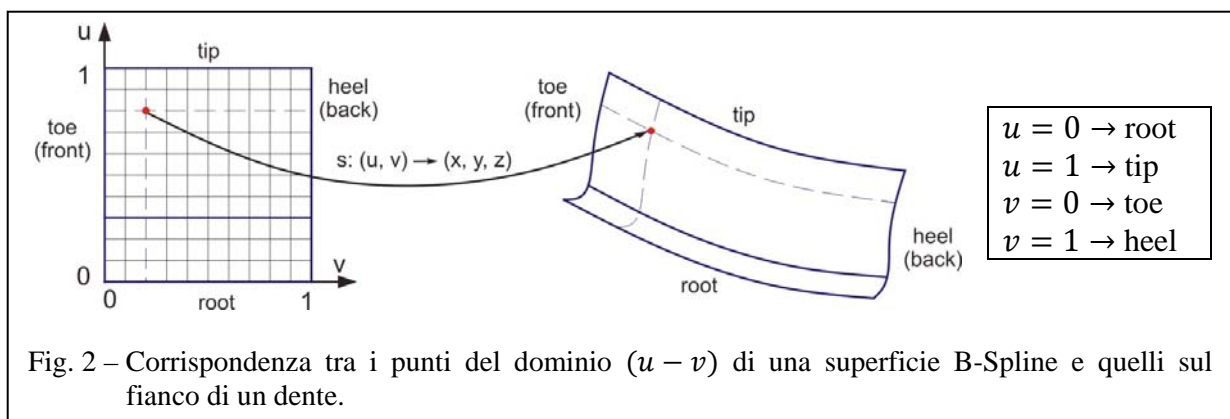


Fig. 2 – Corrispondenza tra i punti del dominio $(u - v)$ di una superficie B-Spline e quelli sul fianco di un dente.

una superficie B-Spline e la superficie stessa del dente.

Definizione della superficie di spoglia

Per individuare come correggere la superficie di un dente al fine di soddisfare le condizioni richieste, è vantaggioso pensare la superficie finale come quella superficie base a cui ne viene sovrapposta una correttiva ed effettuare le modifiche su quest'ultima. Essa è indicata come superficie di spoglia (o *ease-off*) $\mathbf{s}_{EO}(u_1, v_1, \mathbf{d})$ ed è una superficie che, sommata lungo la direzione normale a quella base del dente, permette di modificarne la microgeometria. Un esempio è riportato in Fig. 3: il suo dominio coincide con quello della B-Spline del dente al quale viene sovrapposta e la sua forma è controllata dai parametri raccolti nel vettore \mathbf{d} .

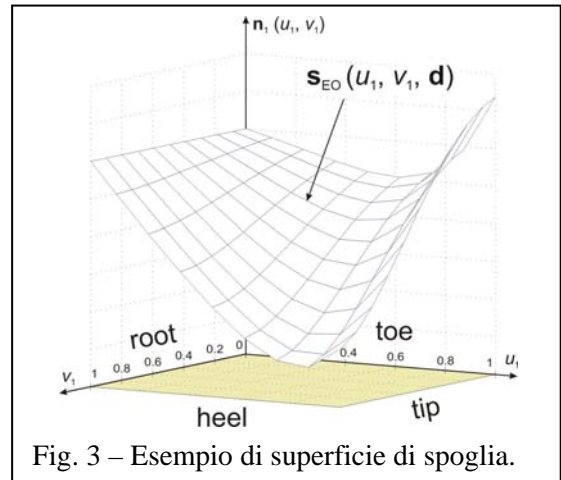


Fig. 3 – Esempio di superficie di spoglia.

Essa rappresenta lo spessore di materiale rimosso in direzione normale al dente rispetto alla configurazione base: valori positivi della superficie di ease-off indicano maggiore asportazione del materiale, mentre valori negativi corrispondono ad aggiunta di materiale. Poiché si sta simulando il processo di rettifica, il valore massimo di materiale aggiungibile corrisponde a quello del sovrametallo lasciato sul dente dopo il processo di sgrossatura (200 μm).

Analisi del contatto rigido (TCA) e di quello esteso simulato (SLTCA)

Dopo essere state modellate, le superfici del pignone con spoglia, $\tilde{\mathbf{s}}_1(u_1, v_1, \phi_1)$, e della corona, $\mathbf{s}_2(u_2, v_2, \phi_2)$, sono assemblate sul carter attraverso opportune roto-traslazioni ed è quindi possibile effettuare le analisi del contatto (nelle simulazioni si possono considerare anche errori di disallineamento o di montaggio); ϕ_1 e ϕ_2 rappresentano gli angoli di rotazione del pignone e della corona intorno ai relativi assi.

L'analisi del contatto rigido, detta anche *Tooth Contact Analysis* (TCA), corrisponde all'analisi del contatto sotto basso carico e permette di individuare la linea del contatto e l'andamento dell'errore di trasmissione (*motion graph*). Durante l'ingranamento, le superfici di almeno una coppia di denti devono essere tra loro tangenti: ciò equivale a imporre che per ogni coppia di valori (ϕ_1, ϕ_2) i punti di contatto corrispondenti sulle due superfici abbiano la stessa posizione e direzione del vettore normale, ossia

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{s}}_1(u_1, v_1, \phi_1) = \mathbf{s}_2(u_2, v_2, \phi_2) \\ \tilde{\mathbf{n}}_1(u_1, v_1, \phi_1) = \mathbf{n}_2(u_2, v_2, \phi_2) \end{cases} \quad (2)$$

dove $\mathbf{n}(u, v, \phi)$ rappresenta il generico versore ortogonale alla superficie $\mathbf{s}(u, v, \phi)$; considerando ϕ_1 un parametro d'ingresso del problema, il sistema è di 5 equazioni in 5 incognite.

In questa procedura, come nelle seguenti, è di fondamentale importanza porre particolare attenzione all'individuazione di initial guess validi.

L'analisi del contatto esteso simulato, noto come *Simulated Loaded Tooth Contact Analysis* (SLTCA), consiste nel determinare, per ogni punto di TCA, l'impronta di contatto, approssimata attraverso l'intersezione tra due superfici, come mostrato in Fig. 4: $\tilde{\mathbf{s}}_1(u_1, v_1, \phi_1)$, ossia quella del pignone, e $\tilde{\mathbf{s}}_2(u_2, v_2, \phi_2)$, ovvero quella della corona alla quale è sovrapposto uno strato di pasta (MPL) di spessore t . Ciò equivale a individuare la quantità di pasta asportata durante il contatto: infatti non si cerca la vera impronta di contatto, ma solo una sua

approssimazione per poi utilizzarla nella definizione della funzione di ottimizzazione e stimare i parametri che permettano di avvicinarsi al target.

Innanzitutto è necessario determinare l'impronta di contatto istantanea per ogni punto di TCA, ossia le coordinate (u_1, v_1) e (u_2, v_2) relative ai punti d'intersezione tra le due superfici per ogni coppia (φ_1, φ_2) ; poi, ripetuto il procedimento per ogni posizione di contatto, se ne calcola l'involuppo convesso (*convex hull*), che corrisponde al *contact pattern* cercato.

Lo spessore di pasta, che dipende dalla condizione di carico, viene attualmente stimato sulla base dell'impronta vera di contatto (ossia non simulata), calcolata con un opportuno software commerciale, quale *HypoidFaceMilled* della *Ansol* (esso permette di generare, con il metodo face milling, la geometria di una coppia ipoide ed effettuare l'analisi di contatto sotto carico).

La determinazione dell'impronta di contatto ha inoltre permesso di effettuare vari test, tra i quali lo studio della variazione della forma del contact pattern al variare della compenetrazione (spessore pasta), la stima della sensibilità della coppia conica a disallineamenti ed errori di montaggio e l'analisi di robustezza al variare della superficie di spoglia.

In Fig. 5 sono riportati la linea del contatto e il contact pattern, nei piani $u_1 - v_1$ e $r_1 - z_1$, e l'errore di trasmissione.

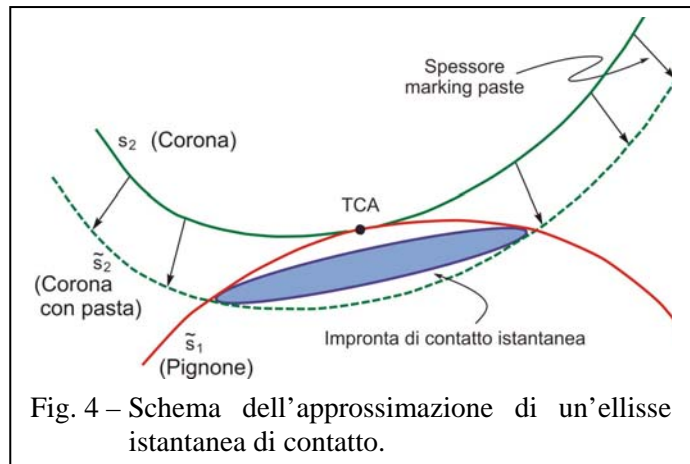


Fig. 4 – Schema dell'approssimazione di un'ellisse istantanea di contatto.

Ottimizzazione della superficie di spoglia

La forma e la posizione dell'impronta di contatto ottima dipendono da molti fattori, quali la geometria base dei denti, la forma dell'eventuale superficie di spoglia ed errori di disallineamento. Per ottimizzare una trasmissione si prende in considerazione la coppia con le sue caratteristiche nominali e si determina come modificare la superficie di spoglia per ottenere l'impronta di contatto desiderata; ciò implica la necessità di definire un contact pattern target e una funzione obiettivo da minimizzare.

Definizione della forma dell'impronta di contatto target

La norma ANSI/AGMA 2005–D03 (*Design Manual for Bevel Gears*) riporta varie indicazioni che illustrano le tipiche impronte di contatto esteso sotto carico. In base alla norma,

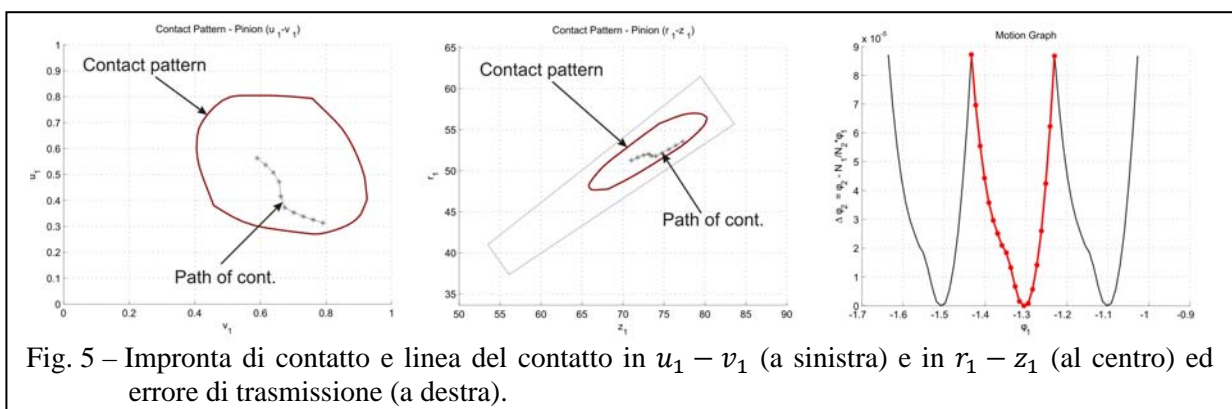


Fig. 5 – Impronta di contatto e linea del contatto in $u_1 - v_1$ (a sinistra) e in $r_1 - z_1$ (al centro) ed errore di trasmissione (a destra).

essa dovrebbe rientrare in un'area che si estende tra l'85% e il 95% del fianco attivo, sia in direzione della fascia che in quella del profilo, e ricoprire almeno l'80–85% della superficie, come mostrato in Fig. 6; tuttavia vengono considerate accettabili anche quelle impronte che si discostano dalla forma ideale, ad esempio facendo slittare leggermente il contatto verso l'heel o il toe, pur garantendo un ricoprimento di circa l'80–85% del fianco attivo.

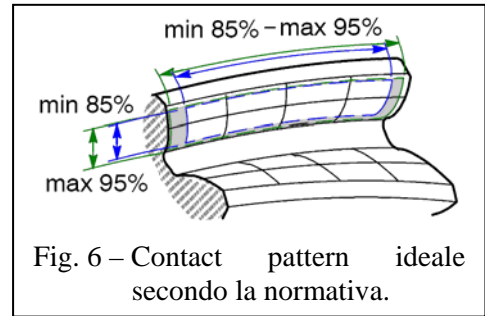


Fig. 6 – Contact pattern ideale secondo la normativa.

Definizione della funzione obiettivo

Al fine di avere massimo ricoprimento tra due impronte (geometricamente parlando due poligoni convessi), quella di riferimento e quella corrispondente all'iterazione attuale (ossia all'impronta ottenuta dalla trasmissione utilizzando i parametri associati allo stato attuale del processo di ottimizzazione), è necessario misurarne la distanza e minimizzarla; per far ciò si deve definire un'opportuna metrica che tenga presenti i vari parametri caratteristici di ciascuna impronta. La funzione di ottimizzazione utilizzata considera la distanza normalizzata d_n tra i baricentri dei due poligoni, il grado normalizzato di non-sovrapposizione A_n tra le due figure e la distanza e_n dell'impronta attuale dal bordo del dominio. La forma della superficie di spoglia è controllata dal vettore \mathbf{d} , che viene assunto come vettore delle variabili di ottimizzazione, mentre la funzione obiettivo scelta è

$$J_{EO}(\mathbf{d}) = w_d d_n^2(\mathbf{d}) + w_A A_n^2(\mathbf{d}) + w_e e_n(\mathbf{d}) \quad (3)$$

dove i coefficienti w_d , w_A e w_e sono i pesi da assegnare ai tre aspetti considerati; J_{EO} tende a zero quando il convex hull tende a sovrapporsi perfettamente al target.

Il metodo di minimizzazione utilizzato è quello di Nelder-Mead, noto anche come metodo del semplice. La Fig. 7 mostra la superficie di spoglia ottimizzata, mentre la Fig. 8 illustra il contact pattern iniziale, quello target, quello ottimo e la linea del contatto sia nel piano $u_1 - v_1$ che in $r_1 - z_1$; la Fig. 9, invece, rappresenta il motion graph ottimizzato (a sinistra) e il confronto tra quest'ultimo e quello base (a destra).

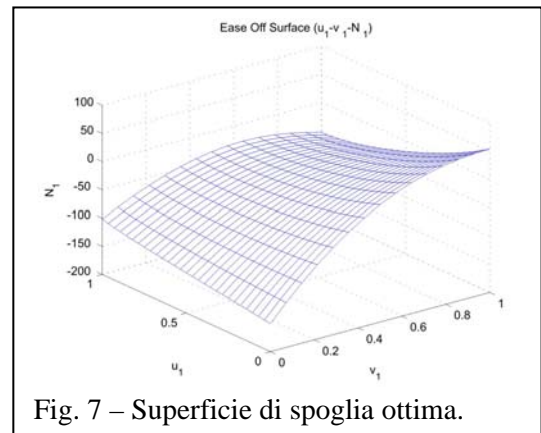


Fig. 7 – Superficie di spoglia ottima.

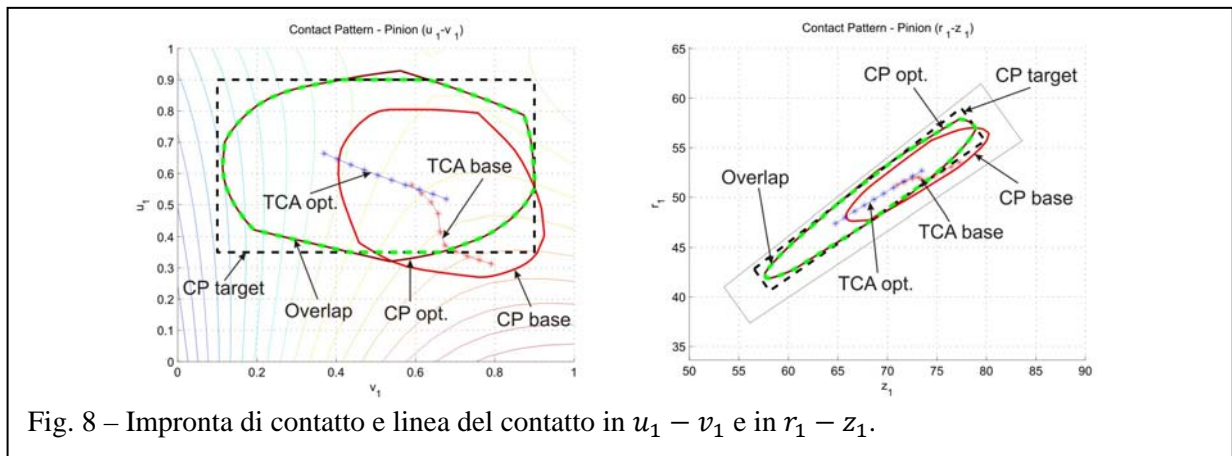


Fig. 8 – Impronta di contatto e linea del contatto in $u_1 - v_1$ e in $r_1 - z_1$.

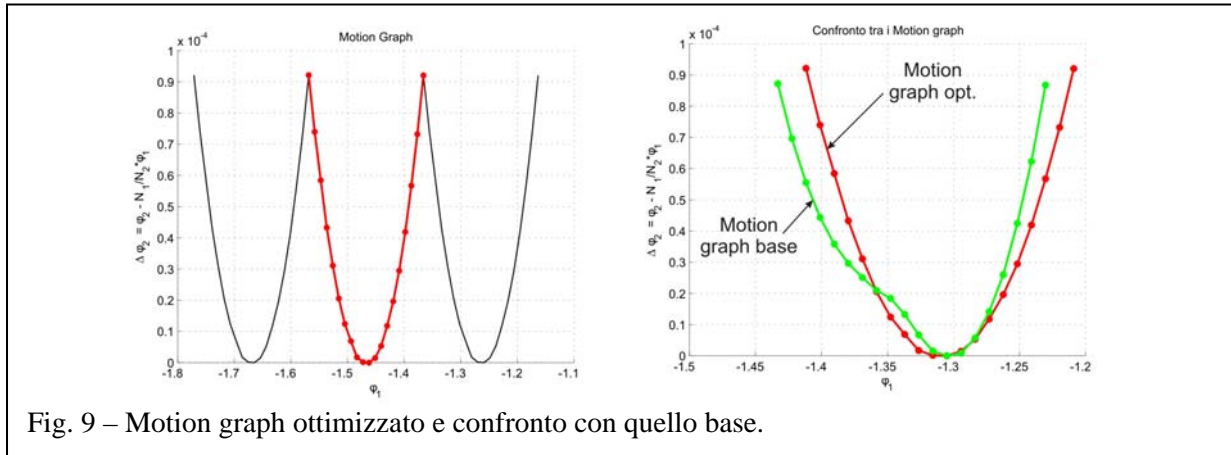


Fig. 9 – Motion graph ottimizzato e confronto con quello base.

Sintesi della microgeometria del dente e validazione dei risultati

Il problema della “sintesi della microgeometria del dente” consiste nell’individuare i parametri macchina \mathbf{x}^* che permettono di generare la superficie del dente desiderata; più correttamente si tratta di definire la superficie di spoglia obiettivo e di individuare quei parametri macchina che, a partire dalla condizione base $\mathbf{x}^{(0)}$ (a cui corrisponde ease-off nulla), permettono di ottenere una superficie di spoglia che si avvicina il più possibile a quella target.

Data una griglia di n punti appartenenti alla superficie del dente, si valuta la distanza tra i punti target e gli omologhi sulla superficie attuale, misurandola lungo la normale a quest’ultima. Tali valori individuano il vettore dell’ease-off residua $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, che deve essere minimizzato. Il problema d’identificazione dei parametri ottimi \mathbf{x}^* può essere quindi posto nella forma di un tipico problema non-lineare ai minimi quadrati (NLS) del tipo

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin} \left[\frac{1}{2} \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right] \quad (4)$$

Per la ricerca della soluzione si è utilizzato il metodo di Levenberg-Marquardt con strategia trust-region, seguendo quanto proposto in [4].

L’ottimizzazione dei parametri macchina è effettuata su una griglia di 54 punti: 45 sono campionati internamente al fianco attivo (5 lungo il profilo e 9 lungo la fascia), mentre gli altri 9 corrispondono alla rootline, che viene bloccata imponendo ease-off nullo. La griglia associata alla forma ottimale della superficie di spoglia è mostrata in Fig. 10 e rappresenta l’obiettivo da raggiungere.

Sono stati individuati e testati due set di parametri che possono essere scelti come variabili di ottimizzazione: il primo è composto da 11 parametri (indicati come *standard*), di cui 3 riguardano la geometria dell’utensile e 8 il modello cinematico della macchina utensile; il secondo è composto da 13 parametri, tutti *cinematici*.

A titolo di esempio in Fig. 11 si riportano la superficie di spoglia raggiunta e quella dei residui, che rappresenta l’errore rispetto al target nel caso in cui si utilizzano gli 11 parametri standard; il valore massimo dei residui è $3.030 \mu\text{m}$ (circa pari al 2% del valore massimo raggiunto dalla superficie di spoglia), il valore medio $\mu = 0.063 \mu\text{m}$ e la deviazione standard $\sigma_h = 1.108 \mu\text{m}$.

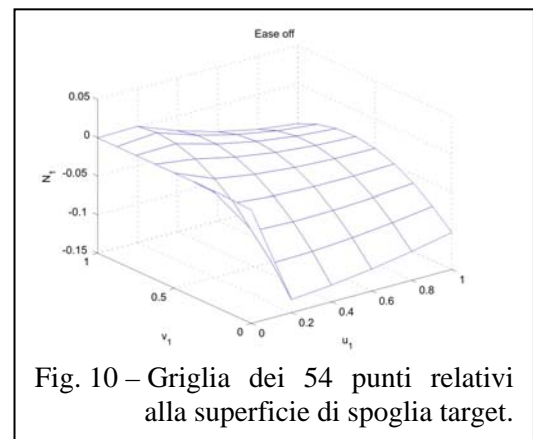


Fig. 10 – Griglia dei 54 punti relativi alla superficie di spoglia target.

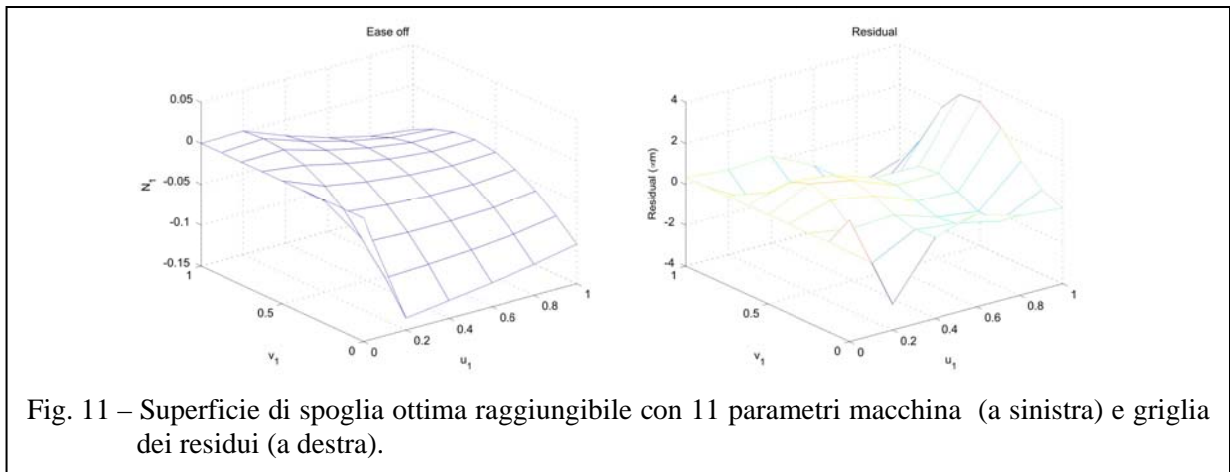


Fig. 11 – Superficie di spoglia ottima raggiungibile con 11 parametri macchina (a sinistra) e griglia dei residui (a destra).

A partire dai nuovi parametri individuati, se ne verifica la correttezza, generando le superfici dei denti e confrontando i risultati ottenuti da *HypOpt* con quelli forniti dal software commerciale *HypoidFaceMilled* della *Ansol*.

Nelle verifiche effettuate si è confrontato il contact pattern ottimo, ottenuto in fase di ottimizzazione dell'ease-off, con quello risultante dopo aver variato i parametri macchina (entrambi generati con *HypOpt*); successivamente si è confrontato quest'ultimo con quello ottenuto attraverso *HypoidFaceMilled*, sia applicando direttamente la superficie di spoglia ottima alla superficie base del pignone, sia utilizzando i nuovi parametri macchina. Con riferimento alla Fig. 12, grazie al processo di ottimizzazione proposto è possibile passare dall'impronta di contatto mostrata a sinistra (che presenta un edge contact) a quella di destra.

È emersa un'ottima concordanza tra i risultati ottenuti, come evidenziato nelle Fig. 13 e 14, dove viene mostrato il contact pattern e la linea del contatto, sia in $u_1 - v_1$ che in $r_1 - z_1$, applicando direttamente l'ease-off ottimo e generando le superfici con i nuovi parametri macchina.

Conclusioni e sviluppi futuri

In primo luogo, dopo aver descritto la geometria dei vari tipi di utensili e il modello cinematico della macchina utensile, sono state ottenute le superfici dei denti del pignone e della corona che compongono la generica coppia ipoide (sia right handed che left handed).

In secondo luogo è stata effettuata l'analisi del contatto rigido (TCA) e quella del contatto esteso simulato (SLTCA); ciò ha permesso di determinare la linea del contatto, l'errore di trasmissione e un'approssimazione dell'impronta di contatto sufficiente per effettuarne l'ottimizzazione; è stato inoltre possibile analizzare la sensibilità della coppia conica a fronte di

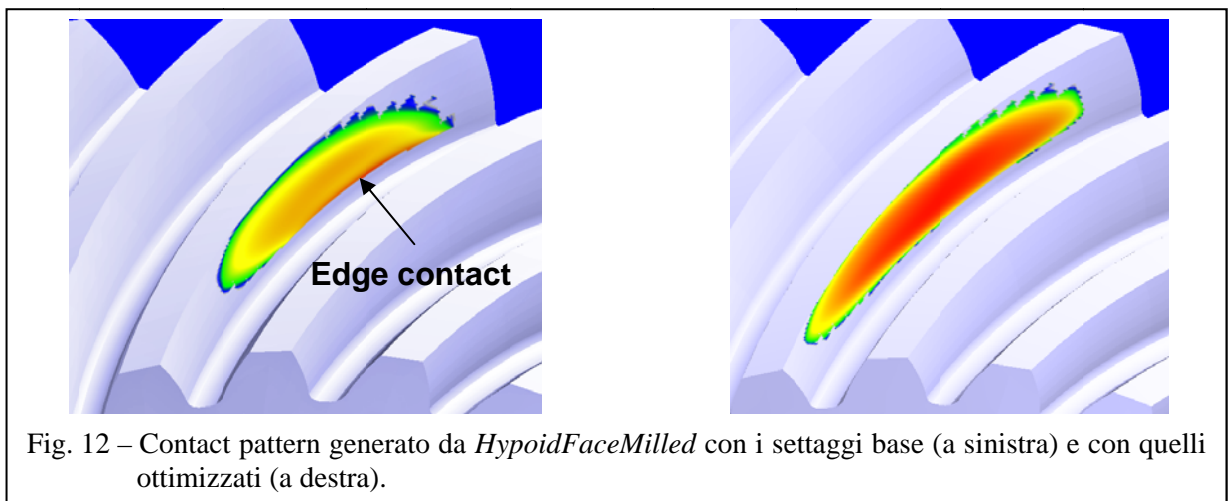
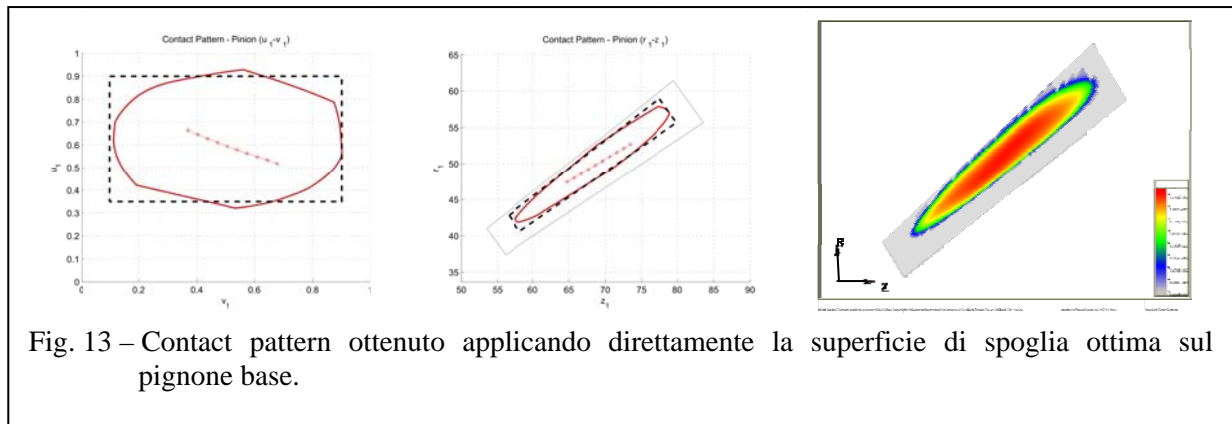


Fig. 12 – Contact pattern generato da *HypoidFaceMilled* con i settaggi base (a sinistra) e con quelli ottimizzati (a destra).



una variazione di un settaggio macchina o di un errore di assemblaggio e valutare i range di tolleranza ammessa sulla generazione delle superfici.

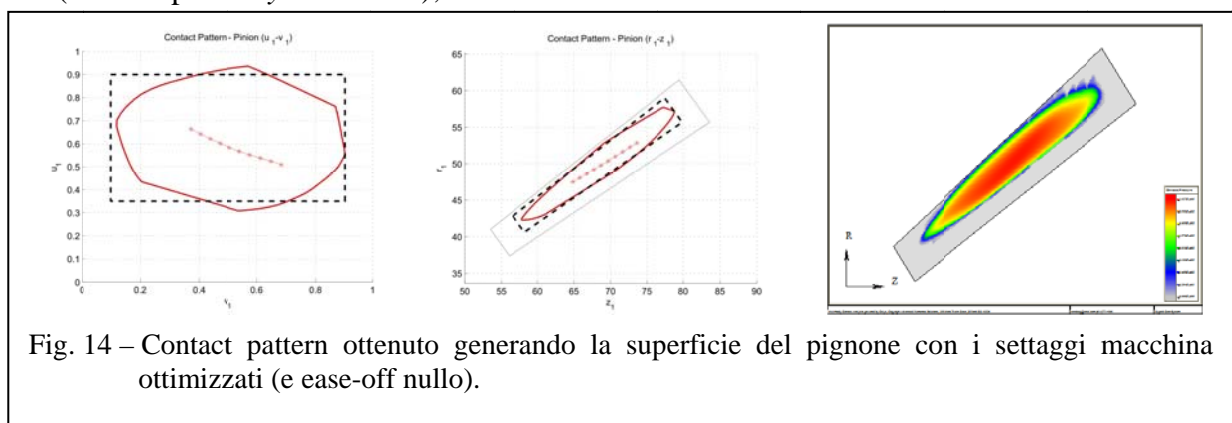
In terzo luogo sono state individuate le caratteristiche che un contact pattern dovrebbe soddisfare per essere identificato come ideale e, minimizzando la funzione obiettivo proposta, è stata determinata la superficie di spoglia associata a un'impronta di contatto il più possibile simile a quella target. A quel punto è stato possibile individuare la variazione di un sottogruppo dei parametri macchina tale da generare la superficie desiderata.

Infine i risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli forniti dal software *HypoidFaceMilled*, ottenendo una buona concordanza; ciò ha permesso di validare la bontà del procedimento di ottimizzazione proposto.

In definitiva è stato possibile ottimizzare in modo semi-automatico il contact pattern di una coppia conica attraverso un metodo accurato, sistematico e robusto, riducendo i tempi macchina di ottimizzazione da alcuni giorni a poche ore.

Questo lavoro rende possibile lo sviluppo di altri aspetti, alcuni dei quali sono riportati qui di seguito:

- ottimizzare alcune procedure di calcolo in modo da ridurre ulteriormente i tempi necessari e progettare un'interfaccia grafica per il codice *HypOpt*;
- analizzare la sensibilità dei risultati, supponendo una distribuzione statistica dei dati in ingresso (propagazione delle incertezze da input a output), per ottenere una progettazione robusta;
- implementare le procedure per l'analisi cinematica delle superfici (velocità di strisciamento, atto di moto, ecc.) e l'analisi delle curvature delle superfici;
- analizzare il problema della generazione delle superfici attraverso l'approccio con i twist, secondo quanto indicato in [5];
- indirizzare la ricerca verso l'analisi delle tensioni-deformazioni sotto carico, in modo da potersi svincolare completamente da software ausiliari, quali *HypoidFaceMilled* o analoghi (ad esempio *Ansys* o *Abacus*);



- generalizzare il procedimento proposto, rendendolo applicabile anche al metodo Gleason face hobbing; si tratta di implementare anche il modello cinematico del face hobbing e, generate le superfici dei denti, verificare la validità delle altre fasi appoggiandosi sul software *HypoidFaceHobbed* della *Ansol*.

Bibliografia

- [1] H. J. Stadtfeld, *Advanced Bevel Gear Technology*. The Gleason Works, Rochester (2000).
- [2] F. Di Puccio, M. Gabiccini e M. Guiggiani, “An invariant approach for gear generation with supplemental motions.” *Mechanism and Machine Theory* (2007)42(3):275–295.
- [3] F. Litvin e A. Fuentes, *Gear Geometry and Applied Theory*. PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs (2004).
- [4] A. Artoni, M. Gabiccini e M. Guiggiani, “Synthesis of hypoid gear surface topography by a nonlinear least squares approach.” In “DETC2007”, 34052, ASME, Las Vegas (2007).
- [5] M. Gabiccini, “A twist exponential approach to gear generation with general spatial motions.” Submitted.