Università degli Studi di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica
A. A. 2004/2005

Tesi di Laurea

Teoremi dei Residui

Candidato
Leandro AROSIO

Relatore
Prof. Marco ABATE

Controrelatore
Prof.

Indice

Introduzione

1 Coomologia relativa di De Rham

Tutti i gruppi di omologia, salvo diversamente indicato, saranno a coefficienti in $\mathbb{C}$.

Definizione 1.1 Sia $r > 1$, ω una forma di volume positiva su S^{r-1} con volume totale 1, e sia ρ la retrazione $\mathbb{R}^r \setminus \{0\} \to S^{r-1}$. Chiameremo $\rho^*\omega$ una *forma angolare* su $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$.

Definizione 1.2 Sia N una sottovarietà di M varietà differenziabile. Definiamo il *complesso relativo di De Rham*

$$A^\bullet(M, N) = A^\bullet(M) \oplus A^{\bullet-1}(N),$$

$$d(\omega|\theta) = (d\omega|i^*\omega - d\theta).$$

Indicheremo l'omologia di questo complesso con $H^*_{DR}(M, N)$. Una classe di coomologia in $A^\bullet(M, N)$ si rappresenta con una forma chiusa su M che diventa esatta facendone la restrizione ad N : infatti se $d(\omega|\eta) = (0|0)$, allora ω è chiusa e $\omega = d\eta$ su N.

L'omologia di questo complesso è canonicamente isomorfa alla coomologia singolare relativa $H^*_{sing}(M, N)$.

Osservazione 1.3 Per i complessi di cocatene singolari abbiamo la seguente successione esatta:

$$0 \to S^*(M, A) \to S^*(M) \to S^*(A) \to 0,$$

ottenuta dualizzando la successione corrispondente per le catene singolari. Quindi $S^*(M, A)$ si può identificare con un sottospazio delle cocatene su M, precisamente quelle nulle su ogni catena contenuta in A. Nella coomologia di De Rham non abbiamo più questa inclusione di cocatene: non c'è un modo canonico analogo di identificare gli elementi del complesso relativo di De Rham con un sottoinsieme delle forme differenziali su M. Però possiamo ottenere la successione esatta lunga in coomologia in questo modo: ad ogni cociclo $(\omega|\theta)$ di $A^q(M, N)$ associamo la q-forma chiusa ω su M. In effetti abbiamo la seguente successione esatta:

$$\cdots \to H^{q-1}(N) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(M, N) \xrightarrow{\beta^*} H^q(M) \xrightarrow{i^*} H^q(N) \to \ldots,$$

dove $\alpha(\theta) = (0|\theta)$, $\beta(\omega|\theta) = \omega$.

Esempio 1.4 Consideriamo $H^r(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r \setminus \{0\}; \mathbb{C})$, dove $r > 1$. Dalla successione esatta

$$\cdots \to H^{q-1}(\mathbb{R}^r) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(\mathbb{R}^r \setminus \{0\}) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r \setminus \{0\}) \xrightarrow{\beta^*} H^q(\mathbb{R}^r) \to \ldots,$$

vediamo che α^* è un isomorfismo in

$$\mathbb{C} \simeq H^{r-1}(\mathbb{R}^r \smallsetminus \{0\}) \xrightarrow{\alpha^*} H^r(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r \smallsetminus \{0\})$$

Ogni elemento di $H^{r-1}(\mathbb{R}^r \smallsetminus \{0\})$ è rappresentato da una $(r-1)$-forma chiusa θ su $\mathbb{R}^r \smallsetminus \{0\}$. L'elemento corrispondente in $H^r(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r \smallsetminus \{0\})$ si rappresenta come $(0| - \theta)$.

Esempio 1.5 Generalizziamo l'esempio precedente: sia $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale orientato di rango r. Abbiamo su $E \smallsetminus M$ una forma angolare globale ψ tale che $d\psi = -\pi^*\epsilon$, dove ϵ rappresenta la classe di Eulero di E. La classe di Thom $\Psi(E) \in H^r(E, E \smallsetminus M)$ si rappresenta con $(\pi^{-1}\epsilon| - \psi)$.

2 Coomologia di Čech-De Rham

Definiremo ora una nuova coomologia, che generalizza le idee del Teorema di Mayer-Vietoris e del complesso di De-Rham relativo nel caso in cui N sia un aperto di M.

Definizione 2.1 Sia M una varietà orientata di dimensione m. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto in M, dove I è un insieme parzialmente ordinato tale che se $U_{\alpha_0 \ldots \alpha_n} := U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$ è non vuoto, allora l'ordine indotto sul sottoinsieme $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ è totale. Denoteremo

$$C^p(\mathcal{U}, A^q) := \prod_{(\alpha_0 \ldots \alpha_p) \in I^{(p)}} A^q(U_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}),$$

dove $I^{(p)} := \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \mid \alpha_0 < \cdots < \alpha_p\}$.
$C^\bullet(\mathcal{U}, A^\bullet)$, è un doppio complesso, dotato dell'operatore differenziale esterno d e dell'operatore cobordo $\delta : C^p(\mathcal{U}, A^q) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, A^q)$. $A^\bullet(\mathcal{U})$ è il complesso associato, quindi $A^r(\mathcal{U}) = \bigoplus_{p+q=r} C^p(\mathcal{U}, A^q)$.

Ad esempio, se $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$,

$$D : A^p(\mathcal{U}) \to A^{p+1}(\mathcal{U})$$

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_{01}) \mapsto (d\sigma_0, d\sigma_1, \sigma_1 - \sigma_0 - d\sigma_{01}).$$

Quindi una cocatena $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_{01})$ è un cociclo se σ_0 e σ_1 sono chiuse e σ_{01} è una primitiva per la differenza $\sigma_1 - \sigma_0$ su $U_0 \cap U_1$. Passiamo all'integrazione nella teoria di Čech-De Rham e alla dualità.

Definizione 2.2 Un sistema di *celle ad alveare*

Per esempio, se $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ R_{01} è un'ipersuperficie in M che separa i due aperti $\mathrm{Int}(R_0)$ e $\mathrm{Int}(R_1)$. Abbiamo $\partial(R_0) = R_{01}$ e $\partial(R_1) = R_{10} = -R_{01}$.
Sia M una varietà orientata di dimensione m, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto come sopra e $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un sistema di celle ad alveare adattato a $\mathcal{U}$. Se M è compatta, ogni R_α è compatto e possiamo definire l'integrazione

$$\int_M : A^m(\mathcal{U}) \to \mathbb{C}$$

come la somma

$$\int_M \sigma = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in I^{(p)}} \int_{R_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}} \sigma_{\alpha_0 \ldots \alpha_p} \right)$$

per σ in $A^m(\mathcal{U})$. Se $D\sigma = 0$ abbiamo che $\int_M \sigma$ non dipende dalla scelta delle celle ad alveare, e che se $\sigma = D\tau$ allora $\int_M \sigma = 0$. quindi l'integrazione passa alla coomologia e definisce

$$\int_M : H^m(A^\bullet(\mathcal{U})) \to \mathbb{C},$$

che corrisponde via l'isomorfismo con De Rham all'integrazione su $H^m_{DR}(M, \mathbb{C})$.
Inoltre il pairing

$$A^k(\mathcal{U}) \times A^{m-k}(\mathcal{U}) \to A^m(\mathcal{U}) \to \mathbb{C}$$

composizione del prodotto cup e dell'integrazione è non degenere.
Data una classe Γ in $H_k(M, \mathbb{C})$ $\tau \in A^\bullet(\mathcal{U}), D\tau = 0$, possiamo definire $\int_\Gamma \tau$ prendendo γ un rappresentante di Γ trasverso ad ogni $R_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$:

$$\int_\Gamma \tau = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in I^{(p)}} \int_{R_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \cap \gamma} \tau_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \right).$$

Abbiamo quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^k(A^\bullet(\mathcal{U})) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d] & H^{m-k}(A^\bullet(\mathcal{U}))^* \arrow[r, "\int_\Gamma \tau"] \arrow[d] & H_{m-k}(M, \mathbb{C}) \arrow[d, "Id"] \\
H^k_{DR}(M, \mathbb{C}) \arrow[r, "\wedge"] & H^{m-k}_{DR}(M, \mathbb{C})^* \arrow[r, "\int_\Gamma \omega"] & H_{m-k}(M, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

dove le due mappe che risultano componendo le righe sono le Dualità di Poincaré nelle due teorie. In conclusione, nella teoria di Čech-De Rham,

$$[\sigma] \in H^k(A^\bullet(\mathcal{U})) \overset{P_M}{\longmapsto} \Gamma \in H_{m-k}(M, \mathbb{C}),$$

dove

$$\int_M \sigma \smile \tau = \int_\Gamma \tau \qquad \forall \tau \in A^{m-k}(\mathcal{U}),\ D\tau = 0.$$

Sia ora M una varietà orientata di dimensione m non necessariamente compatta, e passiamo alle dualità di Alexander e Lefscetz. Consideriamo ricoprimenti $\mathcal{U}$ costituiti da due aperti U_0 e U_1.

Definizione 2.3 Denotiamo $A^\bullet(\mathcal{U}, U_0)$ l'insieme delle $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_{01})$ con $\sigma_0 = 0$. È immediato verificare che $A^\bullet(\mathcal{U}, U_0)$ è isomorfo al complesso di De Rham relativo $A^\bullet(U_1, U_0)$ tramite la mappa

$$(0, \omega, \theta) \mapsto (\omega \mid \theta).$$

L'omologia del complesso $A^\bullet(\mathcal{U}, U_0)$ è quindi canonicamente isomorfa a $H^*(U_1, U_0)$ che per excisione 'e a sua volta isomorfo a $H^*(M, U_0)$. In seguito indicheremo un elemento di $A^\bullet(\mathcal{U}, U_0)$ indifferentemente con $(0, \omega, \theta)$ o $(\omega \mid \theta)$. Abbiamo la successione esatta

$$0 \to A^\bullet(\mathcal{U}, U_0) \to A^\bullet(\mathcal{U}) \to A^\bullet(U_0) \to 0.$$

Dunque nella teoria di Čech-De Rham possiamo identificare le cocatene relative all'aperto U_0 con un sottoinsieme delle cocatene su M.

Sia ora $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ un ricoprimento che ammetta un sistema di celle ad alveare con R_1 compatto. Allora possiamo definire un'integrazione

$$\int_M : A^m(\mathcal{U}, U_0) \to \mathbb{C}$$

come

$$\int_M (\omega \mid \theta) = \int_{R_1} \omega + \int_{R_{01}} \theta,$$

che induce un'integrazione in coomologia relativa:

$$\int_M : H^*(M, U_0) \to \mathbb{C}.$$

Dall'espressione

$$(0, \omega, \theta) \smile (\tau_0, \tau_1, \tau_{01}) = (0, \omega \wedge \tau_1, \theta \wedge \tau_1)$$

vediamo che il prodotto cup passa ad un prodotto

$$A^k(\mathcal{U}, U_0) \times A^{m-k}(U_1) \to A^m(\mathcal{U}, U_0),$$

che composto coll' integrazione appena definita ci dà un pairing non degenere dal quale otteniamo

$$H^k(M, U_0) \simeq H^{m-k}(U_1)^* \simeq H_{m-k}(U_1),$$

dove l'isomorfismo manda

$$[(\omega \mid \theta)] \longmapsto \Gamma,$$

con

$$\int_{R_1} \omega \wedge \tau_1 + \int_{R_{01}} \theta \wedge \tau_1 = \int_\Gamma \tau_1 \qquad \forall \tau_1 \in A^{m-k}(U_1),\ d\tau_1 = 0.$$

Se U_1 è connesso, $H_0(U_1) \simeq \mathbb{C}$, e l'isomorfismo è dato dall'integrazione $(\omega \mid \theta) \mapsto \int_{R_1} \omega + \int_{R_{01}} \theta$.
Per ottenere la dualità di Alexander $\mathcal{A}_S$, sia S un compatto in M e prendiamo U_1 un suo intorno regolare e $U_0 = M \setminus S$. Allora

$$H^k(M, M \setminus S) \simeq H_{m-k}(U_1) \simeq H_{m-k}(S).$$

Per ottenere la dualità di Lefscetz $\mathcal{L}_R$, sia R una sottovarietà compatta a bordo C^∞ di dimensione m. Sia V un intorno tubolare di ∂R, e consideriamo il ricoprimento della varietà $M' = R \cup V$ così definito: $U_0 = V$ e $U_1 = M'$. Notiamo che $H^k(M', U_0) \simeq H^k(R, \partial R)$. In questo caso l'integrazione $\int_{M'}$, che denoteremo in seguito come $\int_R$ ci dà

$$H^k(R, \partial R) \simeq H^{m-k}(U_1)^* \simeq H_{m-k}(R).$$

Notiamo che in questo caso possiamo prendere $R_1 = R$. In seguito sarà fondamentale la compatibilità tra gli isomorfismi di Alexander e Lefscetz, nel senso della seguente

Proposizione 2.4 *Sia S un compatto in M che ammette un intorno regolare e R una sottovarietà compatta a bordo C^∞ di dimensione m contenente S nella propria parte interna. Allora il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} H^k(M, M \smallsetminus S) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\mathcal{A}_S"] & H^k(R, \partial R) \arrow[d, "\mathcal{L}_R"] \\ H_{m-k}(S) \arrow[r, "i^*"] & H_{m-k}(R) \end{tikzcd}.$$

Dimostrazione di ??. ia □

3 Poincaré-Hopf e Residui della Classe di Eulero

Il Teorema di Poincaré-Hopf è l'esempio più immediato di localizzazione di una classe caratteristica: la classe di Eulero. Il Teorema dei Residui della classe di Eulero lo generalizza e ha il pregio di mettere in evidenza l'idea della localizzazione.

Definizione 3.1 Sia M una varietà C^∞ connessa orientata di dimensione m e $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale reale orientato di rango m. Sia p un punto di M, U un intorno di p, e s una sezione di E che non si annulla definita su $U \setminus \{p\}$. Definiamo l'*Indice* $\mathrm{Ind}(s,p)$ nel seguente modo: fissiamo una banalizzazione locale positiva e identifichiamo $\pi^{-1}(U)$ con $U \times \mathbb{R}^m$. Sia $\rho : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la proiezione, e sia D un m-disco chiuso contenuto in U. Consideriamo la mappa

$$\gamma_s : \partial D \to S^{m-1}$$
$$\gamma_s(x) = \frac{\rho \circ s(x)}{\|\rho \circ s(x)\|}$$

Definiamo $\mathrm{Ind}(s,p)$ come il grado di γ_s. Se E è il fibrato tangente di M, e quindi s è un campo vettoriale v, chiamiamo $\mathrm{Ind}(s,p)$ l'*Indice di Poincaré-Hopf* $\mathrm{PH}(v,p)$.

Osservazione 3.2 $\mathrm{Ind}(s,p)$ si può rappresentare anche nel modo seguente: sia ψ_m una $(m-1)$-forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ con $\int_{S^{m-1}} \psi_m = 1$,

$$\mathrm{Ind}(s,p) = \int_{\partial D} {\gamma_s}^* \psi_m = \int_{\partial D} (\rho \circ s)^* \psi_m.$$

Se s si estende ad una sezione su tutto U, $\mathrm{Ind}(s,p) = \mathrm{Deg}_p(\rho \circ s)$. Dal Teorema di Stokes segue che $\mathrm{Ind}(s,p)$ non dipende dalla scelta di D. Notiamo che $\int_{\partial D} (\rho \circ s)^* \psi_m = \int_{\partial D} s^*(\rho^* \psi_m)$, che è un espressione che ritroveremo in seguito.

Teorema 3.3 (di Poincaré-Hopf) *Sia M una varietà C^∞ compatta connessa orientata di dimensione m, v un campo vettoriale che non si annulla definito su $M \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$. Allora*

$$\sum_{i=1}^{r} PH(v, p_i) = \chi(M).$$

Il Teorema di Poincaré-Hopf segue immediatamente dal prossimo Teorema dell'Indice e dall'identità $\int_M e(TM) = \chi(M)$.
Ricordiamo che, la classe di Thom $\Psi_E \in H^m(E, E \setminus M)$ è rappresentata dal cociclo $(\pi^*\epsilon| - \psi)$, dove ϵ è una m-forma chiusa su M e ψ è una $(m-1)$-forma su $E \setminus M$ tale che $d\psi = -\pi^*\epsilon$ e $-(\pi_{01})_*\psi = 1$. Inoltre ϵ rappresenta la classe di Eulero $e(E)$.

Teorema 3.4 (dell'Indice) *Sia M una varietà C^∞ connessa orientata di dimensione m e $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale reale orientato di rango m. Allora se U è un aperto in M, $p_1, \ldots, p_r$ un numero finito di punti in U e s una sezione di E che non si annulla in $U \backslash \{p_1, \ldots, p_r\}$,*

$$\sum_{i=1}^{r} Ind(s, p_i) = \int_R \epsilon + \int_{\partial R} s^*\psi,$$

dove R è una varietà m-dimensionale a bordo contenuta in U e contenente i p_i nella parte interna.
In particolare se M è compatta vale

$$\sum_{i=1}^{r} Ind(s, p_i) = \int_M e(E).$$

Dimostrazione di ??. Vediamo intanto che vale

$$\mathrm{Ind}(s, p) = \int_D \epsilon + \int_{\partial D} s^*\psi.$$

Su U esiste una $(m-1)$-forma η tale che $d\eta = \epsilon$. Allora $\Psi(E|_U)$ si rappresenta con $(0| - (\psi + \pi^*\eta))$, infatti

$$(\pi^*\epsilon| - \psi) - (0| - (\psi + \pi^*\eta)) = (\pi^*\epsilon|\pi^*\eta) = D(\pi^*\eta|0).$$

D'altra parte $\Psi(E|_U)$ ha anche una rappresentazione dovuta al fatto che $\pi^{-1}(U)$ è un fibrato banale: infatti $\rho : \pi^{-1}(U) \smallsetminus M \to \mathbb{R}^m \smallsetminus \{0\}$ è una retrazione, e quindi $\rho^*(0| - \psi_m) = (0| - \rho^*(\psi_m))$ rappresenta la classe di Thom. Quindi esiste una cocatena $(\omega|\theta)$ tale che

$$(0| - (\psi + \pi^*\eta)) - (0| - \rho^*(\psi_m)) = D(\omega|\theta).$$

Ora, ω è una $(m-1)$-forma chiusa su $\pi^{-1}(U)$ che è contraibile, quindi esiste una $(m-2)$-forma γ tale che $d\gamma = \omega$. In conclusione abbiamo

$$\psi + \pi^*\eta - \rho^*\psi_m = d(\theta - \gamma) \;\text{ su }\; E|_U \smallsetminus U,$$

e quindi, dato che su $U \smallsetminus \{p\}$ l'immagine di s è in $E|_U \smallsetminus U$,

$$\mathrm{Ind}(s, p) = \int_{\partial D} (\rho \circ s)^*\psi_m = \int_{\partial D} (\eta + s^*\psi) = \int_D \epsilon + \int_{\partial D} s^*\psi,$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il Teorema di Stokes.
Siano ora $D_i,\ i = 1, \ldots, r$ dei dischi attorno ai p_i. Allora

$$\int_R \epsilon = \int_{R \smallsetminus \bigcup_{i=1}^r IntD_i} \epsilon + \sum_{i=1}^{r} \int_{D_i} \epsilon.$$

Su $R \smallsetminus \{p_1, \dots p_r\}$ l'immagine di s è in $E|_U \smallsetminus U$ e dunque da $-\pi^*\epsilon = d\psi$ otteniamo $\epsilon = -ds^*\psi$. Allora, per il Teorema di Stokes,

$$\int_{R \smallsetminus \bigcup_{i=1}^r IntD_i} \epsilon = -\int_{\partial R} s^*\psi + \sum_{i=1}^r \int_{\partial D_i} s^*\psi,$$

quindi

$$\int_R \epsilon = \sum_{i=1}^r \mathrm{Ind}(s, p_i) - \int_{\partial R} s^*\psi.$$

□

Osservazione 3.5 Nel caso M varietà compatta, il Teorema dell'Indice si può rienunciare così: la classe di Eulero di E è Poincaré-duale al luogo di zeri, contati con la molteplicità, di una qualsiasi sezione con singolarità isolate.

Osservazione 3.6 Diamo una traccia di quello che vogliamo fare per generalizzare il Teorema dell'Indice: in effetti quello che useremo è il procedimento standard per creare "Teoremi dei Residui". Abbiamo un **Teorema di Vanishing** che ci dice che l'esistenza di un opportuno oggetto geometrico $\mathcal{D}$ sullo spazio M implica l'annullarsi di una classe caratteristica $\phi(E)$ di un fibrato vettoriale $E \to M$ (nel nostro caso $\mathcal{D}$ è una sezione che non si annulla di E stesso, e $\phi(E)$ è la classe di Eulero). Se $\mathcal{D}$ è dato solo fuori da un chiuso S di M (supponiamo in quanto segue che le componenti connesse $(S_\lambda)_\lambda$ abbiano intorni regolari disgiunti), allora ad annullarsi è la restrizione $\phi(E)|_{M \smallsetminus S} \in H^*(M \smallsetminus S)$. Quindi, grazie alla successione esatta

$$\cdots \to H^*(M, M \smallsetminus S) \xrightarrow{j^*} H^*(M) \xrightarrow{i^*} H^*(M \smallsetminus S) \to \dots,$$

la classe $\phi(E)$ si solleva ad una $\phi_S(E, \mathcal{D}) \in H^*(M, M \smallsetminus S)$, sperabilmente in maniera canonica dato $\mathcal{D}$ su $M \smallsetminus S$. La classe $\phi_S(E, \mathcal{D})$ è la **Classe localizzata ad S**. Inoltre per la proprietà di excisione $H^*(M, M \smallsetminus S)$ e $H^*(U, U \smallsetminus S)$ sono isomorfi e le classi localizzate si corrispondono mostrando che $\phi_S(E, \mathcal{D})$ dipende solo dal comportamento dell'oggetto $\mathcal{D}$ vicino a S. Il passo successivo, nel caso in cui S è compatto, consiste nel definire il **Residuo** $\mathrm{Res}_\phi(\mathcal{D}, E; S)$ come l'Alexander-duale rispetto ad S di $\phi_S(E, \mathcal{D})$, quindi un elemento di $H_{*-m}(S)$, dove m è la dimensione di M. Arriviamo al passo finale, cioè il **Teorema dei Residui**: se M è compatta, dal diagramma della Proposizione **??** nel caso $R = M, \partial R = \emptyset$

$$\begin{tikzcd} H^*(M, M \smallsetminus S) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\mathcal{A}_S"'] & H^*(M) \arrow[d, "\mathcal{P}_M"] \\ \bigoplus_\lambda H_{m-*}(S_\lambda) \arrow[r, "i^*"] & H_{m-*}(M) \end{tikzcd} ,$$

otteniamo

$$\sum_\lambda (i_\lambda)_* \mathrm{Res}_\phi(\mathcal{D}, E; S) = \mathcal{P}_M(\phi(E)) \quad in \quad H_{m-r}(M).$$

In effetti, anche se M non è compatta possiamo ottenere un Teorema dei Residui usando la dualità di Lefscetz al posto della dualità di Poincaré. Infatti, sempre dal diagramma della Proposizione **??** abbiamo

$$\sum_\lambda (i_\lambda)_* \mathrm{Res}_\phi(\mathcal{D}, E; S) = \mathcal{L}_R(j^* \phi_S(E, \mathcal{D})) \quad in \quad H_{m-r}(M), \tag{3.1}$$

dove R è una sottovarietà compatta a bordo che contiene S nella propria parte interna.

Tornando al nostro caso, sia M una varietà C^∞ connessa orientata di dimensione m e $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale reale orientato di rango r. Sia S un chiuso in M e s una sezione di E che non si annulla in $U \setminus S$, dove U è un intorno aperto di S. Da quanto abbiamo visto nell'osservazione, il primo passo consiste nello scegliere in modo canonico (grazie ad s) una classe di $H^*(U, U \setminus S)$ che venga mandata da j^* nella classe di Eulero $e(E|_U)$. Un candidato naturale sarebbe il cociclo $(\epsilon| - s^*\psi)$, ma ci serve il seguente

Lemma 3.7 *La classe di coomologia relativa in $H^*(U, U \setminus S)$ del cociclo $(\epsilon| - s^*\psi)$ non dipende dalla scelta di ϵ e ψ.*

Dimostrazione di ??. otiamo che con l'ipotesi aggiuntiva che s sia la restrizione di una sezione s definita su tutto U, la dimostrazione è immediata: la classe di $(\epsilon| - s^*\psi)$ è il pull-back della classe di Thom $\Psi(E|_U) = [(\pi^*\epsilon| - \psi)]$ secondo la mappa di coppie

$$s : (U, U \setminus S) \xrightarrow{s} (E|_U, E|_U \setminus U),$$

e quindi non dipende dalla scelta di ϵ e ψ. Dimostriamolo ora per s arbitraria: da

$$[(\pi^*\epsilon| - \psi)] = [(\pi^*\epsilon'| - \psi')],$$

dobbiamo ricavare

$$[(\epsilon| - s^*\psi)] = [(\epsilon'| - s^*\psi')].$$

Per ipotesi $(\pi^*\epsilon| - \psi) - (\pi^*\epsilon'| - \psi') = D(\omega|\theta)$. Dato che ϵ e ϵ' rappresentano entrambe la classe di Eulero, abbiamo $\epsilon - \epsilon' = d\gamma$. Da $d\pi^*\gamma = \pi^*\epsilon - \pi^*\epsilon'$ vediamo che la differenza $\omega - \pi^*\gamma$ è una forma chiusa. Quindi, dato che $\pi^* : H^*(U) \to H^*(E|_U)$ è un isomorfismo, esistono una forma chiusa η su M e una forma φ su $E|_U$ tali che

$$\omega - \pi^*\gamma = \pi^*\eta + d\varphi.$$

Allora

$$(\epsilon| - s^*\psi) - (\epsilon'| - s^*\psi') = D(\eta + \gamma | s^*(\theta - \varphi)).$$

$\square$

Definizione 3.8 La classe $\in H^r(U, U \smallsetminus S)$ è la *Classe di Eulero di E localizzata ad S rispetto a s*, e la indicheremo $e_S(E, s)$.

Definizione 3.9 Supponiamo ora che S sia compatto, con un intorno regolare. Allora abbiamo la dualità di Alexander

$$\mathcal{A}_S : H^r(U, U \smallsetminus S) \to H_{m-r}(S).$$

Definiamo il *Residuo di Eulero di s ad S* come $\mathcal{A}_S(e_S(E, s))$ e lo indicheremo $\mathrm{Res}_e(s, E; S)$.

Esattamente come abbiamo visto nell'osservazione **??** possiamo proseguire nel caso M compatta: prendendo $M = U = R$ otteniamo

$$\sum_\lambda (i_\lambda)_* \mathrm{Res}(s, E; S_\lambda) = \mathcal{P}_M(e(E)) \quad in \quad H_{m-r}(M).$$

Osservazione 3.10 La teoria di Čech-De Rham ci permette di calcolare il residuo integrando. Definiamo $U_0 = U \smallsetminus S$ e consideriamo il ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_0, U\}$ e il complesso di Čech-De Rham $A^\bullet(\mathcal{U}, U_0) \simeq A^\bullet(U, U \smallsetminus S)$ associato.
Se R_1 è una varietà a bordo in U che contiene S nella sua parte interna, definiamo $R_0 = U \smallsetminus \mathrm{Int} R_1$, in modo che $\{R_0, R_1\}$ sia un sistema di celle ad alveare per $\mathcal{U}$ (ricordiamo che $R_{01} = -\partial R_1$). Allora il residuo è rappresentato da un $(m - r)$-ciclo Γ per cui vale

$$\int_{R_1} \epsilon \wedge \tau + \int_{\partial R_1} s^* \psi \wedge \tau = \int_\Gamma \tau \qquad \forall \tau \in A^{m-r}(U), \ d\tau = 0.$$

Se $r = m$ e S è connesso, il residuo è il numero complesso $\int_{R_1} \epsilon + \int_{\partial R_1} s^* \psi$. Quindi nel caso di $S = \{p\}$ singolarità isolata, possiamo prendere come R_1 un disco chiuso D e otteniamo

$$\mathrm{Res}_e(s, E; \{p\}) = \mathrm{Ind}(s, p_i).$$

$\mathrm{Res}_e(s, E; \{S\})$ è un numero intero anche se S non è una singolarità isolata: infatti è possibile costruire una sezione s' su U che coincide con s su ∂R_1 con singolarità in $\mathrm{Int}(R_1)$ solo in un numero finito di punti $\{p_1, \dots, p_n\}$. Quindi

$$\mathrm{Res}_e(s, E; S) = \int_{R_1} \epsilon + \int_{\partial R_1} s^* \psi = \int_{R_1} \epsilon + \int_{\partial R_1} s'^* \psi = \sum_{i=1}^n \mathrm{Ind}(s, p_i).$$

Esempio 3.11 Vediamo dei residui che non sono numeri interi, ma classi di omologia. Consideriamo il toro $\mathbb{T}^2$ immerso in $\mathbb{R}^3$, e sia z la restrizione al toro della terza coordinata. z è una sezione del fibrato banale, si annulla in due circonferenze S_{int} e S_{est}.

Da $e(E) = 0$ otteniamo $i^*\mathrm{Res}(z, E; S_{int}) + i^*\mathrm{Res}(z, E; S_{est}) = 0$ in $H^1(\mathbb{T}^2)$: infatti i due residui si rappresentano con le due circonferenze percorse in senso discorde e coefficiente entrambe 1, dunque due cicli omologhi. Questo esempio deriva dal seguente fatto generale: se Z è il luogo di zeri di una sezione *trasversale*, allora Z è una sottovarietà con un orientazione canonica e rappresenta il Poincaré-duale della classe di Eulero.

Nel caso M non è compatta, analizziamo il termine $j^*e_S(E, s)$ che compare nell'equazione **??**.

Definizione 3.12 Sia R una sottovarietà di M compatta a bordo C^∞ di dimensione m contenuta in U e contenente S nella propria parte interna. Sia V un intorno tubolare di ∂R contenuto in U e disgiunto da S, e definiamo $U' = R \cup V$, $U_0{}' = V$, $S' = R \smallsetminus V$. Notiamo che $U' \smallsetminus S' = U_0{}'$. Inoltre s è definita su $U' \smallsetminus S'$, quindi possiamo considerare la localizzazione

$$e_{S'}(E, s) \in H^r(U', U' \smallsetminus S') \simeq H^r(R, \partial R),$$

che denoteremo come $e_R(E, s)$.
L'immagine di $e_R(E, s)$ tramite la dualità di Lefscetz

$$\mathcal{L}_R : H^r(R, \partial R) \to H_{m-r}(R)$$

è rappresentata da un $(m - r)$-ciclo Γ per cui vale

$$\int_R \epsilon \wedge \tau + \int_{\partial R} s^*\psi \wedge \tau = \int_\Gamma \tau \qquad \forall \tau \in A^{m-r}(U'),\ d\tau = 0.$$

Lemma 3.13 *Sia j l'inclusione di coppie $(U', U' \smallsetminus S') \to (U, U \smallsetminus S)$. Allora $j^*e_S(E, s) = e_R(E, s)$.*

Dalla commutatività del diagramma della Proposizione **??** otteniamo infine il Teorema desiderato:

Teorema 3.14 (dei Residui della Classe di Eulero) *Sia M una varietà C^∞ connessa orientata di dimensione m e $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale reale orientato di rango r. Siano $(S_\lambda)_\lambda$ un numero finito di compatti connessi che ammettono intorni regolari disgiunti. Sia U un aperto che li contiene e s una sezione di E che non si annulla su $U \smallsetminus \bigcup_\lambda S_\lambda$. Allora se R è una sottovarietà di M compatta a bordo C^∞ di dimensione m contenuta in U e contenente S nella propria parte interna,*

$$\sum_\lambda (i_\lambda)_* Res(s, S_\lambda) = L_R(e_R(E, s)) \quad in \quad H_{m-r}(R).$$

Osservazione 3.15 Se R è connessa e $m = r$ abbiamo che $\mathcal{L}_R(e_R(E, s))$ è dato dall'integrale $\int_R \epsilon + \int_{\partial R} s^*\psi$ e quindi riotteniamo il Teorema dell'Indice. Per additività dell'integrale otteniamo il Teorema dell'Indice anche se R non è connessa.

4 Teoria di Chern-Weil delle classi caratteristiche

D'ora in poi ci occupiamo di fibrati vettoriali complessi.

Definizione 4.1 Sia E un fibrato vettoriale C^∞ complesso su M varietà C^∞. Definiamo l'insieme delle *p- forme a valori in* E come

$$A^p(M,E) = C^\infty(M, \bigwedge^p (T^c_{\mathbb{R}}M)^* \otimes E).$$

Dunque $A^0(M,E)$ è l'insieme delle sezioni di E.

Definizione 4.2 Una *connessione* per il fibrato vettoriale complesso E su M è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare

$$\nabla : A^0(M,E) \to A^1(M,E)$$

che soddisfa la Regola di Leibnitz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s) \quad \forall f \in C^\infty(M), \quad s \in A^0(M,E).$$

Lemma 4.3 *Una connessione è un operatore locale, nel seguente senso: se una sezione s è nulla su un aperto U, anche $\nabla(s)$ è nulla su U.*

Quindi le connessioni si possono restringere agli aperti. Per questo possiamo rappresentarle localmente come matrici con entrate forme differenziali. Sia infatti ∇ una connessione su E, e supponiamo di avere un riferimento locale $e = (e_1, \dots, e_r)$ per E su un aperto U. Allora per ogni $i = 1, \dots, r$,

$$\nabla(e_i) = \sum_{j=1}^r \theta_{ij} \otimes e_j, \quad \theta_{ij} \in A^1(U).$$

Definizione 4.4 θ_{ij} è la *matrice di connessione* di ∇ rispetto a e.

Data una sezione s su U, la possiamo scrivere come $\sum_{i=1}^r f_i e_i$ con $f_i \in C^\infty(U)$, e calcolando otteniamo

$$\nabla(s) = \sum_{i=1}^r \left(df_i + \sum_{j=1}^r f_j \theta_{ji} \right) \otimes e_i,$$

cioè,

$$\nabla(s) = df + \theta^T f.$$

Data una connessione ∇ la possiamo estendere ad un operatore $\nabla : A^q(M,E) \to A^{q+1}(M,E)$ imponendo la regola di Leibnitz : per ogni $s \in A^0(M,E)$, per ogni η q-forma,

$$\nabla(\eta \otimes s) = d\eta \otimes s + (-1)^q \eta \wedge \nabla s.$$

Definizione 4.5 Definiamo *operatore di curvatura* K la composizione

$$\nabla^2 : A^0(M,E) \to A^2(M,E).$$

In termini di un riferimento locale $e = (e_1, \dots, e_r)$ abbiamo

$$K(s) = \Theta f,$$

dove Θ è la matrice di 2-forme

$$\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta,$$

detta *matrice di curvatura* di ∇ rispetto a e.

Osservazione 4.6 Osservando le leggi di transizione di θ e Θ rispetto a un cambiamento di banalizzazione locale $\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}\ \varphi_\beta$:

$$\theta_\alpha = g_{\alpha\beta}\ \theta_\beta\ {g_{\alpha\beta}}^{-1} + dg_{\alpha\beta}\ {g_{\alpha\beta}}^{-1},$$

$$\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta}\ \Theta_\beta\ {g_{\alpha\beta}}^{-1},$$

notiamo che a differenza di Θ, θ non è un campo tensoriale su E. In effetti dato un punto $p \in M$ è sempre possibile trovare una banalizzazione locale tale che la matrice di connessione in p è la matrice nulla.

Per arrivare a definire le classi di Chern dei fibrati vettoriali complessi, facciamo prima una digressione sulle funzioni su $\mathcal{M}_n = M(n \times n, \mathbb{C})$ che sono invarianti per coniugio.

Definizione 4.7 Per ogni $k = 1, \dots, n$ sia $\sigma_k(X_1, \dots, X_n)$ il polinomio omogeneo di grado k definito dalla relazione

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + X_k) = 1 + \sigma_1(X_1, \dots, X_n) + \sigma_n(X_1, \dots, X_n).$$

Chiameremo σ_k il k-esimo *polinomio elementare simmetrico.* Ogni polimomio simmetrico φ in n variabili si scrive come $G(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, con G polinomio. In seguito useremo i *polinomi di Chern*

$$c_k = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \sigma_k,$$

che godono evidentemente della stessa proprietà.

Definizione 4.8 Una polinomio $P : \mathcal{M}_n \to \mathbb{C}$ è detto *invariante* se $P(A) = P(gAg^{-1})$ per ogni $A \in \mathcal{M}_n$, $g \in GL(n)$. I polinomi $P_i(A)$ elementari simmetrici degli autovalori di A, tra cui $P_1(A) = tr(A)$ e $P_n = det(A)$, sono invarianti, e li chiameremo *polinomi elementari invarianti.*

Proposizione 4.9 *Ogni polinomio invariante F su $\mathcal{M}_n$ si scrive come $G(P_1, \ldots, P_n)$, con G polinomio.*

Dimostrazione di ??. Definiamo una funzione su $\mathbb{C}^n$:

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = F,$$

allora f è evidentemente una fuzione simmetrica nei λ_i.
Dunque $f = G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, e la relazione

$$F(A) = G(P_1(A), \ldots, P_n(A))$$

vale su tutte le matrici diagonalizzabili che sono un aperto denso di $\mathcal{M}_n$, quindi vale su tutto $\mathcal{M}_n$. □

Osservazione 4.10 In particolare abbiamo un isomorfismo Φ di algebre graduate tra polinomi simmetrici in n variabili e polinomi invarianti su $\mathcal{M}_n$:

$$\Phi : G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mapsto G(P_1, \ldots, P_n).$$

Notiamo che

$$\Phi : G(c_1, \ldots, c_n) \mapsto G(\Phi(c_1), \ldots, \Phi(c_n). \tag{4.1}$$

Ritorniamo adesso ad un fibrato vettoriale complesso $E \to M$ di rango r. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento banalizzante di M, φ_α la banalizzazione su U_α, θ_α e Θ_α le matrici di connessione e curvatura di una connessione ∇. Dato che il prodotto wedge tra forme di grado pari è commutativo, possiamo trattare Θ_α come una matrice ordinaria. Se P è un polinomio invariante omogeneo di grado k su $\mathcal{M}_n$, ha dunque senso su U_α l'espressione $P(\Theta_\alpha)$, ed è una $2k$-forma differenziale. In effetti è una $2k$-forma differenziale globale su M, dato che su $U_\alpha \cap U_\beta$ abbiamo

$$\Theta_\alpha = g_{\alpha\beta}\ \Theta_\beta\ {g_{\alpha\beta}}^{-1}, \quad \text{cioè} \quad P(\Theta_\alpha) = P(\Theta_\beta).$$

Definizione 4.11 Se φ è il polinomio simmetrico omogeneo di grado k in n variabili corrispondente a P tramite Φ^{-1}, denoteremo la $2k$-forma differenziale globale su M appena definita, dipendente solo dalla connessione ∇ scelta, $\varphi(\nabla)$. Dalla **??**, se $\varphi = G(c_1, \ldots, c_n)$, abbiamo $\varphi(\nabla) = G(c_1(\nabla), \ldots, c_n(\nabla))$.

Vale il seguente fondamentale

Lemma 4.12 *Per ogni φ polinomio simmetrico omogeneo di grado k, $d\varphi(\nabla) = 0$.*

Vogliamo dimostrare che la classe in coomologia di $\varphi(\nabla)$ non dipende dalla connessione ∇ scelta. Lo dimostriamo con la forma differenza di Bott. Se abbiamo $p+1$ connessioni $\nabla_0, \dots, \nabla_p$ per E, e un polinomio simmetrico omogeneo φ di grado d, possiamo costruire una $(2d-p)$-forma differenziale $\varphi(\nabla_0, \dots, \nabla_p)$, alternante nelle connessioni in entrata, che soddisfa

$$\sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu} \varphi(\nabla_0, \dots, \nabla_{\nu}, \dots, \nabla_p) + (-1)^p d\varphi(\nabla_0, \dots, \nabla_p) = 0. \tag{4.2}$$

Per costruire la forma $\varphi(\nabla_0, \dots, \nabla_p)$, notiamo intanto che se $\nabla_1, \dots, \nabla_k$ sono connessioni su E, e $f_1, \dots, f_k$ sono funzioni C^∞ tali che $\sum_{i=1}^k f_i \equiv 1$, allora $\sum_{i=1}^k f_i \nabla_i$ è una connessione su E. Consideriamo ora il fibrato vettoriale $E \times \mathbb{R}^p \to M \times \mathbb{R}^p$ e sia ∇ la connessione su di esso data da

$$\nabla = \left(1 - \sum_{\nu=1}^{p} t_{\nu}\right) \nabla_0 + \sum_{\nu=1}^{p} t_{\nu} \nabla_{\nu},$$

dove $(t_1, \dots, t_p)$ è un sistema di coordinate su $\mathbb{R}^p$. Sia Δ^p il p-simplesso standard in $\mathbb{R}^p$ e $\pi : M \times \Delta^p \to M$ la proiezione. Allora abbiamo l'integrazione lungo la fibra

$$\pi_* : A^*(M \times \Delta^p) \to A^{*-p}(M).$$

Definizione 4.13 Definiamo la *forma differenza di Bott*:

$$\varphi(\nabla_0, \dots, \nabla_p) = \pi_*(\varphi(\nabla)).$$

La forma differenza di Bott soddisfa la **??**.

Lemma 4.14 *Sia φ un polinomio simmetrico omogeneo di grado k. La classe di coomologia $[\varphi(\nabla)] \in H^{2k}(M)$ non dipende dalla connessione ∇ scelta.*

Dimostrazione di ??. iano ∇ e ∇' due connessioni per E. Allora

$$\varphi(\nabla) - \varphi(\nabla') = d\varphi(\nabla, \nabla').$$

□

Definizione 4.15 Denoteremo la classe di coomologia appena definita come $\varphi(E)$. Le *classi di Chern* sono le $c_k(E) \in H^{2k}(M)$. Se M è una varietà olomorfa, definiamo $c_k(M)$ la k-esima classe di Chern del fibrato tangente olomorfo $T'M$.

Osservazione 4.16 È possibile definire le classi di Chern anche in $H^{2k}(M, \mathbb{Z})$, e mostrare che corrispondono a quelle appena definite per l'omomorfismo $H^{2k}(M, \mathbb{C}) \to H^{2k}(M, \mathbb{Z})$.

Vediamo ora le classi caratteristiche nella teoria di Čech-De Rham. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di M varietà C^∞, sia $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso di rango r e φ un polinomio simmetrico omogeneo di grado d. Scegliamo per ogni α una connessione ∇_α su U_α, sia $\nabla_* = (\nabla_\alpha)_\alpha$ e definiamo $\varphi(\nabla_*) \in A^{2d}(\mathcal{U})$ come

$$\varphi(\nabla_*)_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} = \varphi(\nabla_{\alpha_0}, \dots, \nabla_{\alpha_p}).$$

Allora per definizione della forma differenza di Bott $D\varphi(\nabla_*) = 0$. Inoltre, se $\nabla_*{}' = (\nabla_\alpha{}')_\alpha$ è un'altra famiglia di connessioni,

$$\varphi(\nabla_*{}') - \varphi(\nabla_*) = D\psi,$$

dove $\psi \in A^{2d-1}(\mathcal{U})$ è dato da

$$\psi_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} = \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \varphi(\nabla_{\alpha_0}, \dots, \nabla_{\alpha_\nu}, \nabla_{\alpha_\nu}{}', \dots, \nabla_{\alpha_p}{}').$$

Quindi $\varphi(\nabla_*)$ definisce una classe in $H^{2d}(A^\bullet(\mathcal{U})$ che non dipende dalla scelta della collezione di connessioni ∇_*. L'isomorfismo tra Čech- De Rham e De Rham manda $[\varphi(\nabla_*)]$ in $\varphi(E)$.

5 Residui delle Classi di Chern

Sia M una varietà C^∞ orientata, $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso di rango r. Per ottenere il Teorema dei Residui delle classi di Chern seguiamo il procedimento esposto nell'Osservazione **??**. L'oggetto geometrico $\mathcal{D}$ è in questo caso un l-frame, cioè un insieme di l sezioni linearmente indipendenti in ogni punto. La classe caratteristica $\phi(E)$ è una delle $c_i(E)$ con $i \geq r-l+1$. Cominciamo quindi dal **Teorema di Vanishing**:

Proposizione 5.1 (di Vanishing I) *Sia $s = (s_1, \ldots, s_l)$ un l-frame su M. Se ∇ è una connessione s-banale,*

$$c_i(\nabla) = 0 \quad per\ i \geq r - l + 1.$$

Lo dimostriamo come Corollario della più generale

Proposizione 5.2 *Sia $s = (s_1, \ldots, s_l)$ un l-frame su M. Se $\nabla_1, \ldots, \nabla_k$ sono connessioni s-banali,*

$$c_i(\nabla_1, \ldots, \nabla_k) = 0 \quad per\ i \geq r - l + 1.$$

Sia U un aperto di M e S un chiuso in U. Sia s un l-frame definito su $U \smallsetminus S$. Dato $\mathcal{U}$ il ricoprimento $U_0 = U \smallsetminus S, U_1 = U$, sappiamo che la i-esima classe di Chern $c_i(E|_U)$ si rappresenta come

$$c_i(\nabla_*) = (c_i(\nabla_0), c_i(\nabla_1), c_i(\nabla_0, \nabla_1)),$$

con ∇_0 e ∇_1 due qualsiasi connessioni rispettivamente su U_0 e U_1. Grazie alla Proposizione **??** possiamo definire la **Classe localizzata ad S**. Infatti prendendo come ∇_0 su $U \smallsetminus S$ una connessione s-banale otteniamo che

$$c_i(E|_U) = [(0, c_i(\nabla_1), c_i(\nabla_0, \nabla_1)].$$

In altre parole, $j* : H(U, U \smallsetminus S) \to H(U)$ manda

$$[(c_i(\nabla_1)|c_i(\nabla_0, \nabla_1))] \mapsto c_i(E|_U).$$

Quindi abbiamo di nuovo un candidato naturale: dimostriamo che la sua classe di coomologia relativa non dipende dalle scelte fatte.

Lemma 5.3 *La classe di $(c_i(\nabla_1)|c_i(\nabla_0, \nabla_1))$ in $H(U, U \smallsetminus S)$ non dipende dalla scelta della connessione s-banale ∇_0 e della connessione ∇_1.*

Dimostrazione di ??. upponiamo che ∇_0 e ${\nabla_0}'$ siano entrambe s-banali. Allora

$$(c_i(\nabla_1)|c_i({\nabla_0}', \nabla_1)) - (c_i(\nabla_1)|c_i(\nabla_0, \nabla_1)) = D(0|c_i(\nabla_0, {\nabla_0}', \nabla_1)).$$

Analogamente, per due connessioni $\nabla_1, {\nabla_1}'$ su U_1,

$$(c_i({\nabla_1}')|c_i(\nabla_0, {\nabla_1}')) - (c_i(\nabla_1)|c_i(\nabla_0, \nabla_1)) = D(c_i({\nabla_1}', \nabla_1)|c_i(\nabla_0, \nabla_1, {\nabla_1}')).$$

□

Definizione 5.4 Sia $i \geq r - l + 1$. La *i-esima Classe di Chern localizzata ad S rispetto ad s* è la classe

$$c_{iS}(E, s) = [(c_i(\nabla_1)|c_i(\nabla_0, \nabla_1))] \in H^{2i}(U, U \setminus S).$$

6 Residui di Baum-Bott

7 Residui topologici

8 Provvisorio

Fissato l'oggetto geometrico $\mathcal{D}$, quando scegliamo la classe localizzata è naturale richiedere che se $S \subset S'$, allora detta j l'inclusione di coppie $(M, M \setminus S') \to (M, M \setminus S)$ valga

$$j^* : \phi_S(E, \mathcal{D}) \mapsto \phi_{S'}(E, \mathcal{D}).$$