

---

# Finiteness properties of preperiodic points and invariant sets for polynomial mappings

Tesi di laurea specialistica

Candidato: Pietro Ploner

Relatore: Prof. Roberto Dvornicich

Lo studio dei sistemi dinamici ottenuti sul campo complesso mediante mappe polinomiali risale agli inizi della dinamica olografica ed ebbe particolare sviluppo a partire dagli anni venti, quando i francesi G. Julia e P. Fatou pubblicarono gli articoli in cui nacque lo studio degli insiemi che portano il loro nome. Nel corso degli anni questa classe di sistemi fu studiata con numerose tecniche, che abbracciavano diversi campi della matematica, dalla topologia alla teoria della misura.

All'inizio degli anni settanta si cominciò a osservare anche le proprietà algebriche dei sistemi dinamici polinomiali, dando origine a quella che venne chiamata “dinamica polinomiale algebrica” o “Aritmetica dei sistemi dinamici”. I primi a iniziare questi studi furono i polacchi K. K. Kubota e W. Narkiewicz, insieme al francese P. Liardet e all'inglese D. J. Lewis; essi stabilirono le nozioni che avrebbero in seguito generato la teoria delle altezze (questa frase meglio rivederla...) e ottennero i primi risultati di finitezza sugli insiemi invarianti.

Negli anni più recenti, ricordiamo soprattutto la scuola polacca, con W. Narkiewicz, T. Pezda e R. Marszalek, per la determinazione delle orbite finite su anelli di interi, il britannico J. Silverman e il giapponese S. Kawaguchi per la teoria delle altezze canoniche e gli italiani R. Dvornicich e U. Zannier per la dimostrazione di finitezza delle orbite preperiodiche ciclotomiche e la risoluzione di alcuni problemi lasciati aperti da Narkiewicz.

In questo lavoro ci proponiamo di esporre con la maggior completezza possibile gli ultimi risultati raggiunti nel campo della finitezza delle orbite e degli insiemi invarianti. Nel contempo mostreremo alcune congetture ancora

---

irrisolte sull'argomento.

Nel primo capitolo vengono riepilogati, senza dimostrazione, i principali risultati sui campi di numeri e gli anelli degli interi, che sono l'ambiente naturale di lavoro per lo studio della dinamica algebrica, oltre alla teoria dei valori assoluti e dei campi locali. Viene quindi introdotta la teoria delle altezze, strumento fondamentale per lo studio dei problemi di finitezza, con i principali risultati e problemi ancora aperti.

Il secondo capitolo, dopo aver richiamato le definizioni fondamentali dei sistemi dinamici e degli insiemi di Fatou e Julia, tratta il problema della finitezza delle orbite. Si analizzano dapprima le orbite periodiche e, dopo la dimostrazione del celebre risultato di Baker sull'infinità delle orbite periodiche in campi algebricamente chiusi, si analizza il caso dei campi di numeri e di come il problema si possa ridurre al caso locale, con lo studio delle estensioni finite del campo  $\mathbb{Q}_p$  dei numeri  $p$ -adici. Si passa quindi allo studio delle orbite preperiodiche e, dopo aver mostrato i principali risultati di finitezza in opportune estensioni, viene studiato il problema della lunghezza massima delle orbite suddette; questa volta la riduzione al caso locale risulta inefficace e il problema viene invece affrontato risolvendo particolari equazioni alle unità sull'anello degli interi. Infine viene risolto un problema esplicito: la determinazione di tutte le orbite finite nei campi quadratici  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ , con  $m$  un intero libero da quadrati, esempio che permette di mostrare gran parte delle tecniche precedentemente introdotte.

Nell'ultimo capitolo si analizzano infine gli insiemi invarianti e i loro principali risultati di finitezza, che vanno sotto il nome di "Proprietà di Narkiewicz". Le due principali proprietà sono dette  $P$  e  $SP$  e contraddistinguono i campi in cui i polinomi hanno solo insiemi invarianti finiti; viene in particolare trattato il problema della non-equivalenza di queste due proprietà, recentemente dimostrata da R. Dvornicich e U. Zannier, che utilizza come strumento un'ulteriore proprietà: la proprietà  $N$ , che generalizza i risultati di finitezza sulle altezze ottenuti nel primo capitolo. Infine si tratta della proprietà  $VP$ , che si occupa dell'equivalente degli insiemi invarianti per coppie di polinomi, e viene accennato alla sua possibile o meno equivalenza con  $SP$ , problema che risulta tuttora aperto.

Principali referenze sono:

- R. Dvornicich e U. Zannier, Cyclotomic diophantine problems, preprint.
- W. Narkiewicz, *Polynomial mappings*, Springer-Verlag 1995.