Metodi per la soluzione veloce di una classe di equazioni di Riccati algebriche

Candidato: Federico Poloni
Relatori: proff. D.A. Bini, B. Meini

29 Giugno 2007

Sommario

Consideriamo l'equazione matriciale

$$XCX + B - AX - XE = 0,$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $X, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, nota come *equazione di Riccati algebrica non simmetrica* (NARE). In particolare, siamo interessati a studiare un caso particolare dell'equazione, derivante da un problema fisico nell'ambito della teoria del trasporto di neutroni, nel quale i coefficienti sono nella forma

$$\begin{aligned}
B &= ee^T, & C &= qq^T,\\
A &= \Delta - eq^T, & E &= D - qe^T\\
D &= \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), & \Delta &= \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n),\\
d_i &= \frac{1}{cx_i(1-\alpha)}, & \delta_i &= \frac{1}{cx_i(1+\alpha)},\\
e &= \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T, & q_i &= \frac{w_i}{2x_i}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Nella tesi, esaminiamo diversi metodi iterativi noti in letteratura per il calcolo della soluzione minimale non negativa X^*.

(a) il metodo di Newton [C.H. Guo–Laub, 2000],

(b) lo *structured doubling algorithm* [X.X. Guo–Lin–Xu, 2006],

(c) la riduzione ciclica [Ramaswami, 1999],

(d) il metodo di Newton applicato all'iterazione di Lu [Lu, 2005].

Utilizzando le proprietà delle matrici con struttura di rango, sviluppiamo versioni specializzate dei quattro algoritmi citati per il problema (1), che permettono di abbassarne il costo computazionale da $O(n^3)$ operazioni aritmetiche per passo del caso generale a $O(n^2)$. Mostriamo inoltre come sia possibile applicare agli algoritmi sviluppati la *tecnica di shift* [He–Meini–Rhee, 2001] per accelerare la convergenza nei cosiddetti *casi critici* del problema (cioè, nel caso (1), quando $c = 1, \alpha = 0$). Gli esperimenti numerici condotti evidenziano l'efficacia dell'approccio proposto.

Come risultato supplementare, riusciamo a dimostrare alcune interessanti relazioni algebriche che legano gli algoritmi analizzati e forniscono nuovi spunti per l'analisi della convergenza e lo sviluppo di nuovi algoritmi. In particolare, proviamo che il metodo (d) calcola la stessa iterazione del metodo (a) lavorando direttamente sui generatori della struttura di rango delle matrici coinvolte, e che il metodo (b) coincide essenzialmente con il metodo (c), a meno dell'applicazione di una trasformazione preliminare dell'equazione.