

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

Analisi variazionale del problema della minima resistenza indotta di un'ala di apertura finita

Candidato:

Maria Teresa Panaro

Relatore :

Prof. Aldo Frediani

Controrelatore :

Prof. Franco Giannessi

Anno Accademico 2005-2006

Indice

Introduzione	3
1 Elementi di aerodinamica dei profili alari portanti	6
1.1 Corrente bidimensionale	6
1.2 Ali finite	13
2 Minima resistenza indotta per un monoplano	19
2.1 Alcune considerazioni preliminari	20
2.1.1 Esistenza in senso generalizzato del funzionale	20
2.1.2 Convessità	23
2.2 Una condizione di ottimalità	25
2.3 Metodi diretti	27
2.3.1 La distribuzione ellittica	28
2.3.2 Descrizione dell'algoritmo e risultati numerici	30
2.4 Duale del problema della resistenza indotta	42
2.5 Conclusioni e sviluppi futuri	44
A Richiami di Calcolo delle variazioni	46
A.1 Equazione di Eulero	46
A.2 Metodo diretto	49
A.2.1 Il metodo di Ritz	50
B Teoria lagrangiana della dualità	54
B.1 Teoria della dualità	54
B.2 Separazione debole	57
B.3 Teoria lagrangiana della dualità	62
C Integrali impropri	68
D Integrali di Glauert	70
Bibliografia	74

Introduzione

Lo sviluppo dell'Aerodinamica ha avuto inizio solo nei primi anni del novecento, con la formulazione dei fondamenti teorici del modello fluidodinamico continuo. Il calcolo delle forze aerodinamiche agenti sugli aeroplani si basa sulle equazioni differenziali di Navier (1785-1836) - Stokes (1819-1903), in cui il fluido si considera come un continuo, assumendo che la velocità del fluido stesso, in un punto dello spazio tridimensionale e in un certo istante, sia la media delle velocità di un insieme numeroso (in senso statistico) di molecole in un intorno del punto.

Le equazioni di Navier-Stokes hanno avuto grande successo nello studio del moto dei fluidi non rarefatti e nello studio del moto di velivoli nell'atmosfera terrestre, argomento di particolare interesse per lo svolgimento di questo lavoro.

Prandtl (1875-1953) e i suoi allievi della Scuola di Gottinga hanno contribuito in modo rilevante alla comprensione dei fenomeni aerodinamici, in particolare riguardo a quelli di interesse aeronautico. Si riconosce intanto, attraverso esperimenti, che per alti valori del numero di Reynolds, in un fluido reale, la viscosità ha un ruolo significativo solo in uno strato molto sottile in vicinanza della superficie del corpo; fuori di tale strato, detto "strato limite", il flusso può essere assunto come non dissipativo.

Lo strato limite è sede di vorticità distribuita, che è responsabile della nascita della portanza; quest'ultima in base al Teorema di Kutta (1867-1914) - Joukowski (1847-1921) è pari al prodotto della velocità di volo, della densità dell'aria e della circuitazione (o vorticità).

Fondamentali progressi sono stati compiuti a Gottinga riguardo alla determinazione delle forze aerodinamiche per le ali di apertura finita.

In una corrente uniforme all'infinito a monte, la presenza di un'ala di apertura finita dà luogo ad un sistema di vortici, che tendono ad arrotolarsi alle estremità dell'ala stessa, persistono a notevole distanza dall'aereo e, sono ad esempio, ben visibili in fase di decollo o atterraggio, in presenza di umidità dell'aria. Questi vortici inducono velocità in tutto il campo; in particolare, nella zona interna all'apertura alare, si induce una velocità verso il basso.

A causa di tale velocità, sull'ala si ha la nascita di una componente della resistenza, legata alla portanza e nota come "resistenza indotta".

Prandtl ha affrontato e risolto il problema variazionale della ricerca di una distribuzione di portanza lungo l'apertura alare che renda minima la resistenza indotta.

Per tale problema isoperimetrico (nel caso di un'ala piana), la condizione di ottimalità individuata è che la velocità indotta sia costante lungo l'intera apertura alare; la distribuzione di portanza ellittica soddisfa tale condizione. Questo risultato è stato fondamentale nello sviluppo dell'aviazione dato che, ad oggi, i velivoli sono caratterizzati dalla presenza di un'ala, progettata in modo che la distribuzione di portanza sia prossima a quella ellittica.

La Comunità Europea nel sesto e settimo programma quadro, nel documento noto come Vision 2020, ritiene strategico investire nello studio di nuove configurazioni per gli aeroplani al fine di ridurre i consumi e minimizzare l'impatto ambientale. In questo contesto, la minimizzazione della resistenza indotta è il problema più rilevante e attuale per l'aeronautica del futuro. È noto infatti che tale forza, in fase di decollo, è causa principale del rumore e rappresenta circa l'ottanta per cento dell'intera resistenza e, in crociera, non è mai inferiore al quarantacinque per cento della resistenza totale.

Per i dati riportati dalla compagnia Airbus una riduzione dell'uno per cento della resistenza, per aerei di grandi dimensioni, permette di risparmiare in un anno fino a quattrocentomila litri di carburante e, di conseguenza, di ridurre le emissioni nocive di circa cinquemila chili.

Diverse configurazioni sono state proposte; alcuni sono velivoli multiplani, con elementi portanti non orizzontali. Nel 1924, Prandtl pubblicò il report NACA TN182, dal titolo "Induced drag in multiplanes", nel quale viene definito il sistema portante noto come "Best Wing System", ovvero il sistema portante con minima resistenza indotta a parità di portanza totale e di apertura alare. Tale sistema è costituito da quattro ali che, in vista frontale, formano un box rettangolare, con due ali orizzontali e due paratie di estremità. La configurazione aerodinamica che traduce in Ingegneria Aeronautica i risultati sul Best Wing System, è stata definita "PrandtlPlane".

Per queste ragioni è sembrato utile riconsiderare il problema, proposto da Prandtl, della minima resistenza indotta per un'ala di apertura finita, al fine di proporre una revisione matematicamente corretta e introdurre, per la prima volta, una sua formulazione duale legata al recente sviluppo della Teoria lagrangiana della Dualità.

Abbiamo preferito inserire le basi matematiche necessarie per la realizzazione di questo lavoro in appendice, nell'ottica di renderne più agevole la lettura e convinti che possano costituire, autonomamente, un esauriente compendio per un primo approccio al Metodo Diretto e alla Teoria lagrangiana della

Dualità.

Presentiamo ora una breve descrizione di questa tesi di laurea:

- **Capitolo 1**

Il capitolo, che si divide in due sezioni, è un'utile introduzione alle equazioni dei fluidi ideali e alle definizioni legate ai profili aerodinamici portanti.

Nella prima sezione si introducono gli strumenti per l'analisi del campo di moto attorno ad un profilo portante. È inoltre presentata la Teoria vorticoso di Ludwig Prandtl; tale teoria consiste nel simulare un profilo, con un tubo vorticoso che si appoggia sul profilo stesso e calcolare la distribuzione di vorticità, sulla sua superficie, capace di rendere la superficie stessa linea di corrente. Nella seconda sezione si esamina il problema fisico della generazione della portanza di un'ala reale immersa in una corrente costante all'infinito. Definiremo il concetto di resistenza indotta e i possibili modi di calcolarla in funzione della schematizzazione matematica adottata.

- **Capitolo 2**

Presentiamo in questo capitolo il problema della minima resistenza indotta, fissata la portanza. Ci siamo occupati di rintracciare una classe di funzioni (che rappresentano la distribuzione di portanza lungo l'apertura alare) per cui risulti ben definito il "funzionale resistenza indotta". A tal fine abbiamo richiesto che, per questa classe di funzioni, esista finito l'integrale doppio presente nel funzionale e calcolato nel senso principale di Cauchy. Abbiamo dimostrato che tale funzionale è strettamente convesso in un'opportuna classe di funzioni e ciò ci ha permesso di rintracciare una condizione necessaria e sufficiente di ottimalità. Tramite la Teoria lagrangiana della dualità abbiamo proposto una formulazione duale di tale problema isoperimetrico. Sfruttando il Metodo diretto abbiamo ottenuto la soluzione esatta a tale problema variazionale e abbiamo anche proposto un metodo numerico, implementato tramite il software commerciale MapleV e basato sul Metodo di Ritz, che permette di ottenere soluzioni, approssimate, del problema molto vicine a quella ottima.

Capitolo 1

Elementi di aerodinamica dei profili alari portanti

1.1 Corrente bidimensionale

Si consideri un solido immerso in una corrente traslatoria, con velocità uniforme all'infinito.

Definizione 1.1. *sia P un punto del campo, sia $\vec{V}(P)$ la velocità nel punto P , sia c una linea chiusa definita nel campo. Si definisce:*

- *circuizione Γ lungo c*

$$\Gamma \doteq \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{p} ;$$

- *vortice \vec{w} il vettore*

$$\vec{w} \doteq \text{rot } \vec{V} ;$$

- *linea vorticoso una curva tangente in ogni punto a \vec{w} ;*
- *tubo vorticoso l'insieme delle linee vorticoso passanti per una curva chiusa di area finita;*
- *intensità di un tubo vorticoso il flusso di \vec{w} attraverso una sua sezione σ*

$$i \doteq \int_{\sigma} \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma .$$

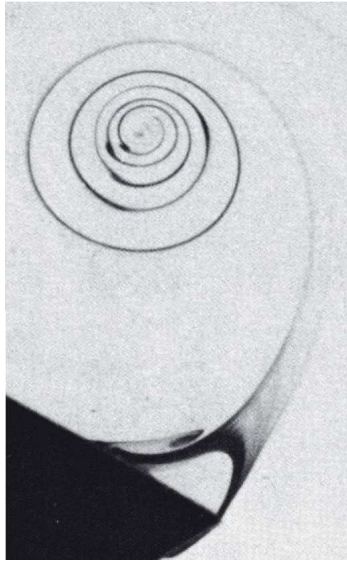


Figura 1.1: Visualizzazione della formazione del vortice di distacco al bordo di uscita di un profilo alare.

Teorema 1.2 (Primo teorema di Helmholtz). *L'intensità di un tubo vorticoso è la stessa in tutte le sue sezioni trasversali.*

Proposizione 1.3. (*Paradosso di Alembert*) *La risultante delle forze che agisce su un corpo immerso in una corrente bidimensionale ideale è nulla.*

Il paradosso di Alembert sembra rendere vana l'aerodinamica del fluido ideale. In realtà, pur mantenendo l'ipotesi di fluido ideale, in un moto piano, è possibile ottenere un corpo portante, realizzando sul ventre una pressione maggiore di quella sul dorso, ovvero occorre introdurre una circuitazione che sia capace di creare una asimmetria nel campo di velocità.

Teorema 1.4 (Teorema di Kutta-Jukovski). *In un flusso stazionario, subsonico, bidimensionale dato da una corrente ideale uniforme che investe un corpo impermeabile, la forza aerodinamica \vec{F} è data da:*

$$\begin{cases} D = 0 \\ P = \rho V_\infty \Gamma \end{cases}$$

dove D è la componente di \vec{F} lungo la direzione della corrente asintotica, P quella nella direzione ortogonale, ρ e V_∞ la densità del fluido e la velocità asintotica della corrente.

Definizione 1.5. *Definiamo:*

- **profilo alare** la sezione trasversale di un'ala che si assume estendersi lungo l'asse y , con la corrente asintotica V_∞ diretta secondo la direzione dell'asse x ed inclinazione α .
In genere un'ala può avere profili variabili lungo la sua apertura.

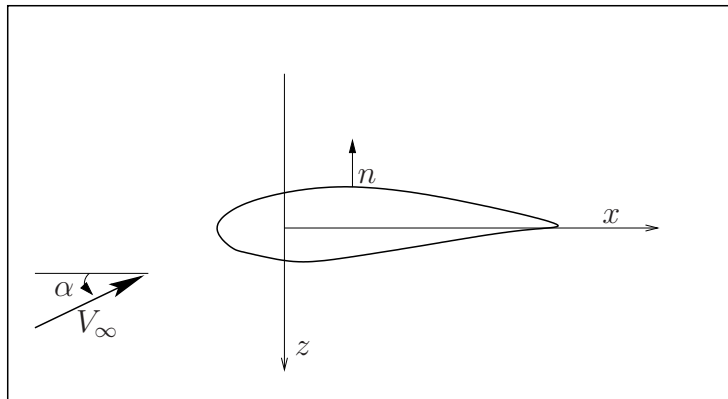


Figura 1.2: Profilo alare.

- **Linea media** il luogo dei punti equidistanti dalla superficie superiore (dorso) ed inferiore (ventre), misurati perpendicolarmente alla linea media stessa.
- Il punto anteriore della linea media **bordo di attacco**, quello posteriore **bordo di uscita**.
- **Corda** del profilo il segmento retto che congiunge i due bordi estremi.
- **Camber** del profilo la massima ordinata della linea media rispetto alla corda, misurata normalmente alla corda stessa.
- La forma del bordo d'attacco è generalmente arrotondata.

Possiamo simulare sistemi portanti, ad esempio un profilo, con un tubo vorticoso che si appoggia sul profilo stesso e calcolare la distribuzione della vorticità sulla superficie del profilo (Figura 1.4) (equivalente alla circuitazione elementare $\vec{\gamma}(s)$ espressa in funzione dell'ascissa curvilinea s) capace di rendere la superficie stessa linea di corrente. Questa strategia, nota come Teoria vorticoso, fu proposta da Ludwig Prandtl negli anni 1910-1920 ed è tuttora alla base dell'analisi delle superfici portanti.

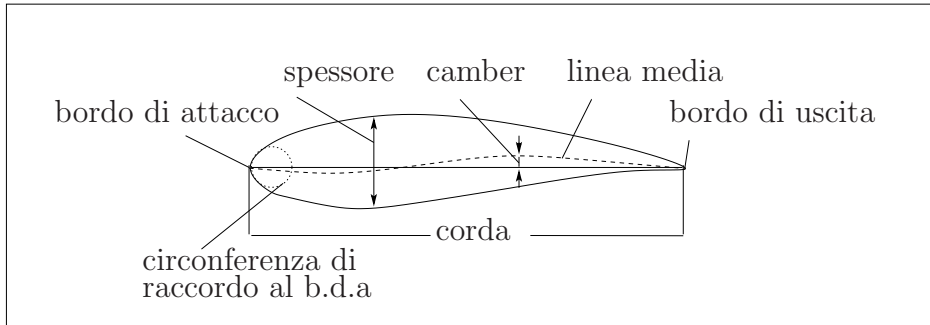


Figura 1.3: Elementi del profilo.

Il concetto di simulare il profilo con una superficie vorticoso ha come significato fisico il fatto che, per alti valori del numero di Reynolds in un fluido reale, lo strato limite, ossia la regione adiacente al corpo in cui la velocità passa da un valore finito a zero, è molto sottile e sede di vorticità distribuita $\vec{\gamma}(s)$; tale vorticità può essere considerata quasi aderente al corpo stesso.

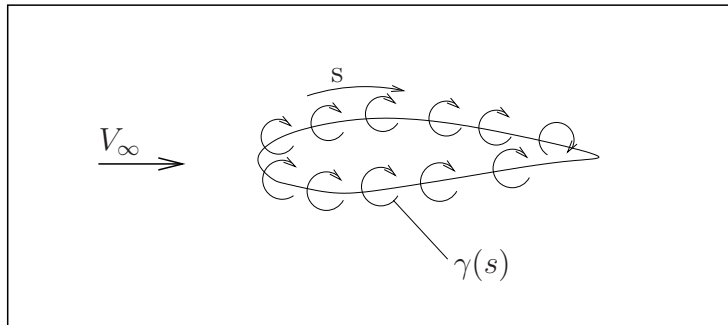
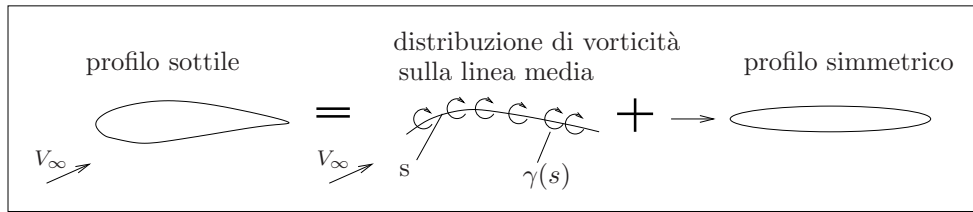


Figura 1.4: Rappresentazione del profilo come tubo vorticoso.

Possiamo assumere che il campo delle velocità attorno ad un profilo sia esprimibile come due problemi:

- un campo simmetrico derivante dallo spessore;
- un campo non simmetrico derivante dal camber della linea media e dell'angolo di attacco.

Il campo derivante dallo spessore non concorre alla determinazione della portanza. Nello studio del problema non simmetrico si schiaccia la vorticità sulla linea media; è su questa che dobbiamo impostare la condizione di tangenza, ossia la linea media deve coincidere con la linea di corrente. Lungo la



linea media le circolazioni elementari della superficie inferiore e superiore si sommeranno algebricamente.

Calcolando la circuitazione lungo un contorno dn per ds che contenga il profilo schematizzato come linea media otteniamo:

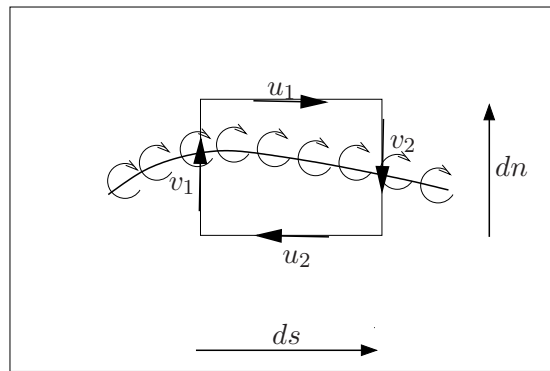


Figura 1.5: Calcolo della circuitazione lungo un contorno dn per ds

$$\begin{aligned} d\Gamma &= -\vec{v}_2 \cdot \vec{dn} + \vec{u}_1 \cdot \vec{ds} + \vec{v}_1 \cdot \vec{dn} - \vec{u}_2 \cdot \vec{ds} = \\ &= (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{ds} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{dn} = \\ &= \vec{\gamma}(s) \cdot \vec{ds}. \end{aligned}$$

Facendo tendere dn a zero si ha:

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 .$$

Il salto della velocità tangenziale attraverso la linea vorticoso è pari all'intensità locale della vorticità per unità di lunghezza.

Per un profilo immerso in una corrente ideale è possibile ottenere infinite soluzioni potenziali variando la circuitazione Γ intorno al profilo stesso.

Risulta univocamente determinato il campo di moto intorno al profilo e la corrispondente portanza, individuata dal teorema di Kutta-Jukovski, se imponiamo la **condizione di Kutta** (fig 1.6):

la velocità al bordo di uscita è continua; in particolare dobbiamo imporre che il bordo d'uscita sia un punto di ristagno per bordi aguzzi e finita per bordi a cuspidi. Considerando la relazione trovata con la vorticità risulta che la condizione di Kutta può essere, in ogni caso, formulata come:

$$\gamma_{\text{bordo di uscita}} = 0 .$$

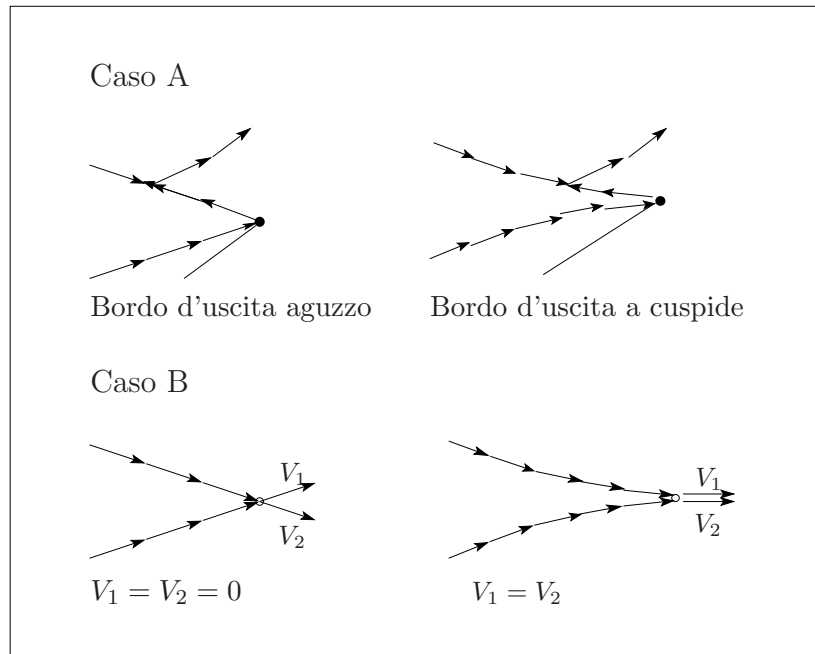


Figura 1.6: Si noti che nel caso A nel girare intorno al bordo d'uscita, la velocità deve invertire il suo verso, il che causa in tale punto un gradiente di velocità infinito: una minima viscosità rende così lo sforzo viscoso infinito, quindi fisicamente non accettabile.

Teorema 1.6 (Teorema di Kelvin). *Nel campo di moto di un fluido non viscoso la circuitazione della velocità lungo una linea c , costituita sempre dalle stesse particelle fluide, non cambia durante il movimento ovvero*

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0.$$

Dal teorema di Kelvin segue che il moto permanente di un fluido non viscoso attorno ad un profilo alare, in una corrente che è uniforme all'infinito, è irrotazionale. Infatti ad un dato istante t un qualunque circuito l_t è formato da punti fluidi provenienti da un corrispondente circuito l_∞ situato all'infinito

a monte.

Per il teorema di Stokes:

$$\oint_{l_\infty} \vec{v} \cdot d\vec{p} = 0$$

perché all'infinito essendo la velocità indisturbata, è costante, le sue derivate sono quindi nulle. Segue che anche $rot \vec{v} = 0$.

Per il teorema di Kelvin anche:

$$\oint_{l_t} \vec{v} \cdot d\vec{p} = 0$$

e siccome l_t è una linea qualsiasi possiamo affermare che la circuitazione della velocità lungo un qualsiasi contorno chiuso che non includa il profilo è nulla. Questo per il teorema di Stokes equivale a dire che in tutto il campo si ha:

$$rot \vec{v} = 0.$$

Se il circuito contiene il profilo non può provenire dall'infinito: quindi la circuitazione attorno al profilo può essere diversa da zero.

La irrotazionalità, quando esiste viene introdotta nella corrente dal profilo che diventa portante. Il teorema di Kelvin impone la conservazione particellare della vorticità: la vorticità di una particella o di un insieme di particelle deve essere costante durante la sua evoluzione nel tempo.

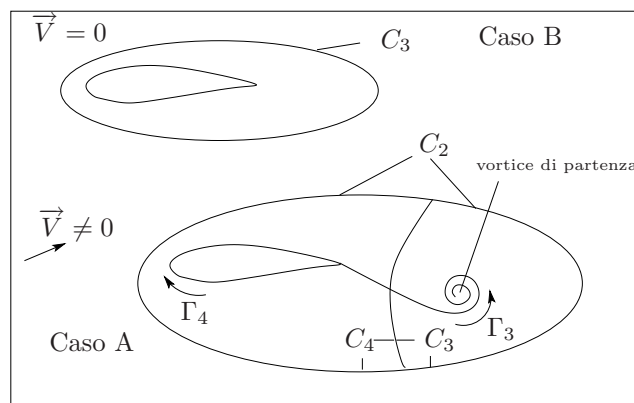


Figura 1.7: Caso A: fluido in quiete $\Gamma_1 = 0$. Caso B: campo di moto subito dopo l'avvio del moto $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, $\Gamma_3 = \Gamma_4$.

In assenza di velocità, la circuitazione di un gruppo di particelle lungo un contorno che abbraccia il profilo è nulla, la circuitazione per lo stesso insieme di particelle deve rimanere nulla anche quando si ha una velocità

asintotica diversa da zero. Poiché in questo caso, la condizione di Kutta impone una circuitazione diversa da zero calcolata attorno al profilo, significa che una stessa circuitazione ma in senso opposto si genera nel fluido; tale circuitazione essendo legata alle particelle, viene trasportata all'infinito a valle dalla corrente.

L'ipotesi di incompressibilità fa sì che $\rho = \rho_\infty$ e per l'equazione di continuità:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V},$$

possiamo concludere che il campo è solenoidale ossia

$$\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (1.1)$$

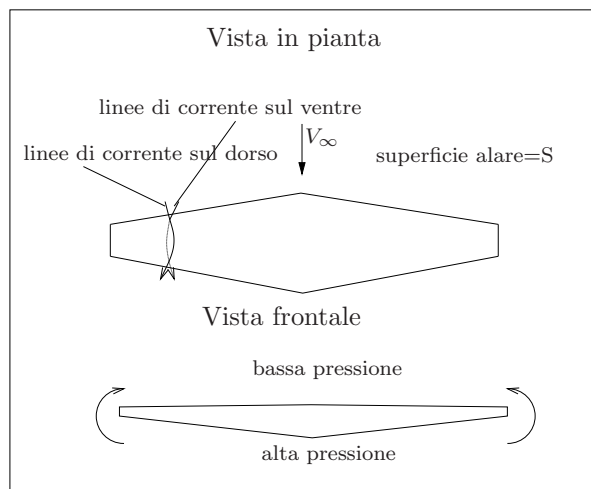
Dall'irrotazionalità ($\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$) deriva che esiste un potenziale di velocità φ ovvero $\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi$. Riscriviamo l'equazione (1.1) in termini di potenziale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \nabla^2 \varphi = 0, \quad (1.2)$$

ne segue che il potenziale φ deve essere una funzione armonica.

1.2 Ali finite

Con la teoria dello strato vorticoso è possibile calcolare come la portanza si ripartisca sulla corda del profilo ma da quanto visto la resistenza all'avanzamento resta nulla.



In realtà, pur mantenendo l'ipotesi di fluido ideale, in un moto piano, è possibile ottenere un corpo portante, realizzando sul ventre una pressione maggiore di quella sul dorso, ovvero occorre introdurre una circuitazione che sia capace di creare una asimmetria nel campo di velocità.

Definizione 1.7. Per un'ala finita indichiamo con $2b$ l'apertura alare e con c_m la **corda media** che, se indichiamo con S la superficie in pianta dell'ala, è definita dalla relazione:

$$c_m 2b = S.$$

Si definisce **allungamento** (*aspect ratio*, AR) il rapporto fra l'apertura e la corda media:

$$AR = \frac{2b}{c_m}.$$

Se consideriamo un'ala finita, immersa in una corrente uniforme all'infinito a monte, dobbiamo aspettarci un campo di moto tridimensionale (Figura 1.8):

- la portanza è generata ancora una volta dai campi di pressione, si deve avere sul ventre dell'ala una pressione maggiore di quella sul dorso.



Figura 1.8: Vortici generati da un Cessna CitationVI.

- A causa di tale squilibrio, il flusso in prossimità delle estremità dell'ala tende a risalire dal ventre verso il dorso: la depressione sul dorso porta i filetti di corrente a spostarsi verso la fusoliera mentre la sovrappressione sul ventre sposta i filetti verso l'esterno. Si creano così delle componenti di velocità lungo l'apertura alare (ovvero il campo di moto è tridimensionale).
- La presenza dell'ala dà luogo ad un sistema di vortici, che tendono ad arrotolarsi alle estremità dell'ala stessa. I due vortici liberi, sono controtanti, persistono a notevole distanza dall'aereo e, sono ad esempio, ben visibili in fase di decollo o atterraggio, in presenza di umidità dell'aria. (Figura 1.9).
- La presenza di questi vortici liberi induce delle velocità in tutto il campo, in particolare, a causa del loro verso di rotazione inducono velocità verso il basso nella zona interna all'apertura alare.

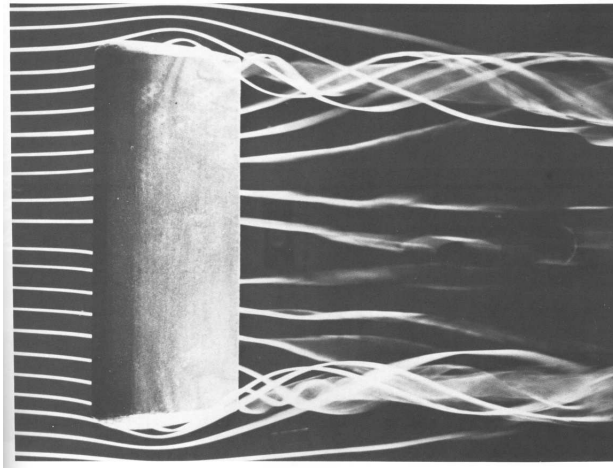


Figura 1.9: Distacco dei vortici al bordo d'uscita dell'ala.

La velocità risultante \vec{V}_{eff} , dovuta alla composizione della velocità indotta \vec{w} e quella asintotica \vec{V}_{∞} , ha un angolo di attacco rispetto a quello di \vec{V}_{∞} deviato verso il basso di un angolo α_i , che prende il nome angolo di incidenza indotta (Figura 1.10).

Poiché la velocità indotta è sempre molto piccola rispetto alla velocità asintotica possiamo considerare $\alpha_i(y) \simeq \frac{w(y)}{V_{\infty}}$.

- Se l'allungamento alare è sufficientemente grande possiamo supporre che ogni sezione dell'ala si comporti come una sezione di un'ala infinita

che lavora con un angolo d'incidenza effettivo minore rispetto a quello geometrico e che è pari a $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$.

La forza aerodinamica risultante \vec{F} , non considerando gli effetti viscosi, è normale alla direzione locale della corrente, quest'ultima è inclinata dell'angolo di incidenza indotta rispetto alla velocità asintotica, per cui chiamiamo resistenza indotta D_i la componente della forza aerodinamica \vec{F} , parallela alla direzione della velocità asintotica.

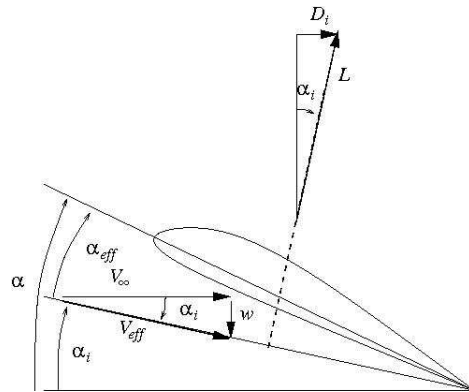


Figura 1.10: α -angolo di incidenza geometrico, α_i -angolo di incidenza indotto, α_{eff} -angolo di incidenza effettivo.

Considerando il teorema di Kutta-Joukowski si ha:

$$\begin{aligned} L &= F \cos \alpha_i = \int_{-b}^b \rho \Gamma V_\infty dy, \\ D_i &= F \sin \alpha_i = \rho \int_{-b}^b w(y) \Gamma dy. \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove la doppia integrazione che definisce la resistenza indotta D_i è sempre da intendersi come integrazione nel senso principale di Cauchy (Appendice C, (C.2)).

Nel prossimo capitolo ci occuperemo in modo più dettagliato della convergenza e buona definizione di questo funzionale.

Per porre in termini matematici il problema di determinare la velocità indotta w , possiamo fare due ipotesi:

- l'arrotolamento dei vortici avviene immediatamente e allora si ha lo schema del vortice a staffa (Figura 1.11).

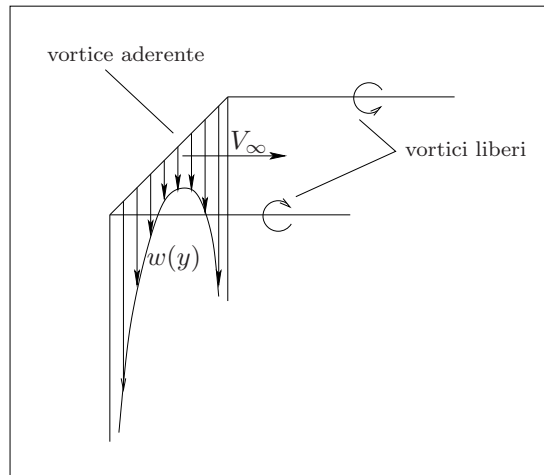


Figura 1.11: Vortice a staffa.

- Lo strato vorticoso persiste e si ha lo schema dello strato vorticoso di scia (Figura 1.12).

La prima schematizzazione fatta da Prandtl assumeva la vorticità divisa in un vortice aderente che si estende lungo l'apertura alare, due vortici liberi che partono dalle estremità alari e per effetto della mutua induzione, tendono a spostarsi verso il basso e si estendono all'infinito a valle. Tale sistema di vortici è chiamato vortice a staffa o a ferro di cavallo.

Assunto l'asse y sul bordo di uscita con origine al centro del bordo e l'asse z diretto verso il basso, dato che la circuitazione è costante lungo il vortice a ferro di cavallo e che il vortice aderente non induce velocità su se stesso, si ha che la velocità indotta $\vec{w}(y)$ in un punto y del bordo è dovuta ai due vortici semi indefiniti e vale:

$$w(y) = \frac{\Gamma}{4\pi(b-y)} + \frac{\Gamma}{4\pi(b+y)} = \frac{b\Gamma}{2\pi(b^2 - y^2)}.$$

Il minimo è in $y = 0$ e vale $w_{min} = \frac{\Gamma}{2\pi b}$.

Osserviamo che questo modello impone per $y \rightarrow \pm b$ una velocità indotta infinita cosa fisicamente non accettabile.

Dopo molti anni di dispute, con un grande contributo da parte di Lancaster, Prandtl ha formalizzato un nuovo modello per rappresentare l'ala finita simulandola con un certo numero di vortici a staffa tutti sovrapposti sulla stessa linea dei vortici aderenti.

Se consideriamo un numero infinito di vortici a staffa, otteniamo una linea portante, in cui vi è una variazione continua di circuitazione lungo il vortice

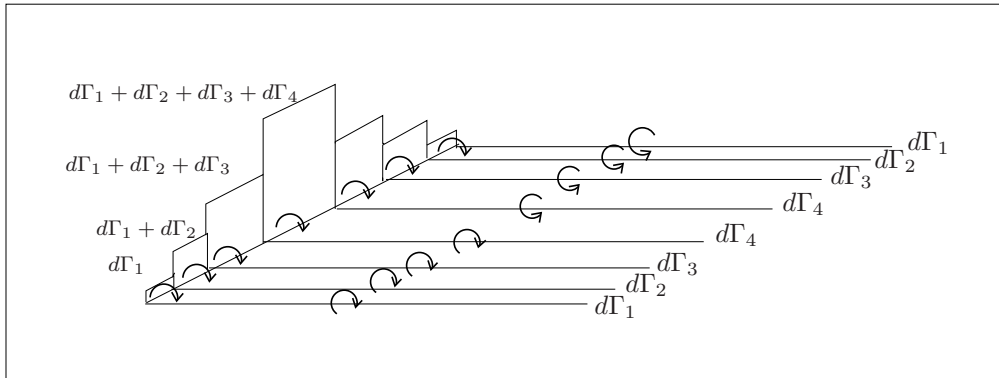


Figura 1.12: Strato vorticoso di scia: sulla linea portante le circolazioni si sommano, in modo che le loro differenze rappresentino i vortici liberi che si dipartono dal bordo di uscita.

aderente mentre quelli liberi hanno intensità che rappresenta tali variazioni, ovvero se nel punto y la circolazione è $\Gamma(y)$ l'intensità del vortice libero è $d\Gamma = \left(\frac{d\Gamma}{dy}\right) dy$.

Per la legge di Biot-Savart, la velocità indotta dal vortice libero uscente dal tratto infinitesimo dy in un punto di ascissa y_0 della linea portante vale:

$$dw(y_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{y - y_0} \right). \quad (1.4)$$

Per ottenere la velocità indotta in y_0 da tutto lo strato vorticoso di scia dobbiamo integrare la (1.4) sull'intera apertura alare:

$$w(y_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{y - y_0}. \quad (1.5)$$

Capitolo 2

Minima resistenza indotta per un monoplano

Consideriamo un'ala, ridotta ad un segmento rettilineo, di apertura alare due, immersa in una corrente asintotica di velocità \vec{V}_∞ ed un sistema di coordinate cartesiane con origine nel centro del segmento, asse y parallelo al segmento stesso e asse x parallelo e concorde alla velocità \vec{V}_∞ , asse z rivolto verso il basso (Figura 2.1).

Vogliamo determinare una classe \mathcal{X} di funzioni Γ per cui il funzionale

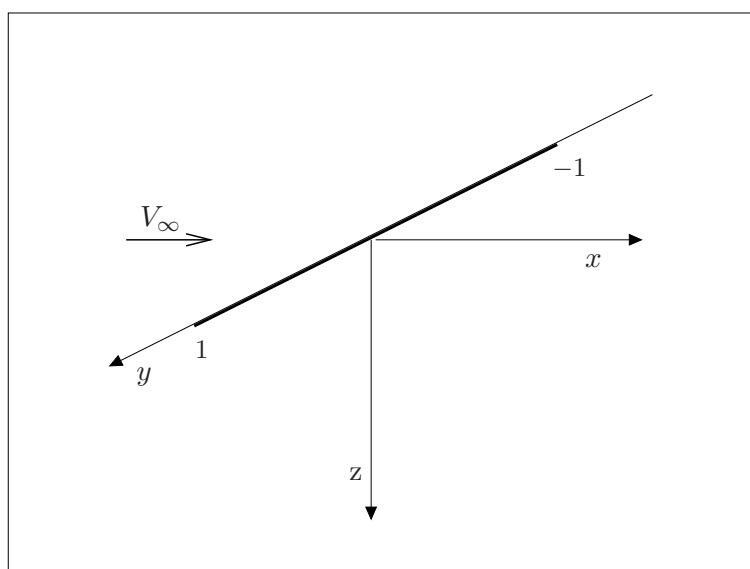


Figura 2.1: Sistema di riferimento per l'ala, ridotta ad un segmento.

$D_i(\Gamma)$ sia ben definito, individuata tale classe ci occuperemo di ricercare la

distribuzione di circuitazione Γ che renda minima la resistenza indotta fissata la portanza ovvero, vogliamo risolvere il seguente problema isoperimetrico:

$$(P) \quad \begin{cases} \min \frac{\rho}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)}{y-x} dx dy \\ \rho V_\infty \int_{-1}^1 \Gamma(x) dx = c \\ \Gamma \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1 Alcune considerazioni preliminari

2.1.1 Esistenza in senso generalizzato del funzionale

Definizione 2.1. Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta assolutamente continua in $[a, b]$, e scriveremo $f \in AC[a, b]$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $]\alpha_i, \beta_i[$, $i = 1, \dots, k$, contenuti in $[a, b]$ e verificanti $\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, risulta $\sum_{i=1}^k |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$.

Il teorema che segue fornisce un'utile caratterizzazione della classe delle funzioni assolutamente continue.

Teorema 2.2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; sono fatti equivalenti:

1. $f \in AC[a, b]$;
2. f è continua e derivabile quasi ovunque in $[a, b]$, f' è sommabile in $[a, b]$ e vale che $f(x) - f(a) = \int_a^x f' dm \quad \forall x \in [a, b]$.

Definizione 2.3. Sia (Y, \mathcal{F}, μ) uno spazio di misura, e sia $1 \leq p < \infty$. Poniamo

$$\mathcal{L}^p(Y) = \{f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ è misurabile e } \int_Y |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Sia $1 \leq p \leq \infty$ denotiamo con:

- q l'esponente coniugato di p , ovvero il numero che verifica la seguente uguaglianza $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; per convenzione l'esponente coniugato di 1 è ∞ e viceversa.

- $\|f\|_{\mathcal{L}^p(Y)} = \left[\int_Y |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}$.

Proposizione 2.4 (Disuguaglianza di Hölder). *Sia $p \in [1, \infty]$ e sia q l'esponente coniugato di p . Se $f \in \mathcal{L}^p(Y)$ e $g \in \mathcal{L}^q(Y)$, allora $fg \in \mathcal{L}^1(Y)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposizione 2.5. *Sia $f \in AC[-1, 1]$ e tale che $f(1) = f(-1) = 0$ $f' \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}(-1, 1)$, con $\epsilon > 0$ allora*

$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f'(x)f(y)}{y-x} dx dy$ è convergente nel senso principale di Cauchy.

Dimostrazione. Denotiamo con:

$$S_1(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+h < y < 1, -1 < x < 1-h\},$$

$$S_2(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < x-h, -1+h < x < 1\},$$

$$G_{S_i(h)}(f) = \int \int_{S_i(h)} \frac{f'(x)f(y)}{y-x} dx dy \quad i = 1, 2.$$

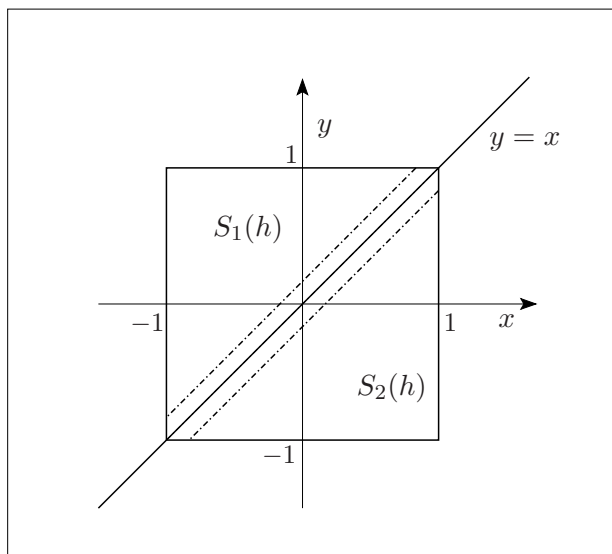


Figura 2.2: Insieme d'integrazione.

Integriamo per parti sia $G_{S_1(h)}$ che $G_{S_2(h)}$,

$$\begin{aligned}
 G_{S_1(h)}(f) &= \int_{-1}^{1-h} \int_{x+h}^1 \frac{f'(x)f(y)}{y-x} dx dy = \\
 &= \int_{-1}^{1-h} \left[[\ln(y-x)f'(x)f(y)]_{x+h}^1 - \int_{x+h}^1 \ln(y-x)f'(x)f'(y) dy \right] dx = \\
 &= - \int_{-1}^{1-h} \left[\ln(h)f'(x)f(x+h) - \int_{x+h}^1 \ln(y-x)f'(x)f'(y) dy \right] dx, \\
 G_{S_2(h)}(f) &= \int_{-1+h}^1 \int_{-1}^{x-h} \frac{f'(x)f(y)}{y-x} dx dy = \\
 &= \int_{-1+h}^1 \left[[\ln(x-y)f'(x)f(y)]_{-1}^{x-h} - \int_{-1}^{x-h} \ln(x-y)f'(x)f'(y) dy \right] dx = \\
 &= \int_{-1+h}^1 \left[\ln(h)f'(x)f(x-h) - \int_{-1}^{x-h} \ln(x-y)f'(x)f'(y) dy \right] dx,
 \end{aligned}$$

risulta che

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f'(x)f(y)}{y-x} dx dy \doteq \lim_{h \rightarrow 0} G_{S_1(h)}(f) + G_{S_2(h)}(f) = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} - \int_{-1+h}^1 \int_{-1}^{x-h} \ln(x-y)f'(x)f'(y) dy dx + \\
 &\quad + \ln(h) \left(\int_{-1+h}^1 f'(x)f(x-h) dx - \int_{-1}^{1-h} f'(x)f(x+h) dx \right) + \\
 &- \int_{-1}^{1-h} \int_{x+h}^1 \ln(y-x)f'(x)f'(y) dy dx = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln|y-x|f'(x)f'(y) dx dy.
 \end{aligned}$$

La tesi segue osservando che:

$$\left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln|y-x|f'(x)f'(y) dx dy \right| \leq \int_{-1}^1 |f'(x)| \int_{-1}^1 |\ln|y-x||f'(y)| dy dx, \tag{2.2}$$

dalla disuguaglianza di Hölder si ha:

$$\int_{-1}^1 |\ln |y-x|| |f'(y)| dy \leq \|f'\|_{\mathcal{L}^{1+\epsilon}(-1,1)} \|\ln |y-x|\|_{\mathcal{L}^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}(-1,1)}.$$

Osservando che per opportune costanti $\delta > 0$ e $C \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\ln |y-x| \leq \frac{C}{|y-x|^\delta} \quad \forall |y-x| \in]0, 2],$$

abbiamo così che $\|\ln |y-x|\|_{\mathcal{L}^{\frac{\epsilon+1}{\epsilon}}(-1,1)} < \eta$ con $\eta \in \mathbb{R}$.

Riscriviamo la (2.2):

$$\left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln |y-x| f'(x) f(y) dx dy \right| \leq \eta \|f'\|_{\mathcal{L}^{1+\epsilon}(-1,1)} \|f'\|_{\mathcal{L}^1(-1,1)} < \infty. \quad (2.3)$$

□

2.1.2 Convessità

Definizione 2.6. Sia K un spazio vettoriale. Una funzione $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se e solo se

$$(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \geq f((1-\alpha)x + \alpha y), \quad \forall x, y \in K, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

Si dice che la funzione f è strettamente convessa se e solo se la disuguaglianza (2.4) vale in senso stretto.

Teorema 2.7. Sia K uno spazio vettoriale, sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque. f è strettamente convessa su K se e solo se $\forall x, y \in K$ il rapporto incrementale

$$t \rightarrow R_y(t) = \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

è una funzione crescente.

Dimostrazione. Si deve far vedere che per ogni t_1, t_2 tali che $0 < t_1 < t_2$, $x + t_1 y \in K$, $x + t_2 y \in K$ si ottiene che $R_y(t_1) < R_y(t_2)$.

A questo proposito esprimiamo $x + t_1 y$ nel seguente modo

$$x + t_1 y = \frac{t_1}{t_2}(x + t_2 y) + \frac{(t_2 - t_1)}{t_2} x$$

cosicchè, dalla stretta convessità di f , siamo in grado di dedurre che

$$f(x + t_1 y) < \frac{t_1}{t_2} f(x + t_2 y) + \frac{(t_2 - t_1)}{t_2} f(x),$$

da cui si ottiene direttamente la tesi

$$\frac{f(x + t_1y) - f(x)}{t_1} = R_y(t_1) < R_y(t_2) = \frac{f(x + t_2y) - f(x)}{t_2}.$$

Viceversa supponiamo che il rapporto incrementale $R_y(t)$ sia una funzione crescente per ogni $x, y \in K$ e per assurdo esistano

$$\bar{x}, \bar{y} \in K \text{ ed esista } t \in]0, 1[\text{ tali che } f((1-t)\bar{x} + t\bar{y}) \geq (1-t)f(\bar{x}) + tf(\bar{y})$$

$$\text{oppure } t(f(\bar{x}) - f(\bar{y})) \leq f(\bar{x} + t(\bar{x} - \bar{y})) - f(\bar{x}).$$

Da quest'ultima disuguaglianza, posto $v = \bar{y} - \bar{x}$, otteniamo:

$$R_v(1) = f(\bar{x} + v) - f(\bar{x}) \leq \frac{1}{t}(f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})) = R_v(t)$$

che contraddice l'ipotesi. □

Proposizione 2.8. *Sia:*

$$\mathcal{X} = \{f \in AC([-1, 1]), f' \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}, f(-1) = f(1) = 0\}$$

e definiamo il funzionale

$$J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R},$$

ponendo

$$J(f) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f'(x)f(y)}{y-x} dx dy,$$

dove l'integrale doppio presente al secondo membro è da intendersi nel senso principale di Cauchy. Abbiamo allora:

(a) il funzionale J non è strettamente convesso su \mathcal{X} ;

(b) il funzionale J è strettamente convesso su $\mathcal{X}' \doteq \{f \in \mathcal{X} : J(f) > 0\}$.

Dimostrazione. (a) Calcoliamo il rapporto incrementale di J per $f, g \in \mathcal{X}$ qualsiasi:

$$\begin{aligned} R_g(t) &= \frac{J(f + tg) - J(f)}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(f'(x) + tg'(x))(f(y) + tg(y))}{y-x} dx dy - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f'(x)f(y)}{y-x} dx dy \right) \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{f'(x)g(y) + g'(x)f(y)}{y-x} dx dy + t \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g'(x)g(y)}{y-x} dx dy \right). \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata del rapporto incrementale:

$$R'_g(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g'(x)g(y)}{y-x} dx dy. \quad (2.5)$$

Per il teorema 2.7 il funzionale J non è in generale strettamente convesso; infatti esistono funzioni g per cui il rapporto incrementale $R_g(t)$ è decrescente, come ad esempio $g = -2 + \frac{3}{4}(1-x^2)^2$ il cui rapporto incrementale, $\forall f \in \mathcal{X}$, ha derivata $R'_g(t) < 0$.

(b) La stretta convessità è però assicurata dal teorema 2.7, se aggiungiamo come ipotesi per l'insieme \mathcal{X} che valga la condizione $J(f) > 0$. \square

Teorema 2.9. *Sia K uno spazio vettoriale, sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa.*

Se il minimo per f in K esiste allora tale minimo è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due punti $x_1, x_2 \in K$ distinti che siano di minimo per f in K allora vale che:

$$\beta = \min_{x \in K} f(x) = f(x_1) = f(x_2),$$

f è strettamente convessa per ipotesi, per cui si ha che:

$$\beta \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = \beta,$$

il che è assurdo. \square

2.2 Una condizione di ottimalità

Per quanto dimostrato finora, la classe \mathcal{X} in cui ricercare la distribuzione di circuitazione Γ che sia soluzione del problema isoperimetrico (2.1) è:

$$\mathcal{X} = \{ \Gamma \in AC[-1, 1], \Gamma' \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}(-1, 1), \text{ con } \epsilon > 0, \Gamma(1) = 0, \\ \Gamma(-1) = 0, D_i(\Gamma) > 0 \}.$$

In questa sezione, analogamente a quanto fatto da Max M. Munk in [10], ci occupiamo di determinare una condizione necessaria e sufficiente di ottimalità per Γ .

Teorema 2.10. *Sia $\Gamma \in \mathcal{X}$. Γ è soluzione del problema isoperimetrico (2.1) se e solo se vale che $w(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(x)}{x-y} dx = \text{costante} \quad \forall y \in [-1, 1]$.*

Dimostrazione. Siano Γ e $\Gamma_* \in \mathcal{X}$, posto $\delta\Gamma(x) = \Gamma - \Gamma_*$, con $\Gamma_* \in \varepsilon$ -vicinanza di ordine zero (Appendice A, Def. A.1), chiamiamo $\Gamma(z, \alpha)$ e $\Gamma'(z, \alpha)$ le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}\Gamma(z, \alpha) &= \Gamma(z) + \alpha\delta\Gamma(z), \\ \Gamma'(z, \alpha) &= \Gamma'(z) + \alpha\delta\Gamma'(z).\end{aligned}$$

$\Gamma'(z, \alpha)$ è la derivata di $\Gamma(z, \alpha)$ rispetto a z . Posto $J(\lambda)$ il funzionale:

$$J(\lambda) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\rho}{4\pi} \frac{\Gamma'(x)\Gamma(y)}{y-x} dx dy - \frac{\lambda\rho V_\infty}{2} \Gamma(y) \right] dx dy, \quad (2.6)$$

calcoliamo la sua variazione:

$$\begin{aligned}J(\lambda, \alpha) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\rho}{4\pi} \frac{\Gamma'(x, \alpha)\Gamma(y, \alpha)}{y-x} - \frac{\lambda\rho V_\infty}{2} \Gamma(y, \alpha) \right] dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho}{4\pi} \frac{(\Gamma'(x) + \alpha\delta\Gamma'(x))(\Gamma(y) + \alpha\delta\Gamma(y))}{y-x} dx dy + \\ &\quad - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\lambda\rho V_\infty}{2} (\Gamma(y) + \alpha\delta\Gamma(y)) dx dy.\end{aligned}$$

Calcolando la derivata di J rispetto ad α e valutandola in zero si ha:

$$\begin{aligned}J'(\lambda, 0) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\rho}{4\pi} \frac{\delta\Gamma'(x)\Gamma(y) + \delta\Gamma(y)\Gamma'(x)}{y-x} - \frac{\lambda\rho V_\infty}{2} \delta\Gamma(y) \right] dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\frac{\rho}{4\pi} \frac{\delta\Gamma(y)\Gamma'(x)}{y-x} - \frac{\lambda\rho V_\infty}{2} \delta\Gamma(y) \right] dx dy + \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho}{4\pi} \frac{\delta\Gamma'(x)\Gamma(y)}{y-x} dx dy.\end{aligned} \quad (2.7)$$

Integriamo per parti il secondo addendo dell'equazione (2.7):

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\delta\Gamma'(x)\Gamma(y)}{y-x} dx dy &= \left[\frac{\rho}{4\pi} \delta\Gamma(x) \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(y)}{y-x} dy \right]_{-1}^1 + \\ &\quad - \frac{\rho}{4\pi} \int_{-1}^1 \delta\Gamma(x) \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(y)}{y-x} dx dy.\end{aligned} \quad (2.8)$$

Il primo addendo a destra dell'equazione (2.8) è nullo dato che $\delta\Gamma(-1) = \delta\Gamma(1) = 0$.

Posto $t = y - x$ si ha:

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(y)}{y-x} dy = \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t+x)}{t} dt = \int_{-1-x}^{1-x} \frac{\Gamma'(t+x)}{t} dt.$$

Tornando alle precedenti variabili si ha

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(y)}{y-x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(y)}{y-x} dy. \quad (2.9)$$

Scambiando y con x al secondo membro dell'equazione (2.8) e tenendo conto della relazione (2.9) possiamo scrivere al secondo membro della (2.7):

$$J'(\lambda, 0) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \delta\Gamma(y) dy \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{\rho}{2\pi} \frac{\Gamma'(x)}{y-x} - \frac{\lambda\rho V_\infty}{2} \right) dx \right). \quad (2.10)$$

Condizione sufficiente affinché $J(\lambda, 0) = 0$ è che sia

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(x)}{x-y} dx = \text{costante} \quad \forall y \in [-1, 1]. \quad (2.11)$$

Tale condizione risulta anche necessaria osservando che il funzionale è convesso, d'altra parte la derivata seconda di J rispetto ad α è:

$$J''(\lambda, \alpha) = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\delta\Gamma'(x)\delta\Gamma(y)}{y-x} dx dy, \quad (2.12)$$

dove la quantità al secondo membro rappresenta la resistenza indotta D_i infinitesimale dovuta alla variazione della portanza ed è quindi positiva. \square

2.3 Metodi diretti

In questa sezione ci occupiamo di individuare la distribuzione di circuitazione Γ che sia soluzione del problema variazionale (2.1) e proponiamo un metodo computazionale per rintracciarne una sua approssimazione; a tal fine sfrutteremo il metodo diretto, rappresentando la circuitazione Γ :

- in modo classico, con uno sviluppo in serie di Fourier;

- sfruttando il metodo di Ritz e considerando due successioni minimizzanti della forma:

$$\Gamma_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i W_i(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

dove $W_i = (1 - x^2)x^i$ per il primo tipo e $W_i = (1 - x^2)^i + 1$ per il secondo.

2.3.1 La distribuzione ellittica

Poniamo $y = \cos \theta$ si ha che $dy = -\sin \theta$, scriviamo Γ in serie di Fourier, tenendo conto delle condizioni $\Gamma(-1) = 0$ e $\Gamma(1) = 0$ si ha quindi:

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta). \quad (2.14)$$

Calcoliamo la portanza L e la resistenza D_i nella nuova variabile:

$$\begin{aligned} L &= \rho V_{\infty} \int_{-1}^1 \Gamma(y) dy = \\ &= \rho V_{\infty} \int_0^{\pi} \Gamma(\theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \rho V_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \sin \theta \sin(n\theta) d\theta = \\ &= \rho V_{\infty} \left(a_1 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \sin \theta \sin(n\theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

Osservando che $\int_0^{\pi} \sin(m\theta) \sin(n\theta) d\theta = 0$ se $n \neq m$, si ha:

$$L = \rho V_{\infty} a_1 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} a_1 \rho V_{\infty}. \quad (2.15)$$

Nel punto $y_0 \in [-1, 1]$ la velocità indotta è:

$$w(y_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\Gamma(y)}{dy} \frac{1}{y - y_0} dy, \quad (2.16)$$

che in funzione di θ diventa.

$$\begin{aligned} w(\theta_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\Gamma(\theta)}{d\theta} \frac{1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ricordando la formula di Glauert (si veda (D), Appendice D) otteniamo:

$$\begin{aligned} w(\theta_0) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} na_n \left(\pi \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tenendo conto delle espressioni precedenti di Γ e w , scriviamo D_i :

$$\begin{aligned} D_i &= -\frac{\rho}{4} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \right) - \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\rho}{4} na_n^2 \int_0^\pi \sin^2(n\theta) d\theta = \frac{\rho\pi}{8} (a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + na_n^2 + \dots) \end{aligned} \quad (2.19)$$

dato che tutti gli addendi dell'ultima equazione sono positivi e osservando che dobbiamo imporre $a_1 \neq 0$ affinché la portanza L sia non nulla si ottiene che la minima resistenza indotta si ha per $a_n^2 = 0, \forall n > 1$.

Posto $a_1 = \Gamma_0$ si ha che la distribuzione Γ soluzione del problema isoperimetrico (2.1) è:

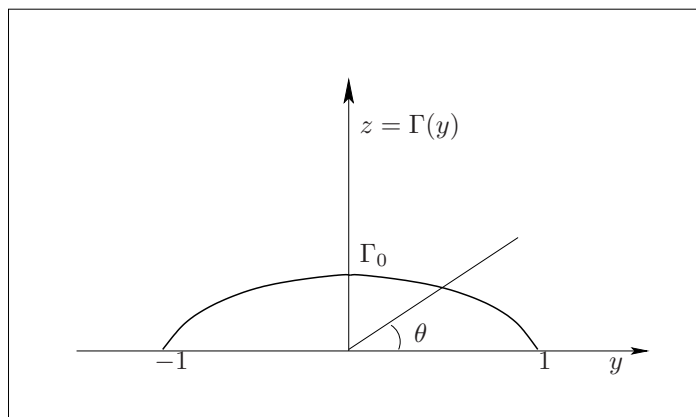


Figura 2.3: Distribuzione ellittica.

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta, \quad (2.20)$$

tornando alla variabile y :

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - y^2}, \quad (2.21)$$

e la resistenza indotta D_i vale:

$$D_i = \frac{\rho\pi}{8} \Gamma_0. \quad (2.22)$$

Osservazione 2.11. Consideriamo la distribuzione ellittica $\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta$

- la velocità indotta w è costante, infatti:

$$w(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha} \frac{1}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha = -\frac{\Gamma_0}{4} = \text{costante}. \quad (2.23)$$

- Tenendo conto delle equazioni (2.15) e (2.22) per la distribuzione ellittica Γ di circuitazione, possiamo scrivere la resistenza indotta in funzione della portanza:

$$D_i = \frac{L^2}{2\pi\rho V_\infty}. \quad (2.24)$$

2.3.2 Descrizione dell'algoritmo e risultati numerici

In questa sezione affrontiamo il problema isoperimetrico (2.1) numericamente. Sfruttando il metodo di Ritz (si veda Appendice A, Sezione A.2.1) otterremo una soluzione approssimata del problema variazionale.

Sono state scelte come distribuzioni di circuitazione incognite quelle della forma

$$\Gamma_n \doteq \sum_{i=0}^n b_i W_i(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

dove

$$W_i(x) = b_i(1-x^2)^{i+1} \text{ e } W_i(x) = b_i(1-x^2)x^i,$$

affinchè $\Gamma_n(-1) = \Gamma_n(1) = 0$, abbiamo scelto le classi di polinomi, che chiameremo rispettivamente polinomi di TIPO1 e polinomi di TIPO2, in modo che rispettassero anche essi le condizioni al contorno si ha infatti $W_i(1) = W_i(-1) = 0$.

In realtà fisicamente il problema richiede che la circuitazione sia simmetrica rispetto all' asse z , ad esempio potrebbe essere della forma (A.2). D'altra parte mentre i polinomi di TIPO1 sono simmetrici rispetto all'asse x quelli di TIPO2 non lo sono di proposito, abbiamo ottenuto computazionalmente che tale condizione è intrinseca al problema (2.1). Infatti, le soluzioni ottime trovate per ogni Γ_n di TIPO2 hanno i $b_i = 0$, per ogni i dispari.

Descriviamo ora un'iterazione generica con Γ_n di grado $2n$ per i polinomi di TIPO1 e di grado $2n+2$ per i polinomi di TIPO2, abbiamo scelto che le iterazioni si svolgessero a parità di grado:

- Scriviamo la resistenza indotta D_i in funzione di Γ_n , svolgendo nel senso principale di Cauchy l'integrale doppio presente nella sua definizione, inoltre dato che $\Gamma_n = \sum_{i=0}^n b_i W_i(x)$, $n \in \mathbb{N}$, possiamo sfruttare ad ogni

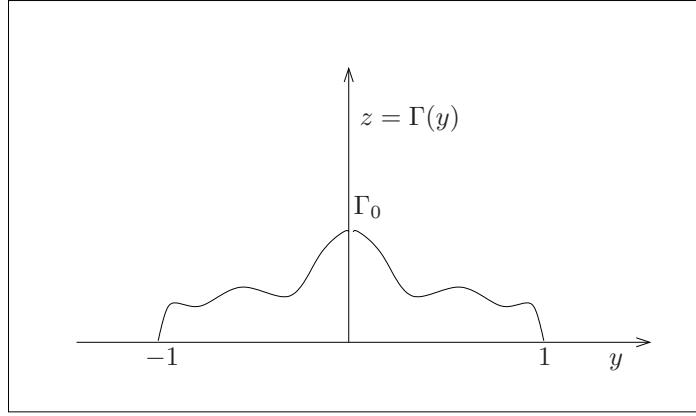


Figura 2.4: Distribuzione di circuitazione Γ simmetrica rispetto all'asse z .

passo la conoscenza $D_i(f_{n-2})$, calcolata nell'iterazione precedente. Si ha:

$$\begin{aligned} D_i(\Gamma_n) &= D_i(b_0, \dots, b_n) = \\ &= D_i(f_{n-2}) + \frac{\rho}{4\pi} \sum_{i=n-1}^n \sum_{s=0}^n b_i b_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{W_i(y) W'_s(x)}{y-x} dx dy + \\ &+ \frac{\rho}{4\pi} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{s=n+1}^n b_i b_s \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{W_i(y) W'_s(x)}{y-x} dx dy. \end{aligned}$$

Dato che il funzionale D_i è quadratico rispetto a Γ_n e Γ'_n , dall'integrazione si ottiene un polinomio omogeneo di secondo grado rispetto ai b_i con $i = 0, \dots, n$.

- Riscriviamo anche la portanza in funzione di Γ_n si ha:

$$L(\Gamma_n) = L(b_0, \dots, b_n) = \rho V_\infty \sum_{i=0}^n b_i \int_{-1}^1 W_i(y) dy$$

Il vincolo L è lineare nelle incognite b_i . Il problema isoperimetrico (2.1) diventa :

$$(P) \begin{cases} \min D_i(b_0, \dots, b_n) \\ L(b_0, \dots, b_n) = c \\ (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \end{cases} \quad (2.25)$$

- Il funzionale resistenza indotta è un polinomio omogeneo di secondo grado rispetto ai b_i , imporre il vincolo e le condizioni del primo ordine

(ovvero che si annullino le derivate della lagrangiana calcolate rispetto ai b_i) è equivalente a risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ dove:

- la matrice dei coefficienti A è l'hessiano della lagrangiana

$$J(b_0, \dots, b_n, \lambda) = D_i(b_0, \dots, b_n) - \lambda L(b_0, \dots, b_n);$$

- $\underline{b} = [o, \dots, 0, -c]$;
- Per la convessità del funzionale resistenza indotta si ha che $\underline{x} = [\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_n, \bar{\lambda}]$ è un punto di minimo per la lagrangiana J .

- Nota la n+1-upla $(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_n)$ si calcola $D_i(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_n)$ ed si ottiene D_i in funzione di c :

$$D_i(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_n) = \alpha_n c^2. \quad (2.26)$$

- Calcolo del coefficiente e di Oswald, dove \bar{D}_i è la resistenza indotta relativa alla distribuzione di circuitazione ellittica, definita dalla relazione (2.24):

$$e \doteq \frac{\bar{D}_i}{D_i(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_n)}. \quad (2.27)$$

Le operazioni presenti nelle varie iterazioni sono state implementate attraverso il software commerciale MapleV, sfruttando il calcolo simbolico.

Riportiamo i risultati di alcune iterazioni ottenuti imponendo:

- $\rho = 1$;
- $V_\infty = 1$;
- $c = 0$;
- distribuzione di circuitazione ellittica $\bar{\Gamma} = 63.6942675\sqrt{1-x^2}$,
- \bar{D}_i vale, per la portanza pari a 100, 1592.356688;
- indichiamo con $\bar{\Gamma}_{max}$ il massimo di $\bar{\Gamma}$ nell' intervallo $[-1, 1]$.

Risultati numerici per i polinomi di TIPO1

$$Grado = 8$$

Γ_8 è rappresentata nella Figura 2.5:

$$\begin{aligned} D_i(\Gamma_8) &= 1612.261147 \\ e &= 0.9876543207 \end{aligned}$$

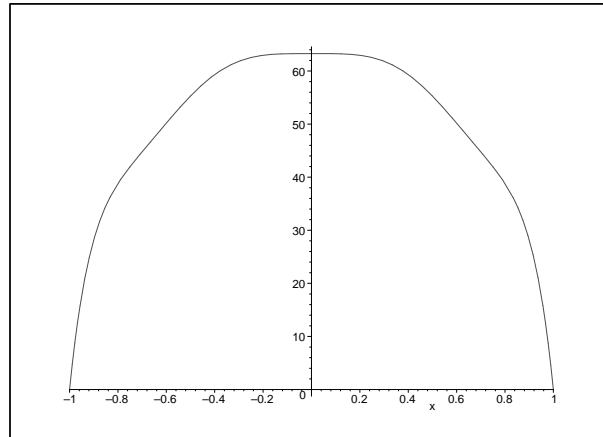


Figura 2.5: Distribuzione di circuitazione Γ_8

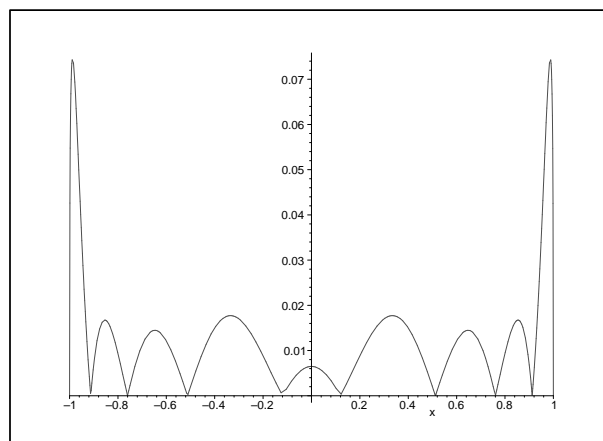


Figura 2.6: Grafico della funzione $y(x) = \frac{|\Gamma_8(x) - \bar{\Gamma}(x)|}{\bar{\Gamma}_{max}}$.

Il grafico in Figura 2.6 rappresenta per ogni $x \in [-1, 1]$ l'errore compiuto nell' approssimare $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma_8(x)$.

$$\text{Grado} = 28$$

Γ_{28} è rappresentata in Figura 2.7.

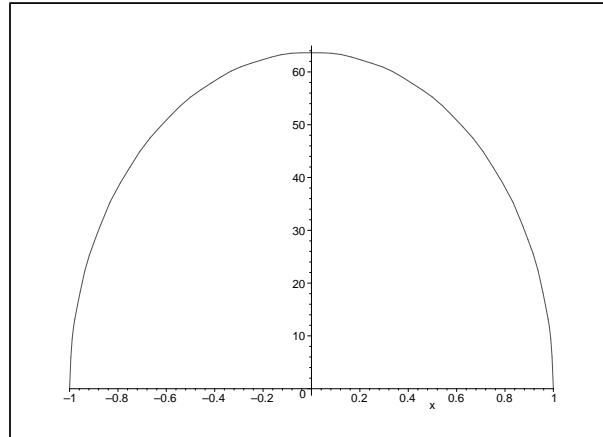


Figura 2.7: Distribuzione di circuitazione Γ_{28}

$$D_i(\Gamma_{28}) = 1594,252351$$

$$e = 0,9988109392$$

Il grafico in Figura 2.8 rappresenta per ogni $x \in [-1, 1]$ l'errore compiuto nell' approssimare $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma_{28}(x)$.

$$\text{Grado} = 44$$

Γ_{44} è rappresentata nella Figura 2.9:

$$D_i(\Gamma_{44}) = 1593.143425$$

$$e = 0.9995061731$$

Il grafico in Figura 2.10 rappresenta per ogni $x \in [-1, 1]$ l'errore compiuto nell' approssimare $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma_{44}(x)$.

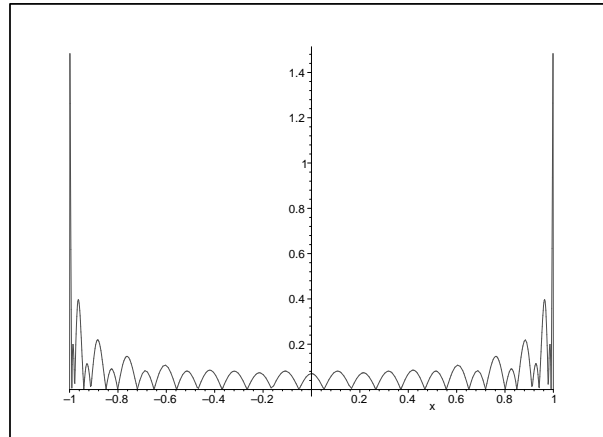


Figura 2.8: Grafico della funzione $y(x) = \frac{|\Gamma_{28}(x) - \bar{\Gamma}(x)|}{\bar{\Gamma}_{max}}$.

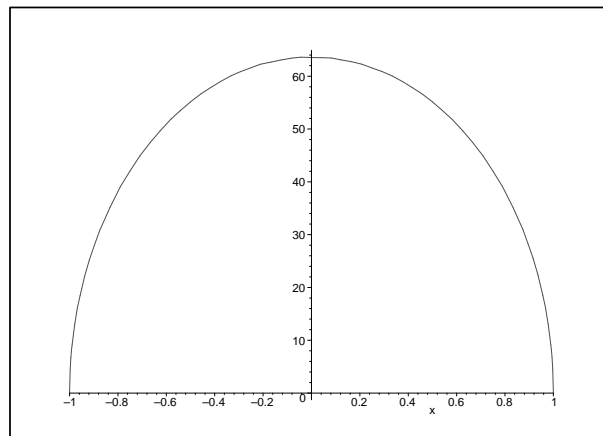


Figura 2.9: Distribuzione di circuitazione Γ_{44}

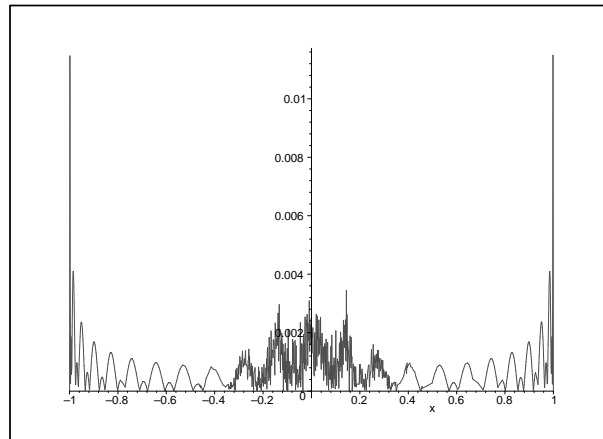


Figura 2.10: Grafico della funzione $y(x) = \frac{|\Gamma_{44}(x) - \bar{\Gamma}(x)|}{\bar{\Gamma}_{max}}$.

Risultati numerici per i polinomi di TIPO2

$$\text{Grado} = 8$$

Γ_8 è rappresentata nella Figura 2.11:

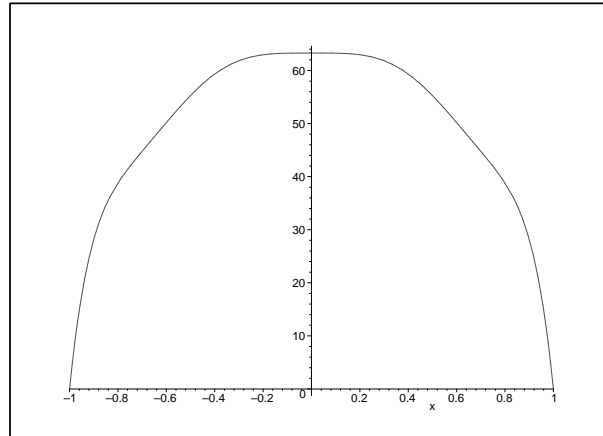


Figura 2.11: Distribuzione di circuitazione Γ_8

$$\begin{aligned} D_i(\Gamma_8) &= 1612.261147 \\ e &= 0.9876543207 \end{aligned}$$

Il grafico in Figura 2.12 rappresenta per ogni $x \in [-1, 1]$ l'errore compiuto nell' approssimare $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma_8(x)$.

$$\text{Grado} = 28$$

Γ_{28} è rappresentata nella Figura 2.13.

$$\begin{aligned} D_i(\Gamma_{28}) &= 1594,252351 \\ e &= 0,9988109392 \end{aligned}$$

Il grafico in Figura 2.14 rappresenta per ogni $x \in [-1, 1]$ l'errore compiuto nell' approssimare $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma_{28}(x)$.

$$\text{Grado} = 44$$

Γ_{44} è rappresentata nella Figura 2.15:

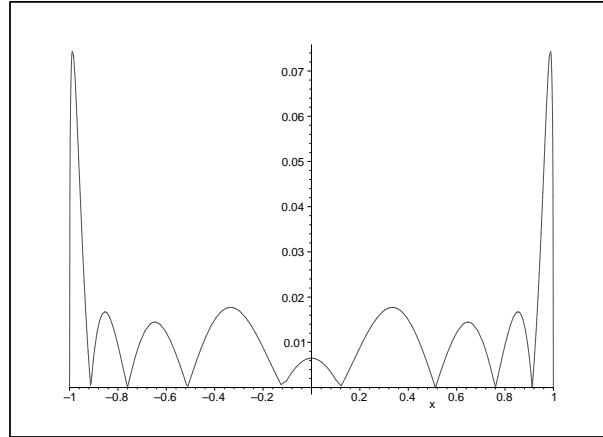


Figura 2.12: Grafico della funzione $y(x) = \frac{|\Gamma_8(x) - \bar{\Gamma}(x)|}{\bar{\Gamma}_{max}}$.

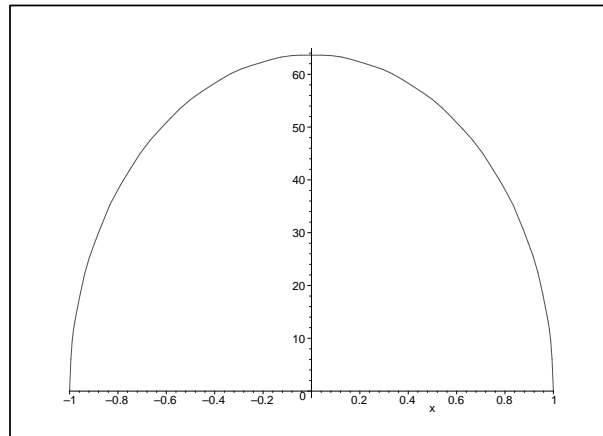


Figura 2.13: Distribuzione di circuitazione Γ_{28}

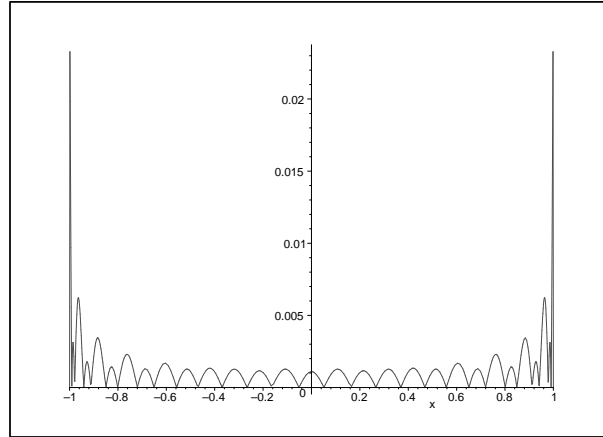


Figura 2.14: Grafico della funzione $y(x) = \frac{|\Gamma_{2s}(x) - \bar{\Gamma}(x)|}{\bar{\Gamma}_{max}}$.

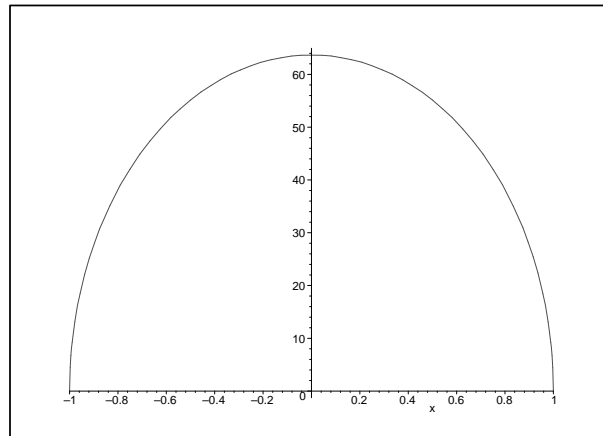


Figura 2.15: Distribuzione di circuitazione Γ_{44}

$$D_i(\Gamma_{44}) = 1593.143425$$

$$e = 0.9995061731$$

Il grafico in Figura 2.16 rappresenta per ogni $x \in [-1, 1]$ l'errore compiuto nell' approssimare $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma_{44}(x)$.

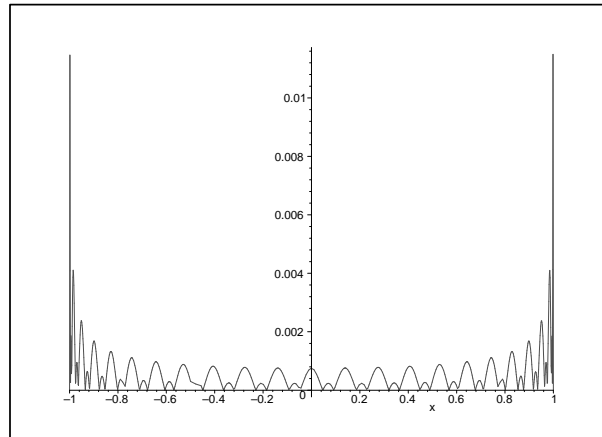


Figura 2.16: Grafico della funzione $y(x) = \frac{|\Gamma_{44}(x) - \bar{\Gamma}(x)|}{\bar{\Gamma}_{max}}$.

$$Grado = 52$$

Γ_{52} è rappresentata nella Figura 2.17:

$$D_i(\Gamma_{52}) = 1592.923767$$

$$e = 0.9996440012$$

Il grafico in Figura 2.18 rappresenta per ogni $x \in [-1, 1]$ l'errore compiuto nell' approssimare $\bar{\Gamma}$ con $\Gamma_{52}(x)$.

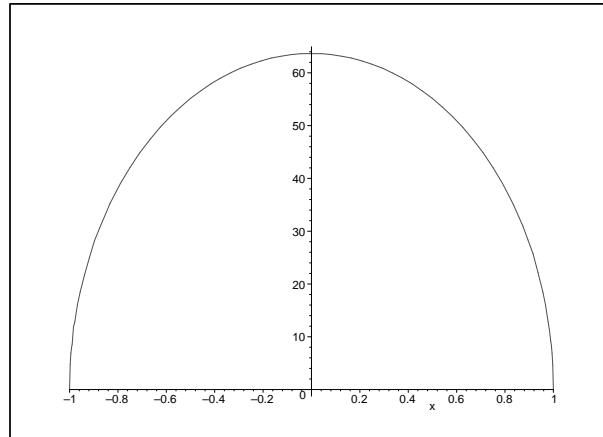


Figura 2.17: Distribuzione di circuitazione Γ_{52}

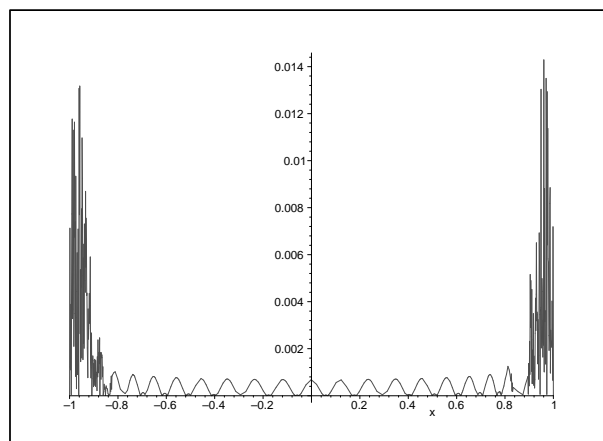


Figura 2.18: Grafico della funzione $y(x) = \frac{|\Gamma_{52}(x) - \bar{\Gamma}(x)|}{\bar{\Gamma}_{max}}$.

A parità di grado, le soluzioni calcolate tramite combinazioni lineari di polinomi di TIPO1 e quelli di TIPO2 forniscono lo stesso valore per la resistenza indotta D_i . Per i polinomi di TIPO1 abbiamo fermato le iterazioni al grado quarantaquattro per problemi legati alle dimensioni dei file generati. Riportiamo in tabella i dati salienti delle iterazioni svolte per soluzioni in dipendenza dai polinomi di TIPO1.

Grado	D_i	$\frac{D_i - \overline{D}_i}{\overline{D}_i}$	e
4	1658.704883	0.041666666646	0.9600000002
12	1601.835002	0.005952381192	0.9940828400
20	1595.975680	0.002272726976	0.9977324266
28	1594.252351	0.001190476364	0.9988109392
36	1593.520691	0.0007309938840	0.9992695401
44	1593.020170	0.0004166666960	0.9995835068
52	1592.923767	0.0003561256120	0.9996440012
64	1592.733666	0.0002367421840	0.9997633138

2.4 Duale del problema della resistenza indotta

Scopo di questa sezione è dare una formulazione duale del problema variazionale (2.1) e mostrarne alcune proprietà.

Sia $\overline{\Gamma}$ la soluzione ottima per il problema (2.1),

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v \in D\} = (\mathbb{R}_+ \setminus 0) \times D, \\ \mathcal{K}_{\overline{\Gamma}} &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = D_i(\overline{\Gamma}) - D_i(\Gamma), v = L(\Gamma) - c, \Gamma \in \mathcal{X}\}, \\ \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\overline{\Gamma}}) &= \mathcal{K}_{\overline{\Gamma}} - \overline{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dove $\overline{\mathcal{H}}$ è la chiusura di \mathcal{H} .

Il duale del problema isoperimetrico (2.1) è (si veda per la definizione Appendice B, (B.2)):

$$(P^*) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \inf_{\Gamma \in X} J(\lambda, \Gamma). \quad (2.29)$$

Scriviamo ora il duale nello Spazio Immagine (Appendice B, (B.40)):

$$(P_I^*) \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\overline{\Gamma}}} (u + \lambda v). \quad (2.30)$$

Si ha inoltre che

$$(\hat{P}_I^*) \quad \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \sup_{(u,v) \in \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\overline{\Gamma}})} (u + \lambda v) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \delta^*(\mathcal{E}(\mathcal{K}_{\overline{\Gamma}})) \quad (2.31)$$

dove δ^* è la restrizione della funzione di supporto dell'insieme $\mathcal{E}(\mathcal{K}_{\overline{\Gamma}})$ alla retta $\theta = 1$, essendo $\theta u + \lambda v$ la forma lineare di cui si cerca l'estremo superiore. Poiché la funzione di supporto di un insieme strettamente convesso è strettamente convessa, lo è anche la sua restrizione δ^* .

Per il Teorema B.11 si ha che (P_I^*) e il problema (\hat{P}_I^*) sono equivalenti, segue che lo è anche il problema (P^*) .

Si ha che (P^*) risulta quindi essere un “problema strettamente concavo”, (massimo di una funzione strettamente concava su un insieme convesso). Il problema (B.1) ha minimo, possiamo quindi riformulare il problema (P^*) nella seguente forma:

$$(P^*) \quad \begin{cases} \max J(\lambda, \Gamma) \\ J_{\Gamma} = 0 \\ (\lambda, \Gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \end{cases} \quad (2.32)$$

Dove J_{Γ} è la derivata di Frechét della lagrangiana $J(\lambda, \Gamma)$.

Imporre la condizione $J_{\Gamma} = 0$ è equivalente a imporre che la variazione prima del funzionale $J(\lambda, \Gamma)$ sia nulla.

Per quanto visto nel Teorema 2.10 ciò corrisponde alla seguente relazione:

$$2w(y) = \lambda \rho V_{\infty}. \quad (2.33)$$

Ricordando la definizione di D_i sostituendo a w la relazione (2.33):

$$D_i(\Gamma) = \int_{-1}^1 w(y) \Gamma(y) dy = \frac{1}{2} \lambda \rho V_{\infty} \int_{-1}^1 \Gamma(y) dy = \frac{1}{2} \lambda L(\Gamma). \quad (2.34)$$

Sostituiamo nella lagrangiana $J(\lambda, \Gamma)$ a D_i la relazione (2.34) e a λ la (2.33) si ha:

$$\begin{aligned} J(\lambda, \Gamma) &= D_i(\Gamma) - \lambda(L(\Gamma) - c) = \\ &= \lambda(c - \frac{1}{2} L(\Gamma)) \\ &= \frac{w(y)}{V_{\infty}}(2c - L(\Gamma)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Osserviamo che il rapporto $\frac{w(y)}{V_\infty} = \alpha_i(\Gamma)$ dove $\alpha_i(y, \Gamma)$ è l'angolo di incidenza indotta relativo all'ascissa $y \in [-1, 1]$. L'angolo $\alpha_i(y, \Gamma)$ è in genere molto piccolo, possiamo stimare che $\alpha_i(y, \Gamma) \in [0, \frac{\pi}{15}]$.

Il problema (P^*) diventa:

$$(P^*) \quad \begin{cases} \max \alpha_i(y, \Gamma)(2c - L(\Gamma)) \\ 2w(y) = \lambda \rho V_\infty \\ \lambda \in [0, \frac{\pi}{15}], \Gamma \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (2.36)$$

2.5 Conclusioni e sviluppi futuri

In questo lavoro di tesi abbiamo proposto una revisione matematica del problema della minima resistenza indotta per un'ala di apertura finita; in particolare abbiamo individuato una classe di funzioni per cui il funzionale resistenza indotta risulti finito e strettamente convesso. Tramite queste proprietà abbiamo rintracciato una condizione necessaria e sufficiente di ottimalità, dimostrato l'unicità della soluzione. In seguito abbiamo introdotto, per la prima volta, tramite la Teoria lagrangiana della dualità una formulazione duale di tale problema variazionale.

Abbiamo inoltre proposto e testato un metodo computazionale basato sul Metodo di Ritz e implementato tramite il software commerciale MapleV, che produce soluzioni con un coefficiente di Oswald molto vicino ad uno.

Aver ricercato una soluzione approssimata è utile al fine di testare la bontà del metodo di Ritz per risolvere in futuro il problema isoperimetrico per ali che non hanno configurazione planare per cui non è nota in letteratura una soluzione esatta del problema.

A questo scopo è altrettanto utile aver introdotto la formulazione duale di questo problema variazionale; i valori assunti dalla funzione obiettivo del duale, corrispondenti a soluzioni ammissibili, formano un insieme di mino- ranti per la funzione obiettivo del problema primale. Tale insieme permette quindi di ottenere una stima del grado di ottimalità di soluzioni ammissibili eventualmente rintracciate per il problema primale.

Nel caso di configurazioni alari chiuse resta aperto il problema dell'unicità della soluzione del problema della minima resistenza indotta fissata la portanza. In questo caso non abbiamo punti del sistema alare sui quali deve annullarsi la circuitazione ma solo condizioni di raccordo tra le varie componenti. La somma di una soluzione ottima per il problema isoperimetrico e di una distribuzione di circuitazione costante, che abbia risultante nulla, è

CAPITOLO 2. Minima resistenza indotta per un monoplano

anch'essa una soluzione ottima. Il minimo del problema dunque non sarebbe unico.

Appendice A

Richiami di Calcolo delle variazioni

A.1 Equazione di Eulero

Esaminiamo un funzionale della forma:

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (\text{A.1})$$

definito per una certa classe \mathcal{X} di funzioni $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Prese $y, y_* \in \mathcal{X}$ stabiliamo un criterio per cui si possa definire quando la variazione $\delta y = y - y_*$ sia piccola.

Definizione A.1. *Definiamo ε -vicinanza di ordine n della curva $y(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ l'insieme di curve $y_* \in \mathcal{X}$ tali che*

$$d_n(y, y_*) = \max_{0 \leq k \leq n} \max_{x \in [x_0, x_1]} |y^k(x) - y_*^k(x)| < \varepsilon \varphi \quad (\text{A.2})$$

Dove indichiamo con $y^n(x) = \frac{d^n y(x)}{dx}$

La ε -vicinanza di ordine zero della curva $y(x)$ si dice vicinanza forte e ha il semplice significato geometrico visibile nella Figura A.1.

Definizione A.2. *Si dice che $y(x)$ è un minimante forte per il funzionale J se esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $y_* \in \varepsilon$ -vicinanza di ordine zero della curva $y(x)$ si abbia:*

$$J(y(x)) \leq J(y_*(x) + \delta y(x)), \quad \forall x \in [x_0, x_1].$$

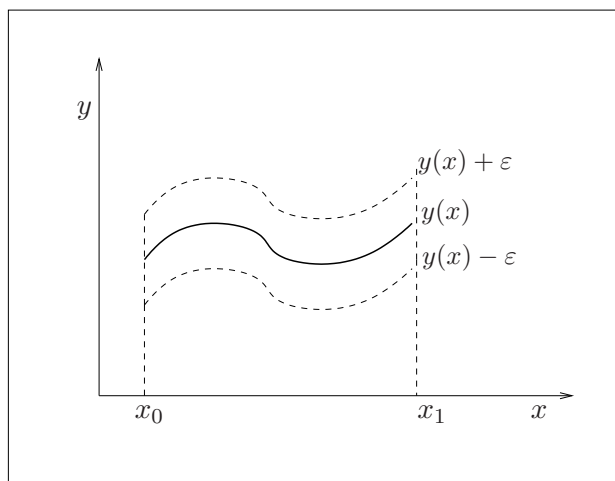


Figura A.1: Tutte le funzioni $y_*(x) \in \mathcal{X}$ che stanno entro la fascia $y(x) - \varepsilon$, $y(x) + \varepsilon$, con x che varia nell'intervallo $[x_0, x_1]$, hanno ε -vicinanza forte a $y(x)$.

Siamo interessati a determinare una condizione necessaria affinché una funzione $y(x)$ risulti un estremante per il funzionale J . A tal proposito consideriamo la famiglia di curve:

$$\begin{aligned} y(x, \alpha) &= y(x) + \alpha(y_*(x) - y(x)) = \\ &= y(x) + \alpha\delta y(x) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y_* \in \varepsilon$ -vicinanza di ordine n . J diventa così una funzione di variabile reale α :

$$\alpha \rightarrow \varphi(\alpha) = J(y(x, \alpha)).$$

Condizione necessaria affinché il funzionale J abbia un estremante in corrispondenza della funzione $y(x)$ è che $\varphi(\alpha)$ abbia un minimo per $\alpha = 0$ ovvero che $\varphi'(0) = 0$. Calcoliamo $\varphi'(\alpha)$:

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y_x(x, \alpha)) dx, \quad (\text{A.4})$$

posto:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial F(x, y(x, \alpha), y_x(x, \alpha))}{\partial y}, \\ F_{y'} &= \frac{\partial F(x, y(x, \alpha), y_x(x, \alpha))}{\partial y'} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + F_{y'} \frac{\partial y_x(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right] dx. \quad (\text{A.6})$$

Se $\alpha = 0$ si ha:

$$\varphi'(o) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta' y] dx, \quad (\text{A.7})$$

integrando per parti il secondo addendo a destra e osservando che $\delta' y = (\delta y)'$, otteniamo indicando con δJ la variazione di J :

$$\delta J = [F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx, \quad (\text{A.8})$$

dato che

$$\begin{aligned} \delta y(x_0) &= y_*(x_0) - y(x_0) = 0, \\ \delta y(x_1) &= y_*(x_1) - y(x_1) = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

Condizione necessaria perché il funzionale J abbia un estremo in y è che

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0. \quad (\text{A.9})$$

Il seguente lemma fornisce una utile caratterizzazione della condizione (A.9).

Lemma A.3 (Lemma fondamentale del Calcolo delle variazioni). *Se $f \in C^0[x_0, x_1]$ soddisfa la condizione:*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx,$$

$\forall \eta(x) \in C^0[x_0, x_1]$ e derivabile in $[x_0, x_1]$ t.c. $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ allora $f(x) = 0 \forall x \in [x_0, x_1]$.

Dal lemma A.3 si deduce che condizione necessaria affinché la curva y sia un estremante per J è che valga la seguente equazione:

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (\text{A.10})$$

L'equazione differenziale (A.10) del secondo ordine è nota come equazione di Eulero, che la ottenne nel 1744 e può essere riscritta nella sua forma esplicita:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0. \quad (\text{A.11})$$

Si veda [4],[11], [2] per un approfondimento ai temi trattati in questa sezione.

A.2 Metodo diretto

L'equazione di Eulero associata al funzionale $J(y(x))$ genera un'equazione del secondo ordine che spesso non è di immediata risoluzione.

L'idea fondamentale dei metodi diretti è quella di considerare il problema variazionale come caso limite di una successione di problemi di ricerca di estremi di una funzione con un numero finito di variabili.

Concettualmente, le funzioni ammissibili si possono rappresentare come:

- con uno sviluppo in serie di potenze, ovvero:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$

- con uno sviluppo in serie di Taylor ossia della forma:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

- con una serie del tipo:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

dove $\varphi_n(x)$ sono funzioni assegnate.

Per trovare la soluzione $y(x)$ al problema variazionale è quindi sufficiente determinare tutti i coefficienti di una della serie: $a_0, a_1, a_3, \dots, a_n, \dots$

Di conseguenza il valore del funzionale dipende da questa sequenza infinita di numeri e può essere considerato come una funzione di infinite variabili:

$$J(y(x)) = \varphi(a_0, a_1, a_3, \dots, a_n, \dots). \quad (\text{A.12})$$

Nei primi periodi di studio riguardo al Calcolo delle variazioni Eulero applicò il metodo delle differenze finite ma solo negli anni 30 per opera dei matematici russi L.A. Lusternik e I.G. Petrovsky che tale metodo fu rivisitato con successo.

Un altro metodo diretto è quello di Ritz, anch'esso largamente sviluppato dai russi N.M. Krylov, N.N. Bogolubov e altri; tale metodo è ad esempio usato per risolvere problemi variazionali nel campo dell'elasticità.

In questa sezione ci soffermeremo sul metodo diretto di Ritz, per ulteriori approfondimenti riguardo ai metodi diretti si guardi [7].

A.2.1 Il metodo di Ritz

Il metodo di Ritz considera i valori di $J(y(x))$ per curve $y_n(x)$ ammissibili scelte fra tutte le possibili combinazioni lineari:

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x) \quad (\text{A.13})$$

dove gli α_i sono numeri reali e le W_i , che chiameremo funzioni coordinate, sono della forma $W_i : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Il funzionale $J(y(x))$, applicato alle $y_n(x)$ dà luogo ad una funzione :

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

dove i valori delle nuove incognite α_i si determinano imponendo le n condizioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.14})$$

Nota la n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la funzione y_n è automaticamente definita.

Le y_n devono soddisfare le condizioni agli estremi oltre ad eventuali ulteriori restrizioni ad esempio requisiti quali continuità, derivabilità, ecc.

Affinché le funzioni y_n siano ammissibili per il problema variazionale occorre scegliere opportunamente le W_i , possiamo avere due casi:

- le condizioni agli estremi sono lineari e omogenee ad esempio:

$$y(x_0) = y(x_1) = 0$$

oppure più in generale

$$\sigma_{1,j} y(x_j) + \sigma_{2,j} y'(x_j) = 0$$

con $j = 0, 1$ e $\sigma_{i,j}$ costanti fissate.

La scelta più immediata è considerare funzioni coordinate $W_i(x)$ che soddisfino tali condizioni, otterremo così in modo sistematico che

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$$

soddisfa le stesse condizioni per ogni scelta di α_i .

Supponiamo di avere un problema variazionale con condizioni agli estremi

$$y(x_0) = y(x_1) = 0$$

si possono scegliere funzioni:

$$W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\eta_i(x) \text{ con } \eta_i \text{ continue,}$$

oppure W_k della forma:

$$W_k(x) = \sin \left[\frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \right].$$

- Le condizioni agli estremi sono non omogenee ad esempio:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

con y_1 e y_0 costanti, di cui almeno una diversa da zero.

Convienne imporre che y_n sia della forma:

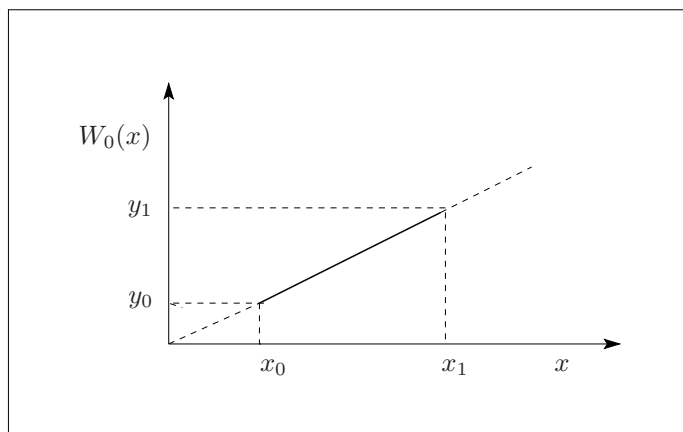
$$y_n(x) = W_0(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x)$$

dove

$$W_0(x_j) = y_j, \quad W_i(x_j) = 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n, \text{ per } j = 0, 1.$$

La funzione W_0 può essere, ad esempio la retta di equazione:

$$W_0(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (\text{A.15})$$



La scelta delle funzioni coordinate $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ influisce ampiamente sul grado di complessità dei calcoli successivi.

Il successo del metodo dipende sensibilmente dalla bontà della scelta del sistema di funzioni.

La soluzione del sistema di equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\alpha_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

è particolarmente semplice se il funzionale da minimizzare è quadratico rispetto ad y e alle derivate, in tal caso infatti abbiamo da risolvere un sistema lineare di equazioni.

La classe di funzioni coordinate $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ è un insieme completo se ogni funzione $y(x)$ ammissibile può essere approssimata, per n sufficientemente grande con

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x),$$

vicina a $y(x)$ nel senso di una vicinanza del primo ordine:

$$|y(x) - y_n(x)| < \varepsilon, \quad |y'(x) - y_n'(x)| < \varepsilon \quad \text{con } x \in [x_0, x_1].$$

Il metodo di Ritz può essere usato per costruire $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ che formano una successione minimizzante, per la quale:

$$J(y_1), J(y_2), \dots, J(y_n), \dots$$

convergono al minimo o al limite inferiore del funzionale J .

Se si verifica che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(y_n(x)) = \min_{y \in \mathcal{X}} J(y(x))$$

non è in generale assicurato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

sia il minimo o il limite inferiore del funzionale J , la successione minimizzante può in generale non tendere alla funzione ammissibile che rende minimo J .

La differenza tra i valori:

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

$$J(y_n(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n(x), y_n'(x)) dx$$

può essere piccola non solo quando $y_n(x) \in \varepsilon$ -vicinanza del primo ordine in tutto l'intervallo $[x_0, x_1]$ ma anche quando le funzioni $y_n(x)$ e le loro derivate, sebbene molto vicine in gran parte dell'intervallo $[x_0, x_1]$, differiscono in modo non trascurabile in parti sufficientemente piccole di esso stesso, come ad esempio in Figura A.2. Inoltre si può anche verificare che nonostante le funzioni y_1, y_2, \dots, y_n appartenenti alla sequenza minimizzante siano ammissibili non lo sia il loro limite.

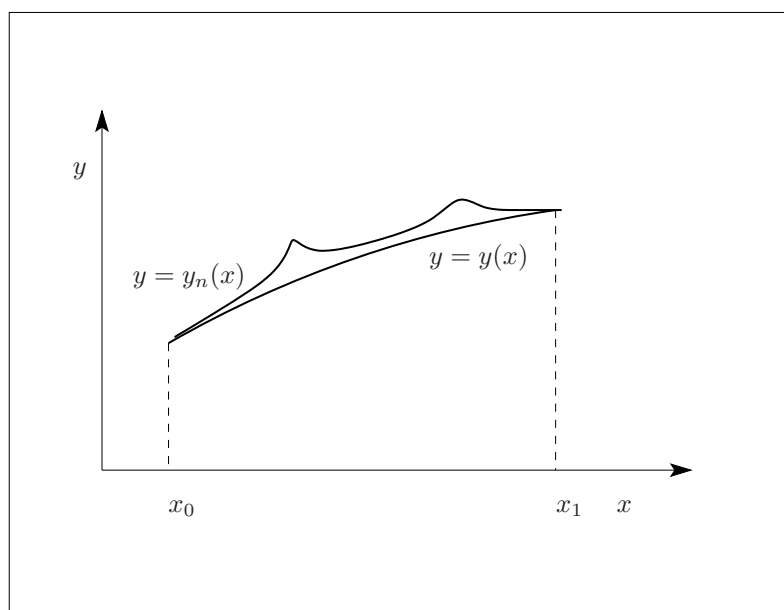


Figura A.2: Esempio di distanza tra $y(x)$ e $y_n(x)$ nonostante i valori $J(y)$ e $J(y_n)$ del funzionale siano molto vicini.

Appendice B

Teoria lagrangiana della dualità

Argomento di questa appendice è la Teoria della Dualità. Introdurremo lo Spazio Immagine e forniremo tramite uno schema di separazione condizioni di ottimalità per il duale immagine. Per ulteriori dettagli o approfondimenti si veda [5] e [6].

B.1 Teoria della dualità

L'idea alla base della Teoria della Dualità è l'esistenza di due entità correlate da un legame di simmetria o complementarità, tali entità nel caso dell'Ottimizzazione consistono in una coppia di problemi variazionali vincolati che chiameremo rispettivamente primale e duale.

Una prima traccia, probabilmente la prima, di tale approccio è rintracciabile nella soluzione del problema di Fermat-Torricelli dovuta a Vecten e indipendentemente a Fasbender.

Il problema di Fermat-Torricelli consisteva nel ricercare all'interno del triangolo dato ABC il punto P tale che la somma delle distanze di P dai vertici fosse minima.

La formulazione equivalente di Vecten e Fasbender richiedeva di rintracciare tra i triangoli equilateri T circoscritti ad uno dato ABC quello di massima altezza.

Questa coppia di problemi variazionali gode delle seguenti proprietà:

- (a) sono entrambi definiti sugli stessi dati.
- (b) Cercano estremi opposti
- (c) I valori delle funzioni obiettivo corrispondenti a soluzioni ammissibili, rispettivamente altezza e somma delle distanze di un punto del trian-

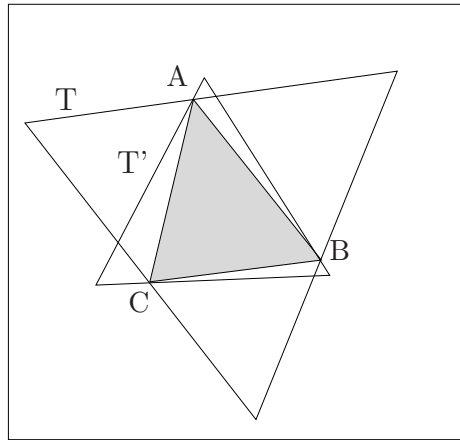


Figura B.1: Alcuni triangoli equilateri del problema di Vecten-Fasbender.

golo dato dai propri vertici, formano due sottoinsiemi della retta reale separabili dato che vale la relazione per cui ogni altezza è minore o uguale alla somma delle distanze.

(d) I due estremi assumono lo stesso valore, nel senso che la massima altezza coincide con la minima somma delle distanze. Tale valore rappresenta quindi l'elemento separatore dei due sottoinsiemi della retta reale.

(e) Rilassamento. Rintracciare l'ottimo del duale equivale a cercare l'estremo superiore dei minoranti del problema primale ottenuti dilatando la regione ammissibile del primale stesso.

Nel caso del problema di Fermat-Torricelli corrisponde a cercare tra i triangoli equilateri T circoscritti ad uno dato ABC quello che renda minima la somma delle distanze tra i lati del triangolo T e un punto del triangolo dato. Il rilassamento consiste nell'aver sostituito ai vertici del triangolo ABC i lati dei triangoli T che per costruzione passano per A , B e C .

(f) I due problemi godono di una sorta di riflessività: il duale del duale è il problema primale.

Per costruire il duale del problema di Vecten-Fasbender si deve contrarre la regione ammissibile del primale, rimpiazzando i lati dei triangoli T con i vertici di quello dato. Il minimo della somma delle distanze nel problema di Fermat-Torricelli è chiaramente un maggiorante per il problema Vecten-Fasbender.

Consideriamo il seguente problema variazionale vincolato:

$$f \downarrow = \min f(x) \quad x \in R \doteq \{x \in X : g(x) \in D\} \quad (\text{B.1})$$

dove $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \doteq 0_p \times \mathbb{R}_+^{m-p}$ vale che $m - p \geq 0$, dove p e $m - p$ indicano rispettivamente il numero di vincoli di uguaglianza e disuguaglianza e $0_p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

Se $p = 0$ allora $D = \mathbb{R}_+^m$, se $p = m$, D coincide con 0_m , se $m = 0$, $R = X$ e D non è definito.

Se X è uno spazio di Banach purché f e g abbiano immagine a dimensione finita, è comunque possibile definire il duale sostituendo in (B.1) il minimo con l'estremo inferiore, quando l'esistenza del minimo non è assicurata.

La riformulazione del problema di Torricelli da parte di Vecten e Fashbender segna la nascita della Teoria della Dualità. Tale teoria è stata poi affrontata per quanto riguarda la programmazione lineare e limitatamente alle prime quattro proprietà da John von Neumann.

Dopo von Neumann, la Teoria della Dualità ha avuto grande sviluppo dando luogo a una definizione generale del problema duale che relativamente al problema (B.1) è della forma:

$$(P^*) \quad \sup_{\lambda \in D^*} \inf_{x \in X} J(x, \lambda), \quad (B.2)$$

dove $D^* \doteq \{\delta \in \mathbb{R}^m : \langle \delta, d \rangle \geq 0 \ \forall d \in D\}$ e $J(x, \lambda) = f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle$ è la funzione Lagrangiana associata al problema (B.1). Se $R \neq \emptyset$ possiamo riscrivere il problema primale (B.1) in modo equivalente come:

$$(P) \quad \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in D^*} J(x, \lambda). \quad (B.3)$$

È infatti facile osservare che:

$$\sup_{\lambda \in D^*} J(x, \lambda) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in R \\ +\infty & \text{se } x \notin R \end{cases} \quad (B.4)$$

L'estremo inferiore del problema (B.3) coincide quindi, se $R \neq \emptyset$, con la soluzione del problema primale (B.1) e vale $+\infty$ altrimenti.

Osserviamo che in un assegnato problema della forma (B.1) una limitazione superiore del valore ottimo della funzione obiettivo si può ottenere valutando f in un punto ammissibile $\bar{x} \in R$ essendo:

$$f(\bar{x}) \geq \inf_{x \in R} f(x) \quad (B.5)$$

Non è facile in genere determinare una limitazione inferiore del valore di minimo; è utile quindi osservare che per i problemi (B.3) e (B.2) vale la seguente relazione:

$$\sup_{\lambda \in D^*} \inf_{x \in X} J(x, \lambda) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in D^*} J(x, \lambda). \quad (B.6)$$

qualsiasi sia il problema (B.1) il duale soddisfa quindi la proprietà (c). Chiamiamo divergenza di dualità la differenza tra i due valori di ottimo. Mentre la proprietà (c) è sempre soddisfatta, la (d) vale solo per una classe di problemi di ottimo, ristretta ma importante, che comprende, tipicamente, molti problemi di programmazione convessa.

È facile mostrare che valga la proprietà (e): il prodotto di $\langle \lambda, g(x) \rangle$ è una combinazione lineare dei vincoli $g_i(x)$ con le componenti λ_i di $\lambda \in D^*$ e rappresenta un rilassamento della regione ammissibile R . L'estremo superiore, soluzione del problema (B.2) è ovviamente una limitazione inferiore del valore di minimo $f \downarrow$.

Riguardo alla proprietà (f), basta riscrivere il problema (B.2) nella forma:

$$- \inf_{\lambda \in D^*} \sup_{x \in X} -J(x, \lambda) \quad (\text{B.7})$$

e applicando a questo problema la definizione di duale (ossia scambiando gli operatori) si ha:

$$- \sup_{x \in X} \inf_{\lambda \in D^*} -J(x, \lambda) = \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in D^*} J(x, \lambda) \quad (\text{B.8})$$

si ottiene il problema (B.3).

Un ampio e moderno contributo alla Teoria della Dualità è dovuto alla Teoria lagrangiana della dualità che si sviluppa e ha origine a partire dalla coppia di problemi variazionali (B.3) e (B.2).

Tale teoria sembra essere indipendente sia dalle teorie delle altre branche dell'Ottimizzazione, legate all'individuazione di condizioni di ottimalità e penalizzazione, sia da altre teorie sulla dualità, come ad esempio quelle di Legendre, Fenchel-Rockafellar, Aubin-Ekeland, Toland, Gould, Wolsey-Tind, Mond-Weir, La Teoria della separazione tra due insiemi è il background teorico di gran parte delle teorie appena menzionate.

La proprietà (e) suggerisce un approccio generale alla Teoria della Dualità. Tale approccio consiste nel definire una famiglia di rilassamenti della regione ammissibile R in dipendenza da un parametro e di ottenere in funzione di quest'ultimo una limitazione inferiore al minimo del problema dato. Il problema duale corrisponde a cercare l'estremo superiore di questi minoranti che in alcuni casi coincide con l'ottimo del problema primale.

B.2 Separazione debole

Nella precedente sezione, restringendoci a problemi che abbiano immagine di dimensione finita, abbiamo considerato come definizione del problema duale

la (B.2) relativamente al problema primale (B.1).

Scopo di questa sezione è analizzare le principali caratteristiche del problema (B.2) dal punto di vista dello schema di separazione nello Spazio Immagine (IS), ovvero lo spazio in cui sono contenute le immagini di g ed f .

A tal fine consideriamo $\bar{x} \in R$, denotiamo con $\overline{\mathcal{H}}$ la chiusura di \mathcal{H} :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\doteq \{(u, v) \in \mathbb{R}^{1+m} : u > 0, v \in D\} = (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times D, \\ \mathcal{K}_{\bar{x}} &\doteq \{(u, v) \in \mathbb{R}^{1+m} : u = f(\bar{x}) - f(x), v = g(x), x \in X\}, \\ \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}}) &\doteq \mathcal{K}_{\bar{x}} - \overline{\mathcal{H}} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{1+m} : u \leq f(\bar{x}) - f(x), v_i \leq g_i(x), \\ &\quad i = 1, \dots, m, x \in X\}\end{aligned}$$

L'insieme $\mathcal{K}_{\bar{x}}$ è l'immagine di X attraverso la funzione $A_{\bar{x}} \doteq (f(\bar{x}) - f(x), g(x))$, ovvero vale che $\mathcal{K}_{\bar{x}} = A_{\bar{x}}(X)$. È per questo che chiamiamo $\mathcal{K}_{\bar{x}}$ insieme immagine. $\mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}})$ è l'estensione conica rispetto al cono $\overline{\mathcal{H}}$.

Proposizione B.1. *Se la funzione obiettivo f del problema (B.1) è convessa e per le funzioni g_i relative ai vincoli si ha che $-g_i$ è convessa, per ogni $i = 1, \dots, m$, allora $\mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}})$ è un insieme convesso.*

Dimostrazione. Siano (u^1, v^1) e $(u^2, v^2) \in \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}})$, allora esistono $x^1, x^2 \in X$ tali che

$$u^1 \leq f(\bar{x}) - f(x^1), v^1 \leq g(x^1), u^2 \leq f(\bar{x}) - f(x^2), v^2 \leq g(x^2). \quad (\text{B.9})$$

Vogliamo provare che per ogni $\alpha \in [0, 1]$,

$$\alpha(u^1, v^1) + (1 - \alpha)(u^2, v^2) \in \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}}). \quad (\text{B.10})$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\alpha u^1 + (1 - \alpha)u^2 &\leq \alpha(f(\bar{x}) - f(x^1)) + (1 - \alpha)(f(\bar{x}) - f(x^2)) = \\ &f(\bar{x}) - (\alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2)) \leq f(\bar{x}) - f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2).\end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

L'ultima relazione segue per la convessità della funzione f . In modo analogo per la convessità delle $-g_i$ ogni $i = 1, \dots, m$ abbiamo:

$$\alpha v_i^1 + (1 - \alpha)v_i^2 \leq \alpha g_i(x^1) + (1 - \alpha)g_i(x^2) \leq g_i(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2). \quad (\text{B.12})$$

Dato che X è convesso $\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2 \in X$, la (B.10) vale e si ha la tesi \square

Teorema B.2. *Sia $\bar{x} \in R$, \bar{x} è un punto di minimo (globale) per il problema (B.1) se e solo se vale una delle seguenti condizioni:*

(a) il sistema

$$\begin{cases} f(\bar{x}) - f(x) > 0 \\ g(x) \in D, x \in X. \end{cases}$$

è impossibile.

(b)

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{K}_{\bar{x}} = \emptyset \quad (\text{B.13})$$

(c)

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}}) = \emptyset \quad (\text{B.14})$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'equivalenza tra (b) e (c). È semplice provare che $\mathcal{H} + \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ allora (B.14) è una diretta conseguenza della relazione:

$$\mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}}) - \mathcal{H} = \mathcal{K}_{\bar{x}} - \overline{\mathcal{H}} - \mathcal{H} = \mathcal{K}_{\bar{x}} - (\mathcal{H} + \overline{\mathcal{H}}) = \mathcal{K}_{\bar{x}} - \mathcal{H}.$$

□

Il teorema B.2 garantisce che (B.14) è una condizione sufficiente per l'ottimalità del problema (B.1). In alcuni casi è più utile provare la (B.14), dato che l'estensione conica $\mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}})$ gode di proprietà più vantaggiose di $\mathcal{K}_{\bar{x}}$. Ad esempio nell'Ottimizzazione convessa, l'estensione conica è un insieme convesso, tale proprietà consente di applicare il teorema di separazione di Hahn-Banach.

In genere, non è facile dimostrare direttamente la condizione (b) può essere vantaggioso dimostrarla in modo indiretto tramite uno schema di separazione.

Uno schema di separazione può essere ottenuto considerando la seguente famiglia di funzioni $w : \mathbb{R}^{1+m} \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, data da:

$$w(u, v; \gamma) \doteq u + \underline{w}(v, \gamma), \quad \gamma \in \Gamma \quad (\text{B.15})$$

dove $\underline{w} : \mathbb{R}^m \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ e Γ è un insieme fissato di parametri, tali che $\forall v \in \mathbb{R}^m$, si abbia:

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \exists \gamma_\alpha \in \Gamma \text{ tale che } \alpha \underline{w}(v, \gamma) = \underline{w}(v, \gamma_\alpha). \quad (\text{B.16})$$

L'assunzione (B.16) è una sorta di surgettività, nel senso che, per ogni $v \in \mathbb{R}^m$, l'immagine di $\underline{w}(v; \bullet)$ contenga almeno \mathbb{R}_+ o \mathbb{R}_- , se $\underline{w}(v; \bullet)$ assume rispettivamente un valore positivo o negativo.

Un importante caso speciale si ha quando posto:

$\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_m$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$ e \underline{w} è somma delle funzioni $\underline{w}_i : \mathbb{R} \times \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{I}$, si ha che w è della forma:

$$w(u, v; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = u + \sum_{i \in \mathcal{I}} \underline{w}_i(v_i; \gamma_i), \quad \gamma_i \in \Gamma_i, \quad i \in \mathcal{I} \doteq \{1, \dots, m\} \quad (\text{B.17})$$

In questo caso possiamo associare ad ogni vincolo g_i , la funzione \underline{w}_i che diremo funzione moltiplicatore.

Un interessante esempio di (B.16) si può ottenere se poniamo $\gamma_i = (\lambda_i, \mu_i)$ con $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{I}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\underline{w}_i(v_i, \lambda_i, \mu_i) = \lambda_i v_i - \mu_i v_i^2$. Vale che:

$$w(u, v; \lambda, \mu) = u + \langle \lambda, v \rangle - \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i v_i^2, \quad \lambda \in D^*, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^m, \quad (\text{B.18})$$

dove D^* è la polare di D definita nella precedente sezione.

Se $\mu = 0$, allora la (B.18) assume la forma più classica:

$$w(u, v; \lambda) = u + \langle \lambda, v \rangle, \quad \lambda \doteq (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in D^*. \quad (\text{B.19})$$

I simboli $lev_{>0}$ e $lev_{\geq 0}$ denotano rispettivamente gli insiemi di livello positivo e non negativo.

Definizione B.3. *Gli elementi della classe di funzioni w definiti dalla relazione (B.15) sono chiamati funzioni regolari di separazione debole se e solo se*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} lev_{>0} w(\bullet, \bullet; \gamma) = \mathcal{H}. \quad (\text{B.20})$$

Osserviamo che la relazione (B.20) implica:

$$\mathcal{H} \subset lev_{>0} w(\bullet, \bullet; \gamma), \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{B.21})$$

Se w è definita dalla relazione (B.18) e $p < m$ (ovvero il problema (B.1) ha almeno un vincolo di disuguaglianza) allora la condizione B.21 impone che $\mu_i = 0$, per $i = p + 1, \dots, m$.

Se w è definita dalla (B.18) o dalla (B.19) e se $p > 0$ (ovvero il problema (B.1) ha almeno un vincolo di uguaglianza), allora i λ_i , non sono vincolati in segno, per $i = 1, \dots, p$.

La classe di funzioni definita dalla relazione (B.15) non è la più ampia possibile ma è sufficiente ai fini dello sviluppo della Teoria lagrangiana della dualità. La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione della relazione espressa dalla (B.20) che non dipende da u ma solo da \underline{w} .

Proposizione B.4. *Se vale la condizione (B.16), la relazione (B.20) è verificata se e solo se*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} lev_{\geq 0} \underline{w}(\bullet; \gamma) = D. \quad (\text{B.22})$$

Dimostrazione. Chiamiamo \mathcal{Z} e \mathcal{Z}_v rispettivamente il membro a sinistra della relazione (B.20) e (B.22).

Vogliamo dimostrare che la (B.22) implica la (B.20).

Se $(u, v) \in \mathcal{H}$ per la definizione di \mathcal{H} e per la (B.22) si ha che

$$u + \underline{w}(\bullet; \gamma) > 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

, allora $\mathcal{Z} \supseteq \mathcal{H}$.

Per assurdo supponiamo che $\exists(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{H}$ tale che:

$$w(\hat{u}, \hat{v}; \gamma) = \hat{u} + \underline{w}(\hat{v}; \gamma) > 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{B.23})$$

Se $\hat{v} \in D$ è tale che $\hat{u} \leq 0$, allora la (B.23) implica:

$$\underline{w}(\hat{v}; \gamma) > -\hat{u} \geq 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{B.24})$$

Ciò è contraddetto dall'esistenza di $\gamma_0 \in \Gamma$ tale che $\underline{w}(\hat{v}; \gamma_0) = 0$ che deriva dalla relazione (B.16) per $v = \hat{v}$, $\alpha = 0$ e per qualsiasi $\gamma \in \Gamma$.

Se $\hat{v} \notin D$ allora la (B.22) implica che $\exists \hat{\gamma} \in \Gamma$ tale che $\underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma}) < 0$. Se $\hat{u} \leq 0$ allora $\hat{u} + \underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma}) < 0$, la (B.23) non è verificata.

Se $\hat{u} > 0$ allora la (B.16), per $v = \hat{v}$, $\gamma = \hat{\gamma}$, $\alpha = \hat{\alpha} \doteq -\frac{\hat{u}}{\underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma})} > 0$, garantisce l'esistenza di $\gamma_{\hat{\alpha}} \in \Gamma$ tale che $\hat{\alpha} \underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma}) = \underline{w}(\hat{v}; \gamma_{\hat{\alpha}})$.

Di conseguenza, abbiamo:

$$\hat{u} + \underline{w}(\hat{v}; \gamma_{\hat{\alpha}}) = \hat{u} + \hat{\alpha} \underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma}) = 0, \quad (\text{B.25})$$

e la (B.23) è di nuovo confutata. Dimostriamo ora l'implicazione inversa.

Per assurdo se $\exists \hat{v} \in \mathcal{Z}_v \setminus D$. $\hat{v} \in \mathcal{Z}_v$ implica che $\underline{w}(\hat{v}; \gamma) \geq 0$, $\forall \gamma \in \Gamma$ quindi $\forall u > 0$ si ha:

$$w(u, \hat{v}; \gamma) = u + \underline{w}(\hat{v}; \gamma) > 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{B.26})$$

queste disuguaglianze contraddicono la (B.20) dato che $(u > 0, \hat{v}) \notin \mathcal{H}$.

Supponiamo ora che $\exists \hat{v} \in D \setminus \mathcal{Z}_v$. $\hat{v} \notin \mathcal{Z}_v$ implica che $\exists \hat{\gamma} \in \Gamma$, tale che $\underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma}) < 0$. Per $0 < u < -\underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma})$ abbiamo $(u, \hat{v}) \in \mathcal{H}$ e

$$w(u, \hat{v}; \hat{\gamma}) = u + \underline{w}(\hat{v}; \hat{\gamma}) < 0 \quad (\text{B.27})$$

che contraddicono la (B.20). □

B.3 Teoria lagrangiana della dualità

Le funzioni di separazione debole hanno per la (B.20) la proprietà che \mathcal{H} è contenuto negli insiemi di livello positivi per ognuna di loro.

Per simmetria è naturale introdurre un'altra classe di funzioni, la classe delle funzioni di separazione forte, tale che \mathcal{H} contiene gli insiemi di livello positivi di ognuna di loro.

Tale introduzione è dovuta al fatto che queste classi di funzioni di separazione debole e forte, corrispondono rispettivamente, ai teoremi di alternativa debole e forte, alla penalizzazione esterna ed interna [5]. Dato che le funzioni di separazione sono la base della Teoria lagrangiana della dualità, è naturale aspettarsi di trovare un'altra teoria della dualità se scegliamo come nuova classe di funzioni di separazione, quelle di separazione forte.

La proposizione che segue evidenzia che la classe delle funzioni regolari di separazione debole sono comunque la base naturale per stabilire condizioni di ottimalità nella Teoria lagrangiana della dualità.

Proposizione B.5. *Sia data una classe di funzioni regolari di separazione debole e $\bar{x} \in R$. Se $\exists \bar{\gamma} \in \Gamma$ tale che:*

$$u + \underline{w}(v; \bar{\gamma}) \leq 0, \quad \forall (u, v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}, \quad (\text{B.28})$$

allora \bar{x} è un punto di minimo globale di (B.1).

Dimostrazione. Le relazioni (B.20) e (B.28) implicano, rispettivamente,

$$\mathcal{H} \subset \text{lev}_{>0} w(\bullet, \bullet; \bar{\gamma}), \quad \mathcal{K}_{\bar{x}} \subseteq \text{lev}_{\leq 0} w(\bullet, \bullet; \bar{\gamma}), \quad (\text{B.29})$$

quindi vale la (B.13) di pag. 59 e la tesi segue per il teorema B.2. \square

Verificare la condizione (B.28) non è semplice, le proposizioni che seguono forniscono delle condizioni equivalenti che potrebbero eventualmente essere utili anche per un approccio di tipo computazionale.

Proposizione B.6. *Sia data una classe di funzioni regolari di separazione debole e $\bar{x} \in R$. Valgono le seguenti condizioni:*

(a) *L'uguaglianza*

$$\min_{\gamma \in \Gamma} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \underline{w}(v; \gamma)] = 0 \quad (\text{B.30})$$

è equivalente alla (B.28)

(b) *Se (B.30) vale allora \bar{x} è un punto di minimo globale di (B.1).*

Dimostrazione. Supponiamo che la (B.28) sia verificata.

Per $\gamma = \bar{\gamma}$ si ha:

$$\sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \underline{w}(v; \bar{\gamma})] \leq 0. \quad (\text{B.31})$$

Consideriamo l'immagine di \bar{x} tramite \bar{x} per definizione il punto

$$(\bar{u} = 0, \bar{v} \in D) \doteq A_{\bar{x}}(\bar{x}).$$

Per la (B.22) si ha:

$$\bar{u} + \underline{w}(\bar{v}; \gamma) = \underline{w}(\bar{v}; \gamma) \geq 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Per questa disuguaglianza possiamo dire che l'estremo superiore della (B.30) è maggiore o uguale a zero per ogni $\gamma \in \Gamma$, allora la (B.31) è verificata come uguaglianza e di conseguenza per $\gamma = \bar{\gamma}$ si ha il minimo in (B.30).

Supponiamo ora che valga la (B.30), segue che $\exists \bar{\gamma} \in \Gamma$ tale che:

$$\sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \underline{w}(v; \bar{\gamma})] = 0.$$

da cui segue la (B.28).

La (b) è diretta conseguenza di (a) e della Proposizione B.5. □

Introduciamo ora le seguenti estensioni della lagrangiana $J(x, \lambda)$:

$$\mathcal{J}(x; \gamma) \doteq f(x) - \underline{w}(g(x); \gamma) \quad (\text{B.32})$$

$$J^w(x; \gamma) \doteq f(x) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \underline{w}_i(g_i(x); \gamma_i) \quad (\text{B.33})$$

$$J^A(x; \lambda, \mu) \doteq f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle + \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i g_i(x)^2, \quad (\text{B.34})$$

$$J(x; \lambda) \doteq f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle, \quad (\text{B.35})$$

La (B.35) è la forma classica della lagrangiana già introdotta nella definizione del problema (B.2), mentre la (B.35) è chiamata lagrangiana estesa.

Ricordando l'espressione di (u, v) in dipendenza da x (basta considerare definizione di $\mathcal{K}_{\bar{x}}$ della sezione (B.2)) sfruttando la Proposizione B.6 si ha:

Proposizione B.7. *Siano assegnate le funzioni (B.32), (B.33), (B.34), (B.35) e $\bar{x} \in R$.*

(a) *Le uguaglianze:*

$$\max_{\gamma \in \Gamma} \inf_{x \in X} \mathcal{J}^w(x; \gamma) = f(\bar{x}); \quad (\text{B.36})$$

$$\max_{\substack{\gamma_i \in \Gamma_i \\ i \in \mathcal{I}}} \inf_{x \in X} J^w(x; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = f(\bar{x}); \quad (\text{B.37})$$

$$\max_{\substack{\lambda \in D^* \\ \mu \in \mathbb{R}_+^m}} \inf_{x \in X} J^A(x; \lambda, \mu) = f(\bar{x}); \quad (\text{B.38})$$

$$\max_{\lambda \in D} \inf_{x \in X} J(x; \lambda) = f(\bar{x}); \quad (\text{B.39})$$

sono equivalenti alla (B.30) rispettivamente nei casi (B.15), (B.17), (B.18), (B.19).

(b) Se una delle uguaglianze del punto (a) vale, allora \bar{x} è un punto di minimo globale di (B.1).

Non è detto che il minimo nella (B.30) esista, introduciamo allora il problema:

$$(P_I^*) \quad \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \underline{w}(v; \gamma)], \quad (\text{B.40})$$

che chiamiamo *duale immagine*, il cui nome deriva dal fatto che il problema (B.40) è definito tramite le funzioni di separazione debole.

Se consideriamo w definito da (B.17), (B.18), (B.19), otteniamo tre modi diversi di riscrivere il problema (B.40), in particolare l'ultimo dei tre è dato da :

$$\inf_{\lambda \in D^*} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \langle \lambda, v \rangle]. \quad (\text{B.41})$$

Scambiamo ora nel problema (B.40) l'ordine degli operatori, per definire il problema simmetrico e dimostrare il teorema della *Dualità immagine non stringente*.

Il termine non stringente si riferisce all'accezione debole classicamente usata in letteratura, mentre il termine immagine suggerisce invece che il teorema che segue è dimostrato nell'IS.

Teorema B.8 (Dualità immagine non stringente). *Sia $\bar{x} \in X$. Assumiamo che la regione ammissibile del problema immagine definito nel terzo membro della (B.42) sia non vuota. Consideriamo la classe delle funzioni regolari di separazione debole.*

Si ha:

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \underline{w}(v; \gamma)] \geq \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} \inf_{\gamma \in \Gamma} [u + \underline{w}(v; \gamma)] = \sup_{\substack{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}} \\ v \in D}} (u). \quad (\text{B.42})$$

Dimostrazione. Proviamo prima l'uguaglianza.

Se $v \notin D$, per la Proposizione B.4 $\exists \gamma_v \in \Gamma$ tale che $\underline{w}(v; \gamma_v) < 0$ per la (B.16) a pag 59, $\forall \alpha > 0$, $\exists \gamma_\alpha \in \Gamma$ tale che :

$$\alpha \underline{w}(v; \gamma_v) = \underline{w}(v; \gamma_\alpha) < 0.$$

Allora $\underline{w}(v; \gamma_\alpha) \rightarrow -\infty$ quando $\alpha \rightarrow +\infty$, quindi si ha che l'estremo inferiore del secondo membro della (B.42) vale $-\infty$.

Se $v \in D$ allora, per la (B.22), vale che:

$$\underline{w}(v; \gamma) \geq 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

si ha quindi che l'estremo inferiore presente al secondo membro della (B.42) è maggiore di $-\infty$.

Dato che abbiamo assunto $\mathcal{K}_{\bar{x}} \cap (\mathbb{R} \times D) \neq \emptyset$, segue che l'estremo superiore al secondo membro della (B.42) non cambia se aggiungiamo il vincolo $v \in D$. Si ha inoltre che nell'ipotesi che $v \in D$ per la (B.16) se $\alpha = 0$, $\exists \gamma_0 \in \Gamma$ tale che $\underline{w}(\bullet; \gamma_0) \equiv 0$, quindi per $\gamma = \gamma_0$ si ha l'estremo inferiore per il secondo membro della (B.42).

Otteniamo così che l'uguaglianza tra il secondo e il terzo membro della (B.42) è verificata.

La disuguaglianza presente nella (B.42) è il caso particolare di una disuguaglianza ben nota che è immediato ricavare tramite le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \underline{w}(v; \gamma)] &\geq u + \underline{w}(v; \gamma), \quad \forall (u, v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}, \\ \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \underline{w}(v; \gamma)] &\geq \inf_{\gamma \in \Gamma} [u + \underline{w}(v; \gamma)], \quad \forall (u, v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}; \end{aligned}$$

consideriamo l'estremo superiore, rispetto a $(u, v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}$ ottenendo al secondo membro dell'ultima disuguaglianza la (B.42) e quindi la tesi. \square

Se guardiamo al problema (B.41) si ha che la (B.42) diventa:

$$\inf_{\lambda \in D^*} \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} [u + \langle \lambda, v \rangle] \geq \sup_{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} \inf_{\lambda \in D^*} [u + \langle \lambda, v \rangle] = \sup_{\substack{(u,v) \in \mathcal{K}_{\bar{x}} \\ v \in D}} (u), \quad (\text{B.43})$$

che fornisce la versione immagine della coppia di problemi classici (B.3) e (B.2). Per l'uguaglianza tra il secondo e il terzo membro della (B.42) e della (B.43) possiamo chiamare il secondo membro rispettivamente della (B.42) e della (B.43) problema primale immagine.

La differenza tra il primo e il secondo membro della (B.42) e (analogamente della (B.43)) si definisce divergenza di dualità immagine.

Così come siamo passati dal problema (B.30) al problema (B.40), considerando la Proposizione B.7, definiamo il seguente problema:

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \inf_{x \in X} \mathcal{J}^w(x; \gamma), \quad (\text{B.44})$$

che chiameremo *duale generalizzato*, i cui casi particolari sono:

- $\sup_{\substack{\gamma_i \in \Gamma_i \\ i \in \mathcal{I}}} \inf_{x \in X} J^w(x; \gamma_1, \dots, \gamma_m);$
- $\sup_{\substack{\lambda \in D^* \\ \mu \in \mathbb{R}_+^m}} \inf_{x \in X} J^A(x; \lambda, \mu);$
- $\sup_{\lambda \in D^*} \inf_{x \in X} J(x; \lambda);$

L'ultimo problema è il duale lagrangiano classico, che qui è chiamato *duale debole*. Anche per il problema (B.44) possiamo enunciare un teorema analogo al Teorema B.8 relativo al problema (B.40):

Teorema B.9 (Dualità debole non stringente). *Supponiamo che la regione ammissibile R relativa al problema (B.1) sia non vuota. Consideriamo le funzioni lagrangiane definite da (B.32), (B.33), (B.34) e (B.35) dove \underline{w} rispetta la condizione (B.16). Abbiamo:*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \inf_{x \in X} \mathcal{J}^w(x; \gamma) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{J}^w(x; \gamma) = \inf_{x \in R} f(x), \quad (\text{B.45})$$

$$\sup_{\substack{\gamma_i \in \Gamma_i \\ i \in \mathcal{I}}} \inf_{x \in X} J^w(x; \gamma_1, \dots, \gamma_m) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\substack{\gamma_i \in \Gamma_i \\ i \in \mathcal{I}}} J^w(x; \gamma_1, \dots, \gamma_m) = \inf_{x \in R} f(x), \quad (\text{B.46})$$

$$\sup_{\substack{\lambda \in D^* \\ \mu \in \mathbb{R}_+^m}} \inf_{x \in X} J^A(x; \lambda, \mu) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\substack{\lambda \in D^* \\ \mu \in \mathbb{R}_+^m}} J^A(x; \lambda, \mu) = \inf_{x \in R} f(x), \quad (\text{B.47})$$

$$\sup_{\lambda \in D^*} \inf_{x \in X} J(x; \lambda) \leq \inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in D^*} J(x; \lambda) = \inf_{x \in R} f(x). \quad (\text{B.48})$$

Dimostrazione. Al fine di mostrare che J^w , J^A e J sono casi particolari di \mathcal{J}^w è sufficiente sostituire nella (B.42) a u , v , $\mathcal{K}_{\bar{x}}$ le loro espressioni in termini di $f(\bar{x})$, $f(x)$, $g(x)$ date dalla definizione di $\mathcal{K}_{\bar{x}}$, sottrarre $f(\bar{x})$ ai tre membri. Moltiplicandoli per -1 , si ha la tesi. \square

La differenza tra il primo e il secondo membro delle (B.45), (B.46), (B.47), (B.48) è chiamato divergenza di dualità.

Sotto opportune ipotesi, quale ad esempio la convessità tale divergenza è nulla.

Definizione B.10. *La sottoclasse della famiglia, definita dalla (B.15), si dice D -isotona, se e solo se presi $v^1, v^2 \in D$ vale che :*

$$v^1 - v^2 \in D \iff \underline{w}(v^1, \gamma) - \underline{w}(v^2, \gamma) \geq 0, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{B.49})$$

La famiglia delle \underline{w} della forma $\underline{w}(v, \lambda) = \langle v, \lambda \rangle$ con $\lambda \in D^*$ è D -isotona.

Proposizione B.11. *Se \underline{w} è D -isotona, allora il problema*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{(u,v) \in \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}})} [u + \underline{w}(v; \gamma)] \quad (\text{B.50})$$

è equivalente a B.40 nel senso che gli estremi in B.50 coincidono con quelli di B.40. In particolare tale equivalenza vale nel caso $\underline{w} = \langle \lambda, v \rangle$.

Dimostrazione. In accordo con le notazioni precedenti, poniamo $z = (u, v)$. Abbiamo quindi:

$$\mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}}) = \bigcup_{\hat{z} \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} (\hat{z} - \text{cl } \mathcal{H}). \quad (\text{B.51})$$

Quindi, per qualsiasi funzione $\phi(u, v)$ da B.51:

$$\sup_{(u,v) \in \mathcal{E}(\mathcal{K}_{\bar{x}})} \phi(u, v) = \sup_{\hat{z} \in \mathcal{K}_{\bar{x}}} \sup_{(u,v) \in \hat{z} - \text{cl } \mathcal{H}} \phi(u, v). \quad (\text{B.52})$$

Per ogni $\gamma \in \Gamma$ abbiamo:

$$u + \underline{w}(v; \gamma) \leq \hat{u} + \underline{w}(\hat{v}; \gamma), \quad \forall (u, v) \in \hat{z} - \text{cl } \mathcal{H}, \quad \forall \hat{z} \in \mathcal{K}_{\bar{x}}. \quad (\text{B.53})$$

In realtà, $(u, v) \in \hat{z} - \text{cl } \mathcal{H}$ implica l'esistenza di (u', v') in $\text{cl } \mathcal{H}$ (con $u' \geq 0$ e $v' \in D$), tali che $u = \hat{u} - u'$ e $v = \hat{v} - v'$. Considerando B.49, segue:

$$u + \underline{w}(v; \gamma) = \hat{u} - u' + \underline{w}(\hat{v} - v'; \gamma) \leq \hat{u} + \underline{w}(\hat{v} - v'; \gamma) \leq \hat{u} + \underline{w}(\hat{v}; \gamma),$$

dove l'ultima disuguaglianza vale grazie al fatto che $\hat{v} - (\hat{v} - v') = v' \in D$. Da B.53 possiamo dire:

$$\max_{(u,v) \in \hat{z} - \text{cl } \mathcal{H}} [u + \underline{w}(v; \gamma)] = \hat{u} + \underline{w}(\hat{v}; \gamma), \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

e quindi grazie a B.52, gli estremi in B.50 e in B.40 sono uguali; da cui la tesi. \square

Appendice C

Integrali impropri

Integrali che presentano uno o più punti di discontinuità nell'intervallo di definizione, oppure tali che uno o entrambi gli estremi di integrazione non siano finiti, si chiamano integrali impropri.

Si classificano nel seguente modo:

- integrali impropri di prima specie: se almeno un estremo di integrazione non è finito.
- Integrali impropri di seconda specie: se nell'intervallo di integrazione cade almeno un punto di discontinuità.

Valore principale di Cauchy

Considereremo in questa sezione gli integrali impropri di seconda specie (come ad esempio in Figura C.1).

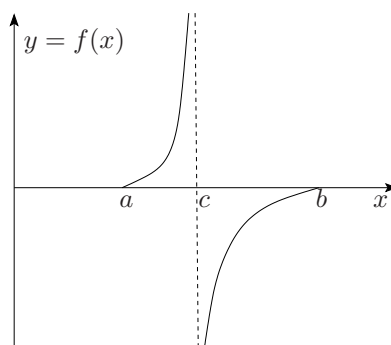


Figura C.1: Un esempio di integrale improprio di seconda specie.

Sia $y = f(x)$ una funzione discontinua in un punto $c \in [a, b]$. Classicamente si suddivide l'intervallo di integrazione in due intervalli che escludano il punto c : $[a, b] = [a, c) \cup (c, b]$ e si calcola

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x)dx, \quad (\text{C.1})$$

dove ϵ_1 ed ϵ_2 sono due quantità infinitesime positive del tutto arbitrarie. Se i due limiti esistono finiti, allora l'integrale improprio converge.

La tecnica di Cauchy si discosta dalla usuale tecnica di calcolo degli integrali impropri di seconda specie perché considera ϵ_1 ed ϵ_2 non più come infinitesimi fra loro differenti, ma come quantità identiche.

In tale ipotesi la (C.1) diviene:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx. \quad (\text{C.2})$$

Se il limite precedente esiste finito, esso si chiama **valore principale di Cauchy**.

Appendice D

Integrali di Glauert

Per rintracciare la soluzione del problema isoperimetrico (2.1) si incontra il seguente integrale finito:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi)}{\cos\phi - \cos\theta} d\phi$$

dove n è un intero non negativo. La variabile θ che compare nell'integrale varia nello stesso intervallo $[0, \pi]$ di integrazione. In questa appendice vogliamo calcolare il valore di questo integrale, noto come **integrale di Glauert**, per cui esiste anche una formulazione con il seno.

In primo luogo osserviamo che tale integrale è improprio dato che la funzione integranda non è definita per $\phi = \theta$. Per tale valore il denominatore si annulla e quindi la funzione integranda diverge. Tuttavia questa divergenza non preclude l'esistenza dell'integrale definito in quanto la singolarità della funzione integranda è debole e si ha una compensazione dei due contributi all'integrale di segno opposto provenienti dai due lati della singolarità. Si vuole dimostrare che vale l'identità:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi)}{\cos\phi - \cos\theta} d\phi = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)},$$

per ogni n intero non negativo, $n = 0, 1, 2, \dots$, e per $\theta \in [0, \pi]$. Notiamo che per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, il valore dell'integrale è definito in quanto la frazione a secondo membro non diverge, ma origina la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che, in virtù della regola de l'Hôpital, ha un valore finito.

L'integrale definito del primo membro è più facile da calcolare se viene prima moltiplicato per la funzione $\sin\theta$, per cui consideriamo l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi) \sin\theta}{\cos\phi - \cos\theta} d\phi.$$

In primo luogo, riscriviamo il denominatore in forma di prodotto, ricorrendo alla formula di prostaferesi:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Avremo allora

$$\frac{\sin \theta}{\cos \phi - \cos \theta} = - \frac{\sin \theta}{2 \sin \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right)}.$$

Osserviamo ora che anche il numeratore $\sin \theta$ di questa frazione si può scrivere in funzione di $\frac{\phi + \theta}{2}$ e $\frac{\phi - \theta}{2}$. Infatti

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \left(\frac{\phi + \theta}{2} - \frac{\phi - \theta}{2} \right) \\ &= \sin \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\cos \phi - \cos \theta} &= - \frac{\sin \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right)} \\ &= - \frac{\cos \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right)} + \frac{\cos \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\cot \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right) + \cot \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

L'integrale modificato diventa quindi

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi) \sin \theta}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \tag{D.1}$$

$$\tag{D.2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(n\phi) \left[\cot \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right) + \cot \left(\frac{\phi + \theta}{2} \right) \right] d\phi. \tag{D.3}$$

Spezzando l'integrale e osservando che

$$\int_0^\pi \cos(n\phi) \cot\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right) d\phi = \int_{-\pi}^0 \cos(n\phi) \cot\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right) d\phi,$$

essendo le funzioni coseno e cotangente rispettivamente pari e dispari, si ha

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\phi) \sin \theta}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cos(n\phi) \cot\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right) d\phi.$$

Si consideri ora la sostituzione $x = \theta + \phi$, da cui $d\phi = dx$ e $\theta = x - \phi$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos(n\phi) \sin \theta}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi &= \frac{1}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos(nx - n\theta) \cot \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{\cos(n\theta)}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos(nx) \cot \frac{x}{2} dx + \\ &+ \frac{\sin(n\theta)}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \sin(nx) \cot \frac{x}{2} dx. \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo. Infatti la funzione $\cot \frac{x}{2}$ è dispari e periodica e di periodo 2π . Poiché la funzione $\cos(nx)$ è pari e di periodo $2\pi/n$ per $n \geq 1$, si ha

$$\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \cos(nx) \cot \frac{x}{2} dx = \int_{-\pi}^\pi \cos(nx) \cot \frac{x}{2} dx = 0,$$

giacché la funzione integranda è dispari. Siamo quindi arrivati a scrivere che

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos(n\phi) \sin \theta}{\cos \phi - \cos \theta} d\phi &= \frac{\sin(n\theta)}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} \sin(nx) \cot \frac{x}{2} dx, \\ &= \frac{\sin(n\theta)}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \cot \frac{x}{2} dx, \end{aligned}$$

dato che anche la funzione $\sin(nx)$ ha periodo $2\pi/n$ per $n \geq 1$.

Definiamo ora l'integrale

$$J_n = \int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \cot \frac{x}{2} dx.$$

Possiamo allora scrivere

$$J_n - J_{n-1} = \int_{-\pi}^\pi \{\sin(nx) - \sin[(n-1)x]\} \cot \frac{x}{2} dx.$$

Utilizzando ancora le formule di prostraferesi si ha

$$\begin{aligned}\sin(nx) - \sin[(n-1)x] &= 2 \cos\left(\frac{n+n-1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n-n+1}{2}x\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \sin\frac{x}{2},\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}J_n - J_{n-1} &= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \sin\frac{x}{2} \cot\frac{x}{2} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) \cos\frac{x}{2} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(nx) + \cos[(n-1)x]\} dx.\end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo per ogni $n \neq 0$. Il secondo è nullo se $n \neq 1$. Quindi se $n \geq 2$, entrambi gli integrali sono nulli e $J_n = J_{n-1}$, per $n \geq 2$. Di conseguenza, per $n \geq 1$ si ha $J_n = J_1$.

Calcoliamo pertanto solo questo integrale:

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cot\frac{x}{2} dx.$$

In virtù della formula $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, abbiamo

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} \cot\frac{x}{2} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos^2\frac{x}{2} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos x}{2} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.\end{aligned}$$

In conclusione, l'integrale che ci interessa è dato da

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\phi)}{\cos\phi - \cos\theta} d\theta &= \frac{1}{\sin\theta} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\phi) \sin\theta}{\cos\phi - \cos\theta} d\phi \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\sin(n\theta)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cot\frac{x}{2} dx \\ &= \frac{\sin(n\theta)}{2 \sin\theta} J_n = \frac{\sin(n\theta)}{2 \sin\theta} J_1 = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta},\end{aligned}$$

per ogni n intero non negativo, $n = 0, 1, 2, \dots$, e per $\theta \in [0, \pi]$.

Bibliografia

- [1] P. Acquistapace: *Appunti del corso di Istituzioni di Analisi Superiore B*. SEU, 2002.
- [2] A. Baciotti: *Teoria matematica dei controlli*. Celid, 1998.
- [3] L.J. Clancy: *Aerodynamics*. Pitman Publishing, 1975.
- [4] L.E. Elsgolc: *Calculus of variations*. Pergamon Press, 1961.
- [5] F. Giannessi: *Constrained Optimization and Image Space Analysis*. Springer-Verlag, 2005, Vol.1.
- [6] F. Giannessi: *On the theory of Lagrangian duality*. Optimization Letters, Springer-Verlag, Vol.1, pg 9-20, 2006.
- [7] E. Giusti: *Metodi diretti nel Calcolo delle variazioni*. U.M.I., 1994.
- [8] C. Golia: *Aerodinamica 1*. Facoltà d'Ingegneria, Seconda università degli studi di Napoli, 2005.
<http://143.225.250.187/docenti/Golia/appunti/Aerodinamica1>
- [9] E. Mattioli: *Aerodinamica*. Levrotto & Bella, 1989.
- [10] M.M. Munk: *The minimum induced drag of aerofoiles*. National Advisory Committee for Aeronautics, 1961.
- [11] L.A.Pars: *An introduction to the Calculus of Variations*. Heinemann, 1962.
- [12] E. Pistolesi: *Aerodinamica*. ETS Editrice, 1932.

Grazie

a chi con impegno, amore e rimproveri è stato, sempre, testimone attivo della mia vita.

A chi mi capisce con un solo sguardo e ha fatto salti mortali perché fossi serena.

A chi mi ha incitato a non demordere mai e a credere nelle mie capacità.

A chi mi ha insegnato a diffidare degli aerei e ad apprezzarne la bellezza.

A chi, più o meno spontaneamente, ha dedicato ore ed ore del proprio tempo, per aiutarmi.

A chi mi ha offerto la sua casa come rifugio.

A chi mi ha svelato i segreti di Xfig e la magia delle sue carte per i miei esami.

A chi ha sognato che il mio integrale doppio converge.

A chi ha percorso chilometri pur di vedere il mio spettacolo.

E, soprattutto, alla mia famiglietta di compagni di vita presente in ogni difficoltà.