

Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2006/2007

Tesi di Laurea Specialistica

Stringhe su orbifold e singolarità
cosmologiche

Candidato
Lorenzo Seri

Relatore
Chiarissimo Prof. Massimo Porrati

Indice

1	Introduzione	3
I	Stringhe su orbifold indipendenti dal tempo	6
2	Trattazione generale	7
2.1	Gruppi spaziali e gruppi puntuali	7
2.2	Spazi di Hilbert delle stringhe sugli orbifold	11
2.3	Vincoli derivanti dall'invarianza modulare	14
2.4	Numero delle generazioni via path integral	17
2.5	Modelli con immersione standard del gruppo puntuale	20
3	Un esempio: l'orbifold Z	26
3.1	Costruzione dell'orbifold	26
3.2	Spazio di Hilbert degli stati e generazioni	28
3.3	Immersioni del gruppo puntuale e del gruppo spaziale nel gruppo di gauge	32
II	Stringhe su orbifold dipendenti dal tempo	35
4	Geometria degli orbifold:	
	orbifold parabolico, brana nulla, universo di Milne.	36
4.1	Orbifold parabolico	36
4.1.1	Presentazione del modello	36
4.1.2	Un modellino di Big Bang	38
4.1.3	Studio della singolarità	39
4.1.4	Proprietà notevoli dell'orbifold	41
4.2	La brana nulla	42
4.3	L'universo di Milne	45
5	Teoria di prima quantizzazione	46
5.1	Caso dell'orbifold parabolico	46
5.2	Caso della brana nulla	48

5.3	Particella libera nell'“universo di Milne”	50
6	Stringhe sugli orbifold	51
6.1	Stringhe sull'orbifold parabolico	51
6.2	Stringhe sulla brana nulla	53
6.3	Fomulazione covariante	55
6.3.1	Algebra di scambio	55
6.3.2	Funzione di partizione toroidale	56
6.3.3	Estensione al caso della brana nulla	58
6.4	Stringhe sull'“universo di Milne”	60
7	Interazioni a livello di grafo ad albero	61
7.1	Funzioni a tre e quattro punti nel caso dell'orbifold parabolico...	61
7.2	...e della brana nulla	67
7.3	Analisi delle diverse divergenze nei due casi	69
8	Instabilità della singolarità degli orbifold	70
8.1	Studio della stabilità in relatività generale	70
8.1.1	Universo di Milne	72
8.1.2	Orbifold parabolico	73
8.2	La brana nulla	75
9	Conclusioni e prospettive future	77
A	Caratteristica di Eulero e modello sigma non lineare	80
B	Il teorema di Hawking e Penrose sulle singolarità	84

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi vent'anni i progressi in teoria delle stringhe ci hanno fornito vari strumenti per comprendere la soluzione di singolarità di tipo tempo. La relazione tra la teoria delle stringhe e la relatività generale è ben nota: a basse energie e per accoppiamento di stringa debole, le correzioni di stringa, sia classiche che quantistiche, appaiono come un'estensione covariante generale dell'azione di Einstein-Hilbert. Più precisamente, le modifiche possono essere intese come una doppia espansione in $\frac{\alpha'}{l_c^2}$ e g_s . α' è l'inverso della tensione di stringa, e l_c è un raggio di curvatura tipico. La costante di accoppiamento di stringa svolge il ruolo di \hbar . Per esempio, con quattro dimensioni non compatte, l'azione effettiva della teoria di stringa per basse energie (in assenza di costante cosmologica) ha la forma

$$S_{eff} = \frac{1}{g_s^2 \alpha'} \int d^4x \sqrt{-g} (R + a_2 \alpha' R^2 + \dots) + \frac{1}{\alpha'} \int d^4x \sqrt{-g} (b_1 R + b_2 \alpha' R^2 + \dots) + \dots \quad (1.1)$$

e la massa di Planck quadridimensionale viene identificata con

$$M_{Pl}^2 = \frac{1}{g_s^2 \alpha'} (1 + b_1 g_s^2 + \dots) \quad (1.2)$$

La prima riga in (1.1) corrisponde al contributo classico. La seconda riga è il primo ordine della correzione quantistica. Lo sviluppo in $\alpha' R$ può essere imputato alla natura estesa della stringa: i termini di ordine maggiore nella prima riga della (1.1) corrispondono alle modifiche alla gravità einsteiniana provenienti dalla teoria di stringa classica. Le correzioni in g_s sono dovute invece ad effetti quantistici. Inoltre la teoria di stringa fornisce un cutoff UV alla scala di stringa; questa proprietà svolge un ruolo chiave per quanto concerne la finitezza ultravioletta della teoria, che risolve l'annoso problema della non rinormalizzabilità della gravità Einsteiniana.

Ad energie molto basse (o a piccola curvatura) e con accoppiamento di

stringa debole il primo termine nella (1.1) domina e si ritorna all'azione di Einstein. Ma ad alte energie, o in regioni dello spazio con grande curvatura, nelle quali

$$E^2 \alpha' \sim O(1) \quad \text{o} \quad \frac{E^2}{M_{pl}^2} \sim O(1) \quad (1.3)$$

gli ordini superiori della (1.1) divengono importanti. L'espansione di bassa energia non è più valida ed è necessario una trattazione di stringa esatta. Fortunatamente tale trattazione è possibile e lo è anche nel caso di fondi indipendenti dal tempo che presentino delle singolarità.

Il fatto fondamentale è che a causa della singolarità spazio-temporale nuovi gradi di libertà della teoria di stringa divengono importanti. Questi gradi di libertà possono essere classificati come *perturbativi* o *non perturbativi* a seconda della loro dipendenza dalla costante di accoppiamento di stringa g_s . Le masse degli stati perturbativi di stringa hanno un limite regolare quando $g_s \rightarrow 0$. Le masse degli stati non perturbativi vanno come l'inverso di una qualche potenza dell'accoppiamento di stringa. Perciò in fondi regolari e con accoppiamento debole questi stati non perturbativi hanno una grande massa e non contribuiscono alla teoria perturbativa, ed in generale gli effetti sono piccoli e relativamente poco importanti. Al contrario in prossimità delle singolarità spazio-temporali, laddove lo sviluppo perturbativo cessa di valere, questi stati acquistano importanza.

Un rappresentante della classe di fondi singolari indipendenti dal tempo che vogliamo studiare è lo spazio bidimensionale ottenuto tramite l'identificazione

$$(x_1, x_2) \rightarrow (-x_1, -x_2) \quad (1.4)$$

nello spazio euclideo R^2 . Tale procedimento ci dà un cono bidimensionale, sul quale la relatività generale classica è singolare a causa della funzione delta di curvatura in corrispondenza della punta. La teoria quantistica di campo è a sua volta singolare in un tale fondo. Inoltre l'espansione (1.1) non è valida (sempre a causa della singolarità della curvatura). Ma la teoria di stringa è solubile in questo fondo e la natura estesa della stringa porta a nuovi gradi di libertà noti come stati twistati, localizzati in corrispondenza della singolarità. Tali gradi di libertà rendono regolare tanto la teoria classica quanto quella quantistica. Ecco quindi un esempio di come la teoria di stringa risolva le singolarità della relatività generale e della QFT. Nella prima parte vedremo studieremo in dettaglio la teoria di stringa su fondi di questo tipo (orbifold). Nel primo capitolo la questione verrà affrontata in generale: viene effettuata la costruzione dello spazio di Hilbert degli stati di stringa e si studia come garantire l'invarianza modulare e come estendere l'azione del gruppo di orbifold ai gradi di libertà interni (in particolar modo nel caso della superstringa eterotica $E_8 \times E_8$). Nel secondo capitolo ci concentreremo sul caso particolare dell'orbifold Z per chiarire con un'applicazione quanto discusso prima in teoria.

Oggetto di ricerche più recenti è stato lo studio della teoria di stringa su orbifold dipendenti dal tempo, cui è dedicata la seconda parte. Questi spazi possono presentare singolarità di tipo tempo o tipo luce; in particolare studieremo il caso dello spazio-tempo ottenuto dallo spazio di Minkowski $R^{1,2}$

$$ds^2 = -2dx^+dx^- + dx^2 \quad (1.5)$$

operando le seguenti identificazioni (si tratta di una particolare trasformazione di Lorentz):

$$\begin{aligned} x^+ &\sim x^+ \\ x &\sim x + 2\pi n x^+ \\ x^- &\sim x^- + 2\pi n x + \frac{1}{2}(2\pi n)^2 x^+ \end{aligned} \quad (1.6)$$

In corrispondenza di $x^+ = 0$ si avrà una singolarità di tipo luce. Questo modello è particolarmente interessante perché:

- La singolarità può essere interpretata come un modello della singolarità cosmologica Big Bang-Big Crunch.
- In quanto quoziente dello spazio-tempo piatto Minkowskiano, l'orbifold permette la soluzione esatta della teoria di stringa perturbativa: possiamo seguire la procedura standard della prima parte.

Dal momento che le singolarità di tipo tempo degli orbifold sono risolte in maniera pulita in teoria di stringa classica, è naturale chiedersi se le singolarità di tipo spazio e di tipo luce sono suscettibili di un'analoga soluzione di teoria di stringa classica. Se questo fosse vero un'evoluzione temporale regolare dal Big Crunch al Big Bang dovrebbe essere consentita e dovrebbero essere ben definiti gli elementi di matrice S tra stati asintotici con $x^+ \rightarrow -\infty$ e e stati asintotici con $x^- \rightarrow \infty$. Troveremo però che questa ampiezza presenta delle divergenze e cercheremo di interpretare perché questo accade.

Parte I

Stringhe su orbifold indipendenti dal tempo

Capitolo 2

Trattazione generale

2.1 Gruppi spaziali e gruppi puntuali

In questa sezione discuteremo alcune caratteristiche generali dei gruppi discreti usati per ottenere un orbifold da una varietà; prenderemo come varietà di partenza lo spazio euclideo. Il gruppo discreto che prendiamo dovrebbe conservare la metrica dello spazio, e quindi nel caso euclideo dovrebbe essere un sottogruppo discreto del gruppo euclideo contenente traslazioni e rotazioni. Per esempio consideriamo un toro T^d d -dimensionale. Esso potrebbe essere visto in maniera equivalente come lo spazio euclideo R^d d -dimensionale modulo l'azione di un gruppo di traslazioni discreto d -dimensionale Z^d :

$$T^d = R^d / Z^d \quad (2.1)$$

Vorremmo generalizzare questa definizione del toro ampliando il gruppo delle traslazioni per includere alcune rotazioni discrete e rotazioni accompagnate da traslazioni. Questo gruppo generalizzato è detto *gruppo spaziale*. Tale gruppo spaziale è la restrizione del nostro G allo spazio-tempo¹.

Un gruppo spaziale d -dimensionale S consiste quindi di elementi costruiti con coppie di rotazioni θ e traslazioni v , indicate con $g = (\theta, v)$. L'azione degli elementi del gruppo sul vettore d -dimensionale x è data da

$$gx = \theta x + v \quad (2.2)$$

Dividere per S significa identificare i punti x e gx . Il termine orbifold deriva dal fatto che ogni punto viene identificato con la sua "orbita" sotto il gruppo.

Il sottogruppo Λ di S che consiste delle sole traslazioni, cioè degli elementi della forma $(1, v)$, costituisce un gruppo discreto d -dimensionale delle traslazioni Z^d detto *reticolo* di S , e definisce il toro $T^d = R^d / \Lambda$. Consideriamo anche quello che è detto gruppo puntuale, cioè un sottogruppo P di

¹In altre parole per il momento ignoriamo la sua azione sul gruppo di gauge.

$O(d)$ che consiste delle rotazioni θ tali che (θ, v) sia un elemento di S per un qualche v . P è la restrizione a $O(d)$ di S , che è a sua volta la restrizione a $E(d)$ (il gruppo euclideo d -dimensionale di rotazioni e traslazioni) di G .

$$G \xrightarrow{E(d)} S \xrightarrow{O(d)} P$$

Ad ogni elemento θ di P corrisponde, a meno di traslazioni di Λ , un'unica trasformazione (θ, v) in S . Per verificare l'unicità, consideriamo due elementi di S , (θ, v) e (θ, u) . Abbiamo

$$(\theta, v)(\theta, u)^{-1} = (\theta, v)(\theta^{-1}, -\theta^{-1}u) = (1, v - u) \quad (2.3)$$

e da qui vediamo che $v - u$ è un elemento di Λ . Questo implica che P ha un'azione ben definita sul toro T^d ; indichiamo con \bar{P} il gruppo quando agisce sul toro². In effetti \bar{P} può essere identificato col quoziente $\bar{P} = S/\Lambda$.

Questo ci conduce a due modi equivalenti per descrivere gli orbifold. Possiamo iniziare con lo spazio euclideo e dividere per il gruppo spaziale, oppure considerare il toro corrispondente e dividere per il gruppo puntuale. Cioè

$$\Omega = R^d/S = \frac{R^d/\Lambda}{\bar{P}} = T^d/\bar{P} \quad (2.4)$$

P può essere pensato come il gruppo di ologonia di Ω : se $x = (\theta, v)y$ allora non solo x e y sono identificati, ma anche lo spazio tangente in x è identificato con lo spazio tangente a y ruotato da θ . Adesso se congiungiamo y a x tramite un cammino, che in Ω risulta chiuso, e operiamo il trasporto parallelo di un vettore lungo di esso, il vettore non viene ruotato (il toro è piatto), ma confrontato con il vettore in x ne differisce per una rotazione θ . Questo mostra che il gruppo di ologonia P dell'orbifold è un gruppo discreto, invece di gruppo di Lie continuo come nel caso di una varietà regolare. P non è un sottogruppo discreto arbitrario, ma deve agire in maniera cristallografica sul reticolo Λ . Le regole di composizione del gruppo euclideo mostrano che se v è un elemento di Λ allora lo è anche θv per ogni θ di P . Scegliere una base del reticolo nella quale tutti i vettori di Λ siano rappresentati da vettori con elementi interi implica che P abbia una rappresentazione "intera" (una rappresentazione costituita di matrici con tutti gli elementi interi). Questo impone una forte restrizione su P .

Un orbifold in generale non è una varietà perché il gruppo spaziale può avere dei punti fissi nello spazio euclideo. In questi punti fissi l'orbifold non potrà essere una varietà perché alcune linee uscenti dai punti fissi vengono identificate con delle altre. In certi casi è noto come risolvere queste singolarità, rimuovendo tali punti ed incollando altre varietà con le opportune condizioni al contorno. Si intende questo quando si parla di "esplosione dei punti fissi"

²La differenza sta nel fatto che \bar{P} può essere accompagnato da traslazioni, mentre P no.

e risoluzione delle singolarità. Tale procedimento estende il gruppo di ologonia dell'orbifold mandandolo in un gruppo di Lie con P come sottogruppo discreto. Le varietà necessarie ad aggiustare le singolarità non sono note per tutti i casi d'interesse. Tuttavia questo non costituisce un problema perché è possibile costruire la teoria di stringa direttamente sull'orbifold.

I gruppi spaziali fino a quattro dimensioni sono stati classificati (in particolare quelli tridimensionali sono stati studiati in fisica nell'ambito della cristallografia). Il caso di interesse per la compattificazione delle superstringhe è quello dei gruppi spaziali esadimensionali: una classificazione completa non è disponibile, ma noi studieremo aspetti della teoria che non ne richiedono la conoscenza. Se vogliamo conservare la supersimmetria $N = 1$ in quattro dimensioni il gruppo puntuale (gruppo di ologonia) P dovrebbe essere un sottogruppo di $SU(3)$. Se non volessimo conservare la supersimmetria il gruppo di ologonia potrebbe essere un sottogruppo discreto $SO(6)$, ma quando la supersimmetria è rotta, come discuteremo in seguito, bisogna fare attenzione per evitare i tachioni.

Fino ad adesso abbiamo discusso l'azione di G sui gradi di libertà spaziotemporali. Potremmo anche permettere al gruppo di agire sui gradi di libertà di gauge. Se S consiste solo di traslazioni, $S = \Lambda$, quindi $R^d/S = T^6$ e $\pi_1(T^6) = Z^6$. Scegliere l'azione di Λ sui gradi di libertà di gauge significa associare una trasformazione di gauge ad una traslazione attorno ad un loop chiuso in T^6 , cioè scegliere un insieme di linee di Wilson per i sei generatori del gruppo $\pi_1(T^6)$. Per le stringhe eterotiche $E_8 \times E_8$ possiamo rappresentare i gradi di libertà di $E_8 \times E_8$ usando sedici bosoni sinistrorsi X^I che parametrizzano il toro massimale di $E_8 \times E_8$. L'azione di Λ può essere quindi rappresentata semplicemente come traslazioni di vettori δ^I sul toro, uno per ogni generatore di Λ .

Per un gruppo spaziale generale, se vogliamo identificare la connessione di spin con la connessione di gauge, dovremo prendere un sottogruppo $SO(6)$ di E_8 e considerare che $g = (\theta, v)$ agisca sui gradi di libertà della stringa associati al gruppo E_8 . Se scegliamo di rappresentare E_8 come sedici fermioni ψ che trasformano come la rappresentazione **16** di $O(16)$ (vedendo quindi $O(6)$ come il sottogruppo di $O(16)$ sotto quale la rappresentazione **16** trasforma come **6** più singoletti) poniamo $g\psi = \theta\psi$. Rappresentando E_8 in termini del toro, sarebbe difficile descrivere l'azione del gruppo spaziale su di esso se il gruppo puntuale non fosse abeliano. Comunque se il gruppo puntuale lo è³ l'azione di ogni elemento del gruppo spaziale sul toro E_8 è data da una traslazione. In particolare se scegliamo J_{12}, J_{34}, J_{56} , come i generatori ortonormali di un sottogruppo di Cartan di $O(6)$, e P_1, P_2, P_3 come i generatori delle traslazioni in tre delle coordinate del toro, essi vengono rispettivamente identificati (a meno di normalizzazioni).

Per ogni gruppo puntuale ci sono più gruppi spaziali corrispondenti non

³Cioè se sta in una sottoalgebra di Cartan di $O(6)$

equivalenti tra loro, a seconda di quale reticolo prendiamo e di come scegliamo i vettori di traslazione. Comunque diversi aspetti della teoria di stringa su orbifold possono essere dedotti dalla mera scelta del gruppo puntuale. Per esempio, molti gruppi puntuali possono essere esclusi se siamo interessati ad ottenere un numero piccolo di generazioni. Dal momento che i sottogruppi discreti di $SU(3)$ sono già stati classificati discuteremo la possibilità di ottenere un basso numero di generazioni nel caso di supersimmetria non rotta.⁴

Se scegliamo di identificare la connessione di spin con la connessione di gauge, possiamo ancora richiedere che quegli elementi di S che generano il gruppo fondamentale dell'orbifold agiscano in maniera non banale sui rimanenti gradi di libertà di gauge non rotti, al fine di ottenere una rottura di simmetria più realistica. Quindi ci piacerebbe determinare il gruppo fondamentale dell'orbifold. Prendiamo in esame il gruppo euclideo diviso per il gruppo spaziale S . Dal momento che tutti i cammini chiusi strettamente periodici in R^d sono contraibili, gli unici cammini chiusi che possono risultare non banali sono quelli periodici a meno di trasformazioni di S . Potrebbe così sembrare che il gruppo fondamentale dell'orbifold sia semplicemente S . Ma questo non è vero: se ci sono elementi g di S provvisti di punti fissi (o di superfici fisse), allora tutti i cammini chiusi periodici a meno di g possono essere contratti in un punto. Per verificarlo notiamo che se g ha un punto fisso deve essere una rotazione attorno a quel punto. Questo significa che i due estremi del cammino sono identificati da una rotazione, e se congiungiamo gli estremi del cammino con il punto fisso, anche questi due nuovi tratti formano un cammino chiuso (a causa dell'identificazione). Se scegliamo il punto fisso come origine, avremo $gx = \theta x$ dove θ è una qualche rotazione e x e gx sono gli estremi del cammino in questione. Adesso possiamo contrarre il cammino in maniera tale che venga ridotto in dimensioni, ma mantenga la sua forma: $X(\sigma) \rightarrow tX(\sigma)$. Gli estremi saranno sempre connessi dalla stessa rotazione θ e il cammino resterà chiuso durante la contrazione. L'intero cammino chiuso si contrarrà in un punto ed è perciò banale.

Supponiamo che g_1 e g_2 siano due elementi del gruppo con punti fissi. I cammini chiusi periodici a meno di g_1 e g_2 sono contraibili. Inoltre, i cammini periodici a meno di g_1g_2 sono a loro volta contraibili, perchè possono essere deformati in un cammino periodico a meno di g_1 e in un altro a meno di g_2 . Dal momento che ciascuno di questi due cammini chiusi è contraibile, anche l'intero cammino lo è. In questo modo vediamo che qualsiasi prodotto di elementi che abbiano punti fissi corrisponde ad un cammino contraibile. Sia F il sottogruppo di S generato dagli elementi provvisti di punti fissi. Modifichiamo il nostro *ansatz* affermando che il gruppo fondamentale è S/F ;

⁴Nel caso di $SO(6)$ i sottogruppi discreti massimali sono stati classificati, ma una classificazione completa dei loro sottogruppi non sembra essere stata fatta.

questa si rivela essere la corretta soluzione⁵.

⁵Per la dimostrazione rimandiamo ad un testo di matematica, come [9].

2.2 Spazi di Hilbert delle stringhe sugli orbifold

Per descrivere lo spazio di Hilbert delle stringhe su un orbifold cominciamo considerando la propagazione di stringa sulla varietà prima di dividere per l'azione del gruppo. (Nel nostro caso la varietà potrebbe essere sia T^d che R^d .) Ad ogni elemento g del gruppo corrisponde un operatore \bar{g} agente sullo spazio di Hilbert di stringa. Se vogliamo che g e gx corrispondano allo stesso punto dell'orbifold dovremo considerare il sottospazio dell'Hilbert che sia invariante sotto \bar{g} , richiedendo cioè che \bar{g} agisca come l'operatore identità per l'orbifold.

Per esempio, iniziamo considerando R^d e dividendolo per il gruppo discreto di traslazioni Z^d , al fine di ottenere il toro T^d . Ad ogni traslazione v in Z^d corrisponde l'operatore di traslazione $e^{iP \cdot v}$ che agisce sullo spazio di Hilbert delle stringhe su R^d . Dovremmo proiettare sullo spazio invariante sotto l'azione di tali traslazioni, il che corrisponde a richiedere che gli autovalori dell'operatore impulso stiano sul reticolo duale del reticolo definito da Z^d . Questo sottospazio definisce l'Hilbert per le stringhe su T^d .

Se descrivessimo stringhe aperte avremmo già tutto il necessario. Per stringhe chiuse, invece, la situazione è più complicata: la condizione al bordo usuale per stringhe chiuse sarebbe $X(2\pi) = X(0)$ (o l'analoga antiperiodica per i fermioni in alcuni settori). Questa non è più l'unica possibilità perché nell'orbifold X e gX sono lo stesso punto e perciò dovremmo richiedere solo che $X(2\pi) = gX(0)$ per un qualche g del gruppo. Ciò implica che per ogni elemento g del gruppo otteniamo un settore H_g dello spazio di Hilbert in cui le condizioni al contorno sono (anti)periodiche a meno della trasformazione g . Si generano così quelli che chiameremo *settori twistati*.

Ritornando all'esempio di sopra, ciò significa che otteniamo i settori H_v , nei quali $X(2\pi) = X(0) + v$ con v traslazione di Z^d . Questi settori sono semplicemente i soliti settori di avvolgimento, in cui le stringhe si avvolgono attorno il toro. Ci resta da proiettare sul sottospazio invariante sotto g , operazione che corrisponde ancora una volta a richiedere che gli impulsi stiano nel reticolo duale. Inoltre la proiezione $L_0 = \bar{L}_0$ che assicura che la stringa sia invariante sotto riparametrizzazioni del tipo $\sigma \rightarrow \sigma + \Delta$ (come verrà discusso nella prossima sezione) è leggermente modificata rispetto al caso del settore non twistato. Questi settori twistati devono essere inclusi perché chiaramente possono essere prodotti in coppia nelle interazioni di stringhe non twistate. Inoltre la loro presenza è necessaria ad assicurare l'invarianza modulare.

Nel caso generale la proiezione del settore twistato sul sottospazio invariante non è immediata. Questo perché se il gruppo rispetto al quale stiamo dividendo non è abeliano, allora alcuni elementi del gruppo mandano un settore nell'altro. Supponiamo di considerare uno stato appartenente a H_g ($X(2\pi) = gX(0)$). Se agiamo su questo stato con un qualche altro elemento del gruppo h , il punto iniziale della stringa è mandato in $hX(0)$, mentre il

punto finale andrà in $hX(2\pi) = hgX(0) = hgh^{-1}(hX(0))$. Quindi la stringa risulterà periodica a meno di hgh^{-1} , ed apparterrà quindi al settore $H_{hgh^{-1}}$. Se g ed h non commutano tale settore sarà diverso da H_g . In altre parole sotto l'azione del gruppo i settori che sono associati ad una stessa classe di coniugazione si mescolano. Per costruire gli stati invarianti sotto il gruppo dovremo prendere uno stato del settore H_g , proiettarlo sul sottospazio invariante sotto il centralizzatore di g , e quindi prendere la somma dei corrispondenti stati costruiti a partire dagli altri settori associati alla stessa classe di coniugazione, ciascuno dei quali viene proiettato sul sottospazio invariante sotto l'azione del corrispondente centralizzatore. In un certo senso stiamo costruendo stati per ogni classe di coniugazione del gruppo. Come abbiamo già detto, questa costruzione è necessaria per ottenere uno spazio di Hilbert di stringa che goda sia dell'invarianza sotto G che di quella modulare.

Per illustrare queste idee, prendiamo il caso della retta reale R^1 , scegliendo come gruppo spaziale $(\pm 1, n)$, con n numero intero. In altre parole x è identificato con $\pm x + n$. Tale gruppo non è abeliano e gli elementi $(1, n)$ e $(1, -n)$ sono coniugati. Per costruire stati invarianti sotto il gruppo, prenderemo gli stati da $H_{(1,n)} + H_{(1,-n)}$. Anche gli elementi $(-1, n)$ e $(-1, n + 2k)$ sono coniugati e così otteniamo due classi di coniugazione aggiuntive, corrispondenti ai casi n pari/dispari.

Come discusso nella sezione precedente, potremmo equivalentemente costruire questo orbifold partendo dal toro e dividendo per il gruppo puntuale. In tal caso il gruppo puntuale è Z_2 . (Il cerchio è definito dall'identificazione $x \sim x + 1$ e l'elemento non banale del gruppo puntuale agisce portando x in $-x$.) Così otteniamo due settori. Il settore non twistato ha ulteriori sottosettori corrispondenti agli "stati di avvolgimento": si tratta dei settori $(+1, n)$ descritti sopra. La proiezione del settore non twistato sugli stati invarianti sotto Z_2 seleziona gli stati che sono somma di coppie con numeri di avvolgimento opposti, dal momento che l'elemento non banale di Z_2 porta un settore con numero di avvolgimento n in uno con numero di avvolgimento $-n$; corrispondentemente nell'altra descrizione i settori $(1, n)$ e $(1, -n)$ sono coniugati. Nel settore twistato otteniamo due sottosettori come conseguenza della quantizzazione del centro di massa della stringa. Per vederlo basta considerare il limite puntiforme della stringa, cioè il caso in cui $X(\sigma)$ sia indipendente da σ . Nel settore twistato questo è consistente con la condizione al bordo $X(0) = -X(2\pi) + n$ solo se $X = 0$ o $X = \frac{1}{2}$. Imponendo che il centro di massa si trovi in uno di questi due punti otteniamo due sottosettori del settore twistato. Questi due settori corrispondono alle due classi di coniugazione $(-1, 2k)$ e $(-1, 2k + 1)$ dell'altra descrizione. In questo esempio il gruppo fondamentale è banale, perché il gruppo spaziale è generato da $(-1, 1)$ e $(1, 0)$ e questi due elementi hanno punti fissi.

In generale il gruppo puntuale sarà molto più complicato di Z_2 e potrebbe essere non abeliano, nel qual caso dovremmo prendere i nostri stati da ogni

classe di coniugazione del gruppo puntuale. Ovviamente per ogni classe di coniugazione possono esserci più sottosectori corrispondenti alle varie scelte consentite per la coordinata del centro di massa (possiamo anche dire che questi settori vengono generati perché ci possono essere più classi di coniugazione del gruppo spaziale corrispondenti alla stessa classe di coniugazione del gruppo puntuale).

In questo quadro può essere anche collocata la formulazione di Ramond-Neveu-Schwarz delle superstringhe. Per semplicità consideriamo solo i modi destrorsi. Quindi in aggiunta alle coordinate spazio-temporali si hanno (nella gauge di cono luce) i gradi di libertà fermionici $\psi^i(\sigma - \tau)$ che trasformano come una rappresentazione $\mathbf{8}$ sotto $SO(8)$. Nel settore di Neveu-Schwarz le ψ^i soddisfano alle condizioni al contorno antiperiodiche, lo stato fondamentale è un tachione, il primo livello eccitato $\psi^i_{\frac{1}{2}}|0\rangle$ è un vettore massless e così via. Si considera quindi il gruppo Z_2 generato dall'operatore $(-1)^F$ che anticommuta con i campi fermionici e commuta con quelli bosonici. La proiezione sugli stati invarianti sotto Z_2 elimina il tachione e tutti gli stati di livello semintero. Per conservare l'invarianza modulare dovremo includere il settore "twistato" (cioè di Ramond!) in cui $\psi^i(\pi) = -(-1)^F \psi^i(0) = \psi^i(0)$ e proiettare ancora sugli stati invarianti sotto Z_2 . Ovviamente questa è proprio la proiezione GSO, che assicura uno spettro supersimmetrico. Una descrizione simile si applica alla formulazione fermionica dei gradi di libertà di gauge della stringa eterotica. In effetti uno dei motivi per cui gli orbifold sono stati costruiti era generalizzare il twisting di campi fermionici al twisting di campi bosonici.

2.3 Vincoli derivanti dall'invarianza modulare

In una teoria di stringa chiusa gli stati devono essere invarianti sotto traslazioni globali nella coordinata di tipo spazio del world-sheet, $\sigma \rightarrow \sigma + \Delta$, in accordo con l'assenza di un punto privilegiato sulla stringa. Dal momento che $L_0 - \bar{L}_0$ è il generatore delle traslazioni infinitesime in σ e poiché l'operatore di massa invariante al quadrato M^2 è proporzionale a $L_0 + \bar{L}_0$ abbiamo che gli stati fisici ricevono lo stesso contributo alla loro massa invariante da modi sinistrorsi e destrorsi. Per la stringa eterotica questo comporta l'eliminazione del tachione dalla stringa bosonica sinistrorsa e conduce alla generazione di una torre infinita di stati fisici massivi. Quando includiamo i settori twistati dobbiamo assicurarci che i tachioni vengano comunque eliminati e che venga mantenuta la corrispondenza tra autovalori di L_0 e \bar{L}_0 . Nel caso di stringa eterotica questi vincoli sono non banali. Consideriamo un twist di ordine n che agisca sui gradi di libertà spatio-temporali o di gauge. Nei settori twistati i numeri quantici dei modi sinistrorsi e destrorsi saranno traslati di una quantità $\eta = \frac{r}{n}$ ($0 \leq \eta < 1$) con r intero. Per un oscillatore bosonico destrorso (sinistrorso) coi modi traslati di η il contributo dell'ordinamento normale a L_0 (\bar{L}_0) è dato da $f(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (n + \eta)$. Se vogliamo determinare solo la dipendenza in η possiamo seguire il seguente ragionamento. Notiamo che $f(\eta+1) = f(\eta) - \frac{1}{2}\eta$ e assumiamo a priori che $f(\eta)$ sia un polinomio in η ; in tal caso l'equazione può essere risolta e si ottiene⁶ $f(\eta) = \text{cost} + \frac{1}{4}\eta(1 - \eta)$. Per oscillatori fermionici otteniamo lo stesso contributo con segno opposto. Per derivare le condizioni di corrispondenza dei livelli di L_0 e \bar{L}_0 lavoriamo con i fermioni di Ramond-Neveu-Schwarz per la superstringa e usiamo la formulazione fermionica di $E_8 \times E_8$. Consideriamo un settore twistato da un elemento g del gruppo di ordine finito n , $g^n = 1$, con la sua azione sui gradi di libertà spatio-temporali immersa in $O(8)$ e quella sui gradi di libertà di gauge immersa in un sottogruppo di $O(16) \times O(16)$. Diagonalizziamo l'azione di g sulla rappresentazione vettoriale di questi gruppi ortogonali scegliendo una base complessa. Insomma, facciamo sì che g abbia autovalori $e^{\frac{2\pi i r_a}{n}}$ nella rappresentazione **4** dell' $U(4)$ contenuto in $O(8)$ ed autovalori $e^{\frac{2\pi i p_i}{n}}$ e $e^{\frac{2\pi i q_j}{n}}$ nella rappresentazione **8** dei due sottogruppi $U(8)$ di $O(16) \times O(16)$. Benché i fermioni trasformino secondo le rappresentazioni vettoriali di tali gruppi ortogonali, dobbiamo anche assicurarci che g abbia ordine n nella rappresentazione spinoriale. Ricordiamo che la rappresentazione aggiunta di E_8 contiene la spinoriale a due valori di $SO(16)$ e l'aggiunta di $SO(16)$. Quindi per poter definire bene g su $\text{Spin}(8)$ e su $E_8 \times E_8$ dobbiamo avere

$$\sum r_a = 0 \pmod{2}$$

$$\sum p_i = 0 \pmod{2}$$

⁶Il nostro metodo non ci permette di determinare la costante, che per altra via si trova uguale a $-\frac{1}{24}$.

$$\Sigma q_j = 0 \pmod{2} \quad (2.5)$$

Nel caso di n pari queste condizioni possono anche essere derivate direttamente dalla richiesta che ci sia corrispondenza tra i livelli di \bar{L}_0 e quelli di L_0 , purché si tenga conto correttamente delle proiezioni $(-1)^F$. Per n dispari le condizioni precedenti non sono vincoli indipendenti e sono sempre soddisfatte da una scelta adeguata della base complessa.

Nel settore di Ramond, con tutti i fermioni periodici prima del twisting, il contributo dell'ordinamento normale a L_0 si cancella tra bosoni e fermioni mentre il contributo a \bar{L}_0 è

$$-1 + \frac{1}{2} \Sigma_a \frac{r_a}{n} \left(1 - \frac{r_a}{n}\right) - \frac{1}{2} \Sigma_i \frac{p_i}{n} \left(1 - \frac{p_i}{n}\right) - \frac{1}{2} \Sigma_j \frac{q_j}{n} \left(1 - \frac{q_j}{n}\right) \quad (2.6)$$

Dal momento che gli autovalori degli oscillatori destrorsi e sinistrorsi sono multipli di $\frac{1}{n}$, l'esistenza di stati in cui $L_0 = \bar{L}_0$ è equivalente alla richiesta

$$\frac{1}{2} (\Sigma_a r_a - \Sigma_i p_i - \Sigma_j q_j) - \frac{1}{2n} (\Sigma_a r_a^2 - \Sigma_i p_i^2 - \Sigma_j q_j^2) = m \quad (2.7)$$

dove m è intero. Perché la condizione sia soddisfatta deve essere vero

$$\Sigma_a r_a^2 - \Sigma_i p_i^2 - \Sigma_j q_j^2 = 0 \pmod{n} \quad \text{con } n \text{ dispari} \quad (2.8)$$

o

$$\Sigma_a r_a^2 - \Sigma_i p_i^2 - \Sigma_j q_j^2 = 0 \pmod{2n} \quad \text{con } n \text{ pari.} \quad (2.9)$$

La corrispondenza tra i livelli nei settori di Neveu-Schwarz nei quali alcuni (o tutti) i gruppi di fermioni hanno condizioni iniziali antiperiodiche è a sua volta garantita dalle (2.5), (2.8) e (2.9).

Le condizioni (2.5), (2.8) e (2.9) sono necessarie per assicurare l'invarianza modulare. Per arrivare a tale conclusione ricordiamo che la costruzione dello spazio di Hilbert di stringa descritta nella sezione precedente garantisce l'invarianza sotto la trasformazione $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ che scambia le condizioni al contorno su σ e t . L'invarianza sotto la traslazione $\tau \rightarrow \tau+1$ non richiede solo che L_0 e \bar{L}_0 abbiano livelli corrispondenti, ma che gli stati che sopravvivono alle proiezioni $(-1)^F$ e alla proiezione sugli stati invarianti sotto il gruppo abbiano autovalori interi per $L_0 - \bar{L}_0$. Per vederlo ricordiamo che nella teoria di stringa chiusa il propagatore ha la forma

$$\Delta = \int \frac{d^2 z}{|z|^2} z^{L_0} \bar{z}^{\bar{L}_0} \quad (2.10)$$

dove $z = e^{2\pi i \tau}$. Il pezzo del propagatore in $\text{Re} \tau$ effettua la proiezione sugli stati che soddisfano $\bar{L}_0 = L_0$ quando l'integrazione venga ristretta a una regione $-\frac{1}{2} < \text{Re} \tau < \frac{1}{2}$, ma solo se $\bar{L}_0 - L_0$ ha autovalori interi. Ma in un settore twistato da g , $\tau \rightarrow \tau+1$ dà la misura della carica g di ogni stato, dal momento che la traslazione cambia le condizioni al contorno (σ, t) da (g, h)

a (g, gh) . Perciò la proiezione sugli stati invarianti sotto il gruppo assicura l'invarianza sotto $\tau \rightarrow \tau + 1$.

Prendiamo un semplice esempio di orbifold consistente con la richiesta di invarianza modulare: si tratta di una versione discreta dell'immersione della connessione di spin nel gruppo di gauge. Se iniziamo con un toro esadimensionale il gruppo puntuale sarà un sottogruppo di $SO(6)$; vorremmo che il twist delle coordinate spazio-temporali fosse accompagnato da un analogo twist nel sottogruppo $SO(6)$ di E_8 . Per vedere che questo ci garantisce la generazione di una torre di stati fisici notiamo che gli autovalori di L_0 e \bar{L}_0 si corrispondono prima del twist, e che detto twist non può alterare tale corrispondenza, dal momento che agisce nello stesso modo sugli otto bosoni sinistrorsi e sugli otto bosoni destrorsi, ed analogamente la sua azione è la stessa su sei dei fermioni sinistrorsi dell' $O(16)$ e sugli otto fermioni destrorsi spazio-temporali, in virtù dell'identificazione tra connessione di spin e connessione di gauge. Nel caso non twistato gli stati fisici hanno livelli interi (invece che seminteri) a causa delle proiezioni $(-1)^F$. Il numero fermionico del vuoto può cambiare rispetto al caso non twistato, ma cambierà allo stesso modo per stati di vuoto destrorsi e sinistrorsi. Insomma, questa costruzione garantisce sempre la corrispondenza tra autovalori di L_0 e \bar{L}_0 .⁷ Nell'ultima sezione di questo capitolo classificheremo i modelli (con poche generazioni) ottenuti usando questa immersione "standard" del gruppo puntuale.

⁷L'orbifold Z è un esempio di tale immersione della connessione di spin nel gruppo di gauge.

2.4 Numero delle generazioni via path integral

Considereremo adesso un efficiente metodo di “path-integral” per calcolare il numero di generazioni su un orbifold arbitrario. Iniziamo cioè con una varietà regolare arbitraria M , con un gruppo di simmetria discreta G . Nel caso della varietà Z , M sarà un toro piatto, ma per i propositi attuali possiamo essere più generali. Sia K l’orbifold M/G . Se la connessione di spin di M (e l’azione di G sui vettori tangenti di M) è immersa nel gruppo di gauge, allora il numero di generazioni è metà della caratteristica di Eulero di K , così quello che vogliamo davvero è un metodo efficiente per calcolare la caratteristica di Eulero di un orbifold.

In effetti la caratteristica di Eulero di una varietà M è vista in maniera naturale come l’indice $Tr(-1)^F$ del modello sigma non lineare supersimmetrico $1 + 1$ dimensionale⁸. Questo può essere calcolato come il path-integral

$$Tr(-1)^F = \int dx^i(\sigma, \tau) d\psi^i(\sigma, \tau) e^{-\mathcal{A}} \quad (2.11)$$

dove $\psi^i(\sigma, \tau)$ obbedisce a condizioni al contorno periodiche sia su σ che su τ , e \mathcal{A} è l’azione del modello sigma non lineare supersimmetrico.

Per studiare l’orbifold, bisogna introdurre condizioni al contorno twistate. In generale uno potrebbe provare a prendere due elementi qualsiasi h e g di G e richiedere $x^i(\sigma + 2\pi, \tau) = gx^i(\sigma, \tau)$, $x^i(\sigma, \tau + 2\pi) = hx^i(\sigma, \tau)$. Si ottiene che avremo bisogno solo del caso in cui g e h commutano tra di loro.

$A(g, h)$ indichi il valore dell’integrale scritto con condizioni al contorno twistate da g e h . Descriveremo come calcolare gli $A(g, h)$ e come esprimere la caratteristica di Eulero a partire da essi. Sia $M(g, h)$ il sottospazio di M consistente dei punti che sono invarianti sia sotto g che sotto h , e sia $\chi(g, h)$ la caratteristica di Eulero di $M(g, h)$. Quindi, come vedremo, $A(g, h) = \chi(g, h)$. In effetti, dal momento che $A(g, h)$ è un invariante topologico, possiamo calcolarlo passando all’accoppiamento debole (raggio di M grande). In tal caso il “path integral” è dominato dal contributo dei cammini con azione prossima a zero, il che significa che gli x^i devono essere (quasi) indipendenti da σ e τ . Ma questo è compatibile con le condizioni al contorno solo se x^i è invariante sotto g ed h , e quindi x^i deve stare in $M(g, h)$ (o stare nelle sue prossimità). Le oscillazioni bosoniche e fermioniche trasverse a $M(g, h)$ danno determinanti che si cancellano nella solita maniera supersimmetrica, e l’integrale funzionale si riduce al suo analogo per il modello sigma supersimmetrico non lineare su $M(g, h)$. Tramite l’analisi consueta di $Tr(-1)^F$, si ottiene che il valore dell’integrale è $\chi(g, h)$.

Adesso che abbiamo calcolato gli $A(g, h)$, vogliamo usarli per determinare la caratteristica di Eulero dell’orbifold. Supponiamo di voler discutere stringhe

⁸Se la connessione di spin è immersa nel gruppo di gauge, questa è la teoria di campo che descrive la propagazione di stringa su M . Per maggiori dettagli si veda [8].

che obbediscono alla condizione al contorno non twistata su σ ($g = 1$). Se applichiamo h nella direzione τ dovremo studiare *non* $\text{Tr}(-1)^F$, ma $\text{Tr}h(-1)^F$. (Il nostro argomento di sopra mostra che $\text{Tr}h(-1)^F = \chi(1, h)$, un risultato che va sotto il nome di teorema del punto fisso di Lefschetz). La proiezione sugli stati invarianti è data dall'operatore $Q = \frac{\sum h}{N}$, dove N è il numero di elementi di G e la somma è fatta su tutti gli elementi dello stesso gruppo. Il contributo delle stringhe non twistate in σ alla caratteristica di Eulero dell'orbifold è quindi $\text{Tr}Q(-1)^F = \frac{\sum \chi(1, h)}{N}$.⁹

In teoria di campo ci fermeremmo qui. In teoria delle stringhe, non possiamo fermarci: dobbiamo proseguire la discussione, considerando i contributi dei settori twistati in sigma e tau. La ragione concreta per cui dobbiamo farlo è la seguente. Una trasformazione modulare $(\sigma, \tau) \rightarrow (k\sigma + l\tau, m\sigma + n\tau)$ con k, l, m, n interi e $kn - lm = 1$ manderà un settore twistato solo su tau in uno twistato sia su τ che su σ . L'invarianza modulare è necessaria per la consistenza della teoria di stringa chiusa. A prima vista si potrebbe pensare che l'invarianza modulare ci costringa a considerare una coppia (g, h) qualsiasi, ma ciò non è vero. Se g e h commutano tra loro, la trasformazione modulare li manda nella coppia commutante $(g^k h^l, g^m h^n)$, e così l'invarianza modulare ci permette di restringere la nostra attenzione alle coppie commutanti. E questo va bene, perché le condizioni al contorno twistate non hanno molto senso se g e h non commutano. Questi fatti suggeriscono la seguente formula per la caratteristica di Eulero di K :

$$\chi(K) = \frac{\sum_{gh} \chi(g, h)}{N_{gh}} \quad (2.12)$$

Questa formula è invariante sotto trasformazioni modulari, riceve il giusto contributo da $g = 1$, e contiene solo coppie commutanti. Vediamo che è proprio la formula corretta. Per costruire lo spazio di Hilbert richiesto, si inizia coll'operare tutte le trasformazioni possibili su σ con elementi di gruppo g ; indichiamo tale spazio di Hilbert con H_g . Poi si prova a rendere H_g invariante sotto G inserendo un operatore di proiezione. Ci si aspetta che l'operatore di proiezione sia una simmetria dello spazio di Hilbert, ma in effetti il singolo H_g non è invariante sotto tutte le trasformazioni di G . Un singolo H_g ha come gruppo di simmetria un gruppo più piccolo, G_g , il centralizzatore di g . Un elemento h di G che non commuta con g manda H_g in $H_{h^{-1}gh}$. Per costruire uno spazio di Hilbert invariante sotto G e sotto trasformazioni modulari sommiamo su tutti i possibili H_g e proiettiamo ciascun H_g sugli stati invarianti sotto il suo piccolo gruppo (incluso tutte le possibili trasformazioni su τ che commutano con g). Questo corrisponde alla formula (2.12) ed all'argomento illustrato nella sezione 2.2.

Il fatto che la teoria delle stringhe permetta di prevedere il corretto valore

⁹Nel caso della varietà Z , questo ci darebbe $\frac{(0+27+27)}{3} = 18$, in accordo con quanto troveremo nel capitolo seguente.

della caratteristica di Eulero è una proprietà generale, almeno per varietà con ologonia $SU(3)$. Se si identificano i punti di una varietà M tramite l'azione di un gruppo discreto G , vengono generate delle singolarità se G ha dei punti fissi. La teoria di come risolvere tali singolarità in generale è piuttosto complicata, ma sotto alcune condizioni favorevoli sono sufficienti semplici prescrizioni. In questi casi, la (2.12) dà un valore della caratteristica di Eulero in accordo con quello determinato via procedimenti standard¹⁰.

¹⁰Per esempio, se G è Z e N è l'insieme di punti fissi sotto G in M , allora il quoziente $X = M/G$ ha (dopo aver fatto esplodere i punti fissi) la caratteristica di Eulero $\chi(M) = \frac{1}{3}(\chi(M) + 8\chi(N))$, che è in accordo con la (2.12).

2.5 Modelli con immersione standard del gruppo puntuale

Adesso vogliamo dare una classificazione completa dei modelli in cui il gruppo puntuale è immerso nella maniera standard in un sottogruppo $SO(6)$ di un fattore E_8 . Come abbiamo argomentato prima, questo porta ad una corrispondenza tra i livelli di L_0 e \bar{L}_0 nei settori twistati, quindi ad una teoria di stringa con invarianza modulare. Con questa immersione standard, molte scelte di elementi θ del gruppo puntuale sono inaccettabili perché generano tachioni in qualche settore twistato. Se scegliamo una base diagonale per θ possiamo rappresentare $\theta \in SO(6)$ con $\theta = e^{2\pi i(aJ_{12}+bJ_{34}+cJ_{56})}$. Mostreremo che $\pm a \pm b \pm c$ deve essere zero per una qualche scelta dei segni affinché la teoria non contenga tachioni. Quando θ agisce sugli spinori di $SO(8)$ i suoi otto autovalori sono $e^{i\pi(\pm a \pm b \pm c)}$ e quindi devono esserci almeno due modi nulli per i fermioni associati agli spinori destrorsi di $SO(8)$ nel formalismo di Green-Schwarz. Avremo così almeno una supersimmetria quadridimensionale conservata.

Per mostrare che $\pm a \pm b \pm c$ deve essere zero, dobbiamo prima classificare tutti gli elementi di $SO(6)$ che possono agire in maniera cristallografica, cioè come automorfismi del reticolo esadimensionale. Non dobbiamo però considerare tutti questi elementi; un elemento θ è inaccettabile se il settore twistato da θ^n contiene un tachione. Per capire se c'è o meno un tachione dobbiamo calcolare il contributo dell'ordinamento normale all'operatore M^2 (massa al quadrato) sia per i modi destrorsi che per quelli sinistrorsi. Usando i risultati della sezione 2.3 si trova che tutti gli elementi con $\pm a \pm b \pm c \neq 0$ danno origine a tachioni. Dobbiamo quindi controllare solo una decina di elementi che hanno $\pm a \pm b \pm c$ uguale a zero.

Ci restano tredici classi di elementi di $SO(6)$ permessi che sono automorfismi del reticolo esadimensionale e non generano tachioni. Questi elementi sono riportati in tabella assieme col numero di punti fissi di ciascun elemento.

(a , b , c)	Ordine	$\chi(F_\theta)$	(a , b , c)	Ordine	$\chi(F_\theta)$
$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	2	0	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$	6	12
$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	3	0	$(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7})$	7	7
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	3	27	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})$	8	4
$(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	4	0	$(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2})$	8	8
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	4	16	$(\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12})$	12	3
$(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	6	0	$(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2})$	12	4
$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$	6	3			

Il numero di punti fissi è determinato facilmente facendo uso del teorema di Lefschetz dei punti fissi. Una simmetria discreta θ manda la p -esima classe di coomologia H^p del toro in se stessa. Se rappresentiamo l'azione di θ su H^p con una matrice θ_p di dimensioni $\binom{6}{p} \times \binom{6}{p}$ ed indichiamo con

F_θ l'insieme di punti fissi di θ , allora il teorema di Lefschetz esprime la caratteristica di Eulero come

$$\chi(F_\theta) = \sum_{p=0}^6 (-1)^p \text{Tr} \theta_p = \det(1 - \theta) \quad (2.13)$$

dove il determinante è riferito alla rappresentazione **6** di $SO(6)$. Se l'insieme dei punti fissi di θ consiste solo di punti isolati ed ha quindi dimensione zero, allora $\chi(F_\theta)$ conta semplicemente il numero di punti fissi. Se $\chi(F_\theta) = 0$ allora θ ha degli interi tori di punti fissi, o nessun punto nel caso in cui θ sia accompagnata da appropriate traslazioni di vettore v .¹¹

Tralasciando le eccezioni suddette, ogni elemento θ di P conserva una supersimmetria quadridimensionale; in altri termini, θ fissa alcune componenti della rappresentazione spinoriale **4** di $SO(6)$, o equivalentemente la vettoriale **4** di $SU(4)$. Mostreremo adesso che l'intero gruppo puntuale P conserva a sua volta un'intera supersimmetria quadridimensionale (P sottogruppo discreto di $SU(3)$). Poiché siamo interessati all'azione di P sugli spinori consideriamo il numero di Lefschetz

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{Tr}_i \mathcal{P} \quad (2.14)$$

dove $\mathcal{P} = \frac{\sum_{\theta \in P} \theta}{|P|}$ è una proiezione sul sottospazio di R^6 invariante sotto P e $\text{Tr}_i \mathcal{P}$ indica la traccia di \mathcal{P} nella rappresentazione tensoriale di $SU(4)$ i volte antisimmetrizzata. Adesso

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{Tr}_i \theta = \det(1 - \theta) = 0 \quad (2.15)$$

dal momento che nella **4** di $SU(4)$ θ ha almeno un autovalore uguale all'unità, e quindi $L(\mathcal{P}) = 0$. Per la traccia su un singoletto usiamo $\text{Tr}_0 \mathcal{P} = \text{Tr}_4 \mathcal{P} = 1$ e per la traccia su **4** e $\bar{4}$ osserviamo che $0 = 2(1 - \text{Tr}_1 \mathcal{P}) + \text{Tr}_2 \mathcal{P}$. Ora Tr_i è semplicemente la dimensione del sottospazio invariante. Così se \mathcal{P} non ha sottospazi invarianti quando agisce su R^6 , i.e. $\text{Tr}_2 \mathcal{P} = 0$, allora $\text{Tr}_1 \mathcal{P} = 1$ e \mathcal{P} fissa alcune componenti della rappresentazione **4** di $SU(4)$ oppure $P \subseteq SU(3)$ come affermato. Se $\text{Tr}_2 \mathcal{P} > 0$ allora $\text{Tr}_1 \mathcal{P} > 1$ e P sta in un sottogruppo di Lie contenuto strettamente in $SU(3)$.

¹¹È possibile usare uno degli elementi "inaccettabili" se è accompagnato da una traslazione che impedisce l'esistenza di punti fissi. In questo caso il potenziale stato tachionico che si troverebbe nel settore twistato avrebbe un contributo aggiuntivo alla sua energia dal momento che dovrebbe avvolgersi attorno all'orbifold ad una distanza finita. Se il raggio dell'orbifold (che da un punto di vista dinamico è un campo di stringa chiusa) è sufficientemente grande allora tutti gli stati hanno massa invariante al quadrato positiva. Comunque, dal momento che la supersimmetria è rotta l'energia del vuoto dipende dal raggio dell'orbifold e tipicamente l'orbifold si restingerà fino all'apparizione di un tachione.

Per classificare i modelli costruiti dagli orbifold con l'immersione standard del gruppo puntuale ci basta conoscere la classificazione dei sottogruppi discreti di $SU(3)$. Qui considereremo solo modelli con al più quattro generazioni. Il numero di generazioni è dato dalla metà della caratteristica di Eulero χ dove

$$\chi = \frac{\sum_{g,h \in \bar{P}} \chi_{g,h}}{|P|} \quad (2.16)$$

La somma è fatta su coppie di elementi commutanti. $|P|$ è l'ordine del gruppo puntuale P , e $\chi_{g,h}$ è la caratteristica di Eulero dell'intersezione degli insiemi di punti fissi di g e h , come visto nella sezione precedente. Il contributo di teoria di campo a χ

$$\chi_{TC} = \frac{\sum_{h \in \bar{P}} \chi_{1,h}}{|P|} \quad (2.17)$$

dà il numero di Eulero dell'orbifold come sarebbe determinato da una decomposizione simplicistica.

I sottogruppi discreti di $SU(3)$ possono essere suddivisi tra quelli che sono contenuti in $SU(2) \times U(1)/Z_2$ e quelli che non lo sono. I primi conterranno prodotti tensoriali dei gruppi ciclici Z_k con i sottogruppi discreti di $SU(2)/Z_2$ e $SU(2)$, che consistono di Z_l , il gruppo diedrico D_l , i gruppi di simmetria puntuale del tetraedro (T), del cubo (O) e dell'icosaedro (I), e i loro doppi ricoprimenti. I sottogruppi di $SU(3)$ rimanenti, come quelli di $SU(2)$, formano un po' di successioni infinite più un numero finito di gruppi "eccezionali". Dal momento che vogliamo che il sottogruppo agisca come gruppo di simmetria di un reticolo esadimensionale, tutti gli elementi devono essere del tipo riportato nella tabella. Questo riduce i sottogruppi possibili ad un numero finito ai quali possa essere applicata la (2.16).

È conveniente ridurre il numero dei termini nella formula per la caratteristica di Eulero riscrivendola come somma sulle classi di coniugazione del gruppo puntuale. Dal momento che l'insieme dei punti fissi dell'elemento $g_1 g g_1 g^{-1}$ è semplicemente l'insieme di punti fissi di g ruotato e traslato da g_1 , è facile vedere che $\chi_{g_1 g g^{-1}, h_1 h h^{-1}} = \chi_{g,h}$. Nella formula (2.16), cioè, i termini nella somma sugli elementi g che provengono dalla stessa classe di coniugazione sono uguali. Il numero degli elementi nella classe di coniugazione di g (indicato con $\{g\}$) è $|G|/|C(g)|$, dove $C(g)$ è il centralizzatore di g . Quindi la caratteristica di Eulero è

$$\chi = \sum_{\{g\}} \frac{1}{|C(g)|} \sum_{h \in C(g)} \chi_{g,h} \quad (2.18)$$

In generale si può semplificare ulteriormente l'equazione (2.18) senza conoscere niente riguardo il gruppo spaziale S ed il reticolo Λ . Prima di tutto, se e è l'elemento identico di P , $\chi_{e,g} = \chi(F_g) = \det(1 - g)$ è indipendente dal vettore di traslazione usato in g , ed il suo valore è elencato nella tabella per tutti i tipi di elementi ammissibili. Dal momento che x è un punto fisso di gh

se è un punto fisso sia di g che di h , si vede che $\chi_{g,h} = \chi_{g,gh}$. Analogamente $\chi_{g,h} = \chi_{g^{-1},h}$, dal momento che gli insiemi dei punti fissi di g e di g^{-1} sono uguali. Usando questi fatti e la tavola, si possono valutare tutti i termini della forma χ_{g^m,g^n} nell'equazione (2.18). Solitamente questa informazione basta da sola a mostrare che un numero di generazione minore o uguale a quattro ($\chi \leq 8$) non può essere ottenuto usando il gruppo puntuale.

Si trova che solo quattro gruppi puntuali P possono dare quattro generazioni o meno. Scrivendo gli elementi di gruppo come matrici di $SU(3)$ che agiscono sulle tre coordinate complesse di R^6 , definiamo i seguenti elementi di gruppo:

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r' = uru^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

Sia P il gruppo tetraedrico T a 12 elementi generato da r e da u . Quindi $\chi = \frac{1}{2}\chi_{r,r'}$. Se P è il gruppo ottoedrico O a 24 elementi generato da r , u e θ , allora $\chi = \frac{3}{4}\chi_{r\theta,r'} + \frac{1}{4}\chi_{r,r'}$. Se P è il gruppo diedrico D_4 di 8 elementi generato da r e θ , allora $\chi = \frac{3}{4}\chi_{r,r'} + \frac{3}{4}\chi_{r\theta,r'}$. E se P è il gruppo "diedrico" $\Delta(3 \cdot 3^2)$ di $SU(3)$ a 27 elementi generato da ω , a e u , allora $\chi = 8 + \frac{16}{9}(\chi_{\omega,a} + \chi_{\omega,u} + \chi_{\omega,au} + \chi_{\omega,a^2u})$. A questo punto, si deve scegliere un reticolo per P sul quale agire, e un vettore di traslazione v per ogni elemento θ , al fine di definire il gruppo \bar{P} . Le traslazioni devono rispettare la struttura di gruppo puntuale. Per esempio, se $\theta^n = 1$ in P e $g = (\theta, v)$, allora $g^n = 1$ in \bar{P} , e quindi g^n è una semplice traslazione di un vettore reticolare.

Consideriamo prima il caso $P = \Delta(3 \cdot 3^2)$. P è un gruppo di simmetria per il reticolo delle radici di E_6 . Questo reticolo è generato identificando $z_i \sim z_i + 1 \sim z_i + e^{\frac{2\pi i}{3}}$ per ciascuna delle tre coordinate complesse z_i , più $(z_1, z_2, z_3) \sim (z_1, z_2, z_3) + (d, d, d)$ dove $d = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\pi}{6}}$. Per avere 4 generazioni richiediamo $\chi_{\omega,u} = \chi_{\omega,au} = \chi_{\omega,a^2u} = 0$. Una soluzione è scegliere i vettori di traslazione v_a e v_u per a e u in maniera tale che a , u , au e a^2u non abbiano punti fissi. Sul reticolo delle radici di E_6 , una scelta consistente è $v_d = (f, f, f-d)$, $v_u = (f, f, f+d)$, dove $f = \frac{1}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}$. Si può calcolare il gruppo fondamentale notando che tutti gli elementi del gruppo spaziale S che hanno punti fissi sono della forma $(\omega^{\pm 1}, l)$ dove l è un vettore reticolare qualsiasi. Chiamiamo F il sottogruppo generato da tali elementi; considerando S/F

otteniamo il gruppo fondamentale $Z_3 \times Z_3$ ¹². Comunque, il gruppo fondamentale è sempre un sottogruppo di $Z_3 \times Z_3$ quando $P = \Delta(3 \cdot 3^2)$, perché $(\omega^{\pm 1}, l)$ ha sempre punti fissi.

Per i tre casi restanti ($P = T, O$ o D_4), dobbiamo determinare i valori possibili per $\chi_{r,r'}$, dove $r = (\text{diag}(1, -1, -1), v_r)$, $r' = (\text{diag}(-1, -1, 1), v_{r'})$, con v_r e $v_{r'}$ che indicano le possibili traslazioni. In effetti i possibili valori per $\chi_{r,r'}$ non dipendono dalle traslazioni. Se $\chi_{r,r'} \neq 0$, allora r e r' devono fissare ciascuno un toro bidimensionale, e questi due tori si intersecano in un numero finito di punti. Possiamo scegliere il nostro sistema di coordinate in maniera tale che uno dei punti di intersezione sia l'origine, il che corrisponde a porre v_r e $v_{r'}$ a zero. È poi conveniente scrivere r facendo uso di una base nella quale tutti i vettori reticolari abbiano componenti intere. Questa base può essere scelta in maniera tale che r abbia la forma $\text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, -1)$, $\text{diag}(\sigma_1, 1, -1, -1, -1)$ o $\text{diag}(\sigma_1, \sigma_1, -1, -1)$, dove $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Queste forme hanno rispettivamente 16, 8 e 4 tori fissi. Similmente, si possono classificare le forme possibili per le coppie r e r' . Ci sono diverse possibilità non equivalenti, ma tutte rientrano nei casi $\chi_{r,r'} = 64, 32, 16$ o 8 (o zero, se includiamo le traslazioni). (Il fatto che $\chi_{r,r'} \geq 8$ è necessario a mostrare che i pochi gruppi puntuali che non abbiamo citato qui devono dare più di quattro generazioni.)

Potrebbe sembrare che $\chi_{r,r'} = 8$ o $\chi_{r\theta,r'} = 8$ permetta la costruzione di un modello a tre generazioni basato sui gruppi puntuali O o D_4 . C'è un'unica forma per r e r' che dà $\chi_{r,r'} = 8$: $r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_1, -1, -1)$, $r' = \text{diag}(-1, -1, -\sigma_1, -\sigma_1)$. Comunque, questa forma si rivela incompatibile con l'estensione del gruppo di simmetria del reticolo da $Z_2 \times Z_2$ (generato da r e r') a D_4 aggiungendo l'elemento θ ! Lo stesso argomento mostra che $\chi_{r\theta,r'} \neq 8$. Dal momento che D_4 è un sottogruppo di O , O non può dare tre generazioni, e in effetti non è possibile ottenere un modello con tre generazioni che conservi la supersimmetria tramite orbifold operando l'immersione standard del gruppo puntuale in E_8 .

La forma suddetta per r e r' permette al gruppo di simmetria del reticolo di contenere T , rendendo possibili modelli a due generazioni. Per esempio, il reticolo cubico esadimensionale può essere utilizzato, con la base $(1, \pm i, 0), (i, 0, \pm 1), (0, 1, \pm i)$ (scritto in coordinate complesse). Il gruppo fondamentale si rivela triviale per questi modelli.

Modelli a quattro generazioni con l'uso di T si ottengono prendendo $\chi_{r,r'} = 16$. Ci sono sette forme non equivalenti per r e r' che danno $\chi_{r,r'} = 16$, ma solo tre di loro permettono a T di essere un gruppo di simmetria del reticolo. Queste tre forme ammesse sono rappresentate dai seguenti reticoli:

- i) Due copie del reticolo tridimensionale cubico a corpo centrato ($BCC \oplus$

¹²La nostra scelta per il reticolo e per i vettori di traslazione, che dà quattro generazioni, non è l'unica.

BCC), con base

$$\{(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1), (i, i, i), (i, -i, -i), (-i, -i, i)\}$$

ii) La somma diretta di un reticolo tridimensionale cubico a corpo centrato con uno cubico a faccia centrata ($BCC \oplus FCC$), con base

$$\{(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1), (i, i, 0), (i, 0, i), (0, i, i)\}$$

iii) Due copie del reticolo tridimensionale cubico a faccia centrata ($FCC \oplus FCC$), con base

$$\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (i, i, 0), (i, 0, i), (0, i, i)\}$$

Il gruppo fondamentale è $Z_2 \times Z_2$ in i), Z_2 nel caso ii), e banale nel caso iii): si deve mostrare che la struttura di gruppo di T implica che la traslazione che accompagna u deve essere scelta in maniera tale che u abbia dei punti fissi come r . Dal momento che u e r generano T , il gruppo F degli elementi del gruppo spaziale che hanno punti fissi deve includere ogni elemento di T con una traslazione. In tal caso un gruppo fondamentale non banale si avrà solo se ci sono dei vettori reticolari che non stanno in F . Dal momento che $(r, 0)$ e $(1, l)(r, 0)$ hanno entrambe dei punti fissi se il vettore reticolare l ha la forma $(0, l_2, l_3)$ l'elemento $(1, l)$ deve stare in F . Analogamente tutte le traslazioni di vettori $(l_1, l_2, 0)$ e $(l_1, 0, l_3)$ sono in F . Nel caso iii) questo implica che F contenga la base reticolare e quindi l'intero reticolo, quindi il gruppo fondamentale è banale. Nel caso ii) $(1, 1, 1)$ è il solo generatore del gruppo fondamentale (modulo F); e nel caso i) $(1, 1, 1)$ e (i, i, i) sono i generatori.

Infine, si possono costruire modelli a due o quattro generazioni basati sul gruppo puntuale O . Per ottenere due generazioni è necessario che $\chi_{r,r'} = 16$. Dal momento che O contiene T , ci si restringe alle stesse tre forme per r e r' citate nel paragrafo precedente. Infatti ciascuno dei tre reticoli sopra ha O come gruppo di simmetria, ma nel caso i) non si può ottenere $\chi_{r\theta,r'} = 0$ e quindi non si possono ottenere due generazioni. I casi ii) e iii) portano a modelli a due generazioni, entrambi con gruppo fondamentale banale. Nel caso di quattro generazioni con gruppo puntuale O , è necessario $\chi_{r,r'} = 32$. Ci sono tre forme non equivalenti per r e r' che danno $\chi_{r,r'}$, ma solo due di loro consentono O come gruppo di simmetria, e di queste due solo una permette una scelta di traslazioni in maniera tale che $\chi_{r\theta,r'} = 0$. Il caso rimanente è rappresentato dalla somma diretta di un reticolo cubico a faccia centrata con un reticolo cubico ($FCC \oplus$ cubico), con base $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (i, 0, 0), (0, i, 0), (0, 0, 1)$. Il gruppo fondamentale è ancora banale. Questo esaurisce i possibili modelli con quattro generazioni o meno basati su questa classe di orbifold.

Capitolo 3

Un esempio: l'orbifold Z

3.1 Costruzione dell'orbifold

La costruzione dell'orbifold si ottiene con un metodo geometrico che noi implementeremo nella teoria di stringa. Un esempio classico ampiamente descritto in letteratura è la varietà $K3$. Consideriamo il toro quadrimensionale T con coordinate periodiche x_i , $i = 1 \dots 4$, $x_i \approx x_i + 1$. Sia g la trasformazione $g(x_i) = -x_i$. Dal momento che $g^2 = 1$, g genera il gruppo Z_2 . Se g non avesse punti fissi lo spazio quoziente $X = T/Z_2$ sarebbe una varietà regolare, priva di singolarità. Effettivamente ci sono dei punti fissi: sono i punti in cui ogni coordinata è intera o semintera (cioè sedici punti). Il risultato è che X non è una varietà regolare ma un cosiddetto orbifold - una varietà con singolarità che corrispondono a quelle ottenute identificando i punti di una varietà regolare tramite l'azione di un gruppo discreto con punti fissi. In questo caso le singolarità possono essere regolarizzate o risolte facendo “esplosione” i punti fissi. La varietà regolare risultante è una chiamata superficie $K3$ ed è particolarmente interessante. Le singolarità incontrate nell'esempio che considereremo potrebbero essere risolte in maniera analoga, ma non sarà questa la nostra preoccupazione principale. A noi interessa trattare la propagazione di stringa direttamente sull'orbifold singolare. Come abbiamo visto in generale, questa propagazione è risolvibile esattamente. (Nel risolvere le singolarità bisogna introdurre parametri liberi corrispondenti alle “dimensioni” dei punti fissi regolarizzati. Quando questi parametri sono molto piccoli, il problema della propagazione di stringa sull'orbifold (risolvibile esattamente) è un'approssimazione arbitrariamente buona della propagazione sulla varietà regolare, se questo è ciò che vogliamo.)

La varietà $K3$ è unica sotto molti aspetti. Per esempio, è l'unica varietà quadridimensionale con ologonomia $SU(2)$ non banale¹. La costruzione che

¹Con gruppo di ologonomia della varietà si intende il gruppo delle trasformazioni a cui va soggetto un vettore quando lo si trasporta parallelamente lungo una linea chiusa.

porta a $K3$ ha un analogo in sei dimensioni reali (tre dimensioni complesse) che non ha lo stesso grado di unicità. L'esempio più semplice è chiamato Z . Illustreremo le nostre idee discutendo la propagazione di stringa sulla varietà Z . Per costruire la varietà Z procediamo in questo modo: siano z_i tre variabili complesse. Per ogni i sia T_i il toro definito da $z_i \approx z_i + 1 \approx z_i + e^{\frac{i\pi}{3}}$, e sia α la trasformazione $z_i \rightarrow z_i e^{\frac{2i\pi}{3}}$ che agisce sulla varietà prodotto $T = T_1 \times T_2 \times T_3$. Quindi α genera un gruppo G isomorfo a Z_3 ed ha ventisette punti fissi, i punti cioè nei quali ogni z_i è un multiplo intero di $\sqrt{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\pi}{6}}$. A causa dell'esistenza di questi ventisette punti fissi, lo spazio quoziente $Z = T/G$ non è una varietà regolare ma un orbifold con ventisette singolarità isolate. Vorremmo descrivere la propagazione di stringa su questo orbifold.

3.2 Spazio di Hilbert degli stati e generazioni

Per descrivere la meccanica quantistica di una particella che si propaga su Z , un possibile punto di partenza è la costruzione dello spazio di Hilbert H_0 degli stati di una particella che si propaga su T , restringendoci poi allo spazio di quegli stati che siano invarianti sotto G . Le funzioni d'onda della particella su Z possono essere identificate con le funzioni d'onda su T invarianti sotto G . In generale dobbiamo però operare alcune scelte per definire l'azione di G su H_0 . Se la particella in questione ha alcuni numeri quantici interni è necessario "sollevare" l'azione di g da T a V , e a seconda del procedimento adottato verrà determinato cosa intendiamo per il sottospazio H invariante sotto G . In altre parole, in generale possiamo volere che G agisca su i numeri quantici interni così come sulla varietà spazio-temporale T , e il modo in cui G agirà su tali numeri quantici influenzerà cosa intendiamo per sottospazio invariante sotto G .

Seguendo una tale logica, il primo passo per descrivere la propagazione di stringa su Z sarà costruire lo spazio di Hilbert H_0 degli stati di stringa su T e proiettare questo su un sottospazio invariante sotto G . Come nel caso della particella, dobbiamo scegliere l'azione di G sui gradi di libertà interni della stringa e nel caso della stringa eterotica $E_8 \times E_8$ questo significa che dobbiamo prendere un omomorfismo di G in $E_8 \times E_8$. Benchè sappiamo che altre possibilità possono rivelarsi interessanti, effettuiamo qui la scelta più semplice, che è motivata dall'idea di immergere la connessione di spin nel gruppo di gauge, e che si rivelerà sensata anche in termini di propagazione di stringa sull'orbifold. Prendendo un sottogruppo $E_6 \times SU(3)$ del primo E_8 sia β il generatore del centro di $SU(3)$. Sia $\gamma = \alpha\beta$ e definiamo l'azione di γ sui fermioni spazio-temporali in maniera tale che sia $\gamma^3 = 1$ (l'altra possibilità sarebbe stata $\gamma^3 = (-1)^F$); γ genera un gruppo Z_3 . Insomma, un elemento fondamentale nella costruzione dello spazio di Hilbert che descrive la propagazione di stringa su Z è la costruzione del sottospazio invariante sotto G dello spazio di Hilbert per la propagazione su T .

A differenza del caso della particella puntiforme, questa non è la fine della storia. Se G fosse senza punti fissi, l'identificazione dei punti di T tramite l'azione di G per ottenere Z introdurrebbe nuovi settori nella propagazione di stringa - settori di "avvolgimento", nei quali la stringa si avvolge attorno ad un cammino chiuso non contraibile in Z . In formula questi sono i settori nei quali le coordinate $x^i(\sigma)$ della stringa obbediscono non alla relazione

$$x^i(\sigma + 2\pi) = x^i(\sigma) \tag{3.1}$$

ma a

$$x^i(\sigma + 2\pi) = gx^i(\sigma) \tag{3.2}$$

per un qualche $g \in G$. Nel caso in questione, G ha punti fissi, ma difficilmente possiamo attenderci che un tale complicazione aggiuntiva elimini la

necessità di considerare l'insorgenza di settori ² nei quali la stringa è chiusa solamente a meno di una trasformazione di G . Questi settori sono ovviamente i settori "twistati". L'inclusione di tali settori è necessaria, se dobbiamo identificare i punti x e gx dello spazio-tempo. Analogamente al caso dei settori non twistati, dovremo proiettare i settori twistati su sottospazi invarianti sotto G se siamo interessati alla propagazione su $Z = T/G$. (Un argomento preciso per la necessità di includere e proiettare i settori twistati sarà esibito in seguito sulla base dell'invarianza modulare.)

Ritornando alla varietà Z , ci sono tre settori - uno non twistato, uno twistato da γ e uno da γ^{-1} . Dapprima discuteremo il settore non twistato. Per costruire questo settore, bisogna semplicemente formulare la propagazione di stringa sul toro ordinario T e proiettare sugli stati invarianti sotto γ . I modi privi di massa sul toro sono costruiti combinando i modi senza massa destrorsi (che hanno i gradi di libertà della stringa aperta) con i modi, sempre senza massa, sinistrorsi (che hanno sia i gradi di libertà bosonici spazio-temporali sia quelli interni a $E_8 \times E_8$). Un modo destrorso con autovalore λ di γ deve essere combinato con un modo sinistrorso di autovalore λ^{-1} . Qui λ può essere una qualsiasi radice cubica dell'unità (dal momento che $\gamma^3 = 1$). I modi senza massa destrorsi formano un multipletto "super-Maxwell" i cui numeri quantici rilevanti (λ e l'elicità quadridimensionale) sono

$$\begin{aligned} \lambda = 1 & \quad (1, \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}, -1) \\ \lambda = e^{\frac{2i\pi}{3}} & \quad (\frac{1}{2}, 0) + (\frac{1}{2}, 0) + (\frac{1}{2}, 0) \\ \lambda = e^{-\frac{2i\pi}{3}} & \quad (0, -\frac{1}{2}) + (0, -\frac{1}{2}) + (0, -\frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Per i modi sinistrorsi, in aggiunta a λ e all'elicità quadridimensionale, gli stati senza massa devono essere identificati anche con i numeri quantici della simmetria di gauge non rotta $E_6 \times SU(3) \times E_8$, essendo questo il sottogruppo del gruppo di gauge $E_8 \times E_8$ che commuta con γ . Gli stati senza massa sono i seguenti (i numeri quantici di $E_6 \times SU(3) \times E_8$ sono indicati in parentesi quadre, le elicità in parentesi tonde):

$$\begin{aligned} \lambda = 1 : & \quad ([1, 1, 1], (1) + (-1)) \quad ([78, 1, 1] + [1, 8, 1], (0)) \quad ([1, 1, 248], (0)) \\ \lambda = e^{-\frac{2i\pi}{3}} : & \quad ([1, 1, 1], (0) + (0) + (0)) \quad ([27, 3, 1], (0)) \\ \lambda = e^{\frac{2i\pi}{3}} : & \quad ([1, 1, 1], (0) + (0) + (0)) \quad ([\bar{27}, \bar{3}, 1], (0)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Accoppiando assieme gli stati esibiti sopra per ottenere $\lambda = 1$ si ottengono i seguenti stati permessi: i singoletti di gauge sono il multipletto di supergravità $(2, \frac{3}{2})$ e $(-\frac{3}{2}, -2)$ e dieci multipletti di materia $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, -\frac{1}{2})$. In più vi sono i supermultipletti (*massless*) di gauge dell' $E_6 \times SU(3) \times E_8$. E ci sono campi di materia chirali *massless* con numeri quantici di gauge. Gli stati con elicità $(\frac{1}{2}, 0)$ sono tre copie di $[27, 3]$ sotto $E_6 \times SU(3)$. Le loro antiparticelle, di elicità $(0, -\frac{1}{2})$, trasformano come $[\bar{27}, \bar{3}]$. In termini di E_6

²Tali settori non meriteranno più il nome di settori di avvolgimento.

ci sono nove generazioni chirali nel settore non twistato.

Passiamo ora al settore twistato da γ . In questo settore ci sono delle proprietà nuove. Perché la stringa abbia uno stato senza massa, deve essere possibile contrarla a dimensioni nulle. Per far questo deve trovarsi ad un punto fisso di γ . Nel nostro caso i punti fissi di γ sono isolati, e una stringa di dimensioni nulle che si trovi in un punto fisso non può essere deformata in maniera continua in una stringa (ancora di dimensioni nulle) che si trovi in un *altro* punto fisso. L'espansione attorno a stringhe collocate in diversi punti fissi conduce a settori disgiunti nella propagazione di stringa. Nella varietà Z , poichè vi sono 27 punti fissi, otteniamo 27 settori corrispondenti all'espansione della stringa attorno a ciascuno di questi punti fissi. Questi settori conducono a una fisica isomorfa, essendo connessi da ovvie simmetrie (traslazioni sul toro sottostante). È perciò sufficiente concentrarsi su uno dei 27 settori.

Nel settore twistato, non tutti i numeri quantici degli oscillatori sono interi. Per elencare i gradi di libertà fisici useremo la gauge di cono luce, con fermioni spazio-temporali manifestamente supersimmetrici. Siano x_3, x_4 gli oscillatori trasversi non compattificati, e siano $x_i, i = 5, \dots, 10$ gli oscillatori trasversi compattificati. Quindi gli oscillatori non compattificati sono quantizzati con numeri quantici interi, ma gli altri hanno autovalori che sono numeri interi più o meno un terzo (specificamente più per tre coordinate e meno per le altre tre). Dal momento che abbiamo scelto γ in maniera tale che rispetti la supersimmetria spazio-temporale (perché sta in un sottogruppo $SU(3)$ del gruppo delle rotazioni che lascia invariante una supersimmetria), i fermioni spazio-temporali sono quantizzati nella medesima maniera. In particolare i soli fermioni ad avere modi nulli sono i due associati con gli oscillatori dai numeri quantici interi. La quantizzazione di questi modi nulli fa sì che lo stato fondamentale degli stati destrorsi sia un doppietto con $\lambda = 1$ e elicità $(\frac{1}{2}, 0)$. La discussione dei modi sinistrorsi nel settore twistato è più complicata. Un approccio relativamente semplice consiste nel realizzare un sottogruppo³ $O(16) \times O(16)$ del gruppo di gauge che agisca in modo lineare su trentadue fermioni. Adesso, il primo $O(16)$ è rotto in $O(10) \times SU(3)$ dal twisting. È particolarmente semplice trovare e contare gli stati che sono spinori di questo $O(10)$. Essi provengono da un settore nel quale i dieci fermioni che realizzano questo $O(10)$ hanno numeri quantici interi e perciò hanno modi nulli (e dove i sedici fermioni dell'altro $O(16)$ sono antiperiodici). Gli altri sei fermioni dell' $O(16)$ rotto hanno numeri quantici non interi, essendo tre di loro traslati di un $\frac{1}{3}$ e gli altri tre di $-\frac{1}{3}$. La quantizzazione dei dieci modi nulli dà uno spinore di $O(10)$ (di "chiralità" definita) che non ha numeri quantici sinistrorsi aggiuntivi dal momento che non ci sono altri modi nulli da quantizzare. Si può vedere che l'inclusione del settore corrispondente al cambiamento del segno meno

³Ricordiamo che $O(16)$ è un sottogruppo massimale di E_8 .

nelle condizioni al bordo dei sedici fermioni che realizzano l' $O(16)$ rotto completa questo in una rappresentazione $\mathbf{27}$ di E_6 e genera singoletti massless di E_6 che trasformano come tripletti di $SU(3)$. (Questi stati hanno tutti $\lambda = 1$). Lo spettro appena illustrato si ottiene dall'espansione attorno ad uno dei ventisette punti fissi di γ . Infine otteniamo dal settore twistato da γ ventisette multipletti di materia con chiralità definita che trasformano come la rappresentazione $[27, 1]$ di $E_6 \times SU(3)$ ed ottantuno multipletti di tal genere che trasformano come $[1, 3]$. Fortunatamente non dobbiamo fare molta fatica per analizzare gli stati ottenuti dal twisting con γ^{-1} . Si tratta semplicemente delle antiparticelle degli stati appena menzionati.

Mettiamo insieme questi risultati e contiamo il numero di multipletti chirali ottenuti combinando i pezzi. Sotto E_6 , ci sono un totale di trentasei “famiglie” (il numero di famiglie è definito come il numero netto di campi di chiralità positiva di $\mathbf{27}$ meno quelli di chiralità negativa). Nove campi di chiralità positiva di $\mathbf{27}$ vengono dal settore non twistato e 27 da quello twistato da γ . Non ci sono campi di $\mathbf{27}$ di chiralità positiva provenienti dal settore twistato da γ^{-1} , e per quanto riguarda i campi a chiralità negativa, non ce ne sono in nessun settore. In aggiunta ci sono un gran numero di campi chirali *massless* singoletti di E_6 .

Possiamo anche controllare la validità della formula (2.12) per la varietà Z ; ci sono otto termini non nulli nella (2.12), ciascuno dei quali contribuisce con $\frac{1}{3} \times 27 = 9$, cosicché $\chi(Z) = 72$. L'accordo delle formule dimostra che la (2.12) include già le correzioni alla caratteristica di Eulero provenienti dall'“esplosione” dei punti fissi. È davvero notevole che le stringhe in questo semplice modo “vengano a conoscenza” di quello che succede quando le singolarità vengono regolarizzate facendo esplodere i punti fissi. Se seguissimo lo stesso procedimento in teoria di campo non arriveremmo al risultato corretto, dal momento che ometteremmo i contributi provenienti dai settori twistati.

3.3 Immersioni del gruppo puntuale e del gruppo spaziale nel gruppo di gauge

Illustriamo alcune generalizzazioni dell'orbifold Z . Una possibilità è quella di scegliere un'immersione non standard del gruppo puntuale in $E_8 \times E_8$. Nel caso dell'orbifold Z le generalizzazioni di questo tipo sono poche, così le elencheremo. Dal momento che il gruppo puntuale è abeliano, $P = Z_3$, possiamo usare la traslazione nella rappresentazione bosonica reticolare di E_8 per descrivere come P agisca sul gruppo di gauge. Indichiamo il vettore di traslazione $v = (v_1, v_2)$, dove v_1 (v_2) è un vettore di traslazione per il primo (secondo) E_8 . Quindi i vettori $3v_i$ dovrebbero essere tutti e due vettori reticolari di E_8 , in maniera che la rotazione spazio-temporale $e^{\pi i \frac{2}{3}(J_{12} + J_{34} + 2J_{56})}$, che è di ordine 3, sia accompagnata da una trasformazione di gauge di ordine 3 in $E_8 \times E_8$. La formulazione bosonica è conveniente in questo contesto perché possiamo vedere che due vettori di traslazione v_1 e v'_1 che differiscano per un vettore reticolare di E_8 devono avere azioni *equivalenti* su E_8 . Inoltre, se v_1 può essere ruotato in v'_1 da un automorfismo del reticolo di E_8 , allora v_1 e v'_1 corrispondono ad elementi coniugati di E_8 , e così nel nostro caso di Z_3 risulteranno in identici cammini di rottura di simmetria. Queste equivalenze, più il vincolo (2.8) derivante dall'invarianza modulare (con $n = 3$), lasciano solo cinque possibilità, come vedremo. Quando riscriviamo la (2.8) per il caso dell'orbifold Z , e nei termini della formulazione bosonica dei gradi di libertà di gauge, questa ci dice che il modulo quadro del vettore di traslazione v^2 , dovrebbe essere $\frac{2}{3}$ per un intero. Ma sappiamo anche che $3v_i$ è un vettore reticolare nel reticolo pari di E_8 , quindi v_i^2 è un intero per $\frac{2}{9}$, per ogni i . Può essere mostrato che ogni punto nello spazio otto-dimensionale che contiene il reticolo di E_8 dista al più 1 da un qualche punto del reticolo. Questo risultato è importante per noi perché significa che senza perdita di generalità possiamo prendere il vettore di traslazione v_i con modulo inferiore a 1 sottraendo un opportuno vettore di reticolo dal vettore più lungo, ma equivalente, v_i^0 . Le sole combinazioni consentite per le lunghezze dei v_i (a meno di scambi tra v_1 e v_2) sono:

- i) $v_1^2 = v_2^2 = 0$
- ii) $v_1^2 = \frac{2}{3}, v_2^2 = 0$
- iii) $v_1^2 = \frac{2}{9}, v_2^2 = \frac{4}{9}$
- iv) $v_1^2 = v_2^2 = \frac{2}{3}$
- v) $v_1^2 = \frac{8}{9}, v_2^2 = \frac{4}{9}$

Si verifica che ciascuna combinazione di lunghezze porta ad un unico vettore di traslazione v_i (a meno delle equivalenze sotto automorfismi del reticolo di E_8 discusse sopra).

Descriveremo brevemente queste cinque possibilità. Il caso i) è la trasformazione identica, e dà bosoni di gauge appartenenti alla rappresentazione aggiunta di $E_8 \times E_8$ ed ovviamente niente bosoni chirali. Nel caso ii) possiamo scrivere i vettori di traslazione come $v_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \dots, 0)$, $v_2 = 0$. Quindi questa trasformazione di gauge di Z_3 è $e^{\pi i \frac{2}{3}(J_{12}+J_{34}+2J_{56})}$ in $O(16)$ e rappresenta l'identificazione "standard" tra connessione di spin e connessione di gauge. Nel caso iii) possiamo prendere $v_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0)$ e $v_2 = (\frac{2}{3}, 0, \dots, 0)$ che separano l'azione di Z_3 tra i due E_8 come $e^{\pi i \frac{2}{3}(J_{12}+J_{34}+2J'_{12})}$ in $O(16) \times O(16)'$. In questo caso la simmetria di gauge è rotta in $E_7 \times U(1) \times SO(14)' \times U(1)'$. Il caso iv) immerge la connessione di spin una volta in ciascun E_8 e la simmetria di gauge è rotta in $E_6 \times SU(3) \times E'_6 \times SU(3)'$. In questo caso la simmetria fra gli E_8 viene mantenuta. Infine i vettori di traslazione del caso v) possono essere scritti come $v_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)$, $v_2 = (\frac{2}{3}, 0, \dots, 0)$ e la simmetria di gauge è rotta in $SU(9) \times SO(14)' \times U(1)'$. Per l'orbifold Z il gruppo puntuale è abeliano e i casi precedenti non portano a modelli che siano promettenti dal punto di vista fenomenologico. Per gruppi puntuali non abeliani le condizioni (2.5), (2.8) e (2.9) saranno più difficili da soddisfare ma d'altra parte sarà possibile ottenere modelli dove il rango dei gruppi non rotti è piuttosto piccolo.

Un'altra possibilità è immergere il gruppo spaziale in maniera non banale in $E_8 \times E_8$, piuttosto che solo il gruppo puntuale. In maniera equivalente, cominciamo con un toro con linee di Wilson e quindi dividiamo per il gruppo puntuale. Concretamente, consideriamo gli elementi del gruppo puntuale $(\alpha, 0)$ e i generatori delle traslazioni $(1, e_i)$. Scegliere un omomorfismo del gruppo spaziale in $E_8 \times E_8$ significa che prendiamo gli elementi del gruppo $(\alpha, 0, \beta)$, $(1, e_i, \gamma_i)$ dove β e γ_i sono elementi di $E_8 \times E_8$ che hanno gli stessi generatori e le medesime relazioni del corrispondente gruppo spaziale. Quindi $[e_i, e_j] = 0$ implica $[\gamma_i, \gamma_j] = 0$, e se α è una rotazione di ordine n che non lascia fissata nessuna componente di e_i allora

$$[(\alpha, 0, \beta)(1, e_i, \gamma_i)]^n = (\alpha, \alpha e_i, \beta \gamma_i)^n = (1, 0, (\beta \gamma_i)^n) \quad (3.5)$$

Così in aggiunta alla condizione $\beta^n = 1$ che segue dal fatto che $\alpha^n = 1$ c'è anche la condizione sulla linea di Wilson che $(\beta \gamma_i)^n = 1$ per gli elementi β di $E_8 \times E_8$ che siamo associati con rotazioni che non lasciano alcuna componente di e_i fissata.

Come esempio consideriamo ancora l'orbifold Z . Iniziamo col toro esadimensionale $T^6 = T_1 \times T_2 \times T_3$ dove T_i è il toro definito da $z_i \sim z_i + e_{i1}$ e $z_i \sim z_i + e_{i2}$ con $e_{i1} = 1$, $e_{i2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Il gruppo puntuale è generato da $\alpha : z_i \rightarrow z_i e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Scegliendo un'immersione di β in $E_8 \times E_8$ otteniamo elementi di gruppo $(\alpha, 0, \beta)$ con $\alpha^3 = \beta^3 = 1$. L'immersione del gruppo delle traslazioni dà gli elementi $(1, e_{i1}, \gamma_{i1})$, $(1, e_{i2}, \gamma_{i2})$ dove i γ commutano fra loro. Dal momento che α ruota tutti gli e_i abbiamo la condizione $(\beta \gamma_{i1})^3 = (\beta \gamma_{i2})^3 = 1$. Inoltre

poiché $e_{i2} = \alpha e_{i1}$ abbiamo

$$(1, e_{i2}, \gamma_{i2})(\alpha, 0, \beta) = (\alpha, e_{i2}, \gamma_{i2}\beta) = (\alpha, \alpha e_{i1}, \beta\gamma_{i1})$$

sarà $\gamma_{i2} = \beta\gamma_{i1}\beta^{-1}$. In questo esempio il caso più generale è scegliere tre elementi commutanti di $E_8 \times E_8$ γ_{i1} e un elemento β tale che $\beta^3 = (\beta\gamma_{i1})^3 = 1$ soggetti ai vincoli (2.5), (2.8) e (2.9). Notiamo che nel settore twistato i 27 punti fissi sono punti fissi dello stesso elemento del gruppo puntuale ma corrispondono a diversi elementi del gruppo spaziale. Diversi punti fissi sono cioè associati con diverse trasformazioni di gauge nel caso generale.

È interessante notare anche che la presenza di linee di Wilson prima dell'identificazione via gruppo puntuale può portare a stati con carica frazionaria anche se il gruppo fondamentale dell'orbifold è triviale.

Questa procedura rompe $E_8 \times E_8$ nel sottogruppo commutante con gli elementi β del gruppo puntuale e le "linee di Wilson" γ_i . Ciò rende piuttosto facile ottenere modelli espliciti in cui E_6 è rotto ulteriormente in un $SO(10)$ o in un $SU(5)$. Questo approccio generale contiene sia le immersioni non standard descritte sopra, così come vere e proprie linee di Wilson nel caso in cui l'orbifold abbia un gruppo fondamentale non banale.

Parte II

Stringhe su orbifold dipendenti dal tempo

Capitolo 4

Geometria degli orbifold: orbifold parabolico, brana nulla, universo di Milne.

4.1 Orbifold parabolico

4.1.1 Presentazione del modello

Una classe interessante di modelli dipendenti dal tempo è basata su background della forma $(R^{1,n}/\Gamma) \times C^\perp$ dove il gruppo di orbifold è un sottogruppo discreto Γ del gruppo di Poincaré, e C^\perp è una teoria di campo conforme “trasversa” che rende l’intera teoria consistente. Il modello qui studiato è basato sullo spazio di arrivo $(R^{1,n}/\Gamma) \times C^\perp$ con $\Gamma \sim Z$ sottogruppo del gruppo di Lorentz tridimensionale $\text{Spin}(1,2) \sim SL(2,R)$. Il gruppo di orbifold Γ è specificato completamente scegliendo la classe di coniugazione di un generatore g_0 . $SL(2,R)$ ha tre classi di coniugazione distinte: ellittica, parabolica ed iperbolica. La classe ellittica corrisponde alle rotazioni spaziali, quella iperbolica ai boost che lasciano invariata una direzione spaziale, e la classe parabolica corrisponde ai boost “nulli”. Scegliamo g_0 da quest’ultima classe. Descriviamo la geometria dell’orbifold così ottenuto.

Scriviamo le coordinate x^μ di $R^{1,2}$ in un vettore colonna X . La metrica lorentziana ha la forma

$$ds^2 = -2dx^+dx^- + dx^2 \quad (4.1)$$

Il generatore g_0 agisce come

$$X = \begin{pmatrix} x^+ \\ x \\ x^- \end{pmatrix} \rightarrow g_0 \cdot X = e^{v\mathcal{J}} X = \begin{pmatrix} x^+ \\ x + vx^+ \\ x^- + vx + \frac{1}{2}v^2x^+ \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

con

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In altri termini $g_o = e^{ivJ}$ dove J è il generatore dell'algebra di Lie¹

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^{0x} + J^{1x}) \quad (4.3)$$

corrispondente alla combinazione lineare di una rotazione e un boost. Con un boost nella direzione 1 possiamo porre $v = 2\pi$.

La distanza geodetica tra un punto e la sua n -sima immagine è $|nvx^+|$. Quindi il nostro orbifold non ha curve di tipo tempo chiuse. Per $x^+ \neq 0$ tutte le curve chiuse sono di tipo spazio e per $x^+ = 0$ ci sono curve chiuse di tipo luce.

L'orbifold ottenuto dividendo per Γ rompe la simmetria di Poincaré lasciando solo due generatori della sua algebra non rotti. Si tratta di J e p^+ (generatore delle traslazioni su x^-). Il vettore di Killing di tipo luce associato a p^+ ci permette di adottare la gauge di cono luce; possiamo cioè trattare x^+ come se fosse il tempo. Dal momento che p^- è rotto nella costruzione dell'orbifold il sistema di cono luce dipende da x^+ ed è quindi ancora non banale. La presenza di un vettore di Killing a modulo nullo ha un'importante conseguenza. L'evoluzione di cono luce è al primo ordine nel tempo di cono luce e quindi è più semplice che l'evoluzione temporale standard al secondo ordine. Come conseguenza, anche se il nostro background dipende dal tempo, non c'è produzione di particelle nella teoria di seconda quantizzazione [21].

L'equazione (4.2) determina l'azione di g_0 sugli spinori a meno di un segno. Per un'appropriata scelta di questo segno notiamo che il gruppo Γ lascia uno spinore invariante, e perciò l'orbifold ha uno spinore covariantemente costante. Quando la superstringa è compattificata sull'orbifold conserva metà delle supercariche².

Nel sistema di cono luce con x^+ adottato come tempo la trasformazione (4.2) ha la seguente interpretazione fisica. Si tratta di un semplice boost galileiano di velocità v . Tale trasformazione lascia il tempo invariato e trasla la coordinata secondo $x \rightarrow x + v\tau$. L'azione del generatore parabolico sui generatori delle traslazioni P è simile alla (4.2)

$$P = \begin{pmatrix} p^+ \\ p \\ p^- \end{pmatrix} \rightarrow e^{v\mathcal{J}}P = \begin{pmatrix} p^+ \\ p + vp^+ \\ p^- + vp + \frac{1}{2}v^2p^+ \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

¹Utilizziamo qui gli indici 0, 1, x perché ci riferiamo a coordinate rispetto alle quali la metrica abbia la forma $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx^2$

²Queste supercariche al quadrato danno il vettore di Killing p^+ .

Dal momento che $m^2 = 2p^+p^- - p^2$ è un invariante di Lorentz, è invariante sotto il generatore parabolico J . Un'analogia con la fisica Newtoniana emerge quando risolviamo in $p^- = \frac{p^2+m^2}{2p^+}$. Nel riferimento di cono luce p^+ è interpretato come la massa $\mu = p^+$, $V = \frac{m^2}{2p^+}$ è l'energia potenziale e $p^- = \frac{p^2}{2\mu} + V$ è l'energia totale. In termini delle variabili μ, p, V la trasformazione parabolica (4.4) è semplicemente $p \rightarrow p + v\mu$ con μ e V che rimangono invarianti.

Insomma, l'orbifold parabolico così ottenuto nel riferimento di cono luce può essere visto come quoziente rispetto ad un boost galileiano.

4.1.2 Un modellino di Big Bang

È utile introdurre le nuove coordinate

$$\begin{aligned} y^+ &= x^+ \\ y &= \frac{x}{x^+} \\ y^- &= \frac{2x^+x^- - x^2}{2x^+} = x^- - \frac{x^2}{2x^+} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il vantaggio di questo cambiamento di coordinate è che le identificazioni divengono molto semplici (d'ora innanzi prenderemo $v = 2\pi$)

$$(y^+, y, y^-) \sim (y^+, y + 2\pi, y^-) \quad (4.6)$$

e semplice diventa anche la metrica

$$ds^2 = -2dy^+dy^- + (y^+)^2dy^2 \quad (4.7)$$

Lo spazio-tempo (4.7), che chiamiamo il “parabolic pinch”, può essere visualizzato come due coni (parametrizzato da y^+ e y) con il vertice in comune $y^+ = 0$, incrociati con la retta reale (parametrizzata da y^-). y svolge il ruolo di “variabile angolare” e la coordinata di tipo luce y^+ quello di “variabile radiale”: considerando l'evoluzione nel “tempo di cono luce” abbiamo un Big Crunch del cerchio $y^+ = 0$ che è seguito da un Big Bang. Il doppio ruolo di y^+ sia come variabile temporale che come variabile radiale darà luogo a della fisica interessante.

È importante che il modello non abbia curve di tipo tempo chiuse. Il loop chiuso parametrizzato da y è di tipo spazio per $y^+ \neq 0$. In corrispondenza della singolarità $y^+ = 0$ la circonferenza del cerchio si annulla. Discuteremo la singolarità in dettaglio dopo.

Tenendo presente il riferimento di cono luce, ci riferiremo a tutti i punti dell'orbifold tali che $x^+ = y^+ < 0$ come cono *passato*, e a quelli tali che

$x^+ = y^+ > 0$ come cono futuro. Una caratteristica interessante dello spazio-tempo (4.7) è che ogni punto $P = (y^+, y, y^-)$ con $y^+ > 0$ è nel futuro causale di ogni punto del cono passato $\bar{P} = (\bar{y}^+, \bar{y}, \bar{y}^-)$ (che è proprio quello che ci saremmo aspettati da un Big Crunch seguito da un Big Bang). Vediamo come si verifica questo fatto: l'intervallo tra P e $g_0^n \bar{P}$ (la sua n -esima immagine via g_0) può essere calcolata come

$$\|P - g_0^n \bar{P}\|^2 = -2\Delta x^+ \Delta x^- + (\Delta x)^2 + 4\pi^2 n^2 x^2 + \bar{x}^+ + 4\pi n(x^+ \bar{x} - x \bar{x}^+) \quad (4.8)$$

dove abbiamo usato le coordinate originali x e $\Delta x^\mu = x^\mu - \bar{x}^\mu$. Per grandi n il termine $4\pi^2 n^2 x^2$ domina, quindi se $x^+ \bar{x}^+$ è negativo, ci sono infiniti $g \in \Gamma$ tali che $P \in I^+(g \cdot \bar{P})$.

Adesso vogliamo capire quale sia la natura della singolarità in $x^+ = y^+ = 0$.

4.1.3 Studio della singolarità

In questo paragrafo analizziamo il sottospazio singolare $x^+ = y^+ = 0$. L'identificazione in questo sottospazio è

$$X = \begin{pmatrix} x^+ = 0 \\ x \\ x^- \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^+ = 0 \\ x \\ x^- + 2\pi n x \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

A differenza del caso $x^+ \neq 0$, qui x non è soggetta ad identificazione e quindi è una buona coordinata. Inoltre in $x = 0$ l'identificazione diviene quella banale, quindi tutti i punti dell'asse x^- sono distinti. Ma d'altro canto quando x è piccolo i punti di x^- con una piccola spaziatura verranno identificati. Quindi in tale contesto è impossibile usare le coordinate y .

Dal momento che la trasformazione di coordinate (4.5) è singolare in $x^+ = 0$ dobbiamo descrivere lo spazio C_Y con coordinate y con attenzione. La metrica del “parabolic pinch” implica che partiamo con $(y^+, y, y^-) \in R^3$, e quozientiamo con la relazione di equivalenza $(y^+, y, y^-) \sim (y^+, y + 2\pi, y^-)$ assieme con $(y^+ = 0, y, y^-) \sim (y^+ = 0, 0, y^-)$. Quest'ultima identificazione è naturale dal momento che y è una variabile angolare e y^+ è l'analogo di una variabile radiale. Più precisamente, C_Y viene proiettato su uno spazio di Minkowski bidimensionale parametrizzato da (y^+, y^-) per un cerchio, eccettuato in $y^+ = 0$, dove il cerchio degenera in un punto. C_Y non ha curve chiuse di tipo tempo o di tipo luce ed è di Hausdorff. Appare come un doppio cono per una retta.

Sopra abbiamo dato una precisa definizione di C_Y partendo dalla metrica. Questo spazio in effetti non è proprio l'orbifold $\mathcal{O} = R^{1,2}/\Gamma$, ma è strettamente collegato ad esso. La nostra trasformazione di coordinate è una mappa continua

$$\pi : C_Y \rightarrow \mathcal{O} \quad (4.10)$$

che ha la forma esplicita

$$\begin{aligned}x^+ &= y^+ \\x &= yy^+ \\x^- &= y^- + \frac{1}{2}y^+y^2\end{aligned}\tag{4.11}$$

Questa trasformazione è un isomorfismo per $x^+ = y^+ \neq 0$, ma non è neppure surgettiva per $y^+ = 0$. Lo spazio \mathcal{O} in effetti non è di Hausdorff. Ricordiamo che l'assioma di separazione di Hausdorff stabilisce che gli aperti separano i punti distinti. Per verificare che l'orbifold non è un Hausdorff consideriamo il problema semplificato del quoziente del piano $x^+ = 0$ rispetto all'identificazione (4.8). Come abbiamo già detto, tutti i punti sull'asse x^- ($x^+ = x = 0$) sono distinti. D'altro canto per piccoli x gli aperti che separano diversi valori di x^- devono divenire piccoli a loro volta, e questo porta ad una topologia non di Hausdorff. In particolare si trova che i punti sulle rette $L_A = \{(0, A, x^-) : x^- \in R\}$ e $L_{-A} = \{(0, -A, x^-) : x^- \in R\}$ non possono essere separati da insiemi aperti di \mathcal{O} . Ovviamente richiedendo anche l'identificazione $(x^+ = 0, x, x^-) \sim (x^+ = 0, 0, x^-)$ o considerando il suo sottospazio $\pi(C_Y)$ otteniamo un nuovo spazio \mathcal{O}' topologicamente isomorfo a C_Y .

Per riassumere: nello studiare il nostro background di stringa dipendente dal tempo dobbiamo considerare due spazi distinti, il gruppo quoziente \mathcal{O} , che non è un Hausdorff, e il “parabolic pinch” \mathcal{O}' (che è un Hausdorff). Questi due spazi sono identici lontano dalla singolarità ma la singolarità nei due spazi è di natura diversa. Per comprendere la differenza è utile ragionare in termini di una foliazione dello spazio in superfici di tipo spazio a tempo costante. \mathcal{O} è foliato da superfici \mathcal{F}_{x^+} , dove \mathcal{F}_0 non è di Hausdorff, mentre \mathcal{O}' è foliato da superfici \mathcal{F}'_{y^+} , dove $\mathcal{F}'_0 = \{(0, 0, y^-)\}$ è una retta reale. Per $x^+ = y^+ \neq 0$ la mappa (4.10) definisce un isomorfismo tra gli spazi foliati. Il vantaggio del sistema di coordinate y è che ci dà una chiara illustrazione sia della topologia di \mathcal{O} che di quella di \mathcal{O}' fuori della singolarità. Per \mathcal{O}' il sistema di coordinate y è un buon sistema di coordinate dovunque, anche nella singolarità. Per \mathcal{O} il sistema è singolare in corrispondenza di \mathcal{F}_0 ed è quindi consigliabile utilizzare il sistema di coordinate originario x .

La procedura standard di quantizzazione di stringa su orbifold consiste nel costruire la teoria su uno spazio *quozientato rispetto all'azione di un gruppo*. Nella formulazione di cono luce potremmo utilizzare sia lo spazio \mathcal{O} che \mathcal{O}' . Purtroppo la consistenza della teoria di stringa su \mathcal{O}' non è evidente dal momento che \mathcal{O}' non è geodeticamente completo³ in $y^+ = 0$; alcune geodetiche raggiungono $y^- \rightarrow \pm\infty$ in un tempo proprio finito. Nella formulazione covariante descritta sotto, descriveremo la propagazione di stringa su \mathcal{O} .

³Una geodetica è detta *completa* se è definita per tutti i valori del parametro; una varietà \mathcal{M} è detta *geodeticamente completa* se tutte le geodetiche in \mathcal{M} sono complete.

4.1.4 Proprietà notevoli dell'orbifold

Prima di passare all'altro modello riassumiamo le proprietà più importanti dello spazio appena descritto, al fine di mettere bene a fuoco i motivi per i quali questo modello risulta particolarmente “appetibile”:

- Possiamo utilizzare l'evoluzione di cono luce perché l'orbifold ha un'isometria generata da un vettore di Killing di tipo luce. Questo comporta che nella teoria di seconda quantizzazione non ci sia produzione di stringhe o particelle. Inoltre l'orbifold ha uno spinore covariante e quindi in teoria di superstringa metà delle supersimmetrie è conservata.
- Non ci sono curve chiuse di tipo tempo e quelle di tipo luce chiuse possono stare solo nell'iperpiano $x^+ = 0$.
- Nella gauge di cono luce, interpretando x^+ come tempo, avremo un Big Crunch seguito da un Big Bang per $x^+ = 0$. Possiamo studiare tale singolarità, e chiederci se il tempo non inizi/finisca in quel punto: altrimenti dovremmo essere in grado di definire la matrice S per uno scattering che inizi a $x^+ = -\infty$ e termini a $x^+ = \infty$.

4.2 La brana nulla

Questa volta consideriamo $R^{1,3}$ con la metrica

$$ds^2 = -2dx^+dx^- + dx^2 + dz^2 \quad (4.12)$$

e procediamo all'identificazione

$$X \sim e^{2\pi n \mathcal{J}} X \quad z \sim z + 2\pi n R \quad n \in Z \quad (4.13)$$

dove il vettore X e la matrice \mathcal{J} sono gli stessi della (4.2). Ovviamente il generatore dell'identificazione cambia: indicando con p_z il generatore delle traslazioni lungo z esso sarà

$$g_0 = e^{2\pi i(J + R p_z)} \quad (4.14)$$

L'orbifold così costruito viene detto brana nulla. L'orbifold parabolico rappresenta un caso limite della brana nulla, esattamente $R \rightarrow 0$. La distanza geodetica tra un punto e la sua n -esima immagine sarà adesso $2\pi n \sqrt{R^2 + (x^+)^2}$; quindi per $R \neq 0$ avremo che *tutte* le ipersuperfici $x^+ = \text{cost}$ sono degli Hausdorff e che non ci sono curve causali chiuse (possiamo dire che il parametro R in un certo senso "regolarizza" l'orbifold parabolico).

La simmetria di Poincaré viene rotta dall'azione dell'orbifold che non rompe solo tre generatori: oltre a J , $p^+ = -p_-$ e p_z , che generano le traslazioni rispettivamente su x^- e z . Come nel caso precedente a p^+ è associato un vettore di Killing di tipo luce che ci permette di adottare ancora una volta la trattazione di cono luce considerando x^+ come il tempo. Le considerazioni sulla mancata produzione di particelle nella teoria di seconda quantizzazione e sulla conservazione di metà delle supercariche restano valide.

Adottiamo adesso due diversi sistemi di coordinate:

1. Operiamo la trasformazione (4.5) lasciando invariata z ; ovviamente la trasformazione sarà ancora ben definita solo per $x^+ \neq 0$. La metrica diventa

$$ds^2 = -2dy^+dy^- + (y^+)^2 dy^2 + dz^2 \quad (4.15)$$

e l'identificazione

$$\begin{pmatrix} y^+ \\ y \\ y^- \\ z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y^+ \\ y + 2\pi n \\ y^- \\ z + 2\pi n R \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Effettuiamo l'ulteriore trasformazione⁴

$$z = Ry + u \quad (4.17)$$

⁴Prendiamo u non compatta.

ottenendo per la metrica

$$ds^2 = -2dy^+dy^- + \frac{(y^+)^2}{R^2 + (y^+)^2} du^2 + (R^2 + (y^+)^2) \left(dy + \frac{R}{R^2 + (y^+)^2} du \right)^2 \quad (4.18)$$

Lo spazio può essere letto come una varietà tridimensionale di coordinate (y^+, y, u) provvista di una fibra circolare di raggio $\sqrt{R^2 + (y^+)^2}$.

2. L'altra trasformazione che consideriamo è

$$z = R\theta \quad \tilde{X} = e^{-\frac{z}{R}} X \quad (4.19)$$

Invertendo per poter sostituire nella metrica abbiamo

$$\begin{aligned} x^+ &= \tilde{x}^+ \\ x &= \tilde{x} + \theta \tilde{x}^+ \\ x^- &= \tilde{x}^- + \theta \tilde{x} + \frac{1}{2} \theta^2 \tilde{x}^+ \end{aligned} \quad (4.20)$$

e

$$\begin{aligned} ds^2 &= -2d\tilde{x}^+d\tilde{x}^- + d\tilde{x}^2 - \frac{1}{R^2 + (\tilde{x}^+)^2} (\tilde{x}^+d\tilde{x} - \tilde{x}d\tilde{x}^+)^2 + \\ &+ (R^2 + (\tilde{x}^+)^2) \left(d\theta + \frac{1}{R^2 + (\tilde{x}^+)^2} (\tilde{x}^+d\tilde{x} - \tilde{x}d\tilde{x}^+) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Anche in questo caso lo spazio è dato da una varietà tridimensionale (parametrizzata ora da \tilde{X}) con una fibra circolare. La metrica ha determinante costante. Come nel caso dell'orbifold parabolico, \tilde{x}^+ svolge sia il ruolo di tempo che quello di "variabile radiale".

Il sistema di coordinate (y^+, y, y^-, z) non è geodeticamente completo; (\tilde{X}, θ) invece lo è e proponiamo anche la trasformazione tra questi due sistemi:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^+ &= y^+ \\ \tilde{x} &= y^+ \left(y - \frac{z}{R} \right) \\ \tilde{x}^- &= y^- + \frac{1}{2} y^+ \left(y - \frac{z}{R} \right)^2 \\ \theta &= \frac{z}{R} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Notiamo che questo secondo sistema di coordinate non può essere definito nel caso $R = 0$.

In termini del tempo x^+ di cono luce la brana nulla descrive un cerchio di raggio infinito nel remoto passato che si restringe fino al raggio minimo R all'istante $x^+ = 0$ e si riespande nuovamente fino a raggio infinito nel lontano futuro. Nel caso dell'orbifold parabolico abbiamo visto che qualsiasi punto con $y^+ > 0$ si trova nel futuro causale di ogni punto con $y^+ < 0$. Facciamo il calcolo analogo nel caso della brana nulla

$$\|P_1 - g_0^n P_2\|^2 = -2\Delta y^+ \Delta y^- + y_1^+ y_2^+ (\Delta y - 2\pi n)^2 + (\Delta z - 2\pi n R)^2 \quad (4.23)$$

Quindi per n grande il termine dominante

$$\|P_1 - g_0^n P_2\|^2 \sim (y_1^+ y_2^+ + R^2)(2\pi n)^2 \quad (4.24)$$

Vediamo che il parametro R cambia lievemente la situazione: perchè P_1 e P_2 siano l'uno nel futuro causale dell'altro è necessario che $y_1^+ y_2^+ + R^2 < 0$.

4.3 L'universo di Milne

Il modello di universo proposto da Milne, cioè lo spazio bidimensionale con singolarità conica⁵

$$ds^2 = -dt^2 + \lambda^2 t^2 dw^2 \quad (4.25)$$

è a sua volta un orbifold. Infatti per ottenere tale spazio è sufficiente prendere un ordinario spazio Minkowskiano $R^{1,1}$, restringerci ai punti $x^+ x^- > 0$ più $x^\pm = 0$ e procedere all'identificazione usando il gruppo Z generato dal boost

$$x^\pm \rightarrow e^{\pm 2\pi\lambda} x^\pm. \quad (4.26)$$

Poiché siamo interessati alla costruzione di una teoria di stringa⁶ la restrizione alla sola parte interna del cono luce risulta inopportuna (come potremmo confinare la propagazione di stringa?); quindi si opera l'identificazione sull'intero Minkowski, ammettendo anche il cono dell'“altrove assoluto” in cui la metrica assume la forma

$$ds^2 = dt^2 - \lambda^2 t^2 dw^2; \quad (4.27)$$

evidentemente in tale regione esistono curve di tipo tempo chiuse. Inoltre l'inclusione del cono luce stesso comporta che lo spazio non sia più un Hausdorff.

⁵ λ è un parametro, w una variabile angolare.

⁶Al solito la varietà in questione dovrà essere moltiplicata per un R^8 o un R^{24} affinché il fondo abbia le dimensioni corrette

Capitolo 5

Teoria di prima quantizzazione

5.1 Caso dell'orbifold parabolico

In questa sezione consideriamo particelle di prima quantizzazione. Oltre ad essere interessante di per sé, le funzioni d'onda che otterremo saranno utili per costruire gli operatori di vertice nella teoria di stringa.

L'equazione d'onda per una particella di spin nullo e di massa m è:

$$\left[-2 \frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \psi = m^2 \psi \quad (5.1)$$

Per definire lo spazio di Hilbert dell'orbifold operiamo una proiezione sulle funzioni d'onda invarianti sotto

$$\mathcal{U}(g_0) = e^{2\pi i \hat{J}} \quad \hat{J} = \hat{x}^+ \hat{p} - \hat{x} \hat{p}^+ = -i \left(x^+ \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x^+} \right) \quad (5.2)$$

I generatori dell'algebra di Poincaré che sono invarianti sotto $\mathcal{U}(g_0)$ sono \hat{p}^+ e \hat{J} . È quindi conveniente diagonalizzare tali operatori. Esplicitamente

$$\begin{aligned} \psi_{p^+, J} &= \sqrt{\frac{p^+}{ix^+}} e^{-ip^+ x^- - i \frac{m^2}{2p^+} x^+ + i \frac{p^+}{2x^+} (x-\xi)^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip\xi} \phi_{p^+, p}(x^+, x^-, x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

dove $\xi = -\frac{J}{p^+}$ e quindi l'autovalore J svolge il ruolo di "posizione" ξ . Nella seconda riga abbiamo operato un'espansione della funzione d'onda in una base di onde piane on-shell

$$\phi_{p^+, p}(x^+, x^-, x) = e^{-ip^+ x^- - ip^- x^+ + ipx} \quad p^- = \frac{p^2 + m^2}{2p^+} \quad (5.4)$$

Le onde piane non sono invarianti sotto l'azione dell'orbifold (4.2), e le funzioni invarianti ottenute sommando sopra le immagini non costituiscono una base conveniente per l'orbifold. È facile controllare che in termini di $\psi_{p^+,J}$ la proiezione di orbifold è semplicemente $J \in Z$.

Dal momento che $\psi_{p^+,J}$ è una trasformata di Fourier in p può essere interpretata come un'autofunzione di x . In effetti

$$\lim_{x^+ \rightarrow 0} \psi_{p^+,J}(x^+, x, x^-) = \sqrt{2\pi} e^{-i p^+ x^-} \delta(x - \xi) \quad \xi = -\frac{J}{p^+} \quad (5.5)$$

Questo risultato può essere derivato in maniera più diretta considerando un autovettore di ∂_{x^-} che è ben definito sulla superficie \mathcal{F}_0 sotto l'identificazione (4.9)¹. Il limite può essere anche compreso notando che $\hat{J} = \hat{x}^+ \hat{p} - \hat{x} \hat{p}^+ \rightarrow -\hat{x} \hat{p}^+$ in $x^+ = 0$. Quindi l'autofunzione di \hat{J} e di \hat{p}^+ deve essere un'autofunzione delle coordinate con autovalore $\xi = -\frac{J}{p^+}$. Visto che J è quantizzato sopra l'orbifold, vediamo che con p^+ fissato le autofunzioni hanno supporto sul reticolo $x \in \frac{1}{p^+} Z$ in $x^+ = 0$ ².

¹In effetti il limite non è ben definito sullo spazio di Hausdorff \mathcal{F}'_0 dal momento che la distribuzione ottenuta dal limite separa punti che sono invece identificati in \mathcal{O}' .

²Il limite di ψ è una distribuzione e ha senso solo se convoluto con funzioni regolari. Per esempio è evidente che $\lim_{x^+ \rightarrow 0} |\psi_{p^+,J}|^2 = \left| \frac{p^+}{x^+} \right|$, e la funzione non è localizzata in ξ .

5.2 Caso della brana nulla

Iniziamo discutendo le funzioni d'onda sullo spazio di ricoprimento $R^{1,3}$. Cerchiamo un sistema di autofunzioni dei vettori di Killing J , p^+ e p_z e del laplaciano:

$$\begin{aligned} \hat{J}\psi &= -i \left(x^+ \frac{\partial}{\partial x^+} + x^- \frac{\partial}{\partial x^-} \right) \psi = J\psi \\ \hat{p}^+\psi &= i \frac{\partial}{\partial x^-} \psi = p^+\psi \\ \hat{p}_z\psi &= -i \frac{\partial}{\partial z} \psi = k\psi \\ \left[-2 \frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi &= m^2\psi \end{aligned} \quad (5.6)$$

Analogamente a quanto fatto sopra le autofunzioni possono essere scritte come

$$\psi_{p^+, J, k, m^2} = \sqrt{\frac{1}{ix^+}} e^{-ip^+x^- - i\frac{m^2+k^2}{2p^+}x^+ + i\frac{p^+}{2x^+}(x-\xi)^2 + ikz} \quad (5.7)$$

dove anche qui

$$\xi = -\frac{J}{p^+} \quad (5.8)$$

Le autofunzioni di J possono essere scritte come trasformata di Forier delle autofunzioni dell'impulso. In formula

$$\psi_{p^+, J, k, m^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi p^+}} e^{-ip\xi} e^{-ip^+x^- - i\frac{m^2+k^2+p^2}{2p^+}x^+ + ipx + ikz} \quad (5.9)$$

Vediamo adesso quali restrizioni comporta il fatto che vogliamo lavorare sull'orbifold. L'identificazione agisce sulla funzione in maniera tale che

$$\psi_{p^+, J, k, m^2} \rightarrow e^{2\pi i n(J+kR)} \psi_{p^+, J, k, m^2} \quad (5.10)$$

e quindi dovremo richiedere

$$J + kR = r \in Z \quad (5.11)$$

Indichiamo le funzioni d'onda che soddisfano questa condizione come B_{p^+, J, r, m^2} ; in virtù della (5.11) r e J individuano k .

Per ogni ipersuperficie a "tempo" costante \mathcal{F}_{x^+} possiamo scrivere la relazione di completezza

$$\int_{\mathcal{F}_{x^+}} B_{p_1^+, J_1, r_1, m^2}^* B_{p_2^+, J_2, r_2, m^2} = (2\pi)^3 R \delta_{r_1, r_2} \delta(J_1 - J_2) \delta(p_1^+ - p_2^+) \quad (5.12)$$

Sarà utile avere le funzioni B_{p^+, J, r, m^2} scritte in termini delle coordinate (4.19); notando che $\psi_J(X) = e^{\theta J} \psi_J(\tilde{X})$ si ottiene

$$B_{p^+, J, r, m^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\tilde{x}^+}} e^{-ip^+\tilde{x}^- - i\left(\frac{r-J}{2p^+}\right)^2 + m^2} \tilde{x}^+ + i\frac{p^+}{2\tilde{x}^+}(\tilde{x}-\xi)^2 + ir\theta} \quad (5.13)$$

Le funzioni sono singolari in $x^+ = 0$:

$$\lim_{x^+ \rightarrow 0} B_{p^+, J, r, m^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{p^+}} e^{-ip^+ x^- + i\left(\frac{r-J}{R}\right)z} \delta(x - \xi) \quad (5.14)$$

Questo evidentemente comporta che le funzioni per $x^+ = 0$ sono localizzate in $x = \xi$.

La focalizzazione delle particelle può portare ad una grande retroazione nel caso di accoppiamento gravitazionale, come nel caso precedente; inoltre nella (5.9) si effettua l'integrazione fino a valori dell'energia arbitrariamente grandi. Queste circostanze comportano la divergenza degli elementi della matrice S .

Rinunciamo dunque ad utilizzare una base di autofunzioni di \hat{J} e ricorriamo a pacchetti d'onda $U_{p^+, f(J), r, m^2}$ costruiti usando funzioni $f(J)$ della classe \mathcal{S} delle funzioni rapidamente decrescenti:

$$U_{p^+, f(J), r, m^2} = \int dJ f(J) B_{p^+, J, r, m^2} \quad (5.15)$$

Usando queste funzioni d'onda non abbiamo più localizzazione per $x^+ = 0$: la dipendenza di $U_{p^+, f(J), r, m^2}$ da x per $x^+ = 0$ sarà $f(-xp^+)^3$. Non solo: dall'espressione di B come trasformata in p

$$U_{p^+, f(J), r, m^2} = \int \frac{dJ dp}{\sqrt{2\pi p^+}} f(J) e^{-ip\xi} e^{-ip^+ x^- - i\frac{m^2 + k^2 + p^2}{2p^+} x^+ + ipx + ikz} \quad (5.16)$$

dove $k = \frac{r-J}{R}$, vediamo che l'integrazione in J può essere letta come trasformata di Fourier di una funzione di J appartenente a \mathcal{S} (ricordando che cos'è ξ !); la trasformata di una funzione \mathcal{S} è ancora una \mathcal{S} e quindi non ha praticamente supporto in corrispondenza di grandi valori dell'energia.

Se l'adozione a tali pacchetti d'onda comporta la risoluzione di entrambe i problemi, perché non è stata fatta anche nel caso parabolico? Il problema è che nel caso parabolico J ha valori *discreti*. Potevamo ricorrere a funzioni di p^+ , ma questo avrebbe funzionato *solo* nel caso $J \neq 0$.

³Ovviamente bisogna anche preoccuparci che l'integrale (5.14) converga per $x^+ \neq 0$, ma questo è garantito dalla limitatezza di B .

5.3 Particella libera nell'“universo di Milne”

Le funzioni d'onda di una particella di massa m che si propaghi in R/Z (Z è il gruppo definito nel precedente capitolo) devono soddisfare due condizioni: essere invarianti sotto Z e risolvere l'equazione di Klein-Gordon. La funzione

$$\psi(x)_{p,l} = \int_R d\omega e^{i(p^+x^- e^{-\lambda\omega} + p^-x^+ e^{\lambda\omega} + \lambda\omega)} \quad (5.17)$$

soddisfa ad entrambe le richieste; inoltre possiamo utilizzare la trasformazione sugli impulsi

$$(p^+, p^-) \rightarrow (zp^+, z^{-1}p^-) \quad z > 0 \quad (5.18)$$

per portare p alla forma $p_m = \frac{1}{\sqrt{2}}(m, m)$, dal momento che tale trasformazione introduce nella (5.17) solo una fase. Normalizzando opportunamente

$$\phi_{m,l}(x) = \sqrt{2|m|}\psi_{p_m,l}(x) \quad (5.19)$$

otteniamo un insieme di funzioni⁴ ortonormali sul nostro spazio quozientato:

$$(\phi_{p_m,l}, \phi_{p_{m'},l'}) = \int_{R^{1,1}/Z} dx^+ dx^- \phi_{m,l}^*(x) \phi_{p_{m'},l'}(x) = \delta_{ll'} \delta(m - m'). \quad (5.20)$$

⁴Queste funzioni sono definite su tutto lo spazio, quindi anche nella “problematica” regione $x^+x^- < 0$. Si può però verificare che in tale regione le funzioni decadono esponenzialmente.

Capitolo 6

Stringhe sugli orbifold

6.1 Stringhe sull'orbifold parabolico

In questa sezione analizziamo il sistema nella gauge di cono luce $x^+ = y^+ = \tau$. La Lagrangiana nella gauge di cono luce è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -p^+ \partial_\tau x_0^- + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\alpha' p^+ \partial_\tau x \partial_\tau x - \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_\sigma x \partial_\sigma x \right) = \\ & -p^+ \partial_\tau y_0^- + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\alpha' p^+ \partial_\tau y \partial_\tau y - \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_\sigma y \partial_\sigma y \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

dove

$$\begin{aligned} x(\sigma, \tau) &= \tau y(\sigma, \tau), \\ y_0^-(\tau) &= x_0^-(\tau) - \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} (x(\sigma, \tau))^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'invarianza sotto traslazioni costanti di σ è ottenuta richiedendo

$$\int d\sigma \left(\partial_\sigma x \partial_\tau x - \frac{1}{2\tau} \partial_\sigma x^2 \right) = \int d\sigma \tau^2 \partial_\sigma y \partial_\tau y = 0. \quad (6.3)$$

È essenziale che l'espressione della Lagrangiana e il vincolo precedente siano invarianti sotto l'identificazione di orbifold

$$\begin{aligned} x(\sigma, \tau) &\rightarrow x(\sigma, \tau) + 2\pi n \tau, \\ x_0^-(\tau) &\rightarrow x_0^-(\tau) + 2\pi n \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} x(\sigma, \tau) + \frac{(2\pi n)^2}{2} \tau, \\ y(\sigma, \tau) &\rightarrow y(\sigma, \tau) + 2\pi n. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Le equazioni del moto per x_0^- e y_0^- fissano p^+ costante. Le equazioni del moto per p^+ portano a

$$P_{x^-} = p^+ \partial_\tau x_0^- = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma (\partial_\tau x \partial_\tau x + \partial_\sigma x \partial_\sigma x), \quad (6.5)$$

$$P_{y^-} = p^+ \partial_\tau y_0^- = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma (\partial_\tau y \partial_\tau y + \partial_\sigma y \partial_\sigma y)$$

dove abbiamo riscaldato σ nell'intervallo $[0, l = 2\pi\alpha'p^+]$ (d'ora innanzi useremo questo valore riscaldato). L'Hamiltoniana P_{x^-} non è invariante sotto l'identificazione di orbifold (6.4) ma P_{y^-} è invariante.

Un insieme completo di soluzioni delle equazioni del moto nel settore w -twistato può essere espresso in termine di oscillatori armonici:

$$x(\sigma, \tau) = \xi + \frac{p}{p^+} \tau + \frac{2\pi w \sigma \tau}{l} + i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\alpha_n}{n} e^{-\frac{2\pi i n(\sigma + \tau)}{l}} + \frac{\tilde{\alpha}_n}{n} e^{\frac{2\pi i n(\sigma - \tau)}{l}} \right\}. \quad (6.6)$$

La (6.5) ci dà x_0^- . La soluzione per y si ottiene semplicemente dalla trasformazione (6.2). Gli oscillatori obbediranno alle relazioni di commutazione canoniche.

La Lagrangiana in termini di x è simile alla Lagrangiana standard ed è sviluppata rispetto ai modi normali in maniera analoga allo sviluppo standard. Le differenze nei modi nulli sono che $J = -\xi p^+$ deve essere quantizzato e $\frac{2\pi w \sigma \tau}{l}$, termine di avvolgimento, ha una forma insolita.

L'evoluzione da $\tau = 0$ può essere analizzata usando sia x che y . La quantizzazione in termini di x è standard. La coordinata ξ , che non è soggetta all'identificazione sulla superficie singolare $\tau = 0$ in \mathcal{O} , deve stare sul reticolo $\xi = -\frac{J}{p^+}$. L'evoluzione dei modi non nulli è identica a quella della teoria di stringa standard. Il vincolo implica che $Jw + N - \tilde{N} = 0$ dove N e \tilde{N} sono gli operatori di numero.

In termini delle variabili y abbiamo una Hamiltoniana ad un sol valore, ma dipendente dal tempo

$$P_{y^-} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma \left[\frac{(2\pi\alpha' \Pi_y)^2}{\tau^2} + \tau^2 (\partial_\sigma y)^2 \right] = \frac{1}{2p^+} \left[\frac{J^2}{\tau^2} + \frac{w^2 \tau^2}{\alpha'^2} \right] + \frac{\pi}{l} \sum_{n>0} H_n(\tau) \quad (6.7)$$

dove $\Pi_y = \frac{1}{2\pi\alpha'} \tau^2 \partial_\tau y$ è l'impulso canonico e

$$H_n(\tau) = [\lambda_n (\alpha_n^\dagger \alpha_n + \tilde{\alpha}_n^\dagger \tilde{\alpha}_n) + \rho_n \alpha_n \tilde{\alpha}_n + \rho_n^* \alpha_n^\dagger \tilde{\alpha}_n^\dagger + \omega_n], \quad (6.8)$$

$$\lambda_n = 2 + \left(\frac{l}{2\pi n \tau} \right)^2, \quad (6.9)$$

$$\rho_n = - \left(\frac{l}{2\pi n \tau} \right)^2 \left[1 + \frac{4\pi i n \tau}{l} \right] e^{-\frac{4\pi i n \tau}{l}}, \quad (6.10)$$

$$\omega_n = n \lambda_n. \quad (6.11)$$

Individuiamo tre termini distinti all'interno dell'Hamiltoniana:

1. $\frac{J^2}{2p^+\tau^2}$ può essere letto come un'energia cinetica di rotazione;
2. $\frac{w^2\tau^2}{2p^+\alpha'^2}$ è l'energia di avvolgimento;
3. $\frac{\pi}{l} \sum_{n>0} H_n(\tau)$ è il contributo degli oscillatori.

L'equazione (6.7) può essere letta come l'espressione newtoniana dell'energia di una particella con massa $\mu = p^+$ che ruota intorno all'origine ad una distanza $r = \tau$ con momento angolare J :

$$H = \frac{J^2}{2\mu r^2} + V. \quad (6.12)$$

Notiamo ancora una volta che x^+ è una coordinata al tempo stesso radiale e temporale. Il problema di Schrödinger con l'Hamiltoniana (6.7) può essere risolto esplicitamente.

Il termine $\frac{\pi}{l} \sum_{n>0} n\lambda_n(\tau)$ nell'Hamiltoniana (6.7) rende necessaria la sottrazione di un termine logicamente divergente dipendente dal tempo. Questa sottrazione può essere interpretata come una sottrazione logaritmica nella definizione di y_0^- in termini di x_0^- e dell'operatore composto x^2 (come da definizione (6.2)). Il termine divergente può essere quindi riassorbito tramite una ridefinizione di $-p^+\partial_\tau y_0^-$ nella Lagrangiana.

6.2 Stringhe sulla brana nulla

Adottiamo le coordinate x^\pm , x e z e lavoriamo sempre in gauge di cono luce. Un aspetto vantaggioso è che la Lagrangiana di world-sheet è libera, ma d'altro canto avremo che p_x^{-1} non è invariante sotto la trasformazione di identificazione, e tale trasformazione rappresenta una simmetria di gauge del nostro sistema. Inoltre nei settori twistati le condizioni di periodicità dei campi dipendono dal tempo di world-sheet $x^+ = \tau$.

Analogamente a quanto fatto sopra scriviamo la Lagrangiana di cono luce

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -p^+\partial_\tau x_0^- + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\alpha' p^+ \partial_\tau x \partial_\tau x - \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_\sigma x \partial_\sigma x + \right. \\ & \left. + \alpha' p^+ \partial_\tau z \partial_\tau z - \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_\sigma z \partial_\sigma z \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

e scriviamo la condizione di invarianza rispetto a traslazioni di σ

$$\int d\sigma \left(\partial_\sigma x \partial_\tau x + \partial_\sigma z \partial_\tau z - \frac{1}{2\tau} \partial_\sigma x^2 \right) = 0. \quad (6.14)$$

¹Che svolge il ruolo di Hamiltoniana di world-sheet.

Le (6.14) e (6.13) *devono* essere invarianti sotto l'identificazione di orbifold, che assume la forma

$$\begin{aligned} x(\sigma, \tau) &\rightarrow x(\sigma, \tau) + 2\pi n\tau, \\ x_0^-(\tau) &\rightarrow x_0^-(\tau) + 2\pi n \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} x(\sigma, \tau) + \frac{(2\pi n)^2}{2}\tau, \\ z(\sigma, \tau) &\rightarrow z(\sigma, \tau) + 2\pi nR. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ancora in perfetta analogia col caso dell'orbifold parabolico, l'equazione del moto per x_0^- impone che p^+ sia costante, mentre quella per p^+ darà

$$P_{x^-} = p^+ \partial_\tau x_0^- = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma (\partial_\tau x \partial_\tau x + \partial_\sigma x \partial_\sigma x + \partial_\tau z \partial_\tau z) \quad (6.16)$$

dove è stato effettuato il riscaldamento $\sigma \rightarrow \frac{\sigma}{\alpha' p^+}$ e $l = 2\pi\alpha' p^+$.

Anche per la brana nulla un insieme completo di soluzioni per le equazioni del moto nel settore w -twistato è dato dalla (6.6); l'unica differenza sarà che qui J non è intero, ma lo è $J + kR$.

Sia nel caso dell'orbifold parabolico che in quello della brana nulla è immediato estendere la Lagrangiana di worldsheet al formalismo di Green-Schwarz. Per esempio prendiamo il modello su $\mathcal{O} \times R^7$ (per l'orbifold parabolico; $\mathcal{O} \times R^6$ per la brana nulla). Prima di quozientare rispetto a Γ dovremmo aggiungere alla Lagrangiana sette (sei) bosoni liberi x^i di worldsheet ed otto fermioni destrorsi S^a (nella teoria di tipo II devono esserci anche otto fermioni sinistrorsi e nella stringa eterotica anche dei gradi di libertà sinistrorsi corrispondenti ai gradi di libertà interni). È facile usare le simmetrie del problema per vedere che dopo l'azione di Γ i campi aggiunti x^i e S^a restano liberi e periodici attorno alla stringa.

6.3 Formulazione covariante

In questa sezione ricorreremo alla formulazione covariante della teoria di stringa e presteremo particolare attenzione ai settori twistati. Il caso in discussione è quello dell'orbifold parabolico, ma sono sufficienti lievi modifiche per passare alla brana nulla.

6.3.1 Algebra di scambio

L'azione covariante è

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \eta_{\mu\nu} (\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu - \partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu). \quad (6.17)$$

Nel settore twistato le condizioni al contorno sono $X(\sigma+2\pi, \tau) = e^{2\pi w \partial} X(\sigma, \tau)$, dove $w \in Z$. La soluzione generale delle equazioni del moto nel settore twistato può essere espressa in termini degli oscillatori

$$\hat{x}_L^\mu = i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-inu^+}, \quad \hat{x}_R^\mu = i \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{inu^-} \quad (6.18)$$

dove $u^\pm = \sigma \pm \tau$ e dei modi nulli

$$X_z(\tau) = \left(x_0^+ \alpha' p^+ \tau, \quad x_0 \alpha' p \tau, \quad x_0^- + \alpha' p^- \tau + w^2 \left(\alpha' p^+ \frac{\tau^3}{6} + x_0^+ \frac{\tau^2}{2} \right) \right) \quad (6.19)$$

come

$$X(\sigma, \tau) = e^{w\sigma \partial} X_z(\tau) + e^{wu^+ \partial} \hat{X}_L(u^+) + e^{wu^- \partial} \hat{X}_R(u^-). \quad (6.20)$$

L'insolita natura della soluzione (6.20) porta a delle nuove relazioni di commutazione tra gli oscillatori. La forma simplettica è standard:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma \delta x^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_\tau \delta x^\nu,$$

ma le relazioni di commutazione degli oscillatori divergono

$$\begin{aligned} [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] &= n \delta_{n+m,0} \left[\frac{1}{\eta + i \frac{w}{n} \eta \partial} \right]^{\mu\nu}, \\ [\tilde{\alpha}_n^\mu, \tilde{\alpha}_m^\nu] &= n \delta_{n+m,0} \left[\frac{1}{\eta - i \frac{w}{n} \eta \partial} \right]^{\mu\nu}, \\ [\alpha, \tilde{\alpha}] &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Le equazioni (6.21) portano ad una curiosa algebra di scambio. Un modo per vederlo è introdurre campi ad un sol valore $J_{\pm}(u^{\pm}) = e^{-wu^{\pm}}\mathcal{J}\partial_{\pm}X$ che soddisfano le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [j_{+}^{\mu}(u^{+}), j_{+}^{\nu}(u^{+\prime})] &= \pi i \alpha' \eta^{\mu\nu} \partial_{+} \delta^{(p)}(u^{+} - u^{+\prime}) + \pi i \alpha' \delta^{(p)}(u^{+} - u^{+\prime}) F^{\mu\nu}, \\ [j_{-}^{\mu}(u^{-}), j_{-}^{\nu}(u^{-\prime})] &= -\pi i \alpha' \eta^{\mu\nu} \partial_{-} \delta^{(p)}(u^{-} - u^{-\prime}) - \pi i \alpha' \delta^{(p)}(u^{-} - u^{-\prime}) F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

dove $F^{\mu\nu}$ è definita come

$$F \equiv w\mathcal{J}\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w \\ 0 & w & 0 \end{pmatrix}.$$

A differenza di $\partial_{\pm}X$, i J_{\pm} non sono campi conformi. Se ruotiamo per ottenere una segnatura Euclidea e consideriamo l'evoluzione radiale nel piano complesso, allora la (6.22) è equivalente ad un'algebra di scambio nel settore w -twistato. Per $|z_1| > |z_2|$ abbiamo

$$\partial x^{\mu_1}(z_1) \partial x^{\mu_2}(z_2) = \partial x^{\mu_2}(z_2) \partial x^{\mu_1}(z_1) + i \frac{w}{z_1 z_2} \left(e^{-iw \log z_1} \mathcal{J} e^{iw \log z_2} \mathcal{J} \eta^{-1} \right)^{\mu_1 \mu_2} \quad (6.23)$$

L'analisi svolta sopra si applica a qualsiasi orbifold ottenuto via un'azione lineare sulle coordinate spazio-temporali. Notiamo che l'algebra di scambio ricorda un'algebra di Heisenberg, suggerendo coordinate non commutative e quindi geometrie non commutative. Dal momento che è presente solo nei settori twistati con $w \neq 0$, e le stringhe avvolte sono leggere solo vicino a $x^{+} = 0$, è ragionevole pensare che ciò suggerisca una proprietà della regione vicina $\mathcal{F}_{x^{+}=0}$.

6.3.2 Funzione di partizione toroidale

Benché il tensore energia-impulso abbia nelle coordinate X la forma standard:

$$T_{++} = \frac{1}{\alpha'} \partial_{+} X^T \eta \partial_{+} X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{in(\tau + \sigma)}. \quad (6.24)$$

gli operatori di Virasoro hanno una realizzazione non standard dal momento che \mathcal{J} non è diagonalizzabile e quindi le soluzioni delle condizioni sullo stato fisico sono non banali. Ciononostante è facile costruire stati fisici nel settore di avvolgimento usando solo modi nulli del tipo

$$\sqrt{\frac{p^{+}}{ix_0^{+}}} e^{-p^{+}x_0^{-} - i \frac{m^2}{2p^{+}} x_0^{+} + i \frac{p^{+}}{2x_0^{+}} \left(x_0 + \frac{J}{p^{+}}\right)^2 - i \frac{w^2 (x_0^{+})^3}{6(\alpha')^2 p^{+}}}, \quad (6.25)$$

dove $m^2 = m^2 + \vec{p}_\perp^2$ con \vec{p}_\perp è l'impulso nella direzione trasversa e $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$. Così facendo si può mostrare che gli operatori tipo DDF

$$A_n = \oint \frac{dz}{2\pi} \left(\frac{2}{\alpha'} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\partial_z x + iw \log z \partial_z x^+ + \frac{w}{znk_0} \right] e^{ink_0 x^+}(z) \quad (6.26)$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

con $k_0 = \frac{2}{\alpha' p^+}$ sono ben definiti e sopravvivono alla proiezione di orbifold. Insieme con le loro controparti destrorse \tilde{A}_n essi agiscono sulla (6.25) generando una torre completa di stati di Fock con segnatura positiva, anche nei settori twistati.

Consideriamo l'integrale funzionale su un toro con la metrica di worldsheet

$$g = dz_+ dz_- = (d\sigma^1 + \tau_+ d\sigma^2)(d\sigma^1 + \tau_- d\sigma^2) \quad (6.27)$$

dove σ^1, σ^2 hanno periodo 1, mentre $\tau_\pm \in R$ per tori di segnatura Lorentziana e $\tau_+ = (\tau_-)^*$ per segnatura Euclidea. Per il momento consideriamo un toro Lorentziano.

Nella teoria di orbifold sommiamo sui settori di avvolgimento (w_a, w_b) intorno ai cicli a, b . In questi settori scriviamo il campo come

$$X(\sigma^1, \sigma^2) = e^{2\pi(\sigma^1 w_a + \sigma^2 w_b)} \mathcal{J} \sum_{n_a, n_b \in Z} X_{n_a, n_b} e^{2\pi i(n_a \sigma^1 + n_b \sigma^2)}. \quad (6.28)$$

Poiché la matrice \mathcal{J} è strettamente triangolare inferiore il contributo delle fluttuazioni quantistiche è indipendente di w_a, w_b e si trova che la funzione di partizione ad un loop per la teoria di stringa è:

$$Z = \int_{\mathcal{O}} \frac{d^3 x}{(2\pi\sqrt{\alpha'})^3} \sum_{w_a, w_b \in Z} e^{-i\pi \frac{(x^+)^2}{\alpha'} \frac{(w_b + w_a \tau_+)(w_b + w_a \tau_-)}{\tau_2}} \times$$

$$\times \frac{-i Z^{\text{ghost}} Z^\perp(w_a, w_b)}{(-i\tau_2)^{\frac{3}{2}} (\eta(\tau_+) \eta(-\tau_-))^3} \quad (6.29)$$

con $\tau_2 = \frac{(\tau_+ - \tau_-)}{2}$.

La formula può essere derivata anche effettuando il calcolo esplicito della traccia

$$Z = \text{Tr}_{\mathcal{H}} e^{2\pi i \tau_+ (L_0 - \frac{c}{24})} e^{-2\pi i \tau_- (\tilde{L}_0 - \frac{c}{24})} \quad (6.30)$$

dove \mathcal{H} è lo spazio degli stati di CFT per l'orbifold. In questa derivazione è essenziale che τ_\pm siano reali dal momento che L_0 non è limitato dal basso. Ancora una volta, il doppio ruolo di x^+ come variabile radiale e temporale comporta conseguenze interessanti. Nella (6.29) non abbiamo svolto l'integrazione sul modo zero $x^\mu = X_{00}^\mu$ del campo X . Questo è importante per la

corretta interpretazione dell'ampiezza: c'è un contributo dipendente dallo spazio-tempo alla costante cosmologica:

$$\Lambda(x^\mu) = \frac{i}{(2\pi\sqrt{\alpha'})^3} \sum_{w_a, w_b \in Z} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_+ \wedge d\tau_-}{(\tau_2)^2} e^{-i\pi \frac{(x^+)^2}{\alpha'} \frac{(w_b + w_a \tau_+)(w_b + w_a \tau_-)}{\tau_2^2}} \times \\ \times \frac{Z^\perp(w_a, w_b)}{(i\tau_2)^{\frac{1}{2}} (\eta(\tau_+) \eta(-\tau_-))}. \quad (6.31)$$

Adesso passiamo al toro con segnatura Euclidea.

L'equazione (6.31) diverge per $x^+ \rightarrow 0$. Supponiamo che Γ non agisca su C^\perp . Possiamo scrivere

$$\Lambda(x^+) = -\frac{1}{(2\pi)^3 \alpha' |x^+|} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\tau_2)^2} \frac{Z^\perp}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{w_a, \hat{w}_b \in Z} q^{\frac{1}{2}\alpha' p_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\alpha' p_R^2} \quad (6.32)$$

con $p_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{w}_b}{x^+} + w_a \frac{x^+}{\alpha'} \right)$ e $p_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{w}_b}{x^+} - w_a \frac{x^+}{\alpha'} \right)$. I modi con $\hat{w}_b = 0$, $w_a \neq 0$ sono modi di avvolgimento leggeri per $x^+ \rightarrow 0$. Quindi in tale limite avremo una divergenza del tipo

$$\Lambda(x^+) \sim \frac{1}{(x^+)^2} \times \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\tau_2)^2} \frac{Z^\perp}{|\eta(\tau)|^2}. \quad (6.33)$$

Questa divergenza può essere letta come una divergenza di volume nelle coordinate T-duali \tilde{y} di raggio $\frac{1}{x^+}$. Questo suggerisce che le stringhe a leggero avvolgimento “aprono” la singolarità trasformando il cono in una sorta di “tromba”. Bisogna però ancora tener conto delle interazioni a un loop e degli effetti di retroazione per concludere quale sia la fisica effettiva del problema. Le formule di cui sopra valgono anche per il formalismo NSR. In tal caso Z^\perp include i contributi dei fermioni NSR. Quando scegliamo la struttura di spin supersimmetrica sui fermioni spazio-temporali le fasi nella somma sulla struttura di spin e le funzioni di partizione stesse sono indipendenti da (w_a, w_n) e quindi (6.33) moltiplica per zero.

6.3.3 Estensione al caso della brana nulla

Nel caso della brana nulla, per trovare la funzione di partizione dovremo sommare sui settori

$$(X, z)(\sigma^1 + 1, \sigma^2) = \left(e^{2\pi w^a \partial} X, z + 2\pi R w^a \right) (\sigma^1, \sigma^2), \\ (X, z)(\sigma^1, \sigma^2 + 1) = \left(e^{2\pi w^b \partial} X, z + 2\pi R w^b \right) (\sigma^1, \sigma^2). \quad (6.34)$$

L'unica differenza con l'orbifold parabolico è che adesso

$$(x^+)^2 \rightarrow (x^+)^2 + R^2,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
Z = \int_{\mathcal{O}} \frac{d^3x}{(2\pi\sqrt{\alpha'})^3} \sum_{w_a, w_b \in Z} e^{-i\pi \frac{(x^+)^2 + R^2}{\alpha'} \frac{(w_b + w_a \tau_+)(w_b + w_a \tau_-)}{\tau_2}} \times \\
\times \frac{-i Z^{\text{ghost}} Z^\perp(w_a, w_b)}{(-i\tau_2)^{\frac{3}{2}} (\eta(\tau_+) \eta(-\tau_-))^3}. \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Osserviamo che facendo tendere $R \rightarrow \infty$ si ricade nel risultato valido per lo spazio piatto (in tale limite il nostro spazio diviene indipendente dal tempo). Analogamente operando il limite $R \rightarrow 0$ si ottiene la Z dell'orbifold parabolico.

Inoltre per valori finiti di R non troviamo più un insieme continuo di modi di avvolgimento, perché in questo caso lo spazio T-duale ha raggio finito $(\frac{\alpha'}{R})$.

6.4 Stringhe sull'“universo di Milne”

Consideriamo adesso la propagazione di stringa bosonica su $R^{1,1}/Z \times R^{24}$. In questo caso i settori twistati saranno definiti dalla condizione

$$X^\pm(\sigma + \pi) = e^{\pm 2\pi m \lambda} X^\pm(\sigma) \quad (6.36)$$

con m intero. Prendiamo $m = 1$ (per il caso generale basta sostituire a λ λm) e procediamo all'espansione in modi

$$\begin{aligned} X_L^\pm &= \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_n^\pm}{2(\pm\lambda - in)} e^{2(\pm\lambda - in)(t+\sigma)}, \\ X_R^\pm &= - \sum_n \frac{\alpha_n^\pm}{2(\pm\lambda + in)} e^{2(\pm\lambda + in)(t-\sigma)}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

La quantizzazione canonica si traduce nelle relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [\alpha_n^+, \alpha_m^-] &= \delta_{m+n}(m + i\lambda), \\ [\tilde{\alpha}_n^+, \tilde{\alpha}_m^-] &= \delta_{m+n}(m - i\lambda). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Gli oscillatori con frequenza positiva danno zero sullo stato fondamentale:

$$\tilde{\alpha}_n^\mu |0\rangle_L = 0, \quad \alpha_n^\mu |0\rangle_R = 0, \quad n > 0. \quad (6.39)$$

A partire dal tensore energia-impulso può essere determinata la forma degli operatori che generano l'algebra di Virasoro:

$$\begin{aligned} L_m &= - \sum_n \alpha_n^+ \alpha_{m-n}^- + \sum_n \alpha_n^i \alpha_{m-n}^i, \quad m \neq 0. \\ L_0 &= \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{2} (\alpha_0^+ \alpha_0^- + \alpha_0^- \alpha_0^+) + \frac{1}{2} p^2 + \sum_{n>0} [\alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \alpha_{-n}^+ \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^+] \end{aligned} \quad (6.40)$$

con espressioni analoghe per gli \tilde{L}_m .

Gli operatori soddisfano alla consueta regola di commutazione

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{26}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m}. \quad (6.41)$$

Capitolo 7

Interazioni a livello di grafo ad albero

7.1 Funzioni a tre e quattro punti nel caso dell'orbifold parabolico...

Consideriamo le interazioni a livello di grafo ad albero della teoria di stringa in gauge di cono luce. Il risultato più importante è che per impulsi generici le ampiezze sono finite, ma quando le particelle mediatrici hanno $p^+ = 0$ le ampiezze possono divergere. Queste divergenze sono associate con la singolarità in $x^+ = 0$.

Per grandi $|x^+|$ le distanze geodetiche tra i punti immagine vanno all'infinito; quindi lo spazio effettivamente si “apre” e dovrebbe essere possibile preparare stati entranti ed uscenti nel remoto passato e nel lontano futuro e considerare quindi elementi di matrice analoghi a quelli di $R^{1,2}$. Gli elementi di matrice S standard in $R^{1,2}$ sono espressi nella base di onde piane (5.4). Ma le onde piane non sono invarianti sotto l'azione dell'orbifold e non è semplice lavorare con le funzioni d'onda ottenute sommando sulle immagini. Una base migliore è quella di $J, \psi_{p^+, J}$: ricordiamo che usando questa base le proiezioni di orbifold corrispondono semplicemente a prendere J intero. È opportuno quindi studiare gli elementi di matrice S in $R^{1,2}$ nella base J . È una scelta un po' strana perché così facendo introduciamo una dipendenza temporale dovuta al fatto che p e J non commutano. Più esplicitamente la funzione d'onda $\psi_{p^+, J}$ di una particella libera è costretta ad essere localizzata in $\xi = -\frac{J}{p^+}$ in $x^+ = 0$, rompendo quindi l'invarianza di traslazione di x . In altre parole, gli stati on-shell entranti ed uscenti sono preparati in maniera tale da essere diretti verso i punti $\xi_i = -\frac{J_i}{p^+}$ (i è un indice di particella), cosicché i loro pacchetti d'onda siano localizzati nei rispettivi punti per $x^+ = 0$. In $R^{1,2}$ ciò significa porre domande tempo-dipendenti in un background indipendente dal tempo. Gli elementi di matrice S nella

base J sono osservabili in $R^{1,2}$ che hanno alcune caratteristiche proprie di ampiezze dipendenti dal tempo.

Dal momento che le $\psi_{p^+,J}$ sono ottenute da onde piane tramite una trasformata di Fourier le ampiezze nella base di J possono essere ottenute da quelle nella base standard dell'impulso semplicemente facendo la trasformata di Fourier. Una volta effettuato il calcolo di questi elementi di matrice S nello spazio piatto, è immediato calcolarli per l'orbifold restringendoci semplicemente a valori di J_i interi.

Nel prosieguo diamo i risultati per le ampiezze a livello di grafo ad albero a tre punti e a quattro punti per tachioni non twistati sull'orbifold.

Dalla (5.3) l'operatore di vertice per i tachioni nella base J può essere scritto come

$$V_{p_i^+, J_i}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p_i^+}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip\xi_i} e^{\vec{p}_i \cdot \vec{X}(\sigma, \tau)}, \quad \xi_i = -\frac{J_i}{p_i^+}. \quad (7.1)$$

dove i individua le particelle esterne, il fattore $\frac{1}{\sqrt{p_i^+}}$ è introdotto per normalizzare gli stati nella gauge di cono luce, e

$$e^{\vec{p}_i \cdot \vec{X}(\sigma, \tau)} = e^{-ip_i^+ x^- - ip_i^- x^+ + ip_i x + i\vec{p}_{\perp i} \cdot \vec{x}_{\perp}(\sigma, \tau)} \quad (7.2)$$

($\vec{p}_{\perp i}$ e $\vec{x}_{\perp i}$ indica vettori nelle dimensioni trasverse) è l'operatore di vertice on-shell standard del tachione con

$$p_i^- = \frac{p_i^2 + m_i^2}{2p_i^+} \quad (7.3)$$

e m_i ha esattamente lo stesso significato di prima (ovviamente ne introduciamo una per ogni particella).

Funzione a tre punti

L'ampiezza di tachione $1 \rightarrow 2+3$ nella base J nello "spazio di ricoprimento" è

$$A_3 = \frac{8\pi i g_s}{\alpha'} (2\pi)^{25} \delta(p_1^+ - p_2^+ - p_3^+) \delta(\vec{p}_{\perp 1} - \vec{p}_{\perp 2} - \vec{p}_{\perp 3}) \delta(J_1 - J_2 - J_3) w_3(J_i, p_i^+) \quad (7.4)$$

con

$$\begin{aligned} w_3(J_i, p_i^+) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx^+ \frac{1}{(-ix^+)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{i}{2}\alpha(p_i^+, m_i)x^+ - \frac{i}{2x^+}\mu_{23}(\xi_2 - \xi_3)^2} = \\ &= \begin{cases} 2\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cos(\sqrt{\alpha\mu_{23}}(\xi_2 - \xi_3)), & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Nella (7.5) α e μ_{23} sono

$$\alpha(p_i^+, m_i) = \frac{m_1^2}{p_1^+} - \frac{m_2^2}{p_2^+} - \frac{m_3^2}{p_3^+}, \quad (7.6)$$

$$\mu_{23} = \frac{p_2^+ p_3^+}{p_2^+ + p_3^+}.$$

Andando sull'orbifold, prendiamo gli J_i interi e sostituiamo quindi la delta di Dirac per J_i con δ_{J_1, J_2+J_3} ¹.

Queste ampiezze hanno un'interpretazione fisica semplice nella descrizione di cono luce della teoria. Come detto, possiamo interpretare il sistema come particelle non relativistiche; i ruoli di tempo, massa ed energia potenziale vengono svolti rispettivamente da

$$\tau = x^+, \quad \mu_i = p_i^+, \quad V_i = \frac{m_i^2}{2\mu_i}. \quad (7.7)$$

Leggendo le cose in questo modo, le funzioni $\psi_{p^+, J} = \sqrt{\frac{\mu}{i\tau}} e^{-i\mu x^- - iV\tau + i\frac{\mu}{2\tau}(x-\xi)^2}$ sono il propagatore non relativistico dalla posizione x nell'istante τ alla posizione $\xi = -\frac{J}{p^+}$ nell'istante $\tau = 0$ a meno di un fattore $e^{-i\mu x^- - iV\tau}$. È un altro modo di capire la focalizzazione in $x = \xi$ per $x^+ = 0$.

In termini dell'interpretazione (7.7) il processo di decadimento è descritto come una particella con massa μ_1 in due particelle di masse μ_2 e μ_3 . L'invarianza per traslazione di x^- comporta la conservazione di p^+ che può essere letta come conservazione della massa

$$\mu_1 = \mu_2 + \mu_3. \quad (7.8)$$

La coordinata del centro di massa delle particelle prodotte è $\frac{\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_2 + \mu_3}$. Dalla conservazione di J si ha che il valore di tale coordinata al "tempo" $x^+ = 0$ è proprio il valore di x_1 in quell'"istante" e che

$$\xi_1 = \frac{\mu_2 \xi_2 + \mu_3 \xi_3}{\mu_2 + \mu_3}. \quad (7.9)$$

È opportuno passare alla coordinata relativa e alla massa ridotta

$$\mu_{23} = \frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_2 + \mu_3}. \quad (7.10)$$

Anche la grandezza α definita nella (7.6) assume una forma suggestiva:

$$\alpha = 2(V_1 - V_2 - V_3) \quad (7.11)$$

¹Vale la pena di notare che l'ampiezza non è una funzione analitica di α . Questa mancanza di analicità negli "impulsi" è comune in problemi con spazi di arrivo non compatti come il sistema $c=1$, si veda ad esempio [7]. Nel nostro caso la direzione inhomogenea non è di tipo spazio ma di tipo luce.

come a dire che, a parte un fattore 2, α è la differenza tra le “energie potenziali” della particella entrante e delle particelle uscenti. Perché il decadimento sia permesso, α dovrà essere maggiore di 0, come già espresso dalla (7.5). Di qui la non analiticità dell’ampiezza.

Per concludere esprimiamo anche l’ampiezza (7.5) in queste grandezze

$$w_3(\mu_i, \xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} dx^+ \frac{1}{\sqrt{-ix^+}} e^{i(V_2+V_3-V_1)x^+ - i\frac{\mu_{23}(\xi_2-\xi_3)^2}{2x^+}}. \quad (7.12)$$

Come si vede l’integrazione è effettuata sul “tempo” x^+ . L’integrando ha due fasi: una è associata alla differenza delle energie potenziali, l’altra è la propagazione libera della coordinata relativa dal valore $\xi_2 - \xi_3$ a $x^+ = 0$ al valore 0 al momento dell’interazione.

Funzione a quattro punti

La funzione a quattro punti è un test della teoria interagente più significativo di quella a tre punti. Una particella che si avvicina alla singolarità è *blue shifted*, e l’accoppiamento col gravitone diviene estremamente grande. È quindi ragionevole aspettarsi una grande retroazione della geometria che potrebbe manifestarsi come divergenza della funzione a quattro punti. Si può fare un ragionamento analogo a proposito delle funzioni di correlazione dell’operatore (7.1) nello spazio di ricoprimento, dal momento che la focalizzazione in ξ_i comporta una grande densità di energia e la possibilità di una grande retroazione. Una spia di questo fatto sarebbe la mancata convergenza della trasformata di Fourier dell’ampiezza di Virasoro-Shapiro². Studiamo dunque tale trasformata in dettaglio.

La trasformata di Fourier dell’ampiezza può essere scritta come³

$$A_4 = \frac{8(2\pi)^3 ig_s^2}{\alpha'} \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{dp_i}{\sqrt{2\pi p_i^+}} \right) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) e^{iF} \delta(E) A(s, t) \quad (7.13)$$

dove sono state omesse le funzioni delta su p^+ e $\vec{p}_{\perp 1}$. Esplicitiamo le varie grandezze che entrano nella (7.13):

$$\begin{aligned} A(L_s, L_t, L_u) &= \pi \frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha'}{4}L_s\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha'}{4}L_t\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha'}{4}L_u\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha'}{4}L_s\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha'}{4}L_t\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha'}{4}L_u\right)} = \\ &= - \left(\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha'}{4}L_t\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha'}{4}L_u\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha'}{4}L_s\right)} \right)^2 \frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha'\pi}{4}L_t\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha'\pi}{4}L_u\right)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha'\pi}{4}L_s\right)}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

²Per una presentazione dell’ampiezza di Virasoro-Shapiro rimandiamo a [2].

³In questa prima formula scriviamo l’ampiezza come funzione delle sole s e t , che sono le variabili da cui effettivamente dipende; le grandezze L_s, L_t, L_u servono ad esplicitarne la forma.

$$E = p_1^- + p_2^- - p_3^- - p_4^- = \frac{p_1^2 + m_1^2}{2p_1^+} + \frac{p_2^2 + m_2^2}{2p_2^+} - \frac{p_3^2 + m_3^2}{2p_3^+} - \frac{p_4^2 + m_4^2}{2p_4^+},$$

$$F = p_1\xi_1 + p_2\xi_2 - p_3\xi_3 - p_4\xi_4$$

$$L_s = s - m^2 + i\epsilon = 2(p_1^+ + p_2^+)(p_1^- + p_2^-) - (p_1 + p_2)^2 - m_s^2 + i\epsilon,$$

$$L_t = t - m^2 + i\epsilon = 2(p_1^+ - p_3^+)(p_1^- - p_3^-) - (p_1 - p_3)^2 - m_t^2 + i\epsilon,$$

$$L_u = u - m^2 + i\epsilon = 2(p_1^+ - p_4^+)(p_1^- - p_4^-) - (p_1 - p_4)^2 - m_u^2 + i\epsilon,$$

$$m_s^2 = m^2 + (\vec{p}_{\perp 1} + \vec{p}_{\perp 2})^2, \quad m_t^2 = m^2 + (\vec{p}_{\perp 1} - \vec{p}_{\perp 3})^2, \quad m_u^2 = m^2 + (\vec{p}_{\perp 2} - \vec{p}_{\perp 3})^2.$$

Gli integrali sugli impulsi possono essere ridotti ad uno solo

$$A_4 = \frac{8(2\pi)^2 i g_s^2}{\alpha'} \delta(J_1 + J_2 - J_3 - J_4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{|q|} e^{\frac{i}{2}(q\xi_- + \frac{\alpha\xi_+}{q})} A(L_s, L_t, L_u) \quad (7.15)$$

dove

$$L_s = (p_1^+ + p_2^+) \left(q_+^2 + \frac{m_1^2}{p_1^+} + \frac{m_2^2}{p_2^+} \right) - m_s^2 + i\epsilon,$$

$$L_t = (p_3^+ - p_1^+) \left(\frac{m_3^2}{p_3^+} - \frac{m_1^2}{p_1^+} \right) - m_t^2 + i\epsilon - \mu_{12} \left(\sqrt{\frac{p_3^+}{p_1^+}} q_+ - \sqrt{\frac{p_4^+}{p_2^+}} q_- \right)^2 + i\epsilon,$$

$$L_u = (p_4^+ - p_1^+) \left(\frac{m_4^2}{p_4^+} - \frac{m_1^2}{p_1^+} \right) - m_u^2 + i\epsilon - \mu_{12} \left(\sqrt{\frac{p_4^+}{p_1^+}} q_+ - \sqrt{\frac{p_3^+}{p_2^+}} q_- \right)^2 + i\epsilon,$$

$$\xi_{\pm} = \sqrt{\mu_{12}}(\xi_1 - \xi_2) \pm \sqrt{\mu_{34}}(\xi_3 - \xi_4), \quad q_{\pm} = \frac{1}{2} \left(q \pm \frac{\alpha}{q} \right),$$

$$\mu_{12} = \frac{p_1^+ p_2^+}{p_1^+ + p_2^+}, \quad \mu_{34} = \frac{p_3^+ p_4^+}{p_3^+ + p_4^+}, \quad \alpha = \frac{m_3^2}{p_3^+} + \frac{m_4^2}{p_4^+} - \frac{m_1^2}{p_1^+} - \frac{m_2^2}{p_2^+}.$$

Questo è un integrale sui vari valori di s con i corrispondenti valori di t e u . L'integrale passa attraverso i poli nel canale s . La prescrizione $i\epsilon$ fa sì che non ci siano divergenze. Questi poli rendono però l'ampiezza una funzione non analitica degli impulsi esterni \vec{p}_i . Questa non analiticità è analoga a quella osservata per la funzione a tre punti e si presenta per grandi valori $|x^+|$.

Analizziamo il comportamento dell'ampiezza per generici valori dei p_i^+ . Dalla forma della (7.15) si capisce che possibili divergenze e non analiticità possono presentarsi solo per $q = 0, \pm\infty$ che corrispondono a $x^+ \sim 0$. Ciascuno di questi limiti, quando si prendano p_i^+ generici, corrisponde a considerare scattering con s , t e u grandi ma con rapporti costanti. Le proprietà dell'ampiezza di Virasoro-Shapiro ci assicurano che in tale limite l'ampiezza tende a zero in maniera sufficientemente rapida da garantire la convergenza

per ogni ξ_i . Quindi la dipendenza da ξ_i è analitica.⁴ Purtroppo ci sono dei valori particolari di p_i^+ per i quali si presenta una divergenza. Prendiamo ad esempio $p_3^+ - p_1^+ = p_2^+ - p_4^+ = p_t^+ \sim 0$. Nel caso di grande q la (7.15) è nella regione di Regge⁵ e $A(L_s, L_t, L_u) \sim q^{-\alpha' m_t^2} = q^{4-\alpha'(\vec{p}_{\perp 3} - \vec{p}_{\perp 1})^2}$. Se richiediamo anche che $J_3 - J_1 = 0$ avremo $\xi_1 = \xi_3$ e $\xi_2 = \xi_4$; l'integrazione su q dà quindi una divergenza per $\alpha'(\vec{p}_{\perp 3} - \vec{p}_{\perp 1})^2 < 4$. Possiamo quindi concludere che⁶ $A_4 \sim (p_t^+)^{-4+\alpha'(\vec{p}_{\perp 3} - \vec{p}_{\perp 1})^2}$, e questo comporta la divergenza della sezione d'urto totale.

Un'interpretazione suggestiva è la seguente: nel limite di Regge l'ampiezza di Virasoro-Shapiro, così come quella di Veneziano, ha la forma $A(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$: nel nostro caso $\alpha(t) = 2 - \frac{1}{2}\alpha'(\vec{p}_{\perp 3} - \vec{p}_{\perp 1})^2 \equiv 2 - \frac{1}{2}\alpha'\vec{p}_{\perp t}^2$. Sappiamo anche che per scambio di una particella di spin J nel canale t l'ampiezza va come s^J .⁷ Possiamo dunque leggere $\alpha(t)$ come uno spin efficace, e notare che per $\vec{p}_{\perp t} = 0$ la particella scambiata potrebbe essere il *gravitone*.

La divergenza è dovuta allo scambio di particelle con $p^+ = 0$ nei canali t e u . Questo potrebbe significare che la teoria perturbativa non è più valida e che dovremmo passare ad una teoria quantistica non perturbativa di stringa.

⁴L'analiticità della trasformata dell'ampiezza è uno dei miglioramenti che la teoria di stringa apporta rispetto alla teoria di campo, che non godrebbe di tale proprietà.

⁵Cioè quando $s \rightarrow \infty$ e t è fissato.

⁶A meno di correzioni logaritmiche.

⁷Sempre nel limite di Regge.

7.2 ...e della brana nulla

Consideriamo anche in questo caso le ampiezze per i modi non twistati. Vedremo che costruendo gli operatori di vertice con le autofunzioni di J la situazione è perfettamente analoga a quella dell'orbifold parabolico, mentre se si usano i pacchetti U la divergenza non scompare ma cambia "aspetto". L'operatore di vertice per il tachione è, usando le autofunzioni di J ,

$$V_{p^+, J, n, p_\perp}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p^+}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ip\xi} e^{i\vec{p}\cdot\vec{X}(\sigma, \tau)}, \quad \xi = -\frac{J}{p^+} \quad (7.16)$$

con

$$e^{i\vec{p}\cdot\vec{X}(\sigma, \tau)} = e^{-ip^+x^- - ip^-x^+ + ipx + ikz + i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp(\sigma, \tau)}. \quad (7.17)$$

Vediamo che effettuando le sostituzioni

$$\vec{p}_\perp \rightarrow (k_i, \vec{p}_\perp) \quad \text{dove } k_i = \frac{r_i - J_i}{R} \quad (7.18)$$

passiamo esattamente dagli operatori (e quindi anche dalle ampiezze) per l'orbifold parabolico a quelli (quelle) per la brana nulla. L'ampiezza a quattro punti non presenta divergenze per configurazioni cinematiche generiche, ma c'è una divergenza per la configurazione

$$p_t^+ = 0, \quad J_t = 0, \quad \alpha' p_\perp^2 t^2 + \alpha' (k_1 - k_3)^2 < 4. \quad (7.19)$$

Per comprendere cosa succede quando adottiamo come operatori di vertice i pacchetti d'onda B , esaminiamo ancora la (7.15): nell'ampiezza si distinguono due termini, uno dominante per $|q| \rightarrow \infty$ e l'altro per $|q| \rightarrow 0$. Anche nel caso della brana nulla ci sarà un termine dominante per $\sigma \rightarrow \infty$ (σ è la nostra nuova variabile di integrazione) e nel limite di Regge esso avrà la forma

$$I_+ \sim \int \frac{d\sigma}{|\sigma|} e^{i\frac{\sigma}{\sqrt{\mu_{12}}}(J_3 - J_1)} s^{-\frac{1}{2}\alpha' m_t^2} \left(\Gamma\left(\frac{\alpha'}{4} m_t^2\right) \right)^2 \text{sen}\left(\frac{\alpha'\pi}{4} m_t^2\right). \quad (7.20)$$

Questo è proprio il termine che diverge per la configurazione (7.19). (Le variabili di Mandelstam sono funzioni della variabile di integrazione σ ; per i nostri intenti è sufficiente sapere che $s = (p_1^+ + p_2^+)\sigma^2$ + termini dipendenti solo dagli impulsi esterni, come del resto si può ricavare dalle (7.15). Nel momento in cui passiamo ai pacchetti d'onda U sembrerebbe scorretto usare questa espressione, perché effettuiamo l'integrazione su J_i , e sappiamo che J_i e k_i sono vincolati tra di loro dalla condizione di quantizzazione: nel limite $p_t^+ \approx 0$ t è

$$t \approx -(k_1 - k_3)^2 - \vec{p}_\perp^2 \quad (7.21)$$

e dunque non avrebbe senso considerare t fisso (limite di Regge). Ciononostante ricordiamo che adesso all'interno dell'integrale c'è il fattore $\prod_{i=1}^4 f_i(J_i)$

che riduce notevolmente il dominio di integrazione (tagliando la regione all'infinito), e questo ci permette di usare ancora la (7.20). L'integrazione nei J_i può dare divergenza (avendo preso $J_3 - J_1 = J_t \approx 0$) quando $r_1 = r_3$ e $\vec{p}_{\perp t} \approx 0$. Questo implica $t \approx 0$ e quindi, esplicitando s in termini di σ , avremo⁸

$$A_U \sim \int dJ_t \int \frac{d\sigma}{|\sigma|} \frac{1}{\frac{J_t^2}{R^2} + \vec{p}_{\perp t}^2} e^{i\frac{\sigma}{\sqrt{\mu_{12}}} J_t} |\sigma|^{4 - \frac{\alpha'}{R^2} J_t^2 - \alpha' \vec{p}_{\perp t}^2}. \quad (7.22)$$

Anche in questo caso possiamo interpretare la divergenza come associata allo scambio di un gravitone nel canale t , leggendo $\frac{1}{\frac{J_t^2}{R^2} + \vec{p}_{\perp t}^2}$ ⁹ come propagatore del gravitone. La novità è che per $\vec{p}_{\perp t} = 0$ l'integrando soffre sì di una divergenza *ultravioletta* per $\sigma \rightarrow \infty$, ma anche di una *infrarossa* a causa del J_t al denominatore.

L'integrazione su J_t risolve la divergenza ultravioletta e si potrebbe “prescrivere” di effettuarla prima. Ma in questo modo non si riesce comunque a eliminare la divergenza in $\vec{p}_{\perp t} = 0$: come effetto dell'integrazione, anzi, questa divergenza diverrà più grande¹⁰.

Il passaggio ai pacchetti d'onda ha dunque ristretto la divergenza al caso $p_t^+ = r_3 - r_1 = \vec{p}_{\perp t} = 0$ ma non l'ha rimossa.

⁸Il comportamento in $J_1 = J_3$ dell'integrando non sarà influenzato dalle f_i con $i = 1, 3$ purché il loro prodotto non si annulli in tal punto.

⁹Che nel limite ha origine dalla funzione Γ e dal seno.

¹⁰Nel limite $\alpha' \rightarrow 0$, ad esempio, l'ampiezza va come $\frac{1}{|\vec{p}_{\perp t}|^5}$.

7.3 Analisi delle diverse divergenze nei due casi

La questione che si potrebbe porre dinanzi a tali risultati è la seguente: conosciamo vari casi nei quali le ampiezze divergono, in che senso questi sono speciali? Un esempio tipico sono i poli associati a particelle intermedie *on shell*, singolarità che si manifestano per x^+ grande. Nel nostro caso però né i fondi né gli stati sono invarianti rispetto alle trasformazioni generate da p^- e questo comporta che le singolarità non siano più poli e che l'ampiezza manifesti un comportamento non analitico (7.5).

Per l'orbifold parabolico (e per la brana nulla purché si utilizzino autostati di J) abbiamo visto che c'è una singolarità per $p_t^+ = J_t = 0$ se $\vec{p}_{\perp t}^2$ è inferiore ad un determinato valore. Potremmo (a buon diritto) classificare questa divergenza come una divergenza infrarossa ma dobbiamo tener conto di due peculiarità:

- Queste divergenze si presentano nel limite di Regge, e possono quindi essere considerate singolarità ultraviolette
- La divergenza non è ristretta al punto $\vec{p}_{\perp t} = 0$ ma è presente per un intervallo di valori: non può essere trattata in maniera standard

La condizione $p_t^+ = J_t = 0$ corrisponde alla focalizzazione delle particelle 1 e 3 nello stesso punto all'istante $x^+ = 0$: c'è quindi da attendersi una grande retroazione lineare della metrica che inficia la teoria perturbativa.

Vale la pena di ripetere che c'è però una differenza fondamentale tra i due fondi: uno presenta una singolarità, l'altro no. In effetti nel caso della brana nulla possiamo ricorrere ai pacchetti d'onda U , ed otteniamo che l'ampiezza diverge solo nel caso $\vec{p}_{\perp t} \rightarrow 0$. Fermo restando che questa singolarità dell'ampiezza è peculiare per la sua doppia natura UV/IR, potrebbe essere comunque possibile rimuoverla coi metodi standard¹¹ purché vi siano un numero sufficiente di dimensioni trasverse non compatte. È certo il contrario, e cioè che se non ci sono dimensioni trasverse non compatte non è possibile rimuovere la singolarità ($\vec{p}_{\perp t}$ assume valori discreti)¹².

Per quanto riguarda l'orbifold parabolico il fallimento della teoria perturbativa è da imputare alla retroazione dovuta al grande blue-shift della particella nei pressi della singolarità. Amplieremo il discorso nelle conclusioni, cercando di capire quali possono essere le conseguenze di un tale comportamento.

¹¹H. Liu, G. Moore e N. Seiberg hanno formulato questa congettura.

¹²È da sottolineare che qui il fondo è regolare e la singolarità dell'ampiezza comunque ineliminabile.

Capitolo 8

Instabilità della singolarità degli orbifold

Un'ulteriore questione da affrontare riguarda la stabilità delle singolarità degli orbifold qui considerati. Cosa succede quando si aggiunge anche una sola particella? Come vedremo, la presenza della singolarità comporta un'amplificazione infinita dell'energia della particella, e l'universo tende a collassare in una singolarità di tipo spazio. Bisogna sottolineare però che questo risultato non inficia il modello: il fatto è che non possediamo ancora gli strumenti per trattare il caso di curvatura forte.

8.1 Studio della stabilità in relatività generale

Discutiamo a livello di relatività generale cosa succede quando introduciamo una particella nei nostri spazi. Dal momento che ogni punto dell'orbifold corrisponde ad una collezione infinita di punti dello spazio di partenza, introdurre una particella nell'orbifold sarà equivalente ad introdurne infinite in quello spazio. Inoltre per identificare i punti abbiamo usato dei boost (in certi casi unitamente con altre trasformazioni); poiché l'applicazione di tali boost (sempre più intensi) rende trascurabile la massa della particella, considereremo particelle non massive.

Assumiamo che lo spazio abbia D dimensioni. Consideriamo due particelle senza massa, e chiamiamo b il parametro d'impatto nel sistema del centro di massa, s l'energia totale al quadrato nel medesimo sistema. In quattro dimensioni la condizione perché le particelle arrivino ad una distanza inferiore del loro raggio di Schwarzschild e formino un buco nero è

$$G\sqrt{s} > b \tag{8.1}$$

a meno di coefficienti di ordine uno. Per vederlo, si può partire dalla metrica di Aichelburg-Sexl, generata da una singola particella senza massa¹:

$$ds^2 = -dz^+dz^- + dx^2 + dy^2 - 4\mu\log(x^2 + y^2)\delta(z^+)(dz^+)^2 \quad (8.2)$$

che è un'onda gravitazionale di shock, con curvatura nulla ovunque tranne che in $z^+ = 0$. Proprio il fatto che davanti all'onda di shock lo spazio sia piatto facilita lo studio dell'urto: infatti, anche se la relatività generale è una teoria non lineare, questa circostanza permette di sovrapporre semplicemente due onde di shock ed ottenere così la descrizione dell'urto nel sistema del centro di massa. Cosa succeda in dettaglio dopo l'urto non è ancora noto; tuttavia se la (8.1) è soddisfatta, si genera una superficie intrappolata e quindi si formerà una singolarità (si veda Appendice 2). Se si assume l'ipotesi del censore cosmico, la singolarità dovrà trovarsi all'interno di un buco nero. Questo in quattro dimensioni; per $D > 4$ il ragionamento può essere ripetuto, partendo dalla metrica corrispondente di Aichelburg-Sexl,

$$ds^2 = -2dy^+dy^- + dy^2 - \frac{\mu}{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^{\frac{D-4}{2}}}\delta(y^+)(dy^+)^2. \quad (8.3)$$

In questo caso la generazione di superfici intrappolate è stata verificata solo per $b = 0$; vi sono però motivi di sospettare che per la formazione del buco nero sia sufficiente

$$G\sqrt{s} > b^{D-3}, \quad (8.4)$$

che è la generalizzazione della (8.1).

Nella disussione successiva sarà necessario conoscere l'espressione dettagliata del parametro di impatto; consideriamo dunque le due geodetiche nulle

$$X_1^\mu(\lambda_1) = P_1^\mu\lambda_1 + c_1^\mu, \quad X_2^\mu(\lambda_2) = P_2^\mu\lambda_2 + c_2^\mu. \quad (8.5)$$

proiettiamole sullo spazio ortogonale a $(P_1 + P_2)^\mu$ ottenendo

$$\begin{aligned} X_{1\perp}^\mu(\lambda_1) &= \frac{1}{2}(P_1 - P_2)^\mu\lambda_1 + c_1^\mu - (P_1 + P_2)^\mu \frac{c_1 \cdot (P_1 + P_2)}{2P_1 \cdot P_2}, \\ X_{2\perp}^\mu(\lambda_2) &= -\frac{1}{2}(P_1 - P_2)^\mu\lambda_1 + c_2^\mu - (P_1 + P_2)^\mu \frac{c_2 \cdot (P_1 + P_2)}{2P_1 \cdot P_2}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Per calcolare il parametro di impatto è sufficiente prendere la norma della differenza di queste espressioni: tale risultato dipenderà da $\lambda_1 + \lambda_2$ e quindi minimizziamo rispetto a tale parametro ottenendo

$$b^2 = C^2 - \frac{2(P_1 \cdot C)(P_2 \cdot C)}{P_1 \cdot P_2}. \quad (8.7)$$

¹Per la derivazione rimandiamo all'articolo originale degli autori[17]; l'idea fondamentale è prendere la metrica di Schwarzschild, operare un boost e far tendere la velocità di boost a c . Il limite non è però banale.

dove $C = c_1 - c_2$.

Il parametro di impatto sembrerebbe dipendere dalla scelta di c_1^μ e c_2^μ , che sono due punti arbitrari delle geodetiche. Ma in effetti questo non è vero, perché traslando C^μ di un qualsiasi multiplo di P_1^μ o P_2^μ (cioè scegliendo altri due punti delle geodetiche) b resta invariato.

8.1.1 Universo di Milne

Analizzeremo adesso in dettaglio i singoli spazi. L'universo di Milne era ottenuto da uno spazio Minkowskiano bidimensionale quotientato con un boost, moltiplicato per un opportuno spazio trasverso piatto. Il boost era

$$(x^+, x^-, \mathbf{x}) \approx (e^{2\pi\alpha n} x^+, e^{-2\pi\alpha n} y x^-, \mathbf{x}) \quad (8.8)$$

dove n è un intero. Come abbiamo già detto, introdurre una particella in questo universo equivale ad introdurne una collezione infinita nello spazio che abbiamo quotientato; l'impulso della particella e quello della sua n -esima immagine saranno legati dalla relazione

$$(p^+, p^-, \mathbf{p}) \approx (e^{2\pi\alpha n} p^+, e^{-2\pi\alpha n} p^-, \mathbf{p}). \quad (8.9)$$

Vogliamo quindi calcolare energia totale e parametro d'impatto considerando una particella e la sua n -esima immagine. Per comodità conveniamo che $\lambda = 0$ in $X^+ = 0$; ciò implica che $c^+ = 0$. In questo modo nella (8.7) il termine C^2 non dipenderà da n ; per quanto riguarda l'altro addendo

$$\begin{aligned} P \cdot C &= -P^+ c^- (1 - e^{-2\pi\alpha n}) + \dots, \\ P_n \cdot C &= -P^+ c^- e^{2\pi\alpha n} (1 - e^{-2\pi\alpha n}) + \dots, \\ P \cdot P_n &= -P^+ P^- e^{2\pi\alpha n} - P^+ P^- e^{-2\pi\alpha n} + \dots \end{aligned} \quad (8.10)$$

(abbiamo riportato solo i termini dipendenti da n), quindi per n grandi il parametro d'impatto tende ad un valore finito.

L'ultima formula ci dà anche la dipendenza da n dell'energia totale:

$$s \approx \cosh(2\pi\lambda n) \quad (8.11)$$

e questo ci assicura che la condizione (8.4) è soddisfatta per infinite coppie di particelle.

Utilizzando la dipendenza del raggio di Schwarzschild dall'energia totale

$$R_s^{D-3} \approx G s^{\frac{1}{2}} \quad (8.12)$$

troviamo che nel nostro caso

$$R_s^{D-3} \approx G (p^+ p^-)^{\frac{1}{2}} e^{2\pi\alpha n} \quad (8.13)$$

e quindi il buco nero diverrà arbitrariamente grande, inghiottendo l'intero spazio in un Big Crunch². Tuttavia la collisione tra le due onde di shock modifica lo spazio tempo solo nella regione futura alla loro intersezione. Come possiamo essere certi che la singolarità si trovi nel futuro dell'intersezione (e che quindi questo meccanismo di instabilità entri in azione prima del raggiungimento della singolarità)?

Dobbiamo determinare quale sia l'intersezione dei due shock. Le condizioni sono

$$P \cdot (x - c) = 0, \quad P_n \cdot (x - c_n) = 0 \quad (8.14)$$

e per invarianza di Lorentz $P \cdot c = P_n \cdot c_n$. Condizione necessaria sarà dunque che

$$(P_n - P) \cdot x = 0 \quad (8.15)$$

ed esplicitando nel nostro caso otteniamo

$$p^+ x^- = p^- x^+ e^{-2\pi\alpha n}. \quad (8.16)$$

La prima importante osservazione da fare è che x^+ e x^- dovranno avere lo stesso segno, quindi l'intersezione non può avvenire che all'interno del cono luce (e non nella regione "patologica" all'esterno di esso). Sostituiamo adesso nella prima delle (8.14) per trovare

$$(e^{-2\pi\alpha} + 1)p^- x^+ = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - P \cdot c; \quad (8.17)$$

se il membro a destra è negativo la singolarità appartiene al futuro dell'intersezione per qualsiasi valore di n . Se invece il termine a destra è positivo, la singolarità appartiene al passato dell'intersezione, ma con una semplice sostituzione si può verificare che (per n positivi) la particella incontra il fronte d'onda della sua n -esima immagine per valori *negativi* del parametro affine: la particella raggiunge comunque una regione di forte curvatura prima di raggiungere la singolarità.

8.1.2 Orbifold parabolico

Nel caso dell'orbifold parabolico, abbiamo effettuato l'identificazione

$$X = \begin{pmatrix} x^+ \\ x \\ x^- \end{pmatrix} \approx X_n = \begin{pmatrix} x^+ \\ x + nx^+ \\ x^- + nx + \frac{1}{2}n^2 x^+ \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

²L'analogia riscontrata tra la geometria all'interno di un buco nero e quella di un universo che collassa diviene così esatta nel momento in cui le dimensioni del buco nero tendono a infinito.

su uno spazio Minkowskiano tridimensionale. Gli impulsi sono soggetti ad un'identificazione analoga

$$P = \begin{pmatrix} p^+ \\ p \\ p^- \end{pmatrix} \approx P_n = \begin{pmatrix} p^+ \\ p + np^+ \\ p^- + np + \frac{1}{2}n^2p^+ \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Ovviamente lo spazio completo è dato dal prodotto di questo orbifold per uno spazio piatto trasverso di $D - 3$ dimensioni.

Seguendo il ragionamento di prima, vogliamo determinare la dipendenza di s e b da n considerando una particella e la sua n -esima immagine; ancora una volta poniamo il parametro affine della geodetica $\lambda = 0$ in $X^+ = 0$, per avere $c^+ = 0$. Così il termine C^2 della (8.7) sarà ancora indipendente da n . Il numeratore dell'altro addendo della formula sarà un $O(n^2)$, così come

$$s = -2P \cdot P_n = n^2(p^+)^2 + O(n). \quad (8.20)$$

La situazione è analoga alla precedente: l'energia cresce (ora quadraticamente) con n , mentre il parametro d'impatto tende ad un valore finito. Quindi si genererà un buco nero, il cui raggio di Schwarzschild ha una dipendenza lineare³ in n .

Vediamo adesso se la singolarità si trova nel futuro dell'intersezione delle onde di shock. L'equazione (8.15) assume nello specifico la forma

$$\left(np + \frac{n^2p^+}{2} \right) x^+ = np^+x. \quad (8.21)$$

A seconda del segno di x possiamo scegliere n negativo o positivo in maniera da rendere x^+ negativo. Come abbiamo visto, ogni evento $x^+ > 0$ sta nel futuro di ogni evento con $x^+ < 0$, quindi la singolarità sta nel futuro dell'intersezione.

³Si potrebbe pensare che le intersezioni per n piccoli instaurino un regime non lineare che impedisce la formazione di buchi neri più grandi in corrispondenza di valori maggiori di n . Ma questo non è vero, perchè le superfici intrappolate per n maggiori si formano a raggi maggiori, e c'è una separazione di tipo spazio tra queste e la regione di non linearità.

8.2 La brana nulla

Il caso della brana nulla si distingue perché lo spazio non possiede singolarità: cosa succede introducendo una particella? Ricordiamo che l'identificazione operata qui è

$$X = \begin{pmatrix} x^+ \\ x \\ x^- \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \approx X_n = \begin{pmatrix} x^+ \\ x + nx^+ \\ x^- + nx + \frac{1}{2}n^2x^+ \\ \mathbf{x} + n\mathbf{d} \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

Il fatto notevole è che mentre la dipendenza di s non cambia, b adesso cresce linearmente in n a causa dell'identificazione via traslazione sulle dimensioni trasverse. Adesso nella (8.4) i due termini dipendono entrambe da n .

Per comprendere cosa succede consideriamo una catena di masse puntiformi, tutte uguali, di massa M con spaziatura $|\mathbf{d}|$ (le masse sono in quiete l'una rispetto all'altra). Questa configurazione è analoga a quella di una singola massa che si trovi nel punto di massima contrazione della brana nulla, *eccetto* che per la dipendenza dell'energia totale di n particelle da n : infatti nel caso che stiamo discutendo l'energia cresce linearmente (e quindi $s \approx M^2n^2$), mentre nella brana nulla $s_{\text{tot}} \approx n^4(p^+)^2$ (basta effettuare la somma degli impulsi per verificarlo, e la ragione è che le particelle sono "boostate").

Se $|\mathbf{d}| < R_s$ (dove $R_s^{D-3} \approx GM$) si formerà un'orizzonte cilindrico degli eventi (cioè una *stringa nera*). Tuttavia il numero di masse che contribuirà al buco nero sarà finito o infinito a seconda delle dimensioni: infatti se n masse contribuiscono al buco nero il raggio di Scharzschild sarà

$$R_s^{D-3} \approx GMn \quad (8.23)$$

e il tratto di catena coinvolto sarà lungo $n|\mathbf{d}|$. Quindi per

$$(n|\mathbf{d}|)^{D-3} > GMn \quad (8.24)$$

le masse non contribuiranno più a quel buco nero; nel caso di $D = 4$ vediamo che la condizione è automaticamente soddisfatta se $|\mathbf{d}| < GM$, e quindi tutta la catena è coinvolta, mentre per $D > 4$ ci sarà un valore critico

$$R_{tr}^{D-4} \approx \frac{GM}{|\mathbf{d}|}, \quad (8.25)$$

che chiameremo raggio trasverso della stringa nera.

Nel caso della brana nulla la situazione è analoga; adesso

$$R_s^{D-3} \approx Gn^2p^+ \quad (8.26)$$

quindi per trovare il raggio trasverso determiniamo n dalla condizione

$$(n|\mathbf{d}|)^{D-3} = Gn^2p^+$$

da cui

$$R_{tr}^{D-5} \approx \frac{Gp^+}{\mathbf{d}^2}. \quad (8.27)$$

Se $D = 5$ tutte le masse contribuiscono al buco nero se la spaziatura è minore del raggio di Schwarzschild “singolo” (esattamente quello che prima succedeva con $D = 4$). Se $D > 5$ invece il buco nero avrà dimensione finita, e a grandi distanze lo spazio tenderà ancora alla soluzione di brana nulla, senza insorgenza di ulteriori singolarità (tipo Big Crunch).

Capitolo 9

Conclusioni e prospettive future

Per oltre trent'anni i teoremi sulle singolarità di Hawking e Penrose hanno costituito una sfida per la fisica fondamentale. Tra le conseguenze più drammatiche di questi teoremi ci sono le implicazioni per la cosmologia standard (Big Bang): se estrapoliamo l'evoluzione cosmologica passata, arriviamo ad una singolarità iniziale dove tutte le leggi fisiche note cessano di valere. L'esistenza della singolarità di Big Bang solleva alcune delle più impegnative domande della fisica: Esiste un istante iniziale del tempo? Cosa succede prima del Big Bang? Ha senso porsi tali domande?

Per una comprensione completa delle singolarità bisogna andare oltre la relatività generale ed introdurre nuove leggi fisiche. Una strada promettente è fornita dalla teoria di stringa. La teoria di stringa è una teoria consistente e finita della gravitazione quantistica che si riduce alla relatività generale Einsteiniana per piccole energie e grandi distanze. È perciò naturale chiedersi se e, se sì, come una singolarità della relatività generale venga risolta nella teoria di stringa. Per “risolta” intendiamo che la teoria dia soluzioni finite e ben definite alle questioni fisiche. C'è la speranza che la teoria di stringa porti ad una teoria dettagliata per il Big Bang. Questo potrebbe portare alla messa a punto di test sperimentali per la teoria di stringa.

I risultati ottenuti qui sembrano suggerire che la teoria di stringa classica non risolva la singolarità dell'orbifold dipendente dal tempo: sarebbe dunque necessaria una teoria di stringa quantizzata non perturbativa per risolvere definitivamente il problema¹. Allo stato attuale delle cose gli scenari che si prospettano sono i seguenti:

¹Inoltre anche al livello di teoria classica ci sono dei punti da chiarire che potrebbero gettare nuova luce sul problema: il calcolo delle ampiezze agli ordini superiori, uno studio completo del comportamento della teoria di stringa sulla brana nulla per $R \rightarrow 0$

- La singolarità rappresenta il principio (o il termine) dei tempi. In questo caso la fisica ha senso solo in metà spazio, e resta il problema di determinare le condizioni iniziali in corrispondenza della singolarità.
- Il tempo non ha né inizio né fine. Dobbiamo dunque trovare una teoria che ci permetta di descrivere l'evoluzione attraverso la singolarità

A questo proposito è stata però tratteggiata anche una terza possibilità, e cioè che i concetti di tempo e di evoluzione temporale siano concetti derivati, che non hanno senso in tutti i regimi fisici. In effetti vi sono molti esempi, basati sulla corrispondenza AdS/CFT, nei quali lo *spazio* compare come concetto “emergente”. La corrispondenza AdS/CFT consiste nella dualità tra la teoria di stringa su uno spazio AdS e una teoria di campo conforme sul bordo di tale spazio. Gli operatori della teoria di bordo corrispondono allora a stati di stringa in AdS. In particolare il tensore energia impulso della CFT viene mandato nel gravitone della teoria di stringa² e le funzioni di correlazione della teoria di campo vengono a loro volta mandate nelle ampiezze di stringa (dobbiamo parlare di ampiezze, e non di elementi della matrice S , a causa del comportamento asintotico di AdS). Tramite la corrispondenza la direzione radiale di AdS non viene tradotta in una dimensione spaziale, ma in una scala di energia: la regione asintotica corrisponde al regime ultravioletto della teoria di campo, e quella più interna al regime infrarosso. Inoltre, anche se la teoria di campo di bordo è locale, la teoria di stringa può non esserlo, perché, a causa della struttura della metrica AdS (e specificamente del comportamento del cosiddetto “warp factor” sul bordo), distanze finite in CFT vengono mandate in distanze infinite nello spazio complessivo. Insomma, l'aspetto essenziale della corrispondenza AdS/CFT è che la gravità acquista una natura *olografica*: la teoria della gravità in un determinato spazio è completamente equivalente ad una teoria di campo in uno spazio di dimensioni minori (che è il bordo dello spazio di partenza), e questo spiega anche la natura non locale delle osservabili della gravità.

In relatività spazio e tempo vengono collocati sullo stesso piano, quindi da un punto di vista teorico se lo spazio può essere un concetto “emergente” anche il tempo dovrebbe poterlo essere. Un'ipotesi del genere appare piuttosto ardita visto che il concetto di evoluzione temporale occupa un ruolo centralissimo nella meccanica classica, nella meccanica quantistica e nella teoria di campo. Inoltre, in analogia con quanto osservato per lo spazio, un meccanismo di emersione del tempo potrebbe mettere in discussione la località temporale della teoria e condurre a una violazione della causalità.

²La teoria di gravità in AdS così costruita non possiede un tensore energia-impulso, ma questo non deve sorprendere. Se si considera la teoria di Maxwell in 2+1 dimensioni, questa possiederà una simmetria di gauge $U(1)$; tuttavia esiste una descrizione duale di tale teoria in termini di un campo scalare e senza massa, e in questa formulazione della teoria non ci sono simmetrie di gauge locali. Il nostro caso è perfettamente analogo, solo che adesso il gruppo di simmetria è costituito dai diffeomorfismi.

Ciononostante, non vi sono motivi per escludere *a priori* che il tempo sia un concetto derivato. Un'indagine in questo senso richiederebbe di mettere in discussione i concetti fondamentali delle nostre teorie fisiche.

Appendice A

Caratteristica di Eulero e modello sigma non lineare

In questa appendice vogliamo giustificare la formula (2.11). Il modello σ non lineare viene qui chiamato in causa per motivi matematici, e la discussione viene condotta in 1+1 dimensioni.

In generale nel modello sigma non lineare il campo scalare assume valori in una varietà riemanniana M . Chiamiamo ϕ^i un sistema di coordinate di tale varietà, e γ_{ij} il suo tensore metrico. Il modello è definito introducendo i supercampi

$$\Phi^i = \begin{pmatrix} \phi^i \\ \psi^i \end{pmatrix}$$

e la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \gamma_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial_\mu \phi^j + \frac{1}{2} \bar{\psi}_i \gamma^k D_k \psi_i + \frac{1}{8} R_{ijkl}(\phi) \bar{\psi}^i \psi^k \bar{\psi}^j \psi^l \right),$$

dove R_{ijkl} è il tensore di curvatura della varietà M e D_k una derivata covariante.

La Lagrangiana può essere riscritta in termini di supercampo come

$$\mathcal{L} = \int d^2x d^2\theta \gamma_{ij}(\Phi_k) D_\alpha \Phi^i D_\beta \Phi^j \epsilon^{\alpha\beta}.$$

Notiamo che qualsiasi configurazione del tipo $\phi^i(x, t) = \phi^i$ con ϕ^i costante possiede energia nulla da un punto di vista classico. È questa degenerazione continua del vuoto a rendere delicato il calcolo di $(-1)^F$.

Per ovviare a questa difficoltà il metodo più semplice consiste nell'introdurre una perturbazione che rimuova la degenerazione. Scegliamo una funzione $h(\phi^i)$ (per il momento arbitraria) sulla varietà M . Il valore di $\text{Tr}(-1)^F$ non cambierà in conseguenza dell'aggiunta di un nuovo termine di potenziale, se il comportamento asintotico dell'Hamiltoniana per grandi valori dei campi

resta inalterato. Nel nostro caso la perturbazione adottata sarà

$$\Delta\mathcal{L} = \int d^2x \left(-\frac{1}{2}\gamma^{ij}\frac{\partial h}{\partial\phi^i}\frac{\partial h}{\partial\phi^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\bar{\psi}^i\bar{\psi}^j \right) = \frac{1}{2} \int d^2x d^2\theta h(\Phi), \quad (\text{A.1})$$

che abbiamo scritto prima in maniera esplicita e poi in forma di supercampo. Si possono individuare dunque un termine di potenziale scalare

$$V(\phi^i) = \frac{1}{2}|\nabla h|^2 \quad (\text{A.2})$$

ed una matrice di massa fermionica

$$m_{ij}^2 = \frac{\partial^2 h}{\partial\phi^i\partial\phi^j}. \quad (\text{A.3})$$

Abbiamo scelto la perturbazione in maniera tale che fosse supersimmetricamente invariante, ma in effetti è il potenziale scalare a rimuovere la degenerazione; da un punto di vista classico adesso l'energia si annulla solo per ϕ^i tali che $\frac{\partial h}{\partial\phi^i} = 0$.

Effettuiamo una restrizione sulla scelta di h richiedendo che $\frac{\partial h}{\partial\phi^i} = 0$ solo in punti isolati di M ; chiamiamo tali punti p^a . Chiediamo inoltre che nei punti p^a la matrice hessiana di h non abbia autovalori nulli.

Adesso possiamo sviluppare in uno qualsiasi dei p^a , e costruire così la teoria perturbativa. Le proprietà di h richieste preservano la supersimmetria a livello perturbativo: il potenziale scalare si annulla solo nel p^a scelto e la teoria non possiede particelle a massa nulla (condizione sugli autovalori dell'hessiana). Quindi a livello perturbativo il vuoto è unico, e tutti gli altri stati hanno un'energia pari almeno alla massa della particella più leggera.

Dobbiamo però ancora determinare quali stati ad energia nulla siano bosonici e quali fermionici. Stiamo lavorando in $1+1$ dimensioni, e questo comporrà qualche complicazione. In tre dimensioni $(-1)^F$ può essere convenientemente definito come $e^{2\pi i J_z}$, perché bosoni e fermioni sono caratterizzati dal loro momento angolare (teorema spin-statistica); inoltre le rappresentazioni fermioniche dell'algebra del momento angolare hanno dimensione due o superiore, quindi se si trova un'unico stato ad energia nulla questo non può che essere bosonico. Ma in una sola dimensione non è possibile definire il momento angolare. Bisogna dunque fare appello alle proprietà fondamentali delle statistiche, definendo $(-1)^F$ come quell'operatore che commuta con tutti i campi bosonici elementari ed anticommute con quegli fermionici. In formula $(-1)^F$ dovrà essere tale che

$$(-1)^F\phi = \phi(-1)^F \quad (-1)^F\psi = -\psi(-1)^F \quad (\text{A.4})$$

con ϕ campo elementare bosonico e ψ fermionico.

Questa definizione determina l'operatore a meno di un segno (se $(-1)^F$ soddisfa alla relazione di sopra anche $-(-1)^F$ lo farà); per risolvere questa ambiguità solitamente si richiede che *lo stato di vuoto sia bosonico*. Il problema

è che nel nostro caso abbiamo *più* stati di vuoto, quindi possiamo definire uno di essi come bosonico, ma dovremo poi determinare come sono gli altri. Per venire a capo di tale questione presentiamo il seguente esempio. Consideriamo la teoria di un fermione di Majorana libero, con Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^2x (\bar{\psi} i \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi). \quad (\text{A.5})$$

Il segno di m può essere sia positivo che negativo, perché la massa fisica del fermione è $|m|$, e vedremo che è proprio quel segno a svolgere un ruolo centrale.

Definiamo i modi di impulso zero del campo ψ :

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{L}} \int d\psi_1(x) \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{L}} \int d\psi_2(x) \quad (\text{A.6})$$

La scelta dei simboli σ_1 e σ_2 non è casuale: in effetti σ_1 e σ_2 soddisfano alle stesse relazioni algebriche delle matrici di Pauli, come si può facilmente verificare. Nel caso di impulso nullo l'Hamiltoniana si riduce al solo termine di massa e può essere scritta come

$$H = -im\sigma_1\sigma_2 \quad (\text{A.7})$$

laddove $-i\sigma_1\sigma_2$ svolge la funzione di operatore numero per i modi ad impulso nullo. Questa equazione ci mostra che nello stato fondamentale il modo a impulso nullo è vuoto o pieno a seconda che m sia positiva o negativa. Cambiare segno ad m equivale ad aggiungere (o a rimuovere) un fermione dallo stato fondamentale, e quindi a cambiare la natura dello stato da fermionica a bosonica e viceversa.

Il ragionamento si può estendere al caso di N fermioni di Majorana. In tal caso fissiamo prima una “normalizzazione”: conveniamo che lo stato fondamentale sia bosonico quando tutte le masse sono positive. (Analogamente nel nostro modello σ adottiamo uno stato di vuoto come bosonico per risolvere l'indeterminazione di segno sul nostro operatore $(-1)^F$.) Ciò convenuto, lo stato fondamentale sarà bosonico o fermionico a seconda che ci sia un numero pari o dispari di masse negative.

L'applicazione al modello σ è evidente: le masse dei fermioni sono in tal caso gli autovalori della matrice hessiana. Indicando con n^a il numero di autovalori negativi dell'hessiana nel punto p^a avremo che il vuoto $|\Omega^a\rangle$ sarà bosonico o fermionico se n^a è pari o dispari. La conclusione è dunque che

$$\text{Tr}(-1)^F = \sum_a (-1)^{n^a}, \quad (\text{A.8})$$

e può apparire sospetta: il termine a sinistra dipende esclusivamente dal modello σ non lineare, mentre quello a destra sembra essere influenzato dalla scelta di h . Non è così: per un teorema della teoria di Morse

$\sum_a (-1)^{n_a} = \chi(M)$, dove con $\chi(M)$ intendiamo la caratteristica di Eulero della varietà (per maggiori dettagli si veda ad esempio [19]). Questo spiega perché con la (2.11) possiamo calcolare la caratteristica di Eulero.

Appendice B

Il teorema di Hawking e Penrose sulle singolarità

Riportiamo qui l'enunciato del teorema di Hawking e Penrose sulle singolarità in relatività generale, illustrandone le ipotesi e chiarendo alcuni concetti che abbiamo fin qui dato per scontati: per la dimostrazione del teorema rimandiamo a [16].

Singolarità dello spazio tempo

La prima domanda da porsi è la seguente: formalmente come si può definire una singolarità? La risposta più soddisfacente fa uso delle seguenti nozioni (con M indichiamo la nostra varietà spazio-temporale, con g_{ab} la sua metrica):

Definizione 1 $\lambda(t)$ sia una curva causale (i. e. di tipo tempo o di tipo nullo) diretta verso il futuro (passato). $p \in M$ è detto **punto terminale del futuro (passato)** di λ se per ogni intorno O di p esiste un t_0 tale che per ogni $t > t_0$ ($t < t_0$) $\lambda(t) \in O$. Una curva sarà **inestendibile** nel futuro (passato) se non ha un punto terminale.

Definizione 2 Una geodetica è detta **incompleta** se almeno in una direzione è inestendibile e il suo parametro affine assume valori all'interno di un intervallo finito.

Diremo allora che

Definizione 3 Uno spazio-tempo è **singolare** se possiede almeno una geodetica incompleta.

La definizione sembra includere tra le varietà spazio-temporali singolari anche il caso banale di varietà con alcuni punti rimossi (si pensi ad un piano da cui si elimina un dischetto chiuso); tuttavia in relatività generale si richiede

che lo spazio-tempo sia C^r inestendibile, cioè che non esista un'embedding C^r della varietà M in un'altra varietà N che contenga strettamente l'immagine di M e dove sia possibile estendere in maniera C^r il *push forward* della metrica spazio-temporale.

Espansione di una congruenza di geodetiche ed equazione di Raychaudhuri

Definizione 4 Sia O un'aperto di M . Una **congruenza** in O è una famiglia di curve tali che per ogni punto $p \in O$ passa una ed una sola curva della famiglia.

Consideriamo una congruenza regolare di geodetiche di tipo tempo, ed una sua sottofamiglia regolare ad un parametro s ; il vettore “deviazione geodetica” sarà $\eta^a = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a$. Indichiamo invece con ξ^a il campo vettoriale tangente alle geodetiche (che consideriamo normalizzato in ogni punto).

Il tensore¹ $\nabla_b \xi_a$ contratto con ξ in ciascuno dei due indici dà zero, in virtù della condizione di normalizzazione e dell'equazione della geodetica. Introduciamo dunque la “metrica spaziale” $h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b$ e definiamo l’“espansione” come

$$\theta \equiv h^{ab} \nabla_b \xi_a \quad (\text{B.1})$$

Scomponiamo così il tensore:

$$\nabla_b \xi_a = \frac{1}{3} h_{ab} \theta + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (\text{B.2})$$

dove σ_{ab} è un tensore simmetrico a traccia nulla e ω_{ab} è la parte antisimmetrica. I tre termini rappresentano rispettivamente l'espansione, la deformazione e la rotazione² delle curve.

L'equazione che governa la variazione dell'espansione θ lungo la geodetica è detta equazione di Raychaudhuri, e si deriva facilmente:

$$\xi^c \nabla_c \theta = -\frac{1}{3} \theta^2 - \sigma^{ab} \sigma_{ab} + \omega_{ab} \omega^{ab} - R_{cd} \xi^c \xi^d \quad (\text{B.3})$$

Nel caso di geodetiche di tipo luce si trova un risultato analogo.

L'espansione svolge un ruolo fondamentale nel teorema di Hawking e Penrose, come vedremo sotto.

¹Con ∇^b indichiamo la derivata covariante

²Si verifica che se la congruenza è localmente ortogonale ad una famiglia di ipersuperfici il termine di rotazione è nullo.

Il teorema di Hawking e Penrose

Teorema 1 (M, g_{ab}) contiene almeno una geodetica di tipo tempo o di tipo luce incompleta se

1. $R_{ab}v^av^b \geq 0$ per ogni vettore v^a di tipo tempo o di tipo luce.
2. Le condizioni generiche di tipo tempo e di tipo luce sono soddisfatte.
3. Non esistono curve chiuse di tipo tempo.
4. È verificata almeno una di queste tre ipotesi:
 - α) (M, g_{ab}) contiene un insieme compatto acronale senza bordo.
 - β) (M, g_{ab}) possiede una “superficie intrappolata”.
 - γ) Esiste $p \in M$ tale che l’espansione delle geodetiche di tipo luce uscenti da p dirette verso il futuro (passato) diviene negativa lungo ogni geodetica di tale congruenza.

Dobbiamo ancora spiegare alcuni termini che compaiono nell’enunciato. Iniziamo dall’ipotesi 4).

Definizione 5 Dato $p \in M$ si definisce come **futuro cronologico** di p $I^+(p)$ l’insieme di tutti i punti raggiunti da una qualche curva di tipo tempo diretta verso il futuro uscente da p .

Definizione 6 Dato $p \in M$ si definisce come **futuro causale** di p $J^+(p)$ l’insieme di tutti i punti raggiunti da una qualche curva di tipo tempo o di tipo luce diretta verso il futuro uscente da p .

Analoghe definizioni si danno per il passato cronologico e causale.

Definizione 7 Un insieme C di M si dice **acronale** se presa una coppia qualsiasi di punti $p, q \in C$ nessuno dei due appartiene al futuro cronologico dell’altro.

L’ipotesi α) corrisponde a chiedere che l’universo sia chiuso. Per comprendere la β), poniamo l’ulteriore definizione

Definizione 8 Una “**superficie intrappolata**” è una sottovarietà bidimensionale di tipo spazio compatta e regolare tale che le geodetiche di tipo luce ad essa ortogonali (sia entranti che uscenti) dirette verso il futuro hanno espansione negativa ovunque.

Un esempio classico di superficie intrappolata è costituito dalle sfere all’interno del buco nero.

Per quanto riguarda l’ipotesi 1), essa è soddisfatta se vale la *condizione di*

energia forte cioè se per ogni vettore di tipo tempo o di tipo luce il tensore energia-impulso soddisfa la

$$T^{ab}\xi_a\xi_b \geq -\frac{1}{2}T \quad (\text{B.4})$$

Infine le *condizioni generiche di tipo tempo e di tipo luce* recitano così:

Condizione generica di tipo tempo: *per ogni geodetica di tipo tempo esiste almeno un punto dove $R_{abcd}\xi^b\xi^d \neq 0$.*

Condizione generica di tipo luce: *per ogni geodetica di tipo luce esiste almeno un punto dove $\xi_{[e}R_{a]bc[d}\xi_f]\xi^b\xi^d \neq 0$.*

In ultima analisi queste ipotesi sono piuttosto deboli (e comunque esistono versioni del teorema ancora più generali); inoltre la condizione sull'energia e l'esclusione di curve di tipo tempo chiuse sono proprietà "attraenti" da un punto di vista fisico. La conclusione più importante è che le singolarità non intervengono solo nei casi noti e risolvibili esattamente, magari a causa di un eccesso di simmetria³, ma si presentano in una vastissima gamma di casi fisicamente interessanti.

³Come potrebbero indurre a pensare soluzioni tipo Schwarzschild o Robertson-Walker.

Bibliografia

- [1] Green, M.B., Schwarz, J.H. e Witten, E. (1987) *Superstring theory*, voll. I-II, (Cambridge University Press, New York)
- [2] Polchinsky, J. (1998) *String theory*, voll. I-II, (Cambridge University Press, London)
- [3] Kiritsis, E. (1997) *Introduction to superstring theory*, arXiv:hep-th/9709062
- [4] Humphreys, J. E. (1972) J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Spriger-Verlach, New York
- [5] Dixon, L., Harvey, J.A., Vafa, C., e Witten, E. (1985) ‘Strings on orbifolds’, *Nuclear Physics* **B261**, 678
- [6] Dixon, L., Harvey, J.A., Vafa, C., e Witten, E. (1985) ‘Strings on orbifolds II’, *Nuclear Physics* **B274**, 285
- [7] Di Francesco, P. e Kutasov, D. (1992) ‘World sheet and space-time physics in two-dimensional (Super)string theory’, *Nuclear Physics* **B375**, 119
- [8] Witten, E. (1982), *Nuclear Physics* **B202**, 253
- [9] Seifert, H. e Threlfall, W. (1980) *A textbook on topology* (Academic Press, New York)
- [10] Liu, H., Moore, G. e Seiberg, N. (2002), ‘Strings in a Time-Dependent Orbifold’, arXiv:hep-th/0204168
- [11] Liu, H., Moore, G. e Seiberg, N. (2002), ‘Strings in Time-Dependent Orbifolds’, arXiv:hep-th/0206182
- [12] Nekrasov, N. A. (2002), ‘Milne Universe, Tachyons, and Quantum Group’, arXiv:hep-th/0206182
- [13] Berkooz, M., Craps, B., Kutasov, D. e Rajesh, G. (2002), ‘Comments on Cosmological Singularities in String Theory’, arXiv:hep-th/0212215

- [14] Horowitz, G. T. e Polchinsky, J. (2002), ‘Instability of Spacelike and Null Orbifold Singularities’, arXiv:hep-th/0206228
- [15] Liu, H., Moore, G. e Seiberg, N. (2002), ‘The Challenging Cosmic Singularity’, arXiv:gr-qc/0301001
- [16] Hawking, S.W. e Ellis, G.F.R. (1973), ‘The large scale structure of space-time’, (Cambridge University Press, Cambridge)
- [17] Aichelburg, P. C. e Sexl, R. U. (1971), ‘On the gravitational field of a massless particle’, *Gen. Rel Grav.* **2**, **303**
- [18] D’Eath, P. D. e Payne, P. N. (1992), ‘Gravitational radiation in high speed black hole collisions’, *Phys. Rev D***46**, 658
- [19] Bott, R. (1979), ‘Lecture at Cargèse Summer Institute’ *in* ’t Hooft, G. e al. (1980), ‘Recent developments in gauge theories’, Plenum Press
- [20] Seiberg, N. (2006), ‘Emergent Spacetimes’, arXiv:hep-th/0601234
- [21] Gibbons, G. W. (1975), ‘Quantized Fields Propagating in Plane-Wave Spacetimes’, *Commun. Math. Phys.* **45**, 191