



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCANICA

TESI DI LAUREA

*“Studio teorico e progettazione di un manipolatore per il lancio controllato di organi di presa”*

RELATORI

Prof. Ing. *Antonio Bicchi*  
Centro interdipartimentale  
di ricerca *E. Piaggio*

Prof. Ing. *Massimo Guiggiani*  
Dipartimento di Ingegneria  
Meccanica, Nucleare e della  
Produzione

Ing. *Adriano Fagiolini*  
Centro interdipartimentale  
di ricerca *E. Piaggio*

IL CANDIDATO

*Adriana Torelli*

18/07/2006

Archivio tesi corso di laurea in ingegneria meccanica 28/06

Anno Accademico 2005-2006

Consultazione consentita

Titolo della tesi

**Studio teorico e progettazione di un manipolatore per il lancio  
controllato di organi di presa**

di

**Adriana Torelli**

**Tesi proposta per il conseguimento del titolo di**

**DOTTORE IN INGEGNERIA MECCANICA**

presso la

**Facoltà di Ingegneria**

della

**Università degli Studi di Pisa**

**18/07/2006**

**Autore: Adriana Torelli**

**Relatori: Prof. Ing. Antonio Bicchi**

**Prof. Ing. Massimo Guiggiani**

**Ing. Adriano Fagiolini**

*A chi mi ha insegnato*

1	INTRODUZIONE .....	6
1.1	L'ESPLORAZIONE ROBOTICA .....	7
1.1.1	TECNOLOGIE ROBOTICHE PER L'ESPLORAZIONE PLANETARIA .....	8
1.2	SCOPO DELLA TRATTAZIONE .....	9
2	PROGETTI ATTUALI DI MANIPOLATORI A GIUNTI CEDEVOLI ED ESTENSIBILI .....	10
2.1	DESCRIZIONE DEI ROBOT A GIUNTI FLESSIBILI ED ESTENSIBILI .....	10
2.1.1	IL CASTING MANIPULATOR .....	10
2.1.2	I CABLE DRIVEN ROBOT .....	13
2.2	STUDIO DELLA CINEMATICA E DINAMICA DEI ROBOT A GIUNTI FLESSIBILI ED ESTENSIBILI .....	18
2.2.1	I CASTING MANIPULATOR .....	18
2.2.2	I CABLE DRIVEN ROBOT .....	21
3	OGGETTO E METODI .....	26
3.1	OGGETTO DELLA TRATTAZIONE .....	26
3.2	METODI ADOTTATI .....	27
4	MODELLAZIONE DEL PROBLEMA .....	28
4.1	ANALISI CINEMATICA E DINAMICA DEL SISTEMA .....	28
4.1.1	LA SEMPLIFICAZIONE PLANARE DEL SISTEMA .....	28
4.1.2	LA CINEMATICA DELL'END-EFFECTOR .....	31
4.1.3	CINEMATICA E STATICA .....	32
4.1.4	EQUAZIONI DEL MOTO .....	33
5	PROGETTO .....	35
5.1	PROGETTO DEL MANIPOLATORE .....	35
5.1.1	FASE DI AVAMPROGETTO .....	35
5.1.2	IL PROGETTO MECCANICO .....	41
6	CONTROLLO OTTIMO IN TEMPO MINIMO DEL MANIPOLATORE .....	48
6.1	LA PIANIFICAZIONE DELLA TRAIETTORIA .....	50
6.1.1	DESCRIZIONE MATEMATICA DEL PROBLEMA DEL CONTROLLO OTTIMO .....	50
6.2	ALGORITMO DI OTTIMIZZAZIONE .....	53
6.3	RISULTATI SPERIMENTALI .....	54
6.3.1	OTTIMIZZAZIONE DEL MANIPOLATORE PLANARE A DUE TENDINI IN PARALLELO .....	54
6.3.2	PIANIFICAZIONE DELLE TRAIETTORIE PER IL MANIPOLATORE A TRE TENDINI IN PARALLELO .....	54
7	CONCLUSIONI .....	54
7.1	RISULTATI RAGGIUNTI .....	54
7.2	SVILUPPI FUTURI .....	54
7.3	RINGRAZIAMENTI .....	55
	BIBLIOGRAFIA .....	56
	APPENDICE A - LISTATO DEI PROGRAMMI .....	59

# 1 INTRODUZIONE

“La robotica è lo studio di macchine che possano sostituire l’uomo nell’esecuzione di un compito, sia in termini di attività fisica che decisionale”

Prof. Bruno Siciliano

“Il robot è un idiota cieco con un braccio solo e con poca memoria, che non può parlare, vedere o sentire”

In queste due citazioni è ben espresso il movente che anima lo studio della robotica, disciplina nuova e in continua evoluzione: permettere ad una macchina idiota di svolgere un compito in autonomia per sostituire l’uomo non solo nell’esecuzione, ma anche nella capacità di operare delle decisioni allo scopo di compierlo.

La robotica è definita come la scienza che studia la *connessione intelligente tra percezione e azione* ed è per questo che riguarda lo studio di macchine che siano dotate di tre unità fondamentali tra loro interconnesse:

- un sistema meccanico (deputato alla locomozione e alla manipolazione) che permette al robot di interagire con l’ambiente circostante
- un sistema sensoriale (formato da sensori propriocettivi ed eterocettivi) che sia in grado di acquisire informazioni sullo stato interno del sistema meccanico e sullo stato esterno dell’ambiente circostante
- sistema di governo, che è l’unità adibita all’acquisizione e all’elaborazione dei contenuti informativi che gli pervengono dal sistema sensoriale nonché alla trasformazione di questi in comandi per l’esecuzione dei compiti nel rispetto dei vincoli imposti dal sistema stesso e dall’ambiente.

Il robot, secondo il *Robot Institute of America*, è un manipolatore multifunzionale riprogrammabile costituito per movimentare materiali o dispositivi specializzati tramite movimenti variabili programmati per l’esecuzione di diversi compiti.

La versatilità del robot connessa con la sua spiccata autonomia lo rendono lo strumento più promettente, e più affascinante, per tutte quelle operazioni in cui l’uomo necessita di automi per la propria indisponibilità, per esigenze di sicurezza, per un aumento della produttività.

Vien da sé che con l’aumento dell’interesse scientifico riguardo a questa nuova scienza multidisciplinare, anche gli investimenti in questo campo stanno vertiginosamente crescendo, creando un feedback positivo tra ricerca e applicazioni industriali. Basti pensare che, secondo l’UNECE (United Nations Economic Commission for Europe) l’Italia stessa si colloca al secondo posto nel mondo per densità di robot e che questo dato continua a salire.

## 1.1 L'ESPLORAZIONE ROBOTICA

Uno dei campi che maggiormente ha dato impulso allo sviluppo della robotica in tutte le sue forme successive è stato l'ambito di applicazione spaziale. La storia del Robot è infatti strettamente legata a quella dell'esplorazione spaziale: infatti, la trascurabilità dei costi in relazione all'intrinseco desiderio di conoscenza dell'uomo ha dato forma a numerose applicazioni robotiche, a volte anche famose. Tutte le sonde spaziali che ci hanno fornito, negli anni, preziose informazioni sul nostro Sistema Solare non sono altro che robot.

Sono robot i due rover Spirit ed Opportunity della NASA, le cui missioni stanno approfondendo la conoscenza di Marte, sono robot sia il grande braccio robotico "CanadArm", (fig 1), risultato fondamentale nelle operazioni più delicate dello Shuttle sia l'SSRMS, il grande e complesso manipolatore canadese che sta realizzando l'assemblaggio della Stazione Spaziale Internazionale.

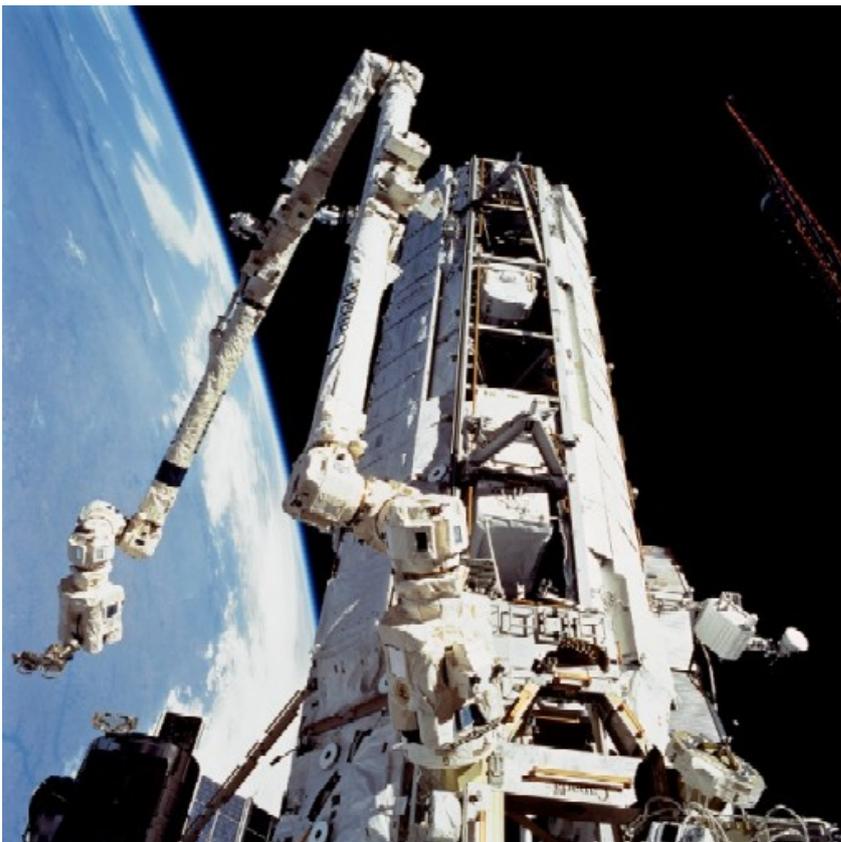


Figura 1 CanadArm

Anche l'ASI, Agenzia Spaziale Italiana, sta portando avanti un progetto di Unità Payload Robotica, sulle seguenti tematiche:

Tecnologie Robotiche per l'Esplorazione Planetaria, per predisporre il piano di sviluppo tecnologico per la realizzazione di un sistema robotico mobile (o parte di esso) dedicato all'esplorazione planetaria

Tecnologie Robotiche per il Servicing di infrastrutture Orbitanti, per valutare le prospettive ed eventuali vantaggi economici derivanti dall'impiego di un sistema robotico per l'assemblaggio, manutenzione e servicing di infrastrutture orbitanti, e predisporre un piano di sviluppo delle tecnologie robotiche necessarie.

### **1.1.1 TECNOLOGIE ROBOTICHE PER L'ESPLORAZIONE PLANETARIA**

L'esplorazione planetaria, in particolare l'esplorazione del pianeta Marte, rappresenta lo scenario di riferimento per le future missioni spaziali robotiche a breve e medio termine: in questo ambito, tutte le ricerche possibili e realizzabili nel breve periodo sono da mettere a frutto.

Le esigenze investigative delle missioni spaziali richiedono l'impiego di sistemi "intelligenti" in grado di garantire elevata mobilità sulla superficie planetaria  
raccolta campioni in posizioni variabili dello spazio  
preparazione dei campioni per l'analisi in-situ  
preparazione dei campioni per il rientro a terra

Per questo tipo di operazioni si devono considerare alcuni aspetti importanti:  
l'incertezza che caratterizza l'ambiente operativo può richiedere di adattare il profilo di missione a situazioni impreviste,  
l'aumentare il grado di autonomia a bordo del sistema richiede l'impiego di tecnologie non sempre disponibili e/o incompatibili con le risorse disponibili (massa, volume, potenza),  
l'aspetto del controllo assume un ruolo fondamentale per il raggiungimento degli obiettivi e il successo dell'intera missione.

Le specifiche che si richiedono ad un manipolatore impiegato in ambito di esplorazioni planetarie sono:

- Massa non superiore a 150 kg
- Dimensioni non superiori a 80 cm
- Interfacciabilità con un sistema di locomozione
- Capacità di coprire distanze tra due punti di "sample collection" comprese tra 0.5 a 1 km
- Altezza dal suolo di 0.35 m
- Interfacciabilità con un sistema di controllo basato su telecamere

## 1.2 SCOPO DELLA TRATTAZIONE

In tutte le esplorazioni spaziali, i manipolatori meccanici utilizzati sono costituiti da link rigidi, guidati da attuatori prismatici o rotoidali. Le prestazioni di questi manipolatori sono sì robuste ed efficaci in fatto di capacità di carico, di accuratezza dei movimenti e di ripetibilità, ma il loro tallone d'Achille è l'essere pesanti e ingombranti e l'incolmabile trade-off fra l'aumento delle dimensioni del workspace e la diminuzione del peso della struttura.

Per sopperire a queste difficoltà, si è in questa sede pensato di progettare un robot a giunti cedevoli ed estensibili, prendendo spunto dalle più recenti ricerche su due categorie di robot prototipici: i manipolatori del lancio (*casting manipulators*) e i robot guidati da cavi (*cable driven robots*).

In questo lavoro è stato affrontato il problema di raggiungere e prelevare oggetti posti a grande distanza dalla base del manipolatore e in qualsiasi direzione dello spazio, senza però gravare sul peso e sull'ingombro della struttura. Il tentativo di ottenere un robot che sia allo stesso tempo leggero e preciso nei movimenti sulle lunghe distanze, ha portato alla scelta di un tipo di manipolatore che possiamo definire "*casting cable driven robot*" cioè un manipolatore a lancio guidato da cavi posti in parallelo.

## **2 PROGETTI ATTUALI DI MANIPOLATORI A GIUNTI CEDEVOLI ED ESTENSIBILI**

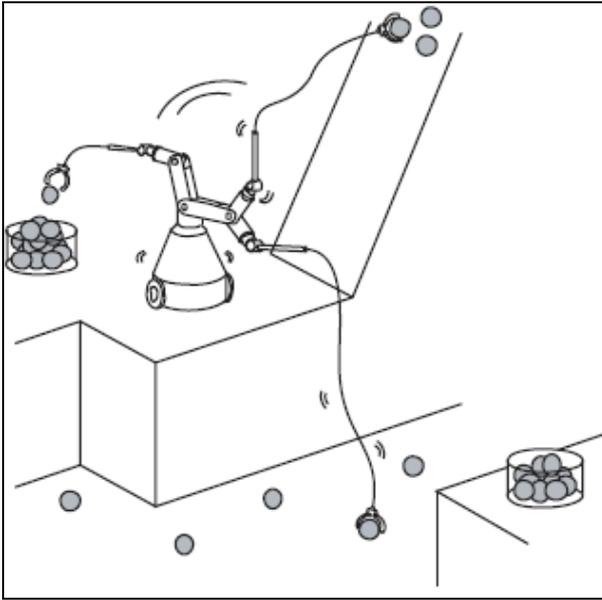
Nel seguente capitolo si descriveranno in sintesi gli esempi di manipolatori a giunti flessibili ed estensibili presenti in letteratura. Si analizzeranno la loro cinematica e dinamica e i metodi utilizzati dagli autori per il controllo di tali sistemi.

### **2.1 DESCRIZIONE DEI ROBOT A GIUNTI FLESSIBILI ED ESTENSIBILI**

In questo paragrafo si esporranno descrittivamente gli esempi di questo nuovo tipo di manipolatori, attualmente oggetto di ricerca.

#### **2.1.1 IL CASTING MANIPULATOR**

I manipolatori del lancio [33] hanno come obiettivo principe quello di allargare il più possibile il loro spazio di lavoro, mantenendo contenuti allo stesso tempo il loro peso (e costo) senza per questo degradare le loro prestazioni. Essi sfruttano come idea di base il movimento della canna da pesca: il pescatore, infatti, è capace di far raggiungere all'amo la posizione che egli desidera con una serie di movimenti semplici: egli infatti inizialmente brandeggia la canna, poi lascia il mulinello libero di svolgersi sotto l'effetto della forza di inerzia inflitta all'amo e durante la fase di volo di questo, ne corregge la traiettoria frenando il filo per piccoli ma numerosi istanti di tempo. La canna da pesca quindi fornisce un esempio di manipolatore semplice e poco costoso capace di operare su distanze molto ampie: evidentemente questa possibilità è resa dal filo, che, nella fattispecie, è un giunto flessibile ed estensibile.



**Figura 2** rappresentazione schematica di un “casting manipulator”

I casting manipulator sono robot a link in serie costituiti da una catena di  $n-1$  bracci rigidi attuati da un pari numero di motori in grado di fornire loro le coppie  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  all'estremità dei quali è collegato il giunto estensibile e cedevole, non attuato, che a sua volta è collegato ad una pinza che ne costituisce l'end-effector.

I manipolatori del lancio, dunque, sono quindi un particolare esempio di strutture meccaniche sotto attuate e quindi è necessario far uso della loro dinamica libera nel formulare e risolvere il problema del loro controllo. In letteratura sono noti gli studi di A. De Luca [2], di Spong [3], sui meccanismi sotto attuati, cui rimandiamo per maggiori approfondimenti.

Ci basti capire che con un uso consapevole della dinamica di questi manipolatori e con un controllo programmato di ogni fase del lancio, si può ottenere un meccanismo semplice, di piccola taglia, di bassa spesa energetica, non soggetto a ribaltamenti, capace di catturare un bersaglio la cui distanza dalla base del manipolatore è più di un ordine di grandezza maggiore rispetto alle sue dimensioni.

Evidentemente, la presenza di un link cedevole, sia esso estensibile o no, complica la pianificazione e il controllo del robot rispetto a un manipolatore rigido e soprattutto richiede che il funzionamento avvenga in modo tale da garantire che esso rimanga sempre in tensione; d'altra parte, la flessibilità e l'illimitata estensibilità di questo tipo di link sono le caratteristiche che garantiscono la versatilità del robot per le più varie applicazioni.

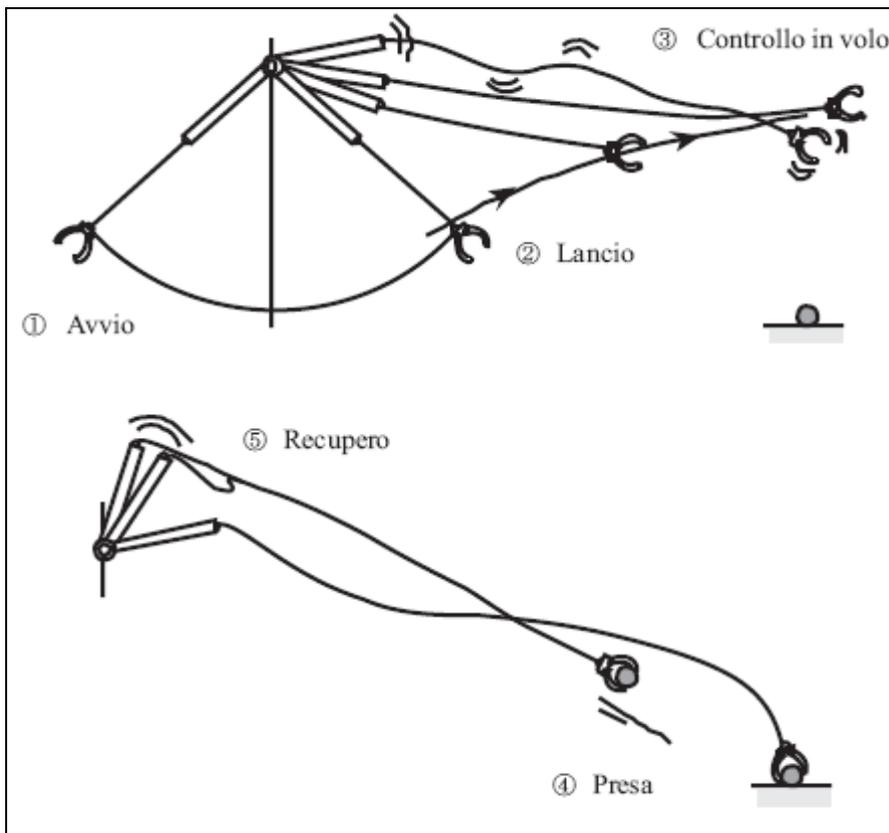
Infatti, le possibili sue applicazioni sono numerose: dall'agricoltura, in cui può essere utilizzato per la raccolta, alle applicazioni spaziali per rilevare campioni sul suolo di Marte, dal soccorso in ambienti disastrati alle operazioni di pick and place in ambito industriale.

La “casting manipulation” è una tecnica che consiste nel lanciare la pinza verso il suo obiettivo, rilasciando il braccio estensibile ad un istante opportuno dopo aver effettuato una fase operativa iniziale, in cui si imprime all'end-effector, mediante movimenti opportuni dei bracci rigidi, energia meccanica sufficiente per raggiungere e colpire il

bersaglio stabilito: afferratolo, si può procedere al suo recupero con un'azione combinata del movimento dei bracci e del riavvolgimento dei cavi.

Da questi presupposti, la manipolazione del lancio si delinea in una sequenza di diverse fasi che possiamo distinguere come segue:

- avvio
- lancio
- controllo in volo
- presa
- recupero



**Figura 3** Fasi della “casting manipulation”

La fase di avvio ha lo scopo di imprimere sufficiente energia meccanica all'end effector: per tale scopo si attuano e si controllano i giunti rigidi finché la pinza non ha raggiunto la velocità iniziale necessaria a raggiungere, in volo libero, il bersaglio. Durante questa fase, è conveniente che il braccio cedevole rimanga sempre in tensione.

La fase successiva, il lancio, consiste nel continuare a tenere in movimento la pinza fino all'istante ritenuto opportuno in cui viene rilasciata e comincia il suo volo libero (che è parabolico per effetto della gravità) pur rimanendo collegata alla catena cinematica mediante il link flessibile che si svolge sotto l'azione dell'inerzia della pinza stessa.

Il controllo in volo ha invece lo scopo di modificare il moto naturale della pinza, mediante l'azione simultanea dei giunti attuati e di un freno, in modo che questa possa

afferrare il bersaglio anche nel caso in cui esso si stia muovendo. Evidentemente lo scopo non può essere raggiunto se il bersaglio in movimento si allontana dal manipolatore di una distanza superiore alla gittata.

La fase successiva, la presa, può terminare con un successo, se il bersaglio è stato raggiunto, o con un fallimento, in caso contrario.

In ogni caso, si procede successivamente all'ultima fase, il recupero, sia che si tratti di recuperare la sola pinza oppure quest'ultima insieme col bersaglio. Tale fase consiste nel movimento combinato dei bracci rigidi col riavvolgimento dei cavi.

## 2.1.2 I CABLE DRIVEN ROBOT

I cable driven robot sono costituiti da una piattaforma mobile o da un end-effector connessi al telaio attraverso N cavi la cui lunghezza può essere modificata indipendentemente da N motori attuati posti in posizioni fisse.



Figura 4. Cable driven robot

Questo tipo di robot ha numerose caratteristiche desiderabili:

- per prima, la possibilità di avere un range di movimento estremamente ampio in confronto con gli attuatori convenzionali, dovuto alla possibilità di svolgere una notevole lunghezza di cavo;
- la capacità di operare in ambienti pericolosi, non essendo necessaria la vicinanza dei motori all'end-effector;

- la possibilità di essere impiegati in operazioni ad alta velocità, data la trascurabile inerzia dei link;
- il rapporto fra capacità di carico e peso (ingombro) veramente alto;
- la semplicità di trasporto e montaggio, in relazione al fatto che i cavi occupano estremamente poco spazio quando vengono riavvolti sulle bobine;
- la sicurezza nell'ambiente di lavoro, in quanto la flessibilità dei cavi costituisce una protezione naturale per le persone contro l'urto accidentale;
- per ultimo, ma non il meno importante, il costo notevolmente contenuto dei cavi, se confrontato con qualsiasi attuatore rigido.

La maggiore difficoltà legata all'utilizzo dei link cedevoli è dovuta al fatto che questi possono esclusivamente tirare ma non spingere l'end effector, diversamente dai robot a link rigidi: per tale motivo, essi sono stati studiati da alcuni autori [24] con metodi simili a quelli utilizzati per lo studio del grasping (cioè della presa di oggetti con la mano, le cui dita possono solo spingere e non tirare)

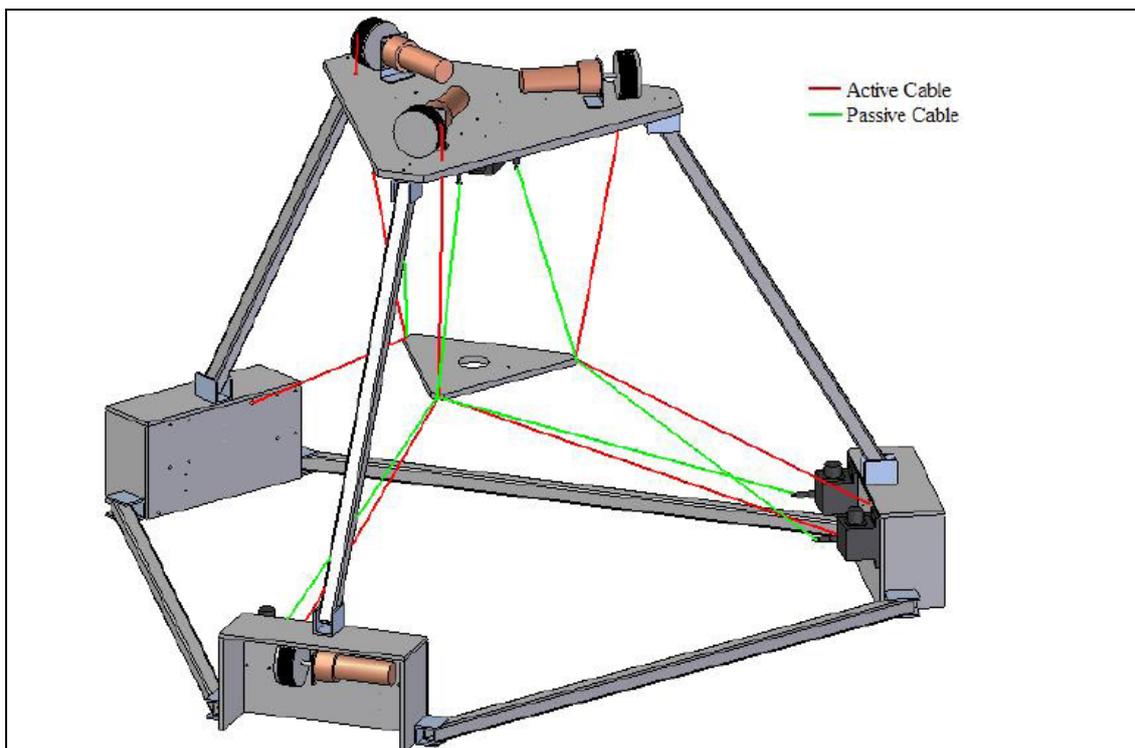


Figura 5. Modello di un cable driven robot

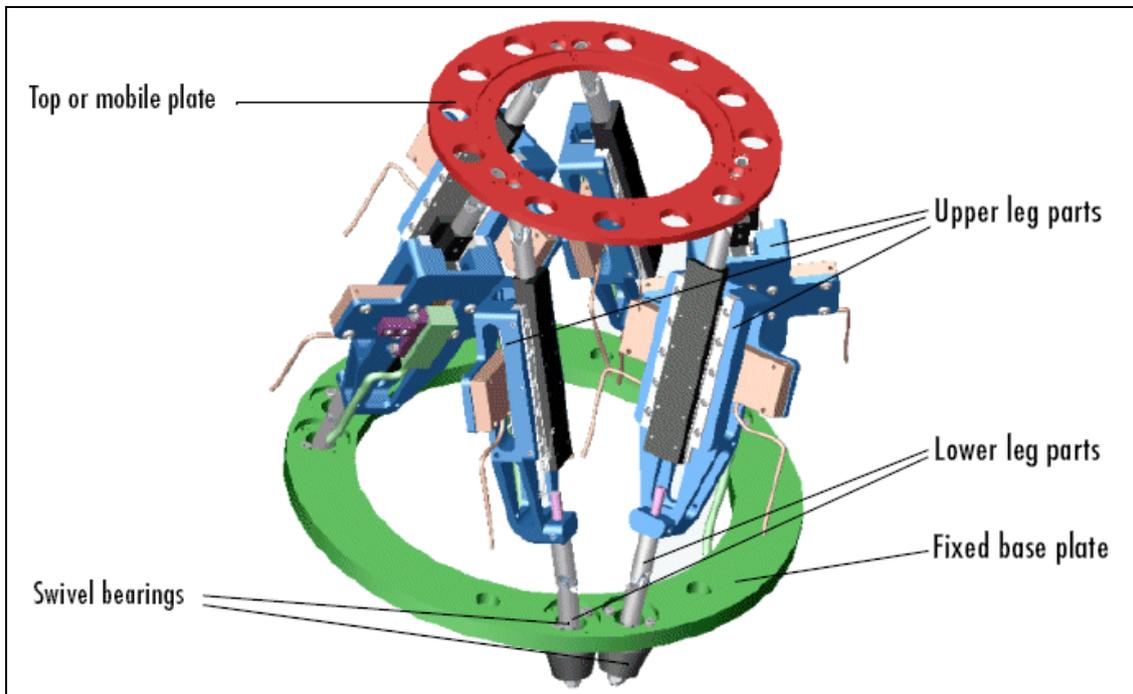
## II NIST ROBOCRANE

Il NIST RoboCrane (Figura 6) è un robot sperimentale del National Institute of Standards and Technology ( NIST ) che risponde all'esigenza di un robot operatore che sia al contempo leggero, economico e preciso nelle operazioni.



**Figura 6.** Il NIST RoboCrane

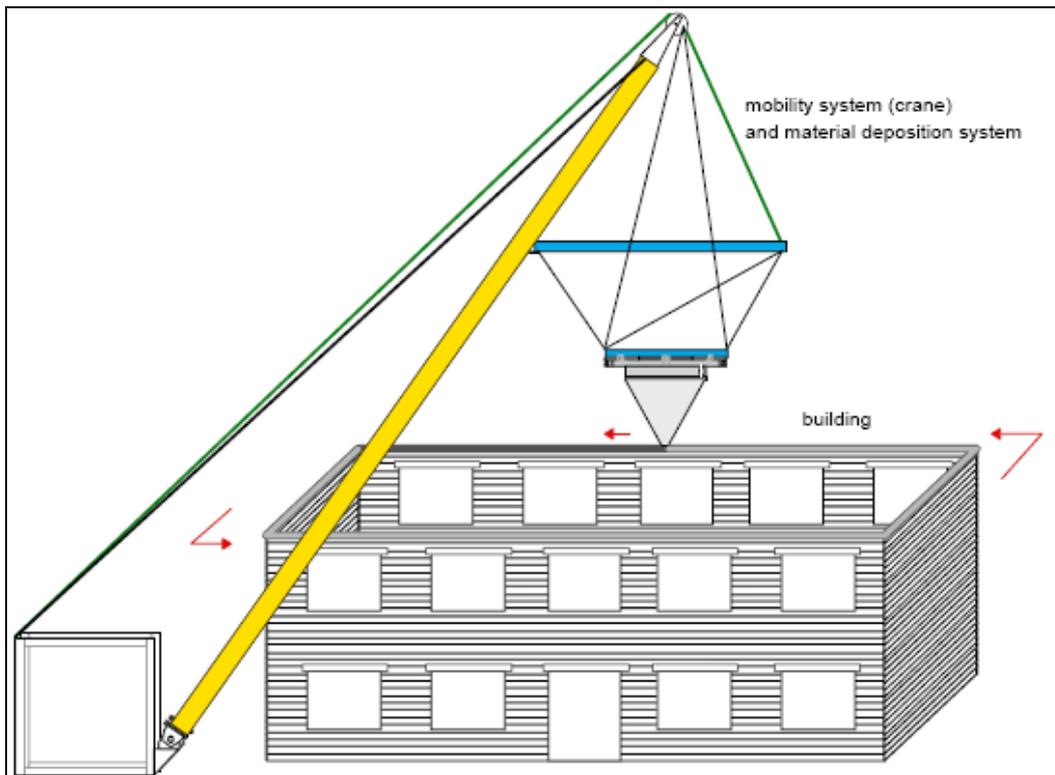
Come idea di base, esso fonda la sua cinematica su quella di una Piattaforma di Stewart (Figura 7), un particolare tipo di manipolatore a catena cinematica chiusa (giunti in parallelo) [26], ma ne sostituisce gli attuatori prismatici con cavi flessibili.



**Figura 7** Piattaforma di Stewart

A seconda dell'utensile montato sulla piattaforma operatrice, la NIST ha elaborato numerose applicazioni per il Robocrane:

- movimentazione di mezzi pesanti,
- deposito di materiali,
- salvataggio di persone in situazioni pericolose,
- teleoperazioni,
- installazioni e rimozioni di pipe sottomarini,
- applicazioni spaziali.



**Figura 8** Un esempio di applicazione del NIST RoboCrane

Comune denominatore di queste attività è la necessità di un grande spazio di lavoro, del controllo del movimento nei sei gradi di libertà e di una precisa manovrabilità della piattaforma: se i primi due task sono automaticamente soddisfatti dall'introduzione dei link flessibili ed estensibili, il terzo è quello più critico: infatti, come si è già accennato, l'unilateralità delle forze esplicabili dai cavi impone dei limiti notevoli alle configurazioni ammissibili per l'end effector.

## 2.2 STUDIO DELLA CINEMATICA E DINAMICA DEI ROBOT A GIUNTI FLESSIBILI ED ESTENSIBILI

In questo paragrafo si vuole dare una sommaria definizione della cinematica e dinamica dei manipolatori a giunti flessibili ed estensibili di cui si è parlato.

### 2.2.1 I CASTING MANIPULATOR

Per i manipolatori del lancio la base di partenza per lo studio della loro dinamica è quella di un manipolatore a due giunti rotoidali e bracci rigidi in serie soggetto alla forza peso.

Infatti, sotto l'ipotesi di operare una strategia di avviamento che mantenga il giunto flessibile sempre in tensione, questo si comporterà come se fosse rigido. Nel caso più semplice, come schematizzato in Figura 9, la dinamica della fase di avvio del manipolatore è esprimibile, adottando le notazioni espresse nella figura stessa, come

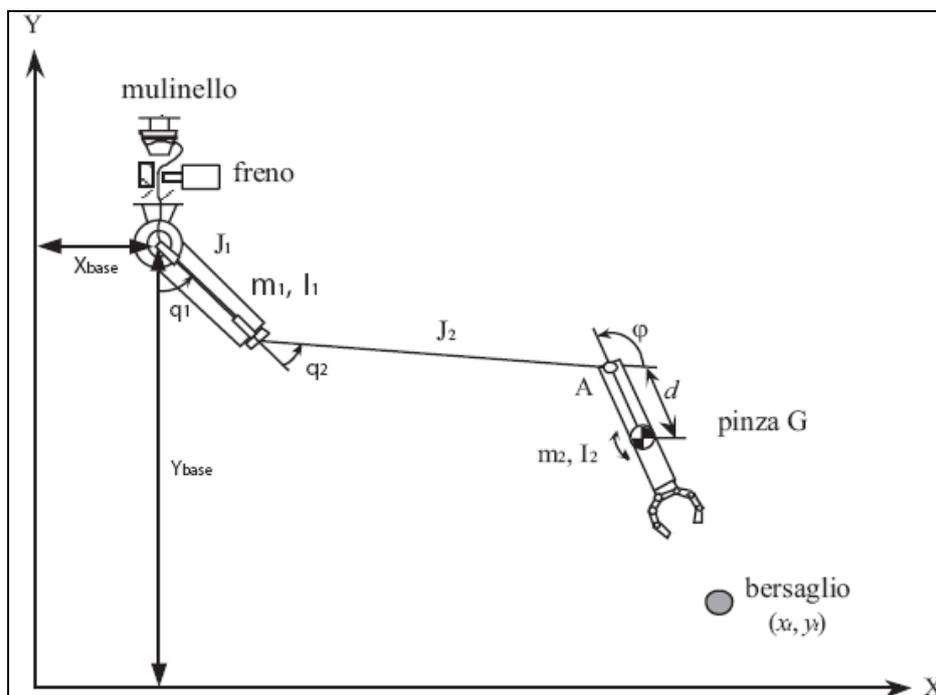


Figura 9 Notazioni adottate per lo studio cinematico del "casting manipulator"

$$\tau = B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q),$$

in cui  $q$  è il vettore delle variabili di giunto  $q = (q_1, q_2)^T$  e  $B(q), C(q), G(q)$  sono rispettivamente le matrici di inerzia, delle forze di Coriolis e di gravità. Essa è formalmente identica a quella di un manipolatore rigido. Affinché la fase di avvio

produca gli effetti desiderati di velocità e posizione dell'end effector, è necessario operare un controllo sulla dinamica libera del sistema. Mediante un controllo a coppia calcolata, si ottiene che, indicando con  $(q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t))$  la traiettoria desiderata del sistema, il controllo è esprimibile come segue:  $\tau = B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) + B(q)U$  dove  $U$  è il nuovo ingresso.

Ma poiché, come accennato in precedenza, il casting manipulator è un meccanismo sotto attuato, non è possibile, con un controllo siffatto, annullare contemporaneamente le dinamiche delle due variabili di giunto  $q_1, q_2$ .

Esse saranno infatti espresse da una relazione del tipo

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = f_1(q_1, q_2, U) \\ \ddot{q}_2 = U \end{cases}$$

e quindi per far convergere asintoticamente a zero l'errore sulla seconda variabile di giunto  $q_2$ , bisognerà scegliere  $U$  come  $U = \ddot{q}_{2_d} + K_v(\dot{q}_{2_d} - \dot{q}_2) + K_p(q_{2_d} - q_2)$ .

Durante la fase di avvio, lo stato dell'end effector è legato alle variabili di giunto dalle relazioni:

$$\begin{cases} x_0 = x_{base} + a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ y_0 = y_{base} - a_1 c_1 - a_2 c_{12} \\ \varphi = q_1 + q_2 + \frac{\pi}{2} \\ \dot{x}_0 = a_1 c_1 \dot{q}_1 + a_2 c_{12} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{y}_0 = a_1 s_1 \dot{q}_1 + a_2 s_{12} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \dot{\varphi} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{cases}$$

dove con  $a_1$  si intende la lunghezza del giunto rigido,  $s_i = \sin(q_i)$ ,  $c_i = \cos(q_i)$ ,  $s_{ij} = \sin(q_i + q_j)$ ,  $c_{ij} = \cos(q_i + q_j)$ .

Tali relazioni permettono di individuare quello che sarà lo stato iniziale della successiva fase di volo, infatti senza operare alcun controllo, lasciando cioè srotolare il cavo esclusivamente sotto l'effetto della forza d'inerzia impressa alla pinza, essa si muoverà secondo le leggi:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t \\ y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ \dot{x}(t) = \dot{x}_0 \\ \dot{y}(t) = \dot{y}_0 - g t \end{cases}$$

si tratta cioè di un moto parabolico dovuto alla forza di gravità.

$$x_{\max} = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{2g} (\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 + 2gy_0})$$

La gittata massima sarà  $x_{\max}$  che rappresenta il punto più lontano dalla base del manipolatore che è possibile raggiungere.

Senza un opportuno controllo della fase di volo, l'evoluzione libera non consente alla pinza, se non in casi fortuiti, di raggiungere stabilmente il proprio obiettivo: per questo il manipolatore deve operare, durante questa fase, la correzione della traiettoria, mediante l'opportuno impiego del dispositivo frenante e del movimento del giunto attuato. Affinché quindi lo stato finale  $S_f$  dell'end effector coincida con lo stato desiderato  $S_d$ , sarà necessario operare una serie di frenate applicate negli istanti  $t_i$  di durata  $\Delta_i$ . Tale tecnica di controllo è detta a frenata multipla ed è univocamente determinata dal vettore  $\mathbf{b}^n = (t_1, \Delta_1, \dots, t_n, \Delta_n)$ . Il vettore di controllo è determinato dal fatto di essere il vettore che rende minimo il funzionale distanza  $D = \text{dist}(S_f, S_d)$  e si

$$b_*^n = \arg \min_{b^n \in B} D$$

ottiene numericamente come soluzione del problema

L'evoluzione della pinza durante l'intero volo può essere descritta nei termini di un sistema ibrido: partendo dallo stato iniziale  $S_0$ , la pinza si muove nello spazio inizialmente soggetta alla sola forza peso (volo libero); ad un certo istante, il giunto flessibile viene frenato e la dinamica della pinza cambia tenendo conto anche della forza applicata dal filo (volo in frenata); alla fine della frenata, la pinza torna a muoversi in volo libero fino al successivo istante di frenata. In definitiva, lo stato finale dell'end effector, sarà una funzione del suo stato iniziale e del vettore  $\mathbf{b}^n$  di controllo, cioè  $S_f = f(S_0, b^n)$ .

In definitiva, il casting manipulator è un robot capace di eseguire operazioni di pick and place su una lunga distanza, ma il suo limite è quello di essere una struttura planare e quindi di non essere capace di operare nel caso in cui ci siano errori riguardo al posizionamento in direzione ortogonale al piano di lavoro del manipolatore.

Inoltre, il controllo in frenata è capace di controllare il sistema esclusivamente in modo impulsivo, mentre sarebbe auspicabile un controllo continuo, di tipo "smooth".

## 2.2.2 I CABLE DRIVEN ROBOT

Come si è precedentemente accennato, la base di partenza dello studio cinematico del NIST RoboCrane è la cinematica della piattaforma di Stewart, o, più in generale, di un manipolatore parallelo ad  $n$  bracci, formati ciascuno da un giunto prismatico attuato e da due giunti sferici non attuati.

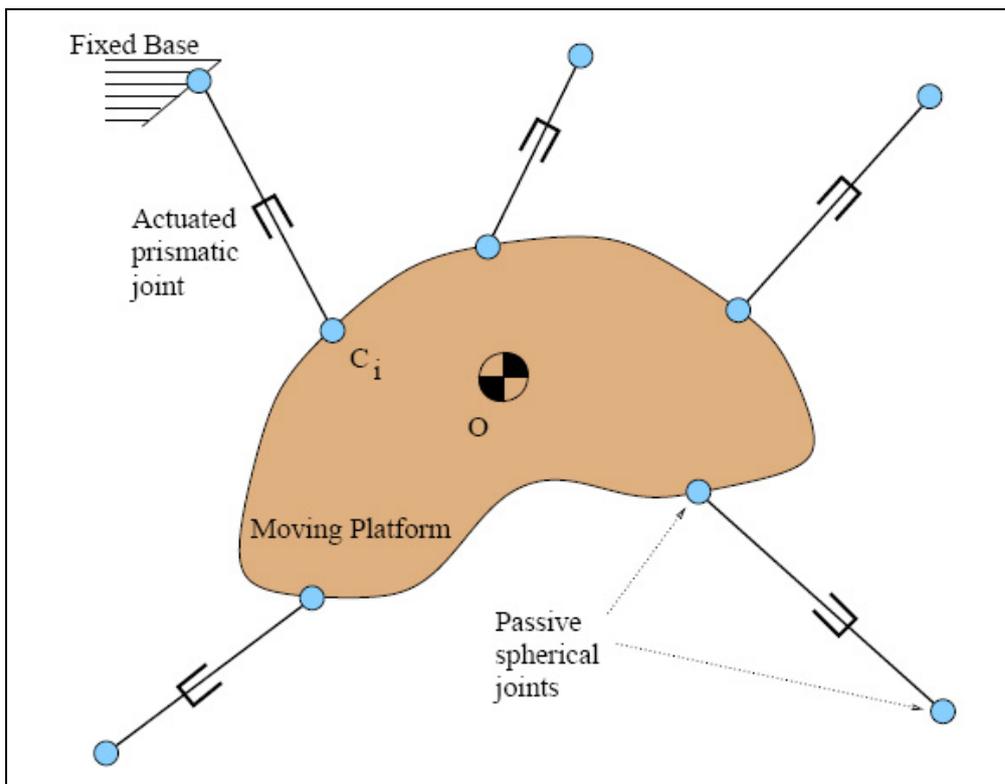


Figura 10 manipolatore parallelo a  $n = 5$  bracci

Le forze e i momenti sull'end-effector di un manipolatore parallelo sono in relazione

con le coppie esercitate dagli attuatori dalla ben nota relazione 
$$\begin{bmatrix} F_{ee} \\ M_{ee} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \dots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$
 dove

$F_{ee}$  ed  $M_{ee}$  sono rispettivamente le forze e i momenti sull'end-effector,  $J$  è la matrice jacobiana e

$\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n$  sono le coppie applicate dall' $i$ -esimo attuatore prismatico.

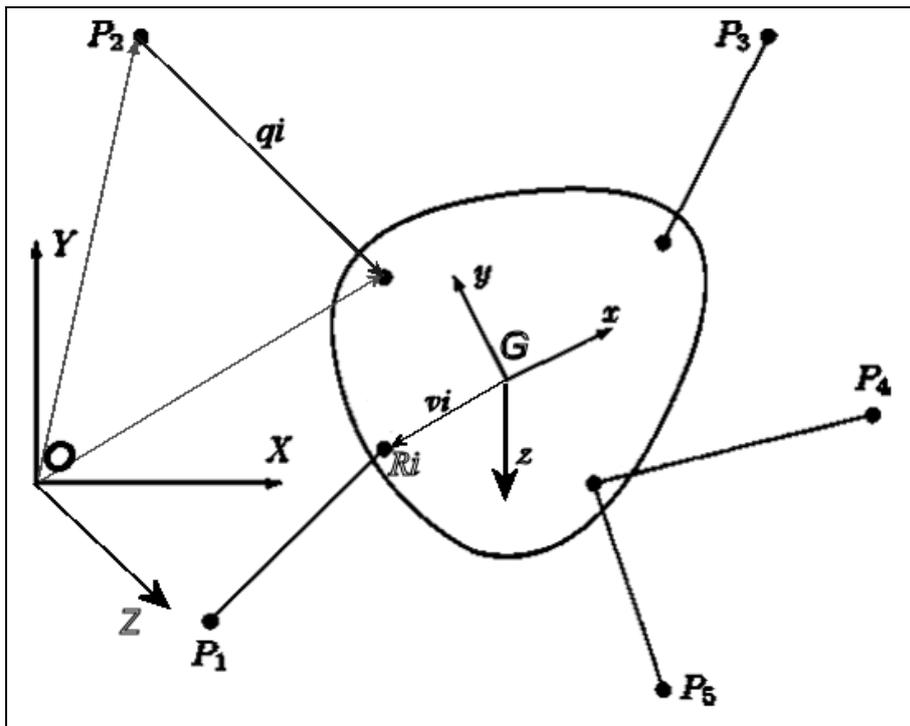


Figura 11 Notazioni adottate per lo studio cinematico dei “cable driven robot”

La cinematica inversa di questo meccanismo è relativamente semplice: siano  $P_i$  i punti, supposti fissi, di connessione dei giunti col telaio, ed  $R_i$  i punti di connessione degli stessi con l’organo terminale, espressi rispetto ad un sistema di riferimento fisso  $O$ .

Siano inoltre:

$\bar{x}_G$  la posizione del centro di massa  $G$  dell’end effector rispetto ad  $O$  ;

$O'$  il sistema di coordinate solido con l’end effector e con origine nel centro di massa  $G$  di questo;

$Q$  la matrice di rotazione del sistema di coordinate  $O'$  rispetto ad  $O$ ;

$\bar{v}_i$  il vettore distanza di  $R_i$  da  $G$ .

Allora si ha che il vettore orientato nella direzione del link è:

$$\vec{q}_i = P_i - R_i = P_i - \bar{x}_G - Q \cdot \bar{v}_i$$

che esprime la relazione tra la lunghezza dei link col baricentro dell’end effector e con la sua inclinazione, cioè la mappa  $\vec{q}_i = \vec{q}_i(X)$  dove per  $X$  si intende il vettore

$[x_G \ y_G \ z_G \ \varphi \ \theta \ \phi]$  delle posizioni ed angolazioni dell’end effector rispetto ad  $O$ ;

anche le velocità lineari ed angolari dell’end effector sono dunque in relazione con la velocità di variazione di lunghezza dei link. Definito  $\vec{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  il vettore delle lunghezze dei cavi, si ha che le velocità lineari ed angolari dell’end effector possono essere espresse come

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_G \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \frac{\partial X}{\partial \vec{Q}} \cdot \dot{\vec{Q}} = J^{-T}(\vec{Q}) \cdot \dot{\vec{Q}}$$

L'applicazione del principio dei lavori virtuali, ci porta successivamente a scrivere la

relazione duale cineto-statica 
$$\begin{bmatrix} F_{ee} \\ M_{ee} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \dots \\ \tau_n \end{bmatrix} .$$

Le equazioni dinamiche di un cable-driven robot, compreso il NIST RoboCrane, differiscono da quelle del manipolatore rigido solo per la condizione di vincolo  $\tau_i \geq 0$ , perché, come è ben noto, i cavi possono tirare ma non spingere l'end effector.

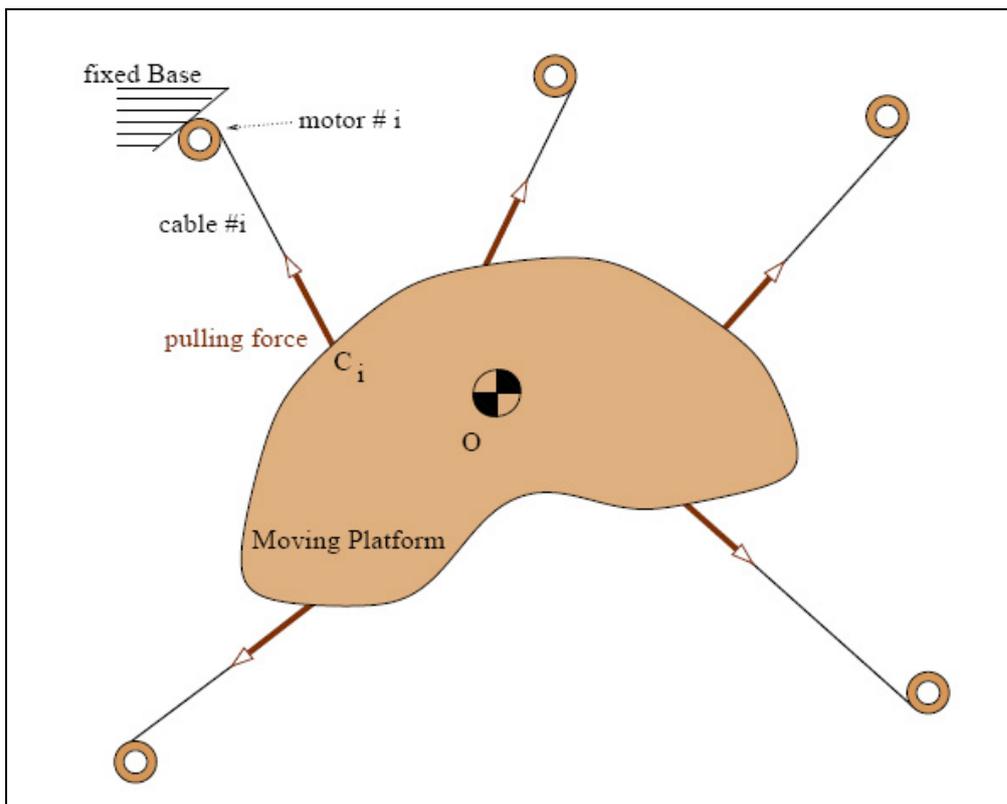


Figura 12 il corrispondente cable robot a  $n = 5$  cavi

Per l'equilibrio statico dell'end effector si deve avere che  $\vec{W} = J^T \cdot \vec{\tau}$  dove  $\vec{W}$  è il vettore dei carichi esterni. Ma la condizione di vincolo  $\tau_i \geq 0$  determina l'impossibilità di trovare sempre una soluzione ammissibile al problema, come era invece per i manipolatori a link rigidi.

Data l'unidirezionalità dell'attuazione, alcuni autori [ ] hanno sottolineato la similitudine del problema rispetto al problema del "grasping", cioè la presa di oggetti con le dita, ciascuna delle quali può invece spingere ma non tirare.

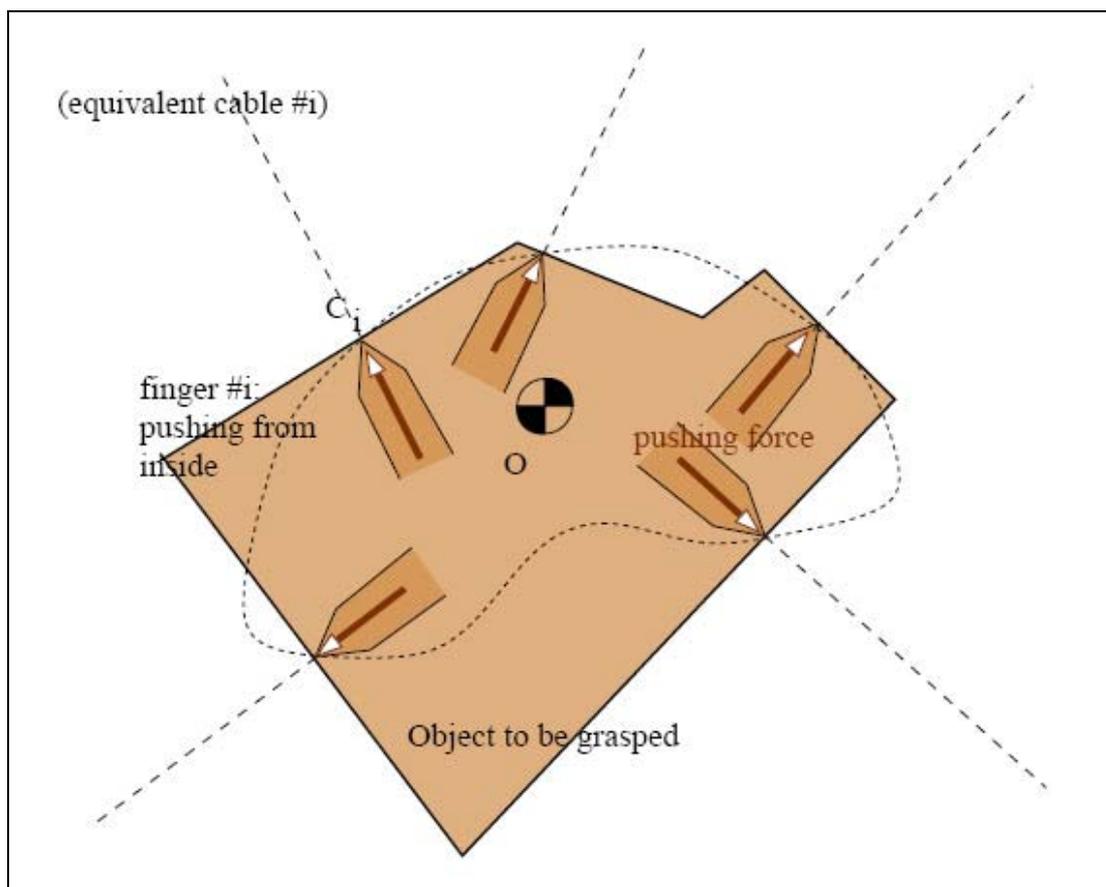


Figura 13 Il corrispondente grasp (mano) a  $n = 5$  dita senza attrito

Successivamente, è stato dimostrato che sotto la condizione di mantenere tutti i cavi in tensione, il NIST e gli altri manipolatori guidati da cavi, producono la stessa efficienza di manipolazione dei manipolatori paralleli rigidi.

Date queste premesse, lo studio dei cable driven robot si è concentrato tutto sulla determinazione delle pose ammissibili per l'end effector [10],[6], quelle cioè in cui è garantito che le tensioni nei cavi siano sempre positive: in pratica si è risolto il problema limitando il campo di lavoro del robot a quelle posizioni ammissibili, mettendo quindi un grosso limite alla maggiore delle potenzialità di questo tipo di robot.

Altri autori [4], sfruttando la similitudine col grasping, hanno studiato le condizioni sotto le quali un cable driven robot gode della proprietà di "force closure", cioè, per definizione, se e solo se ogni arbitrario carico esterno applicato all'end effector può essere bilanciato attraverso appropriate tensioni nei cavi. Tale proprietà è espressa matematicamente come segue:

$$\forall W_e \in R^6 : \exists \tau_1, \dots, \tau_n \in [0, T] : W_e = J^T [\tau_1 \dots \tau_n]^T$$

dove  $W_e$  rappresenta carico esterno.

Per il grasping, questa condizione è stata descritta in termini di convessi (positive combinazioni di forze di contatto), mediante la teoria della convessità, anziché in termini di sottospazi (combinazioni lineari di vettori), mediante l'algebra lineare. Dalla teoria della convessità si ricava, per il grasping, così come per i cable robot, che il

minimo numero di cavi necessari per realizzare la “force closure” è  $n+1$ , dove  $n$  è il numero dei gradi di libertà del corpo.

Ne segue direttamente che tali autori hanno introdotto un numero di cavi “ridondanti” necessari per mantenere in tensione i rimanenti, oppure, sotto un altro approccio, hanno analizzato il campo dei carichi esterni che possono essere bilanciati da tensioni positive nei cavi e quindi hanno limitato solo a questi casi l’uso dei cable driven robot.

Il limite di questo tipo di robot è quello di essere manipolatori statici, progettati per operare in un determinato workspace, sotto l’effetto di carichi esterni noti a priori (forza peso), ma non possono essere utilizzati per operazioni “dinamiche” come quella di un lancio.

## 3 OGGETTO E METODI

In questo capitolo si cercano di definire nel dettaglio le specifiche che il progetto di tesi dovrà soddisfare e si tratterà della scelta dei metodi impiegati per realizzarle.

### 3.1 OGGETTO DELLA TRATTAZIONE

Il lavoro di questa tesi si propone di progettare il meccanismo e il controllo di un manipolatore che sia capace di effettuare operazioni di pick and place in un work space estremamente ampio, quale possa essere quello di applicazioni spaziali o delle esplorazioni planetarie.

Data l'ampiezza dello spazio di lavoro, che in questi casi si quantifica dell'ordine di grandezza di decine di metri in tutte le direzioni dello spazio e data la necessità di operare con una notevole precisione di posizionamento, si è pensato a un nuovo manipolatore del lancio con cinematismo a giunti paralleli.

Dall'osservazione di numerosi esempi, quali quelli della fionda circolare, del lancio del lazzo e, in ambito sportivo, del getto del peso o del lancio del martello, possiamo trovare dei validi suggerimenti riguardo ai metodi migliori per lanciare un oggetto in una direzione desiderata: l'osservazione dei movimenti degli atleti fa pensare che il miglior modo per lanciare a lunga distanza un oggetto, anche pesante, possa essere quello di farlo inizialmente ruotare per imprimergli una velocità iniziale e poi rilasciarlo in un istante opportuno.

Successivamente al lancio, è necessario operare una politica di controllo del volo tale da correggere traiettoria e velocità dell'end effector rispetto a quelle che sarebbero se esso fosse lasciato in evoluzione libera, allo scopo di stabilizzarlo nella configurazione desiderata.

Per le applicazioni spaziali su stazioni orbitanti, possiamo ritenere valide le seguenti ipotesi:

- assenza o trascurabilità della forza di gravità,
- assenza degli attriti da resistenza dell'aria,
- assenza di ostacoli lungo il percorso,
- workspace dell'ordine di 10-20 m.

Si stima inoltre che la capacità di carico necessaria sia di 50 N.

Per le applicazioni di esplorazione planetaria o per le applicazioni terrestri, non può essere trascurata l'azione della forza di gravità, mentre continueremo in prima ipotesi a considerare trascurabili le forze di attrito dell'aria e gli effetti dovuti all'elasticità del materiale del cavo.

## 3.2 METODI ADOTTATI

Il lavoro della tesi parte dalla determinazione della cinematica e della dinamica del meccanismo, ottenute per via analitica e validate da simulazioni in ambiente di Matlab®. Successivamente si procede al design del manipolatore facendo uso del programma di disegno Pro/Engineer Wildfire®. Per la pianificazione del lancio si è scelta una politica di controllo ottimo del posizionamento nel senso del tempo minimo di esecuzione, sfruttando il principio del massimo di Pontryagin, in quanto questo risulta essere il più produttivo per le applicazioni terrestri e permette di minimizzare la probabilità degli errori dovuti ad un eventuale movimento del bersaglio durante l'esecuzione del task. Inoltre, risulta essere un criterio utile per l'analisi di fattibilità del problema.

La pianificazione si è svolta per approssimazioni successive, utilizzando i metodi di soluzione analitica per problemi di controllo ottimo forniti dalla teoria di Pontryagin nei casi più semplici, quale quello in cui il movimento dell'end-effector avviene su una retta, mentre nei casi più generali in cui l'end-effector può muoversi sul piano o nello spazio sono stati utilizzati strumenti di risoluzione numerica offerti dall' *optimization toolbox* di Matlab®.

# 4 MODELLAZIONE DEL PROBLEMA

In questo capitolo determineremo il modello cinematico e dinamico del sistema in questione.

## 4.1 ANALISI CINEMATICA E DINAMICA DEL SISTEMA

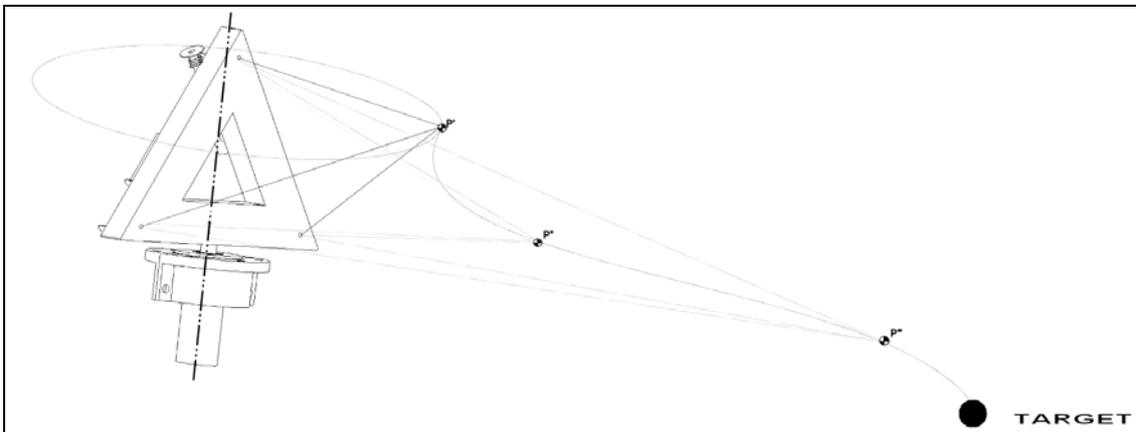
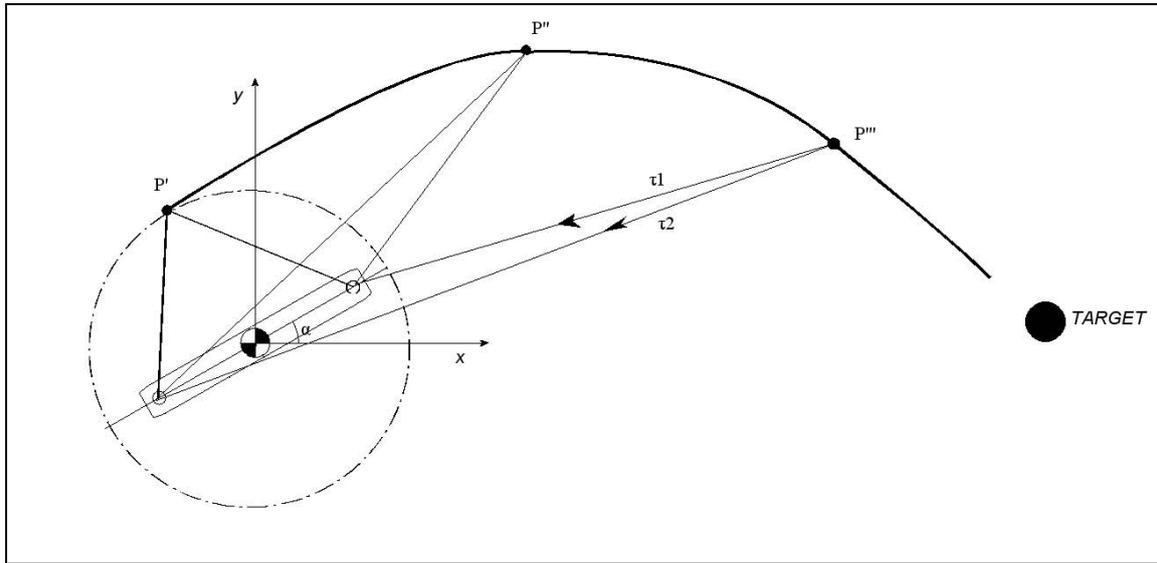


Figura 14 Rappresentazione schematica della struttura del manipolatore

Iniziamo lo studio del manipolatore analizzando l'aspetto cinematico della struttura. Lo schema del manipolatore del lancio è mostrato in Figura 14: si tratta di una piattaforma triangolare rigida girevole, mediante giunto rotoidale, intorno ad un asse fisso che supporremo verticale alle cui estremità sono connessi i tre bracci cedevoli ed estensibili attuati, la cui cinematica –nell'ipotesi che essi siano in tensione- può essere approssimata a quella di tre giunti telescopici, giunti composti con un grado di libertà (DoF) traslazionale prismatico e con tre gradi di libertà rotazionali. L'end-effector è collegato ai bracci flessibili con giunti anch'essi sferici.

### 4.1.1 LA SEMPLIFICAZIONE PLANARE DEL SISTEMA

Data la complessità del sistema spaziale, è necessario, ai fini della ricerca di una soluzione per il controllo ottimo del volo dell'end effector, ridurre il nostro campo di studio a un problema bidimensionale, come mostrato in Figura 15.



**Figura 15** Semplificazione planare del sistema

Consideriamo quindi un braccio girevole alle cui estremità sono collegati solo due cavi e che il moto dell'end effector avvenga su un piano orizzontale in assenza di gravità o con gravità bilanciata da una reazione vincolare. Inoltre si suppone di voler controllare solo il posizionamento dell'end effector e non la sua angolazione.

In questo modo le forze  $\vec{\gamma} = (\gamma_x \ \gamma_y)^T$  applicate all' end effector nel riferimento inerziale possono essere espresse come

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C\alpha_3 & C\alpha_2 \\ S\alpha_3 & S\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

dove  $C\alpha_3 = \frac{x + b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x + b \cdot \cos \alpha)^2 + (y + b \cdot \sin \alpha)^2}}$

$$C\alpha_2 = \frac{x - b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x - b \cdot \cos \alpha)^2 + (y - b \cdot \sin \alpha)^2}}$$

$$S\alpha_3 = \frac{y + b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x + b \cdot \cos \alpha)^2 + (y + b \cdot \sin \alpha)^2}}$$

$$S\alpha_2 = \frac{y - b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x - b \cdot \cos \alpha)^2 + (y - b \cdot \sin \alpha)^2}}$$

quindi la dinamica dell' end effector risulta

$$m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \bar{\gamma} = - \begin{bmatrix} \frac{x+b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2 + (y+b \cdot \sin \alpha)^2}} & \frac{x-b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2 + (y-b \cdot \sin \alpha)^2}} \\ \frac{x+b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2 + (x+b \cdot \sin \alpha)^2}} & \frac{x-b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2 + (y-b \cdot \sin \alpha)^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

dove con  $\alpha$  si è indicato l'angolo che il braccio forma con l'asse delle ascisse nell'istante di lancio. Queste, riscritte in forma di stato, hanno l'espressione

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C\alpha_3 & C\alpha_2 \\ S\alpha_3 & S\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}$$

Evidentemente la dinamica del sistema è di tipo non lineare, sottoposta al vincolo  $0 \leq \boldsymbol{\tau} \leq T_{\max}$ , dovuto al fatto che i cavi possano esercitare solo tensioni positive, cioè possano solo tirare e non spingere l'organo terminale e che gli attuatori possono applicare coppie limitate.

### 4.1.2 LA CINEMATICA DELL'END-EFFECTOR

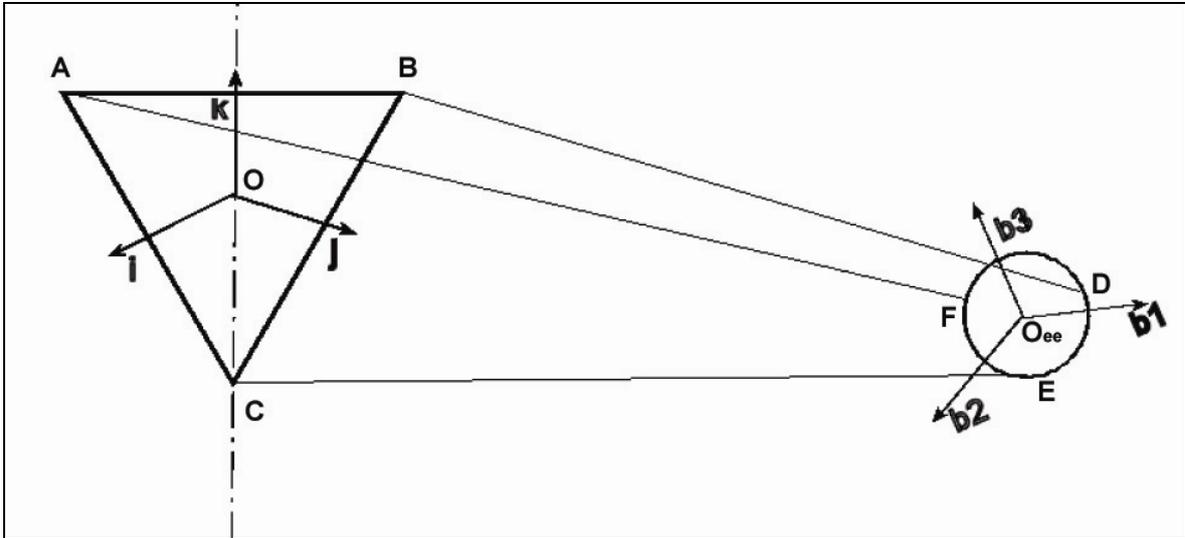


Figura 16 Sistemi di riferimento adottati per lo studio della cinematica del manipolatore

In linea generale, possiamo dire che l'end effector può traslare e ruotare nel sistema di riferimento fisso inerziale  $F_i$ .

In tale sistema di riferimento, di origine in  $O$  e versori  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ , il sistema di riferimento solidale con l'end effector  $F_{ee}$ , di origine  $O_{ee}$  e versori  $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$  può essere ottenuto come una sequenza di rotazioni di  $\psi$  lungo  $\hat{i}$ , di  $\phi$  lungo  $\hat{j}$ , di  $\theta$  lungo  $\hat{k}$  e

conseguentemente essere espresso dalla relazione 
$$\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = R(\psi, \theta, \phi) \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

dove  $R = \begin{bmatrix} C\theta C\phi & S\psi S\theta C\phi - S\phi C\psi & C\psi S\theta C\phi - S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\phi C\psi & C\psi S\theta S\phi - C\phi S\psi \\ -S\theta & S\psi C\theta & C\psi C\theta \end{bmatrix}$

dove  $C\theta, S\theta, C\psi, S\psi, C\phi, S\phi$  indicano i coseni e i seni degli angoli corrispondenti.

Se la velocità angolare del sistema di riferimento mobile  $F_{ee}$  in  $F_i$  è  $\omega_1 \hat{b}_1 + \omega_2 \hat{b}_2 + \omega_3 \hat{b}_3$ ,

si ha che

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S\theta \\ 0 & C\psi & S\psi C\theta \\ 0 & -S\psi & C\psi C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = P\dot{O}$$

e se la sua accelerazione angolare è  $\alpha_1 \hat{b}_1 + \alpha_2 \hat{b}_2 + \alpha_3 \hat{b}_3$  allora

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \dot{P}\dot{O} + P\ddot{O}.$$

La posizione di  $O_{ee}$  in  $F_i$  è descritta dal vettore  $(x_{ee} \ y_{ee} \ z_{ee})^T$  e la velocità e l'accelerazione di questo punto sono  $(\dot{x}_{ee} \ \dot{y}_{ee} \ \dot{z}_{ee})^T$ ,  $(\ddot{x}_{ee} \ \ddot{y}_{ee} \ \ddot{z}_{ee})^T$ .

In definitiva, la configurazione dell'end effector è data da  $\mathbf{x}_{ee} = [x_{ee} \ y_{ee} \ z_{ee} \ \psi \ \theta \ \phi]^T$ .

### 4.1.3 CINEMATICA E STATICA

Come mostrato in Figura 16 i punti di collegamento D, E, F dei cavi sull'end effector possono essere riscritti in termini di  $\mathbf{x}$  e dei parametri geometrici dell'end effector, e le coordinate dei punti A, B, C di collegamento dei cavi col telaio sono i vertici della piattaforma triangolare equilatera di cui  $O$  ne è il baricentro. Per la valutazione della possibilità di posizionamento prescindere dalla geometria dell'end effector e lo supporremo un punto materiale individuato dalle coordinate del suo baricentro

$$\mathbf{x}_{ee} = (x_{ee} \ y_{ee} \ z_{ee})^T$$

Indicato con  $\alpha$  l'angolo che il piano della piattaforma forma con l'asse  $x$  del riferimento fisso al suolo nell'istante di lancio e con  $2b$  la misura del suo lato, le lunghezze dei cavi sono individuate dalla relazione

$$1. \begin{cases} q_1 = \sqrt{(x + b \cos \alpha)^2 + (y + b \sin \alpha)^2 + \left(z + b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ q_2 = \sqrt{(x - b \cos \alpha)^2 + (y - b \sin \alpha)^2 + \left(z + b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + b \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} \end{cases}$$

che esprime la mappatura delle lunghezze dei cavi data la posizione dell'end effector. Definendo  $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$  la posizione cinematica del manipolatore è espressa dalla mappatura non lineare  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ , cioè dalla cinematica inversa del manipolatore. Questa mappatura permette il calcolo della lunghezza dei cavi data la posizione dell'end effector.

La velocità di traslazione della terna utensile può essere espressa come la derivata

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

rispetto al tempo del vettore  $\dot{\mathbf{x}}$  ovvero

dove  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  è la matrice jacobiana della trasformazione.

L'applicazione del principio dei lavori virtuali ci permette di scrivere la relazione duale cineto-statica tra i carichi esterni applicati all'end effector e le tensioni nei cavi richieste per mantenere l'equilibrio  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\gamma}$  dove  $\boldsymbol{\gamma}$  è il vettore delle forze esplicate dall'end effector e  $\boldsymbol{\tau}$  è il vettore delle tensioni dei cavi.

### 4.1.4 EQUAZIONI DEL MOTO

Per le leggi di Newton-Eulero, le equazioni del moto dell'organo terminale possono essere scritte come  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}$  dove  $m$  è la massa dell' end effector e  $\boldsymbol{\tau}$  sono le tensioni dei cavi.

Questa equazione può essere espressa tutta in termini di  $\mathbf{x}$  e delle sue derivate usando la (1.), si perviene in tal modo alla seguente espressione della dinamica del sistema

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z}-g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x+b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{x-b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}} \\ \frac{y+b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{y-b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}} \\ \frac{z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{z+b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

È di rilevante importanza notare che tale modello dinamico è valido solo se i cavi sono in tensione, mentre perde qualsiasi validità negli altri casi.

La validità di questo modello è stata verificata implementandolo in ambiente Simulink di Matlab.

# 5 PROGETTO

Nel seguente capitolo verrà affrontato il progetto del manipolatore meccanico a giunti cedevoli ed estensibili che sia capace di effettuare le operazioni di lancio e recupero, finalizzati alla presa di oggetti comunque disposti nello spazio. A tale scopo si è utilizzato il software di disegno 3D ProEngineer ProE Wildfire.

## 5.1 PROGETTO DEL MANIPOLATORE

La differenza fondamentale fra le specifiche richieste al manipolatore del lancio presentato nel capitolo 2 e quelle del manipolatore che ci si propone di progettare è quella che mentre il primo si propone di raggiungere oggetti che siano posti o si muovano su di un piano, il secondo deve poter raggiungere un qualsiasi punto dello spazio. Evidentemente, se il primo si proponeva come soluzione di un problema bidimensionale, il secondo ricerca una soluzione che sia tridimensionale.

### 5.1.1 FASE DI AVAMPROGETTO

Innanzitutto, la necessità di raggiungere oggetti che possano trovarsi in ogni direzione dello spazio intorno al manipolatore, configura una strategia di avviamento del manipolatore di tipo rotatorio, tale cioè da poter imprimere all'end effector una velocità iniziale che abbia modulo definito dal prodotto della velocità angolare che gli imprime il motore per la distanza iniziale dell'end effector dalla base del manipolatore e direzione definita dalla tangente alla traiettoria circolare che esso sta percorrendo in quell'istante.

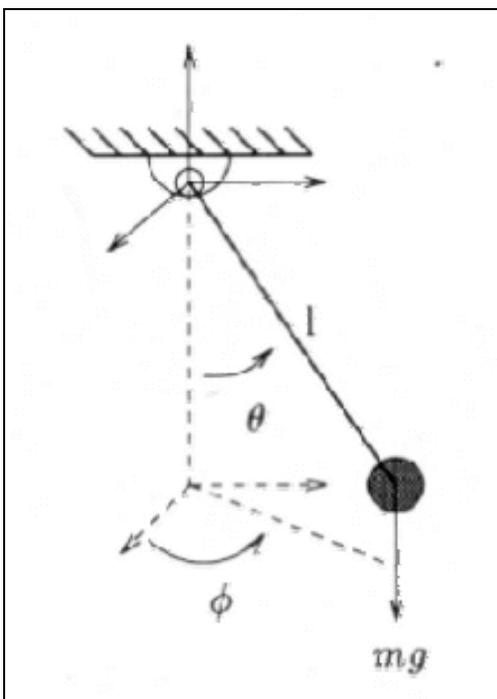
Inoltre il vantaggio di operare una startup phase circolare è anche dovuta al fatto che l'energia cinetica che posso imprimere all'end effector un'energia cinetica pari a  $\frac{1}{2}I\omega^2$ , variabile con  $\omega$  indipendentemente dalla gravità.

La fase di avvio dunque si configura simile a quella operata dagli atleti del lancio del martello: in questo sport l'attrezzo è costruito da una testa sferica di metallo dalla quale parte un filo d'acciaio che termina con una impugnatura triangolare. Il tutto per una lunghezza di circa 120 cm., per complessivi 7,260 Kg.

Le forze che il lanciatore esercita sull'attrezzo, sono applicate all'impugnatura e trasmesse, tramite il filo, alla testa del martello. Questo, in uscita, esprimerà una velocità finale proporzionata all'entità delle forze impresse. Dal punto di vista fisico, la forza applicata dall'atleta genera un moto uniformemente accelerato dell'attrezzo.

Il lanciatore impugna l'attrezzo con entrambe le mani e ruota all'interno della pedana, trasmettendo alla sfera (che si muove su di un'orbita circolare) una progressiva velocità "angolare".

Nei movimenti rotatori, l'equilibrio dinamico mantenuto dall'atleta riveste un'importanza fondamentale per la buona riuscita del lancio. Egli esegue le rotazioni sul suo asse longitudinale, facendo sempre "perno" sul piede interno, provocando un'inclinazione progressiva del piano orbitale del martello e terminando l'azione con la distensione completa delle gambe, del tronco, cui fa sempre seguito una potente "frustata" delle braccia che lasciano l'attrezzo con traiettoria di poco inferiore ai  $45^\circ$ . Con questo metodo di lancio, si può lanciare una massa di quell'entità a distanze prossime agli 80m, ed è stato stabilito il record del mondo di 86,74m. Dal punto di vista fisico, possiamo immaginare che la dinamica della fase di avvio sia quella di un pendolo sferico (Figura 17).



**Figura 17 Pendolo conico**

Questo sistema meccanico consiste in una massa  $m$  connessa a un giunto sferico attraverso un cavo inestensibile privo di massa. Poiché la massa è vincolata a stare istante per istante sulla sfera di raggio  $l$ , essa possiede solo due gradi di libertà, nonostante il suo movimento avvenga nello spazio. Quindi due sole variabili descrivono il suo moto. Per comodità, scegliamo gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  per descrivere il moto del corpo. Supponendo che tutte le condizioni iniziali siano note, possiamo scrivere le equazioni del moto della massa sotto l'effetto della forza di gravità nel modo che segue.

Considerando il giunto sferico come origine del nostro sistema di riferimento, la posizione della massa  $m$  è data dal vettore

$$\vec{r}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} l \sin \theta \cos \phi \\ l \sin \theta \sin \phi \\ -l \cos \theta \end{bmatrix}$$

di conseguenza l'energia cinetica della massa è:

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \|\dot{\vec{r}}\|^2 = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + (1 - \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2)$$

mentre l'energia potenziale della stessa è  $V = -mgl \cos \theta$ , dove con  $g$  si è indicata l'accelerazione di gravità, che come ben noto, sulla superficie terrestre vale  $9.8 \text{ m/s}^2$ , ma può essere notevolmente diversa sulla superficie di altri pianeti.

Introducendo la coordinata generalizzata  $q = (\theta, \phi)$ , il sistema ha Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + (1 - \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2) - mgl(1 - \cos \theta)$$

che rappresenta l'energia cinetica impressa all'end effector nella fase di avvio.

Sostituendo l'espressione della Lagrangiana nelle equazioni del moto di Lagrange, si ha che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - mgl \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} (ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

quindi la dinamica del sistema è data da

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgl \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Le precedenti equazioni, unite alle condizioni iniziali

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$$

$$\phi(0) = \phi_0$$

$$\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$$

danno la descrizione unica del moto del pendolo.

Si noti che, a causa dei termini di accoppiamento fra  $\theta$  e  $\phi$ , una variazione della velocità angolare  $\dot{\phi} = \omega$ , determina anche una accelerazione angolare  $\ddot{\theta}$ , conseguentemente, per effetto della rotazione, la massa, partendo da una condizione iniziale anche leggermente discosta dall'asse di rotazione, accelererà nel senso delle  $\theta$  crescenti.

Evidentemente potrà essere messo a punto un controllo tale da stabilizzare il sistema a ruotare in un piano determinato, per esempio quello individuato dall'essere  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , in modo che su questo piano esso descriva una traiettoria circolare con velocità angolare  $\dot{\phi} = \omega$  costante.

Sarà questo quindi uno degli aspetti che potrebbero essere oggetto di studi futuri sulla manipolazione del lancio.

Noi supporremo plausibile l'idea che il lancio possa avvenire in un istante desiderato, con condizioni iniziali note. Anzi, come si vedrà approfonditamente nel seguito, l'istante desiderato e le condizioni iniziali di lancio sono determinate dalla pianificazione del volo nel tempo minimo di esecuzione.

Detto ciò, l'idea iniziale del manipolatore è quella di un braccio rigido attuato girevole intorno ad un asse fisso alla cui estremità è posta una bobina che porta il cavo che ne costituirà il giunto estensibile.

Tuttavia, la necessità successiva di controllare durante il lancio il moto dell'end effector nelle tre direzioni dello spazio, ci induce a pensare che il meccanismo più consono per questo tipo di task sia quello di un'architettura simile a quella di un cable driven robot, con tre giunti attuati indipendentemente.

L'introduzione di un numero superiore di cavi causerà una complicazione del controllo della fase di avvio, ma per sopperire a questa difficoltà, essendo i tre cavi controllati indipendentemente, si può comunque adottare una strategia di avvio tale che la composizione delle tensioni nei tre cavi sia sempre di modulo costante e diretta

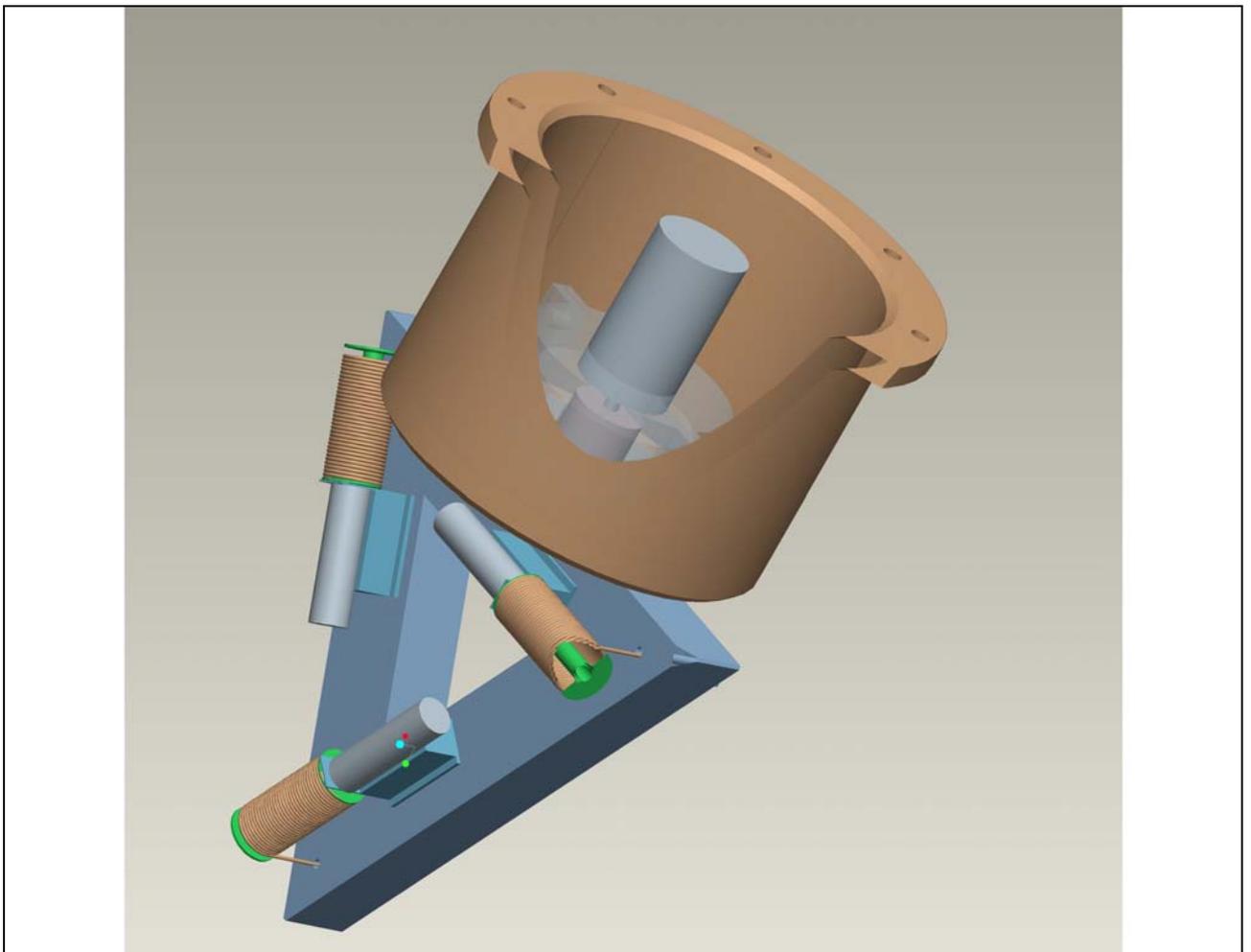
nell'origine del sistema di riferimento, di modo che l'architettura fisica del problema dell'avvio sia sempre quella di un pendolo conico. Anche questo requisito sarà uno degli aspetti che potrebbero essere oggetto di studi futuri sulla fase di avvio della manipolazione del lancio.

Inoltre, in questo lavoro si cerca di progettare un casting manipulator che, differentemente da quello precedentemente realizzato, abbia la capacità di operare un controllo di tipo "smooth", cioè non impulsivo, come invece era quello precedente, perché ottenuto tramite una opportuna combinazione di frenate di diverse durate.

## 5.1.2 IL PROGETTO MECCANICO

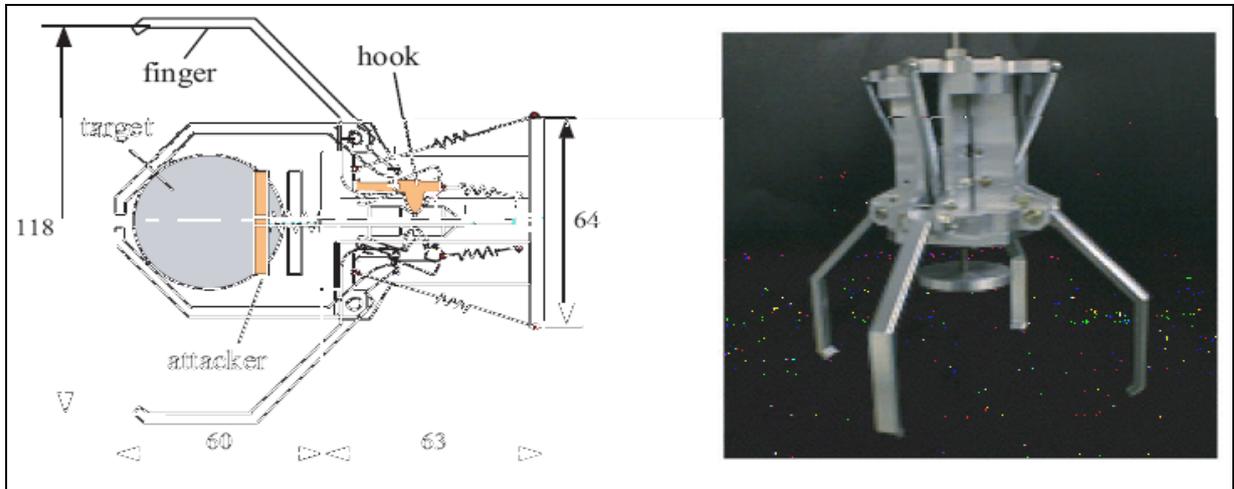
La Figura 18 è una vista completa del manipolatore progettato.

Il manipolatore è stato pensato per poter essere montato o su mezzi di locomozione a terra, quali possono essere le piattaforme rover per le esplorazioni planetarie oppure a soffitto, per le applicazioni terrestri, quali le operazioni industriali di pick and place.



**Figura 18** Vista tridimensionale del manipolatore progettato

L'organo di presa è già stato progettato nei precedenti lavori sulla casting manipulation e in questa sede se ne riporta il progetto meccanico e una immagine della sua realizzazione.



**Figura 19 L'end effector del manipolatore: organo di presa**

Il meccanismo di chiusura di questo end effector viene azionato dalla forza di impatto con l'oggetto preso. Risulta quindi necessario che questo arrivi nella posizione desiderata con una sufficiente velocità finale: il parametro non ci è noto a priori, e dipende dagli scopi per cui il manipolatore verrà utilizzato. Le molle che presiedono alla chiusura del meccanismo saranno quindi dimensionate volta per volta a seconda dell'uso.

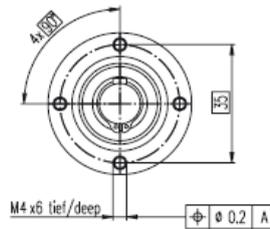
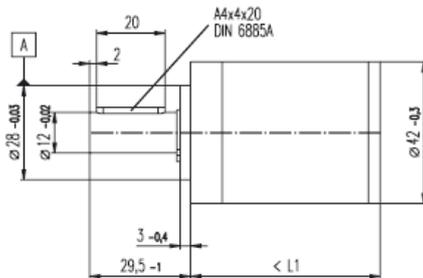
La scelta operata per il motore che attua il moto della piattaforma è basata sulla necessità di garantire ad essa una velocità di rotazione tale da poter imprimere, attraverso i giunti, una velocità angolare costante al moto dell'end effector in condizioni di stabilità. Nel nostro progetto si è supposto di lanciare l'organo terminale sempre con velocità tangenziale pari a 1 m/s.

A tale scopo è stato scelto un motore Maxon EC 40 collegato con un riduttore planetario con pignoni in linea, scelto secondo il sistema modulare della casa fornitrice, di cui si riportano le specifiche.



## Riduttore planetario GP 42 C Ø42 mm, 3 - 15 Nm

Versione in ceramica



M 1:2

### Dati tecnici

Riduttore planetario	Denti dritti
Albero in uscita	Acciaio inossidabile
Cuscinetti in uscita	Cuscinetti a sfere
Gioco radiale, 12 mm dalla flangia	precaricati
Gioco assiale	precaricati
Carico assiale massimo consentito	150 N
Forza di calettamento massima	300 N
Senso di rotazione, dall'entrata all'uscita	=
Velocità d'ingresso consigliata	< 8000 rpm
Intervallo di temperatura consigliato	-20 ... +100°C
Intervallo esteso come opzione	-35 ... +100°C
Numero di stadi	1 2 3 4
Carico radiale massimo a 12 mm dalla flangia	120 N 150 N 150 N 150 N

Dati relativi al riduttore								
1	Riduzione	3.5 : 1	12 : 1	43 : 1	91 : 1	150 : 1	319 : 1	546 : 1
2	Riduzione assoluta	7/2	49/4	343/8	91	2401/16	697/2	546
3	Momento d'inerzia	gcm <sup>2</sup>	14	15	15	15	15	14
4	Max. diametro dell'albero motore	mm	10	10	10	10	10	10
<b>Codice prodotto</b>		<b>203114</b>	<b>203116</b>	<b>203121</b>	<b>203126</b>	<b>203130</b>	<b>203135</b>	<b>203140</b>
1	Riduzione	4.3 : 1	15 : 1	53 : 1	113 : 1	186 : 1	353 : 1	676 : 1
2	Riduzione assoluta	13/3	91/6	637/12	398/3	4459/24	28561/81	676
3	Momento d'inerzia	gcm <sup>2</sup>	9.1	15	15	9.4	15	9.4
4	Max. diametro dell'albero motore	mm	8	10	10	8	10	8
<b>Codice prodotto</b>			<b>203117</b>	<b>203122</b>	<b>203127</b>	<b>203131</b>	<b>203136</b>	<b>203141</b>
1	Riduzione		19 : 1	66 : 1	126 : 1	230 : 1	394 : 1	756 : 1
2	Riduzione assoluta		169/9	1189/18	126	8281/36	1189/3	756
3	Momento d'inerzia	gcm <sup>2</sup>	9.4	15	14	15	15	14
4	Max. diametro dell'albero motore	mm	8	10	10	10	10	10
<b>Codice prodotto</b>			<b>203118</b>	<b>203123</b>	<b>203129</b>	<b>203132</b>	<b>203137</b>	<b>203142</b>
1	Riduzione		21 : 1	74 : 1	156 : 1	257 : 1	441 : 1	936 : 1
2	Riduzione assoluta		21	147/2	156	1029/4	441	936
3	Momento d'inerzia	gcm <sup>2</sup>	14	15	9.1	15	14	9.1
4	Max. diametro dell'albero motore	mm	10	10	8	10	10	8
<b>Codice prodotto</b>			<b>203119</b>	<b>203124</b>		<b>203133</b>	<b>203138</b>	
1	Riduzione		26 : 1	81 : 1		285 : 1	488 : 1	
2	Riduzione assoluta		26	2197/27		15379/54	4994/9	
3	Momento d'inerzia	gcm <sup>2</sup>	9.1	9.4		15	9.4	
4	Max. diametro dell'albero motore	mm	8	8		10	8	
5	Numero di stadi		1	2	3	3	4	4
6	Coppia continua massima	Nm	3.0	7.5	15	15	15	15
7	Coppia consentita per breve tempo	Nm	4.5	11.3	22.5	22.5	22.5	22.5
8	Rendimento massimo	%	90	81	72	72	64	64
9	Peso	g	260	360	460	460	560	560
10	Gioco a vuoto medio	°	0.6	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0
11	Lunghezza del riduttore L1	mm	40.9	55.4	69.9	69.9	84.4	84.4



Come spesso accade, il progetto è stato un co-design meccanico controllistico: determinate infatti le traiettorie ottime da far inseguire al sistema, si è potuto calcolare le velocità di variazione delle lunghezze dei giunti necessarie, valutandole nelle condizioni più svantaggiose, per inciso, quelle in cui si raggiunga un target posto alla massima distanza dal manipolatore nel tempo ottimo.

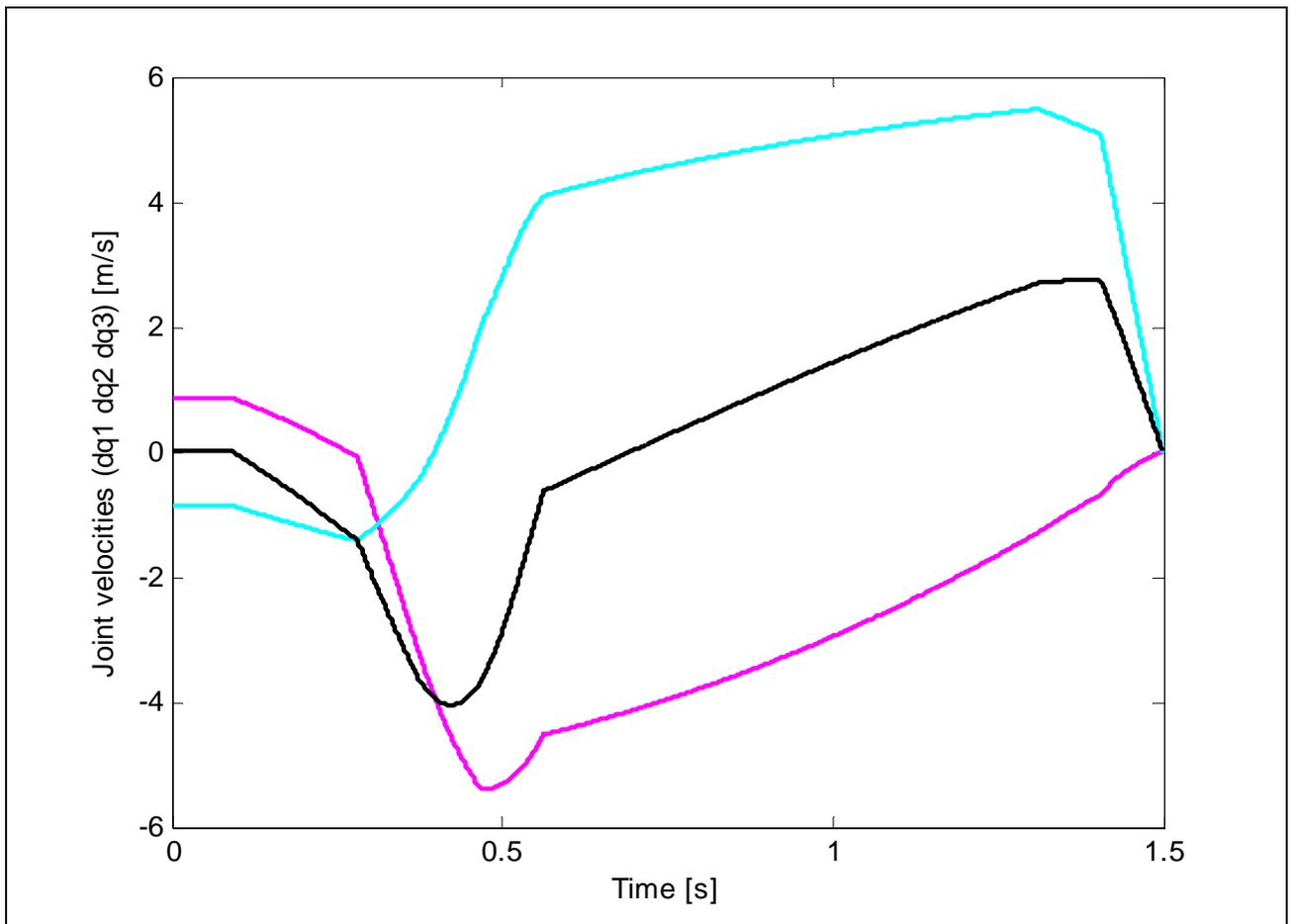


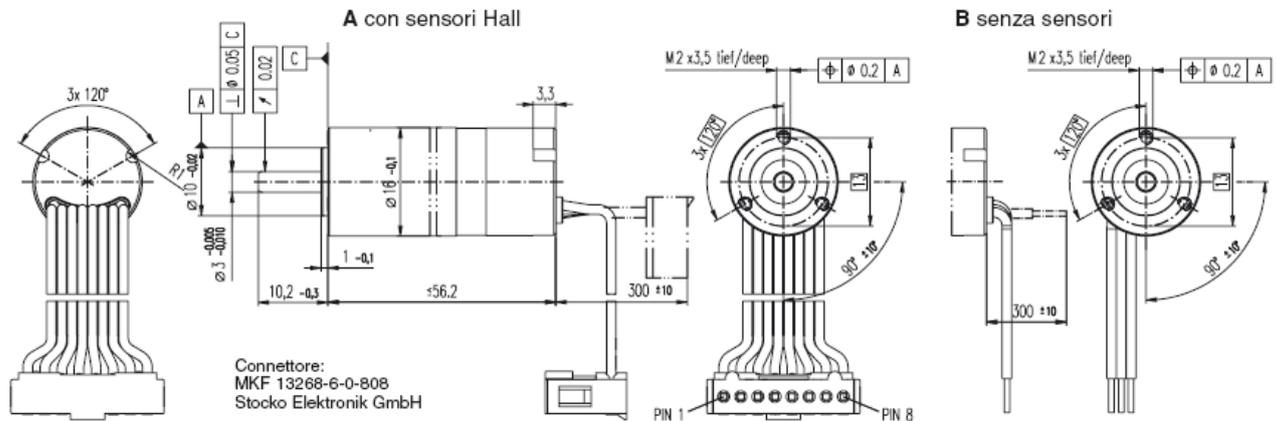
Figura 20 velocità di srotolamento dei cavi, ottenute per il caso più critico

$t = t_{\text{ottimo}}$  per il punto più distante considerato

La massima variazione di lunghezza dei giunti è dell'ordine di 6 m/s (vedi Figura 20), per cui è stata scelta un motore che garantisca 7200 rpm e sono stati scelti i motori Maxon EC16, che inoltre garantiscono la possibilità di invertire il moto.

Le specifiche di questo motore sono qui sotto allegate.

**EC 16** Ø16 mm, Senza spazzole, 40 Watt



M 1:1

Dati del motore									
1	Potenza assegnata	W	40	40	40	40	40	40	40
2	Tensione nominale	Volt	12.0	18.0	24.0	32.0	12.0	18.0	24.0
3	Velocità a vuoto <sup>1)</sup>	rpm	35800	40300	41400	41400	35800	40300	41400
4	Coppia di stallo <sup>1)</sup>	mNm	134	158	176	175	134	158	176
5	Gradiente velocità / coppia <sup>1)</sup>	rpm / mNm	269	256	237	239	269	256	239
6	Corrente a vuoto <sup>1)</sup>	mA	358	285	222	167	358	285	222
7	Resistenza ai terminali fase-fase	Ohm	0.28	0.48	0.75	1.34	0.28	0.48	0.75
8	Velocità massima tollerata	rpm	50000	50000	50000	50000	50000	50000	50000
9	Corrente continua massima a 10 000 rpm <sup>1)</sup>	A	4.5	3.4	2.8	2.1	4.5	3.4	2.8
10	Coppia continua massima a 10 000 rpm	mNm	13.5	13.6	13.5	13.5	13.5	13.6	13.5
11	Rendimento massimo <sup>1)</sup>	%	82.8	83.7	84.3	84.3	82.8	83.7	84.3
12	Costante di coppia	mNm / A	3.18	4.23	5.50	7.33	3.18	4.23	5.50
13	Costante di velocità	rpm / V	3007	2255	1736	1302	3007	2255	1736
14	Costante di tempo meccanica	ms	3.60	3.40	3.15	3.20	3.60	3.40	3.15
15	Momento d'inerzia del rotore	gcm <sup>2</sup>	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27
16	Induttanza ai terminali fase-fase	mH	0.014	0.025	0.042	0.075	0.014	0.025	0.042
17	Resistenza termica tra l'involucro e l'ambiente	K / W	10.3	10.3	10.3	10.3	10.3	10.3	10.3
18	Resistenza termica tra l'avvolg. e l'involucro	K / W	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20
19	Costante di tempo termica dell'avvolgimento	s	2.16	2.16	2.16	2.16	2.16	2.16	2.16
20	Costante di tempo termica dello statore	s	264	264	264	264	264	264	264

Specifiche	Intervallo di utilizzo	Legenda	Dettagli a pagina 149
<ul style="list-style-type: none"> <li>Gioco assiale &lt; 3.5 N 0 mm</li> <li>da carico assiale &gt; 3.5 N max. 0.14 mm</li> <li><b>Cuscinetti a sfere</b> pretensionati</li> <li>Forza di pretensionamento min. 3.5 N</li> <li>Carico massimo dei <b>cuscinetti a sfere</b></li> <li>assiale (dinamico) 3 N</li> <li>radiale (a 5 mm dalla flangia) 10 N</li> <li>Forza di pressione (statica) 40 N</li> <li>(statico, albero supportato) 250 N</li> <li>Temperatura ambiente -20 ... +100°C</li> <li>Temperatura max. dell'avvolgimento +125°C</li> <li>Peso del motore 58 g</li> <li>Magnete permanente a 2 poli</li> <li>I valori riportati nelle tabelle sono nominali.</li> <li><b>Terminali A</b></li> <li>marrone avvolgimento motore 1 Pin 1</li> <li>rosso avvolgimento motore 2 Pin 2</li> <li>arancione avvolgimento motore 3 Pin 3</li> <li>giallo V<sub>Hall</sub> 4.5 ... 24 VDC Pin 4</li> <li>verde GND Pin 5</li> <li>blu sensore Hall 1 Pin 6</li> <li>violetto sensore Hall 2 Pin 7</li> <li>grigio sensore Hall 3 Pin 8</li> <li><b>Terminali B</b> (Cavo AWG 24)</li> <li>marrone avvolgimento motore 1</li> <li>rosso avvolgimento motore 2</li> <li>arancione avvolgimento motore 3</li> <li>Quadro delle connessioni per sensori Hall vedi pagina 26</li> </ul>	<p><b>Intervallo di utilizzo</b></p>	<p><b>Legenda</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>— Curva della potenza assegnata costante</li> <li><span style="background-color: red; color: white;"> </span> <b>Operazioni in continuo</b> Rispettando le seguenti resistenze termiche (righe 17 e 18), con una temperatura ambiente di 25°C si giungerà alla temperatura max. dell'avvolgimento per operazioni in continuo = Limite termico.</li> <li><span style="background-color: white; border: 1px solid black;"> </span> <b>Operazioni di breve durata</b> Il motore può essere sovraccaricato per breve tempo e ripetutamente.</li> <li><span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">262866</span> Motore con avvolgimento ad alta resistenza</li> <li><span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">235689</span> Motore con avvolgimento a bassa resistenza</li> </ul>	
	<p><b>Sistema modulare maxon</b></p> <p><b>Riduttore planetario</b> Ø22 mm 0.5 - 2.0 Nm Dettagli a pagina 213</p> <p><b>Encoder MR</b> 128 / 256 / 512 impulsi, 2 / 3 canali</p> <p><b>Electronica di controllo:</b> AECS 35/3 pagina 262 DEC 50/5 264 DECV 50/5 265 DES 50/5 267 EPOS 24/1, 24/5 271 Guida 17</p>		

Entrambi i tipi sono servomotori direct drive, ciascuno dei quali è interfacciabile con un encoder.

I giunti cedevoli sono stati scelti cavi in Kevlar® che garantiscono

- Resistenza a trazione 20 volte superiore a un cavo d'acciaio di pari sezione
- Buona resistenza agli agenti chimici
- Ottima resistenza all'abrasione
- Temperatura di esercizio da -200° a 160°

## 6 CONTROLLO OTTIMO IN TEMPO MINIMO DEL MANIPOLATORE

Nel capitolo 4 si è dimostrato come sia possibile collegare le variabili di giunto, nel nostro caso le lunghezze dei cavi, allo stato dell'end effector.

Si vuole, in questa sede, pianificare il riferimento di traiettoria che l'organo terminale deve seguire perché l'esecuzione del suo task sia ottima nel senso del tempo minimo.

Come si era anticipato, la scelta di una politica di controllo operata in tal senso è dovuta a due fattori:

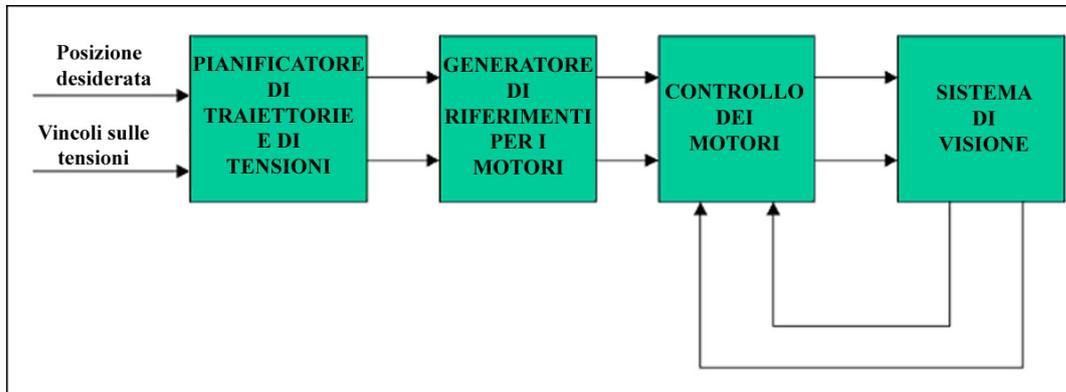
- in generale, l'esecuzione di un compito nel minimo tempo possibile, determina un aumento di produttività dell'intero sistema, poiché aumenta il numero di attuazioni possibili per una stessa unità di tempo,
- permette di minimizzare la probabilità degli errori dovuti ad un eventuale cambiamento, contemporaneo all'esecuzione, delle condizioni per cui la pianificazione è stata progettata: nel caso in esame, si tenta di minimizzare in tal modo la probabilità che il bersaglio si muova durante la fase di volo. Questa pianificazione, permetterebbe di migliorare, a priori, la percentuale di successi ottenuti, anche nel caso in cui si sia provvisto il manipolatore di un sistema di controllo in retroazione basato su un sistema di visione, come è stato precedentemente realizzato per il casting manipulator.

Pianificare in tal senso la traiettoria da far seguire all'organo terminale significa pianificare lo srotolamento dei giunti flessibili, poiché stato dell'end effector e stati dei giunti sono in relazione fra loro secondo l'espressione

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \sqrt{(x + b \cos \alpha)^2 + (y + b \sin \alpha)^2 + \left(z + b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ q_2 = \sqrt{(x - b \cos \alpha)^2 + (y - b \sin \alpha)^2 + \left(z + b \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + b \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} \end{array} \right.$$

e prevede anche la pianificazione delle coppie che i motori devono imprimere ai giunti.

Lo schema con cui si vuole procedere nella progettazione completa del controllo del manipolatore è mostrato nella figura seguente.



**Figura 21** Schema di progettazione del sistema di controllo

Il pianificatore di traiettoria e tensioni ai giunti ha come ingressi la posizione desiderata da far raggiungere all'organo terminale, che rappresenta la posizione del bersaglio inizialmente supposta fissa e nota a priori e i vincoli sulle tensioni imposte ai giunti, ed ha come uscite la traiettoria e le tensioni da applicare ai giunti perché la percorrano, calcolate istante per istante, oltre che il tempo ottimo di esecuzione. Queste rappresentano gli ingressi per il generatore di riferimenti dei motori che trasforma, mediante la conoscenza del modello, lo stato dell'end effector e le tensioni ai giunti nelle posizioni angolari che i motori devono assumere.

Successivamente un controllore on line basato su un sistema di visione prevede alla correzione della traiettoria nel caso in cui il bersaglio si stia muovendo o eventuali disturbi abbiano perturbato lo stato dell'end effector rispetto alla traiettoria pianificata.

E' importante notare come i blocchi al di fuori dell'anello di retroazione possano essere calcolati non in tempo reale: questo alleggerisce il carico computazionale che grava sul controllore. Infatti sia la pianificazione della traiettoria e delle tensioni ai giunti che la trasformazione di queste nelle posizioni angolari desiderate dei motori sono operazioni che possono essere eseguite a parte e non devono necessariamente essere svolte mentre si genera il movimento.

Il confronto successivo fra la posizione effettiva e quella desiderata - pianificata -, oppure, nel caso in cui il bersaglio si stia muovendo, fra la posizione pianificata e la posizione attuale del target genera il segnale di errore in ingresso al controllo che distintamente opera la correzione real time della traiettoria.

In questa sede si tratterà esclusivamente del primo step di questa implementazione, rimandando agli studi futuri lo sviluppo dei successivi passi.

## 6.1 LA PIANIFICAZIONE DELLA TRAIETTORIA

La pianificazione della traiettoria ottima nel tempo minimo è un problema ben noto e già risolto per i manipolatori a giunti rigidi [32]. Per tali manipolatori i vincoli che devono essere rispettati sono dovuti al limite sulle coppie che i motori possono imprimere e possono assumere valori sia positivi sia negativi. Per i manipolatori a giunti cedevoli, come si è anzidetto, il limite è dovuto alla loro stessa natura, in quanto essi possono trasmettere solo tensioni positive.

Alla nostra attuale conoscenza, ci risulta che il posizionamento di un manipolatore a giunti cedevoli è stato trattato limitando il work space alle configurazioni in cui è garantito il rispetto del vincolo [9], ma non ci risulta essere stata mai vagliata l'ipotesi di pianificarne il moto rispettando le condizioni impresse dai vincoli.

Vien da sé che, sebbene si sia spesso implementato un software per il controllo ottimo di manipolatori rigidi, e sebbene si sia ampiamente studiato il posizionamento di cable-driven robot, non ci risulta che sia mai stato studiato il posizionamento in tempo minimo di un manipolatore del lancio guidato da cavi.

### 6.1.1 DESCRIZIONE MATEMATICA DEL PROBLEMA DEL CONTROLLO OTTIMO

Il problema matematico del controllo ottimo [30,31] in generale è un tipico problema di calcolo delle variazioni, che consiste nella ricerca delle traiettorie corrispondenti a un minimo di un dato funzionale di "costo".

La definizione di un problema di controllo ottimo richiede i seguenti dati:

1. il sistema differenziale (in forma di stato)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

in cui  $x \in \mathbb{R}^n$  rappresenta lo stato,  $u \in \mathbb{R}^m$  il controllo ed  $f \in \mathbb{R}^n$  le funzioni del sistema, continue a tratti rispetto al tempo, continue e dotate di derivate parziali prime continue rispetto a tutti gli altri argomenti.

2. le condizioni di vincolo sul controllo

$$U_{\min} \leq u \leq U_{\max}$$

3. l'istante iniziale e lo stato all'istante finale

$$t_a, x_a = x(t_a)$$

4. i vincoli sullo stato finale

$$\beta(x(t_b), t_b) = 0$$

Si dice che la legge di controllo

$$u(t) \quad t_a \leq t \leq t_b$$

le cui componenti sono funzioni del tempo continue a tratti, soddisfacenti i vincoli  $U_{\min} \leq u \leq U_{\max}$  corrisponde ad una traiettoria *ammissibile*, se, risolvendo il sistema  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$  a partire dalla condizione iniziale  $t_a, x_a = x(t_a)$  con il controllo espresso da  $u(t)$  si ottiene una traiettoria nello spazio degli stati  $x(t)$ , con  $t_a \leq t \leq t_b$ , che soddisfi i vincoli sullo stato finale.

Assegnate inoltre le funzioni  $\gamma(x, t)$  ed  $f_0(x, u, t)$  con  $\gamma$  continua ed  $f_0$  appartenente alla classe di funzioni di  $f(x(t), u(t), t)$ , la particolare traiettoria ammissibile  $x^o(t)$  corrispondente al controllo  $u^o(t)$  si dice *Ottima* se corrisponde a un minimo dell' indice di comportamento

$$c = \gamma(x(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

ossia se risulta

$$\gamma(x^o(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x^o(t), u^o(t), t) dt \leq \gamma(x_1(t_b), t_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x_1(t), u_1(t), t) dt$$

per ogni coppia di funzioni  $x_1(t_b), u_1(t)$  corrispondenti ad una traiettoria ammissibile e alla relativa funzione di controllo.

Le condizioni necessarie perché esista una soluzione al problema sono state espresse in tempi relativamente recenti (1959) dal matematico russo Pontryagin e sono enunciati nel seguente principio:

Condizione necessaria perché la traiettoria  $\hat{x}^o(t)$ , corrispondente al controllo  $\hat{u}^o(t)$ , sia *Ottima* è che esistano  $n+1$  funzioni  $p$  del tempo, mai contemporaneamente tutte nulle

$$\hat{p}^o(t) = (p_0^o(t), \dots, p_n^o(t))$$

dette funzioni aggiunte, soddisfacenti il sistema lineare omogeneo a coefficienti variabili nel tempo, detto *sistema aggiunto*,

$$\dot{p}_i(t) = - \sum_{k=0}^n \left. \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right|_{\hat{x}^o, u^o} p_k(t) \quad (i=0, \dots, n)$$

e la condizione

$$p^o(t_b) = -\text{grad } \gamma|_{x^o(t_b)} + \sum_{k=1}^l \mu_k \text{grad } \beta_k|_{x^o(t_b)}$$

(in cui le  $\mu_k$  sono parametri arbitrari (pesi) ), tali che la *funzione hamiltoniana*

$$H(x, \hat{p}, u, t) \triangleq \sum_{i=0}^n p_i f_i(x, u, t) = \hat{p}^T \hat{f}(x, u, t)$$

goda della proprietà

$$H(x^o, \hat{p}^o, u^o, t) \geq H(x^o, \hat{p}^o, u_1, t)$$

per ogni  $t, t_a \leq t \leq t_b$  e per ogni  $u_1$  soddisfacente il vincolo  $U_{\min} \leq u \leq U_{\max}$ .

## CONTROLLO OTTIMO IN TEMPO MINIMO: IL BRACHISTOCRONO

Un esempio particolare di un problema di controllo ottimo, è il problema del posizionamento in tempo minimo, altrimenti detto problema del brachistocrono. Per questo problema la funzione di costo è espressa da

$$\int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt$$

Nel caso generale, esso si esprime matematicamente come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{t_f-t_0} \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt \\ \dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \\ \vec{x}(t_f) = \vec{x}_f \\ |u_i(t)| \leq u_{iMAX} \end{array} \right.$$

dove  $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, \vec{u})$  rappresenta la dinamica del sistema. Come si è anzi detto, si tratta di un problema che matematicamente viene affrontato mediante il calcolo delle variazioni e la sua soluzione è una funzione di ingresso  $u(\bullet)_{[t_0, t_f]}$  ammissibile che faccia evolvere il sistema in modo ottimo rispetto all'indice obiettivo

$$\min_{t_f-t_0} \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt$$

Il problema del Brachistocrono ha una soluzione analitica, già analizzata in diversi lavori precedentemente svolti anche in questo dipartimento [30,32] che è rappresentabile nello spazio di stato col seguente diagramma di stato Figura 22. Supponendo che  $U_{MAX} = 1$  e  $U_{MIN} = -1$ , questa relazione rappresenta un insieme di parabole che per  $U_{MAX} = 1$  hanno la concavità rivolta verso destra, per  $U_{MIN} = -1$  verso sinistra.

Tali parabole vengono percorse, nel tempo, sempre in senso orario. Da questo si deduce come per arrivare sull'origine ci siano due sole possibili traiettorie.

Ogni stato esterno a tali traiettorie si muove su un arco di parabola fino ad incontrarne una delle due. Nell'istante in cui lo stato del sistema ha raggiunto una posizione appartenente a una delle due traiettorie che riportano nell'origine, il controllo commuta. Per questo, l'insieme delle due traiettorie viene detta funzione di *switching*.

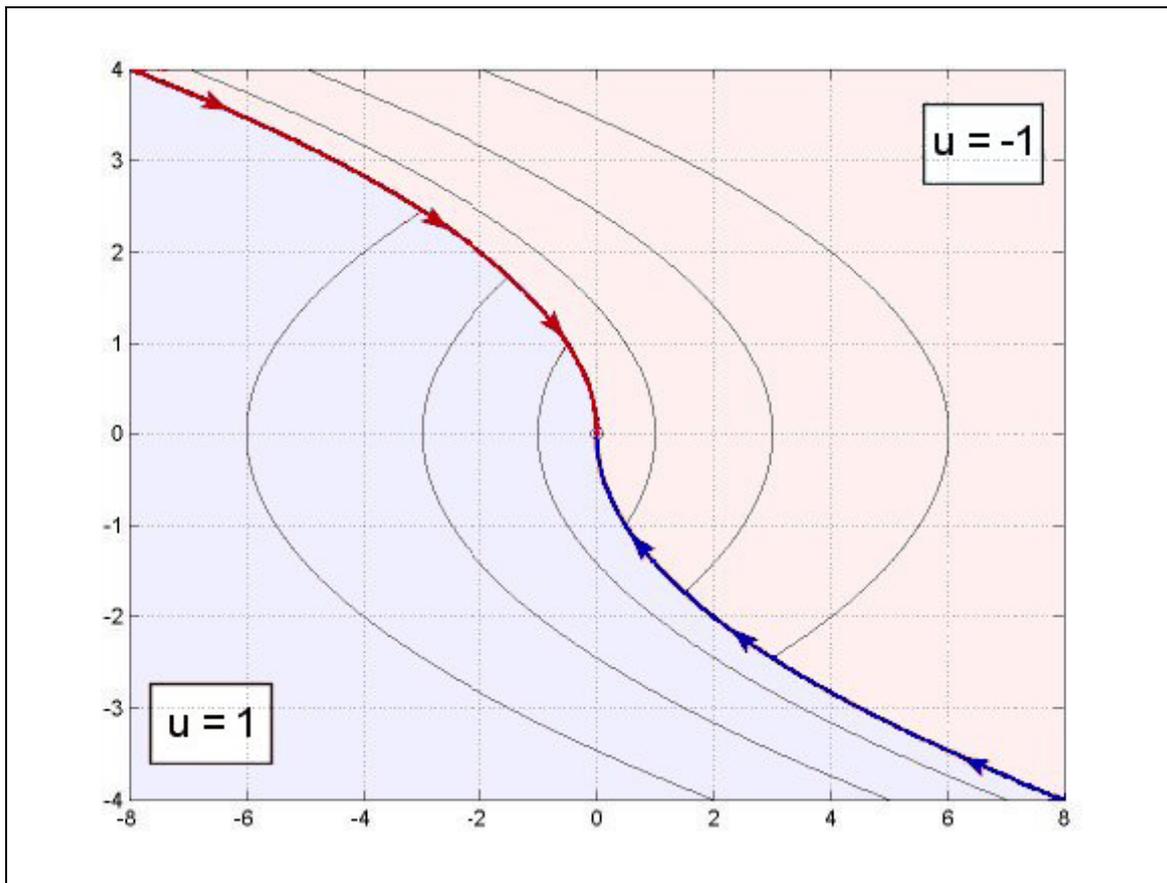


Figura 22 Percorsi ottimi nel piano di stato, nel caso in cui  $-1 \leq u \leq 1$ . Le traiettorie evidenziate sono le parabole che portano nell'origine.

Il controllo ottimo risulta essere costituito da una fase di accelerazione massima seguita da una fase di massima decelerazione o viceversa, in dipendenza dalle condizioni iniziali, per questo si usa riferirsi a questo tipo di controllo col nome *bang-bang*.

Ci si propone di risolvere invece un problema diverso, quello cioè in cui i limiti sul controllo non siano simmetrici rispetto allo zero, ma siano sbilanciati in una o in un'altra direzione.

Ancora più particolare, e più interessante per i nostri scopi futuri, è valutare il caso in cui non sia mai possibile applicare un controllo negativo e conseguentemente, valutare le zone in cui sia possibile stabilizzare il sistema nell'origine.

Supponiamo, quindi, di voler portare un sistema di massa puntiforme, mobile su una retta senza attrito, all'origine dello spazio di stato (posizione e velocità nulle) in un tempo minimo, con vincolo sull'ampiezza del controllo da applicare, cioè, nello specifico, potendo applicare solo un controllo positivo e limitato superiormente, partendo da una posizione iniziale nota.

La dinamica  $\ddot{x} = u$  riscritta in forma di stato è

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}$$

con condizioni al contorno

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0,$$

$$\bar{x}(t_f) = 0$$

e limiti sugli ingressi

$$0 \leq u \leq T_{MAX}$$

L'Hamiltoniana, in questo caso, vale  $H = 1 + p_1 x_2 + p_2 u$  e il controllo ottimo è quello che la minimizza.

Essendo H lineare in  $u$ , il suo minimo si troverà sulla frontiera di  $u$ , ed essendo

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow p_1 = p_1(0) = K$$

e

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \Rightarrow p_2(t) = p_1(0) \cdot (t_f - t) + p_2(t_f)$$

si avrà che la soluzione ottima è

$$\begin{cases} u = T_{MAX} & \text{per } p_2(t) < 0 \\ u = 0 & \text{per } p_2(t) > 0 \end{cases}$$

La funzione  $p_2(t)$  rappresenta quindi la funzione che individua l'istante di commutazione del controllo fra il valore massimo e minimo. Tale funzione, come nel caso precedente, è la funzione di *switching* mentre il controllo è di tipo *zero-bang*.

La traiettoria ottima del sistema si ottiene esplicitamente nello spazio di stato integrando le equazioni del moto

$$u(t_f) = T_{MAX} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = -T_{MAX} \cdot (t_f - t) + x_2^f \\ x_1(t) = \frac{T_{MAX}}{2} \cdot (t_f - t)^2 \end{cases}$$

quindi  $x_1 = \frac{x_2^2}{2 \cdot T_{MAX}} + k$ ,

$$u(t_f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = K \\ x_1(t) = -K \cdot (t_f - t) \end{cases}$$

quindi  $\forall x_1 < 0 \Rightarrow x_2 = K$

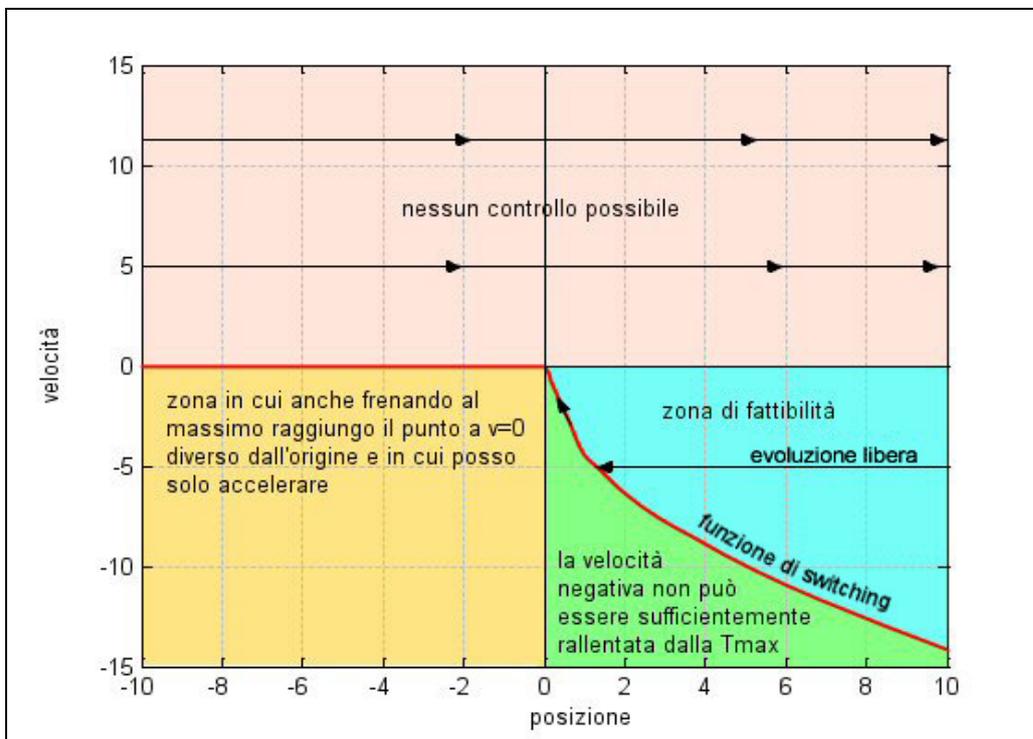


Figura 23 Percorsi ottimi nel piano di stato, nel caso in cui  $0 \leq u \leq T_{MAX}$

Come evidenziato in Figura 23, si distinguono quattro zone di comportamento diverso:

- la prima con velocità iniziale positiva, in cui qualsiasi controllo ammissibile, in quanto capace esclusivamente di accelerare o far evolvere liberamente il sistema, non permetterebbe di riportare il sistema nell'origine (posizione e velocità nulle);
- la seconda con velocità iniziale negativa e posizione iniziale negativa in cui è possibile accelerare il sistema fino a portarlo a velocità nulla ma in posizione finale diversa dall'origine nella quale rimane indefinitamente;

- la terza con velocità  $v_0 < -\sqrt{2 \cdot x_0 \cdot T_{MAX}}$  e posizione  $x_0 > 0$  in cui anche l'applicazione della massima forza ammissibile non è sufficiente a far convergere il sistema nell'origine;
- la quarta con velocità  $v_0 \geq -\sqrt{2 \cdot x_0 \cdot T_{MAX}}$  e posizione  $x_0 > 0$  in cui è possibile trovare un insieme di funzioni di ingresso (controlli) capaci di far convergere il sistema nell'origine.

Nell'ultima regione, si possono avere, a partire da un determinato stato iniziale, infinite funzioni di ingresso  $u$  che riportano il sistema all'origine, ad esempio una frenata costante di modulo  $u < T_{MAX}$ , ma è unica quella che minimizza il tempo.

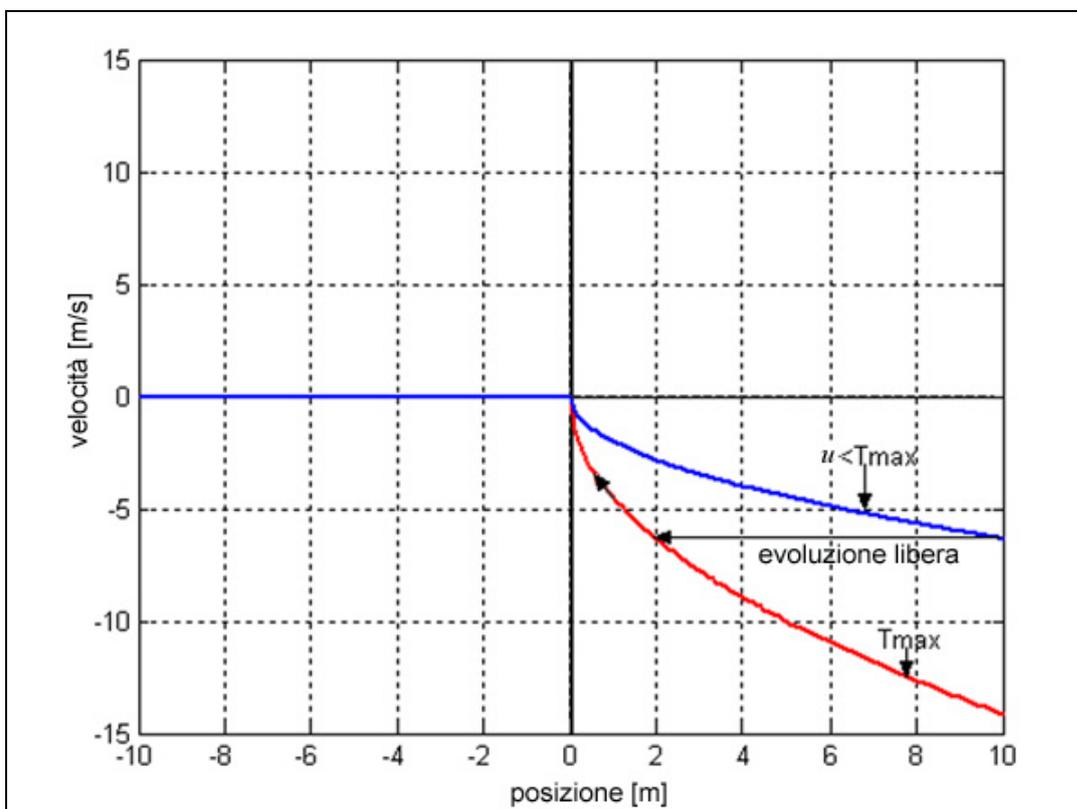


Figura 24 Confronto fra le possibili traiettorie che riportano all' origine e la traiettoria ottima nel senso del tempo minimo.

questa consiste nell'evoluzione libera (infatti è evidente che non potendo accelerare il sistema, l'evoluzione libera è quella che consente ad esso la massima velocità possibile) fino all'istante  $\tau_{sw}$  in cui si è raggiunto lo stato  $(x_{1sw}, x_{2sw})$  sulla curva di switching e per  $t > \tau_{sw}$  la frenata di modulo massimo.

E' da osservare che nulla si può dire riguardo all'evoluzione di un punto il cui stato iniziale giace sulla retta  $x_2 = 0$ .

Il nostro caso si presenta leggermente diverso rispetto al caso finora esaminato perché si desidera riportare il sistema in un punto che non sia l'origine dello spazio di stato, considerando che in questa rappresentazione ciascun punto con ascissa uguale a zero rappresenti l'origine del nostro sistema di riferimento fisico. In altre parole, si vuole analizzare il caso in cui l'end effector sia mobile sulla retta di simmetria del braccio manipolatore e che la composizione delle forze esercitabili dai giunti sia una forza "di richiamo" pari a

$$U(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + b^2}} u$$

Tale forza, essendo la risultante delle due tensioni esercitate dai cavi quando questi si trovano in posizione simmetrica rispetto all'asse di simmetria del braccio, è sempre diretta nell'origine del sistema di riferimento ed è dipendente dalla posizione stessa del corpo sull'asse.

La condizione sullo stato finale è

$$\bar{x}(t_f) = \bar{x}_f .$$

La matrice jacobiana della trasformazione si esprime come

$$J(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

e quindi l'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + b^2}} u$$

coi vincoli

$$0 \leq u \leq T_{MAX}$$

e condizioni al contorno

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 ,$$

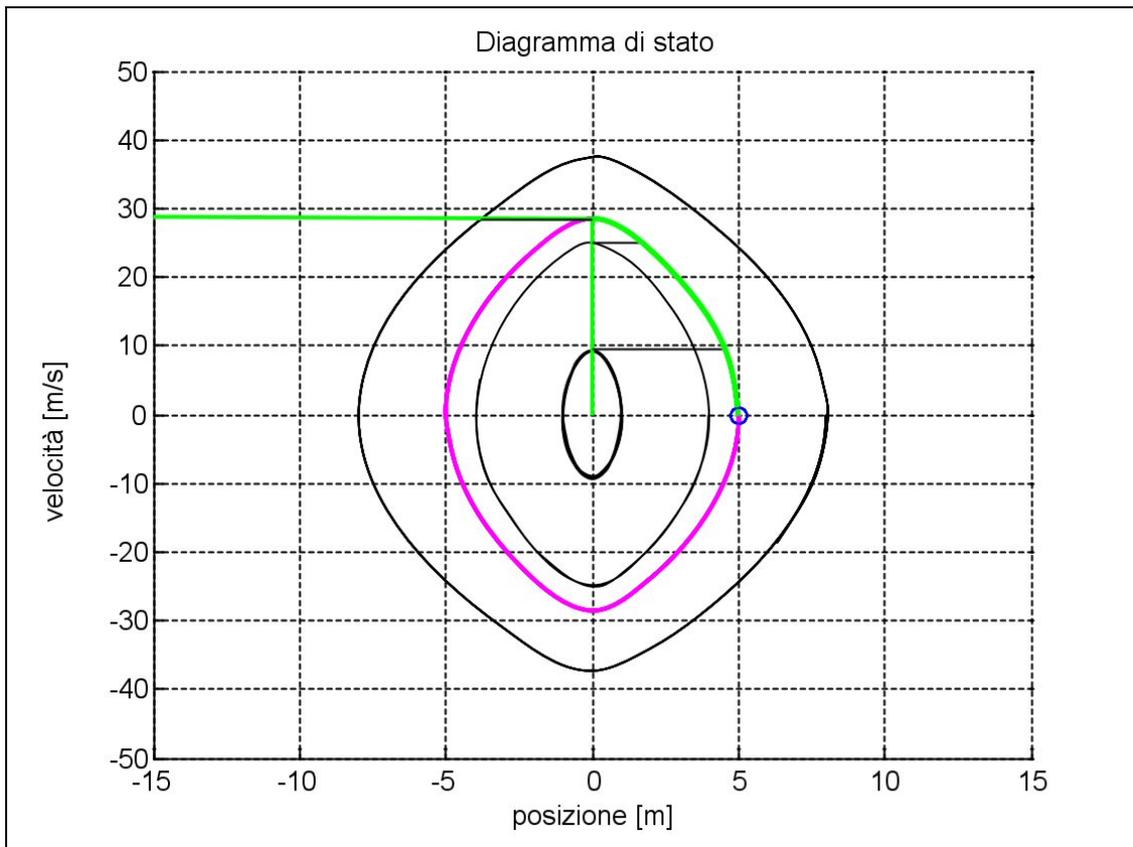
$$\bar{x}(t_f) = \bar{x}_f$$

Il problema del tempo minimo nel nostro caso si formula come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{t_f-t_0} \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt \\ \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 \\ \sqrt{x_1^2 + b^2} u \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \\ 0 \leq u \leq T_{MAX} \end{array} \right.$$

Risolvere questo problema risulta interessante perché ci consente di capire ed interpretare le condizioni in cui la traiettoria seguita dalla massa ha dei “bounce”, vale a dire dei rimbalzi intorno all’origine.

In questo caso, si è risolta l’equazione differenziale numericamente, ed essendo a conoscenza dalla teoria, come si è precedentemente dimostrato, che il controllo ottimo è una successione opportuna dei controlli estremali al suo intervallo di definizione, si sono tracciate le curve di commutazione come illustrato in Figura 25



**Figura 25 Percorsi ottimi nel piano di stato per una traiettoria rettilinea e condizione finale diversa dall'origine**

Le pseudo ellissi rappresentate in figura, ottenute per integrazione numerica dell'equazione differenziale che governa il sistema, sono, insieme con le rette a velocità costante, le possibili evoluzioni del sistema: esse vengono percorse, nel tempo, sempre in senso orario, mentre le rette dell'evoluzione libera vengono percorse da destra verso sinistra.

L'unica traiettoria capace di portare il sistema nello stato finale è l'arco di pseudo ellisse soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{2x_1}{\sqrt{x_1^2 + b^2}} U_{MAX} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$$

evidenziata in rosso in figura ( denominata in seguito curva 1).

A partire da condizioni iniziali non appartenenti a tale traiettoria, ci si muoverà su una pseudo ellisse fino ad incontrare una dei tre segmenti di cui è composta la funzione di *switching*: tale attraversamento determina la commutazione del controllo dalla condizione di  $u = U_{MAX}$ , alla condizione  $u = 0$  o viceversa.

In definitiva le evoluzioni possibili per il sistema possono ricondursi a tre tipi:

- *bang*
- *zero-bang*
- *bang-zero-bang*

cui corrispondono rispettivamente nessuna commutazione, una commutazione o due commutazioni.

In particolare la curva 1 di switching dipende dallo stato del bersaglio, che rappresenta lo stato finale  $x_f$ : di conseguenza anche le curve 2 e 3 dipenderanno da questi valori.

Sviluppato l'algoritmo, che in seguito andremo a dettagliare, si è testato che il comportamento è in linea con quanto si era determinato per via analitica: di seguito si riportano i risultati delle simulazioni eseguite.

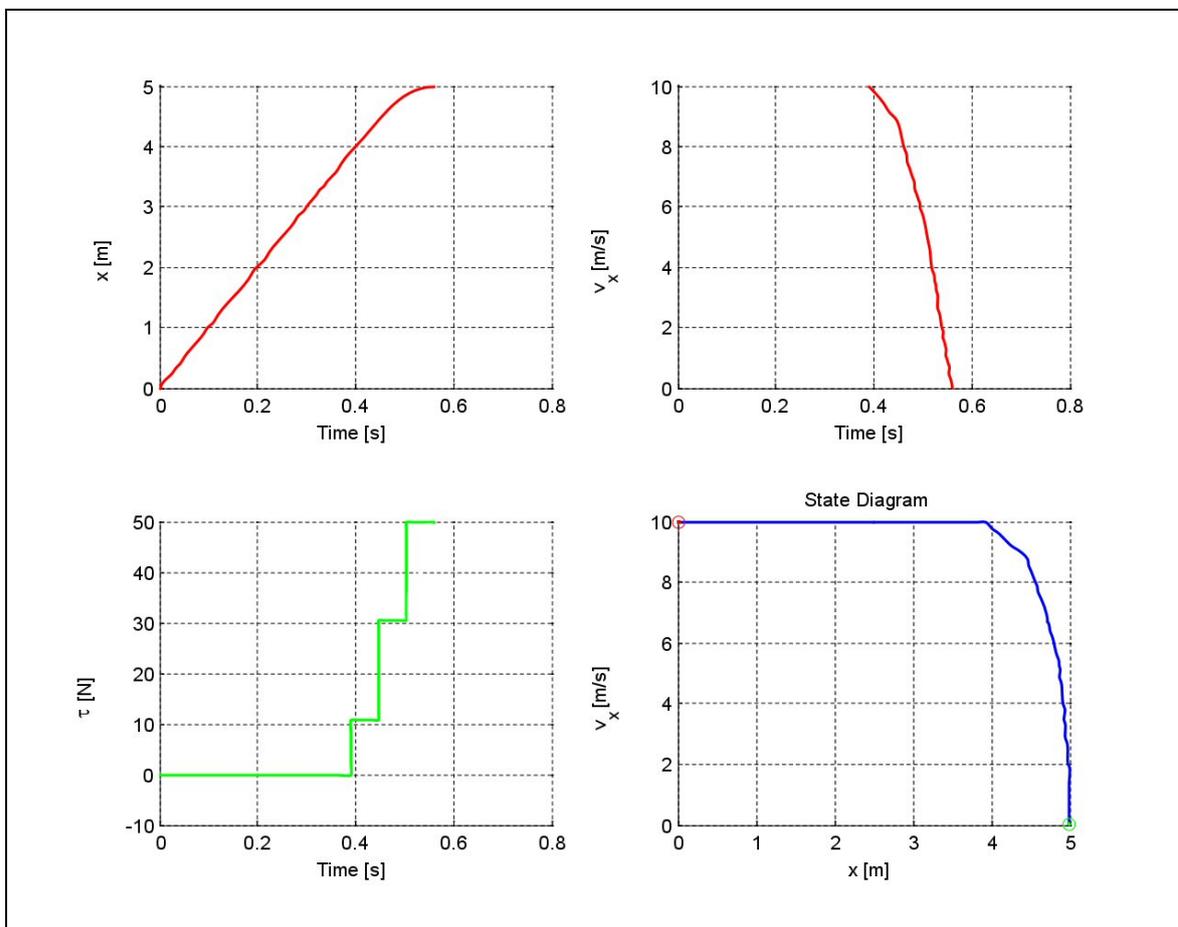


Figura 26 Simulazione eseguita per la verifica del moto in tempo minimo dell' end effector a partire da condizioni iniziali di posizione  $x=0$  m e velocità  $v=10$  m/s

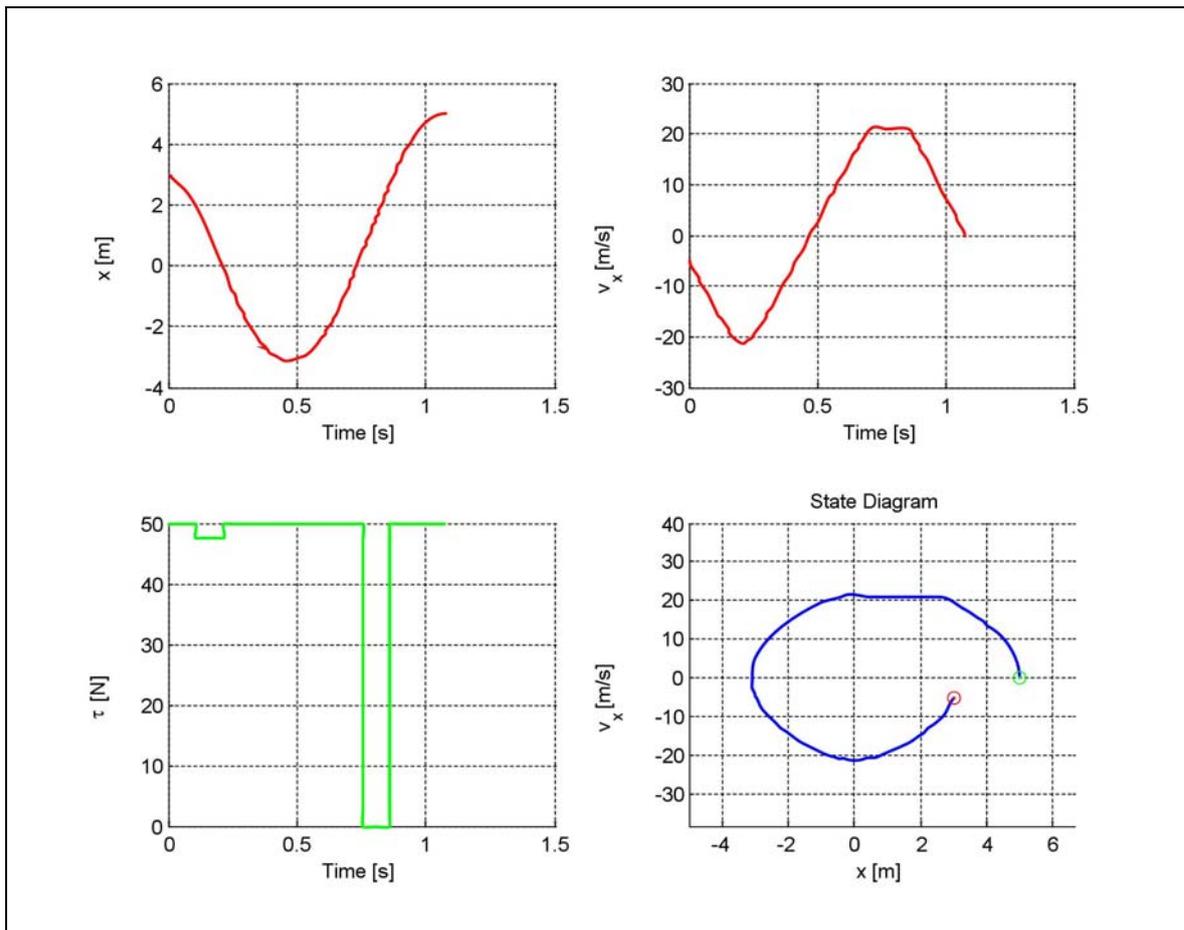


Figura 27 Simulazione eseguita per la verifica del moto in tempo minimo dell' end effector a partire da condizioni iniziali di posizione  $x=3$  m e velocità  $v=-5$ m/s

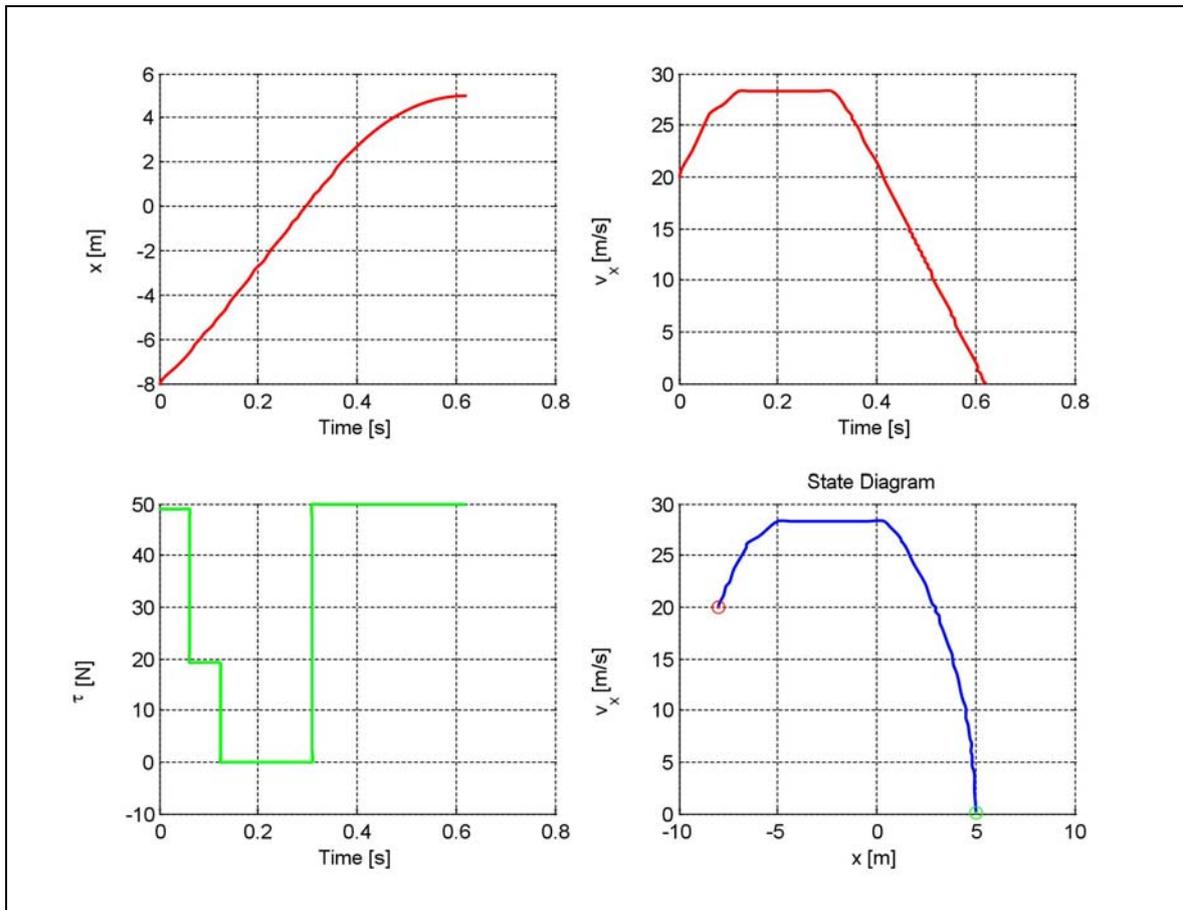


Figura 28 Simulazione eseguita per la verifica del moto in tempo minimo dell' end effector a partire da condizioni iniziali di posizione  $x=-8$  m e velocità  $v=20$ m/s

La condizione in cui si avrà un comportamento tipo “*bounce*” sono quelle cui corrisponde il controllo bang-zero-bang : si evidenzia che l’azione iniziale del primo controllo è quella di riportare la massa a nuove condizioni iniziali dalle quali risulta possibile controllare il sistema nel suo desiderato stato finale. In definitiva, il comportamento *bouncing* determina un vero e proprio “rilancio” dell’organo terminale.

Per inciso, si nota che a grande distanza dall’origine, il comportamento della funzione è approssimabile con  $\text{sign}(x)$ .

Per il caso bidimensionale,così come per quello tridimensionale, trovarsi in condizioni iniziali tali che la traiettoria abbia un bounce determina in generale un aumento del tempo di esecuzione rispetto alle traiettorie “*smooth*”: in più questa soluzione dovrebbe essere evitata perché potrebbe causare una collisione dell’end effector con la piattaforma rotante stessa.

Le soluzioni a questo problema possono essere:

- introduzione nell'algoritmo di ottimizzazione di condizioni di vincolo sullo stato dell'end effector,
- determinazione dell'angolo  $\alpha$  di lancio per cui le traiettorie siano smooth, ottenuta mediante la minimizzazione del tempo ottimo al variare di  $\alpha$ .

Per i nostri scopi è stata adottata la seconda politica, perché introdurre limiti sullo stato per ciascun istante della sua evoluzione, e non solo vincoli sullo stato finale, avrebbe rallentato notevolmente il programma di ottimizzazione.

Per i casi di evoluzione nel piano il problema si formula come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x+b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2}} & \frac{x-b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2}} \\ \frac{x+b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2}} & \frac{x-b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\ 0 \leq \tau_1 \leq T_{MAX} \\ 0 \leq \tau_2 \leq T_{MAX} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{array} \right.$$

mentre nel caso di evoluzione nelle tre dimensioni dello spazio, in caso di assenza di gravità si esprime come

$$\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x+b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{x-b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}} \\ \frac{y+b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{y-b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+(z+b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}} \\ \frac{z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(x+b \cdot \cos \alpha)^2+(y+b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(x-b \cdot \cos \alpha)^2+(y-b \cdot \sin \alpha)^2+(z+b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{z+b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{x^2+y^2+(z+2b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \\ 0 \leq \tau_1 \leq T_{MAX} \\ 0 \leq \tau_2 \leq T_{MAX} \\ 0 \leq \tau_3 \leq T_{MAX} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{array} \right.$$

mentre nel caso in cui si tenga conto degli effetti della gravità si scrive come

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} m \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} + g \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x + b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x + b \cdot \cos \alpha)^2 + (y + b \cdot \sin \alpha)^2 + (z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{x - b \cdot \cos \alpha}{\sqrt{(x - b \cdot \cos \alpha)^2 + (y - b \cdot \sin \alpha)^2 + (z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}} \\ \frac{y + b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x + b \cdot \cos \alpha)^2 + (y + b \cdot \sin \alpha)^2 + (z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{y - b \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(x - b \cdot \cos \alpha)^2 + (y - b \cdot \sin \alpha)^2 + (z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}} \\ \frac{z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(x + b \cdot \cos \alpha)^2 + (y + b \cdot \sin \alpha)^2 + (z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(x - b \cdot \cos \alpha)^2 + (y - b \cdot \sin \alpha)^2 + (z + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} & \frac{z + b \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3})^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 0 \leq \tau_1 \leq T_{MAX} \\
 0 \leq \tau_2 \leq T_{MAX} \\
 0 \leq \tau_3 \leq T_{MAX} \\
 \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\
 \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f
 \end{array}$$

## 6.2 ALGORITMO DI OTTIMIZZAZIONE

La soluzione in forma chiusa del problema di Pontryagin spesso non è praticabile nei casi più generali. Si è per questo fatto uso di algoritmo di ottimizzazione implementato basandosi sugli strumenti numerici offerti dall'*optimization toolbox* di Matlab®, la cui validità è stata provata da precedenti lavori di tesi e testata per la nostra applicazione al caso in cui si voglia posizionare l'end effector in un punto appartenente alla circonferenza stessa di lancio. Tale scelta è dovuta al fatto che esiste almeno una soluzione ammissibile a tale problema: infatti la forza necessaria a far percorrere al corpo una traiettoria circolare è costantemente diretta verso il centro della circonferenza, quindi sempre interna al triangolo che rappresenta il set di forze che possono essere generate da due cavi in tensione [5], come illustrato in Figura 29

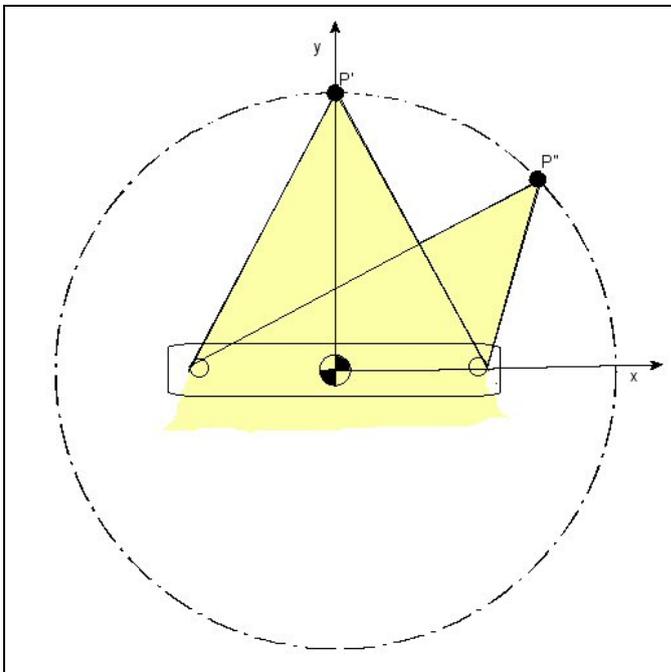


Figura 29 schema del set di forze mappabili in due configurazioni successive dell'end-effector

Come ci aspettavamo, una soluzione ammissibile del problema esiste. I risultati della simulazione dimostrano tuttavia che il tempo minimo di percorrenza non è quello che si otterrebbe con una traiettoria circolare, ma quella ottenuta da una serie di accelerazioni massime seguite da fasi di evoluzione libera.

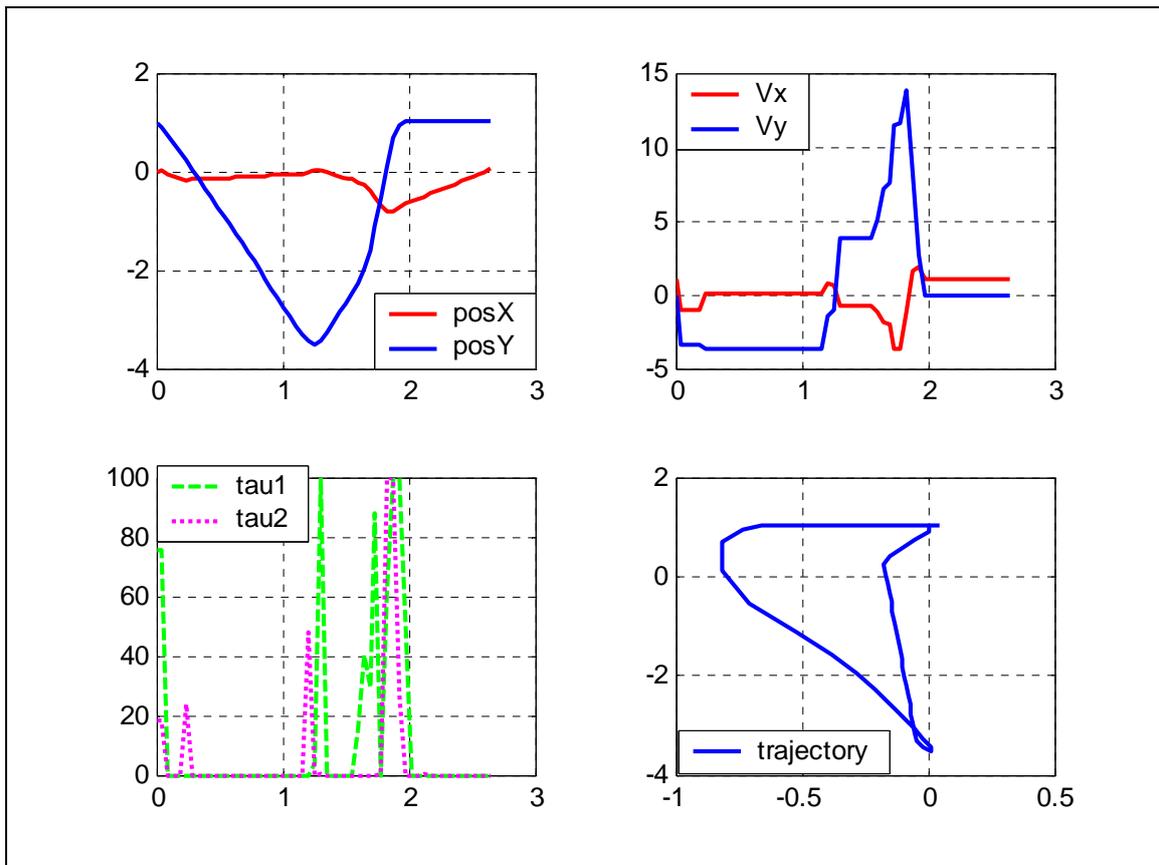


Figura 30: traiettoria e velocità dell'end-effector per raggiungere in tempo minimo un punto appartenente alla circonferenza di lancio

E' ora opportuno dare un approfondimento sull'algoritmo utilizzato.

L'*optimization toolbox* di Matlab include una funzione di ottimizzazione per problemi non lineari denominata `fmincon`. Essa risolve il seguente problema:

$$\min_x f(x)$$

soggetto a

$$c(x) \leq 0$$

$$ceq(x) = 0$$

$$A \cdot x \leq b$$

$$Aeq \cdot x = beq$$

$$lb \leq x \leq ub$$

in cui  $x$ ,  $b$ ,  $beq$ ,  $lb$  e  $ub$  sono vettori,  $A$  e  $Aeq$  sono matrici,  $c(x)$  e  $ceq(x)$  sono funzioni che ritornano vettori ed  $f(x)$  è una funzione che ritorna uno scalare;  $c(x)$ ,  $ceq(x)$  ed  $f(x)$  possono essere anche nonlineari.

Essa cioè tenta di trovare un minimo vincolato di una funzione scalare  $f$  di numerose variabili partendo da un valore iniziale stimato. Questo tipo di problema è chiamato “ottimizzazione non lineare vincolata” o “programmazione non lineare”

$A$  ed  $A_{eq}$  sono dunque le matrici che rappresentano rispettivamente i sistemi di disequazioni ed equazioni rappresentanti i vincoli lineari, mentre  $c$  e  $c_{eq}$  sono le funzioni che rappresentano i vincoli non lineari che il sistema deve soddisfare.

$lb$  ed  $ub$  sono i limiti superiori ed inferiori sulla variabile  $x$ .

La sintassi è la seguente:

```
[x, fval, exitflag] = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub,
nonlcon)
```

in cui  $x$  è la soluzione ottima,  $fval$  è il valore della funzione obiettivo  $fun$  nel minimo ed  $exitflag$  descrive la condizione di uscita dell’algoritmo e può assumere valori

- > 0 se la funzione converge ad una soluzione  $x$
- = 0 se la funzione ha ecceduto il massimo numero di iterazioni consentite,
- < 0 se la funzione non converge ad una soluzione.

Poiché nel nostro problema di ottimizzazione, i vincoli (denominati in Matlab  $lb$  ed  $ub$ , cioè lower bound ed upper bound) sono sugli ingressi  $\tau_i$ , l’algoritmo è implementato come segue[32]:

si è fissato un orizzonte di tempo ( $T_{tobeat}$ ) entro il quale si immagina che il problema di controllo sia fattibile.

Si immagina di poter variare il controllo in modo discreto (piecewise constant)  $N$  volte ad istanti multipli di  $t$ . Fissati quindi  $T_{tobeat}$  e  $t$  è definito il numero di variabili di ingresso come  $N = \text{ceil}(T_{tobeat}/t)$ . In questo modo sia la funzione obiettivo ( $fun$ ), sia i vincoli possono essere espressi in funzione di un vettore di variabili  $UU$  tali che  $UU_k = \tau(k \cdot t)$  con  $k$  intero positivo.

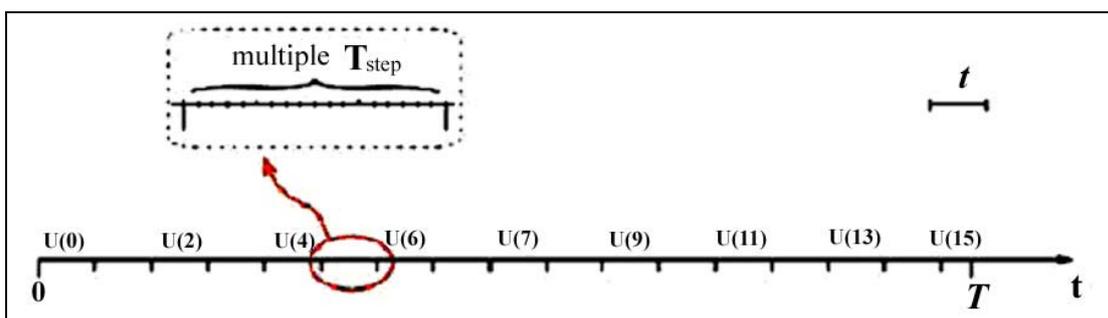


Figura 31 Rappresentazione grafica del funzionamento dell’algoritmo non lineare.

Si fissa  $T_{tobeat}$  e  $t$  e automaticamente sono decisi gli istanti in cui si può cambiare l’ingresso e, contemporaneamente, valutare i vincoli.

La dinamica del sistema si integra approssimandola con il metodo di Eulero, secondo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \approx \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

in cui  $\Delta t$  è il passo di integrazione (Tstep), molto minore di  $t$ . In funzione delle  $N$  variabili di ingresso e degli  $M$  stati nel nostro caso si avranno:

- $N$  limiti inferiori dovuti alla tensione minima applicabile;
- $N$  limiti superiori dovuti alla tensione massima applicabile;
- $2M$  vincoli di uguaglianza per lo stato finale (posizione e velocità).

Utilizzare la `fmincon` nel nostro caso, significherebbe implementare una funzione `fun` (di seguito denominata `MyObjFun`) che restituisse il tempo di esecuzione della traiettoria ottima: ma, avendo discretizzato il tempo (allo scopo di diminuire il numero di campioni di  $\tau$  da valutare) questa non è altro che la funzione che restituisce la dimensione del vettore degli ingressi moltiplicata per il tempo di discretizzazione  $t$ . Tuttavia, questa soluzione non è praticabile, perché Matlab richiede che la funzione `fun` sia una funzione a valori continui, mentre la funzione `length(UU)` evidentemente non lo è.

Come è stato operato con successo negli algoritmi di ottimizzazione del tempo precedentemente implementati in questo dipartimento, si è superato l'ostacolo assegnando alla `fun` uno statement che calcoli il valore del primo campione, lasciando che la `fmincon` minimizzi quindi il valore di  $\tau$  nell'intervallo iniziale di tempo e non operi nessuna minimizzazione sulla  $\tau$  negli istanti successivi. L'errore dovuto a questa minimizzazione iniziale di  $\tau$  è trascurabile quando  $N$  è grande ed offre involontariamente una "protezione" contro gli effetti del bouncing, in quanto un controllo minimo iniziale permette all'end effector di allontanarsi in evoluzione libera dalla piattaforma rotante per un intervallo di tempo pari a  $t$ .

La minimizzazione del tempo è stata effettuata invece in un ciclo esterno alla `fmincon`, diminuendo il tempo di un valore pari a  $t$  (granularità) nel caso in cui la `fmincon` abbia restituito una soluzione ammissibile nel `Ttobeat`.

Si potrebbe pensare che il modo migliore per determinare il tempo ottimo sia quello di procedere per bisezione degli intervalli di tempo intercorrenti fra l'istante in cui è stata trovata dall'algoritmo una soluzione ammissibile e l'istante in cui non è stata trovata alcuna soluzione. Tuttavia, poiché l'algoritmo termina anche nel caso in cui la funzione ha ecceduto il massimo numero di iterazioni consentite, (nel qual caso non si hanno informazioni sulla risolvibilità effettiva del problema) si è proceduto per sottrazioni successive di un intervallo di tempo pari alla granularità, ammettendo come valore del tempo minimo di esecuzione l'ultimo valore di `Ttobeat` in cui l'algoritmo estrae una soluzione ammissibile.

Tali scelte sono inoltre supportate dal fatto che, poiché per definizione, la soluzione del problema di controllo ottimo è unica, la minimizzazione del tempo operata esternamente al ciclo, col tendere del valore della granularità  $t$  a 0, e converge alla soluzione ottima, comunque siano state scelte le funzioni obiettivo. Si è per questo scelto una funzione che non appesantisce il carico computazionale dell'algoritmo.

Si è inoltre definita separatamente la funzione `myConstrFun` che ha il compito di fornire il valore delle variabili non lineari vincolate. Le relazioni di uguaglianza sono per noi sullo stato finale del sistema, in quanto lo vogliamo portare in uno stato per noi definito a priori, cioè lo stato del bersaglio. La necessità di valutare i vincoli sullo stato ci porta a dover calcolare la dinamica del sistema in questa funzione. Il procedimento avviene per integrazione numerica alla Eulero con passo `Tstep`.

Nel nostro problema non abbiamo considerato vincoli di disuguaglianza sullo stato istante per istante, anche se questi potrebbero essere necessari qualora si voglia definitivamente escludere la possibilità che l'end effector raggiunga determinate zone "occupate" da ingombri di varia natura, quali ostacoli lungo il percorso. Si è appositamente evitato di appesantire in questo modo l'algoritmo, in quanto questa funzione è l'elemento più pesante nel bilancio computazionale dell'intera procedura.

Inoltre, lo statement

```
if exist(x)
x0 = x
```

permette di inizializzare lo stato iniziale delle ottimizzazioni della `fmincon` a un valore di `x` in cui essa ha già precedentemente trovato una soluzione, evitando in tal modo che a ogni ricorsione del ciclo in cui i vincoli sullo stato finale siano cambiati di poco, la `fmincon` ricominci da zero a cercare delle soluzioni.

## 6.3 RISULTATI SPERIMENTALI

Si è spesso detto che lo scopo della trattazione è quello di raggiungere oggetti distanti dalla base del manipolatore e per ognuno di essi determinare la sequenza di controlli ottimi da applicare all'end effector affinché colpisca il bersaglio. Inoltre, essendo l'angolo di lancio un importante parametro per la pianificazione ottima della traiettoria, occorrerà determinare l'angolo ottimo di lancio  $\alpha$  nel senso del tempo minimo. Infatti, dipendentemente da questo parametro, il problema può non avere soluzioni, com'è il caso in cui il lancio venga effettuato esattamente nella direzione del bersaglio: in queste circostanze, le tensioni dei cavi avrebbero sempre una componente perpendicolare a tale direzione che porterebbe inevitabilmente l'end effector a deviare la traiettoria.

Sempre in dipendenza dal parametro  $\alpha$ , potremmo trovare soluzioni in tempo ottimo non ammissibili per l'esistenza di uno o più bounce.

### 6.3.1 OTTIMIZZAZIONE DEL MANIPOLATORE PLANARE A DUE TENDINI IN PARALLELO

A priori non ci è nota alcuna specifica riguardo alla posizione del bersaglio rispetto al manipolatore, esso cioè può trovarsi in qualsiasi punto del piano di cui la base del manipolatore ne è l'origine. Evidentemente questa è una posizione del tutto teorica, dovuta al fatto di non sapere, allo stato attuale, su che organo di sostegno possa essere montato il manipolatore.

La possibilità di determinare, per tutti i punti del piano la traiettoria ottima da far seguire all'end effector, non è una soluzione praticabile.

Si nota però che il nostro problema gode di simmetria circolare: siano infatti

$\vec{l} = (\cos \beta \quad \sin \beta)$  il vettore che individua la direzione del bersaglio,

$\alpha$  l'angolo di lancio,

$\mathbf{x}_0 = (-\sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha)$  lo stato iniziale dell'end effector,

il problema è invariante se si opera sul sistema una rotazione rigida di un angolo  $\theta$  tale che

$\vec{l}' = (\cos(\beta + \theta) \quad \sin(\beta + \theta))$ ,

$\alpha' = \alpha + \theta$ ,

$\mathbf{x}_0' = (-\sin(\alpha + \theta) \quad \cos(\alpha + \theta) \quad \cos(\alpha + \theta) \quad \sin(\alpha + \theta))$ .

Si riporta nella seguente figura la traiettoria eseguita dall'end-effector di un robot planare per raggiungere in tempo minimo un punto distante  $5\sqrt{2}$  m rispetto al manipolatore, ottenuta applicando i controlli ottimi e in basso a sinistra i controlli corrispondenti.

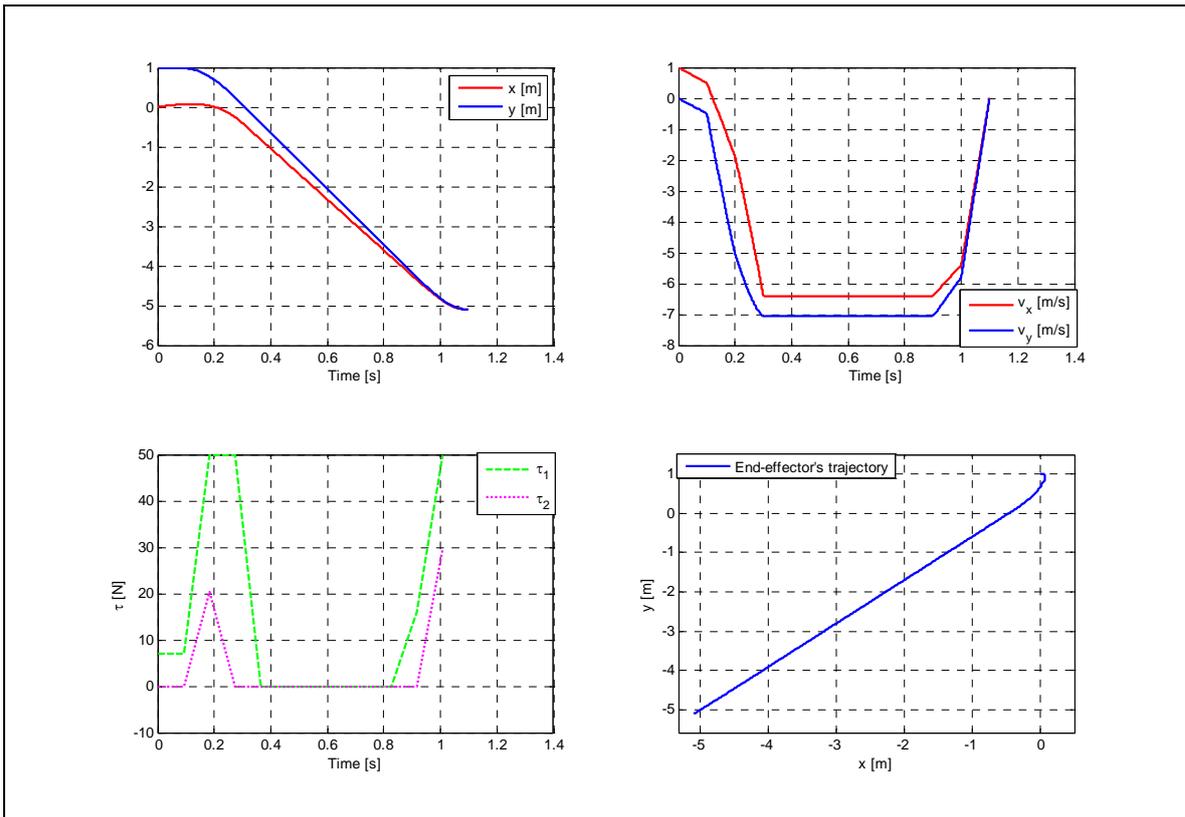


Figura 32: traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $5\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 0

Si riportano anche alcuni esempi di traiettorie ottime al variare della distanza, mantenendo costante l'angolo di lancio ( $\alpha = 0$ )

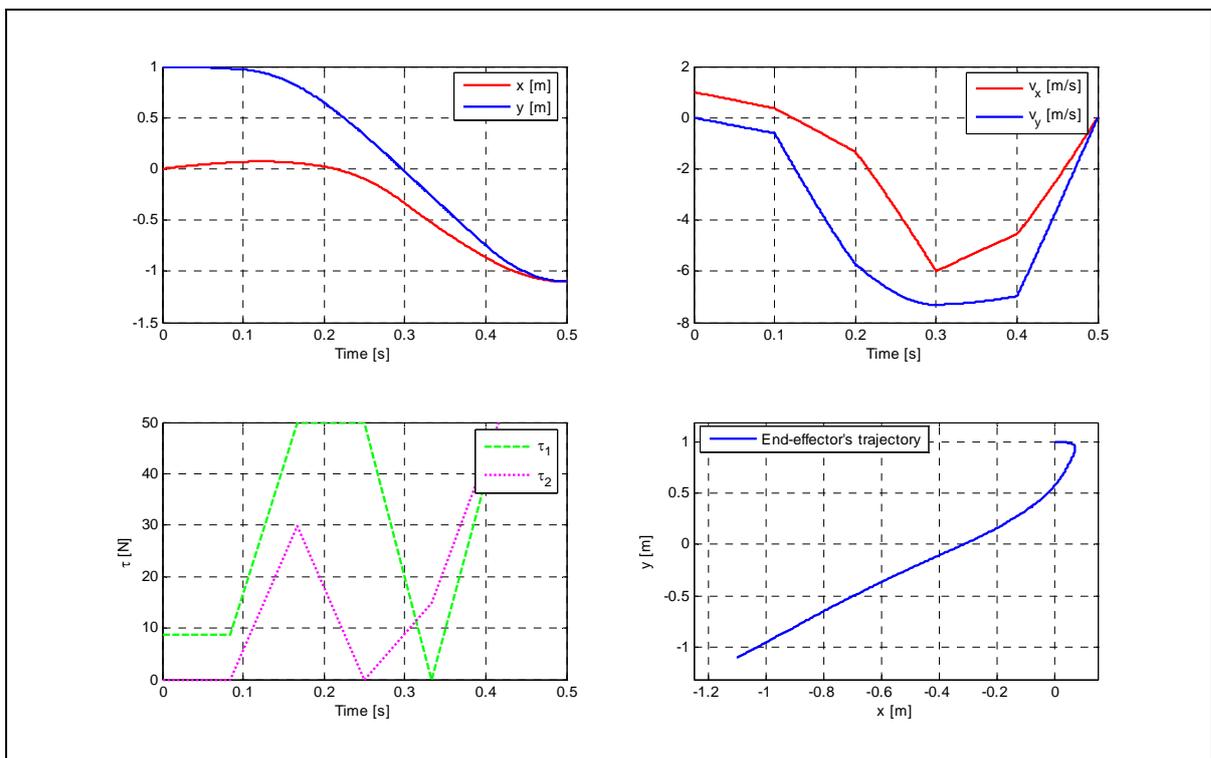


Figura 33: traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $1.10\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 0

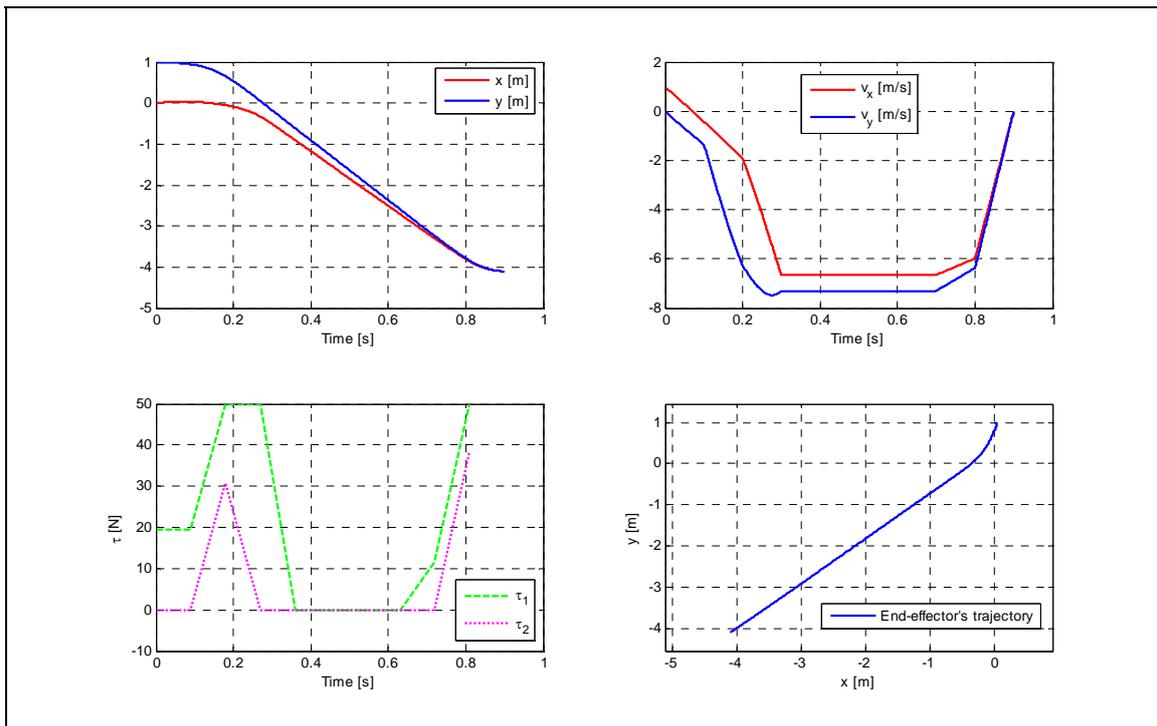


Figura 34 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $4\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 0

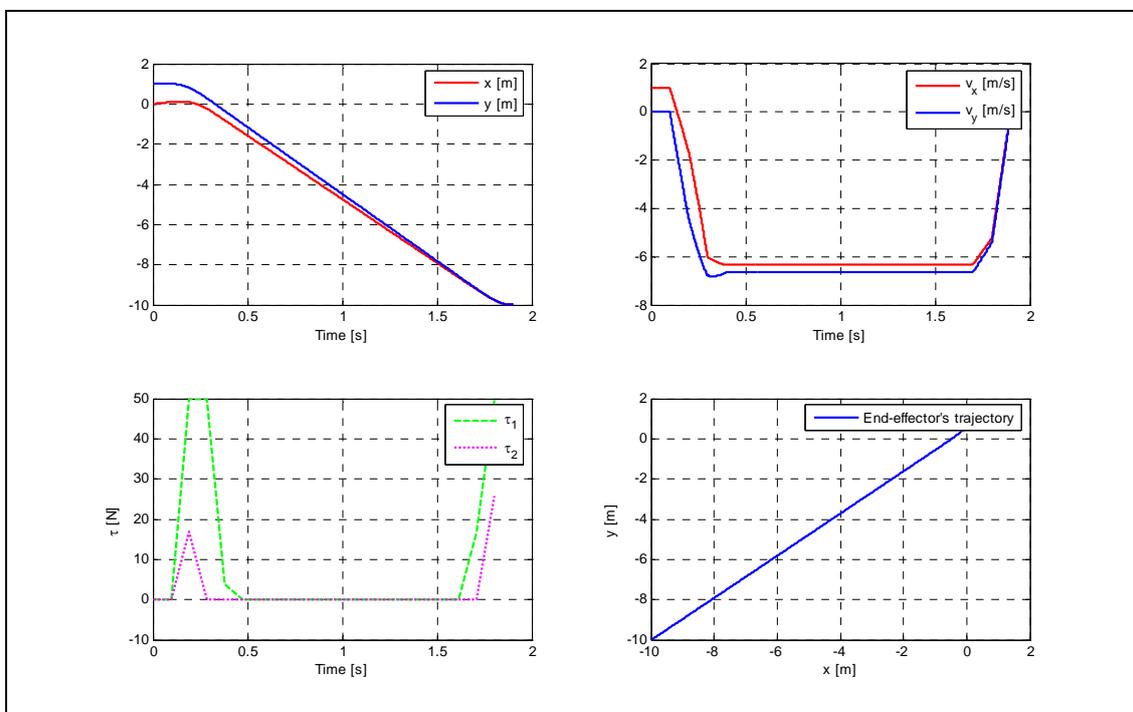
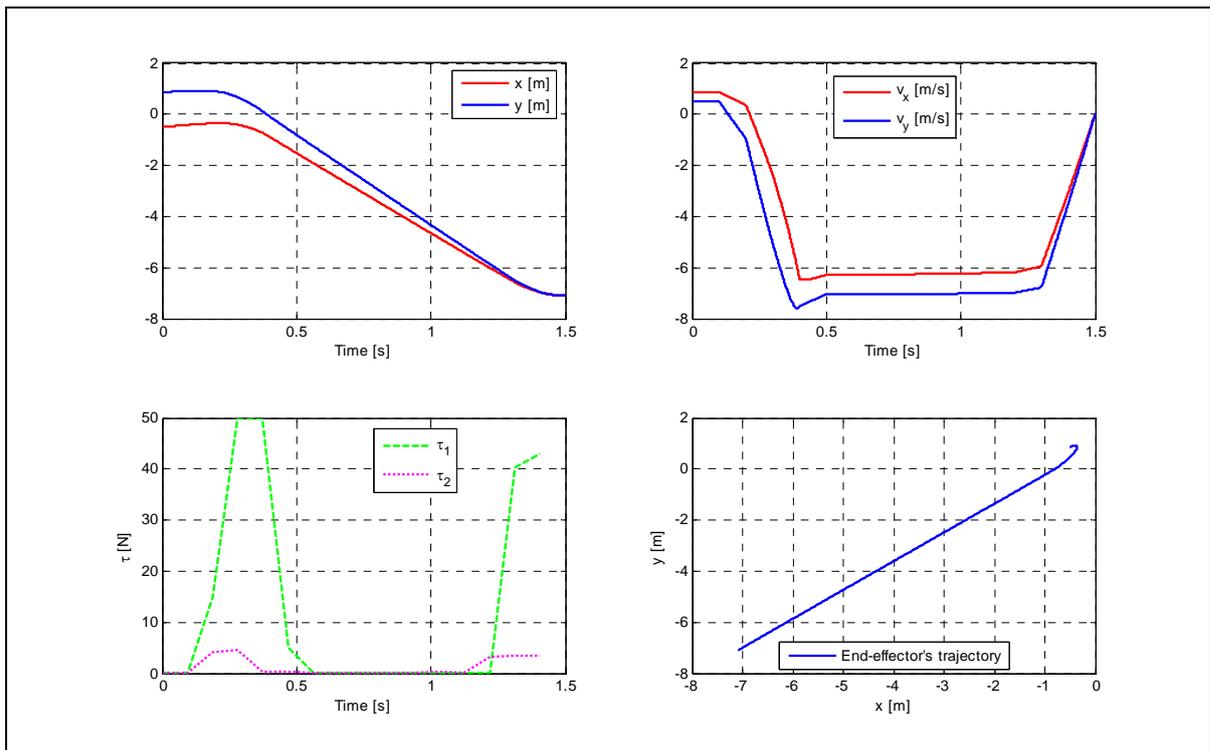


Figura 35 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $10\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 0

Di seguito si riportano i risultati delle simulazioni ottenute al variare dell'angolo di lancio  $\alpha$ , mantenendo costante la distanza del bersaglio dalla base del manipolatore.



**Figura 36** traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $7\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 30

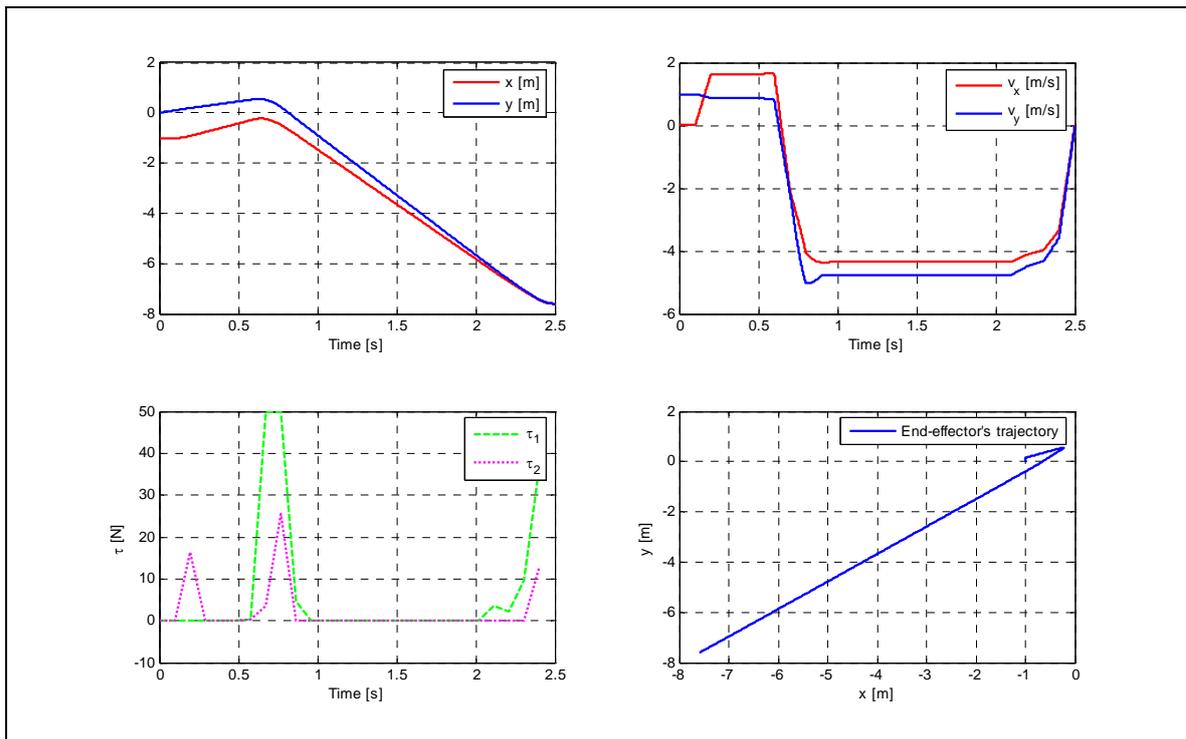


Figura 37 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $7\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 90

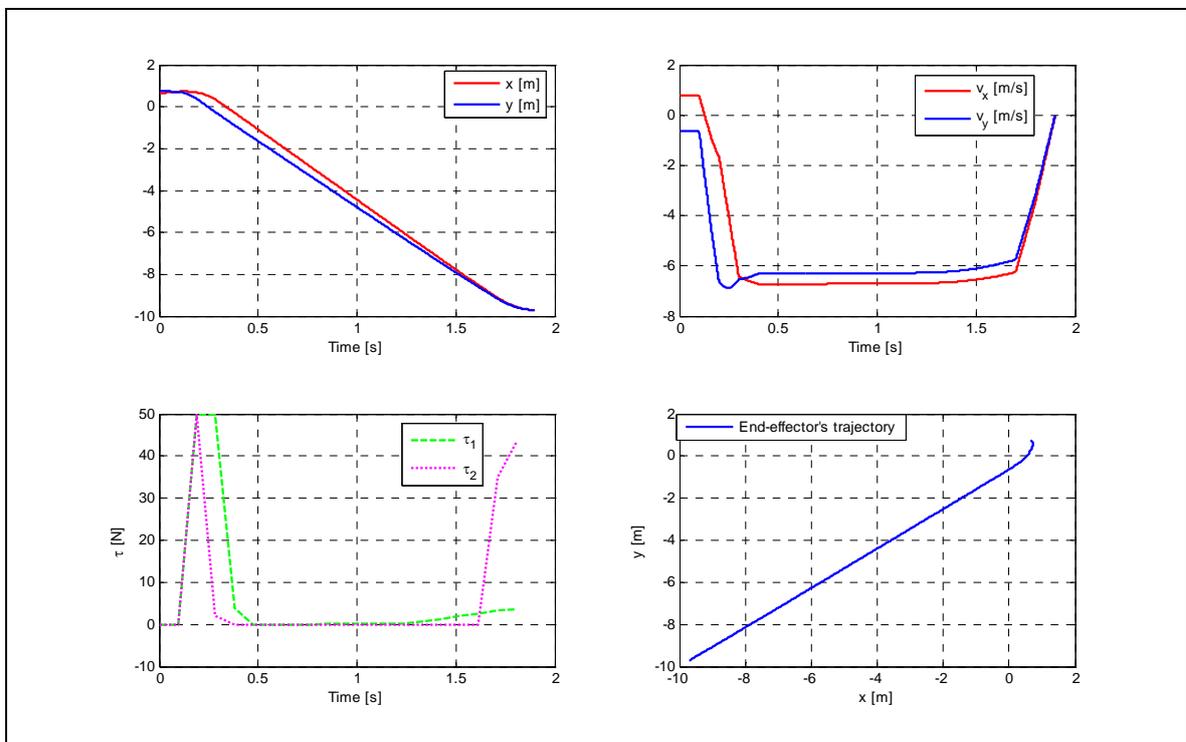
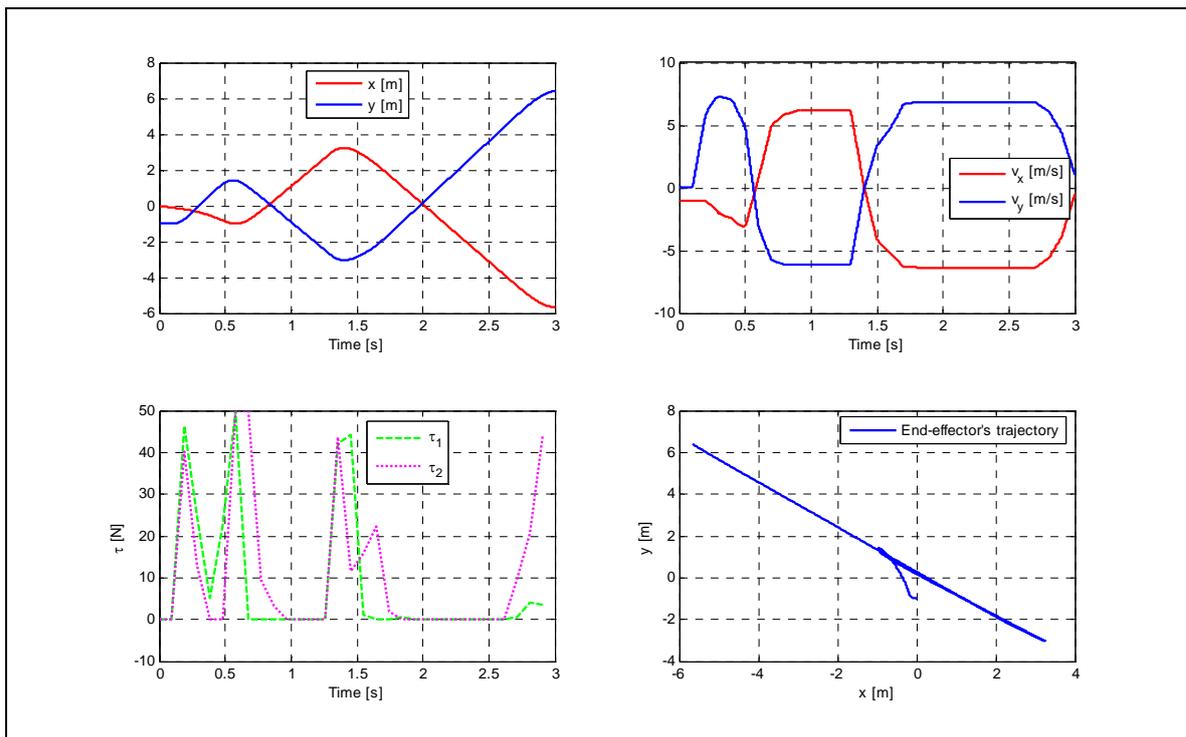


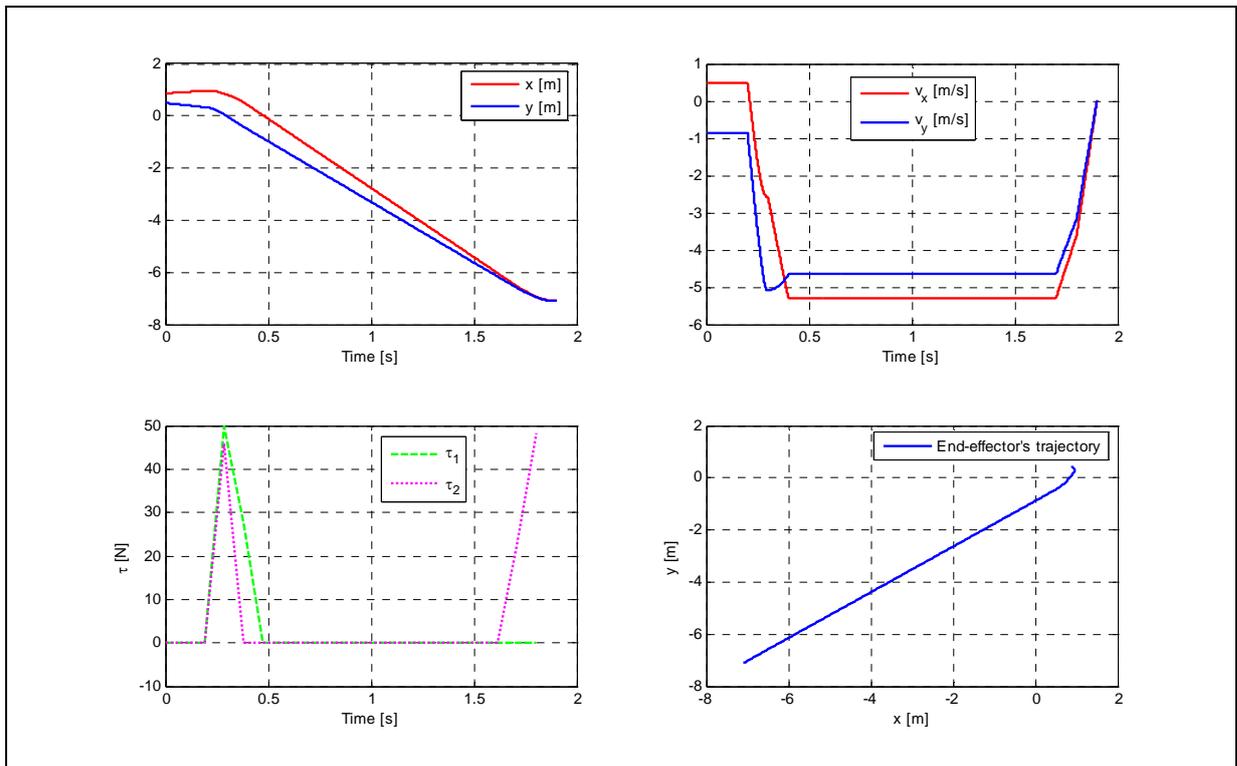
Figura 38 : traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $9.8\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 150



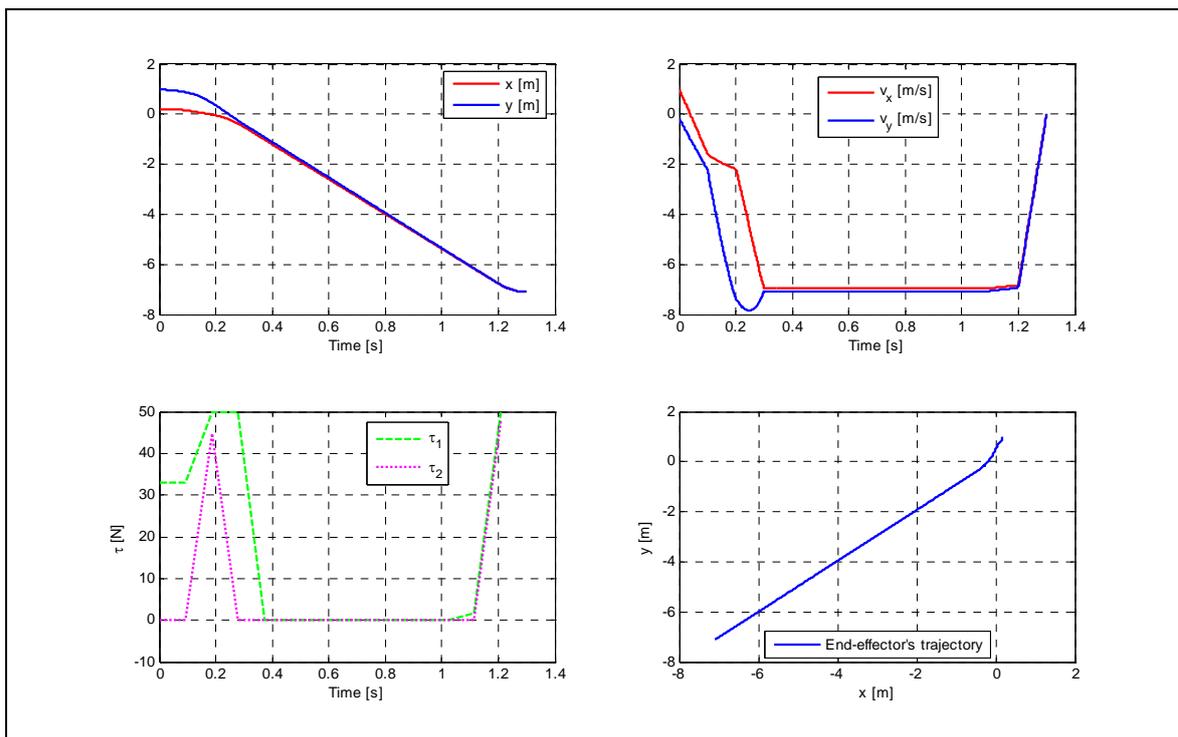
**Figura 39** traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $7\sqrt{2}$  m con angolo di lancio =  $180^\circ$  ( soluzione non ammissibile)

Nella precedente figura si nota come non sia possibile trovare una soluzione ammissibile nel caso in cui la direzione di lancio sia prossima alla tangente alla circonferenza passante per il bersaglio. Il range di approssimazione è dovuto all'implementazione dell'algoritmo, perché in prossimità di questa singolarità non risulta più possibile determinare un valore del tempo da battere accettabile, per cui il valore di 3s a lui imposto, non è più sufficiente e trovare una soluzione ammissibile al problema.

Si torna ad avere soluzioni ammissibili allontanandosi dalla direzione della singolarità, come si evince dalle simulazioni sotto riportate.



**Figura 40** traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $7\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 300



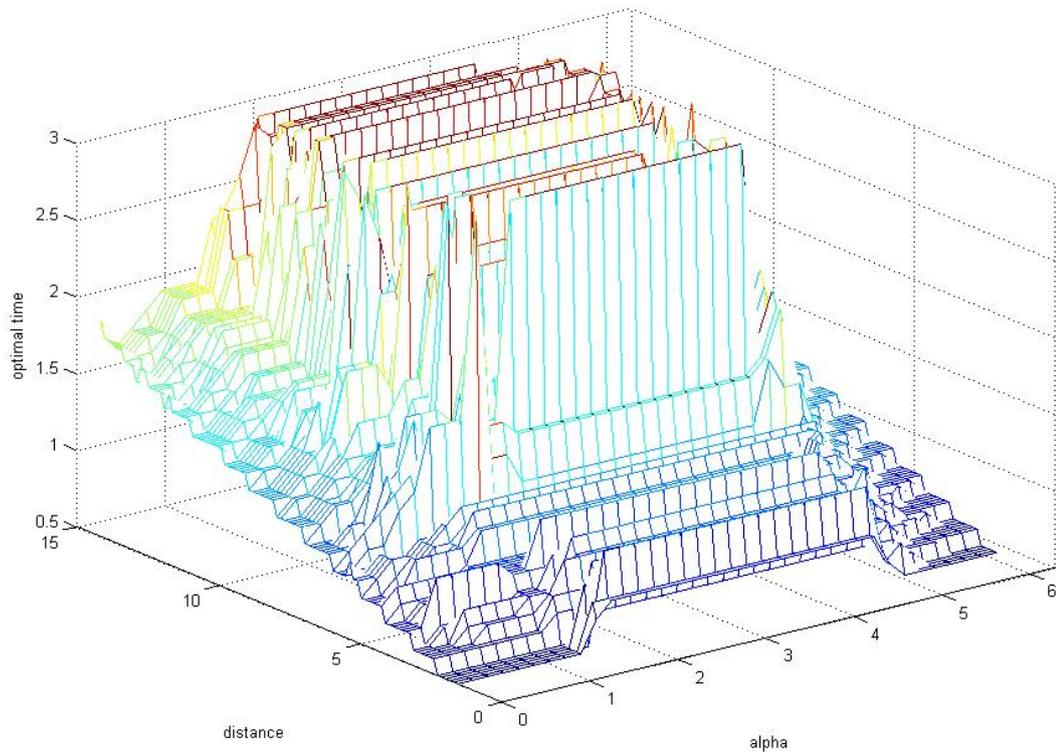
**Figura 41** traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento in un punto distante  $7\sqrt{2}$  m con angolo di lancio = 350

Dall'analisi dei risultati ottenuti in simulazione, risulta evidente che, dopo aver eseguito una iniziale correzione della traiettoria tale da riportare posizione e velocità dell'end effector nella direzione del bersaglio, il manipolatore lasci evolvere il sistema liberamente, annullando i controlli, fino ad un istante in cui commuta operando una massima frenata.

Tale comportamento è in linea con i risultati ottenuti dalla teoria: il controllo ottimo è quello che è generato da una combinazione di evoluzioni libere e frenate massime. In più si evidenzia che il sistema in tal modo si porta in una configurazione in cui può operare il massimo controllo, che è quella in cui i giunti flessibili sono simmetrici rispetto alla direzione del bersaglio.

In un futuro sviluppo del progetto meccanico ottimizzato del manipolatore, questo risultato ci fa pensare che sarebbe più utile, ai fini ridurre l'utilizzo dei controlli, che i supporti dei motori possano essere mobili sulla piattaforma per poter orientare i cavi sempre nella direzione del bersaglio, potendo così operare sempre con i massimi controlli possibili e non con la loro composizione vettoriale.

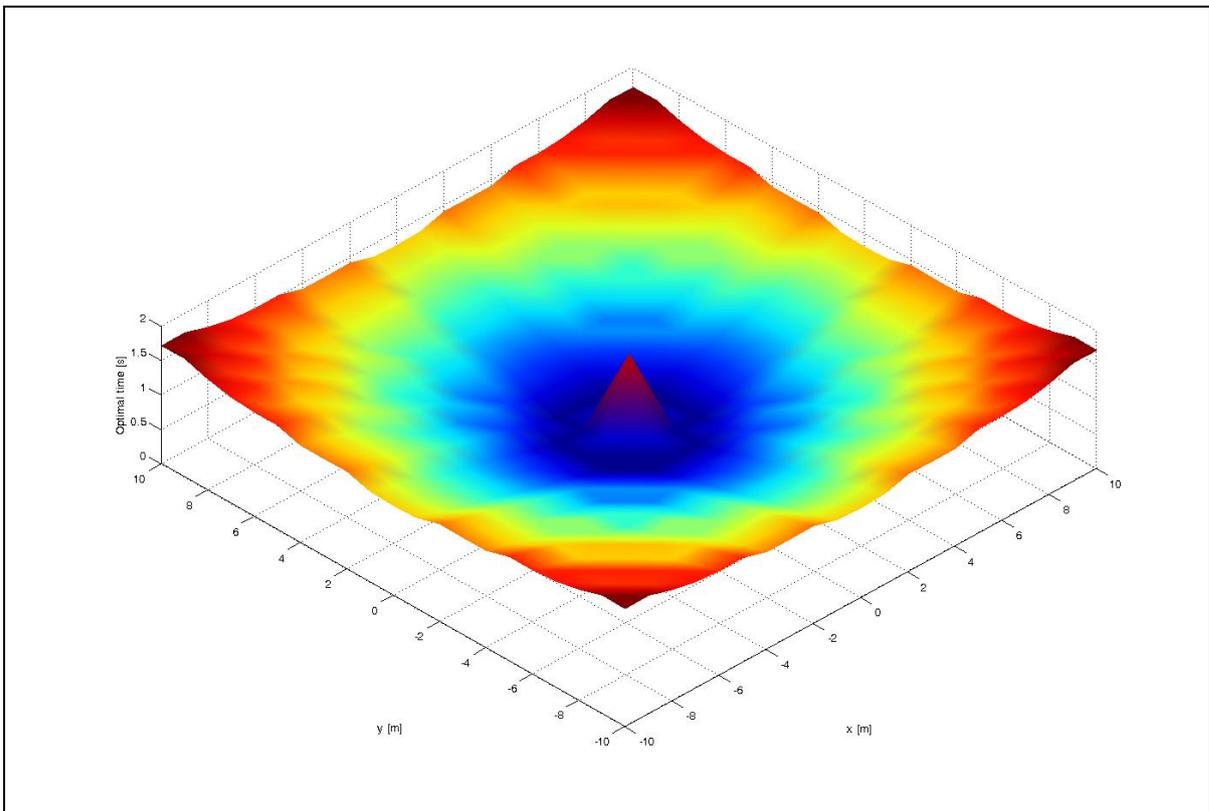
In alternativa, si può pensare di trattare  $\alpha$  come una delle variabili di controllo, cioè poterla modificar in modo controllato durante l'esecuzione del task e non lasciarla ad un valore fissato dall'istante di lancio. Ci si aspetta che il controllo ottimo sia tale da portare il braccio girevole in posizione perpendicolare alla direzione del bersaglio, che, come si era anzi notato, è la direzione in cui è possibile operare il miglior controllo.



**Figura 42** ottimizzazione del tempo ottimo di esecuzione del task al variare dell'angolo di lancio e della distanza dal manipolatore (l'angolo alpha indicato in figura è individuato in base al sistema di riferimento fisso, nel quale la direzione del bersaglio è inclinata di  $135^\circ$ )

In Figura 42 si evidenzia il comportamento accennato: i tempi minimi di esecuzione del task si ottengono per valori di  $\alpha = 0^\circ$ , cui corrisponde un angolo di lancio relativo alla direzione del bersaglio di  $135^\circ$ .

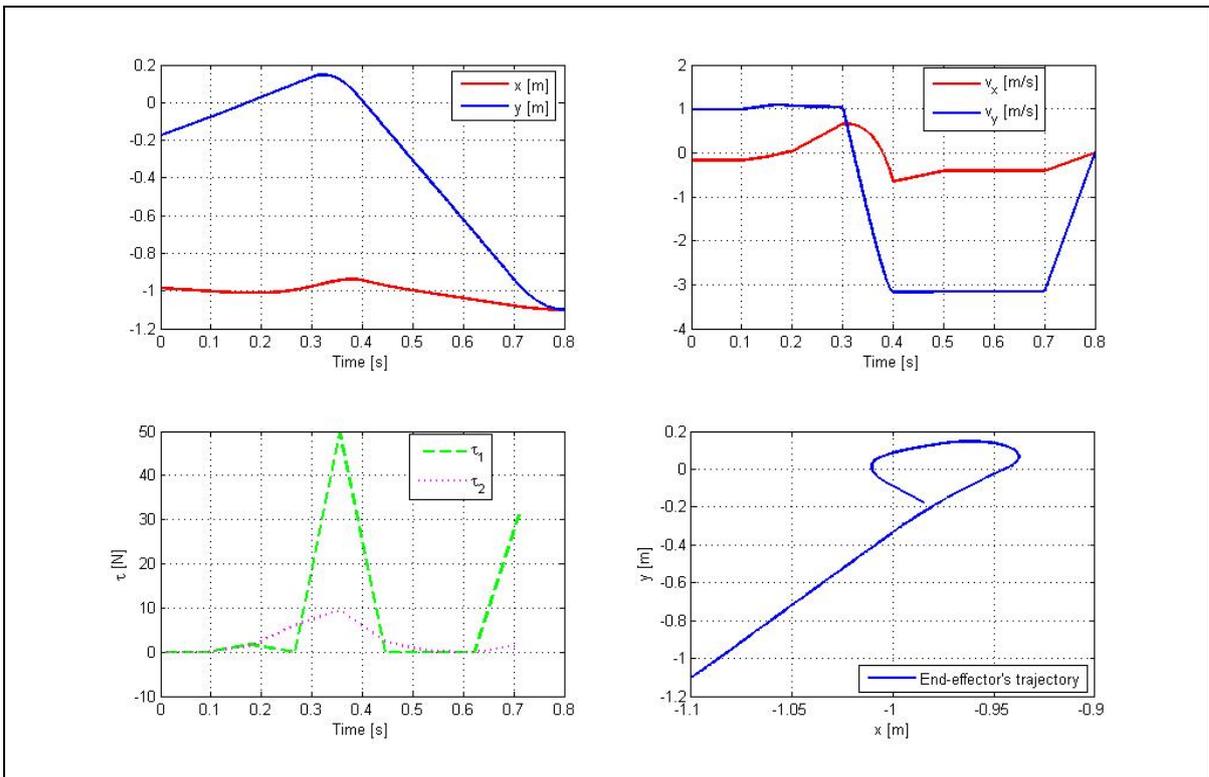
Nella Figura 43 si riportano i risultati dell'ottimizzazione al variare della posizione planare del bersaglio. Ciascun tempo ottimo riportato in tale figura è il minimo di quelli ottenuti al variare dell'angolo di lancio.



**Figura 43: ottimizzazione del tempo di esecuzione del task al variare della posizione planare del bersaglio**

Si fa notare che il tempo ottimo ha una simmetria circolare rispetto alla base del manipolatore ed inoltre lungo una determinata direzione è una funzione concava ed ammette un minimo: infatti il tempo ottimo di esecuzione aumenta con l'aumentare della distanza del bersaglio dal manipolatore, ma aumenta anche sotto una "determinata" distanza, in cui hanno influenza gli effetti del bouncing e non ha soluzione (ha una singolarità) nell'origine del sistema di riferimento, in cui l'end effector non può essere stabilizzato.

Si riporta, a titolo di esempio, una traiettoria di tipo “bounce”. Si noti, per confronto con la Figura 33 che per raggiungere la stessa distanza un comportamento “bouncing” determina un aumento del tempo di esecuzione.



**Figura 44** Comportamento della traiettoria di tipo “bounce”

### 6.3.2 PIANIFICAZIONE DELLE TRAIETTORIE PER IL MANIPOLATORE A TRE TENDINI IN PARALLELO

Nelle immagini successive si riportano i corrispondenti risultati per il manipolatore spaziale progettato, simulando la sua dinamica in assenza di gravità.

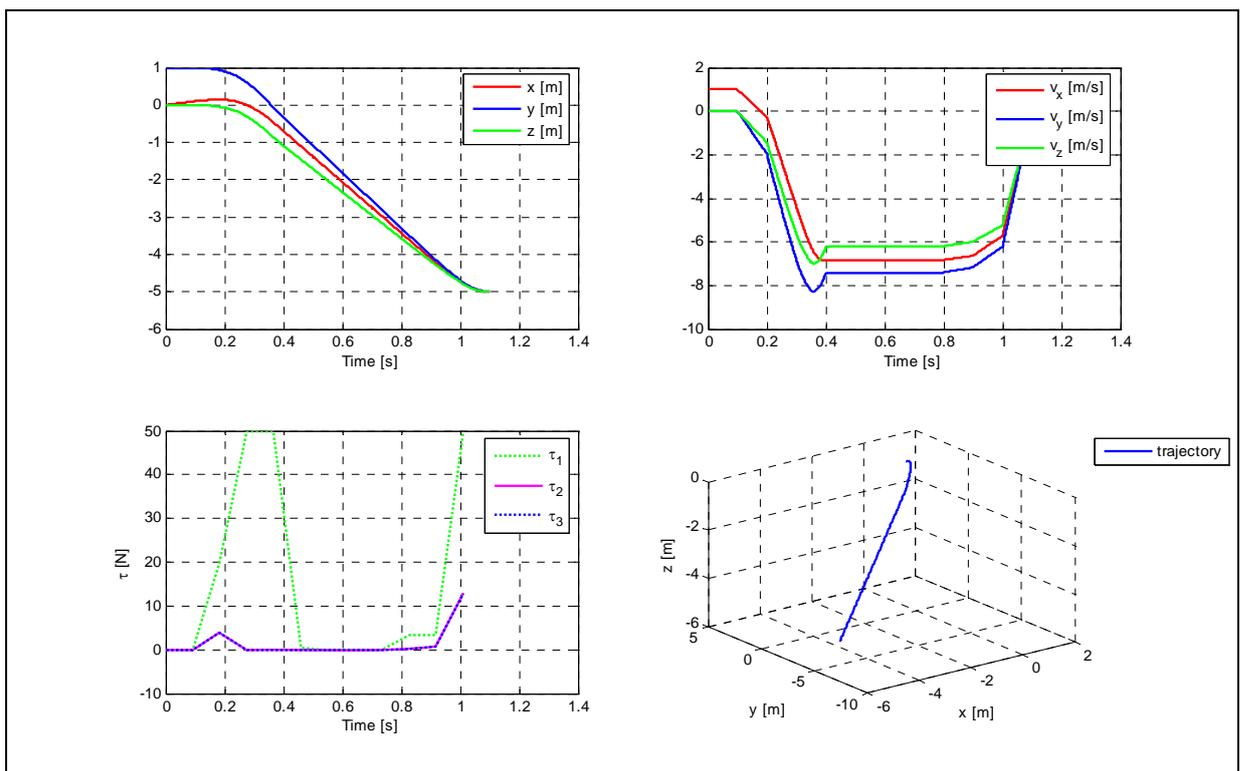


Figura 45 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento [-5 -5 -5] con angolo di lancio = 0

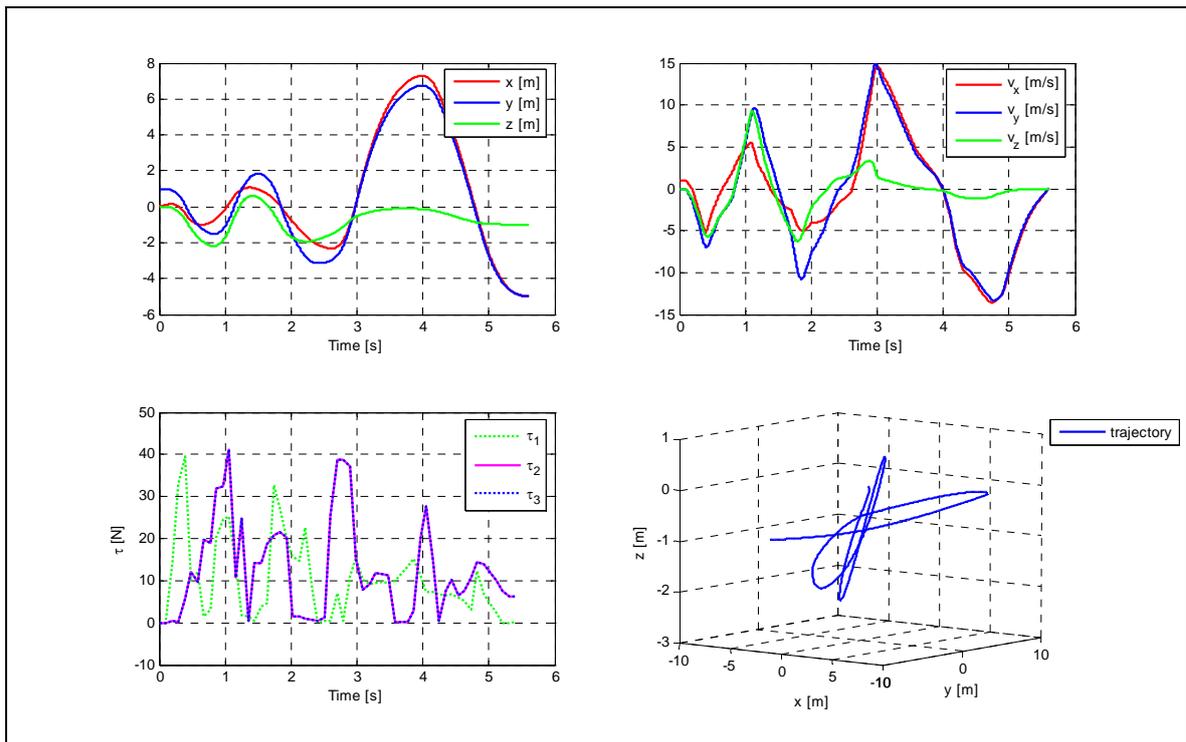


Figura 46 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 -1] con angolo di lancio = 0

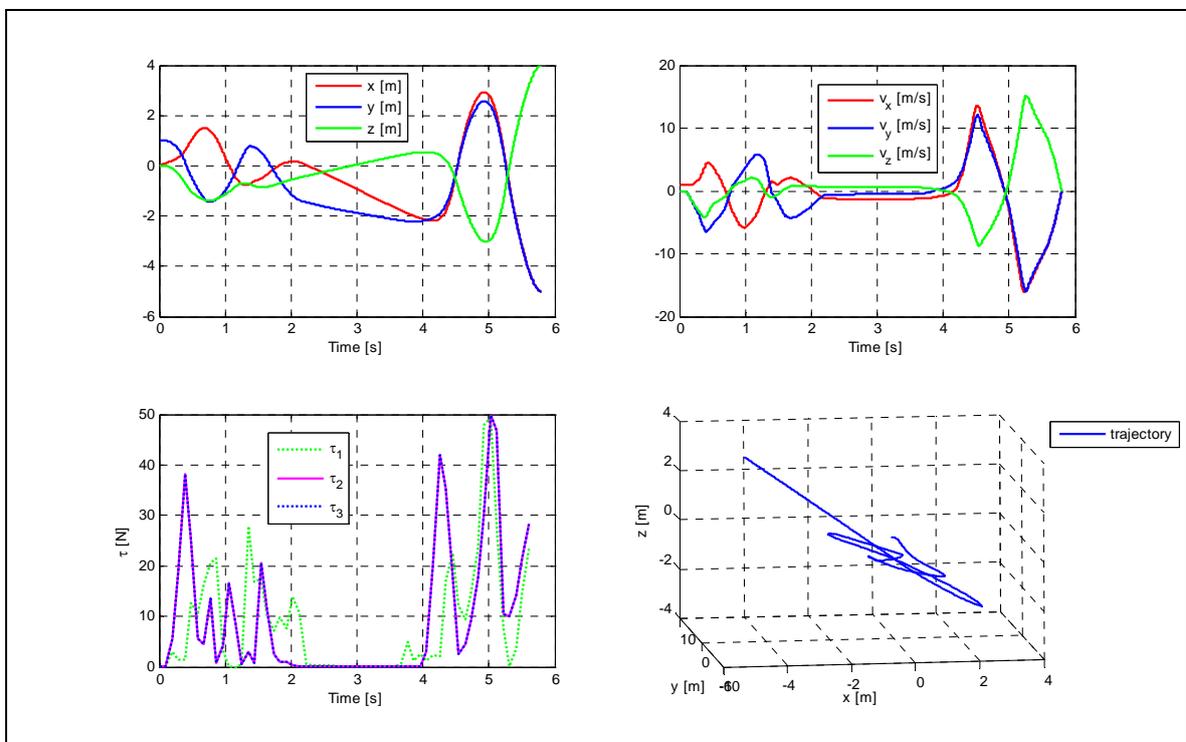


Figura 47 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 5] con angolo di lancio = 0

Il confronto di queste simulazioni, ottenute mantenendo tutti i parametri costanti tranne la quota lungo z da raggiungere ci induce a pensare che, data la configurazione geometrica del manipolatore, esso si comporti in modo migliore nel senso del tempo ottimo se il bersaglio da raggiungere è posto ad una quota inferiore rispetto alla propria: questo non stupisca, perché lungo l'asse z il manipolatore stesso e la posizione dei tre cavi non godono di simmetria.

I tempi di esecuzione del lancio si allungano notevolmente, da  $t=1.1s$  a  $t=5.5s$ , pur rimanendo uguale, fra il caso 1 e il caso 3, la distanza percorsa.

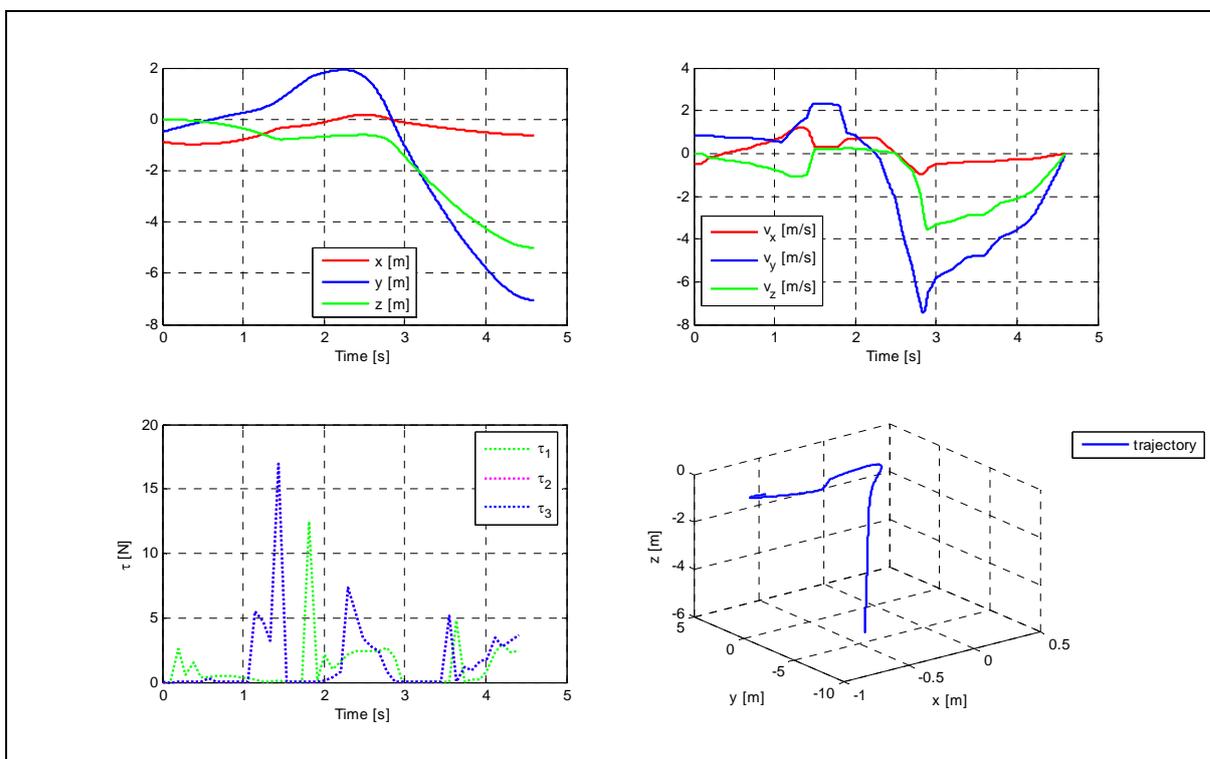
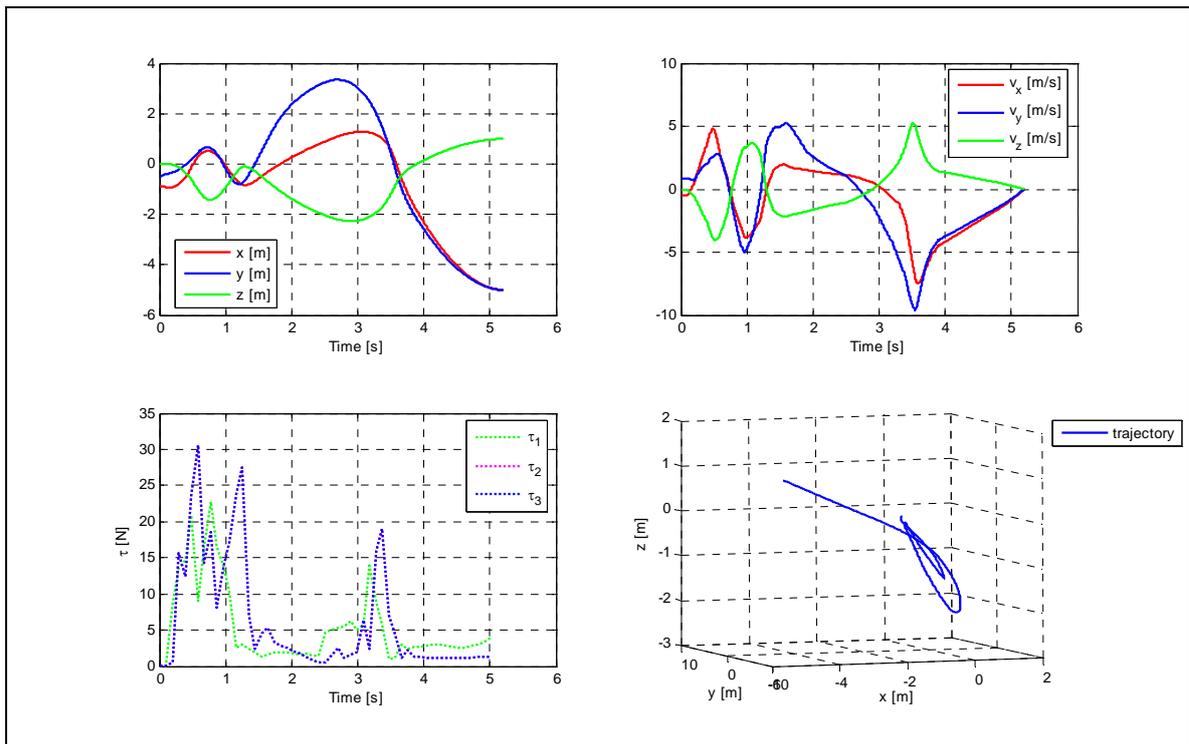


Figura 48 risultato non ammissibile per il posizionamento nel punto

$[-5 -5 5]$  con angolo di lancio =  $120$

Il confronto fra la Figura 48 e la Figura 47 invece dimostra che mantenendo la stessa quota al variare dell'angolo di lancio esistono zone che non ammettono soluzione: infatti, con  $\alpha=120$  il manipolatore non riesce a raggiungere il bersaglio; ci troviamo in un caso corrispondente a quelli riscontrati nel caso del manipolatore planare.



**Figura 49** traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 1] con angolo di lancio = 120

Il confronto fra la Figura 48 e la Figura 49 invece fa notare che a parità di alfa, con una diminuzione della quota il problema torna ad avere delle soluzioni ammissibili. Questo comportamento è dovuto alla non linearità delle variabili rispetto ai parametri del problema.

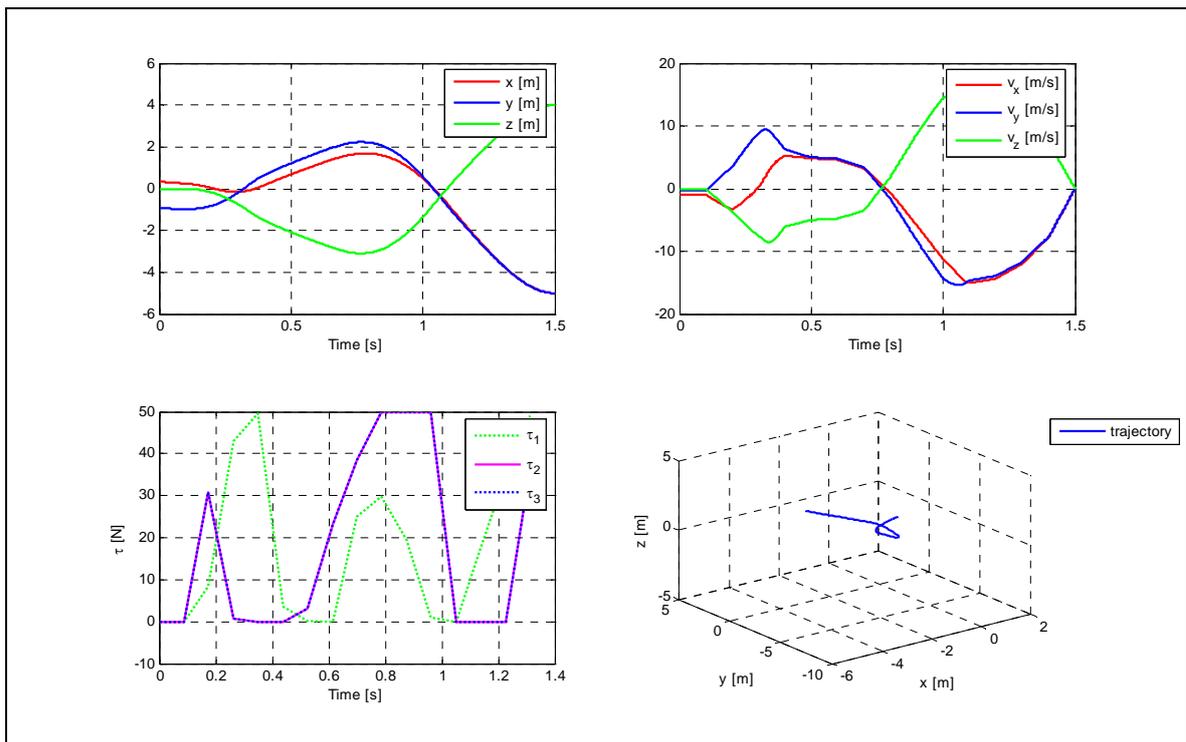


Figura 50 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 4] con angolo di lancio = 200

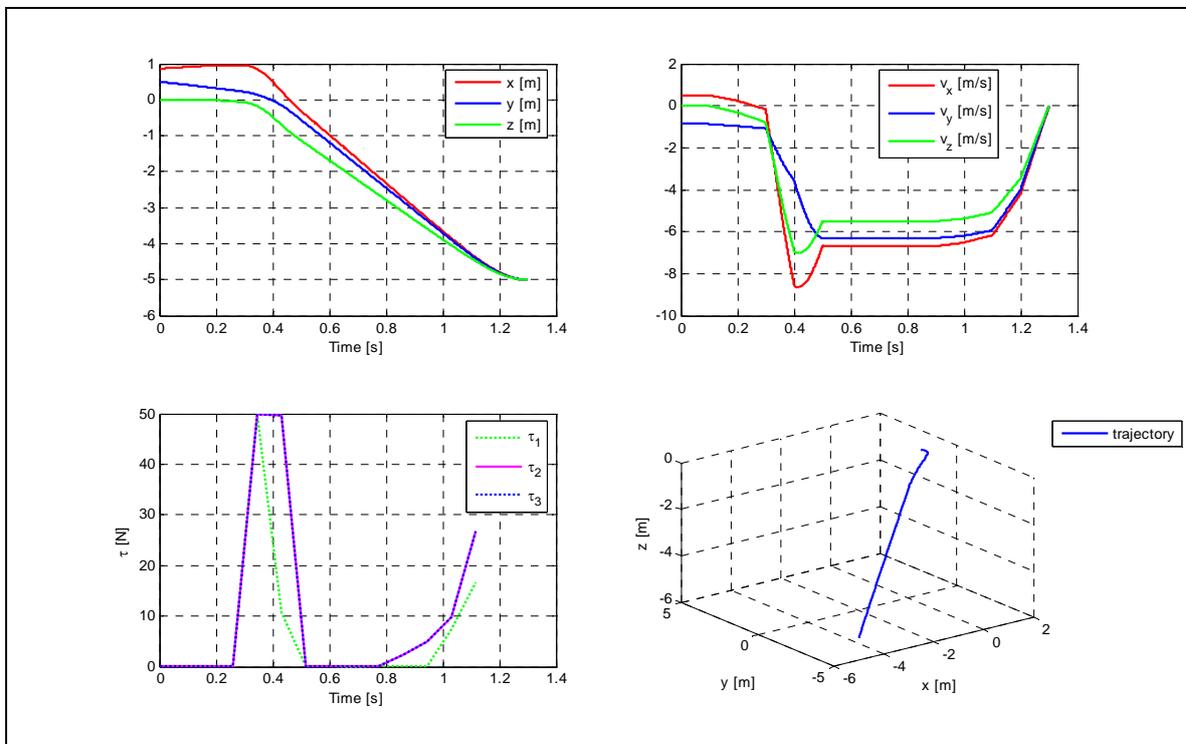
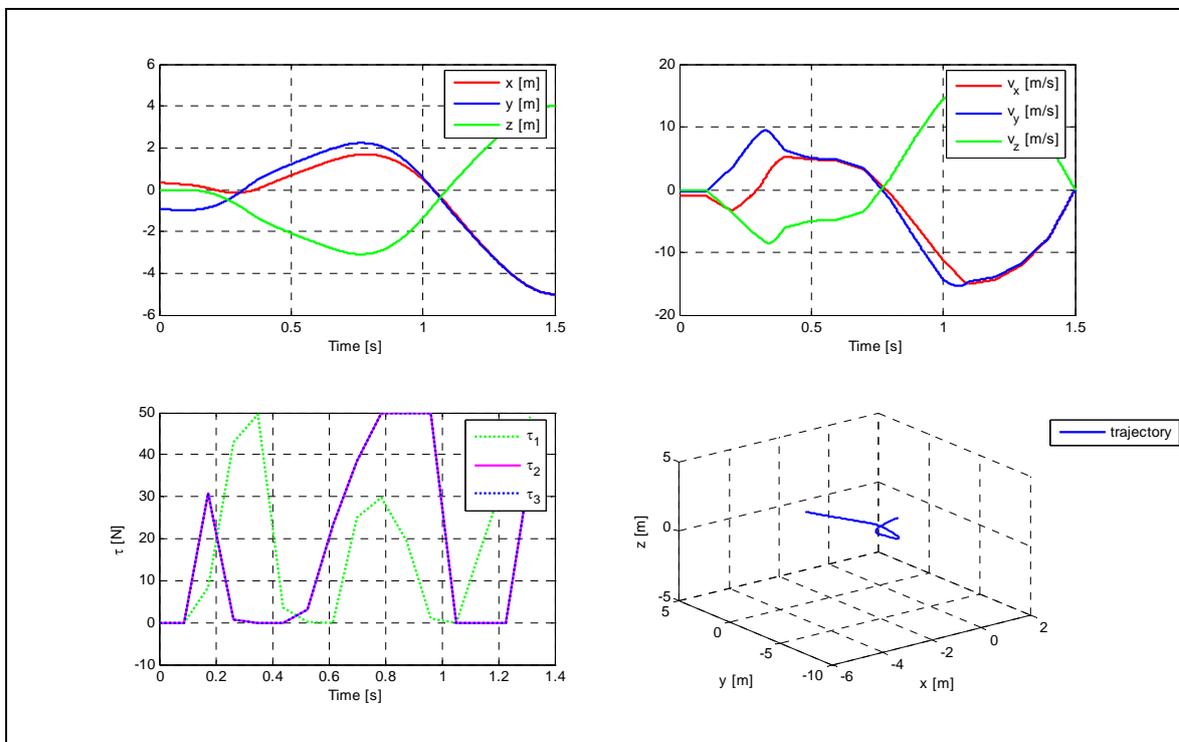


Figura 51 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 -5] con angolo di lancio = 200

Il confronto invece fra la Figura 50 e la Figura 51 invece dimostrano che la presenza di un bounce della traiettoria aumenta il tempo di esecuzione del task: infatti a parità di distanza fra il manipolatore e il bersaglio, nei due casi con e senza bounce il tempo di esecuzione passa da  $t = 1.5s$  a  $t = 1.1s$ .

Le immagini successive rappresentano invece le traiettorie scelte come ammissibili per l'esecuzione del task. Nella prima figura il bounce è solo apparente, ed è dovuto alla rappresentazione assonometrica.



**Figura 52** traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 4] con angolo di lancio = 200

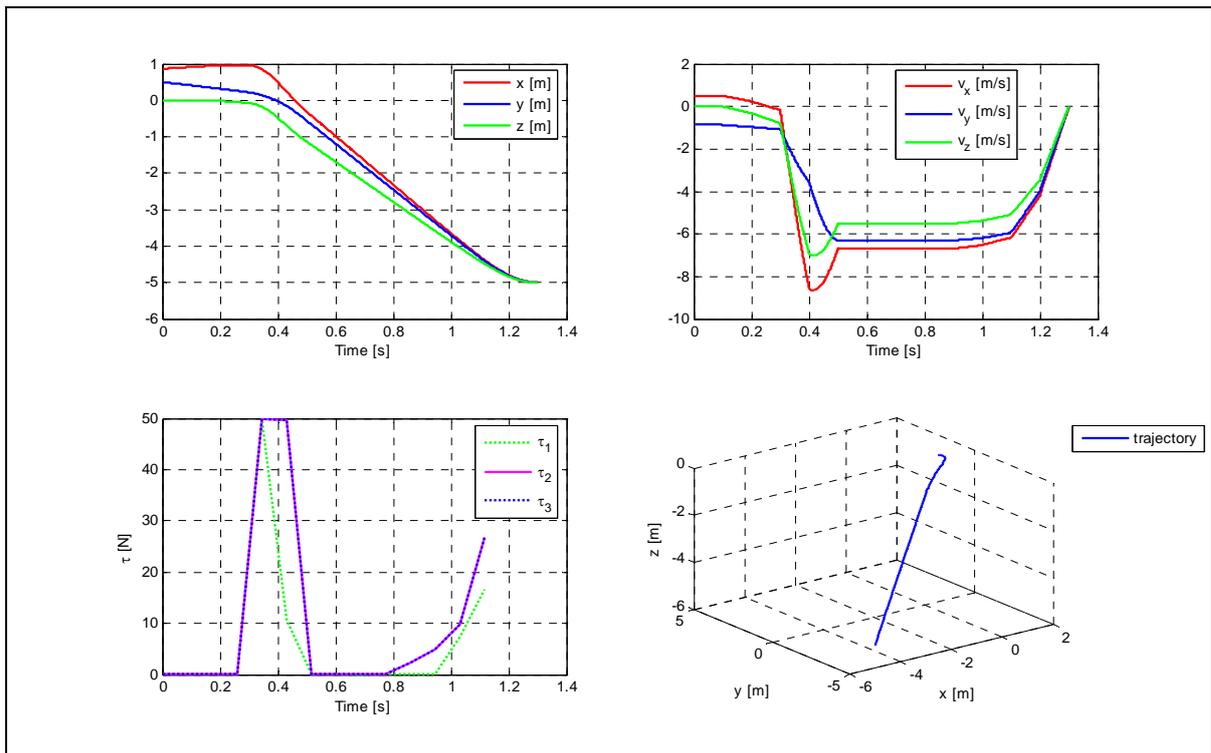


Figura 53 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 -5] con angolo di lancio = 300

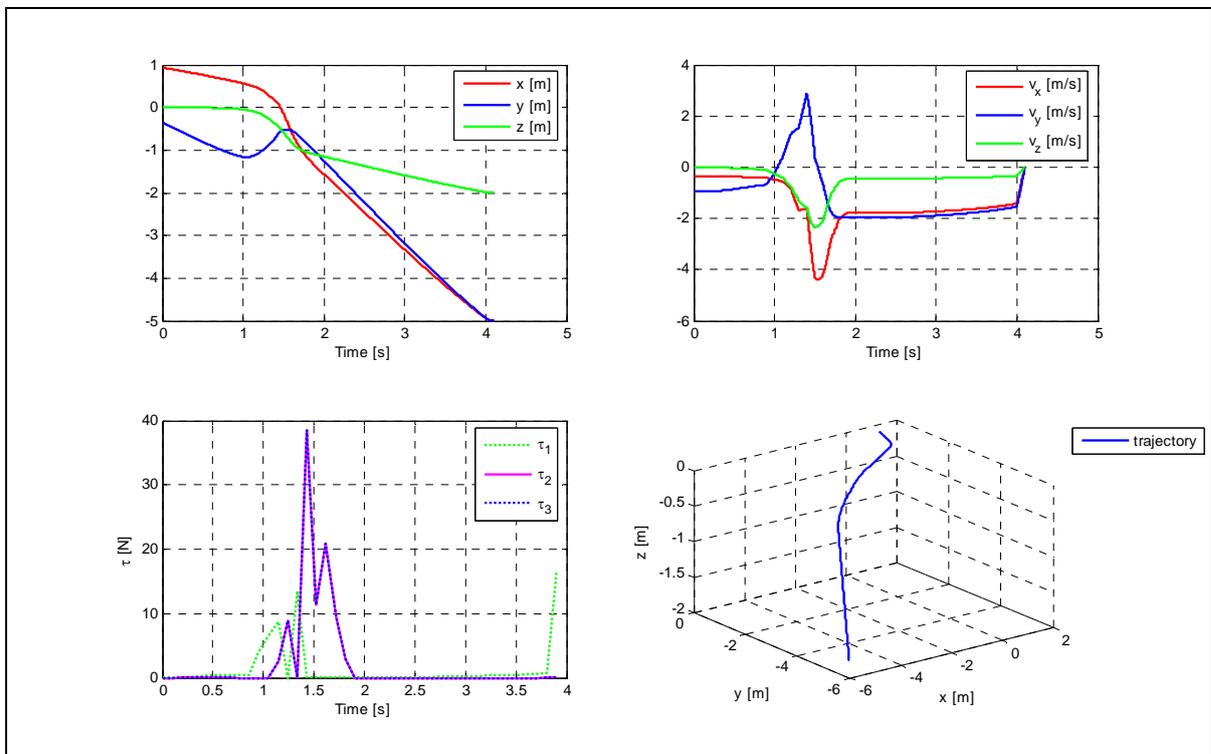


Figura 54 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 -2] con angolo di lancio = 300

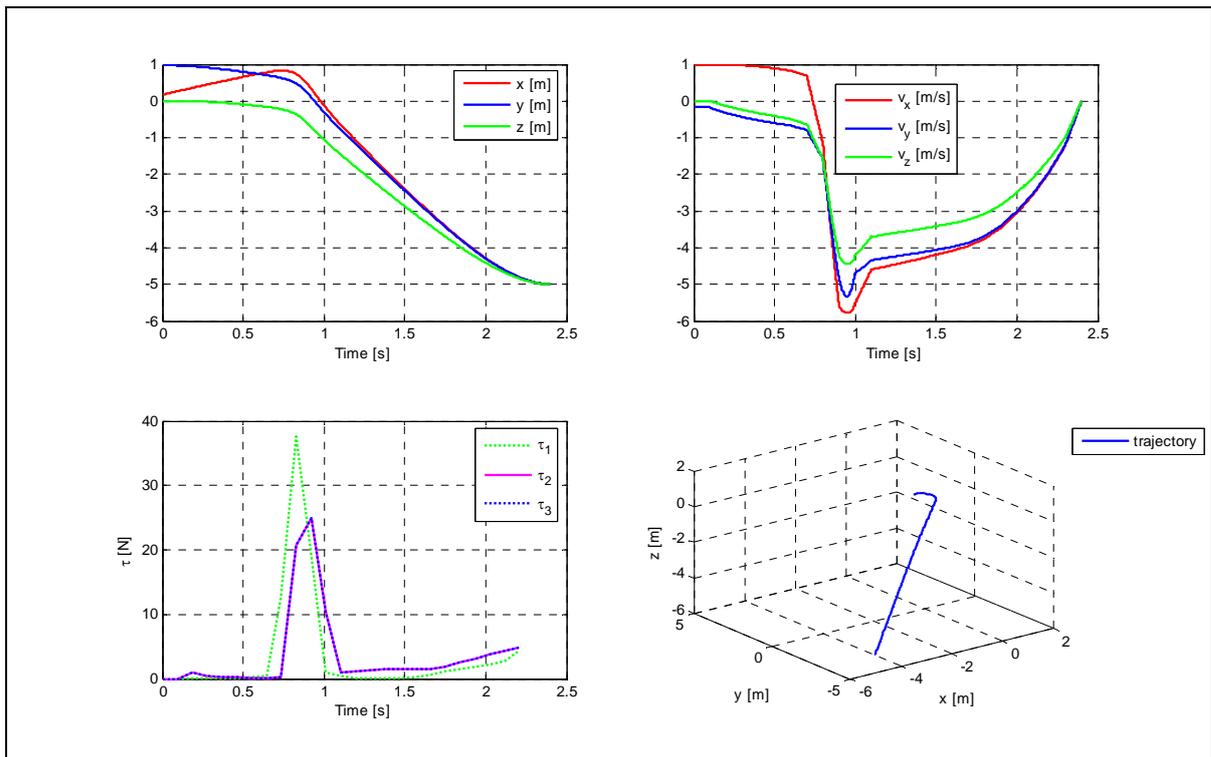


Figura 55 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 5] con angolo di lancio = 350

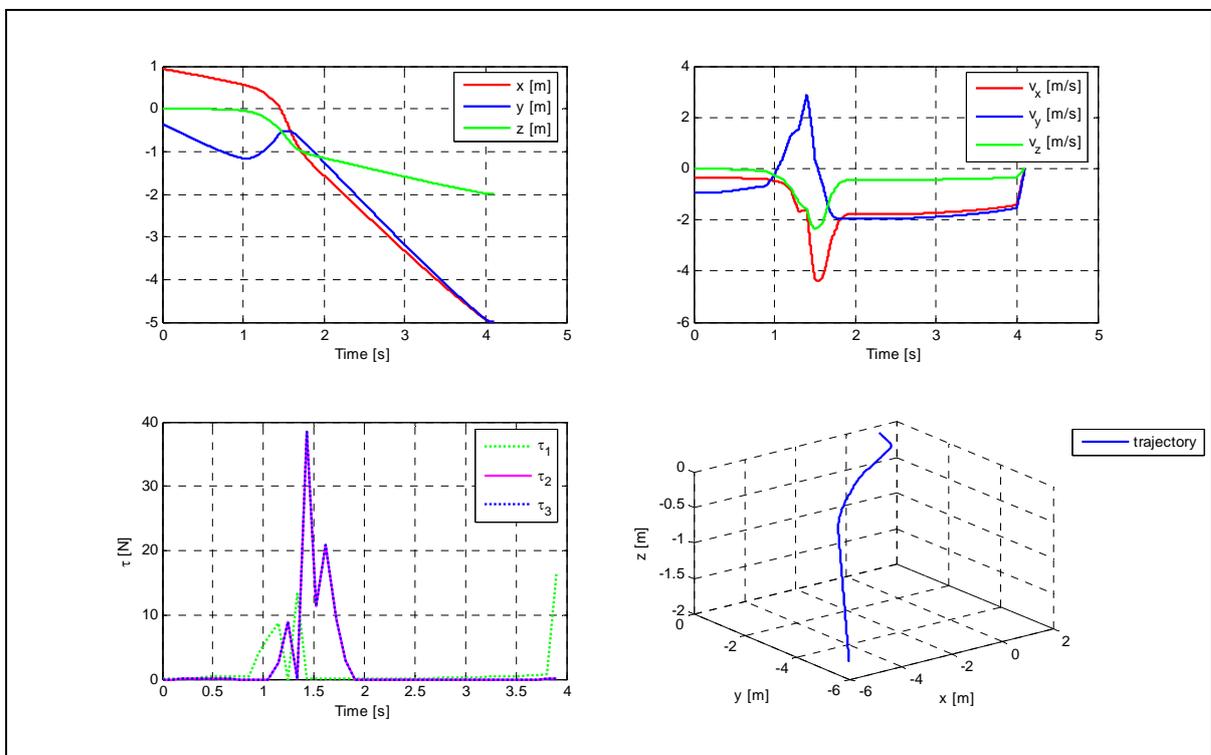


Figura 56 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 -2] con angolo di lancio = 350

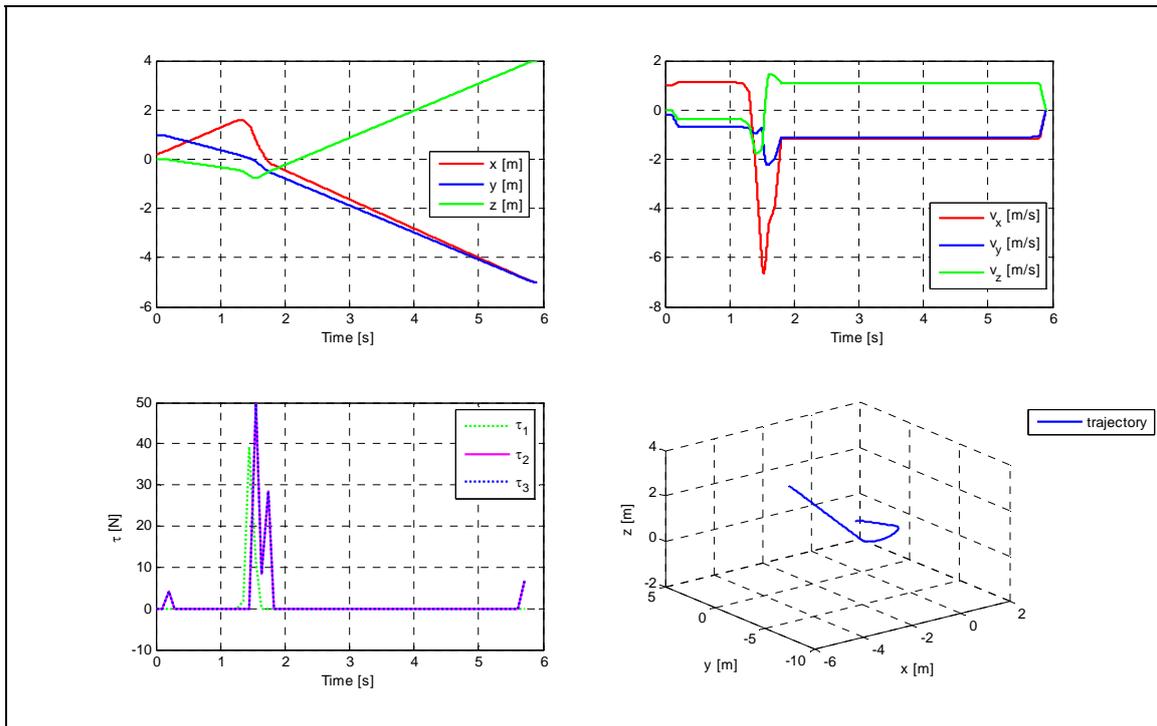
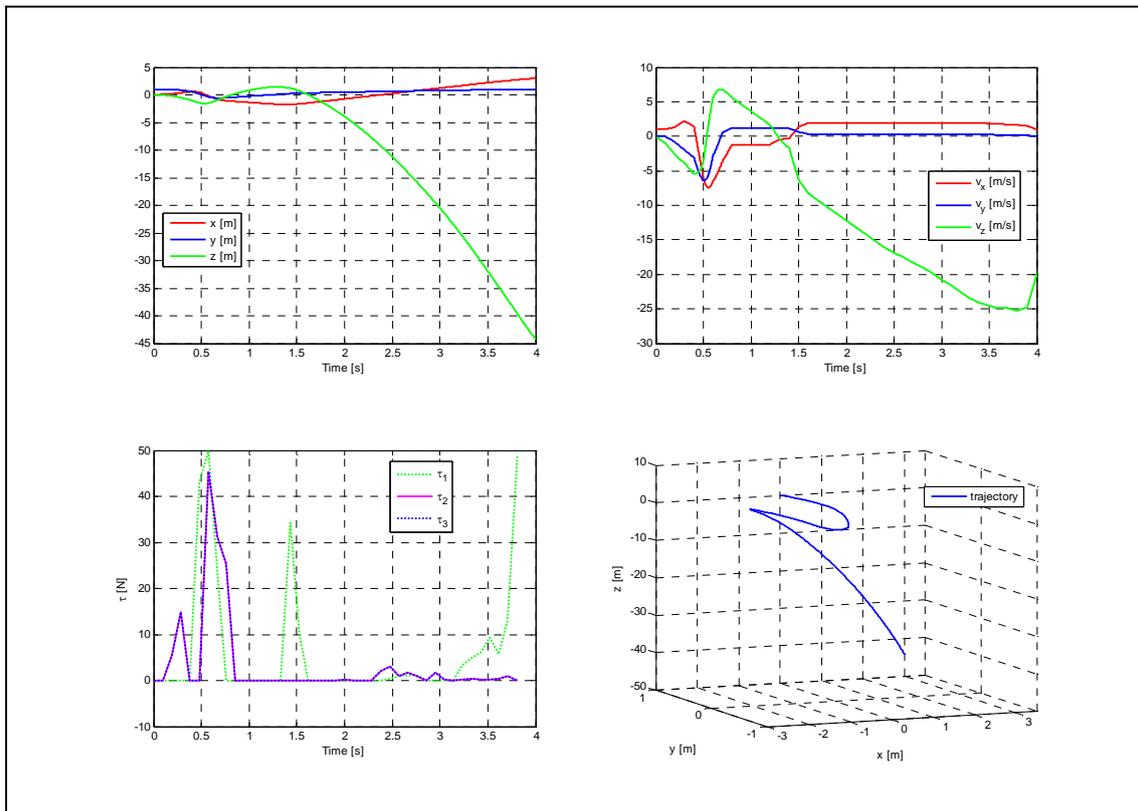


Figura 57 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [-5 -5 4] con angolo di lancio = 350

Per ultimo, si riportano le simulazioni ottenute per i manipolatori che risentono della gravità.



**Figura 58** traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto  $[0 \ 1 \ -45]$  con angolo di lancio  $=0$  e velocità finale  $[1 \ 0 \ -20]$  in presenza di gravità

Si evince da questa e dalle successive simulazioni che la politica di controllo operata nel caso di presenza della gravità è comunque sempre quella di operare una iniziale correzione della traiettoria per lasciare successivamente evolvere il sistema liberamente, per operare per ultima una frenata di modulo massimo.

Le simulazioni sono state effettuate per diversi valori di quota e diversi valori di velocità lungo l'asse z finali. Allo stato attuale delle prove, nessuna quota superiore a quella del baricentro del manipolatore è stata raggiunta ed è allo studio l'analisi di risolubilità di tale problema.

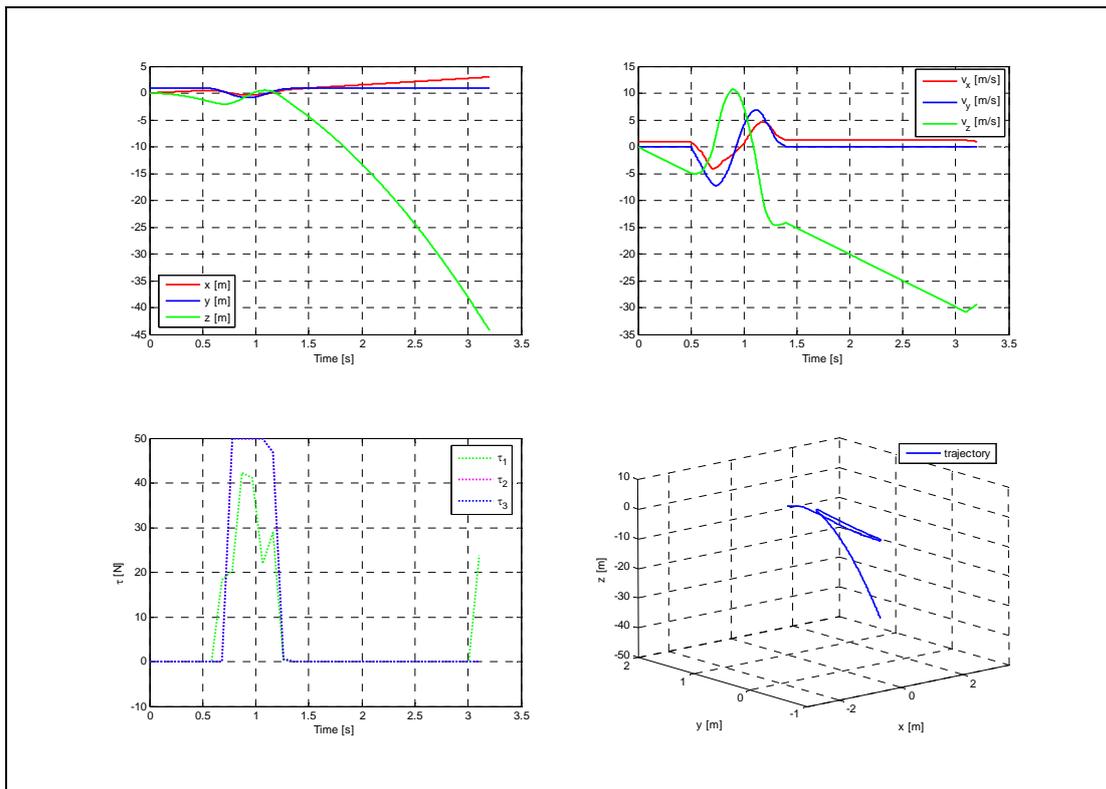


Figura 59 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto  $[0 \ 1 \ -40]$  con angolo di lancio  $=0$  e velocità finale  $[1 \ 0 \ -30]$  in presenza di gravità

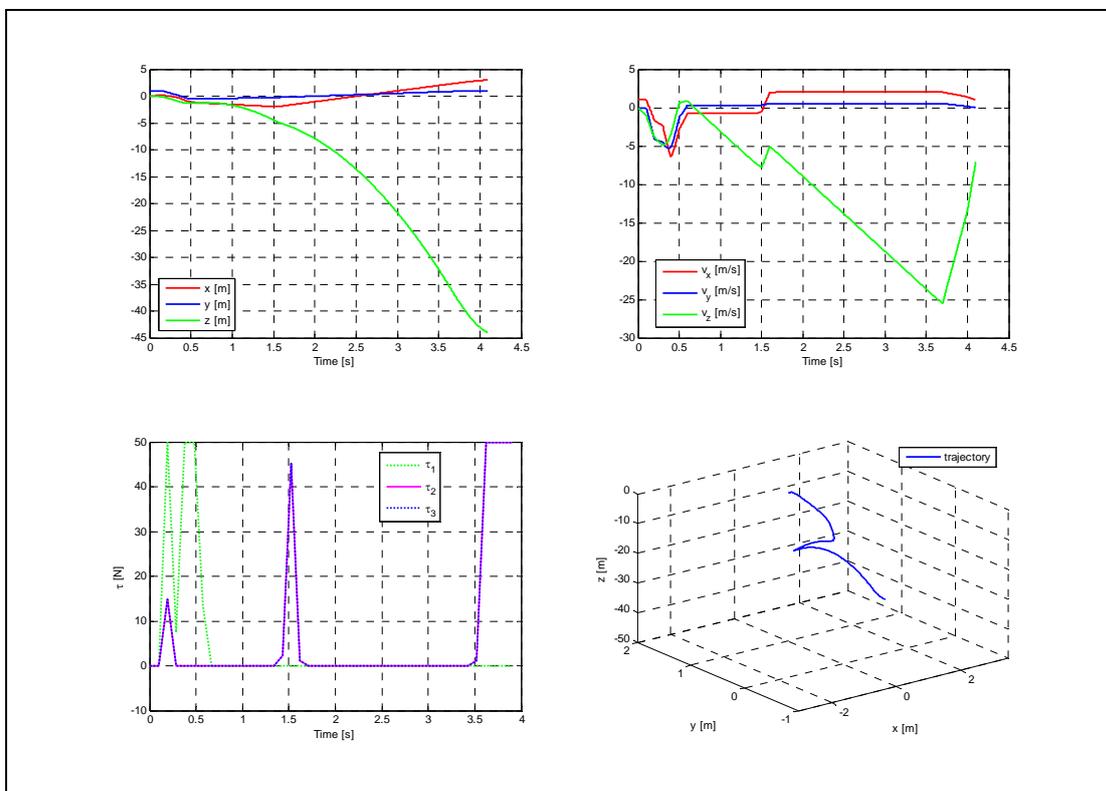


Figura 60 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto  $[0 \ 1 \ -45]$  con angolo di lancio  $=0$  e velocità finale  $[1 \ 0 \ -8]$  in presenza di gravità

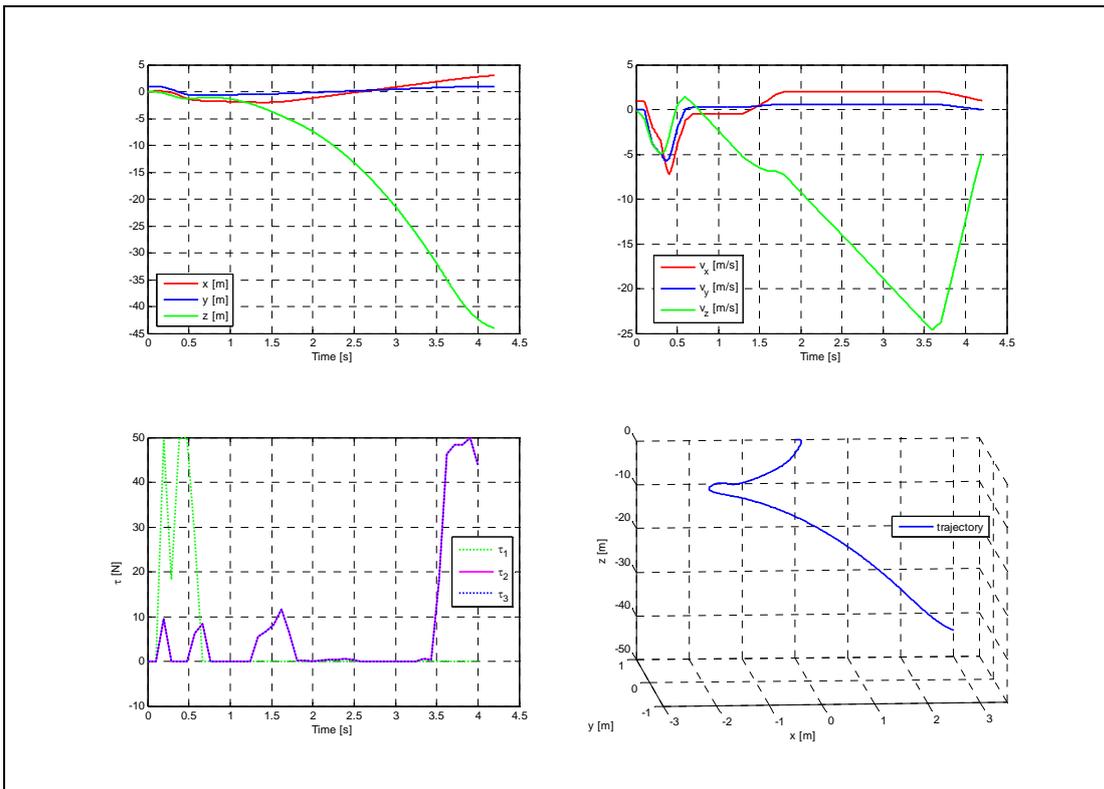


Figura 61 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [0 1 -45] con angolo di lancio =0 e velocità finale [1 0 -5] in presenza di gravità

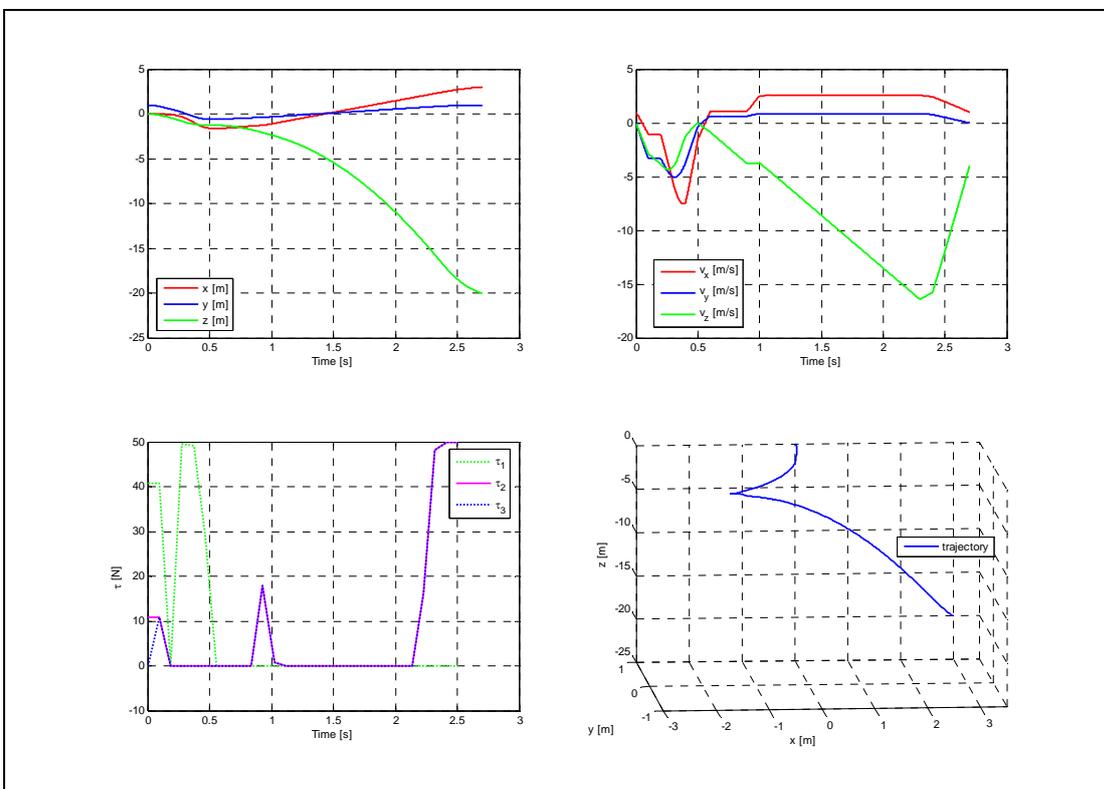


Figura 62 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto [0 1 -20] con angolo di lancio =0 e velocità finale [1 0 -5] in presenza di gravità

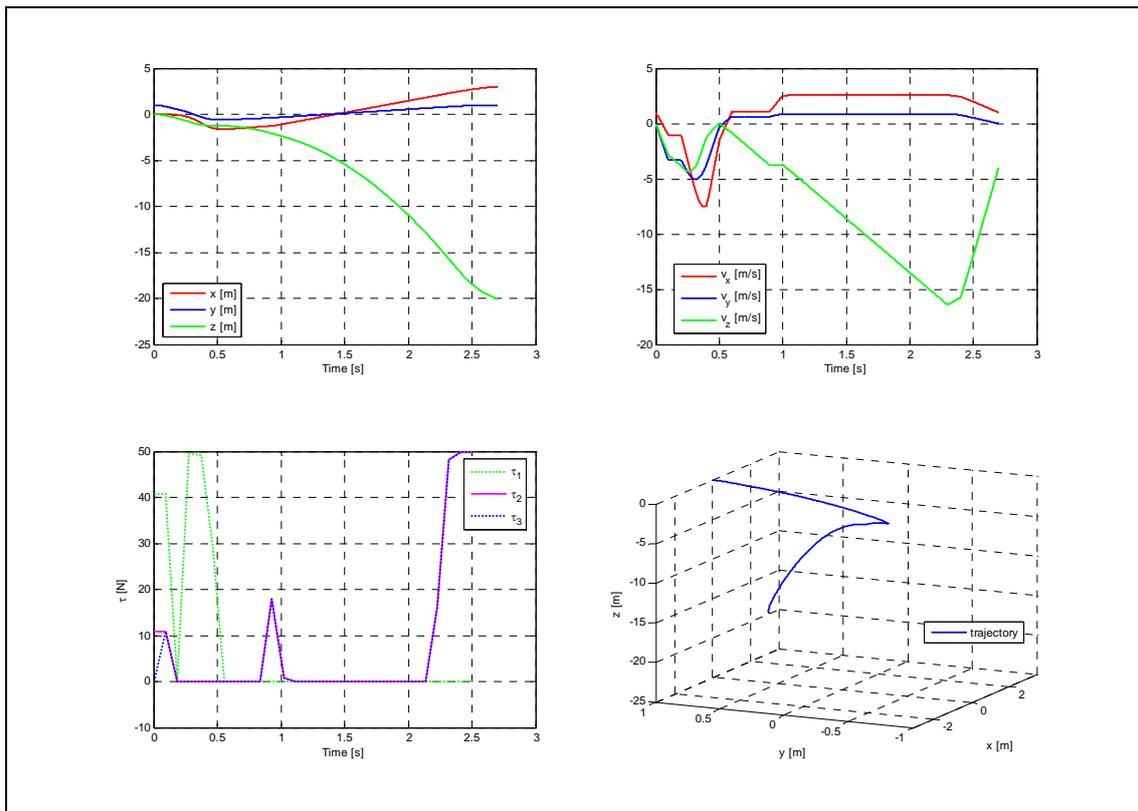


Figura 63 traiettoria, velocità e controlli ottimi nel tempo minimo per il posizionamento nel punto  $[0 \ 1 \ -20]$  con angolo di lancio  $=0$  e velocità finale  $[1 \ 0 \ -5]$  in presenza di gravità

# 7 CONCLUSIONI

## 7.1 RISULTATI RAGGIUNTI

In questo lavoro è stato affrontato il problema di raggiungere e prelevare oggetti posti a grande distanza dalla base del manipolatore e in qualsiasi direzione dello spazio, senza però gravare sul peso e sull'ingombro della struttura. Il tentativo di ottenere un robot che sia allo stesso tempo leggero e preciso nei movimenti sulle lunghe distanze, ha portato alla scelta di un tipo di manipolatore che possiamo definire “*casting cable driven robot*” cioè un manipolatore a lancio guidato da cavi posti in parallelo.

Lo studio effettuato ha portato ai seguenti risultati:

- è stata studiata la cinematica, la statica e la dinamica di manipolatori meccanici a più tendini cedevoli ed estensibili posti in parallelo;
- è stato progettato un nuovo manipolatore a lancio guidato da cavi posti in catena chiusa, capace di operare il lancio controllato di organi di presa precedentemente realizzati.
- è stato eseguito lo studio per la pianificazione delle traiettorie ottime di volo nel senso del tempo minimo di esecuzione del task.

## 7.2 SVILUPPI FUTURI

Questo lavoro apre la strada a numerosi sviluppi successivi.

Le vie ancora da percorrere riguardano:

- il modello

Il modello del sistema è stato sviluppato supponendo che i giunti cedevoli non posseggano massa ed elasticità proprie. Evidentemente, questa è un'approssimazione funzionale allo studio di risolvibilità del problema ma è poco rispondente ai casi reali. Uno sviluppo futuro prevede lo studio della dinamica dei bracci cedevoli con un modello agli elementi finiti.

- il progetto meccanico

In un futuro sviluppo del progetto meccanico ottimizzato del manipolatore, i risultati delle pianificazioni ci indicano che sarebbe più utile, ai fini di ridurre l'utilizzo dei controlli, che i supporti delle bobine possano essere mobili sulla piattaforma per poter orientare i cavi sempre nella direzione del bersaglio, direzione nella quale si richiede che il controllo esercitabile sia massimo.

- il controllo

Si deve innanzitutto preparare un controllo della fase di avvio del manipolatore.

---

Si deve sviluppare un controllo in retroazione basato su un sistema di visione che fornisca il segnale di errore tra la posizione dell'end effector e la traiettoria pianificata, e tra la traiettoria pianificata e l'eventuale variazione della posizione del bersaglio, nel caso in cui questo possa muoversi durante l'esecuzione del task.

Un successivo sviluppo del controllo può anche essere quello della pianificazione dell'inclinazione dell'end effector e non solo del suo posizionamento.

## 7.3 RINGRAZIAMENTI

I miei ringraziamenti vanno innanzitutto al Prof. Antonio Bicchi, per avermi offerto la possibilità di lavorare in un ambito così stimolante e per avermi aperto sempre nuove strade verso la conoscenza.

Ringrazio vivamente l'Ing. Adriano Fagiolini che in questi mesi mi ha accompagnato e aiutato nel lungo procedere di questo continuo lavoro di comprensione e soluzione dei problemi riscontrati durante la tesi.

Ringrazio l'Ing. Giovanni Tonietti, per i suggerimenti, le osservazioni, la supervisione offerta.

Un ringraziamento va anche all'Ing. Riccardo Schiavi per la sua costante disponibilità e a tutti i ragazzi del centro.

E poi ringrazio tutti gli amici che mi hanno dato sostegno e aiuto durante questi mesi: i loro nomi, anche se non sono scritti su questo foglio, rimarranno sempre impressi nella mia memoria.

---

# BIBLIOGRAFIA

1. Franco Bevacqua, "Storia della robotica", Università di Siena, 2001
2. De Luca, R. Mattone, G. Oriolo, "Stabilization of an Underactuated Planar 2R Manipulator", International Journal of Robust and Nonlinear Control.
3. Mark W. Spong, "Underactuated Mechanical Systems", Coordinated Science Laboratory, University of Illinois
4. Imme Ebert-Uphoff, Paul Bosscher, "Wrench-Based Analysis of Cable-Driven Robots", International Conference on Robotics & Automation, Woodruff School of Mech. Eng., Georgia Institute of Technology, April 2004
5. Philip A. Voglewede, Imme Ebert-Uphoff, "Application of the Antipodal Grasp Theorem to Cable-Driven Robots", IEEE Transactions on Robotics 2005
6. Emmanuel Brau, Florian Gosselin, Jean Paul Lallemand, "Design of a Singularity Free Architecture For Cable Driven Haptic Interfaces", First Joint Eurohaptics Conference and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems, France, 2005
7. So-Ryeok Oh and Sunil K. Agrawal, "A Reference Governor-Based Controller for a Cable Robot Under Input Constraints", IEEE Transactions on control systems technology, vol. 13, no. 4, July 2005
8. Robert L. Williams II, Jigar Vadia, "Planar translational cable-direct-driven robots: hardware implementation", DETC2003 - ASME Design Engineering Technical Conferences, Chicago, 2003
9. Guillaume Barrette, "Determination of the Dynamic Workspace of Cable-Driven Planar Parallel Mechanisms", Departement de Genie Mecanique, Universite Laval, Canada, March 2005
10. So-Ryeok Oh, Sunil K. Agrawal, "Guaranteed Reachable Domain and Control Design for a Cable Robot Subject to Input Constraints", Dept. of Mechanical Engineering, University of Delaware, American Control Conference, 2005
11. Motoji Yamamoto, Noritaka Yanai, and Akira Mohri, "Inverse Dynamics and Control of Crane-Type Manipulator", Department of Intelligent Machinery and Systems Faculty of Engineering, Kyushu University, International Conference on Intelligent Robots and Systems, 1999

- 
12. Hakozaiki, Higashi-ku, "Trajectory Control of Incompletely Restrained", IEEE Transactions on robotics, vol. 20, no. 5, October 2004
  13. Motoji Yamamoto, Noritaka Yanai, Akira Mohri, "Parallel-Wire-Suspended Mechanism Based on Inverse Dynamics", IEEE Transactions on robotics, vol. 20, no. 5, October 2004
  14. Roger Bostelman, James Albus, Nicholas Dagalakis, Adam Jacoff, John Gross, "Applications of the nist robocrane", National Institute of Standards and Technology, Maryland, U.S.A.
  15. Roger Bostelman, James Albus, Karl Murphy, Tsung-Ming Tsai, Ed Amatucci, "A stewart platform lunar rover" , National Institute of Standards and Technology, Maryland, U.S.A.
  16. Roger Bostelman, Adam Jacoff, Fred Proctor, Tom Kramer, Albert Waverling, "Cable-based reconfigurable machines for large scale manufacturing", Symposium on Flexible Automation International Conference on New Technological Innovation for the 21st Century, Michigan July 2000
  17. Rodney G. Roberts' Todd Graham, "On the Inverse Kinematics and Statics of Cable-Suspended Robots", Department of Electrical Engineering, Florida State University
  18. Jefferson M. Bumpower, "Advanced Systems & Analysis Division", NASA Kennedy Space Center
  19. Hitoshi Arisumi, Tetsuo Kotqku, Kiyoshi Ko Ya, "A study of Casting Manipulation", Mechanka Engineering Laboratory, Tsukuba Science City, Japan
  20. Hitoshi Arisumi and Kiyoshi Komoriya, "Posture Control of Casting Manipulation", International Conference on Robotics & Automation, Detroit, Michigan, May 1999
  21. Hitoshi Arisumi, Kiyoshi Komoriya, "Catching Motion of Casting Manipulation", International Conference on Intelligent Robots and Systems, Mechanical Engineering Laboratory, Tsukuba Science City, Japan
  22. Hitoshi Arisumi, Kazuhito Yokoi, Kiyoshi Komoriya, "Kendama Game by Casting Manipulator", National Institute of Advanced Industrial Science and Technology, Tsukuba, Japan
  23. Hitoshi Arisumi, Kiyoshi Komoriya, "Study on Casting Manipulation" ,International Conference on Intelligent Robots and Systems, Mechanical Engineering Laboratory, Tsukuba Science City, Japan

- 
24. Imme Ebert-Uphoff, Philip A. Voglewede, "On the Connections Between Cable-Driven Robots, Parallel Manipulators and Grasping", Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology
  25. Antonio Bicchi, Claudio Melchiorri, Daniele Balluchi, "On the Mobility and Manipulability of General Multiple Limb Robots", IEEE Transactions on robotics and automation. vol 11. no. 2, april 1995
  26. Antonio Bicchi, Domenico Prattichizzo, "Manipulability of Cooperating Robots with Unactuated Joints and Closed-Chain Mechanisms", IEEE Transactions on robotics and automation, vol. 16, no. 4, august 2000
  27. Antonio Bicchi, "On the Closure Properties of Robotic Grasping, Centro E. Piaggio, Università di Pisa
  28. Domenico Prattichizzo, Antonio Bicchi, "Consistent task specification for manipulation systems with general kinematics", ASME Journal of Dynamic Systems Measurements and Control, 1997
  29. Domenico Prattichizzo, Antonio Bicchi, "Dynamic Analysis of Mobility and Graspability of General Manipulation Systems", IEEE Transactions on robotics and automation, vol. 14, no. 2, April 1998
  30. Lucia Pallottino, Adriano Fagiolini, "Pianificazione ottima del moto", Università di Pisa, October 2005
  31. Giovanni Marro, "Introduzione al controllo ottimo", Università di Bologna
  32. Michele Bavaro, "Studio di tecniche di controllo per manipolatori robotici a cedevolezza variabile", Centro E. Piaggio, Università di Pisa, 2003
  33. Adriano Fagiolini, "Pianificazione e controllo in tempo reale per la presa di oggetti mobili mediante un dispositivo di lancio controllato e recupero", Centro E. Piaggio, Università di Pisa, 2004
  34. Sciavicco, Siciliano, "Robotica Industriale", Ediz. McGraw-Hill, 1995

---

# APPENDICE A - LISTATO DEI PROGRAMMI

Si riporta qui in seguito il listato dei programmi utilizzati per le pianificazioni sviluppato in ambiente Matlab e C

```
clear all
close all
clc
pack

global c ceq
global m b
global alpha1
global speedX speedY posX posY
global initState finalState Ttobeat
global granularity N Umax
global UB LB
global integration_step

point = [0 : 1 : 5];
FinalStateVect = [];
for hh = 1 : length(point)
    FinalStateVect = [FinalStateVect; -5 -5 point(hh) 0 0 0];
end

...

alpha_granularity = 10 * pi/180;
AlphaVect = [0 : alpha_granularity : 2*pi - alpha_granularity];
alpha_count = 0;

base_file = 'Results\space_';

%%

m = 1;
b = 1;

Umax = 50;
num_input = 3;

integration_step = 0.001;

%%

tic
```

---

```

for j = 1 : size(FinalStateVect,1)

    finalState = FinalStateVect(j,:)

    alpha_count = 0;
    for i = 1 : length(AlphaVect)

        Ttobeat = 6;
        granularity = 0.1;

        alpha1 = AlphaVect(i);
        initState = [-sin(alpha1), cos(alpha1), 0,...
cos(alpha1), sin(alpha1), 0]

        go = 1;
        while go == 1
            disp(sprintf('\nSOLVING [alpha = %f] [Z = %f]... [time =
%f]\n', alpha1, finalState(3), Ttobeat));

            N = ceil(Ttobeat / granularity);

            if exist('UUinit') == 1
                UU0 = UUinit(1:num_input*N);
            else
                UU0 = zeros(1,num_input*N);
            end

            LB = zeros(1,num_input*N);
            UB = Umax * [ones(1,num_input*N)];

            [u, fval, exitflag] = fmincon(...
                @(u)myObjFun(u), ...
                UU0, [], [], [], [], LB, UB, ...
                @(u)DynConstraint(u, N, initState,... finalState,
[alpha1]), ...
                optimset('LargeScale', 'on', 'Diagnostic',... 'off',
'MaxFunEvals', 10000, 'MaxIter', 10000, 'TolX', 1E-6));

            if exitflag <= 0
                go = 0;
                clear UUinit
            else
                u_ottimo = u;
                N_ottimo = N;
                t_ottimo = Ttobeat;
                Ttobeat_ottimo = Ttobeat;

                UUinit = u;
                Simulate
                ShowResult
            end

            pause(1);

            Ttobeat = Ttobeat - granularity;
        end

        StoreFile = strcat(base_file, 'Alpha');
    end
end

```

```

        StoreFile = strcat(StoreFile, int2str(alpha_count));
        StoreFile = strcat(StoreFile, '_Z');
        StoreFile = strcat(StoreFile, int2str(point_count));
        StoreFile = strcat(StoreFile, '.mat');
        Ttobeat = Ttobeat + granularity;
        save(StoreFile, 't_ottimo', 'u_ottimo', 'alpha1',...
'initState', 'finalState', 'N_ottimo', 'Ttobeat_ottimo',...
'granularity', 'integration_step');
        alpha_count = alpha_count + 1;
    end

%     disp('finito');
%     pause

    point_count = point_count + 1;
end

toc

```

Questo algoritmo richiama la funzione `fmincon`, la funzione di ottimizzazione non lineare vincolata di Matlab, che al suo interno richiama la definizione della funzione obiettivo `myObjFun` che riportiamo

```

function F = myObjFun(UU)

F = UU(1)^2 + UU(length(UU)*1/3+1)^2 + UU(length(UU)*2/3+1)^2;

```

E richiama le condizioni di vincolo, che per il nostro problema non sono altro che la dinamica del sistema. Per convenienza, esse sono state compilate in C.

```

/*
 * File:    DynConstraint.c
 * Author:  Adriano Fagiolini
 * Date:    12 June 2006
 */

#include "mex.h"
#include <stdio.h>

#define DEBUG_
#define DEBUG_EXT_

#include "constants.h"

#define INTERNAL_SAMPLING_TIME      (SAMPLING_TIME/100)
#define NUM_INTERNAL_STEPS          (SAMPLING_TIME/INTERNAL_SAMPLING_TIME)

int sample_num;
double *x0, *xf_desired;
double x[STATE_DIMENSION];
double dx[STATE_DIMENSION];
double u_actual[INPUT_NUM];

```

```

double* u[INPUT_NUM];

#include "SystemDynamics.c"
//#include "SystemConstraint.c"

/*
 * This function evaluates the dynamical constraints of the
 * problem considered.
 */
void DynConstraint(double *control_param, double *ext_param, double
*c, double *ceq)
{
    static int i, j;

    #ifdef DEBUG
    printf("sample num = %d\n", sample_num);

    printf("x0 = [");
    for (i=0; i<STATE_DIMENSION-1; i++)
        printf("%f, ", x0[i]);
    printf("%f]\n", x0[i]);

    printf("xf_desired = [");
    for (i=0; i<STATE_DIMENSION-1; i++)
        printf("%f, ", xf_desired[i]);
    printf("%f]\n", xf_desired[i]);
    #endif

    for (j=0; j<INPUT_NUM; j++)
        u[j] = control_param + sample_num * j;

    // Initialize the system state
    for (i=0; i<STATE_DIMENSION; i++)
        x[i] = x0[i];

    SystemSimulation(u, x, ext_param);

/*****
 * CUSTOMIZATION TO THE SPECIFIC PROBLEM IS TO BE DONE
 * WITHIN THIS BLOCK. NO OTHER MODIFICATIONS ARE NEEDED.
 *****/
*/

    // Equality constraints evaluation
    for (i=0; i<STATE_DIMENSION; i++)
        ceq[i] = x[i] - xf_desired[i];

    // Inequality constraints evaluation
    // c is empty

/*****
 * END OF CUSTOMIZING BLOCK
 *****/
*/

    #ifdef DEBUG
    printf("c = [");
    for (i=0; i<INEQUALITY_CONSTR_NUM-1; i++)

```

```

        printf("%f, ", c[i]);
    if (INEQUALITY_CONSTR_NUM > 0)
        printf("%f", c[i]);
    printf("]\n");

    printf("ceq = [");
    for (i=0; i<EQUALITY_CONSTR_NUM-1; i++)
        printf("%f, ", ceq[i]);
    if (EQUALITY_CONSTR_NUM > 0)
        printf("%f", ceq[i]);
    printf("]\n");
    #endif
}

/*
 * This function simulates the system dynamics given the initial state
 * and the input control
 */
void SystemSimulation(double **u, double *x, double *ext_param)
{
    static int internal_steps;
    static int input_sample;
    static int i, j;

    // Simulate system's evolution under the specified input control
    for (input_sample = 0; input_sample < sample_num; input_sample++)
    {
        for (j=0; j<INPUT_NUM; j++)
            u_actual[j] = u[j][input_sample];

        #ifdef DEBUG
        printf("u[%d] = [", input_sample);
        for (j=0; j<INPUT_NUM-1; j++)
            printf("%f, ", u_actual[j]);
        printf("%f]\n", u_actual[j]);
        #endif

        for (internal_steps = 0; internal_steps < NUM_INTERNAL_STEPS;
            internal_steps++)
        {
            // Dynamics evaluation
            SystemDynamics(x, u_actual, ext_param, dx);

            // Forward Euler integration
            for (i = 0; i<STATE_DIMENSION; i++)
                x[i] = x[i] + INTERNAL_SAMPLING_TIME * dx[i];

            #ifdef DEBUG_EXT
            printf("dx[%d] = [", input_sample);
            for (i=0; i<STATE_DIMENSION-1; i++)
                printf("%f, ", dx[i]);
            printf("%f]\n", dx[i]);
            #endif
        }

        #ifdef DEBUG_EXT
        printf("\n");
        #endif
    }
}

```

```

    }
}

/*
 * This function represents the interface to MATLAB environment
 */
void mexFunction(int nlhs, mxArray *outputs[],
                 int nrhs, const mxArray *inputs[])
{
    double *control_param, *ext_param;
    double *c, *ceq;

    /* IMPORTANT:
     * Dimensions and correctness of input data should be checked
     elsewhere,
     * avoiding increasing of this function computation time.
     */

    // Initialize outputs as empty matrices
    #if INEQUALITY_CONSTR_NUM > 0
    outputs[0] = mxCreateDoubleMatrix(1, INEQUALITY_CONSTR_NUM,
mxREAL);
    #else
    outputs[0] = mxCreateDoubleMatrix(0, 0, mxREAL);
    #endif
    #if EQUALITY_CONSTR_NUM > 0
    outputs[1] = mxCreateDoubleMatrix(1, EQUALITY_CONSTR_NUM, mxREAL);
    #else
    outputs[1] = mxCreateDoubleMatrix(0, 0, mxREAL);
    #endif

    // Get pointers to input and output structures
    control_param = mxGetPr(inputs[0]);
    sample_num = *(mxGetPr(inputs[1]));
    x0 = mxGetPr(inputs[2]);
    xf_desired = mxGetPr(inputs[3]);
    ext_param = mxGetPr(inputs[4]);
    c = mxGetPr(outputs[0]);
    ceq = mxGetPr(outputs[1]);

    // Evaluate equality and inequality constraints
    DynConstraint(control_param, ext_param, c, ceq);
}

```

### Calcolo della dinamica del sistema

```

/*
 * File:      SystemSimulation.c
 * Author:    Adriano Fagiolini
 * Date:      13 June 2006
 */

#include "mex.h"

#include "constants.h"
#include "SystemDynamics.c"

```

---

```

void ComputeSystemDynamics(double *x, double *u, double *p, double
*dx)
{
    SystemDynamics(x, u, p, dx);
}

/*
 * This function represents the interface to MATLAB environment
 */
void mexFunction(int nlhs, mxArray *outputs[],
                int nrhs, const mxArray *inputs[])
{
    double *x0, *input_control, *ext_param;
    int state_dimension;
    double *dx;

    /* IMPORTANT:
     * Dimensions and correctness of input data should be checked
     elsewhere,
     * avoiding increasing of this function computation time.
     */

    // Get pointers to input structures
    x0 = mxGetPr(inputs[0]);
    input_control = mxGetPr(inputs[1]);
    state_dimension = *(mxGetPr(inputs[2]));
    ext_param = mxGetPr(inputs[3]);

    // Initialize outputs
    outputs[0] = mxCreateDoubleMatrix(1, state_dimension, mxREAL);
    dx = mxGetPr(outputs[0]);

    // Evaluate equality and inequality constraints
    ComputeSystemDynamics(x0, input_control, ext_param, dx);
}

```

La visualizzazione dei risultati è eseguita dagli script `Simulate` e `ShowResult`

### Simulate

```

UU = u;

inputNumber = 1;
T = 0.0;
rho = 0;

X = initState;
DX = [];

af_time = [0];
posX    = [];
posY    = [];
posZ    = [];
speedX  = [];
speedY  = [];

```

---

```

speedZ = [];

state_dim = length(initState);

%while (T < Ttobeat) & ((inputNumber+N) <= length(UU)) & (inputNumber
<= N)
while ((inputNumber+N) <= length(UU)) & (inputNumber <= N)

    Utau1 = UU(inputNumber);
    Utau2 = UU(inputNumber + N);
    Utau3 = UU(inputNumber + 2*N);

    DX = ComputeSystemDynamics(X, [Utau1 Utau2 Utau3], state_dim,
alpha1);

    % Integration
    DX = DX .* integration_step;
    X = X + DX;

    rho = rho + 1;
    T = rho*integration_step;

    %Salvo l'evoluzione
    af_time = [af_time T];
    posX     = [posX X(1)];

    posY     = [posY X(2)];
    posZ     = [posZ X(3)];
    speedX   = [speedX X(4)];
    speedY   = [speedY X(5)];
    speedZ   = [speedZ X(6)];

    if ~mod(T, granularity)
        inputNumber = inputNumber + 1; % Passo al valore di ingresso
successivo
    end
end

clear UU

ShowResult

u = u_ottimo;
N = N_ottimo;
Ttobeat = t_ottimo;

af_fig = figure(100);
clf

% Time
timeV = [0:Ttobeat/(N+1):Ttobeat-Ttobeat/(N+1)];
af_timeV = af_time;

```

---

```

% State
tempX = [initState(1) posX];
tempY = [initState(2) posY];
tempZ = [initState(3) posZ];
tempVx = [initState(4) speedX];
tempVy = [initState(5) speedY];
tempVz = [initState(6) speedZ];

% Control

tempU1 = [u(1,1) u(1,1:N)];
if (length(tempU1) > length(timeV))
    tempU1 = tempU1(1:length(timeV));
elseif (length(tempU1) < length(timeV))
    timeV = timeV(1:length(tempU1));
end

tempU2 = [u(1,N+1) u(1,N+1:2*N)];
if (length(tempU2) > length(timeV))
    tempU2 = tempU2(1:length(timeV));
elseif (length(tempU2) < length(timeV))
    timeV = timeV(1:length(tempU2));
end

tempU3 = [u(1,2*N+1) u(1,N+1:3*N)];
if (length(tempU3) > length(timeV))
    tempU3 = tempU3(1:length(timeV));
elseif (length(tempU3) < length(timeV))
    timeV = timeV(1:length(tempU3));
end

%%
%% Plots
%%

subplot(2,2,1)
plot(af_timeV, tempX, 'r','LineWidth', 2), grid on, hold on;
plot(af_timeV, tempY, 'b', 'LineWidth', 2);
plot(af_timeV, tempZ, 'g', 'LineWidth', 2);
legend('x [m]', 'y [m]', 'z [m]');
xlabel('Time [s]');

subplot(2,2,2),
plot(af_timeV, tempVx, 'r', 'LineWidth', 2), grid on, hold on;
plot(af_timeV, tempVy, 'b', 'LineWidth', 2);
plot(af_timeV, tempVz, 'g', 'LineWidth', 2);
legend('v_x [m/s]', 'v_y [m/s]', 'v_z [m/s]');
xlabel('Time [s]');

subplot(2,2,3),
plot(timeV, tempU1, 'g:', 'LineWidth', 2), grid on, hold on;
plot(timeV, tempU2, 'm-', 'LineWidth', 2);
plot(timeV, tempU3, 'b:', 'LineWidth', 2);
legend('\tau_1', '\tau_2', '\tau_3');
ylabel('\tau [N]');
xlabel('Time [s]');

```

```
subplot(2,2,4),  
plot3(tempX, tempY, tempZ, 'b','LineWidth', 2), grid on, hold on;  
legend('trajectory');  
xlabel('x [m]');  
ylabel('y [m]');  
zlabel('z [m]');
```