

**TESI DI LAUREA
IN
INGEGNERIA AEROSPAZIALE
INDIRIZZO SPAZIALE**

**Studio Preliminare di Missioni Spaziali
con Modelli a Tre Corpi**

Pierpaolo Pergola

Anno accademico 2004-2005

T 179





UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria

**Tesi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Indirizzo Spaziale**

**Studio Preliminare di Missioni Spaziali
con Modelli a Tre Corpi**

Candidato

Pierpaolo Pergola

Relatori

Prof. M. Andrenucci

Prof. G. Mengali

Ing. C. Casaregola

Ing. A. Quarta

Anno Accademico 2004-2005

*“... Non dovremmo smettere di esplorare,
e alla fine delle nostre esplorazioni
arriveremo là donde partimmo
come ad un luogo sconosciuto...”*

T. S. Eliot, Four Quartes

SOMMARIO

Lo studio di missioni spaziali mediante modelli più accurati di quello dei due corpi ha ricevuto un notevole impulso presso la comunità scientifica negli ultimi anni; una schematizzazione nella quale siano previste due masse principali che determinano il moto di una sonda che non modifichi in alcun modo il loro campo gravitazionale, appare in molti casi più soddisfacente per lo studio delle traiettorie di veicoli spaziali. Le possibilità che tale approccio dischiude vanno ben oltre a quelle deducibili in un contesto kepleriano e consentono lo sviluppo di missioni altrimenti non disegnabili.

Il presente lavoro di tesi descrive il problema ristretto dei tre corpi, i suoi approcci e le sue soluzioni; analizza i differenti tipi di traiettorie identificabili e sviluppa una serie di strumenti che le utilizzino in maniera pratica per implementare diversi tipi di missione.

Nella prima parte si analizza il problema da un punto di vista teorico e si ripercorrono le varie fasi che rendono possibile sviluppare strumenti di disegno di missione basati su tali fondamenti teorici. Viene fornita una nuova formulazione dei risultati matematicamente deducibili dallo studio teorico, e ne viene discussa l'applicazione a missioni di vario genere in grado di soddisfare i più diversi requisiti. Vengono quindi descritti diversi strumenti software utilizzabili per descrivere le strutture dello spazio determinate teoricamente, le soluzioni periodiche ed, in generale, per una pratica applicazione dei risultati teorici.

Una seconda parte del lavoro è rivolta ad applicazioni aventi un intrinseco carattere a tre corpi e che quindi non risulterebbero altrimenti costruibili. Vengono esaminate, in particolare, diverse possibilità di trasferimento Terra-Luna, sia impulsivi che ibridi, orbite periodiche attorno ai punti di equilibrio del sistema a tre corpi e trasferimenti verso di esse.

ABSTRACT

The study of space missions through models more accurate than a two body model has received a considerable impulse within the scientific community in the last decade. A scheme in which two larger masses determine the motion of a spacecraft which does not modify their gravitational field can be considered satisfactory for the study of a variety of space vehicle trajectories. The possibilities offered by this kind of approach span far beyond the range of the traditional keplerian approach and enable conceiving new types of mission.

The present thesis deals with the restricted three body problem, its formulation and its solutions. The different types of trajectories that can be identified by this approach are analysed and the tools that can be used for practical mission implementation are illustrated.

In the first part of this work the restricted three body problem is analysed from a theoretical point of view. The steps through which mission design tools can be derived from such a theoretical background are then reviewed. A revised formulation of mathematical results that can be obtained from the theory is presented and the applicability of such results to various missions of potential interest is discussed. Software tools that can be used to describe the theoretically determined space structures, periodic solutions and, in general, for a practical implementation of the theory are described.

The second part deals more directly with applications with an inherent three-body character and which could not be designed otherwise. In particular, different possibilities of Earth-Moon transfer, both chemical and hybrid, periodic orbits around the equilibrium points of the three body system and transfer trajectories to and from such orbits are examined in detail.

RINGRAZIAMENTI

Professor Mariano Andrenucci, desidero sentitamente ringraziarla, oltre che per le competenze e le conoscenze messe a disposizione nel corso di quest'esperienza, per la sua disponibilità e per il suo interessamento verso il lavoro svolto. Sono stati spesso un forte stimolo a continuare nonostante la novità e le difficoltà dell'argomento. Non dimenticherò le opportunità offertemi in questi mesi e quanto mi hanno aiutato a crescere, non solo in ambito professionale.

Un grazie speciale va anche all'ingegner A. Quarta per avermi aiutato con la sua preparazione nei molti momenti di bisogno.

Pienamente cosciente che non può qualche rigo esser sufficiente a sdebitarmi con tutti coloro che sono stati la mia forza ed il mio sprono in questi anni e che non può un grazie compensare l'aiuto e l'appoggio ricevuto, mi limiterò a lasciar intendere che senza il piccolo-grande aiuto che ognuno ha saputo, a suo modo, offrirmi, oggi non sarei qui, o, se ci sarei, non affronterei anche questo nuovo inizio con il sorriso sulle labbra.

Grazie.

INDICE

Elenco delle Figure

Elenco delle Tabelle

Elenco delle Costanti

Elenco dei Simboli Utilizzati

| | |
|---|-----------|
| 1. Introduzione | 1 |
| 1.1. Nuovi orientamenti nel progetto di missioni spaziali | 1 |
| 1.2. Esempi di missione disegnate mediante un approccio a tre corpi | 2 |
| 1.3. Motivazioni ed obiettivi della tesi | 11 |
| 1.4. Articolazione del lavoro | 11 |
| 2. Problema Ristretto dei Tre Corpi | 13 |
| 2.1. Introduzione | 13 |
| 2.2. Cenni storici | 17 |
| 2.3. Descrizione del problema | 18 |
| 2.4. Adimensionalizzazioni | 19 |
| 2.5. Sistema di riferimento | 20 |
| 2.6. Equazioni del moto | 23 |
| 2.6.1. Approccio Lagrangiano | 25 |
| 2.6.2. Approccio Hamiltoniano | 29 |
| 2.7. Simmetrie del problema | 32 |
| 2.8. Integrale dell'energia e costante di Jacobi | 32 |
| 2.9. Regioni di Hill | 34 |
| 2.10. I cinque casi delle regioni di Hill | 40 |
| 2.11. Punti di equilibrio | 42 |
| 2.11.1. Punti collineari | 44 |
| 2.11.2. Punti equilaterali | 47 |
| 2.12. Linearizzazione delle equazioni del moto | 48 |
| 2.12.1. Punti collineari | 49 |
| 2.12.2. Punti equilaterali | 52 |
| 2.13. Geometria della soluzione attorno ai punti di equilibrio | 56 |

| | |
|--|------------|
| 2.14. Teorema di Moser | 57 |
| 2.15. Regioni di equilibrio nello spazio delle fasi | 60 |
| 2.16. Regioni di equilibrio nello spazio delle posizioni | 67 |
| 2.17. “Twisting” delle mappature | 71 |
| 3. Orbite Periodiche | 73 |
| 3.1. Introduzione | 73 |
| 3.2. Orbite Halo: approssimazione di Richardson | 75 |
| 3.3. Orbite Lyapunov: approssimazione analitica | 87 |
| 3.4. Orbite Lissajous: approssimazione analitica | 90 |
| 3.5. Procedure numeriche | 93 |
| 3.6. Matrice monodroma | 100 |
| 4. Manifolds e Sezioni di Poincarè | 105 |
| 4.1. Introduzione | 105 |
| 4.2. Esempi di manifolds in natura | 107 |
| 4.3. Connessioni omocliniche | 108 |
| 4.4. Connessioni eterocliniche | 113 |
| 4.5. Manifolds invarianti associati ai punti di librazione | 114 |
| 4.6. Manifolds invarianti associati ad orbite periodiche | 118 |
| 4.7. Sezioni di Poincarè | 125 |
| 4.8. Cenni di dinamica simbolica | 128 |
| 4.9. Sezioni di Poincarè dei manifolds | 131 |
| 4.10. Costruzione di orbite con itinerari assegnati | 138 |
| 4.11. Comportamento delle orbite in funzione delle condizioni iniziali | 143 |
| 4.12. Condizioni iniziali per l'immissione nei manifolds | 147 |
| 5. Implementazione Propagatori | 151 |
| 5.1. Introduzione | 151 |
| 5.2. Imposizione delle condizioni iniziali | 152 |
| 5.3. Bassa spinta | 158 |
| 5.4. Propagatore a tre corpi | 160 |
| 5.5. Modellizzazione del problema dei quattro corpi | 164 |
| 5.6. Propagatore bicircolare Terra-Luna | 166 |
| 5.7. Propagatore bicircolare Terra-Sole | 170 |
| 5.8. Utilizzo della sovrapposizione di due modelli a tre corpi | 173 |
| 5.9. Propagatore a quattro corpi | 178 |
| 6. Studi Preliminari di Missione | 191 |
| 6.1. Introduzione | 191 |

| | |
|--|------------|
| 6.2. Trasferimenti Terra-Luna nell'ambito del CR3BP | 192 |
| 6.2.1. Trasferimento Terra-Luna balistico | 192 |
| 6.2.2. Trasferimento Terra-Luna con cattura a bassa spinta | 197 |
| 6.2.3. Trasferimento Terra-Luna: Relazione fase iniziale- Δv all'intersezione | 200 |
| 6.3. Trasferimenti Terra-Luna nell'ambito del BCM | 214 |
| 6.3.1. Trasferimento Terra-Luna utilizzando EL_1 | 214 |
| 6.3.2. Trasferimento Terra-Luna utilizzando EL_1 e la bassa spinta | 217 |
| 6.3.3. Trasferimento Terra-Luna: Sensibilità rispetto alle condizioni iniziali | 218 |
| 6.4. Trasferimenti Diretti ed Indiretti | 226 |
| 6.4.1. Un trasferimento diretto: La missione ISEE-3 | 227 |
| 6.4.2. Un trasferimento indiretto: La missione WMAP | 229 |
| 6.5. Implementazione di un trasferimento diretto | 231 |
| 6.6. Implementazione di un trasferimento indiretto | 236 |
| 6.7. Implementazione di un trasferimento Terra-Luna utilizzando un'orbita Halo | 241 |
| 6.8. Implementazione di un trasferimento a bassa spinta verso un'orbita Halo | 244 |
| 6.9. Comportamento del punto EL_1 in un modello a quattro corpi | 247 |
| 6.10. Trasferimento Terra-Luna nel modello a quattro corpi utilizzando la dinamica di EL_1 | 249 |
| 7. Conclusioni e prospettive di sviluppo | 255 |
| 7.1. Conclusioni | 255 |
| 7.2. Sviluppi | 256 |
| Bibliografia | 257 |
| Appendice A | 265 |
| Appendice B | 269 |
| Appendice C | 273 |
| Appendice D | 277 |
| Appendice E | 283 |

ELENCO DELLE FIGURE

| | |
|---|----|
| 1. Capitolo I | |
| 1.1 Missione ISEE-3 dal lancio all'incontro con la cometa | 3 |
| 1.2 Traiettoria missione WIND | 4 |
| 1.3 Missione SOHO | 5 |
| 1.4 Traiettoria ed orbita operativa della missione ACE | 6 |
| 1.5 Missione WMAP | 7 |
| 1.6 Manifolds della missione GENESIS | 8 |
| 1.7 Orbita della missione TRIANA | 9 |
| 1.8 Traiettoria di trasferimento ed orbita operativa della missione JWST | 10 |
| | |
| 2. Capitolo II | |
| 2.1. Forze agenti su una massa soggetta ad n azioni gravitazionali | 14 |
| 2.2. Interplanetary Highways | 17 |
| 2.3. Sistema di riferimento sinodico | 21 |
| 2.4. Posizione dei primari nel riferimento sinodico | 22 |
| 2.5. Posizioni e distanze nel sistema rotante | 24 |
| 2.6. Distanze dai primari nel sistema normalizzato | 27 |
| 2.7. Regioni di Hill e curve a velocità nulla per $\mu=0.25$ | 36 |
| 2.8. Potenziale effettivo per $\mu=0.3$ | 37 |
| 2.9. Potenziale effettivo nella regione di equilibrio per diversi valori di μ | 38 |
| 2.10. Sezione del potenziale effettivo secondo superfici ad energia costante | 39 |
| 2.11. I cinque casi della regione di Hill | 40 |
| 2.12. Andamento delle energie critiche in funzione di μ | 42 |
| 2.13. Posizione dei punti di Lagrange | 44 |
| 2.14. Posizione dei punti Collineari | 47 |
| 2.15. Posizione dei punti Equilaterali | 48 |
| 2.16. Direzioni di stabilità del potenziale effettivo | 54 |
| 2.17. Dinamica dei punti di equilibrio | 55 |
| 2.18. Reami e regioni di equilibrio | 60 |
| 2.19. Limiti della regione di equilibrio nel piano (η, ξ) | 63 |

| | | |
|-----------|---|-----|
| 2.20. | Possibili tipi di orbite nella regione di equilibrio | 64 |
| 2.21. | Rappresentazione di Mc Gehee | 65 |
| 2.22. | Conformazione generale della regione di equilibrio | 67 |
| 2.23. | Tipi di orbite nella regione di equilibrio nel piano (x, y) | 69 |
| 3. | Capitolo III | |
| 3.1. | Posizione dei punti di Librazione | 74 |
| 3.2. | Andamento di A_x ed A_y in funzione di A_z per il sistema Terra-Sole | 79 |
| 3.3. | Andamento di A_x ed A_y in funzione di A_z per il sistema Terra-Luna | 80 |
| 3.4. | Orbite Halo classe I attorno ad EL_1 | 81 |
| 3.5. | Orbite Halo classe II attorno ad EL_1 | 82 |
| 3.6. | Orbite Halo classe II attorno ad EL_2 | 82 |
| 3.7. | Orbite Halo classe II attorno ad EL_2 | 83 |
| 3.8. | Periodi orbitale in funzione di A_z | 84 |
| 3.9. | Orbite Halo classe I attorno ad EL_1 per ampiezze crescenti | 85 |
| 3.10. | Orbite Halo classe I attorno ad EL_2 per ampiezze crescenti | 85 |
| 3.11. | Andamento dell'energia in un'orbita analitica di tipo Halo classe I attorno ad LL_1 | 87 |
| 3.12. | Legame fra A_x ed A_y per il sistema Terra-Sole e Terra-Luna | 88 |
| 3.13. | Periodi di orbite Lyapunov nel sistema Terra-Sole ed in quello Terra-Luna | 88 |
| 3.14. | Orbite Lyapunov attorno ad EL_1 di ampiezze crescenti | 89 |
| 3.15. | Orbite Lyapunov attorno ad EL_2 di ampiezze crescenti | 89 |
| 3.16. | Orbite Lissajous classe I attorno ad EL_1 | 91 |
| 3.17. | Orbite Lissajous classe I attorno ad EL_1 | 91 |
| 3.18. | Orbite Lissajous classe I attorno ad EL_2 | 92 |
| 3.19. | Orbite Lissajous classe II attorno ad EL_2 | 92 |
| 3.20. | Integrazione delle equazioni del moto partendo da una soluzione analitica attorno ad EL_1 | 93 |
| 3.21. | Integrazione delle equazioni del moto partendo da una soluzione analitica attorno ad EL_2 | 94 |
| 3.22. | Correzione differenziale di un'orbita Halo attorno ad EL_1 | 97 |
| 3.23. | Orbite Lyapunov risultanti dalla procedura numerica | 100 |

| | |
|---|-----|
| 4. Capitolo IV | |
| 4.1. ISP dei sistema Terra-Sole e Terra-Luna | 106 |
| 4.2. Confronto fra l'orbita di un oggetto quasi-Hildas ed i manifolds del sistema Sole-Giove | 108 |
| 4.3. Proiezione nello spazio delle posizioni delle superfici toroidali | 109 |
| 4.4. Connessioni Omocliniche | 110 |
| 4.5. Geometria del teorema di Mc Gehee | 112 |
| 4.6. Connessione Eteroclinica | 113 |
| 4.7. Manifolds associati ad L_1 nel sistema Giove-Sole | 115 |
| 4.8. Manifolds associati ad L_2 nel sistema Giove-Sole | 116 |
| 4.9. Manifolds associati ad LL_1 ed LL_2 | 117 |
| 4.10. Manifolds associati ad EL_1 ed EL_2 | 117 |
| 4.11. Andamento dei manifolds competenti ai punti JL_1 e JL_2 al variare dell'energia del sistema | 118 |
| 4.12. Manifolds associati ad un'orbita periodica attorno a JL_2 | 119 |
| 4.13. Manifolds associati ad orbite Lyapunov attorno a JL_1 | 121 |
| 4.14. Manifolds associati ad orbite Lyapunov attorno a JL_2 | 122 |
| 4.15. Manifolds nello spazio delle posizioni per il sistema Giove-Sole | 123 |
| 4.16. Approssimazione dei manifolds nello spazio delle posizioni per il sistema Giove-Sole | 123 |
| 4.17. Manifolds di orbite Halo nel sistema Terra-Sole | 124 |
| 4.18. Piano della sezione di Poincarè | 125 |
| 4.19. Dominio della mappatura di Poincarè e partizioni di esso | 126 |
| 4.20. Sezioni di Poincarè per i pianeti esterni del sistema solare | 128 |
| 4.21. Sezioni di Poincarè per i manifolds del sistema Sole-Giove | 134 |
| 4.22. Orbite Omocliniche simmetriche ed asimmetriche | 135 |
| 4.23. Approssimazione manifolds per il sistema Giove-Sole con $\Delta e = 5e^{-5}$ | 136 |
| 4.24. Approssimazione delle sezioni di Poincarè | 137 |
| 4.25. Sezione U_3 del manifolds stabile di JL_1 ed instabile di JL_2 | 139 |
| 4.26. Orbita di transito con un itinerario del tipo (X, J, S) | 139 |
| 4.27. Costruzione di un'orbita con itinerario assegnato | 142 |
| 4.28. Orbita di transito con un itinerario del tipo (X, J, S, J, X) | 143 |
| 4.29. Passaggio da orbite di non-transito ad orbite di transito in X | 144 |
| 4.30. Passaggio da orbite di non-transito ad orbite di transito | |

| | |
|--|---------|
| in S | 145 |
| 4.31. Implementazione numerica di una connessione omoclinica in X | 146 |
| 4.32. Implementazione numerica di una connessione omoclinica in S | 146 |
| 4.33. Orbite di trasferimento verso EL_1 ed EL_2 | 148 |
| 5. Capitolo V | |
| 5.1. Sistemi di riferimento | 153 |
| 5.2. Orbita iniziale con $\phi=30^\circ$, $\theta=0$, $u=0$ | 154 |
| 5.3. Orbita iniziale con $\phi=90^\circ$, $\theta=90$, $u=45$ | 154 |
| 5.4. Orbita di trasferimento Terra-Luna a bassa spinta ottenuta con il propagatore a tre corpi | 163 |
| 5.5. Andamento dei valori dell'orbita di fig. 5.4 | 164 |
| 5.6. Modello CCM (a sinistra) e BCM (a destra) | 166 |
| 5.7. Geometria del modello bicircolare Terra-Luna | 167 |
| 5.8. Geometria del modello bicircolare Terra-Sole | 171 |
| 5.9. Manifolds stabile di LL_2 e relativa sezione di Poincarè | 175 |
| 5.10. Twisting del segmento p_1-q_1 | 176 |
| 5.11. Sovrapposizione delle sezioni di Poincarè per la determinazione delle condizioni iniziali di un trasferimento Terra-Luna | 177 |
| 5.12. Dipendenza della posizione della sezione di Poincarè del manifolds stabile di LL_2 dalla fase iniziale della Luna | 177 |
| 5.13. Trasferimento Terra-Luna disegnato mediante manifolds | 178 |
| 5.14. Geometria del modello a quattro corpi | 181 |
| Confronti con D-Orbit | 183-189 |
| 6. Capitolo VI | |
| 6.1. Trasferimento diretto Terra-Luna nel CR3BP | 193 |
| 6.2. Dinamica ad una distanza di EL_1 | 194 |
| 6.3. Costruzione in due fasi del trasferimento Terra-Luna nel CR3BP | 195 |
| 6.4. Costruzione sequenziale del trasferimento Terra-Luna nel CR3BP | 197 |
| 6.5. Trasferimento Terra-Luna nel sistema rotante ed in quello inerziale con cattura a bassa spinta nel CR3BP | 198 |
| 6.6. Andamento nel tempo di posizione, massa e velocità per l'orbita di figura 6.5 | 199 |
| 6.7. Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Terra in verso Orario | 201 |

| | |
|---|-----|
| 6.8. Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Terra in verso Antiorario | 201 |
| 6.9. Andamento orbite di fuga dalla Terra al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Orario | 202 |
| 6.10. Andamento orbite di fuga dalla Terra al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Antiorario | 202 |
| 6.11. Discontinuità nelle relazioni fra fase iniziale-velocità finale e fase iniziale-posizione finale per orbite di fuga dalla Terra in verso Antiorario | 203 |
| 6.12. Orbite corrispondenti alle discontinuità di fig. 6.11 | 203 |
| 6.13. Discontinuità nelle relazioni fra fase iniziale-velocità finale e fase iniziale-posizione finale per orbite di fuga dalla Terra in verso Orario | 204 |
| 6.14. Orbite corrispondenti alle discontinuità di figura 6.13 | 204 |
| 6.15. Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Luna in verso Orario | 205 |
| 6.16. Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Luna in verso Antiorario | 206 |
| 6.17. Andamento orbite di fuga dalla Luna al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Orario | 207 |
| 6.18. Andamento orbite di fuga dalla Luna al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Antiorario | 207 |
| 6.19. Discontinuità nelle relazioni fra fase iniziale-velocità finale e fase iniziale-posizione finale per orbite di fuga dalla Luna in verso Orario | 208 |
| 6.20. Discontinuità nelle relazioni fra fase iniziale-velocità finale e fase iniziale-posizione finale per orbite di fuga dalla Luna in verso Antiorario | 209 |
| 6.21. Legame fase iniziale- Δv finale per orbite di partenza dalla Luna in verso Orario | 210 |
| 6.22. Particolare di figura 6.21 | 210 |
| 6.23. Orbite corrispondenti alle discontinuità di figura 6.22 | 211 |
| 6.24. Legame fase iniziale- Δv finale per orbite di partenza dalla Luna in verso Antiorario | 212 |
| 6.25. Particolare di figura 6.24 | 212 |
| 6.26. Orbite corrispondenti al picco di velocità di figura 6.15 | 213 |
| 6.27. Orbite corrispondenti al minimo di velocità di figura 6.15 | 214 |
| 6.28. Costruzione in due fasi del trasferimento Terra-Luna nel BCM | 215 |
| 6.29. Costruzione sequenziale del trasferimento Terra-Luna | |

| | |
|--|---------|
| nel BCM | 216 |
| 6.30. Trasferimento Terra-Luna nel sistema rotante ed in quello inerziale con cattura a bassa spinta nel BCM | 218 |
| Sensibilità rispetto alle condizioni iniziali nel BCM | 219-226 |
| 6.31. Traiettoria nominale della missione ISEE-3 | 228 |
| 6.32. Traiettoria nominale della missione WMAP | 229 |
| 6.33. Trasferimento diretto mediante tre impulsi nel CR3BP | 232 |
| 6.34. Trasferimento diretto mediante un unico impulso nel CR3BP | 233 |
| 6.35. Andamento nel tempo di posizione e velocità dell'orbita di figura 6.33 | 234 |
| 6.36. Trasferimento diretto mediante tre impulsi nel BCM | 235 |
| 6.37. Preparazione all'incontro lunare nel BCM planare | 237 |
| 6.38. Trasferimento indiretto nel BCM planare | 238 |
| 6.39. Trasferimento nel BCM planare verso un'orbita Lyapunov di piccola ampiezza | 239 |
| 6.40. Trasferimento indiretto verso un'orbita Halo | 240 |
| 6.41. Trasferimento indiretto verso un'orbita Lissajous | 241 |
| 6.42. Trasferimento Terra-Luna utilizzando un'orbita Lissajous attorno ad EL_1 | 242 |
| 6.43. Orbita di figura 6.42 in un riferimento centrato sulla Luna | 243 |
| 6.44. Andamento nel tempo di posizione e velocità per l'orbita di figura 6.42 | 244 |
| 6.45. Trasferimento a bassa spinta verso un'orbita Halo attorno ad EL_1 | 246 |
| 6.46. Andamento nel tempo di posizione e velocità per l'orbita di figura 6.45 | 247 |
| 6.47. Dinamica di EL_1 in un modello a quattro corpi | 248 |
| 6.48. Dinamica nei dintorni di EL_1 in un modello a quattro corpi | 249 |
| 6.49. Trasferimento Terra-Luna in un modello a quattro corpi | 251 |
| 6.50. Andamento nel tempo dei valori istantanei di posizione e velocità per l'orbita di figura 6.49 | 252 |
| 6.51. Orbita di figura 6.49 vista in un sistema di riferimento centrato sulla Luna | 252 |
| 6.52. Fuga lunare a bassa spinta in un modello a quattro corpi | 253 |

ELENCO DELLE TABELLE

| | |
|--|-----|
| 2. Capitolo II | |
| 2.1. Algoritmi di conversione | 19 |
| 2.2. Valori dei parametri adimensionali per alcuni sistemi a tre corpi | 20 |
| 2.3. Equazioni del moto in forma Lagrangiana | 29 |
| 2.4. Equazioni del moto in forma Hamiltoniana | 31 |
| 2.5. Dimensione dello spazio delle fasi | 31 |
| 2.6. Equazioni del moto al primo ordine | 43 |
| 2.7. Confronti fra la posizione numerica ed approssimata di L_1 ed L_2 | 46 |
| 2.8. Posizione di L_1 ed L_2 per alcuni sistemi | 47 |
| 2.9. Equazioni del moto linearizzate | 50 |
| 2.10. Valori delle costanti per alcuni sistemi a tre corpi | 70 |
| | |
| 4 Capitolo IV | |
| 4.1. Stato del sistema dalle sezioni di Poincarè | 127 |
| | |
| 5. Capitolo V | |
| 5.1. Derivazione grandezze per la propulsione elettrica | 159 |
| 5.2. Valori SPT 100 [1350] | 160 |
| 5.3. Valori utilizzati per un trasferimento a bassa spinta Terra-Luna | 163 |
| 5.4. Proprietà dei propulsori paragonati | 182 |
| | |
| 6. Capitolo VI | |
| 6.1. Dati orbita di partenza della missione ISEE-3 | 228 |
| 6.2. Δv utilizzati per la missione ISEE-3 | 228 |
| 6.3. Dati missione WMAP | 229 |
| 6.4. Δv utilizzati nella missione WMAP | 231 |

ELENCO DELLE COSTANTI

| | | | |
|-------------|--|-----------------|--------------|
| G | Costante di gravitazione universale | $6.6726e^{-11}$ | m^3*kg/s^2 |
| M_{Earth} | Massa Terra | $6.0477e^{24}$ | kg |
| M_{Moon} | Massa Luna | $7.35e^{22}$ | kg |
| M_{Sun} | Massa Sole | $1.99e^{30}$ | kg |
| L_{S-E} | Distanza Terra-Sole | $149.597870e^6$ | km |
| L_{E-M} | Distanza Terra-Luna | 384400 | km |
| R_{Earth} | Raggio Terra | 6378 | km |
| R_{Moon} | Raggio Luna | 1740 | km |
| R_{Sun} | Raggio Sole | $6.960e^5$ | km |
| g | Accelerazione di gravità al livello del mare | 9.81 | m/s^2 |

ELENCO DEI SIMBOLI UTILIZZATI

| | |
|----------|---|
| A_r | Matrice di rotazione fra il riferimento sinodico e quello inerziale |
| A_x | Ampiezza orbita periodica lungo x |
| A_y | Ampiezza Orbita periodica lungo y |
| A_z | Ampiezza orbita periodica lungo z |
| a | Semiassa maggiore dell'orbita |
| C | Costante di Jacobi |
| DU | Distance units |
| E | Energia del corpo |
| E_i | Energie dei punti di librazione |
| H | Hamiltoniano del sistema |
| h | Quota dalla superficie della Terra |
| i | Inclinazione |
| I_{sp} | Impulso specifico |

| | |
|---------------|---|
| I_{tot} | Impulso totale |
| J | Reame di m_2 |
| k | Costante gaussiana di gravitazione |
| L | Lagrangiano del sistema |
| \mathcal{M} | Superfici ad energia costante nello spazio delle fasi |
| M | Regioni di Hill |
| M | Matrice monodrama |
| M_1 | Massa del primario maggiore |
| M_2 | Massa del primario minore |
| M_3 | Massa della sonda |
| MU | Mass units |
| $n (n_1)$ | Moto medio dei primari |
| P | Potenza |
| p_i | Momenti coniugati |
| PL_i | Punto i di librazione di un sistema con $m_2 = P$ |
| q_i | Coordinate generalizzate del sistema |
| \mathcal{R} | Regioni di equilibrio nello spazio delle fasi |
| R | Regioni di equilibrio nello spazio delle posizioni |
| r_h | Raggio di Hill |
| r | Raggio dell'orbita |
| S | Reame interno |
| T | Energia cinetica del corpo |
| t | Tempo |
| TM | Matrice di rotazione fra il piano orbitale ed il riferimento principale |
| TU | Time units |
| U | Energia potenziale del corpo |
| u | Argomento della latitudine |
| u | Velocità lungo x |
| U_i | Sezioni di Poincarè |
| v | Velocità lungo y |
| W | Manifolds nello spazio delle posizioni |
| w | Velocità lungo z |
| X | Reame esterno |
| Ω | Potenziale effettivo |
| Γ | Curve d'intersezione del manifolds relativo con la sezione di Poincarè |
| Δv_i | Intensità dell' i -esimo impulso |
| ϕ | Latitudine |
| η | Rendimento |
| μ | Parametro di massa del sistema |

| | |
|-------------------|---|
| θ | Longitudine |
| ω | Velocità angolare |
| ω_l | Autofrequenza del sistema lungo l |
| (x_M, y_M, z_M) | Posizione della Luna in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale |
| (x_S, y_S, z_S) | Posizione del Sole in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale |

INTRODUZIONE

L'intento di questa introduzione è quello di fornire una panoramica sull'utilità di un modello ristretto a tre corpi per il disegno di missioni spaziali, sulle traiettorie disegnate mediante tale schematizzazione ed i loro vantaggi. Ciò è sufficiente per dare un'idea delle motivazioni che hanno spinto a questo studio e gli obiettivi che esso si propone. Si fornirà anche una descrizione della struttura globale del lavoro.

1.1 Nuovi orientamenti nel disegno di missioni spaziali

L'interesse per missioni che non prevedono il semplice moto di un satellite attorno ad un attrattore primario, in genere la Terra, ha avuto un notevole sviluppo negli ultimi 40 anni. Il disegno di missioni che possano rispondere a particolari vincoli, o che si mostrino particolarmente economiche in termini di richiesta di propellente, ha spinto allo studio di modelli più complessi di quello classicamente kepleriano. In generale su un corpo in moto nello spazio, anche in orbite LEO, agiscono molte altre forze, di natura gravitazionale e non, che portano il moto a deviare da quello nominalmente deducibile nell'ambito di un modello a *2-corpi*.

Sono stati sviluppati modelli che coinvolgono, oltre alla semplice attrazione gravitazionale di una massa, anche quelle di altri corpi; la necessità di utilizzare queste ulteriori forze per il disegno di missione e non cercare di annullarle, ad esempio con manovre di *station keeping*,

ha portato allo studio del moto di un corpo nell'ambito di campi gravitazionali dovuti a diverse masse. Tuttavia trattazioni analitiche di modelli a n -corpi si presentano di proibitiva difficoltà; lo studio si è dunque ridotto a quello del moto di un corpo di piccola massa nel campo gravitazionale di altre due masse sufficientemente grandi da esercitare forze che determinino il moto della massa di prova. Il **Problema Ristretto dei Tre Corpi** è appunto la trattazione di tale moto, la quale prevede una serie di informazioni sulla struttura dello spazio di notevole utilità pratica.

Lo studio di missioni direttamente nell'ambito di questo modello ha aperto una serie di prospettive che vanno ben oltre le orbite coniche deducibili considerando solo 2-corpi. In particolare, la scoperta di soluzioni periodiche attorno ad alcuni punti di equilibrio ha dischiuso opportunità di grande interesse offrendo posizioni e vantaggi unici e decisamente validi per diverse applicazioni spaziali.

I risultati base dello studio di un sistema ristretto a tre corpi confermano, infatti, l'esistenza di 5 punti di equilibrio del moto, i cosiddetti **Punti di librazione** (L_i con $i=1...5$). Orbite attorno a tali punti ed orbite di trasferimento verso di essi determinano una conformazione dell'ambiente, cui lo *spacecraft* si troverà soggetto, che risulta un potente strumento per il disegno preliminare di missioni.

Una grande quantità di missioni attuali, così come molte altre ancora oggetto di studio, prevede l'utilizzo di orbite attorno ai punti di librazione oppure orbite di trasferimento a bassa energia che si avvalgono dei passaggi di comunicazione fra queste. Tutti elementi deducibili da una trattazione del problema ristretto a tre corpi che sembra dunque cogliere l'essenza della realtà ed utilizzarla in maniera praticamente implementabile^[1].

1.2 Esempi di missioni disegnate mediante un approccio a tre corpi

Le prime missioni ad utilizzare orbite operative in posizioni proprie del modello a tre corpi risalgono agli anni '70, mentre traiettorie che si avvalgono dei vantaggi della sua dinamica sono anche precedenti.

Si riporta, dunque, una serie di missioni che hanno segnato e segneranno il cammino nell'utilizzo dei punti di librazione al fine di evidenziare i particolari vantaggi offerti da queste posizioni^[2].

Si pone l'accento fin d'ora sulle richieste di propellente che, per tali tipi di missione e per i trasferimenti che utilizzano questo modello, sono decisamente minori anche rispetto a quelle ottimizzate nell'ambito di una trattazione kepleriana.

ISEE-3

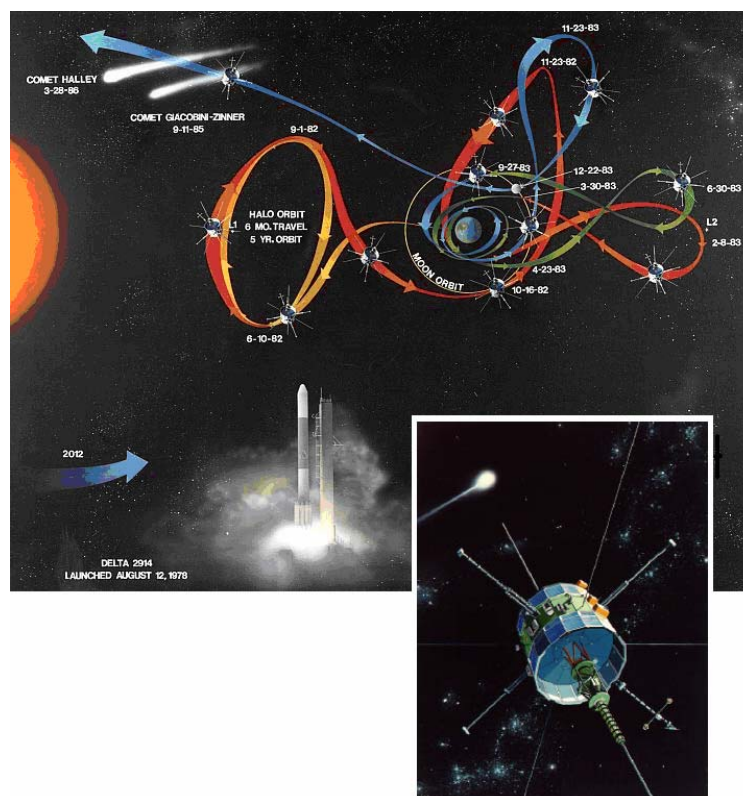


Figura 1.1 - Missione ISEE-3 dal lancio all'incontro con la cometa

Missione progettata per analizzare l'interazione fra l'ambiente solare e quello terrestre, la magnetosfera ed i raggi cosmici.

Lanciata nel 1978 per mezzo di un vettore Delta fu la prima missione ad utilizzare un'orbita periodica attorno ad un punto di librazione. Utilizzò un trasferimento diretto verso EL_1 ed un'orbita operativa di tipo Halo di valori:

$$A_x = 175.000 \text{ km} \quad A_y = 666.670 \text{ km} \quad A_z = 1.200 \text{ km}$$

Rinominata ICE, dopo una serie di swing-by lunari, fu la prima missione ad incontrare una cometa (Giacobini-Zinner) nel 1985.

Nel 1986 e' stata, inoltre, deviata verso la cometa Halley per analizzarla e nel 2014 dovrebbe passare nuovamente vicino alla Terra e potrebbe essere catturata per analizzare gli impatti esterni con le polveri interstellari.

WIND

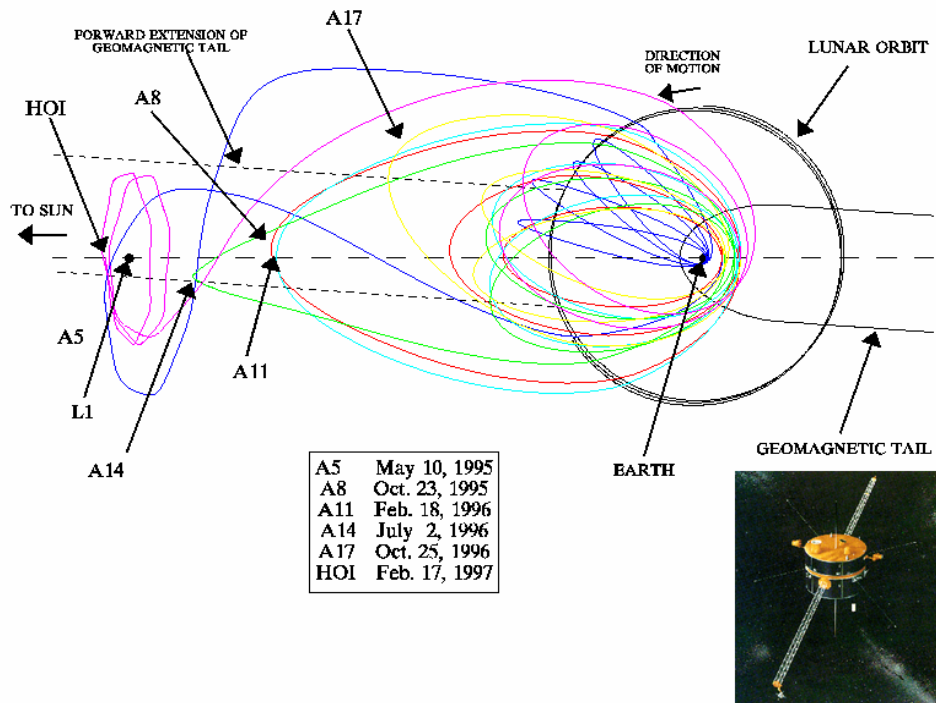


Figura 1.2 - Traiettoria della missione WIND

L'intento della missione è lo studio del vento solare e delle sue interazioni con la magnetosfera terrestre.

Lanciata nel 1994 a bordo di un Delta II fu la prima missione ad utilizzare diversi assist gravitazionali della Luna.

La sua orbita operativa attorno ad EL_1 è di tipo Lissajous con ampiezze pari a :

$$A_x = 10.000 \text{ km} \quad A_y = 350.000 \text{ km} \quad A_z = 25.000 \text{ km}$$

La traiettoria seguita, della durata di circa tre anni, utilizza una doppia coppia di *swing-by* lunari per alzare ed abbassare l'apogeo dell'orbita in maniera da riuscire ad analizzare diverse regioni della magnetosfera con una minima richiesta di propellente. Nel 1997 la missione fu estesa e progettata per comprendere orbite di vario tipo; globalmente effettuò 38 *swing-by* lunari.

SOHO

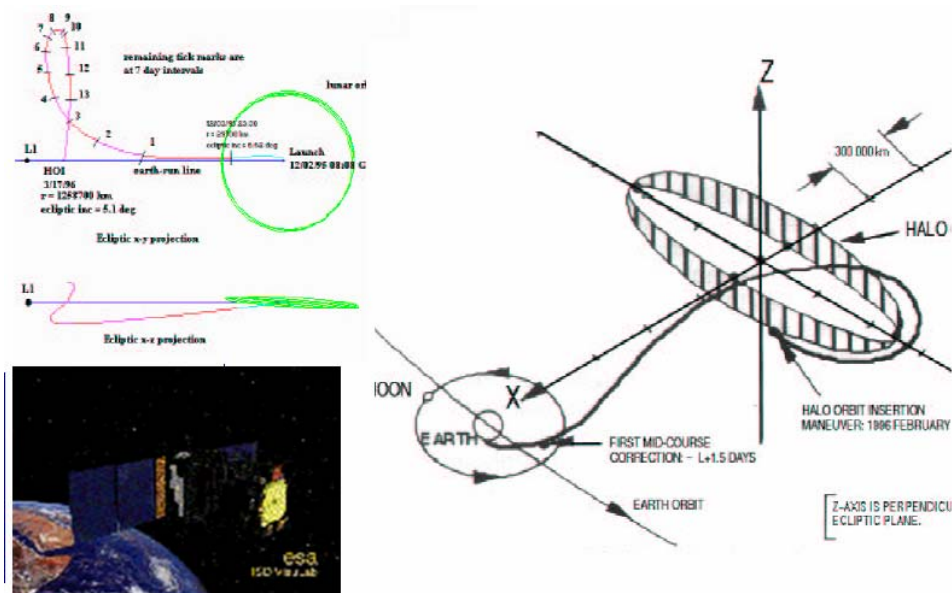


Figura 1.3 - Missione SOHO

Missione indirizzata allo studio del Sole, dalle sue regioni più interne alla corona solare, del vento solare e dei raggi cosmici.

Lanciata nel 1995 a bordo di un Atlas II-AS utilizza un'orbita operativa di tipo Halo attorno ad EL_1 con:

$$A_x = 206.448 \text{ km} \quad A_y = 666.672 \text{ km} \quad A_z = 120.000 \text{ km}$$

La sua inserzione nell'orbita di lavoro ha richiesto il minor quantitativo di propellente fra le missioni effettuate attorno ad EL_1 : ciò ha permesso alla sonda di compiere 11 orbite attorno al punto di librazione.

Oltre i molti dati sulla struttura interna del Sole, sono state anche avvistate e studiate circa 620 comete.

Si riconosce la posizione di EL_1 come ottimale per lo studio del Sole essendo questa sempre verso esso diretta.

ACE

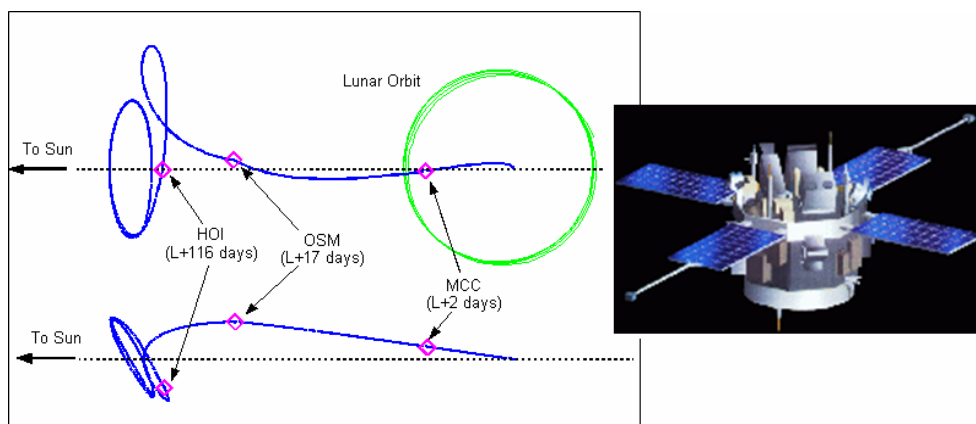


Figura 1.4 - Traiettoria ed orbita operativa della missione ACE

Missione indirizzata allo studio della composizione delle particelle energetiche provenienti dall'eliosfera, dal Sole e dalle galassie.

Utilizza un trasferimento diretto fino all'orbita operativa che è di tipo Lissajous, attorno ad EL_1 , con:

$$A_x = 81.755 \text{ km} \quad A_y = 264.071 \text{ km} \quad A_z = 157.406 \text{ km}$$

E' stata la prima missione ad utilizzare un'orbita Lissajous di così piccola ampiezza e la prima ad utilizzare un controllo attivo per evitare la zona di esclusione solare: ciò richiede manovre di *station-keeping* all'incirca una volta ogni otto settimane.

Fu lanciata nel 1997 a bordo di un Delta II e dovrebbe rimanere attorno ad EL_1 fino al 2019.

Come successe per SOHO, subì una forza di piccola entità di natura ancora sconosciuta che richiede un graduale aumento delle manovre di *station-keeping*.

WMAP

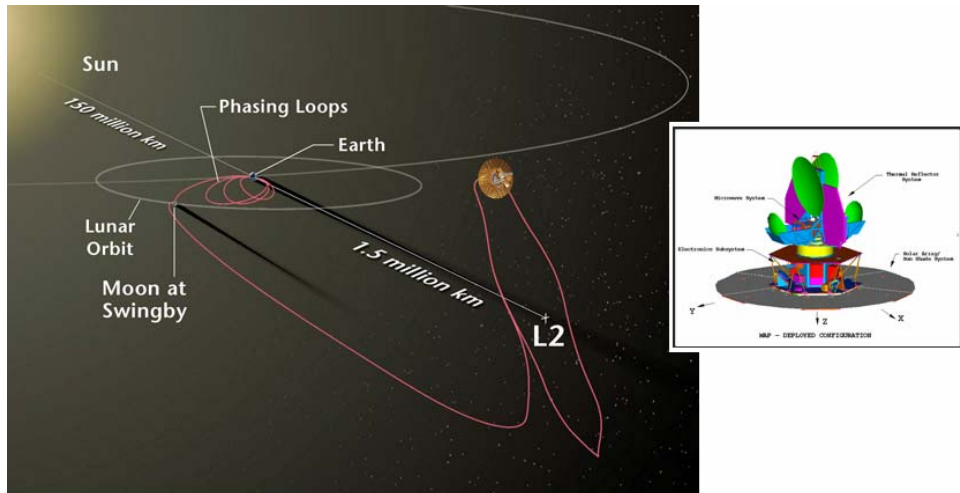


Figura 1.5 - Missione WMAP

L'obiettivo della missione consiste in una misurazione dell'anisotropia della radiazione a microonde del sottofondo nero del cosmo.

Lanciata utilizzando un Delta II nel 2001 utilizza un'orbita operativa di tipo Lissajous con ampiezze di:

$$A_y = 264.000 \text{ km} \quad A_z = 264.000 \text{ km}$$

Il trasferimento verso l'orbita operativa è stato ottenuto mediante tre ellissi di fasamento attorno alla Terra per predisporre la sonda ad uno swing-by lunare.

Fu la prima missione ad utilizzare EL_2 come posizione stabile di osservazione con *station-keeping* all'incirca tre volte al mese (il periodo della sua orbita è all'incirca sei mesi)^[3].

GENESIS

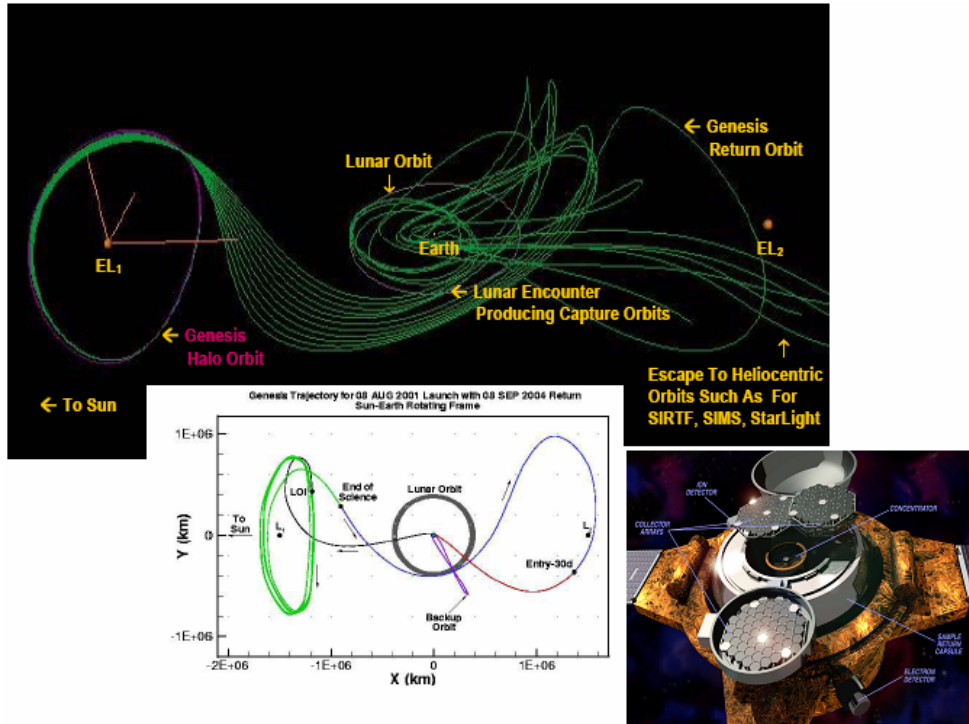


Figura 1.6 - Manifolds della missione Genesis

Lo scopo della missione è quello di raccogliere e riportare sulla Terra campioni di vento solare.

Fu lanciata nel 2001 a bordo di un vettore Delta; l'orbita utilizzata era di tipo Lissajous attorno EL_1 con le seguenti ampiezze:

$$A_x = 25.000 \text{ km} \quad A_y = 800.000 \text{ km} \quad A_z = 250.000 \text{ km}$$

Una delle prime missioni disegnate sfruttando i *manifolds* del problema, la sua dinamica utilizza una connessione eteroclinica fra orbite periodiche attorno ad EL_1 ed EL_2 per ottenere un rientro diurno che consentisse il recupero dei campioni^[4].

TRIANA

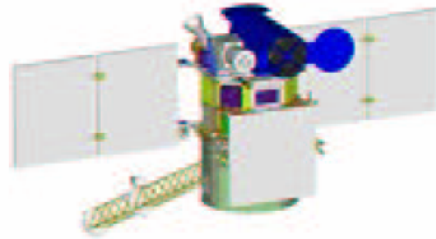
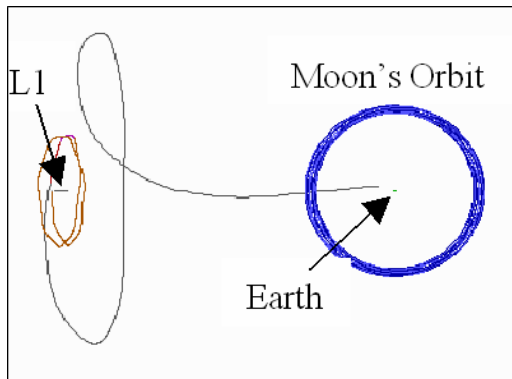


Figura 1.7 - Orbita della missione Triana

Missione studiata per raccogliere immagini della superficie terrestre ogni 15 minuti a diverse lunghezze d'onda.

L'intento è quello di studiare in dettaglio le evoluzioni climatiche e l'albedo terrestre.

Progettata per essere lanciata nel 2008 utilizzerà un trasferimento diretto per un'orbita operativa di tipo Lissajous attorno ad EL_1 con ampiezze di:

$$A_x = 264.000 \text{ km} \quad A_y = 81.000 \text{ km} \quad A_z = 148.000 \text{ km}$$

Sarà la prima missione di studio della superficie terrestre ad utilizzare punti di Lagrange. Una tale distanza dalla Terra offre possibilità di studio molto maggiori rispetto a quelli finora effettuati da orbite LEO o GEO.

NGST \ JWST

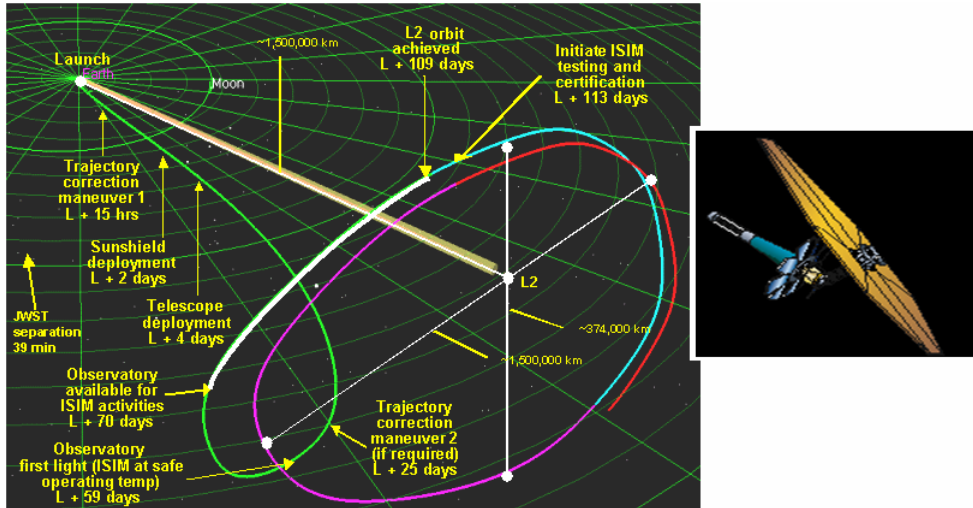


Figura 1.8 - Traiettoria di trasferimento ed orbita operativa della missione JWST

Missione funzionale ad analisi riguardo le origini dell'universo, la sua forma, la nascita e la formazione delle stelle, l'evoluzione delle galassie e la materia oscura.

Utilizzerà nel 2011 un Ariane 5 per il lancio ed un trasferimento diretto verso l'orbita operativa.

L'orbita di lavoro sarà di tipo Lissajous, attorno ad EL_2 , con ampiezze di:

$$A_x \cong 290.000 \text{ km} \quad A_y \cong 800.000 \text{ km} \quad A_z \cong 131.000 \text{ km}$$

La sonda costituirà la prima parte, quella all'infrarosso, del nuovo sistema di telescopi spaziali che presenta uno specchio primario dieci volte maggiore di quello del telescopio Hubble ed una massa (quindi un costo) di un quarto; la posizione, inoltre, molto lontana dalla terra e sempre al riparo dai raggi solari renderà il sistema molto più efficiente.

La temperatura molto bassa ed abbastanza costante consentirà di catturare lunghezze d'onda molto piccole che filtrano anche attraverso le nubi dense di gas nelle quali ha luogo la formazione di pianeti.

1.3 Motivazioni ed obiettivi della tesi

Nel quadro presentato appare palese l'esigenza di sviluppare missioni nell'ambito di un modello ristretto a tre corpi sia per disegnare traiettorie non ottenibili altrimenti, sia per soddisfare svariati vincoli di missione. Oggi il disegno di orbite in modelli che vanno oltre quello kepleriano sembra rispondere in maniera più accurata alle esigenze della comunità scientifica ed aprire una vasta gamma di opportunità.

In tale ottica il lavoro che ci si propone di affrontare vuole ripercorrere il modello e dedurne gli aspetti fondamentali per poi utilizzarli in maniera pratica nello sviluppo di alcuni tipi di trasferimenti. Non si mirerà ad ottenere una missione che soddisfi specifici vincoli, bensì si focalizzerà l'attenzione sulle metodologie per utilizzare in maniera concreta lo sviluppo teorico e sul comportamento globale della soluzione.

1.4 Articolazione del lavoro

Il lavoro procederà innanzitutto ripercorrendo la teoria del problema ristretto a tre corpi; si ricaveranno le equazioni che ne regolano il moto, si determineranno i punti critici e si indagherà circa la loro stabilità. Si studierà quindi il comportamento della soluzione nei dintorni dei punti di equilibrio sia nello spazio delle posizioni che in quello delle fasi.

Un secondo capitolo tratterà delle soluzioni periodiche ottenibili sia mediante procedure di approssimazione analitica sia mediante procedure numeriche; si dedurrà il comportamento di tali soluzioni periodiche in funzione della loro ampiezza nel piano e nello spazio e dei loro periodi.

Il terzo capitolo tratterà della struttura dello spazio che viene a determinarsi dall'analisi teorica, si descriverà una metodologia per l'implementazione di manifolds ed una loro approssimazione. Saranno costruite numericamente e teoricamente, ove possibile, diverse connessioni fra le soluzioni periodiche e si identificheranno gli strumenti necessari per uno studio discreto della soluzione.

Successivamente il lavoro descriverà le metodologie utilizzate per l'implementazione dei softwares sviluppati sulle basi teoriche dedotte, confronti e validazioni reciproche fra i diversi strumenti.

Un ultimo capitolo, infine, esibirà i risultati numerici ottenuti mediante gli strumenti sviluppati; saranno descritti una serie di trasferimenti dalla Terra sia verso la Luna sia verso orbite periodiche attorno ai punti di librazione, sia nel caso piano sia in quello spaziale, sia con propulsione chimica sia con

Studio Preliminare di Missioni Spaziali con Modelli a Tre Corpi

bassa spinta. Saranno inoltre riprodotte delle missioni reali e si analizzerà la sensibilità della soluzione dai parametri in gioco.

PROBLEMA RISTRETTO DEI TRE CORPI

Nel presente capitolo si affronterà lo studio del problema a tre corpi ristretto, se ne deriveranno le equazioni del moto ed i punti critici. Si definiranno, inoltre, i differenti tipi di orbite e la configurazione generale sia nello spazio delle fasi che in quello delle posizioni. L'intento è quello di dare una panoramica generale del problema, cercando anche di riprodurre personalmente i diversi sviluppi, di fornire gli strumenti necessari al resto del lavoro.

2.1 Introduzione

Lo studio del moto relativo di n -corpi soggetti alle sole mutue forze gravitazionali è formulabile esattamente sulla base della legge di gravitazione universale; una sua soluzione analitica, tuttavia, si presenta di proibitiva difficoltà, a causa della dipendenza della forza dall'inverso del quadrato della posizione che porta a variazioni contemporanee del primo e del secondo membro delle equazioni^[5]. Fu H. Poincaré che dimostrò che non è possibile ottenere soluzioni in forma chiusa per questo problema.

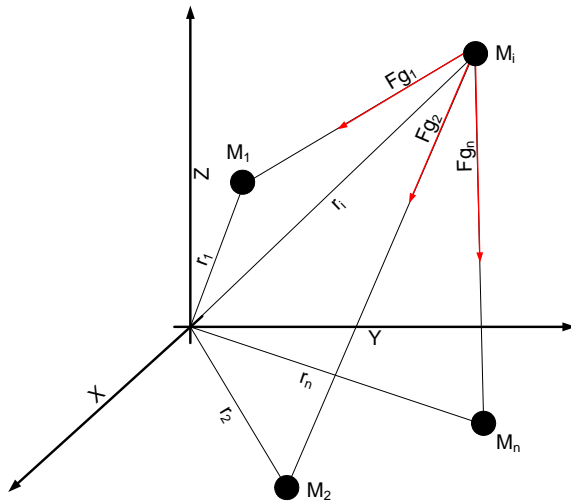


Figura 2.1 - Forze agenti su una massa soggetta ad n azioni gravitazionali

Il sistema di equazioni che descrive il moto di un corpo in tale sistema, ottenibile semplicemente unendo il secondo principio di Newton con la forza di attrazione gravitazionale, è del tipo:

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{r_{i-j}^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (2.1)$$

La prima semplificazione effettuabile è la diminuzione del numero dei corpi; tuttavia, considerando anche solo tre di questi, le soluzioni analitiche sono ricavabili soltanto in particolari configurazioni delle tre masse: quelle che mantengono istantaneamente costanti le distanze reciproche (retta, triangolo equilatero, “otto”)^{[5][6]}.

L'utilità pratica di tali configurazioni è alquanto ristretta e le applicazioni richiedono di definire il comportamento di corpi che presentano una massa molto minore di quella dei corpi che determinano le forze di attrazione gravitazionale (*spacecraft*, comete,...); da questa osservazione nasce il concetto di problema gravitazionale ristretto.

Il problema ristretto a tre corpi è un classico della meccanica celeste che si presenta come la naturale estensione del problema dei due corpi. L'oggetto di studio è il moto di un corpo con massa trascurabile nel campo gravitazionale creato da altri due corpi di massa rilevante^[7].

Il modello che si utilizzerà nel presente lavoro è da questo derivato con l'ulteriore ipotesi che le orbite dei due corpi che determinano il campo

gravitazionale (i due *primari*) si muovano su orbite circolari attorno al baricentro del sistema: Problema Circolare Ristretto a Tre Corpi (*CR3BP*).

Una ulteriore semplificazione, anche affrontata e largamente usata in letteratura, è la versione bi-dimensionale del moto del corpo vincolato al piano su cui giacciono entrambi i primari: Problema Planare Circolare Ristretto a Tre Corpi (*PCR3BP*).

La ricerca di una soluzione al problema ha portato alla formulazione della teoria sui sistemi dinamici ed ha rivelato l'esistenza di comportamenti caotici all'interno della teoria di Newton (Poincaré).

Benché siano disponibili in letteratura diversi modelli a *n-corpi*, nel presente lavoro si utilizza il modello circolare dei tre corpi, sia nella sua versione spaziale che in quella planare, per disegni preliminari di missioni che coinvolgono l'utilizzo dei punti di librazione.

La differenza fondamentale fra modelli a *n-corpi* e quello considerato nella presente trattazione risiede nella modellizzazione delle forze gravitazionali in gioco; infatti, mentre i primi si basano sul problema dei due corpi in cui le ulteriori azioni gravitazionali sono trattate come perturbazioni, il secondo modello tiene in conto le due azioni gravitazionali agenti sullo *spacecraft* in maniera simultanea e congiunta.

In ogni caso nel passaggio dal modello dei due corpi a quello dei tre corpi alcune informazioni vengono inevitabilmente abbandonate a causa della perdita degli elementi orbitali classici e dei dieci integrali primi del moto a causa della perdita di integrabilità in forma chiusa del problema. L'unica costante del moto disponibile resta l'energia (costante di Jacobi) e le informazioni perse vengono sostituite da una struttura ordinata dello spazio delle fasi. Associati ad ogni punto di equilibrio e ad ogni orbita periodica attorno ad essi, esiste, infatti, una famiglia di *manifolds*, stabili ed instabili, utilizzabili come strumento per il disegno di traiettorie.

Il modello a tre corpi, dunque, si presenta come un potente strumento per studi preliminari: sono, infatti, soddisfabili vincoli di missione difficilmente imponibili in un modello a due corpi classicamente kepleriano; risulta facilmente implementabile e non richiede eccessivi tempi di calcolo.

Partendo dal modello circolare è, inoltre, possibile prendere in considerazione anche effetti secondari come le eccentricità delle orbite dei primari (Problema Ellittico dei tre corpi, *ER3BP*), le perturbazioni dovute ad altri corpi o il vento solare.

Come già accennato, negli ultimi anni l'interesse della comunità scientifica verso missioni spaziali che utilizzassero la struttura dello spazio delle fasi ed i punti di equilibrio, propri del *CR3BP*, è andata aumentando; molte missioni attorno ai punti di librazione sono state progettate e molte sono già operative (vedi cap. I).

Già negli anni '60 Farquhar identificò EL_1 (il primo punto di equilibrio tra Terra e Sole) come ideale posizione per una continua monitoraggio dello spazio interplanetario (ISEE-3); successivamente tale sito fu anche utilizzato per osservazioni solari (SOHO). Il punto EL_1 si presenta, inoltre, idoneo per raccogliere dati circa il vento solare (WIND) o la magnetosfera terrestre (ACE). Tale posizione, tuttavia si trova anche soggetta ad una forte attività solare, necessitando di orbite che siano sufficientemente lontane dalla congiungente Terra-Sole e dunque fuori dal disco solare che disturba, inoltre, le radiocomunicazioni.

Il secondo punto di equilibrio del sistema Terra-Sole, EL_2 , si è dimostrato, invece, particolarmente utile per lo studio del fondo nero del cosmo (WMAP, NGST) poiché costantemente al riparo dall'emissione a microonde della Terra, dai campi magnetici e da altri disturbi. Inoltre offre una condizione termica molto stabile e favorevole per gli strumenti di osservazione ed un'efficienza di osservazione molto ampia poiché Sole, Terra e Luna si trovano sempre dietro il campo visivo degli strumenti. Anche il punto L_2 del sistema Terra-Luna è stato proposto ed utilizzato per l'esplorazione della faccia oscura del nostro satellite.

Nel 1991 fu mandato in orbita un combo (Combined Flight System) giapponese che prevedeva un orbiter (MUSES A) ed un lander (MUSES B) per l'esplorazione della superficie lunare; un'avaria rese inutilizzabile il lander e l'orbiter non aveva a bordo carburante sufficiente per un allunaggio alla Homann. La missione, rinominata HITEN, utilizzò quindi una traiettoria alternativa, basata sul lavoro di quegli anni di Belbruno e Miller, che prevedeva l'uso di zone a stabilità marginale in cui si utilizzava il bilanciamento fra le forze di attrazione gravitazionale del sistema Terra-Luna e le perturbazioni solari (Weak Stability Boundary)^[8], (vedi appendice A). Ciò richiese meno combustibile di un trasferimento alla Homann e fece del Giappone il terzo paese a raggiungere la Luna.

Missioni di trasferimenti interplanetari che utilizzano i *manifolds* come vie di comunicazione (le così dette Interplanetary Highway^[9]) sono pure state proposte e sono tuttora oggetto di studio, come pure piccoli tour delle lune di Giove^[10] anche se nessuna missione del genere è ancora operativa.

L'idea è quella di riuscire ad utilizzare la vasta rete di passaggi che mette in comunicazione i punti di librazione (in effetti le orbite periodiche attorno ad essi) dei vari sistemi a tre corpi e che si intersecano vicendevolmente per ottenere traiettorie di trasferimento a bassa energia (quindi basso costo in termini di Δv) fra i pianeti.

Tale modello viene successivamente ripreso da J. L. Lagrange che ne dà una elegante trattazione nel suo “*Essai Sur Le Problème à Trois Corps*” nel quale identifica anche gli ulteriori due punti di equilibrio.



Successivamente E. Poicarè, nei suoi studi sui sistemi dinamici, stila la teoria del caos deterministico ed identifica una mappatura per lo studio della conformazione dello spazio delle posizioni del problema.

Fu infine Jacobi a determinare l'unico integrale primo del moto di valenza generale per ogni problema di gravitazione con più di due corpi (l'energia).



2.3 Descrizione del problema

Si considera dunque il moto di un corpo P di massa trascurabile (m_3) che si muove sotto l'attrazione gravitazionale di due masse m_1 ed m_2 (denominate *primari*) che si suppongono in moto circolare attorno al loro baricentro. La massa P non modifica il moto dei primari; l'ipotesi principale del modello è:

$$m_1 > m_2 \gg m_3 \tag{2.2}$$

Prima di derivare le equazioni del moto per il CR3BP si identifica il sistema di unità di misura che si adotterà ed il sistema di riferimento utilizzato.

2.4 Adimensionalizzazioni

Il problema risulta essere più facilmente analizzabile ed interpretabile utilizzando un sistema di coordinate normalizzate.

Il sistema viene normalizzato mediante le seguenti scelte di unità di misura:

- La somma delle masse dei primari è presa come unità di massa (m_1+m_2)
- La distanza media fra i centri dei primari è presa come unità di distanza (L)
- L'unità di tempo è scelta in maniera tale che il periodo di rotazione di m_1 e m_2 attorno al baricentro del sistema sia 2π

Con tali scelte la costante di gravitazione universale risulta essere unitaria ($G=1$) così come la velocità angolare di rotazione del sistema ($\omega=1$).

Per la riconversione in unità dimensionali è sufficiente moltiplicare per i fattori di conversione. Ovvero, per ripassare posizioni, velocità e tempi da quantità normalizzate a quantità dimensionali:

| | |
|-----------------|----------------------------------|
| <i>Distanza</i> | $d[Km] = L \cdot d$ |
| <i>Velocità</i> | $v[Km/s] = V \cdot v$ |
| <i>Tempo</i> | $t[s] = \frac{T}{2 \cdot \pi} t$ |

Tabella 2.1 - Algoritmi di conversione

in cui V è la velocità orbitale media di m_1 e T il periodo orbitale medio di m_1 e m_2 .

Un sistema di tre corpi è, con queste adimensionalizzazioni, univocamente determinato da un unico parametro: il **parametro di massa**.

Tale parametro rappresenta la massa del primario più piccolo adimensionalizzata con il sistema precedente; ovvero:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \mu \in [0, \frac{1}{2}] \quad (2.3)$$

Avendo assunto $m_1 > m_2$, μ può oscillare fra 0 (se la massa del primario più piccolo è molto inferiore a quella dell'altro primario) e 0.5 (se le due masse sono uguali).

Le masse dei due attrattori sono dunque identificabili come:

$$m_2 = \mu \qquad m_1 = 1 - \mu \qquad (2.4)$$

La configurazione dello spazio delle fasi è fortemente influenzata dal parametro di massa del sistema.

Nella seguente tabella si riportano i valori di μ , V , T , L per alcuni sistemi d'interesse nell'ambito del sistema solare.

| System | μ | L (km) | V (km/s) | T (sec) |
|------------------|------------------------|---------------------|------------|---------------------|
| Sun-Jupiter | 9.537×10^{-4} | 7.784×10^8 | 13.102 | 3.733×10^8 |
| Sun-(Earth+Moon) | 3.036×10^{-6} | 1.496×10^8 | 29.784 | 3.147×10^7 |
| Earth-Moon | 1.215×10^{-2} | 3.850×10^5 | 1.025 | 2.361×10^6 |
| Mars-Phobos | 1.667×10^{-8} | 9.380×10^3 | 2.144 | 2.749×10^4 |
| Jupiter-Io | 4.704×10^{-5} | 4.218×10^5 | 17.390 | 1.524×10^5 |
| Jupiter-Europa | 2.528×10^{-5} | 6.711×10^5 | 13.780 | 3.060×10^5 |
| Jupiter-Ganymede | 7.804×10^{-5} | 1.070×10^6 | 10.909 | 6.165×10^5 |
| Jupiter-Callisto | 5.667×10^{-5} | 1.883×10^6 | 8.226 | 1.438×10^6 |
| Saturn-Mimas | 6.723×10^{-8} | 1.856×10^5 | 14.367 | 8.117×10^4 |
| Saturn-Titan | 2.366×10^{-4} | 1.222×10^6 | 5.588 | 1.374×10^6 |
| Neptune-Triton | 2.089×10^{-4} | 3.548×10^5 | 4.402 | 5.064×10^5 |
| Pluto-Charon | 1.097×10^{-1} | 1.941×10^4 | 0.222 | 5.503×10^5 |

Tabella 2.2 - Valori dei parametri adimensionali per alcuni sistemi a tre corpi

2.5 Sistema di riferimento

Si sceglie un sistema di riferimento spesso definito *sistema sinodico*, ossia rotante solidale ai due primari attorno al loro baricentro con velocità angolare unitaria (essendo stata adimensionalizzata). Il principale vantaggio

di tale scelta è che in questo sistema i due primari (così come i punti di equilibrio) risultano essere fissi.

Si sceglie come asse x la retta congiungente i centri dei due primari, diretto da m_1 a m_2 , come asse y quello diretto come la velocità orbitale di m_2 e come asse z quello uscente del piano orbitale tale da rendere la terna destrorsa.

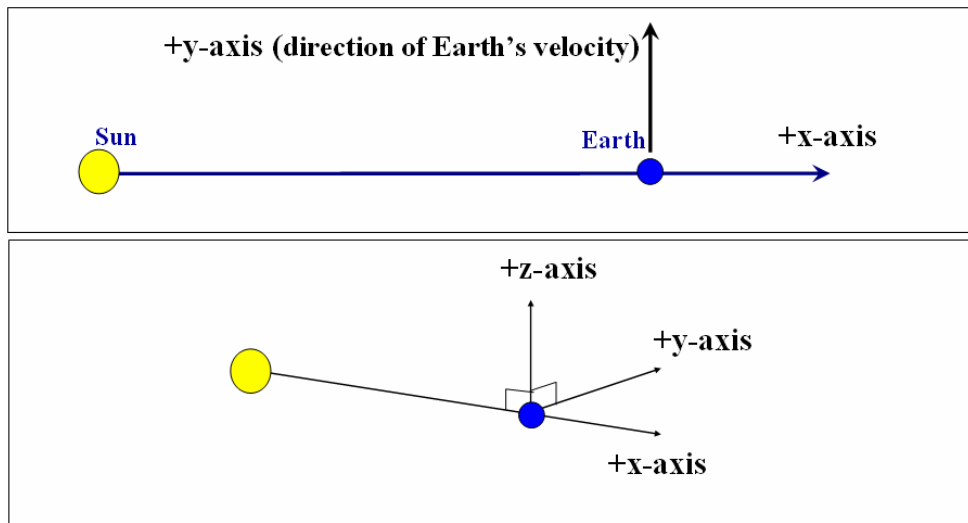


Figura 2.3 - Sistema di riferimento sinodico

Il primario di massa maggiore, m_1 , si colloca sull'asse x ad una distanza dall'origine del sistema inversamente proporzionale alla sua massa, mentre m_2 si colloca a distanza unitaria da esso.

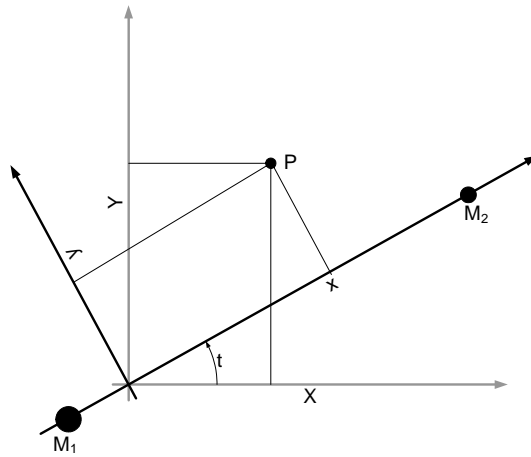


Figura 2.4 - Posizione dei primari nel riferimento sinodico

Le coordinate dei primari nel sistema rotante risultano dunque:

$$\blacktriangleright m_1 \quad (-\mu \ 0 \ 0)$$

$$\blacktriangleright m_2 \quad (1-\mu \ 0 \ 0)$$

Le componenti di un vettore nel sistema inerziale saranno indicate con le lettere maiuscole (X, Y, Z), mentre si indicheranno con le lettere minuscole le componenti nel sistema rotante (x, y, z).

Il passaggio da coordinate rotanti ad inerziali è una semplice rotazione attorno all'asse Z.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A_t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Poiché si farà uso anche delle velocità nei due sistemi si ricava il passaggio della velocità da un sistema all'altro, che si ottiene mediante derivazione delle precedenti equazioni.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} &= \dot{A}_t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A_t \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \\
 &= -A_t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + A_t \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A_t \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le coordinate dei primari nel sistema inerziale risultano dunque:

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright m_1 & \quad (-\mu \cdot \cos(t) \quad -\mu \cdot \sin(t) \quad 0) \\
 \blacktriangleright m_2 & \quad ((1-\mu) \cdot \cos(t) \quad (1-\mu) \cdot \sin(t) \quad 0)
 \end{aligned}$$

Si osservi come, trattandosi di una rotazione attorno a Z, la relativa coordinata resta invariata nel passaggio fra i due sistemi.

2.6 Equazioni del moto

Poiché i due corpi primari si muovono in moto circolare attorno al baricentro del sistema, per il loro equilibrio è necessario un bilanciamento fra forze centrifughe e gravitazionali^[7]:

$$k \frac{m_1 \cdot m_2}{l} = m_1 \cdot a \cdot n^2 = m_2 \cdot b \cdot n^2 \tag{2.7}$$

in cui k è la costante gaussiana di gravitazione, n il moto medio dei primari, a , b ed l sono indicati in figura.

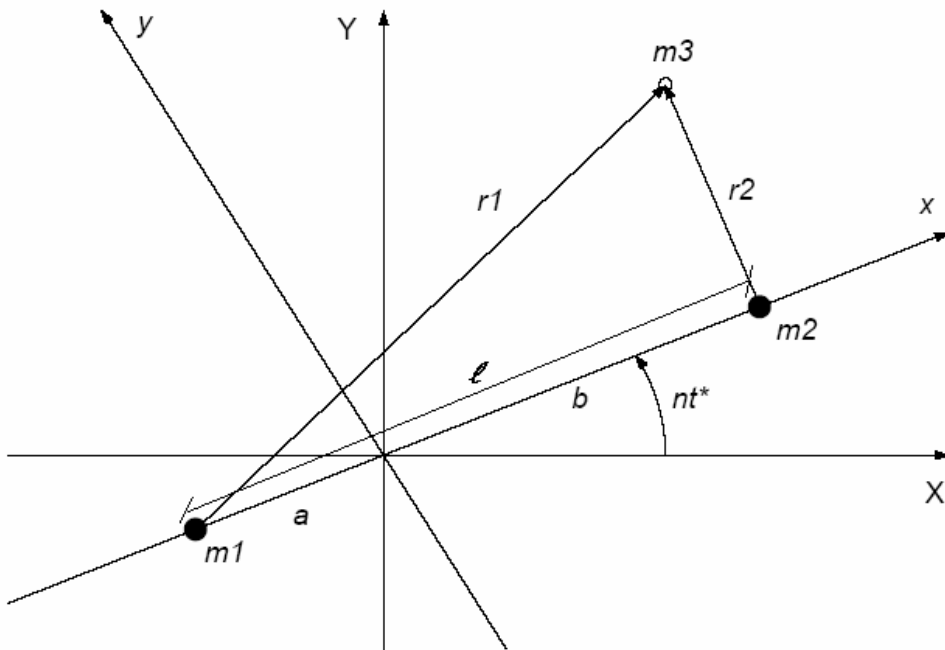


Figura 2.5 - Posizioni e distanze nel sistema rotante

Manipolando le equazioni (2.7), con l'aiuto della figura 2.5, è possibile ottenere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 k(m_1 + m_2) &= n^2 l^3 \\
 a &= \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \\
 b &= \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Dalla semplice scrittura del secondo principio di Newton, considerando come forze agenti solo quelle gravitazionali, si ottiene che le equazioni del moto nel sistema inerziale sono:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = -k \cdot \left[\frac{m_1 \cdot (X + a \cdot \cos(nt))}{R_1^3} + \frac{m_2 \cdot (X - b \cdot \cos(nt))}{R_2^3} \right] \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = -k \cdot \left[\frac{m_1 \cdot (Y + a \cdot \sin(nt))}{R_1^3} + \frac{m_2 \cdot (Y - b \cdot \sin(nt))}{R_2^3} \right] \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = -k \cdot \left[\frac{m_1 \cdot Z}{R_1^3} + \frac{m_2 \cdot Z}{R_2^3} \right] \end{cases} \quad (2.9)$$

in cui si è indicato con R_1 e R_2 le distanze della massa di prova dai primari.

$$\begin{aligned} R_1^2 &= (X + a \cdot \cos(nt))^2 + (Y + a \cdot \sin(nt))^2 + Z^2 \\ R_2^2 &= (X - b \cdot \cos(nt))^2 + (Y - b \cdot \sin(nt))^2 + Z^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Come si evince da queste equazioni, l'utilizzo di un sistema di riferimento inerziale fa comparire in maniera esplicita la dipendenza temporale; un sistema di riferimento sinodico, invece, le rende autonome (tempo-indipendenti), quindi più semplicemente analizzabili.

I parametri n , a , b , l , m_1 ed m_2 non risultano inoltre indipendenti scegliendo il sistema di unità normalizzate introdotto, ma legati dal parametro di massa del sistema. Si fa, infatti, notare che:

- m_1 ed m_2 sono ricavabili da μ
- a è la posizione del primario maggiore ($-\mu$)
- b è la posizione del primario minore ($l-\mu$)
- n ed l sono unitari

Si passa dunque a ricavare le equazioni del moto, nella forma che sarà utilizzata nel seguito del lavoro, nel sistema sinodico rotante adimensionale.

2.6.1 Approccio Lagrangiano

Secondo la teoria dei sistemi dinamici è possibile ricavare le equazioni del moto di un qualunque sistema, in maniera efficiente e molto generica,

semplicemente analizzando la variazione di un parametro che descrive lo stato del sistema rispetto alle sue coordinate generalizzate.

Si utilizza, dunque, l'equazione di Eulero-Lagrange (ricavabile ad esempio per via variazionale^[11]) per ricavare le equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (2.11)$$

in cui L è il **Lagrangiano** del sistema e le q_i ($i=1\dots n$) ne sono le **coordinate generalizzate**.

Il Lagrangiano del sistema è definito come la differenza fra l'energia cinetica e l'energia gravitazionale del sistema; ovvero:

$$L = T - U \quad (2.12)$$

Il **potenziale gravitazionale** non dipende dal sistema di riferimento ed è individuato semplicemente dalle masse e dal modulo delle distanze rispetto a m_3 .

$$U = -\frac{(1-\mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2} \cdot (1-\mu) \cdot \mu \quad (2.13)$$

Con r_1 e r_2 si sono indicate quelle che in un sistema non normalizzato erano state indicate con R_1 e R_2 . Quindi:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (X + \mu \cdot \cos(t))^2 + (Y + \mu \cdot \sin(t))^2 + Z^2 \\ r_2^2 &= (X - (1-\mu) \cdot \cos(t))^2 + (Y - (1-\mu) \cdot \sin(t))^2 + Z^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

In un'analisi planare del problema è sufficiente porre $Z=0$.

La costante che compare come ultimo termine di U è aggiunta per convenzione e non modifica le equazioni del moto (infatti tale termine comparirà solo attraverso le sue derivate).

L'unica cosa che varia nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro è l'espressione delle distanze del corpo dai primari, che in un sistema di riferimento rotante si esprimono come:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 + z^2 \\ r_2^2 &= (x - (1-\mu))^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

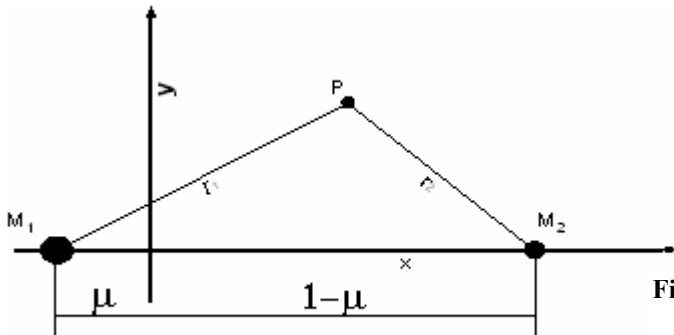


Figura 2.6 - Distanze dai primari nel sistema normalizzato

Per quel che riguarda *l'energia cinetica* del sistema, invece, è di particolare rilevanza il sistema di riferimento; infatti:

- Sistema di riferimento *inerziale* (la metà del quadrato del modulo della velocità)

$$T = \frac{1}{2} \cdot (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \quad (2.16)$$

- Sistema di riferimento *rotante* (si ottiene dalla precedente mediante le equazioni sul cambiamento di coordinate (2.6))

$$T = \frac{1}{2} \cdot ((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2) \quad (2.17)$$

Il Lagrangiano del sistema è dunque esprimibile sia in coordinate inerziali che rotanti:

- Sistema Inerziale

$$L(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}, t) = \frac{1}{2} \cdot (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - U(X, Y, Z, t) \quad (2.18)$$

- Sistema Sinodico

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} \cdot ((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad (2.19)$$

Le coordinate generalizzate che descrivono il sistema sono quei parametri sufficienti ad identificare ad un tempo t , in maniera univoca lo stato del

sistema; nel caso in esame un punto è individuato dalla conoscenza della sua posizione e della sua velocità, essendo le equazioni autonome nel sistema rotante. Nello spazio delle fasi a tre dimensioni, quindi, le q_i sono semplicemente le tre componenti della posizione e le tre componenti della velocità. Rispetto a queste ed alle relative derivate si va ad applicare l'equazione (2.11) per ottenere le equazioni del moto dimensionali, nel sistema sinodico, mediante l'approccio Lagrangiano:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot (2\dot{x} - 2y) \right) = \frac{d}{dt} (\dot{x} - y) = \dot{y} + x + \Omega_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot (2\dot{y} + 2x) \right) = \frac{d}{dt} (\dot{y} + x) = -(\dot{x} - y) + \Omega_y \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot 2\dot{z} \right) = \Omega_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = +\Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = +\Omega_y \\ \ddot{z} = +\Omega_z \end{cases} \quad (2.20)$$

in cui con Ω si è indicato il **potenziale effettivo** e con i pedici le derivate rispetto alle relative variabili. Nel termine del potenziale effettivo si sono conglobati il potenziale gravitazionale ed i termini quadratici risultanti dalle derivazioni. Quindi:

$$\begin{aligned} \Omega(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + U(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + \frac{(1+\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1+\mu) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((1+\mu) \cdot r_1^2 + \mu \cdot r_2^2) + \frac{(1+\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Il potenziale effettivo si compone di due termini: il primo tiene conto delle forze centrifughe (potenziale centrifugo), mentre il secondo delle forze di attrazione gravitazionale (potenziale gravitazionale). Tale parametro è di fondamentale importanza per lo studio dello spazio delle posizioni che assume diverse conformazioni in relazione al valore del potenziale.

Nel caso bi-dimensionale è sufficiente annullare la componente z della posizione e della velocità per ottenere le equazioni del moto.

Riassumendo:

| PCR3BP | CR3BP |
|--|--|
| <p>Equazioni del moto</p> $\ddot{x} - 2 \cdot \dot{y} = \Omega_x$ $\ddot{y} + 2 \cdot \dot{x} = \Omega_y$ | <p>Equazioni del moto</p> $\ddot{x} - 2 \cdot \dot{y} = \Omega_x$ $\ddot{y} + 2 \cdot \dot{x} = \Omega_y$ $\ddot{z} = \Omega_z$ |
| <p>Potenziale Effettivo</p> $\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) +$ $+ \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1-\mu)$ | <p>Potenziale Effettivo</p> $\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) +$ $+ \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (1-\mu)$ |
| <p>Distanze</p> $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2$ $r_2^2 = (x - (1-\mu))^2 + y^2$ | <p>Distanze</p> $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2$ $r_2^2 = (x - (1-\mu))^2 + y^2 + z^2$ |

Tabella 2.3 - Equazioni del moto in forma Lagrangiana

2.6.2 Approccio Hamiltoniano

Note le equazioni del sistema in forma Lagrangiana, il passaggio alla forma Hamiltoniana è facilmente ottenibile mediante la trasformazione di Legendre. Tale trasformazione modifica lo stato del sistema introducendo i momenti coniugati (p_i) in luogo delle velocità.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}; \quad H(q^i, p_i) = \sum p_i \cdot \dot{q}^i - L(q^i, p_i) \quad (2.22)$$

Ricavati dunque i momenti coniugati e, quindi, l'Hamiltoniano del sistema, le equazioni del moto sono ottenibili mediante:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (2.23)$$

I momenti coniugati che si ottengono nel caso in esame sono:

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y & (q_1 = x, i = 1) \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x & (q_2 = y, i = 1) \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z} & (q_2 = z, i = 1) \end{cases} \quad (2.24)$$

L'Hamiltoniano è quindi esprimibile come:

$$\begin{aligned} H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) &= p_x \cdot \dot{x} + p_y \cdot \dot{y} + p_z \cdot \dot{z} - L \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2 + p_z^2) - \Omega(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le equazioni del moto ottenibili nel caso tridimensionale sono dunque:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x \\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z \end{cases} \\ \dot{p}_i &\Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - x + \Omega_x \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y + \Omega_y \\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = +\Omega_z \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Riassumendo:

| PCR3BP | CR3BP |
|--|---|
| <p>Equazioni del moto</p> $\begin{aligned}\dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{p}_x &= p_y - x + \Omega_x \\ \dot{p}_y &= -p_x - y + \Omega_y\end{aligned}$ | <p>Equazioni del moto</p> $\begin{aligned}\dot{x} &= p_x + y \\ \dot{y} &= p_y - x \\ \dot{z} &= p_z \\ \dot{p}_x &= p_y - x + \Omega_x \\ \dot{p}_y &= -p_x - y + \Omega_y \\ \dot{p}_z &= \Omega_z\end{aligned}$ |
| <p>Hamiltoniano</p> $\begin{aligned}H(x, y, p_x, p_y) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2) - \Omega(x, y)\end{aligned}$ | <p>Hamiltoniano</p> $\begin{aligned}H(x, y, p_x, p_y) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - x \cdot p_y + y \cdot p_x - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2})\end{aligned}$ |

Tabella 2.4 - Equazioni del moto in forma Hamiltoniana

Una proprietà molto importante dei sistemi Hamiltoniani tempo indipendenti è che ammettono l'energia come integrale del moto.

Come si può dedurre da entrambe le trattazioni, il problema ristretto a tre corpi si definisce in uno spazio coinvolgente posizioni e velocità (spazio delle fasi) che presenta dunque sei dimensioni per il caso spaziale e quattro per quello planare; si fa notare, inoltre, che il passaggio da un approccio Lagrangiano ad uno Hamiltoniano non modifica le dimensioni di tale spazio, ma sostituisce solo alcune variabili.

| PCR3BP | CR3BP |
|---|---|
| <p>Approccio Lagrangiano</p> $\bar{x} \in \mathfrak{R}^4 \mapsto (x, y, \dot{x}, \dot{y})$ | <p>Approccio Lagrangiano</p> $\bar{x} \in \mathfrak{R}^6 \mapsto (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ |
| <p>Approccio Hamiltoniano</p> $\bar{x} \in \mathfrak{R}^4 \mapsto (x, y, p_x, p_y)$ | <p>Approccio Hamiltoniano</p> $\bar{x} \in \mathfrak{R}^6 \mapsto (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ |

Tabella 2.5 - Dimensioni dello spazio delle fasi

2.7 Simmetrie del problema

Come può osservarsi dalle equazioni del moto, il problema presenta due simmetrie attorno ad alcuni dei suoi piani per tempi positivi o negativi:

- Piano (x,y) ; infatti, se $(x(t),y(t),z(t))$ è soluzione anche $(x(t),y(t),-z(t))$ è soluzione.
- Piano (x,z) per tempi negativi; infatti, se $(x(t),y(t),z(t))$ è soluzione anche $(x(-t),y(-t),z(-t))$ è soluzione.

Esiste, inoltre, anche una simmetria che coinvolge i parametri del sistema:

- se $(x(t),y(t),z(t))$ è soluzione per μ , anche $(-x(t),-y(t),z(t))$ è soluzione per $1-\mu$ (ciò giustifica anche lo studio del problema per valori del parametro di massa $\in [0, 1/2]$).

2.8 Integrale dell'energia e costante di Jacobi

L'energia del sistema è definita come la somma delle sue diverse forme, ovvero di quella potenziale e di quella cinetica; utilizzando, inoltre, coordinate rotanti, va tenuta in considerazione anche la componente dovuta alle forze centrifughe.

$$E = T + U + U_{centrif} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Omega(x, y, z) \quad (2.27)$$

Al fine di dimostrare che l'energia sia una costante del moto e sia la medesima della **costante di Jacobi**, si procede con la seguente derivazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= 2(\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}) = \\ &= 2 \cdot [\dot{x} \cdot (2 \cdot \dot{y} + \Omega_x) + \dot{y} \cdot (-2 \cdot \dot{x} + \Omega_y)] = 2 \cdot \frac{d}{dt}(\Omega) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Raccogliendo in uno stesso termine si ottiene che:

$$C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2 \cdot \Omega \Rightarrow \frac{d}{dt} C = 0 \quad (2.29)$$

La quantità indicata fra parentesi, dunque, si conserva ed è identificata come costante di Jacobi.

$$C = 2 \cdot \Omega(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (2.30)$$

Come è semplice dedurre, essa è legata all'energia del sistema dalla relazione:

$$C = -2E \quad (2.31)$$

Energia, integrale dell'energia e costante di Jacobi assumono dunque lo stesso significato; ovvero dell'unica quantità che lega le variabili del sistema e che si mantiene costante data una certa orbita in assenza di perturbazioni o manovre esterne.

Si sottolinea il fatto che E e C non sono due diversi integrali del moto ma la medesima espressione dell'unica quantità costante; si fa inoltre notare la presenza del segno meno nell'equazione (2.31) il che significa che a maggiori energie corrispondono minori costanti di Jacobi.

Si è proceduto alla dimostrazione utilizzando le equazioni in forma Lagrangiana del moto e si è ottenuto che l'energia si conserva così come avviene nei sistemi Hamiltoniani a conferma dell'equivalenza dei due approcci. Hamiltoniano ed energia del sistema sono quantità strettamente collegate con l'unica differenza che, mentre la prima descrive il sistema mediante posizioni e momenti coniugati, la seconda utilizza posizioni e velocità.

L'Hamiltoniano è anche correlabile alla costante di Jacobi mediante la seguente relazione:

$$C = -2 \cdot H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) + \mu \cdot (1 - \mu) \quad (2.32)$$

L'unico integrale primo del moto per il CR3BP (così come per la sua versione planare) è dunque l'energia; questo fornisce una sola relazione che lega lo stato del sistema (\mathcal{R} oppure \mathcal{R}^f) e rende il problema non integrabile in forma chiusa.

2.9 Regioni di Hill

Nel problema kepleriano dei due corpi l'energia è inversamente legata al semiasse maggiore dell'orbita ed il segno di questa (quindi il segno di a) risulta essere il discriminante fra i diversi tipi di orbite (ellittiche, paraboliche ed iperboliche). Infatti:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2 \cdot a} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon < 0 \rightarrow \text{orbite chiuse} \\ \varepsilon \geq 0 \rightarrow \text{orbite aperte} \end{cases} \quad (2.33)$$

Nel problema dei tre corpi il valore dell'energia si ripercuote sulla conformazione dello spazio delle posizioni che sembra quasi essere "stratificato" in funzione del valore di C . Gli strati sono in corrispondenza biunivoca con il valore dell'energia ed identificano le zone del piano in cui il moto è consentito oppure proibito.

Si definiscono **superfici di energia** (\mathcal{M}) quelle zone dello spazio delle fasi nelle quali si mantiene costante l'integrale dell'energia:

$$\mathcal{M}(\mu, e) = \{(x, y, (z), \dot{x}, \dot{y}, (\dot{z})) \mid E(x, y, (z), \dot{x}, \dot{y}, (\dot{z})) = e\} \quad (2.34)$$

in cui e è il valore costante.

Tali superfici sono ad $n-1$ dimensioni dove n è il numero di fasi del sistema; ovvero si presentano come superfici tridimensionali per il PCR3BP e come superfici pentadimensionali per il CR3BP. Questo perché imporre l'energia costante equivale a vincolare le fasi del sistema da una relazione, ossia perdere una variabile.

Non va dimenticata comunque la dipendenza della conformazione dello spazio delle fasi, quindi di \mathcal{M} , dal parametro di massa del sistema.

La proiezione di tali iper-superfici nello spazio rotante delle posizioni prende il nome di **regioni di Hill** (\mathcal{M}).

$$\begin{aligned} M(\mu, e) &= \{(x, y, z) \mid E(x, y, z) = e\} \\ &\Rightarrow \{(x, y, z) \mid \Omega(x, y, z) = \bar{e}\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Il corpo, tuttavia, può muoversi solo dove la sua energia cinetica è positiva ed essendo questa strettamente legata all'energia totale, potrà farlo solo in alcune zone delle regioni di Hill. Ovvero:

$$\begin{cases} E = T - \Omega = e = -\frac{1}{2} \cdot c \\ T > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot c + \Omega(x, y, (z)) > 0 \Rightarrow \quad (2.36)$$

$$M(x, y, (z)) = \{(x, y, (z)) \mid 2 \cdot \Omega(x, y, (z)) \geq c\}$$

Solo nella zona che soddisfa la precedente relazione è consentito al corpo di muoversi. Spesso in bibliografia ci si riferisce solo a questa parte dello spazio come regioni di Hill. L'energia del corpo, quindi la zona in cui questo può muoversi è definita una volta imposte le condizioni iniziali del corpo:

$$C_0 = C(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (2.37)$$

La zona dello spazio in cui il moto è permesso è separata dalla zona in cui questo è interdetto dalle curve lungo le quali si annulla l'energia cinetica, quindi la velocità, del sistema (*zero velocity surface*) che diventano dunque il limite delle regioni di Hill. Imponendo nulla l'energia cinetica del sistema:

$$2 \cdot \Omega = c \quad (2.38)$$

Tale equazione definisce le superfici a velocità nulla nello spazio delle posizioni; proiettando queste superfici sul piano (x,y) del sistema sinodico si ottengono le curve a velocità nulla (o curve di Hill).

Ovviamente per il PCR3BP non ha senso parlare delle superfici a velocità nulla e il limite delle regioni di Hill, che in questo caso si presentano a due dimensioni, sono direttamente le curve a velocità nulla.

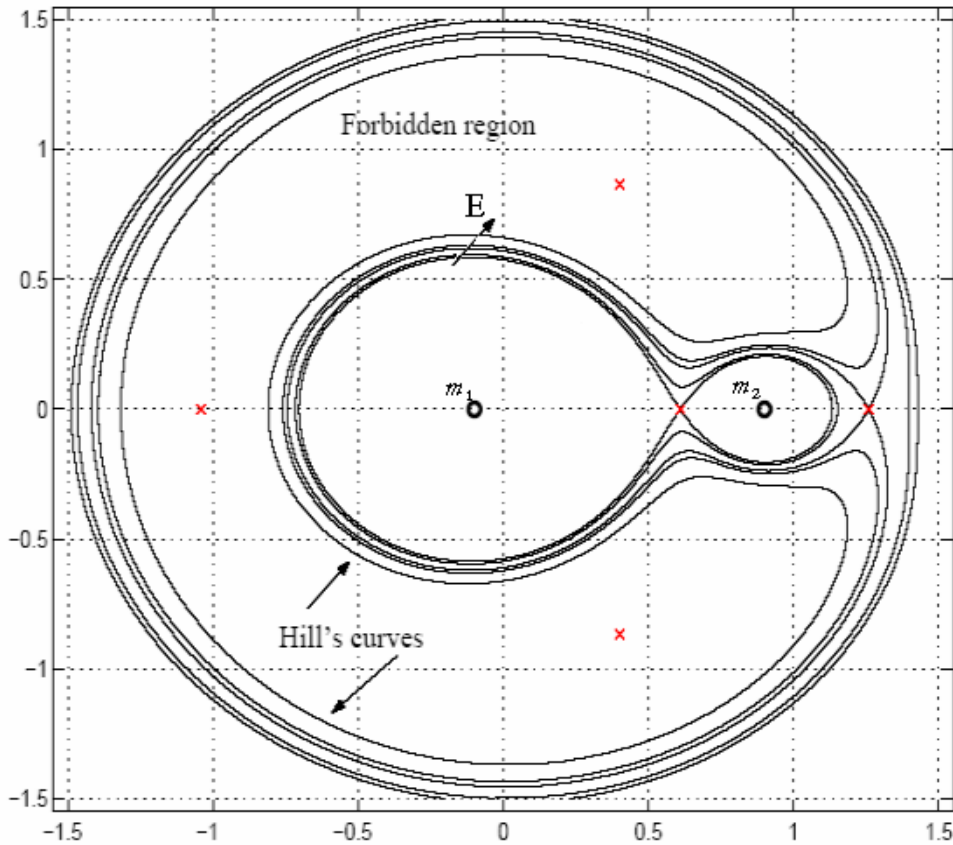


Figura 2.7 - Regioni di Hill e curve a velocità nulla per $\mu = 0.25$

Come può osservarsi graficando queste curve all'aumentare dell'energia, quindi al diminuire della costante di Jacobi, la zona di moto possibile per il corpo varia ed aumenta in dimensioni. Il corpo durante il suo moto, infatti, non può attraversare queste curve ed è vincolato a muoversi solo da un lato delle stesse. In particolare:

- Per bassi valori dell'energia il corpo è vincolato a restare in orbite attorno ad uno dei primari.
- Per valori crescenti dell'energia il corpo può passare da un primario all'altro attraverso il varco che si crea dalla giunzione delle due curve a velocità nulla in corrispondenza dell'asse x del sistema fra m_1 e m_2 .

- Per valori ancora maggiori dell'energia si apre un ulteriore varco fra l'esterno ed il primario più piccolo che offre al corpo un ulteriore possibilità di moto.
- Per valori dell'energia superiori ai precedenti, infine, due curve a velocità nulla si aprono anche a valle di m_1 .

Dall'equazione (2.38) si nota come fissare un valore dell'energia equivale a fissare una quota sul grafico del potenziale effettivo il cui andamento è riportato di seguito.

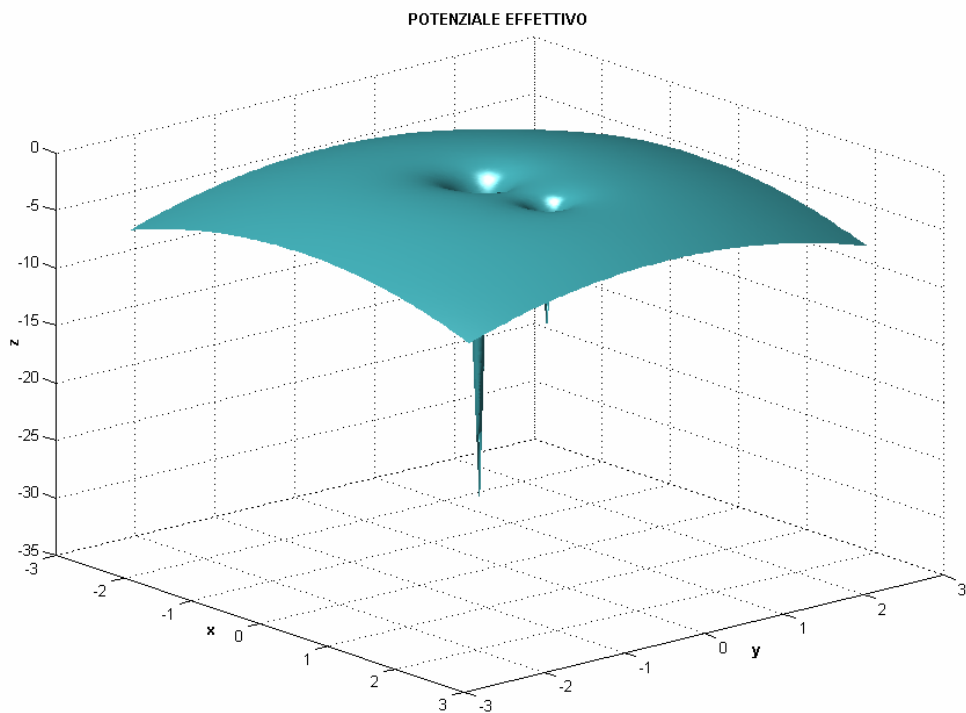


Figura 2.8 - Potenziale effettivo per $\mu = 0.3$

Per dare un'idea della dipendenza dal parametro di massa si riporta, ad esempio, il grafico di Ω per il sistema Terra-Luna che, fra quelli realmente utilizzati, ha il valore maggiore di μ (vedi tabella 2.2).

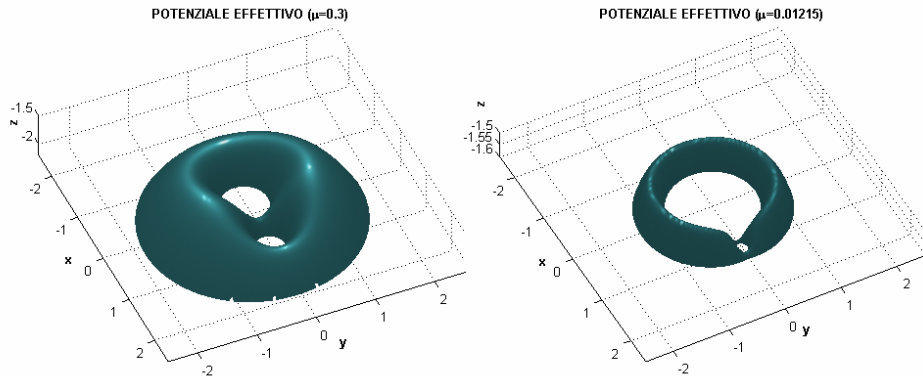


Figura 2.9 - Potenziale effettivo nella regione dei due primari per diversi valori di μ

Le principali proprietà di tali grafici sono:

- Pozzi di potenziale attorno a m_1 e a m_2 le cui dimensioni dipendono dalla relativa massa.
- Il decrescere verso $-\infty$ a grande distanza dalle due masse; infatti al crescere del raggio vettore del corpo aumentano le forze centrifughe agenti su esso e si crea un altro pozzo di potenziale.

$$\frac{\left\| \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\|}{\left\| \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \right\|} \gg 1$$
- Cinque punti a tangente orizzontale, nonché punti critici, ossia quei punti in cui un corpo, messovi con velocità nulla, vi permane (accelerazione nulla essendo nulle le derivate direzionali di Ω , che compaiono ai secondi membri delle equazioni del moto (2.20 o 2.26)).

Andando a sezionare tale grafico secondo superfici ad energia costante si ottengono le seguenti curve:

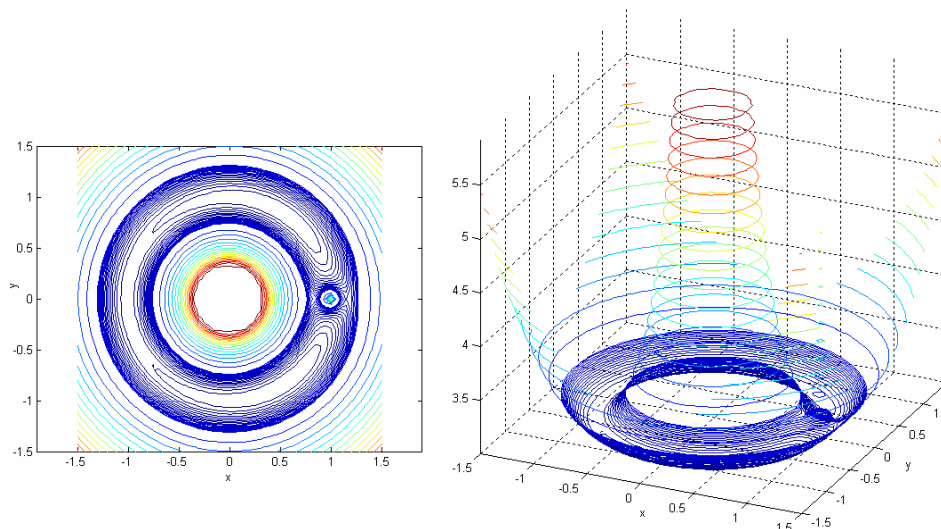


Figura 2.10 - Sezione del potenziale effettivo secondo superfici ad energia costante

Da queste si può notare come, all'aumentare dell'energia, le regioni del piano in cui il moto è consentito aumentano e possono già identificarsi i differenti *reami* del moto:

- Reame di m_1 : zona attorno al primario di massa maggiore delimitata da una curva a velocità nulla che all'aumentare dell'energia crea passaggi in due punti; tale reame viene spesso chiamato come *Interior Realm* ed identificato con la lettera *S*.
- Reame di m_2 : zona attorno al primario di massa minore delimitata da una curva (diversa dalla precedente) che all'aumentare dell'energia crea passaggi aprendosi in due punti. Tale reame s'identifica spesso con la lettera *J*.
- Reame esterno: zona del piano al di fuori delle due masse (quella che decresce verso $-\infty$, nella quale dominano le forze centrifughe) delimitata da una curva (ancora diversa da quelle sopra citate) che all'aumentare dell'energia si apre per creare passaggi in due punti. Tale reame viene spesso chiamato *Exterior Realm* ed identificato con la lettera X^1 .

¹ La motivazione delle lettere identificative risiede nel fatto che l'unico modello a tre corpi del sistema solare il cui parametro di massa ne giustifica uno studio accurato è quello Giove-Sole.

I cinque punti critici del potenziale effettivo sono dunque i punti stazionari del moto (in un sistema di riferimento rotante); si identificherà, inoltre, con E_i ($i=1\dots 5$) l'energia associata ad un corpo posizionato in ciascuno di tali punti con velocità nulla.

2.10 I cinque casi delle regioni di Hill

Per un dato valore del parametro di massa le regioni di Hill assumono cinque configurazioni basilari in funzione dell'energia imposta al sistema.

Tali configurazioni identificano la zona in cui il moto è concesso ed il modo in cui essa varia. All'aumentare dell'energia, infatti, si aprono una serie di passaggi fra i diversi reami; lo spazio delle posizioni assume dunque strutture differenti in funzione del valore della costante di Jacobi. In particolare:

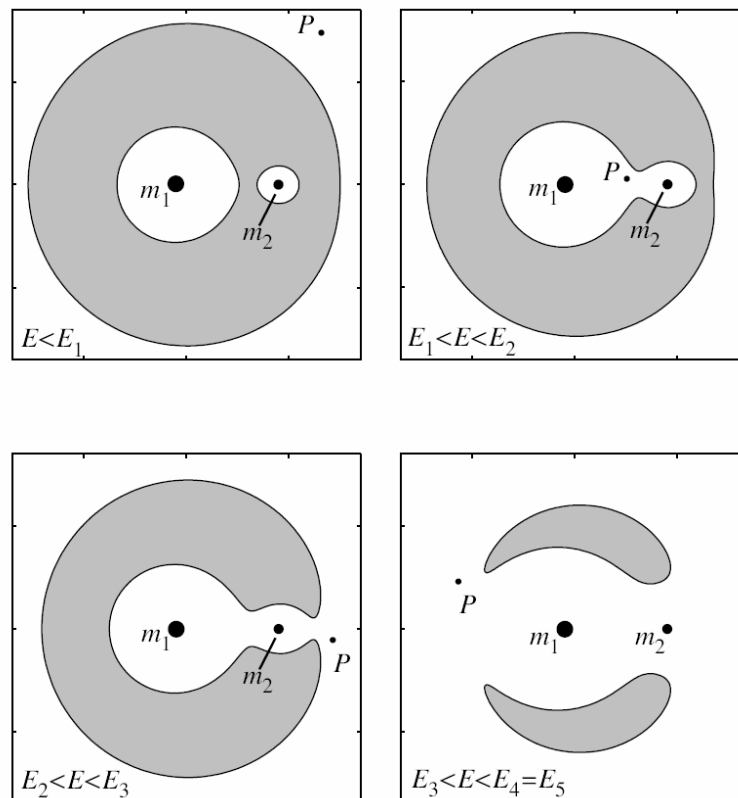


Figura 2.11 - I cinque casi della regione di Hill (la zona in grigio è interdotta al moto)

Come si evince dall'immagine:

- Caso I: l'energia del sistema è minore di quella associata al primo punto critico. Il moto è limitato attorno ad uno dei due primari e non esiste possibilità di passaggio fra i diversi reami
- Caso II: l'energia del sistema è compresa fra E_1 ed E_2 ; le curve a velocità nulla si aprono offrendo una possibilità di passaggio fra S e J .
- Caso III: il sistema ha la minima energia sufficiente affinché il moto possa avvenire con passaggio in tutti e tre i reami.
- Caso IV: si apre anche il passaggio che mette in comunicazione diretta X con S .
- Caso V: l'energia è tale per cui il moto può avvenire in maniera indistinta in tutto il piano.

Può intuirsi fin d'ora che i punti che creano i diversi passaggi fra i diversi reami sono i punti critici del moto, i punti stazionari del sistema, ovvero i punti di librazione. Le diverse energie associate a tali punti sono i valori critici di E . Ancora una volta, come nel problema dei 2-corpi è l'energia che discrimina i diversi tipi di orbite.

Si riporta, infine un andamento dei valori di queste energie critiche in funzione di μ , ricavabile annullando la velocità ed imponendo le posizioni dei punti di librazione nell'equazione (2.30-2.31).

La posizione dei punti critici sarà ricavata nei prossimi paragrafi.

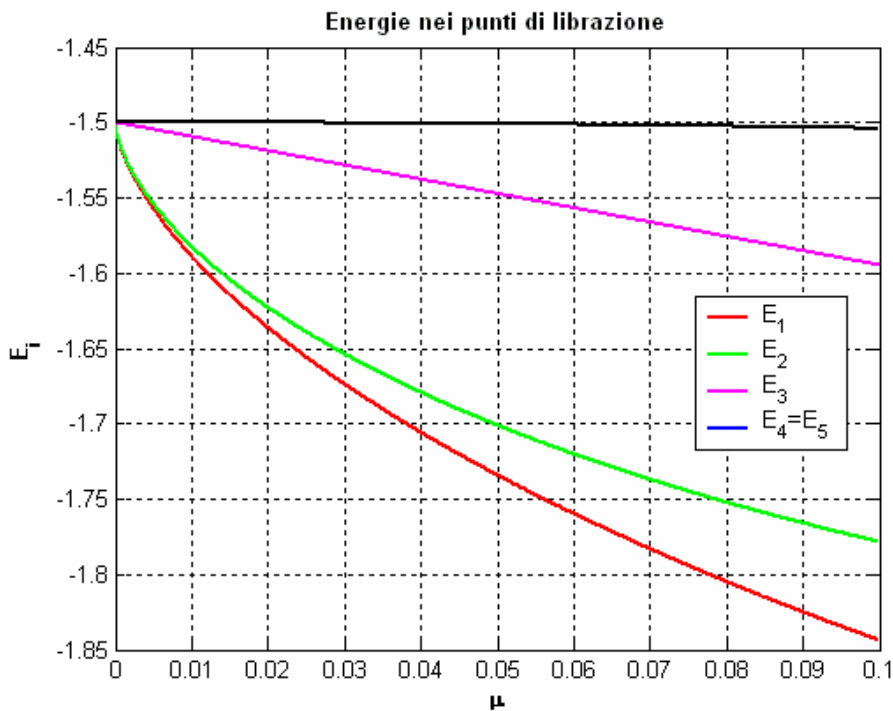


Figura 2.12 - Andamento delle energie critiche in funzione di μ

Può fin d'ora osservarsi l'indipendenza delle energie di E_4 ed E_5 dal parametro di massa del sistema; tali punti, infatti, si trovano sempre nella stessa posizione al variare di μ nel sistema sinodico di coordinate normalizzate.

2.11 Punti di equilibrio

Per il calcolo della posizione dei punti di equilibrio del problema è innanzitutto necessario ridurre l'ordine delle equazioni del moto, ossia ridurle dal secondo ordine, in cui sono state formulate, al primo. Tale trasformazione è facilmente effettuabile imponendo che la derivata della posizione sia la velocità; ciò porta, tuttavia, a raddoppiare le equazioni in numero che diventano:

| PCR3BP | CR3BP |
|---|--|
| <p>Approccio Lagrangiano</p> $\dot{x} = v_x$ $\dot{y} = v_y$ $\dot{v}_x = 2v_y + \Omega_x$ $\dot{v}_y = -2v_x + \Omega_y$ | <p>Approccio Lagrangiano</p> $\dot{x} = v_x$ $\dot{y} = v_y$ $\dot{z} = v_z$ $\dot{v}_x = 2v_y + \Omega_x$ $\dot{v}_y = -2v_x + \Omega_y$ $\dot{v}_z = \Omega_z$ |
| <p>Approccio Hamiltoniano</p> $\dot{x} = p_x + y$ $\dot{y} = p_y - x$ $\dot{p}_x = p_y - x + \Omega_x$ $\dot{p}_y = -p_x - y + \Omega_y$ | <p>Approccio Hamiltoniano</p> $\dot{x} = p_x + y$ $\dot{y} = p_y - x$ $\dot{z} = p_z$ $\dot{p}_x = p_y - x + \Omega_x$ $\dot{p}_y = -p_x - y + \Omega_y$ $\dot{p}_z = \Omega_z$ |

Tabella 2.6 - Equazioni del moto al primo ordine

L'approccio Hamiltoniano, in effetti, presenta già le equazioni scritte al primo ordine.

Per la determinazione dei punti d'equilibrio è sufficiente imporre uguale a zero il secondo termine delle equazioni del moto; lo stato del sistema in tali punti sarà dunque del tipo $(x_e, y_e, 0, 0)$ secondo l'approccio Lagrangiano.

Come già accennato e com'è possibile desumere dall'analisi del grafico del potenziale effettivo (fig. 2.8-2.9) il CR3BP, così come la sua versione planare, mostra cinque punti d'equilibrio:

- Tre punti collineari sull'asse x del sistema sinodico, denominati L_1 , L_2 e L_3 . Il primo punto collineare è definito come quello che giace tra i due primari, il secondo quello a valle del primario più piccolo ed il terzo quello che si trova a valle di m_1 .

- Due punti equilaterali, ovvero disposti ai vertici di un triangolo equilatero formato con i due primari; L_4 e L_5

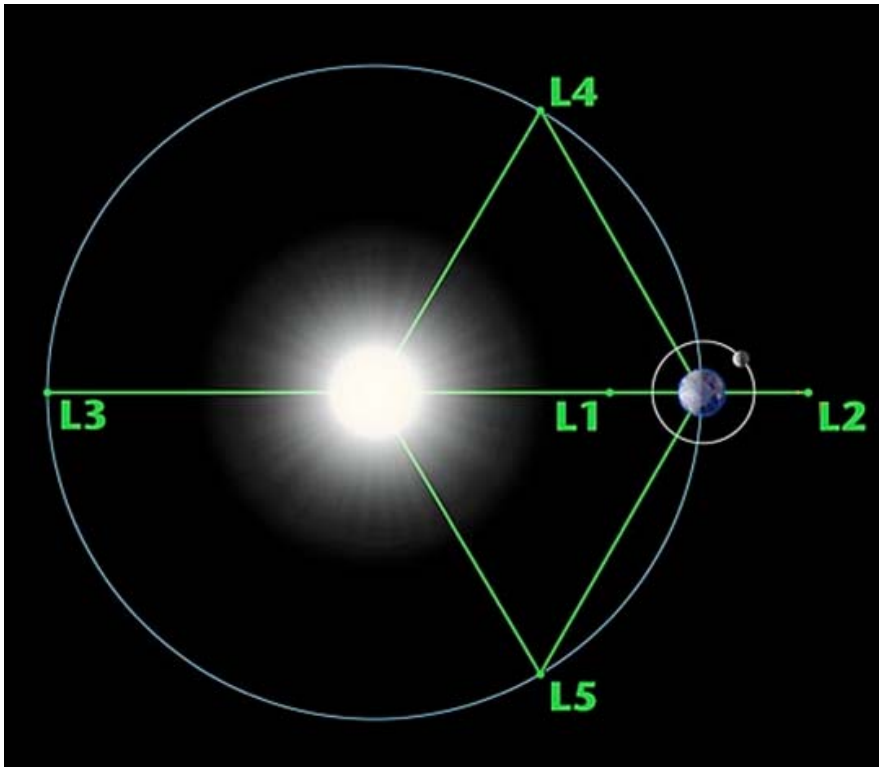


Figura 2.13 - Posizione dei punti di Lagrange

2.11.1 Punti collineari

Si inizia con il considerare i punti collineari che, in quanto tali, presentano uno stato del sistema del tipo $(x_e, 0, 0, 0)$. Sostituendo dunque $y=0$ nell'equazione di Ω si ottiene:

$$\Omega(x, 0) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1-\mu}{|x+\mu|} - \frac{\mu}{|x-1+\mu|} \quad (2.39)$$

Essendo questa una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, si può dunque desumere l'esistenza di un punto critico in ognuno degli intervalli delimitati dal divergere a $\pm \infty$ dei diversi termini; in altre parole:

$$\begin{array}{ccc} \blacktriangleright & (-\infty, -\mu) & (-\mu, 1-\mu) & (1-\mu, \infty) \\ \\ \text{Ciò poich :} & \left. \begin{array}{l} x \rightarrow \pm\infty \\ x \rightarrow -\mu \\ x \rightarrow 1-\mu \end{array} \right\} & \Omega(x, 0) \rightarrow -\infty \pm & (2.40) \end{array}$$

Il potenziale effettivo ha dunque almeno un punto critico fra le due masse, fra m_1 e $-\infty$ e fra m_2 e $+\infty$.

Per calcolare la posizione di questi punti   sufficiente annullare la derivata prima della funzione; quindi: $\frac{d}{dx}\Omega(x, 0) = 0$

L'equazione che si ottiene, dopo successive semplificazioni ed utilizzando come variabile la distanza fra L_1 e L_2 da m_2 (γ), le cui uniche radici positive sono la soluzione del problema,  :

$$\gamma^5 \mp (3-\mu)\gamma^4 + (3-2\mu)\gamma^3 - \mu\gamma^2 \pm 2\mu\gamma - \mu = 0 \quad (2.41)$$

Il segno superiore   utilizzato per L_1 , mentre quello inferiore per L_2 .

Soluzioni numeriche di tale equazione sono possibili, ad esempio, con il metodo di Newton usando come ipotesi di soluzione iniziale il **raggio di Hill**. Questo pu  pensarsi come l'estensione al CR3BP della sfera d'influenza definibile in un problema a 2-corpi; ovvero il raggio di quella sfera tridimensionale all'interno della quale dominano gli effetti gravitazionali dovuti a m_2 .

$$r_h = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \quad (2.42)$$

Sono anche disponibili soluzioni approssimate in serie per γ che utilizzano sviluppi di r_h , come le seguenti^[7]:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= r_h \cdot \left(1 - \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \frac{1}{27}r_h^3\right) \\ \gamma_2 &= r_h \cdot \left(1 + \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \frac{1}{27}r_h^3\right)\end{aligned}\tag{2.43}$$

Tali sviluppi in serie sono sufficientemente accurati già fermandosi ai primi ordini; ad esempio (fermandosi al terzo ordine):

| Sistema | L ₁ | L ₂ |
|------------|--|--|
| Terra-Sole | <i>X</i> Numerica: 0.9899 <i>X</i> Approssimata: 0.9899 | <i>X</i> Numerica: 1.0100 <i>X</i> Approssimata: 1.0100 |
| Terra-Luna | <i>X</i> Numerica: 0.8369 <i>X</i> Approssimata: 0.8373 | <i>X</i> Numerica: 1.1557 <i>X</i> Approssimata: 1.553 |

Tabella 2.7 - Confronto fra la posizione numerica ed approssimata di L₁ ed L₂

Espansioni simili per L₃, ma che coinvolgono la distanza da m₁, sono anche disponibili in bibliografia.

Si riportano di seguito le collocazioni dei primi due punti collineari di equilibrio per alcuni sistemi di interesse².

² Essendo L₃ un punto caratterizzato da una tenue instabilità e trovandosi a valle del primario di massa maggiore (spesso il sole) si presenta poco utile per l'utilizzo in missioni spaziali; verrà, pertanto, considerato solo in maniera marginale nel corso del presente lavoro.

| System | μ | $L1$ | $L2$ |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| Sun-Venus | 0.0000024510 | 0.9906782924 | 1.0093750674 |
| Sun-(Earth+Moon) | 0.0000030359 | 0.9899909371 | 1.0100701875 |
| Sun-Mars | 0.0000003233 | 0.9952484658 | 1.0047659847 |
| Sun-Jupiter | 0.0009538754 | 0.9323655863 | 1.0688305221 |
| Sun-Saturn | 0.0002855022 | 0.9547609794 | 1.0460572665 |
| Earth-Moon | 0.0121409319 | 0.8369626376 | 1.1556450246 |

Tabella 2.8 - Posizione di L_1 e L_2 per alcuni sistemi

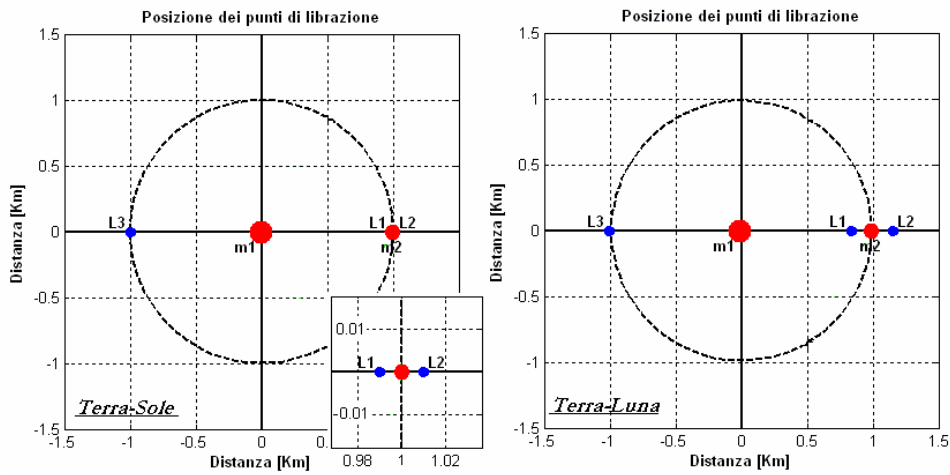


Figura 2.14 - Posizione dei punti Collineari

2.11.2 Punti equilaterali

La posizione dei punti equilaterali è tale che essi costituiscano i vertici di due triangoli equilateri che hanno gli altri vertici nei due primari.

$$\text{Dunque: } \begin{cases} x_{L_4} = x_{L_5} = 1/2 \\ y_{L_4} = -y_{L_5} = \sqrt{3}/2 \end{cases} \quad (2.44)$$

Come si vede, la posizione di tali punti non dipende dal parametro di massa nel sistema (sempre se visualizzati in un sistema sinodico adimensionale).

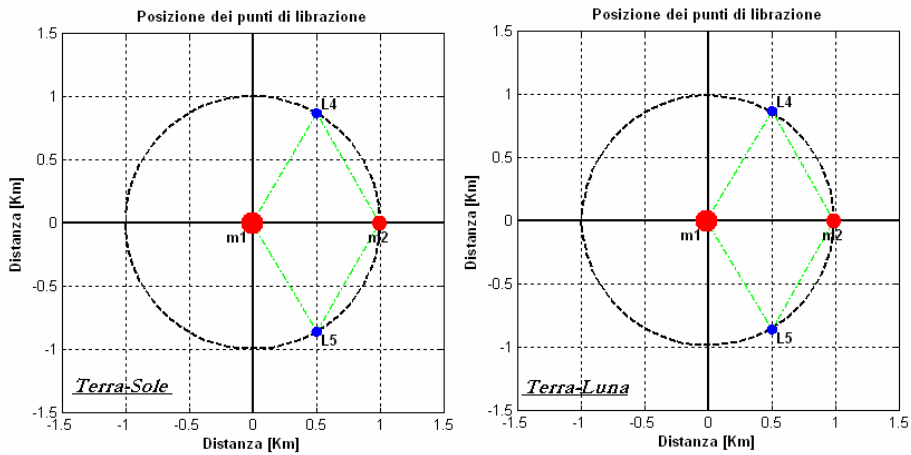


Figura 2.15 - Posizione dei punti Equilaterali

2.12 Linearizzazione delle equazioni del moto

Per un'analisi del moto nei dintorni dei punti di equilibrio e per indagare circa la loro stabilità si rende necessario linearizzare le equazioni del moto ricavate. E' possibile linearizzare le equazioni in maniera classica sviluppando con Taylor fino al 1° ordine nei dintorni di tali punti; quindi sostituire alle coordinate quelle dei punti di equilibrio con l'aggiunta di un termine "perturbativo"^[12].

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_e + \bar{x} \\ y = y_e + \bar{y} \\ z = z_e + \bar{z} \end{array} \right\} \quad \text{in cui} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_i = (x_e, y_e, z_e)^T \\ m_3 L_i = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^T \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Si effettua inoltre una traslazione degli assi per centrarli in questi punti. Le equazioni che si ottengono mediante tale approccio sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2\dot{y} = \left\{ 1 - (1-\mu) \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}_{0_1}^3} - 3 \frac{(x_0 + \mu)^2}{\bar{r}_{0_1}^5} \right) - \mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}_{0_2}^3} - 3 \frac{(x_0 - 1 + \mu)^2}{\bar{r}_{0_2}^5} \right) \right\} \cdot x + \\ \quad + \left\{ 3 \cdot (1-\mu) \cdot \frac{(x_0 + \mu) \cdot y_0}{\bar{r}_{0_1}^5} - 3 \cdot \mu \frac{(x_0 - 1 + \mu) \cdot y_0}{\bar{r}_{0_1}^5} \right\} y \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \left\{ 3 \cdot (1-\mu) \cdot \frac{(x_0 + \mu) \cdot y_0}{\bar{r}_{0_1}^5} - 3 \cdot \mu \frac{(x_0 - 1 + \mu) \cdot y_0}{\bar{r}_{0_1}^5} \right\} \cdot x + \\ \quad + \left\{ 1 - (1-\mu) \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}_{0_1}^3} - 3 \cdot \frac{y_0^2}{\bar{r}_{0_1}^5} \right) - \mu \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}_{0_2}^3} - 3 \cdot \frac{y_0^2}{\bar{r}_{0_2}^5} \right) \right\} \cdot y \\ \ddot{z} = \left\{ \frac{1-\mu}{\bar{r}_{0_1}^3} + \frac{\mu}{\bar{r}_{0_2}^3} \right\} \cdot z \end{array} \right.$$

$$\text{in cui } \bar{r}_{0_1} = \sqrt{(x_0 + \mu)^2 + y_0^2} \quad e \quad \bar{r}_{0_2} = \sqrt{(x_0 - 1 + \mu)^2 + y_0^2} \quad (2.46)$$

2.12.1 Punti collineari

Il procedimento appena esposto è di validità generale, ma per i punti collineari risulta molto più pratico derivare le equazioni linearizzate mediante un “approccio Hamiltoniano”.

Si linearizza, in questo caso, l’Hamiltoniano del sistema e per mezzo delle (2.23) si ricavano le equazioni del moto poi trasformabili in forma Lagrangiana mediante l’anti-trasformata di Legendre (invertendo le 2.22). Per linearizzare l’Hamiltoniano, nel caso bi-dimensionale, attorno a tali punti sono necessari i suoi termini quadratici (quelli del potenziale effettivo) espansi nei dintorni di:

$$(x_e, y_e, p_{x_e}, p_{y_e}) = (x_e, 0, 0, x_e) \quad (2.47)$$

che rappresenta lo stato Hamiltoniano del sistema nei punti di librazione collineari. Si esegue, inoltre una traslazione delle coordinate nei punti di librazione.

La versione linearizzata di H che ne consegue è pertanto la seguente:

$$H_l = \frac{1}{2}[(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2 - ax^2 + by^2]$$

con $a = 2c - 1$ e $b = c - 1$ (2.48)

dove $c = \mu |x_e - 1 + \mu|^{-3} + (1 - \mu) |x_e + \mu|^{-3}$

Da questa le equazioni del moto linearizzate che si ottengono sono dunque:

| Approccio Hamiltoniano | Approccio Lagrangiano |
|--|--------------------------|
| $\dot{x} = \frac{\partial H_l}{\partial p_x} = p_x + y$ | $\dot{x} = v_x$ |
| $\dot{y} = \frac{\partial H_l}{\partial p_y} = p_y - x$ | $\dot{y} = v_y$ |
| $\dot{p}_x = -\frac{\partial H_l}{\partial x} = p_y - x + ax$ | $\dot{v}_x = 2v_y + ax$ |
| $\dot{p}_y = -\frac{\partial H_l}{\partial y} = -p_x - y - by$ | $\dot{v}_y = -2v_x - by$ |

Tabella 2.9 - Equazioni del moto linearizzate

Si ricordi che queste equazioni, come le (2.46), sono scritte in un sistema di riferimento adimensionale, rotante e centrato in L_i .

Mediante questa trasformazione, in virtù della relazione biunivoca fra energia ed Hamiltoniano, si ottiene anche una versione linearizzata dell'energia:

$$E_l = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 - ax^2 + by^2) \quad (2.49)$$

Le superfici che mantengono costante il valore di E_l sono, ovviamente, quelle che mantengono costante E e che passano per i punti di librazione.

Si fa, infine notare che la linearizzazione di H coinvolge, oltre che a μ , anche le coordinate dei punti di equilibrio ed è dunque diversa per ognuno dei tre punti collineari.

Le equazioni linearizzate (2.46) specializzate per i tre punti collineari, ovvero sostituendo $y_e=0$, forniscono esattamente la versione Lagrangiana delle equazioni così ricavate (Tabella 2.8).

La componente z del sistema si riduce, per tutti i punti di equilibrio, semplicemente a (vedi 2.46):

$$\ddot{z} = -c \cdot z \quad (2.50)$$

che rappresenta il puro comportamento armonico di un sistema.

Scritte in forma matriciale le equazioni linearizzate (Tabella 2.8, versione Lagrangiana), con l'aggiunta della componente z , danno:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -b & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Scrivendo l'equazione caratteristica di questo sistema si ottengono sei autovalori dalla forma:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \\ \lambda_{3,4} &= \pm i \sqrt{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} = \pm i \cdot \omega_{xy} \\ \lambda_{5,6} &= \pm i \sqrt{|-c|} = \pm i \cdot \omega_z \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\text{in cui } \beta_1 = 2 - \frac{c}{2} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \sqrt{(2c+1)(c-1)}$$

Poiché per l'instabilità è sufficiente che almeno uno di essi abbia parte reale positiva ($\lambda_{1,2}$) si può dedurre che i tre punti collineari sono di equilibrio *instabile*.

I restanti autovalori, invece, mostrano il comportamento periodico del sistema e saranno utilizzati per la costruzione di orbite periodiche attorno L_1 e L_2 (vedi cap. 3).

Le ω riportate accanto agli autovalori immaginari sono le autofrequenze del moto relative alle coordinate specificate.

Alla medesima conclusione, circa la stabilità dei punti collineari, si può giungere anche studiando il segno della derivata seconda del potenziale effettivo: i punti stazionari sono, infatti, anche i punti critici di tale funzione. La derivata seconde della funzione Ω :

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} = -1 - \frac{1-\mu}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu}{|x-1-\mu|^3} \quad (2.53)$$

Essendo in tale derivazione presenti tutti segni negativi e moduli il suo segno risulta essere sempre negativo; anche con questo approccio, dunque, i punti collineari sono di equilibrio *instabile*.

2.12.2 Punti equilaterali

Procedendo in maniera analoga si specializzano le (2.46) per i due punti equilaterali, ovvero imponendo $y_e=1/2$, $x_e=\sqrt{3}/2$; le equazioni che si ottengono sono dunque:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - \frac{3}{4}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)y = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)x - \frac{9}{4}y = 0 \\ \ddot{z} = -z \end{cases} \quad (2.54)$$

Scrivendo nuovamente il sistema al primo ordine in forma matriciale e ricavandone, dall'equazione caratteristica, gli autovalori, se ne ottengono due nella forma:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}} \quad (2.55)$$

Affinché siano stabili è necessario che la loro parte reale sia nulla e ciò è possibile solo se il radicando più interno risulta reale e minore di uno in maniera tale che il secondo radicando sia interamente negativo e dia, pertanto, un numero immaginario puro. Quindi:

$$1 - 27\mu(1 - \mu) \geq 0 \quad (2.56)$$

Tale equazione è soddisfatta per valori del parametro di massa

$$\mu < 0.03852 \quad \mu > 0.96148 \quad (2.57)$$

Avendo, inoltre, assunto che $0 < \mu < \frac{1}{2}$, ne consegue che i due punti equilaterali sono di equilibrio *stabile* solo se:

$$\mu < 0.03852 \quad (2.58)$$

Può osservarsi dalla tabella 2.2 come questo valore sia decisamente superiore a quelli di μ riportati; i punti equilaterali risultano dunque stabili praticamente per tutti i sistemi a tre corpi di interesse. Tuttavia, considerando l'influsso gravitazionale del Sole sul sistema Terra-Luna, i punti L_4 e L_5 possono risultare instabili^[7].

I punti critici si presentano come i punti stazionari delle creste e delle valli del grafico del potenziale effettivo e presentano, quindi, direzioni lungo le quali un corpo tende ad allontanarsi da questi in seguito ad una piccola perturbazione ed una direzione lungo la quale il corpo perturbato tende a tornare indietro. Tali direzioni sono più facilmente identificabili richiamando la conformazione del potenziale effettivo.

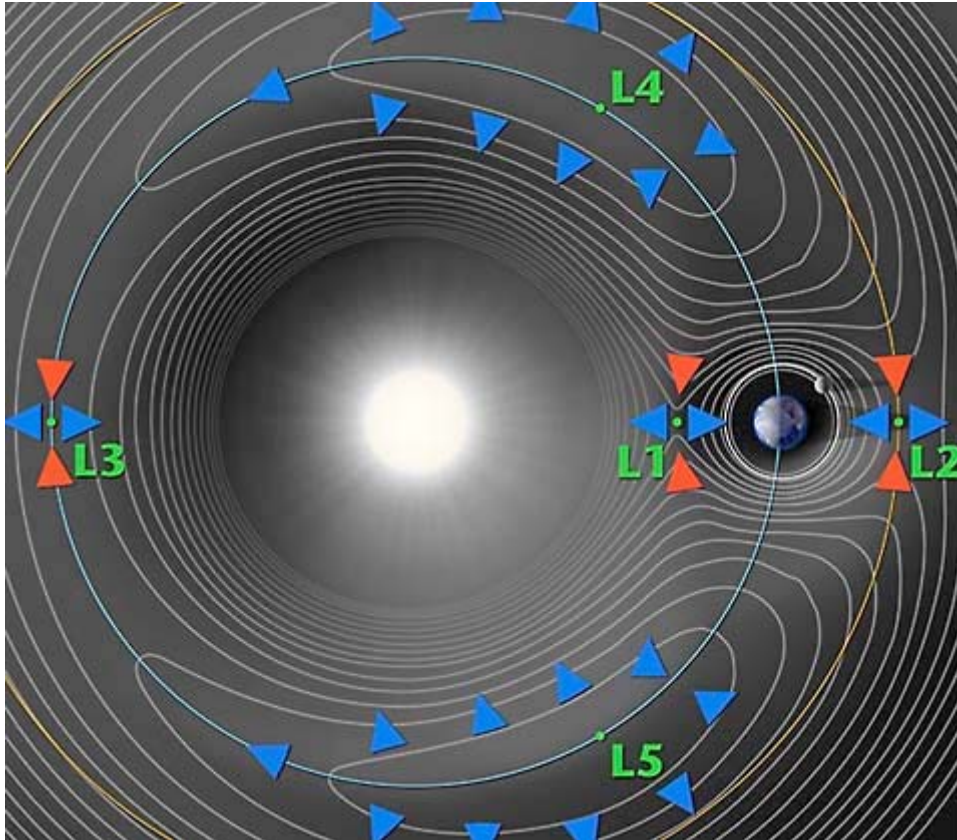


Figura 2.16 - Direzioni di stabilità del potenziale effettivo (le frecce rosse indicano le direzioni lungo le quali un corpo perturbato tende a ritornare verso la posizione di equilibrio, quelle blu le direzioni di allontanamento da questi)

Per dare, infine, un'idea del comportamento dinamico del sistema in tali punti si riporta un esempio di traiettorie che si ottengono nell'ambito di questo modello imponendo come condizioni iniziali quelle dei punti di librazione con velocità nulla.

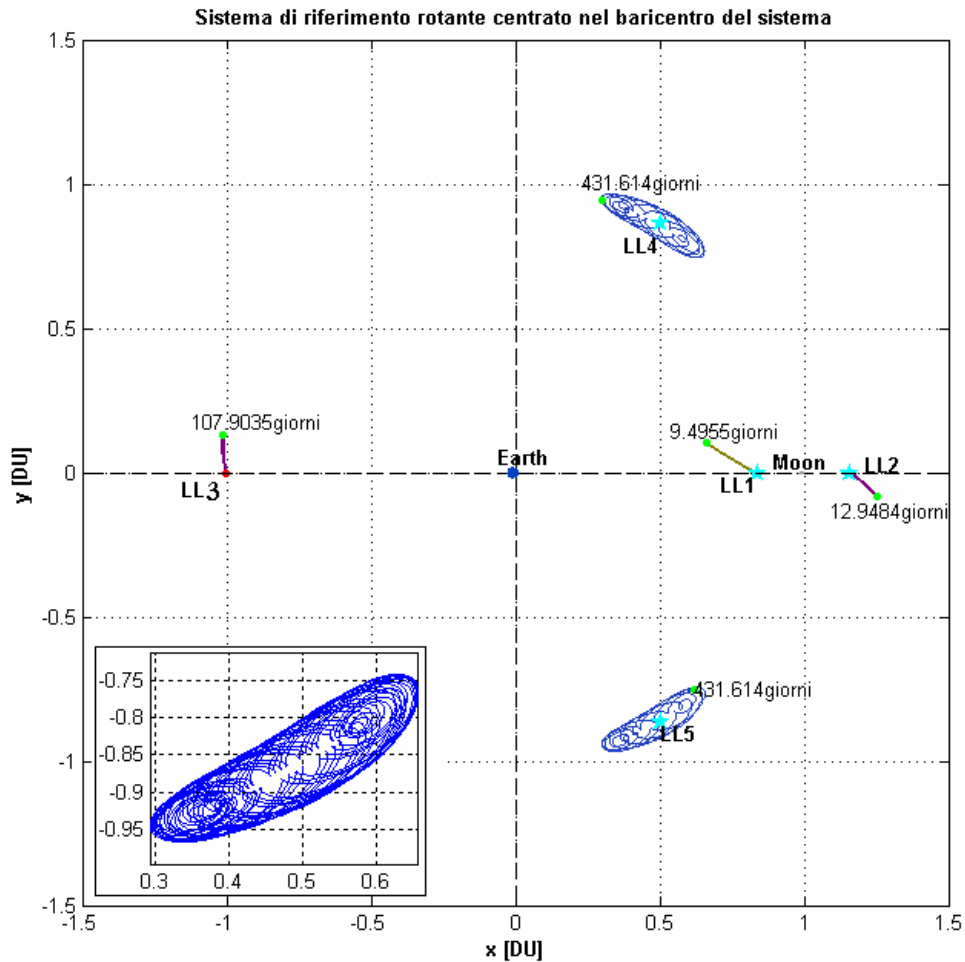


Figura 2.17 - Dinamica dei punti di equilibrio

Da notare la lenta instabilità di L_3 se confrontata con quella di L_1 e L_2 e le orbite attorno a L_4 e L_5 che restano confinate nei dintorni dei punti di equilibrio per un qualunque intervallo di integrazione (confermandone la stabilità). Sono dunque i primi due punti di librazione quelli che presentano le maggiori prospettive per applicazioni pratiche.

L'esempio è stato ricavato nell'ambito del sistema Terra-Luna utilizzando un propagatore a tre corpi la cui implementazione sarà discussa di seguito.

2.13 Geometria della soluzione attorno ai punti di equilibrio

Un'esatta catalogazione delle orbite attorno ai punti d'equilibrio per il CR3BP è ancora oggetto di studio e presenta una gran varietà di orbite, molte delle quali ancora non classificate. Si procederà, dunque, allo studio dello spazio attorno ai punti di librazione per il PCR3BP.

Le equazioni utilizzate saranno dunque quelle di tabella 2.9 e gli autovalori del sistema i primi due delle (2.52).

Con le seguenti posizioni, gli autovalori possono essere scritti più semplicemente.

$$\lambda = \sqrt{\frac{c-2+\sqrt{9\cdot c^2-8\cdot c}}{2}} \quad \nu = \sqrt{\frac{c-2-\sqrt{9\cdot c^2-8\cdot c}}{2}} \quad (2.59)$$

Gli autovalori del sistema assumono dunque la forma: $\pm\lambda, \pm i\nu$.

Dalla relazione geometrica che lega la matrice dei coefficienti (A), un autovalore (β) ed il relativo autovettore (v) è possibile ricavare gli autovettori del sistema.

$$A \cdot v = \beta \cdot v \Rightarrow \begin{cases} u_1 = (1, -\sigma, \lambda, -\lambda \cdot \sigma) \\ u_2 = (1, \sigma, -\lambda, -\lambda \cdot \sigma) \\ w_1 = (1, -i \cdot \tau, i \cdot \nu, \nu \cdot \tau) \\ w_2 = (1, i \cdot \tau, -i \cdot \nu, \nu \cdot \tau) \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\text{In cui: } \sigma = \frac{2 \cdot \lambda}{\lambda^2 + b} > 0 \quad \tau = -\left(\frac{\nu^2 + a}{2 \cdot \nu}\right) < 0 \quad (2.61)$$

Per meglio comprendere la struttura della soluzione nello spazio delle fasi si passa a rappresentare la soluzione in un riferimento i cui assi sono gli autovettori del sistema: u_1, u_2, w_1, w_2 . Le nuove coordinate in tale sistema s'indicheranno con $(\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2)$. Per quel che riguarda la coppia di autovalori complessi (w_1, w_2) si utilizzano come assi i complessi coniugati di questi ($w_1+i \cdot w_2, w_1-i \cdot w_2$).

Un sistema lineare, in un riferimento centrato nei suoi autovettori, prevede una matrice diagonale dei coefficienti con gli autovalori relativi alle variabili come elementi della diagonale; in questo caso, utilizzando i complessi coniugati per due autovettori, la matrice relativa va ridotta nella forma di Jordan.

Il sistema di equazioni diventa, quindi:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda \xi \\ \dot{\eta} = -\lambda \eta \\ \dot{\zeta}_1 = \nu \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = -\nu \zeta_1 \end{cases} \quad (2.62)$$

Il principale vantaggio di tale formulazione è che il sistema (2.62) ammette soluzioni nella forma:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cdot e^{\lambda t} \\ \eta(t) = \eta_0 \cdot e^{-\lambda t} \\ \zeta(t) = \zeta_1(t) + i \cdot \zeta_2(t) = \zeta_0 \cdot e^{-i\nu t} \end{cases} \quad (2.63)$$

In cui le costanti $\xi_0, \eta_0, \zeta_0 = \zeta_1 + i \cdot \zeta_2$ sono le condizioni iniziali.

In questo riferimento anche l'integrale dell'energia assume una forma differente:

$$E_{lin} = \lambda \cdot \xi \cdot \eta + \frac{\nu}{2} \cdot (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \quad (2.64)$$

2.14 Teorema di Moser

Il teorema di Moser si presenta come una generalizzazione del teorema di Lyapunov ed asserisce che tutti i risultati qualitativi deducibili nell'ambito di una trattazione lineare sono estendibili al caso non lineare.

Sia dato un sistema Hamiltoniano, tempo-indipendente, di equazioni differenziali e si supponga che tale sistema presenti un punto di equilibrio non singolare con una coppia di autovalori reali ed una coppia di autovalori immaginari ($\pm\lambda, \pm i\nu$).

Si può assumere, senza perdere in generalità, che le coordinate dello spazio delle fasi ($\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2$) possano essere scelte in maniera tale che H , sviluppato fino al secondo ordine, assuma la forma^[10]:

$$H(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = \lambda \tilde{x}_1 \cdot \tilde{y}_1 + \frac{1}{2} \cdot \nu \cdot (\tilde{x}_2^2 + \tilde{y}_2^2) + O_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \quad (2.65)$$

Nel nostro caso i punti di equilibrio ammettono coordinate del tipo ($\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0$) e le equazioni differenziali sono ottenute da H nella forma (2.23).

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= H_{\tilde{y}_1} = \lambda \cdot \tilde{x}_1 + O_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= -H_{\tilde{x}_1} = -\lambda \cdot \tilde{y}_1 + O_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= H_{\tilde{y}_2} = \nu \cdot \tilde{y}_2 + O_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= -H_{\tilde{x}_2} = \nu \cdot \tilde{x}_2 + O_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le equazioni linearizzate sono semplicemente ottenibili utilizzando la versione linearizzata di H , ovvero includendo i termini di secondo ordine nelle precedenti equazioni. Le soluzioni di queste equazioni linearizzate sono ottenibili (analogamente alle 2.63) nella forma:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{x}_{1_0} \cdot e^{\lambda t} \\ \tilde{y}_1(t) = \tilde{y}_{1_0} \cdot e^{-\lambda t} \\ \tilde{z}(t) = \tilde{x}_2(t) + i \cdot \tilde{y}_2(t) = z_0 \cdot e^{-i\nu t} \end{cases} \quad (2.67)$$

In cui le costanti indicate con il pedice 0 sono le condizioni iniziali.

Tali equazioni ammettono degli integrali (locali) aggiuntivi rispetto all'integrale dell'energia; in particolare sono costanti lungo la soluzione:

$$\triangleright \quad \tilde{x}_1 \cdot \tilde{y}_1 \quad |z|^2 = \tilde{x}_2^2 + \tilde{y}_2^2 \quad (2.68)$$

Il teorema di Moser, dunque, asserisce che in un sistema di riferimento che consenta la scrittura di H nella forma (2.65) vi sono oltre all'energia altre due quantità localmente costanti.

Esistono, quindi, delle espansioni in serie di $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ e $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ che partono con i termini quadratici delle (2.68) e che convergono nei dintorni di ($\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0$).

L'applicazione del teorema di Moser, ad opera di Conley [1969] al PCR3BP stabilisce che lo spazio delle fasi può essere descritto dalle variabili $(\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_2)$, le prime due reali e le altre complesse.

Essendo il punto di equilibrio di coordinate ($\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0$) esiste una trasformazione reale ed analitica che lega le variabili in un sistema di autovettori a quelle generali dello spazio delle fasi in cui è possibile scrivere H nella forma (2.65):

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \xi + O_2(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) \\ \tilde{y}_1 &= \eta + O_2(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) \\ z = \tilde{x}_2 + i \cdot \tilde{y}_2 &= \zeta + O_2(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta})\end{aligned}\tag{2.69}$$

Ed esistono, inoltre, due sviluppi in serie del tipo:

$$\begin{aligned}\alpha &= \lambda + O_1(\chi, |\zeta|^2) \\ \beta &= -i \cdot \nu + O_1(\chi, |\zeta|^2)\end{aligned}\tag{2.70}$$

In questo modo la soluzione delle equazioni linearizzate e trasformate in questo riferimento (che risulta essere appunto quello degli autovettori) sono della forma:

$$\begin{cases} \xi(t) = \xi_0 \cdot e^{t\alpha} \\ \eta(t) = \eta_0 \cdot e^{-t\alpha} \\ \zeta(t) = \zeta_0 \cdot e^{t\beta} \\ \bar{\zeta}(t) = \bar{\zeta}_0 \cdot e^{-t\beta} \end{cases}\tag{2.71}$$

dove si è indicato con il carattere soprascritto il complesso coniugato e con il pedice 0 le condizioni iniziali. I coefficienti di α e β sono rispettivamente reali e complessi ed entrambe sono quantità costanti del moto.

Avendo inoltre asserito che gli sviluppi in serie partono dalle quantità (2.68) che sono localmente costanti, si può dedurre che anche queste sono, in un intorno del punto di equilibrio, costanti; gli sviluppi in serie, infatti, sono espressi come troncamenti di:

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \quad \chi &= \tilde{x}_1 \cdot \tilde{y}_1 = \xi \cdot \eta & |\zeta|^2 = |z|^2 &= \tilde{x}_2^2 + \tilde{y}_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2\end{aligned}\tag{2.72}$$

In questa trattazione si è quindi dedotto che, in un riferimento che ha come assi gli autovettori del sistema, l'integrale dell'energia assume la forma

(2.64) e risulta costante nel suo complesso, e mostra integrali locali, costituiti dai suoi singoli termini (2.72), anch'essi costanti.

2.15 Regioni di equilibrio nello spazio delle fasi

Nello spazio delle posizioni si è interessati allo studio del caso tre (vedi fig. 2.11) poiché è la condizione che permette il libero moto in tutti e tre i reami con la minima energia. La configurazione dello spazio delle posizioni che risulta di più utile applicazione pratica e verso la quale si volgerà questo studio è, dunque, la seguente.

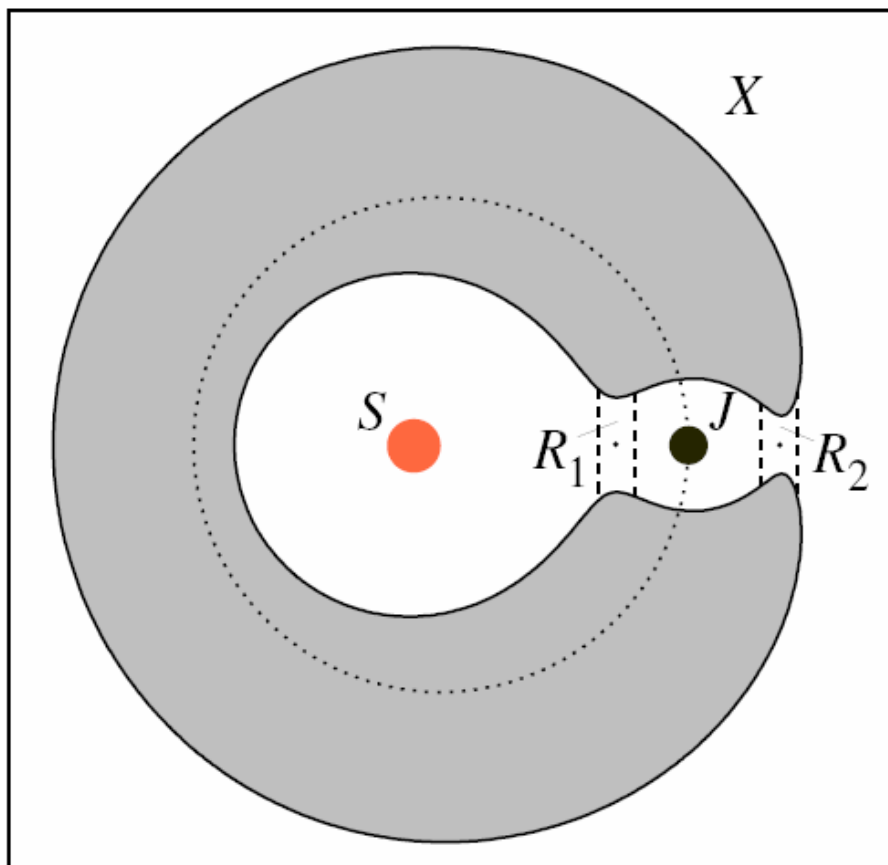


Figura 2.18 - Reami e regioni di equilibrio

Le regioni indicate con R_1 ed R_2 sono le **regioni di equilibrio** ovvero quelle zone sufficientemente vicine ai punti di librazione tali da poter utilizzare le equazioni linearizzate; si ricorda che queste non sono altro che la proiezione nello spazio delle posizioni delle corrispondenti regioni \mathcal{R} delle superfici di energia.

Nel sistema degli autovettori si richiede dunque che tale regione sia delimitata e che il valore dell'energia (trattandosi appunto di una proiezione di una superficie ad energia costante) sia costante^{[13][14]}; quindi:

$$E_l = \varepsilon = \text{cost} \quad e \quad |\eta - \xi| \leq c \quad (2.73)$$

Per ogni valore di $\eta - \xi$ nell'intervallo fissato, l'integrale dell'energia (2.64) assume la forma:

$$\frac{\lambda}{4}(\eta + \xi)^2 + \frac{V}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = \varepsilon + \frac{\lambda}{4}(\eta - \xi)^2 \quad (2.74)$$

Si può riconoscere in questa espressione l'equazione di una sfera; infatti, il termine a destra congloba tutte costanti (come il raggio per la sfera) ed il termine a sinistra fa comparire i quadrati di tre variabili.

La regione \mathcal{R} è quindi omeomorfa al prodotto di una superficie sferica bi-dimensionale e di un intervallo; nel caso spaziale del problema la superficie sferica sarebbe pentadimensionale^[14].

Si fa notare come fissando una relazione fra η e ξ la nuova variabile sia la loro somma.

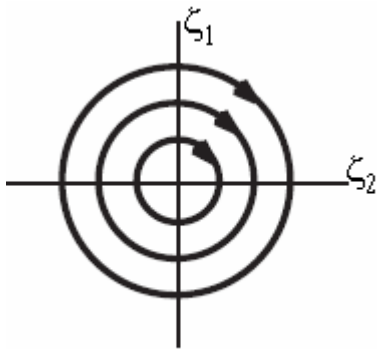
La regione di equilibrio risulta dunque delimitata da due sfere:

- n_1 per la quale $\eta - \xi = c$
- n_2 per la quale $\eta - \xi = -c$

Poiché gli autovalori del sistema linearizzato attorno a tali punti presentano una parte reale ed una immaginaria, la geometria della soluzione nei dintorni dei punti di librazione è sempre data dal prodotto di una parte divergente ed aperiodica (saddle) e di una parte oscillante (center); quest'ultima, in particolare, ammette due modi di oscillazione, uno nel piano ed uno fuori da esso (vedi 2.52).

Avendo affrontato la trattazione bi-dimensionale del problema ci troviamo in uno spazio di \mathcal{R}^4 ; per analizzare il flusso in \mathcal{R} si studia, dunque, la proiezione sul piano (η, ξ) e sul piano (ζ_1, ζ_2) .

La proiezione sul piano i cui assi sono gli autovettori immaginari fornisce l'immagine di circonferenze di diverso raggio trattandosi di moti periodici. Richiamando l'equazione (2.64) e ponendo in essa $\eta\xi = cost$ si ottengono, in funzione dell'energia, le equazioni di tali circonferenze.



Una proiezione sul piano costituito dagli autovettori che forniscono le soluzioni fuori dal piano (2.52) fornirebbe un'immagine analoga.

Più interessante è la proiezione nel piano (η, ξ) ; ciò equivale a porre il secondo termine al secondo membro della (2.64) costante e dunque $\rho = |\zeta|^2 = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = cost$. Quest'ultima non è altro che l'equazione di una circonferenza; ogni punto del piano (η, ξ) è dunque la proiezione di un cerchio. In questo riferimento l'equazione (2.64) si riduce a: $\varepsilon = \lambda \cdot \xi \cdot \eta$

Il moto in questo piano si presenta dunque come iperboli; infatti, essendo $\eta\xi$ un integrale del moto in questa regione deve mantenersi costante.

La regione di equilibrio risulta, dunque, vincolata da due rette (quelle corrispondenti a n_1 e n_2) e da due iperboli (quelle corrispondenti a $|\zeta|^2 = 0$, quindi $\eta \cdot \xi = \varepsilon/\lambda$).

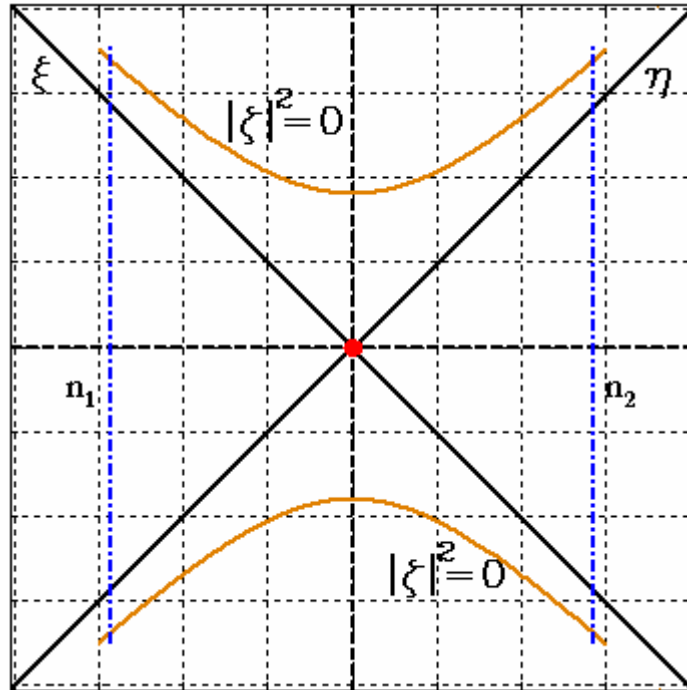


Figura 2.19 - Limiti della regione di equilibrio nel piano (η, ξ)

Il moto si svolge dunque su curve lungo le quali $\eta\xi = \text{cost}$ eccetto che nei casi in cui una delle due si annulla.

Possono, inoltre, verificarsi due casi:

- $\eta\xi > 0 \rightarrow$ il ramo dell'iperbole collega le rette relative a n_1 e n_2 .
- $\eta\xi < 0 \rightarrow$ il ramo dell'iperbole ha entrambi i punti estremi sulla stessa retta che compete a n_1 o n_2 .

L'equazione (2.64) può risciversi come: $|\zeta|^2 = \frac{2}{\nu} \cdot (\varepsilon - \lambda \cdot \eta \cdot \xi)$ (2.75)

Come si osserva:

- imponendo $|\zeta|^2 = 0$, la circonferenza di cui le curve del piano sono la proiezione si riduce ad un punto
- per gli assi, lungo i quali $\eta\xi = 0 \rightarrow \rho = \rho^* = 2 \cdot \varepsilon / \nu$

Possono dunque distinguersi quattro categorie di orbite che racchiudono tutte le possibili traiettorie nella regione di equilibrio:

- Il punto di origine del sistema per il quale $\eta=\xi=0$ corrisponde ad un'orbita periodica; si annullano, infatti, le prime due equazioni (2.63), quelle che contengono i termini divergenti della soluzione (*periodic orbits*).
- Le quattro semirette che corrispondono ai diversi semi-assi del riferimento che annullano solo una delle due equazioni precedenti e danno orbite asintotiche a quelle periodiche (*asymptotic orbits*). Per tempi positivi sono i semi-assi con $\xi=0$ a tendere verso l'orbita periodica, mentre per tempi negativi quelli con $\eta=0$ (2.63).
- Le iperboli che collegano le rette proiezione delle due sfere n_1 e n_2 rappresentano orbite che attraversano la regione di equilibrio da un reame all'altro (*transit orbits*).
- Le iperboli che intersecano due volte la stessa retta di delimitazione corrispondono ad orbite che non riescono ad attraversare la regione di equilibrio e rientrano nel reame da cui provenivano (*non-transit orbits*).

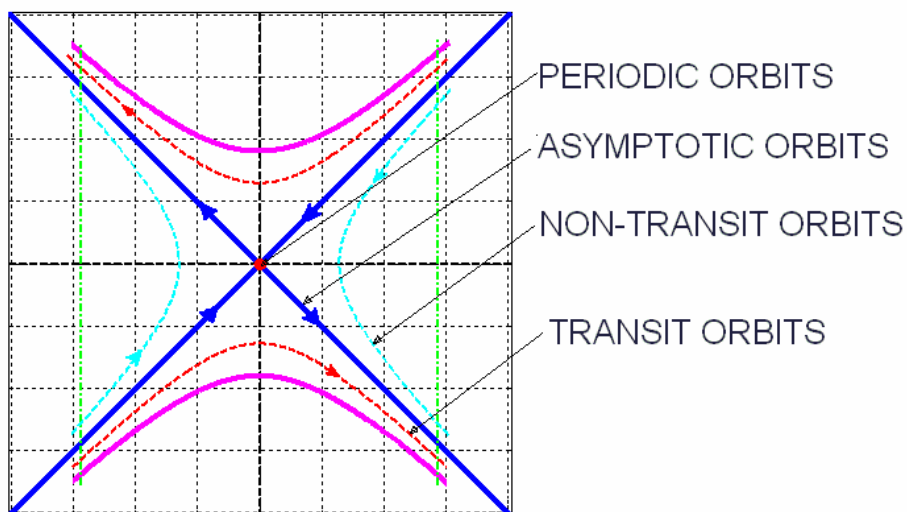


Figura 2.20 - Possibili tipi di orbite nella regione di equilibrio

McGehee nel 1969 diede, partendo dal lavoro di Conley (1968)^[15], una rappresentazione delle regioni di equilibrio che consente una loro più semplice visualizzazione.

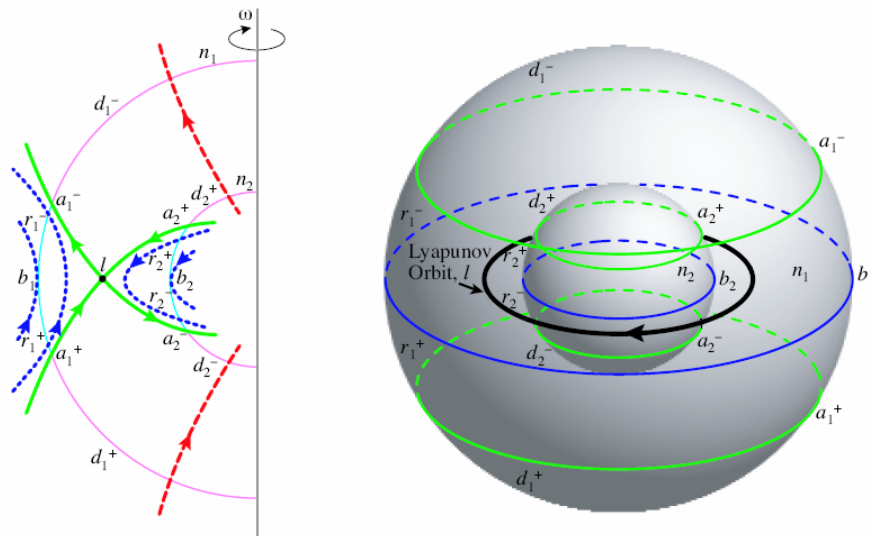


Figura 2.21 - Rappresentazione di McGehee della regione di equilibrio

\mathcal{R} assume, dunque, l'aspetto di un anello sferico ottenuto ruotando attorno ad un asse (ω) la rappresentazione precedente (fig. 2.20).

Le orbite in precedenza descritte sono ancora identificabili, così come le sfere n_1 e n_2 .

Le orbite piane attorno ai punti di librazione sono dette **orbite di Lyapunov** (vedi cap. 3) e può già osservarsi come queste fungano da separatrici fra le orbite che riescono ad attraversare la regione di equilibrio e quelle che ritornano nel reame di provenienza.

Le orbite asintotiche sono quindi porzioni di **manifolds**³ che separano diversi tipi di moto (vedi cap. 4). Le orbite di passaggio si trovano all'interno di questi "tubi", mentre quelle di non transito giacciono all'esterno degli stessi.

³ Il significato generale di *manifolds* è quello di superfici a più dimensioni ed, in questo caso, indicano quelle superfici costituite dalle orbite che asintoticamente tendono ad un'orbita periodica nei dintorni di un punto di librazione. Essi assumono l'aspetto di cilindri con assi curvilinei

Le possibilità che hanno le orbite di passare da un reame ad un altro sono, nella conformazione dello spazio delle posizioni in esame (fig. 2.18), limitate dalla loro capacità di attraversare o meno la regione di equilibrio.

Il flusso in \mathcal{R} presenta dunque quattro tipi di mappature (vedi fig. 2.21):

- Orbite di transito dall'esterno della sfera più esterna all'interno della sfera più interna $\psi_1 = d_1^+ \rightarrow d_2^-$
- Orbite di transito dall'interno della sfera più interna all'esterno della sfera più esterna $\psi_2 = d_2^+ \rightarrow d_1^-$
- Orbite non di transito che restano confinate all'esterno della regione di equilibrio $\psi_3 = r_1^+ \rightarrow r_1^-$
- Orbite non di transito che restano confinate all'interno della regione di equilibrio $\psi_4 = r_2^+ \rightarrow r_2^-$

Si sono indicate con la lettera d le regioni polari delle due sfere di bordo, con la lettera r , invece, le loro regioni equatoriali; il discriminante fra le due è costituito dalla circonferenza di intersezione fra le orbite asintotiche e la sfera stessa. I pedici, inoltre, identificano il numero della sfera e gli apici il flusso uscente (+) oppure entrante (-) da queste.

Le quattro mappature citate sono dei diffeomorfismi ed annoverano tutte le possibilità di moto in funzione della posizione (all'esterno oppure all'interno) dei manifolds.

Si riporta, per concludere, una rappresentazione generale del flusso linearizzato nella regione di equilibrio per il caso spaziale che è data dal prodotto di una *saddle* e di due *center*^[16]; ovvero:

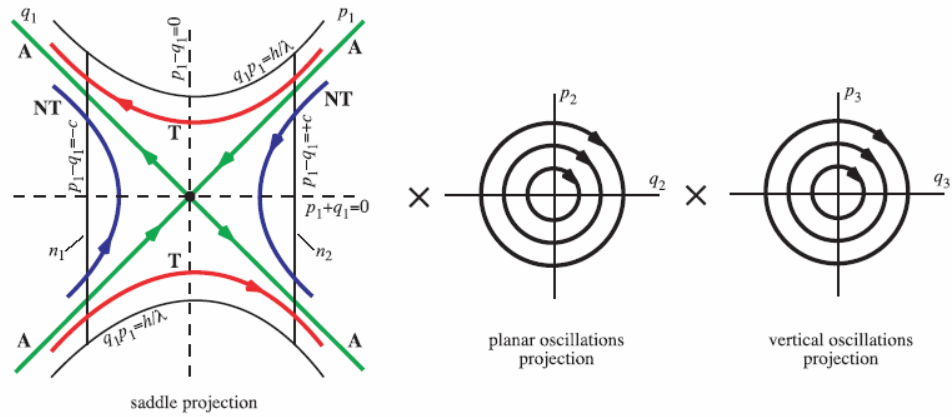


Figura 2.22 - Conformazione generale della regione di equilibrio

2.16 Regioni di equilibrio nello spazio delle posizioni

Avendo studiato la forma della soluzione in \mathcal{R} nello spazio delle fasi se ne può ora analizzare la sua proiezione nello spazio delle posizioni che, nel caso bi-dimensionale, coincide con il piano (x, y) .

Innanzitutto, come si osserva da fig. 2.18, la proiezione R di \mathcal{R} è quella parte del piano che consente il passaggio fra i diversi reami per valori sufficienti di energia.

La soluzione generale del sistema linearizzato (Tabella 2.9) può esprimersi come una combinazione lineare dei vari autovalori ed autovettori nella forma:

$$\bar{X}(t) = [x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)] = \alpha_1 \cdot e^{\lambda t} u_1 + \alpha_2 \cdot e^{-\lambda t} u_2 + 2 \operatorname{Re}(\beta \cdot e^{i \nu t} w_1) \quad (2.76)$$

Questa equazione non è altro che la stessa delle (2.63), ma in un sistema sinodico, dimensionale e piano (x, y) ; ovviamente se ne considera solo la parte reale per la definizione delle orbite.

I coefficienti che compaiono sono determinati dalle condizioni iniziali (analogamente a $\zeta_0, \eta_0, \zeta_0 = \zeta_1 + i \cdot \zeta_2$) e, mentre α_1 ed α_2 sono reali, $\beta = \beta_1 + i \cdot \beta_2$ è complesso.

Analizzando, ad esempio, il comportamento della x , la prima coordinata dello stato del sistema, si ritrovano le stesse classi di orbite precedentemente descritte:

in cui ε è la differenza fra l'energia del sistema e quella del punto di librazione al quale è associata l'orbita periodica; si fa notare come l'ampiezza di queste ellissi tenda a zero al decrescere di ε .

Inoltre la proiezione nello spazio delle posizioni delle orbite asintotiche si rivela essere due strisce centrate attorno agli autovettori reali del sistema. In particolare:

- Per $\alpha_1=0$ le orbite asintotiche si proiettano nella striscia S_1 centrata attorno $u_2=(1,\sigma)$ e delimitata dalle rette

$$y = \sigma \cdot x \pm 2 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot (\sigma^2 + \tau^2)} / e_2$$

- Per $\alpha_2=0$ le orbite asintotiche si proiettano nella striscia S_2 centrata attorno $u_1=(1,-\sigma)$ e delimitata dalle rette

$$y = -\sigma \cdot x \pm 2 \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot (\sigma^2 + \tau^2)} / e_2$$

Si sottolinea, infine, che all'interno di ogni striscia il segno delle α_i dipende dalla direzione della velocità mentre è indipendente all'esterno (tale osservazione è ancora ricavata nel lavoro di Conley ed utilizzata per dedurre diverse delle asserzioni ivi presenti^[15]).

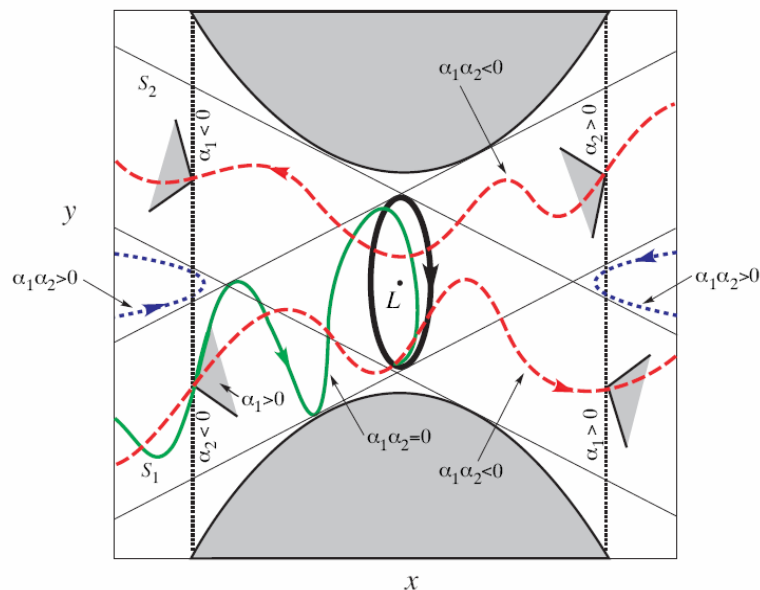


Figura 2.23 - Tipi di orbite nella regione di equilibrio nel piano (x, y)

Studio Preliminare di Missioni Spaziali con Modelli a Tre Corpi

Si riportano di seguito i valori delle costanti, degli autovalori, delle posizioni dei punti di librazione e delle loro energie calcolate per tre dei sistemi a tre corpi di maggior interesse.

| Sistema Terra-Sole | Sistema Terra-Luna | Sistema Sole-Giove |
|--|--|---|
| XL ₁ = 0.98999 XL ₂ = 1.0101 | XL ₁ = 0.83735 XL ₂ = 1.1553 | XL ₁ = 0.93238 XL ₂ = 1.0688 |
| E ₁ = -1.5005 E ₂ = -1.5004 | E ₁ = -1.6002 E ₂ = -1.5921 | E ₁ = -1.5199 E ₂ = -1.5192 |
| ---PUNTO L ₁ --- | ---PUNTO L ₁ --- | ---PUNTO L ₁ --- |
| c= 4.0611 a= 9.1222 b= 3.0611 λ= 2.5327 ν= 2.0865 τ= -3.2293 σ= 0.53457 k= 72.5496 B= 0.0083017 A= -0.026808 | c= 5.1754 a= 11.3508 b= 4.1754 λ= 2.9416 ν= 2.3404 τ= -3.5952 σ= 0.45861 k= 118.8921 B= 0.006485 A= -0.023315 | c= 4.4482 a= 9.8964 b= 3.4482 λ= 2.6819 ν= 2.1782 τ= -3.3608 σ= 0.50408 k= 87.3835 B= 0.0075643 A= -0.025422 |
| ---PUNTO L ₂ --- | ---PUNTO L ₂ --- | ---PUNTO L ₂ --- |
| c= 3.9405 a= 8.8811 b= 2.9405 λ= 2.4843 ν= 2.057 τ= -3.1872 σ= 0.54526 e ₂ = 68.205 B= 0.008562 A= -0.027289 | c= 3.209 a= 7.4179 b= 2.209 λ= 2.1673 ν= 1.8677 τ= -2.9197 σ= 0.62764 e ₂ = 44.6375 B= 0.010584 A= -0.030901 | c= 3.6244 a= 8.2489 b= 2.6244 λ= 2.3527 ν= 1.9776 τ= -3.0744 σ= 0.57666 e ₂ = 57.4332 B= 0.0093305 A= -0.028685 |

Tabella 2.10 - Valori delle costanti per alcuni sistemi a tre corpi

2.17 “Twisting” delle mappature

Dalle equazioni (2.63) è possibile dedurre che

$$\frac{d}{dt} \arg(\zeta) = -\nu \quad (2.79)$$

La variazione dell'argomento di ζ per le quattro mappature è proporzionale all'inverso del tempo (infatti l'autofrequenza è a questo strettamente correlata) necessario per passare dal dominio al codominio. Al tendere di queste orbite a quelle asintotiche ($|\zeta|^2 \rightarrow \infty$) il tempo tende all'infinito.

Si consideri, ad esempio, il secondo diffeomorfismo. Al tempo 0 ci si trova, dunque, su d_2^+ in cui:

$$\eta_0 - \xi_0 = +c \quad (2.80)$$

Dopo il tempo T , sufficiente per passare dal dominio ad codominio di ψ_2 , la mappatura ha portato il punto su d_1^- ; si ottiene, quindi:

$$\eta(T) - \xi(T) = \eta_0 \cdot e^{-\lambda T} - \xi_0 \cdot e^{\lambda T} = -c \quad (2.81)$$

Eliminando c dalle precedenti e risolvendo per T si ottiene:

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\eta_0}{\xi_0} \quad (2.82)$$

L'integrale dell'energia fornisce, inoltre:

$$\xi_0 \eta_0 = \frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{\nu}{2 \cdot \lambda} \cdot |\zeta|^2 = \frac{\nu}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{2 \cdot \varepsilon}{\nu} - |\zeta|^2 \right) = \frac{\nu}{2 \cdot \lambda} \cdot (\rho^* - \rho) \quad (2.83)$$

Unendo le (2.82) e (2.83) si ottiene:

$$T = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\ln \frac{2 \cdot \lambda \cdot \eta_0^2}{\nu \cdot (\rho^* - \rho)} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\ln \frac{2 \cdot \lambda \cdot \eta_0^2}{\nu} - \ln(\rho^* - \rho) \right) \quad (2.84)$$

Questa equazione implica che una circonferenza di raggio arbitrario $\rho = |\zeta|^2$ appartenente al dominio della mappatura impiega un tempo per raggiungere il condominio che tende a $-\infty$ per $\rho \rightarrow \rho^*$.

Il comportamento del flusso in \mathcal{R} è, quindi, di tipo spiraleggiante; in altre parole l'immagine di un punto mediante queste mappature effettua tante più spirali quanto più si avvicina ad una delle circonferenze che identificano l'intersezione fra le orbite asintotiche e le sfere che delimitano \mathcal{R} .

Nello spazio delle posizioni ciò implica che un'orbita impiega tanto più tempo per attraversare la regione di equilibrio o per esser rimandata nel reame di provenienza e risulta tanto più distorta quanto più si avvicina alla superficie dei manifolds nell'attraversare R .

ORBITE PERIODICHE

L'intento del capitolo è quello di derivare le diverse soluzioni periodiche esistenti in un modello ristretto a tre corpi; determinare i parametri liberi e quelli dipendenti che rappresentano, in effetti, i vincoli di missione imponibili per tali orbite. Si ripercorreranno dapprima le vie dei differenti approcci analitici e, successivamente, si descriveranno metodi numerici.

3.1 Introduzione

Avendo dunque dimostrato l'esistenza di una parte periodica della soluzione all'interno della regione di equilibrio, si passa ad analizzare la conformazione delle diverse orbite in questa zona.

Benché sia possibile ottenere orbite di Lyapunov di ampiezza finita, esse non risultano molto utili per le applicazioni spaziali poiché non ammettono alcun tipo di moto fuori dal piano.

Come già detto i punti di interesse per le applicazioni sono L_1 e L_2 poiché l'intento è quello di sfruttare la loro instabilità per ottenere traiettorie a

bassa energia, ovvero traiettorie che con piccole manovre orbitali possano soddisfare i vincoli di missione.

Si richiama la geometria dei punti di librazione e si sottolinea che la nomenclatura utilizzata anteporrà all'identificativo del punto di Lagrange l'iniziale (in inglese) del primario più piccolo.

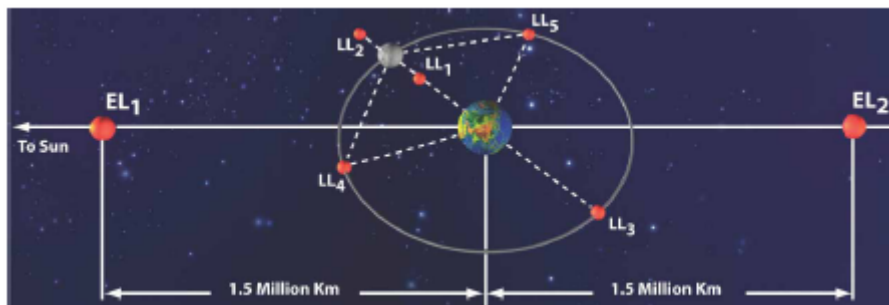


Figura 3.1 - Posizione dei punti di Librazione

Uno *spacecraft* posizionato attorno ad EL_1 deve, ad esempio, ammettere un moto al di fuori del piano per evitare la zona di esclusione definita dal disco solare che rende impossibili le comunicazioni con la Terra. Collocato attorno ad EL_2 , invece, necessita di un moto fuori del piano per evitare le eclissi, oppure di un moto tridimensionale attorno a LL_2 che renda possibili le comunicazioni dirette fra la Terra e la faccia nascosta della Luna.

La necessità di uno studio di orbite periodiche nel CR3BP anziché nel PCR3BP fu già sottolineata da Farquar negli anni '60^[17] che dimostrò come per ampiezze fuori dal piano maggiori di un certo valore minimo è possibile costruire orbite periodiche completamente a tre dimensioni.

Trattandosi comunque di un problema che non ammette soluzione analitica, intrinsecamente non lineare e molto sensibile alle condizioni iniziali, la costruzione di tali orbite si presenta alquanto complessa; Richardson nel '79 propose un approccio approssimato e sistematico^{[18][19]}.

Si accenna fin d'ora che attorno ad ogni punto di librazione esiste una famiglia di orbite periodiche ed instabili che possono essere di tre tipi:

- Orbite planari (*Orbite di Lyapunov*).
- Orbite che ammettono una piccola escursione fuori del piano; per le quali le autofrequenze nel piano e fuori da esso sono differenti (vedi equazioni (2.52)) (*Orbite Lissajous*).

- Orbite completamente tridimensionali, con $\omega_z = \omega_{xy}$ (vedi equazioni (2.52)) (**Orbite Halo¹**).

3.2 Orbite Halo: approssimazione di Richardson

Le orbite periodiche attorno ai punti di librazione (ed in generale in ogni sistema Hamiltoniano) si presentano come famiglie che sono parametrizzabili in funzione di una qualche variabile e non come orbite singole; per identificare un'orbita periodica bisogna, quindi, definire la famiglia cui essa appartiene^[20].

Per il caso delle orbite Halo la scelta di parametrizzarle in funzione dell'ampiezza fuori dal piano (A_z) consente di formulare configurazioni che soddisfano diversi vincoli di missione.

Si richiamano le equazioni del moto linearizzate e scritte in un sistema centrato nel punto di librazione ((2.51) riscritte al secondo ordine):

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2 \cdot \dot{y} - a \cdot x = 0 \\ \dot{y} + 2 \cdot \dot{x} + b \cdot y = 0 \\ \ddot{z} + c \cdot z = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Gli autovalori di tale sistema, come dimostrato nel paragrafo 2.12, sono due reali e quattro immaginari; la presenza della coppia reale ($\pm\lambda$) fornisce la parte divergente della soluzione per tempi positivi (essendo di segno opposto), mentre le coppie immaginarie (coniugate) la parte periodica ($\pm i\nu$ per gli autovalori nel piano; $\pm i\zeta$ per gli autovalori fuori dal piano).

Imponendo, quindi, come condizioni iniziali del moto solo la parte periodica la soluzione dovrebbe risultare confinata attorno ai punti di librazione.

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\nu t) + A_2 \sin(\nu t) \\ y &= -k \cdot A_1 \sin(\nu t) + k \cdot A_2 \cos(\nu t) \\ z &= B_1 \sin(\zeta t) + A_2 \cos(\zeta t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹ Le orbite Halo prendono il loro nome dal fatto che, se viste dalla Terra, quelle attorno ad EL_1 sembrano disegnare un'aureola attorno al Sole.

Poiché si ricercano soluzioni che ammettano ampiezze fuori del piano e nel piano confrontabili, le autofrequenze relative a x - y e z devono essere paragonabili; in particolare si ricercano soluzioni per le quali queste siano uguali.

Le ampiezze nel piano e quelle fuori del piano devono essere quindi sufficienti affinché $v/\zeta \in \mathbb{R}$; si considererà solo il caso in cui queste siano uguali. La soluzione linearizzata che si ricerca è dunque del tipo:

$$\begin{aligned} x &= -A_x \cos(vt + \phi) \\ y &= kA_x \sin(vt + \phi) \\ z &= A_z \sin(vt + \psi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si effettua un'ulteriore adimensionalizzazione (oltre quella del paragrafo 2.4) prendendo come unitarie le distanze dei primari dai punti di librazione. Si utilizzano, quindi, coordinate adimensionali del tipo:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\text{dist. di } m_2 \text{ da } L_1}{\text{dist. di } m_2 \text{ da } m_1} = \frac{r_1}{DU} = |r_1| \\ \gamma_2 &= \frac{\text{dist. di } m_2 \text{ da } L_2}{\text{dist. di } m_2 \text{ da } m_1} = \frac{r_2}{DU} = |r_2| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si parte con il definire nuovamente il Lagrangiano del sistema in funzione dei polinomi di Legendre di prima specie con argomento x/ρ (vedi appendice B) in cui ρ è il vettore posizione di m_3 rispetto al punto di librazione: $\rho = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$. In tale formulazione L diventa:

$$L = \frac{1}{2} \cdot (\rho^* \cdot \rho^*) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot \rho^n \cdot P_n(x/\rho) \quad (3.5)$$

In essa l'asterisco indica le derivazioni rispetto ad una variabile indipendente legata al tempo dal moto medio (n_1), ossia le derivate rispetto a $s = n_1 \cdot t$. Le costanti c_n dipendono solo dal punto di librazione in esame e dal parametro di massa; sono fornite mediante espressioni ricorsive, espresse in funzione di γ_1 e γ_2 , in n e per $n=2$ si ottiene proprio c (vedi 2.48).

L'applicazione dell'equazione di Eulero-Lagrange (2.11) fornisce le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{aligned}
 x^{**} - 2 \cdot y^* - a \cdot x &= \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \cdot c_{n+1} \cdot \rho^n \cdot P_n(s/\rho) \\
 y^{**} + 2 \cdot x^* + b \cdot y &= \sum_{n=3}^{\infty} c_n \cdot y \cdot \rho^{n-2} \cdot \tilde{P}_n(x/\rho) \\
 z^{**} + c \cdot z &= \sum_{n=3}^{\infty} c_n \cdot z \cdot \rho^{n-2} \cdot \tilde{P}_n(x/\rho)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\text{nelle quali: } \tilde{P}_n(x/\rho) = \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} (3+4k-2n) P_{n-2k-2}(x/\rho) \tag{3.7}$$

Tali equazioni sono facilmente implementabili mediante le relazioni ricorsive dei polinomi di Legendre (vedi appendice B), i quali esprimono, in effetti, i termini non lineari, e portano ad equazioni di successiva approssimazione.

Assumendo che A_x ed A_z siano sufficientemente grandi da consentire ai termini non lineari del sistema di creare autofrequenze uguali, le equazioni del moto possono dunque essere riscritte come:

$$\begin{aligned}
 x^{**} - 2 \cdot y^* - a \cdot x &= 0 \\
 y^{**} + 2 \cdot x^* + b \cdot y &= 0 \\
 z^{**} + \nu^2 \cdot z &= 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nella componente z di queste, il quadrato dell'autovalore ha sostituito la costante c (come può osservarsi confrontando con le 3.1); si introduce, quindi, una correzione Δ che tenga conto della differenza delle due e che andrebbe aggiunta all'ultima delle (3.6) per la costruzione di

approssimazioni successive: $z^{**} + \nu^2 \cdot z = \sum_{n=3}^{\infty} c_n \cdot z \cdot \rho^{n-2} \cdot \tilde{P}(x/\rho) + \Delta \cdot z$. Si assume inoltre che l'ordine di grandezza di tale correzione sia quello di A_z^2 .

Per rimuovere i termini secolari che compaiono come risultato delle procedure di successiva approssimazione si introduce, la variabile $\tau = \omega \cdot s$. Con ω si è indicata la correzione in frequenza, dipendente dal grado di approssimazione, esprimibile in generale come:

$$\omega = 1 + \sum_{n \geq 1} \omega_n \quad \text{con } \omega_n < 1 \tag{3.9}$$

Ogni ω_n va scelta durante lo sviluppo della soluzione in maniera idonea appunto per rimuovere ogni termine secolare così come esso compare.

L'applicazione di una correzione in frequenza è un'applicazione di un metodo perturbativo: il metodo di Lindsted-Poincaré^[21]. L'idea base è quella di ricercare un parametro nel problema fisico che sia alterato dalle perturbazioni e quindi espandere sia le variabili dipendenti sia questo parametro in serie di potenze delle perturbazioni; ciò porta ad effettuare correzioni nella soluzione dovute ai termini non lineari.

Sviluppando le equazioni (3.8), ovvero i relativi polinomi di Legendre, fino al terzo ordine e riscrivendole in funzione della nuova variabile τ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \cdot x'' - 2 \cdot \omega \cdot y' - a \cdot x &= \\
 &= \frac{3}{2} \cdot c_3 \cdot (2 \cdot x^2 - y^2 - z^2) + 2 \cdot c_4 \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 - 3 \cdot z^2) + O_4 \\
 \omega^2 \cdot y'' + 2 \cdot \omega \cdot x' + b \cdot y &= \\
 &= -3 \cdot c_3 \cdot x \cdot y - \frac{3}{2} \cdot c_4 \cdot y \cdot (4 \cdot x^2 - y^2 - z^2) + O_4 \\
 \omega^2 \cdot z'' + \nu^2 \cdot z &= \\
 &= -3 \cdot c_3 \cdot x \cdot z - \frac{3}{2} \cdot c_4 \cdot z \cdot (4 \cdot x^2 - y^2 - z^2) + \Delta \cdot z + O_4
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

in cui si sono indicate con gli apici le derivate rispetto a τ .

Approssimazioni superiori al terzo ordine si rivelano un processo complesso e difficile.

Dalle precedenti le equazioni soluzione nella forma cercata (3.3) sono ottenibili sostituendo:

$$\triangleright t \rightarrow \tau \quad k = (\nu^2 + 1 + 2 \cdot c) / 2 \cdot \nu = 2 \cdot \nu / (\nu^2 + 1 - c) \tag{3.11}$$

Vanno quindi determinate le entità delle correzioni in frequenza necessarie per annullare i termini secolari che porterebbero ad un moto divergente della soluzione.

Per le equazioni al primo ordine non è necessaria alcuna correzione, mentre per il secondo ordine la correzione è funzione delle ampiezze dell'orbita; ovvero:

$$\triangleright \omega_1 = 0 \quad \omega_2 = s_1 \cdot A_x^2 + s_2 \cdot A_z^2 \tag{3.12}$$

Le costanti s_1 e s_2 sono riportate in appendice C.

I termini secolari nelle equazioni del terzo ordine non sono rimuovibili specificando semplicemente una correzione in frequenza, ma è necessario specificare un legame fra le ampiezze dell'orbita e le fasi iniziali:

$$\triangleright l_1 \cdot A_x^2 + l_2 \cdot A_z^2 + \Delta = 0 \qquad \psi = \phi + \frac{n \cdot \pi}{2} \quad (3.13)$$

Le costanti l_1 e l_2 sono riportate in appendice C.

Tali vincoli per i parametri nel piano e per quelli fuori da esso sono il risultato indiretto dell'impossibilità di scegliere in maniera arbitraria le condizioni iniziali.

Si osservi come la dipendenza di A_x da A_z è di tipo parabolico avendo imposto che l'ordine di grandezza di Δ , sia A_z^2 . Il legame fra le due ampiezze nel piano è, invece, lineare ed è determinato dalla costante k . Si riportano di seguito gli andamenti per le dipendenze dalle ampiezze nel piano in funzione di quella fuori del piano, che, si ricorda, è stata scelta come variabile indipendente, sia per il sistema Terra-Sole che per quello Terra-Luna (confrontabili con quanto riportato in [22], [23]).

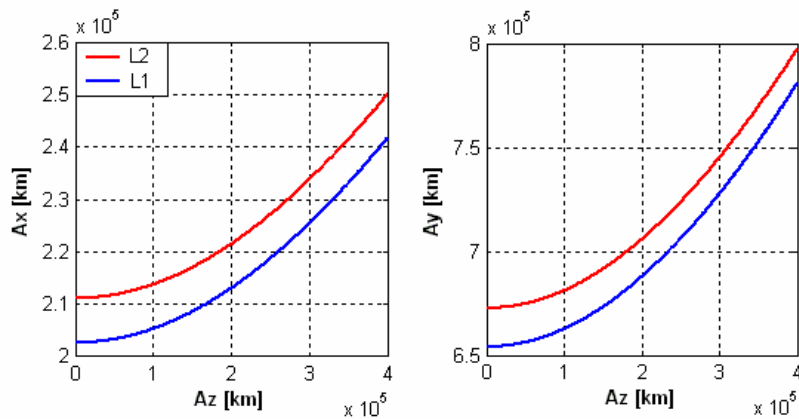


Figura 3.2 - Andamento di A_x ed A_y in funzione di A_z per il sistema Terra-Sole

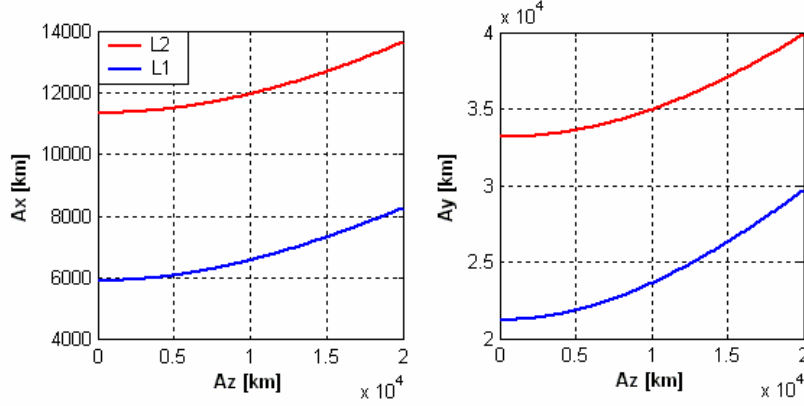


Figura 3.3 - Andamento di A_x ed A_y in funzione di A_z per il sistema Terra-Luna

Utilizzando questi ultimi vincoli nelle (3.10), le equazioni approssimate al terzo ordine per ottenere orbite periodiche sono:

$$\begin{aligned}
 x &= a_{21} \cdot A_x^2 + a_{22} \cdot A_z^2 - A_x \cdot \cos(\tau_1) + (a_{23} \cdot A_x^2 - a_{24} \cdot A_z^2) \cdot \cos(2 \cdot \tau_1) + \\
 &\quad + (a_{31} \cdot A_x^3 - a_{32} \cdot A_x \cdot A_z^2) \cdot \cos(3 \cdot \tau_1) \\
 y &= k \cdot A_x \cdot \sin(\tau_1) + (b_{21} \cdot A_x^2 - b_{22} \cdot A_z^2) \cdot \sin(2 \cdot \tau_1) + \\
 &\quad + (b_{31} \cdot A_x^3 - b_{32} \cdot A_x \cdot A_z^2) \cdot \sin(3 \cdot \tau_1) + (b_{33} \cdot A_x^3 + (b_{34} - b_{35}) A_x \cdot A_z^2) \cdot \sin(\tau_1) \\
 z &= \delta_n \cdot A_z \cdot \cos(\tau_1) + \delta_n \cdot d_{21} \cdot A_x \cdot A_z \cdot (\cos(2 \cdot \tau_1) - 3) + \\
 &\quad + \delta_n \cdot (d_{32} \cdot A_z \cdot A_x^2 - d_{31} \cdot A_z^3) \cdot \cos(3 \cdot \tau_1)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

La variabile indipendente (il tempo) è stata ulteriormente trasformata mediante:

$$\tau_1 \triangleq \nu \cdot \tau + \phi \tag{3.15}$$

Le costanti sono riportate in appendice C.

La funzione δ_n è una semplice funzione di switch ($\delta_n = \pm 1$) e serve per identificare i due tipi di orbite Halo che possono presentarsi. Risultano infatti definibili orbite di classe I ($\delta_n = +1$) e classe II ($\delta_n = -1$); appartengono alla prima categoria quelle orbite che proiettano una curva a tangente negativa sul piano x - z , mentre appartengono alla seconda categoria orbite la cui proiezione sul medesimo piano ha tangente positiva; si tratta, in effetti, di orbite che hanno una A_z positiva o negativa.

Imponendo nulla l'ampiezza fuori del piano nelle (3.13), si può ottenere il valore minimo che soddisfi tale relazione e coincida con il minimo necessario dell'ampiezza nel piano, consentendo l'esistenza di questo tipo di orbite:

$$A_{x_{minimum}} = \sqrt{\left| \frac{\Delta}{l_1} \right|} \quad (3.16)$$

Per il caso di orbite Halo attorno EL_1 ed EL_2 , il minimo valore di A_x è all'incirca il 14% della distanza fra Terra e primo punto di Lagrange, il che coincide ad un'ampiezza di circa 200.000 km .

Si sono ottenute diverse orbite Halo mediante tale procedimento analitico; se ne riportano di seguito le più rappresentative.

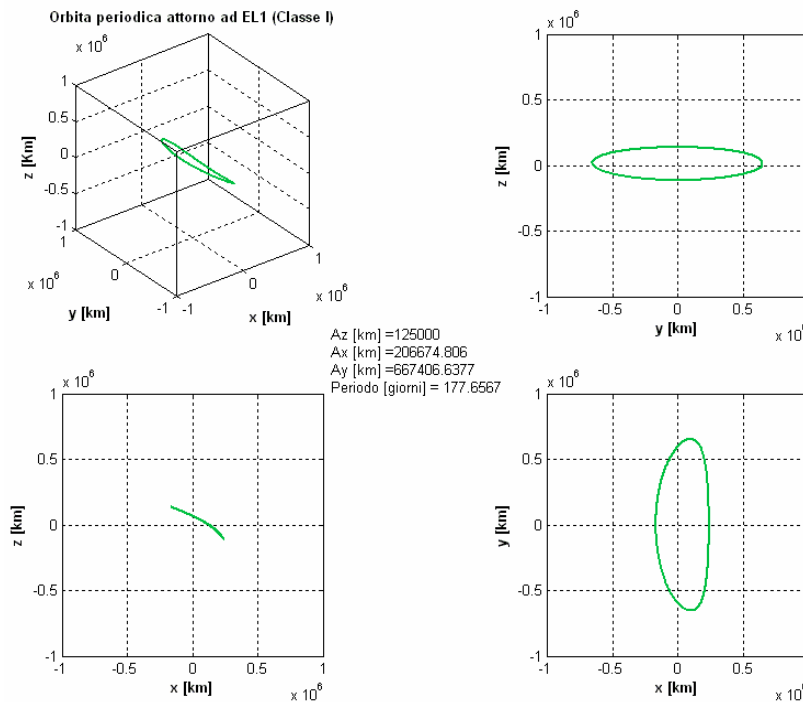


Figura 3.4 - Orbite Halo classe I attorno ad EL_1

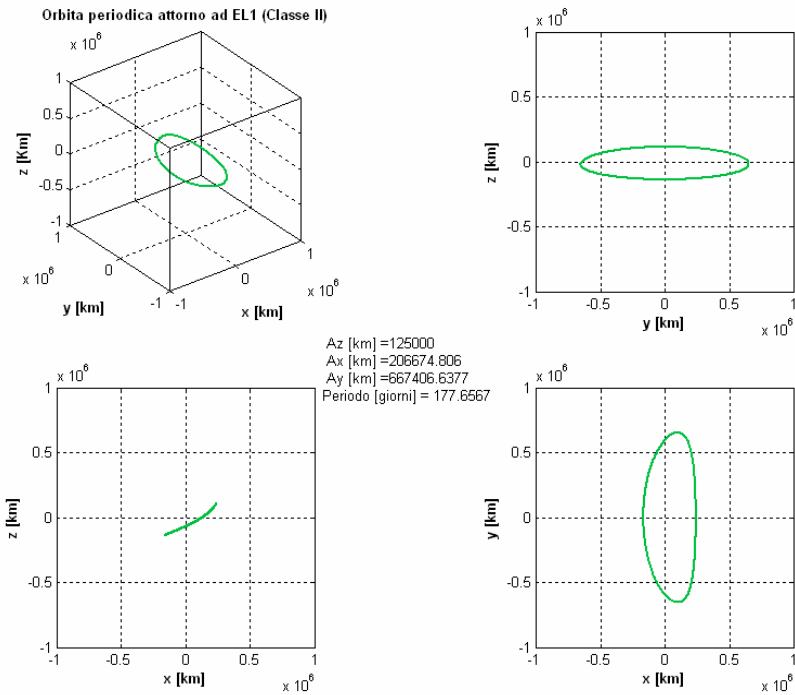


Figura 3.5 - Orbite Halo classe II attorno ad EL_1

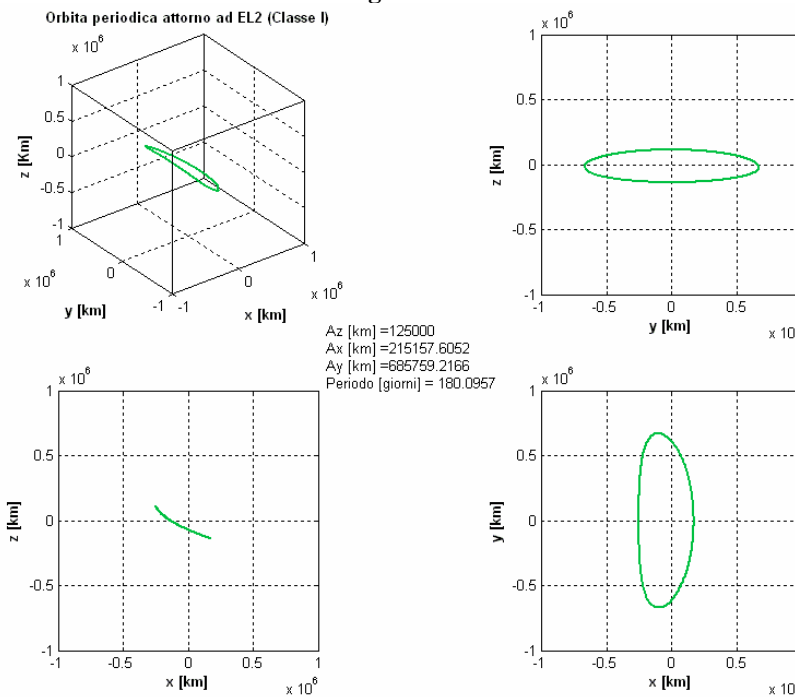


Figura 3.6 - Orbite Halo classe I attorno ad EL_2

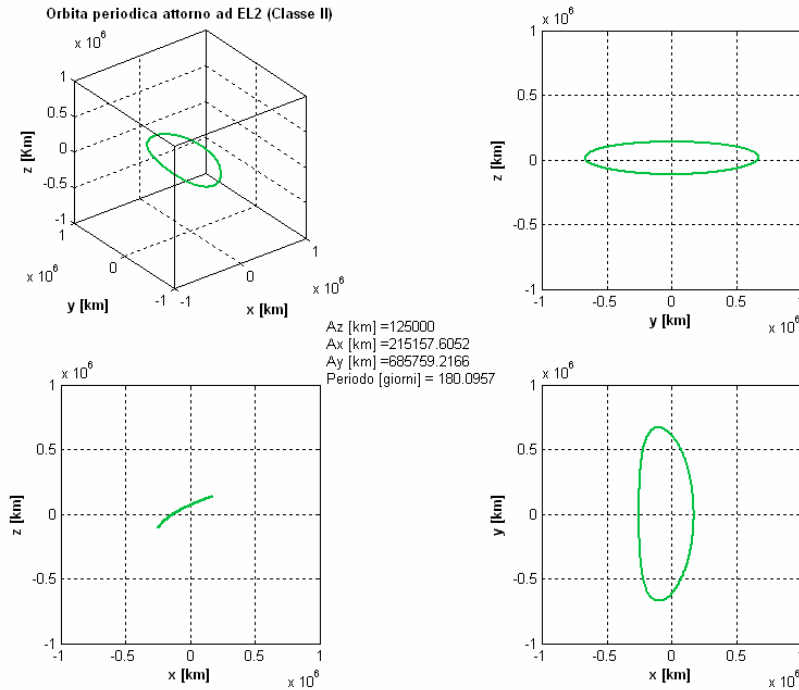


Figura 3.7 - Orbite Halo classe II attorno ad EL_2

Utilizzando le relazioni (3.13) è possibile, inoltre, determinare i periodi di queste orbite in funzione della ampiezza fuori dal piano che risultano forniti dalla relazione:

$$T = 2 \cdot \pi / \nu \cdot \omega \cdot n \quad (3.17)$$

Si osservi come tale espressione non sia altro che il rapporto fra un giro e la velocità angolare con cui questo viene percorso, corretta della solita correzione in frequenza, il tutto espresso ovviamente in unità normalizzate.

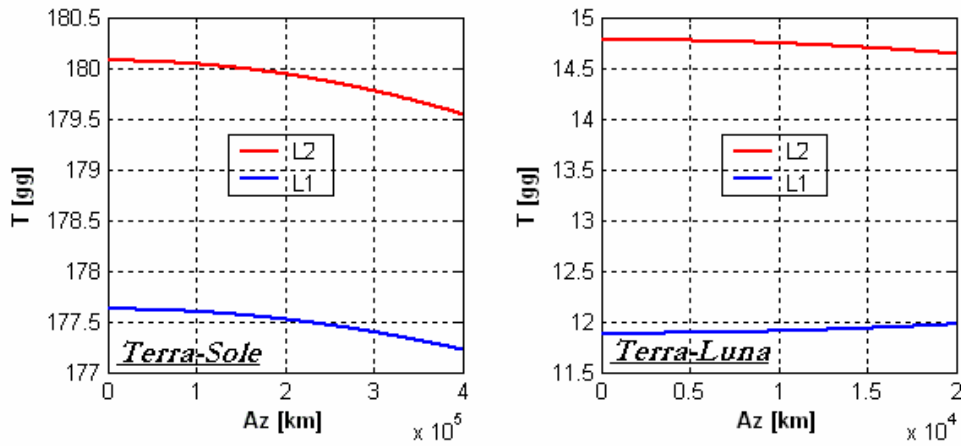


Figura 3.8 - Periodi orbitali in funzione di A_z

Si noti come questi periodi corrispondono all'incirca alla metà del periodo di rivoluzione di m_2 attorno a m_1 (ovvero dei primari attorno al loro centro di massa).

Al crescere dell'ampiezza di queste orbite i termini secolari diventano sempre più forti e ne risulta una forma che tende a distorcersi all'aumentare dell'ampiezza; ciò è dovuto all'influsso sempre maggiore di m_2 che diventa dominante ai limiti della regione di equilibrio ed è anche la causa della perdita di periodicità all'infuori di questa.

Capitolo III - Orbite Periodiche

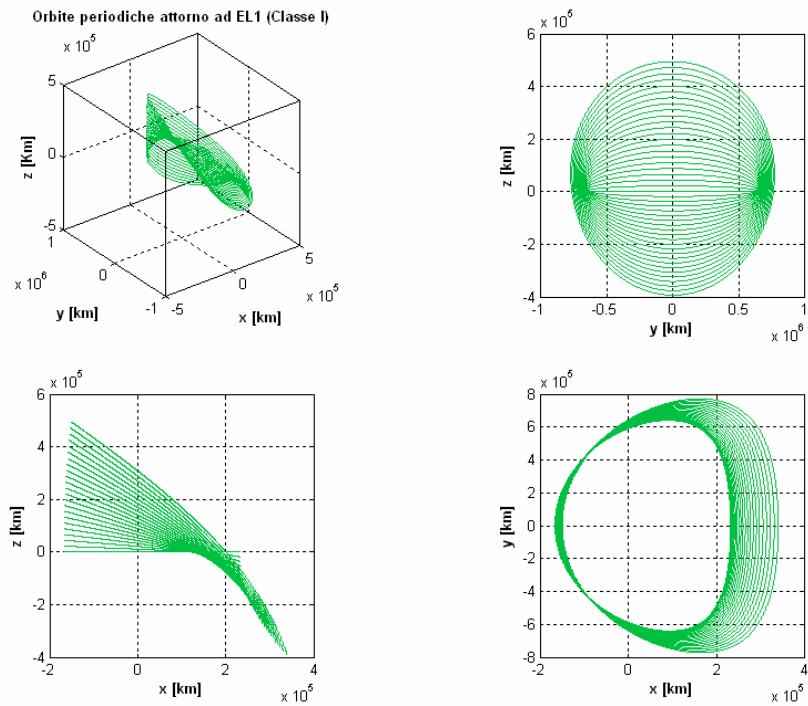


Figura 3.9 - Orbite Halo classe I attorno ad EL_1 per ampiezze crescenti

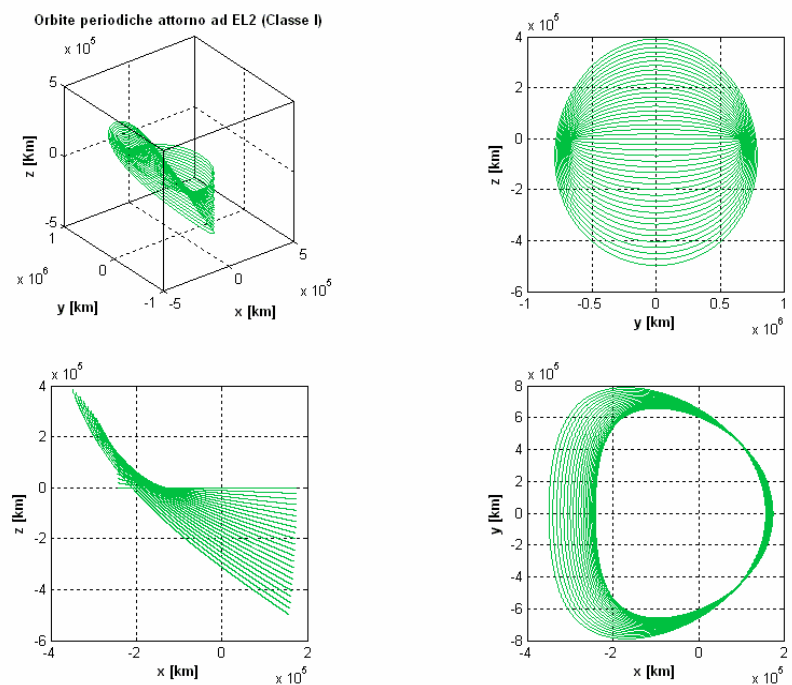
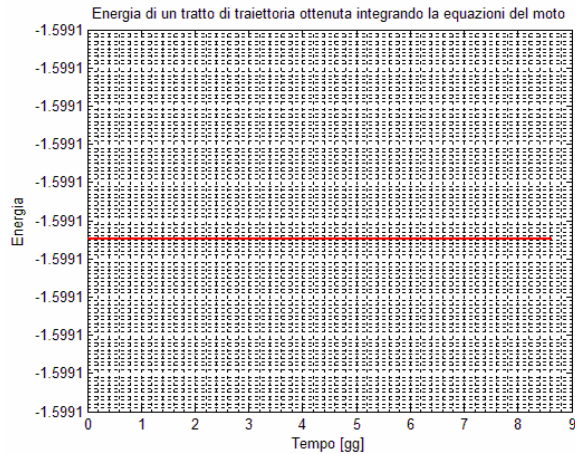


Figura 3.10 - Orbite Halo classe I attorno ad EL_2 per ampiezze crescenti

Per avere un'idea, infine, del grado d'approssimazione della soluzione analitica per orbite Halo ottenuta da Richardson si può guardare l'andamento del grafico dell'energia.

Noto che l'integrale di Jacobi è l'unico integrale del moto, ci si aspetterebbe che l'energia resti costante in ogni istante lungo la traiettoria se questa fosse ottenuta mediante integrazione diretta delle equazioni del moto.



Poiché l'orbita periodica ottenuta è un'approssimazione di quella che sarebbe, in effetti, l'orbita reale, la sua energia non si mantiene propriamente costante, ma presenta un certo oscillamento, in modulo abbastanza piccolo, con periodo pari al periodo orbitale.

Nella figura (3.11) è graficato l'andamento dell'energia per un'approssimazione dell'orbita Halo, attorno a LL_1 , con le seguenti ampiezze:

$$A_x \text{ attorno } LL_1 = 5943.5031 \text{ [km]}$$

$$A_y \text{ attorno } LL_1 = 21368.0052 \text{ [km]}$$

$$A_z \text{ attorno } LL_1 = 2500 \text{ [km]}$$

Il periodo orbitale dell'orbita risulta all'incirca pari a *11.8 giorni* (congruente con l'essere circa la metà del periodo orbitale della Luna attorno alla Terra e confrontabile con quanto ottenuto in figura 3.8).

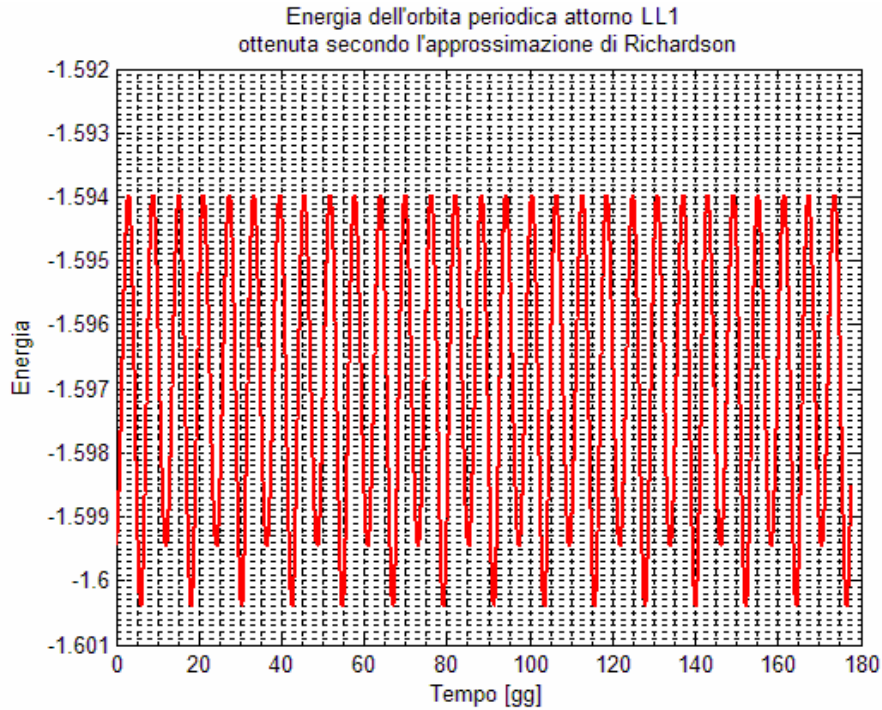


Figura 3.11 - Andamento dell'energia in un'orbita analitica di tipo Halo classe I attorno a LL_1

3.3 Orbite Lyapunov: approssimazione analitica

Si tratta di orbite periodiche piane, ovvero con ampiezza A_z nulla. Come già dimostrato nei paragrafi 2.15 e 2.16, si tratta di orbite periodiche la cui esistenza è dimostrabile nell'ambito dello studio del moto nella regione di equilibrio; si tratta ancora di famiglie di orbite e la scelta di una di queste richiede una parametrizzazione che può esser fatta utilizzando A_x come variabile indipendente.

Applicando un procedimento simile al precedente è possibile ricavare una loro approssimazione analitica.

Essendo nulla l'ampiezza fuori del piano, il legame tra A_x ed A_y è di tipo lineare ed il coefficiente angolare è proprio la costante k :

$$A_y = k \cdot A_x \quad (3.18)$$

Gli andamenti di A_y in funzione della variabile A_x sono di seguito riportati per i sistemi Terra-Sole e Terra-Luna.

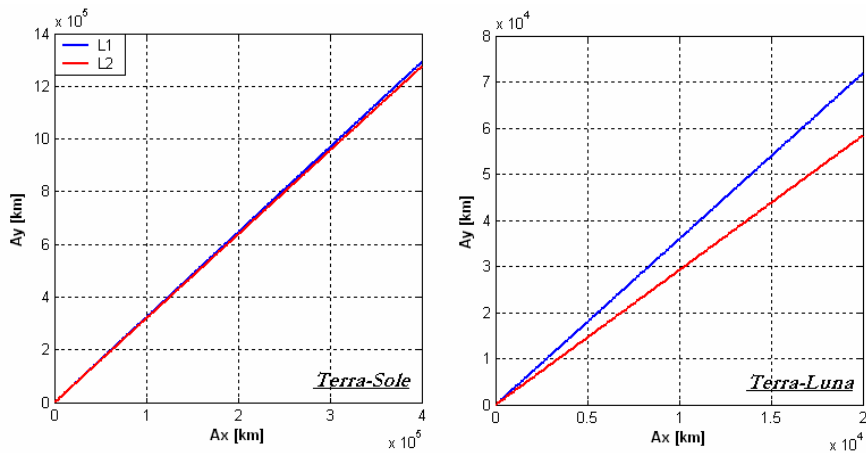


Figura 3.12 - Legame fra A_x ed A_y per il sistema Terra-Sole e Terra-Luna

Si osservi come la differenza di circa quattro ordini di grandezza nel valore dei parametri di massa dei sistemi si ripercuota sulle costanti c . La differenza fra le pendenze delle rette nei due sistemi dipende, infatti, dai valori della costante k in L_1 e L_2 ; maggiore è il valore di μ , maggiore risulta la differenza fra la costante nei due punti (3.11).

Per le stesse motivazioni anche i periodi delle orbite nei due punti di librazione per i due sistemi variano in maniera più marcata per il sistema che presenta il maggiore valore di μ .

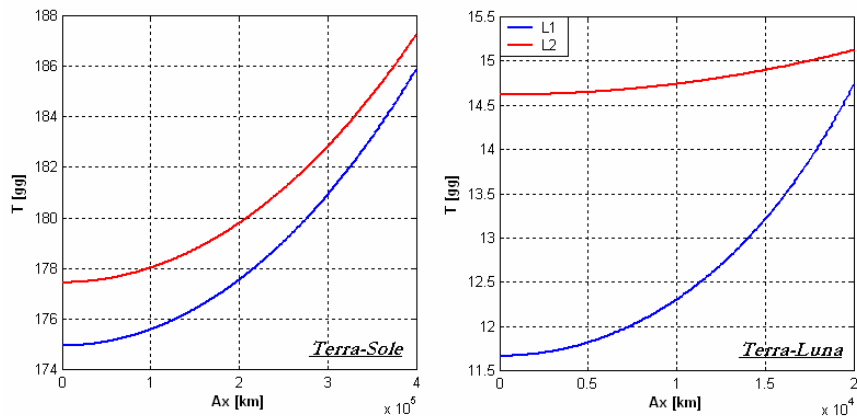


Figura 3.13 - Periodi di orbite Lyapunov nel sistema Terra-Sole ed in quello Terra Luna

Analogamente, i termini di natura aperiodica crescono al crescere dell'ampiezza dell'orbita e portano le ellissi a distorcersi.

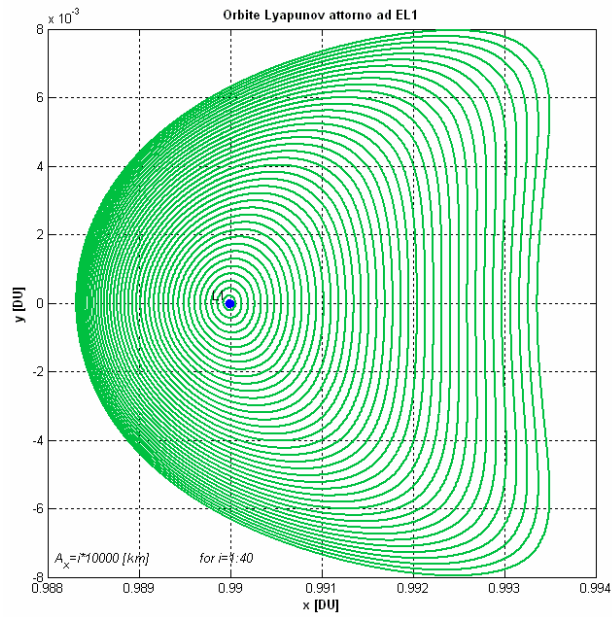


Figura 3.14 - Orbite Lyapunov attorno ad EL_1 di ampiezze crescenti

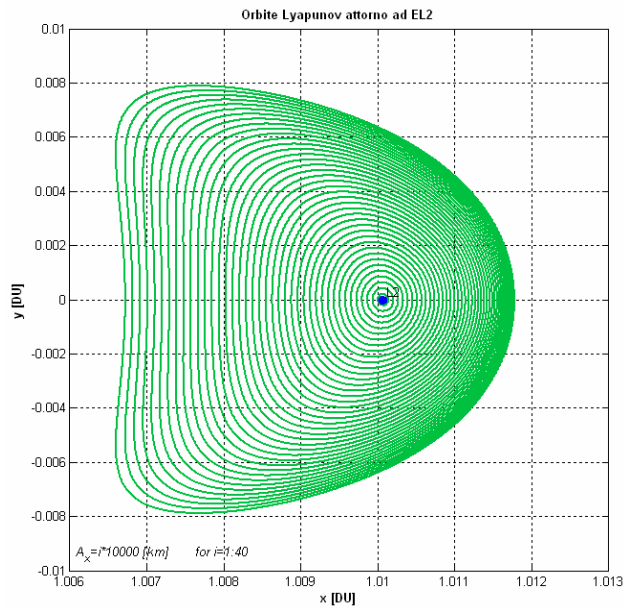


Figura 3.15 - Orbite Lyapunov attorno ad EL_2 di ampiezze crescenti

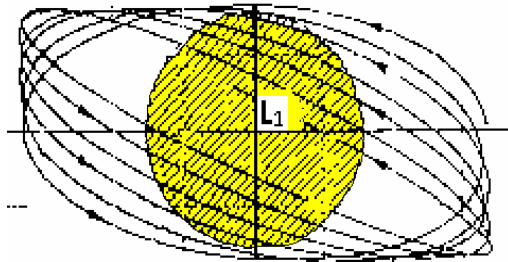
3.4 Orbite Lissajous: approssimazione analitica

Sono orbite tridimensionali per le quali i valori delle autofrequenze nel piano e fuori da esso sono differenti. Di conseguenza tali orbite oscillano attorno all'asse y e la loro proiezione sul piano $y-z$ sembra aprirsi e chiudersi. Le equazioni che le definiscono analiticamente sono dunque le (3.3) con diversi valori degli autovettori.

$$\begin{aligned} x &= -A_x \cos(\nu t + \phi) \\ y &= kA_x \sin(\nu t + \phi) \\ z &= A_z \sin(\zeta t + \psi) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Per tale tipo di orbite è necessario specificare due parametri; in altre parole vanno disegnate imponendo sia A_x (o A_y) che A_z . Questa è una conseguenza del fatto che viene meno una delle relazioni che vincolano le due autofrequenze, pur restando l'orbita a tre dimensioni.

Le ampiezze di tali orbite sono determinanti per il progetto delle relative missioni. Uno dei vincoli di missione più importanti per questo tipo di orbite attorno L_1 è che restino fuori dalla zona di



esclusione definita dal disco solare la quale causerebbe seri problemi di interferenza nelle radiocomunicazioni; analogamente, anche ampiezze eccessivamente grandi possono causare difficoltà di comunicazione.

Attorno ad EL_2 le ampiezze devono essere tali da evitare prolungate eclissi da parte della Terra, cosa che provocherebbe lunghi periodi senza possibilità d'alimentazione.

Tali orbite sono, in effetti, orbite semi-periodiche e, senza adeguate manovre di *station-keeping*, tenderebbero a collassate su se stesse.

I seguenti grafici sono stati ottenuti attorno ad EL_1 ed EL_2 sia per orbite di classe I (componente z positiva) che di classe II (componente z negativa).

Capitolo III - Orbite Periodiche

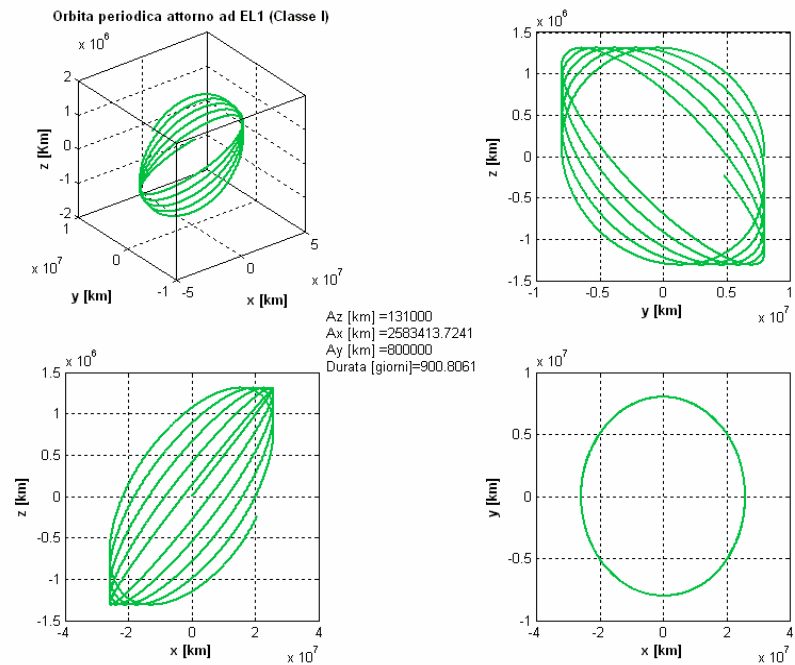


Figura 3.16 - Orbite Lissajous classe I attorno ad EL_1

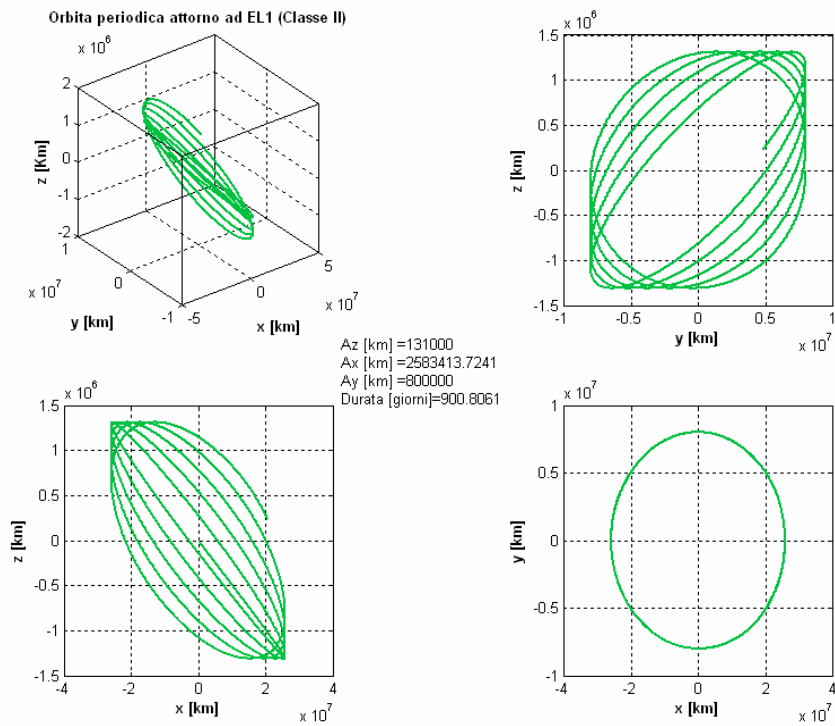


Figura 3.17 - Orbite Lissajous classe I attorno ad EL_1

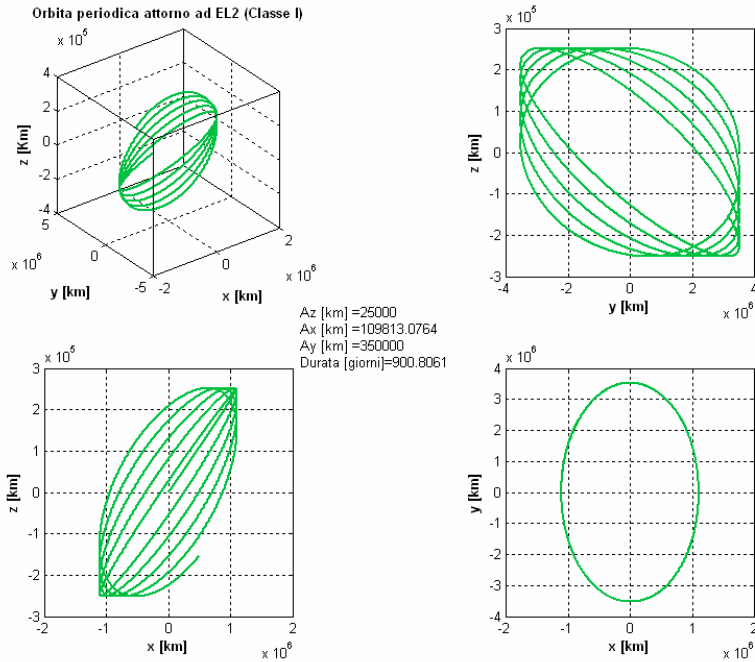


Figura 3.18 – Orbite Lissajous classe I attorno ad EL_2

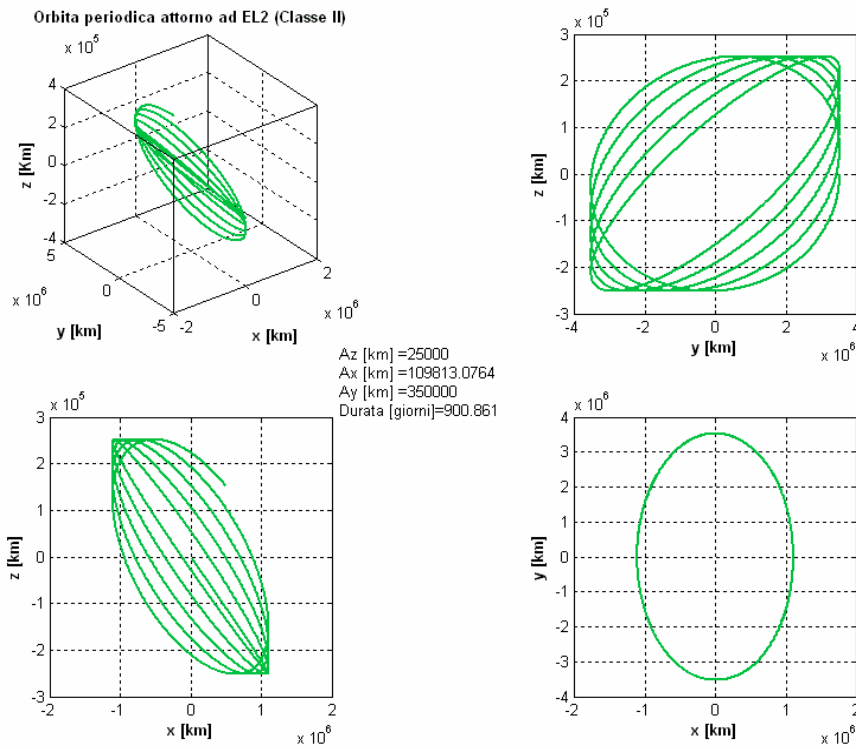


Figura 3.19 – Orbite Lissajous classe II attorno ad EL_2

3.5 Procedure numeriche

Dato il comportamento fortemente non lineare del sistema e la sua forte dipendenza dalle condizioni iniziali, integrando le equazioni del moto, anche partendo da una condizione iniziale quale quella di Richardson, quella che si ottiene non è un'orbita periodica.

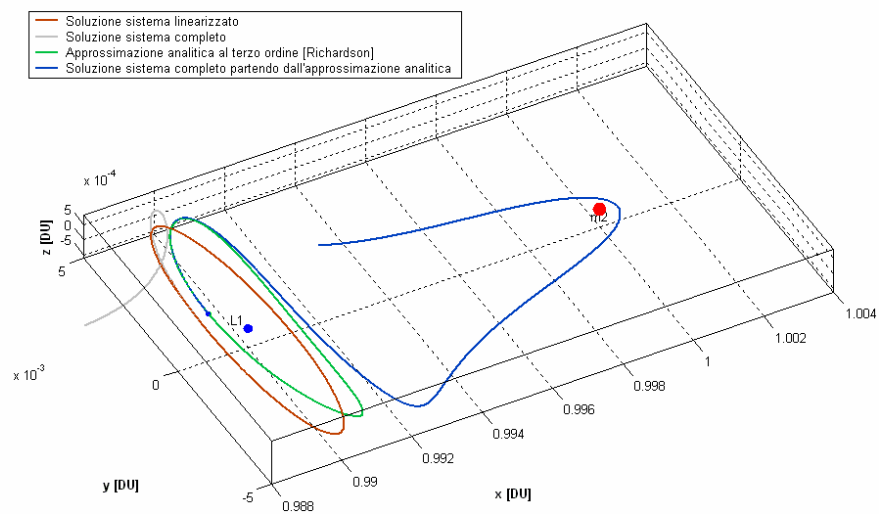


Figura 3.20 - Integrazione delle equazioni del moto partendo da una soluzione analitica attorno ad EL_1

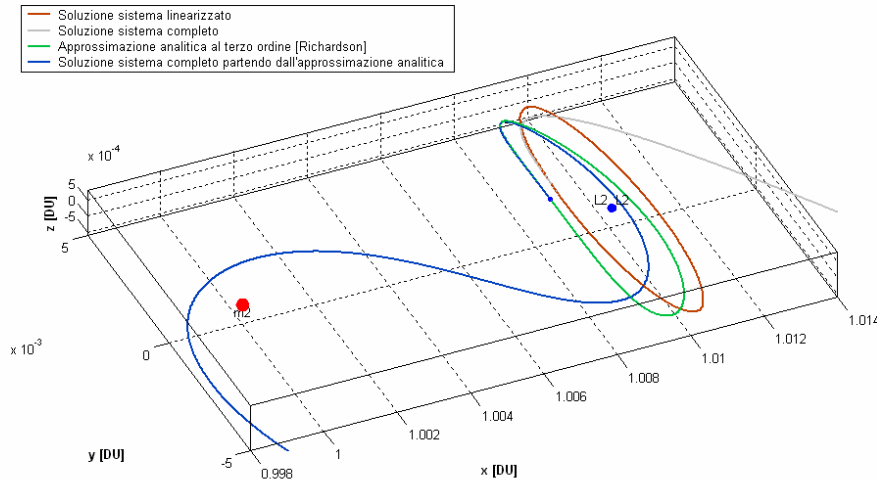


Figura 3.21 - Integrazione delle equazioni del moto partendo da una soluzione analitica attorno ad EL_2

Per ottenere numericamente soluzioni periodiche è dunque necessaria una procedura di correzione differenziale che “aggiusti” la condizione iniziale data dall’approssimazione di Richardson; il metodo di seguito descritto è, in effetti, una applicazione del metodo di Newton.

Come si osserva dalle due precedenti immagini, la soluzione che si ottiene integrando il sistema completo (Tabella 2.6, approccio Lagrangiano) approssima abbastanza bene la prima parte dell’orbita per poi discostarsene all’incirca all’altezza della seconda intersezione con l’asse x . La procedura numerica implementata utilizza, infatti, come punto di partenza proprio la soluzione analitica, per correggerne le condizioni iniziali in maniera iterativa^{[20][22]}.

Data la simmetria del problema (vedi paragrafo 2.7), una traiettoria che attraversa il piano $y=0$ due volte è un’orbita periodica. Si prenda una condizione iniziale analitica che appartiene al piano $x-z$ e che ha come unica componente di velocità diversa da zero quella lungo y :

$$X_0 = \{x_0, 0, y_0, 0, v_0, 0\} \quad (3.20)$$

Propagando X_0 mediante le equazioni del moto (Tabella 2.6) fino alla successiva intersezione con il piano x - z , che si ottiene dopo un intervallo temporale pari alla metà del periodo dell'orbita periodica $t = T_{1/2}$, si ha uno stato del sistema del tipo:

$$\Phi(X_0, T_{1/2}) = \{\tilde{x}, 0, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\} \quad (3.21)$$

Se $\tilde{u} = \tilde{w} = 0$, l'orbita che ne risulta è un'orbita periodica; infatti presenta sempre velocità solo lungo y ogni volta che interseca il piano x - z , riportandola sempre sullo stesso percorso.

Si corregge, pertanto, la condizione X_0 attraverso un'espansione al primo ordine sia per lo stato del sistema che per il tempo:

$$\Phi(X_0 + \Delta X, T_{1/2} + \Delta t) = \Phi(X_0, T_{1/2}) + \left[\frac{\partial \Phi(X_0, T_{1/2})}{\partial X} \right] \cdot \Delta X + \left[\frac{\partial \Phi(X_0, T_{1/2})}{\partial t} \right] \cdot \Delta t \quad (3.22)$$

in cui: $\Delta X = \{\Delta x, 0, \Delta z, 0, \Delta v, 0\}$.

Ciò perché l'intento è quello di correggere le variabili del sistema che devono essere diverse da zero (x, z, v) al fine di far sì che si annullino quelle che danno la periodicità (u, w). La periodicità è dunque imposta ipotizzando che lo stato sia del tipo:

$$\Phi(X_0 + \Delta X, T_{1/2} + \Delta t) = \{x^*, 0, z^*, 0, v^*, 0\} \quad (3.23)$$

Tale stato, rappresentato con $*$, è ancora incognito.

Quindi, per un'orbita periodica la (3.21) si riduce a:

$$M \cdot \begin{Bmatrix} \Delta x \\ 0 \\ \Delta z \\ 0 \\ \Delta v \\ 0 \end{Bmatrix} + f(\Phi) \cdot \Delta t = \begin{Bmatrix} x^* \\ 0 \\ z^* \\ 0 \\ v^* \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \\ \tilde{z} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

La matrice $M = \partial\Phi/\partial t$ è detta matrice di transizione di stato o **matrice monodroma**. (vedi paragrafo 3.6). Il vettore f , invece, rappresenta le derivate dello stato del sistema rispetto al tempo.

Considerando solo la seconda, la quarta e la sesta colonna (quelle relative ai termini da annullare per ottenere la periodicità) si ha:

$$\begin{aligned} m_{21} \cdot \Delta x + m_{23} \cdot \Delta z + m_{25} \cdot \Delta v + f_2 \cdot \Delta t &= 0 \\ m_{41} \cdot \Delta x + m_{43} \cdot \Delta z + m_{45} \cdot \Delta v + f_4 \cdot \Delta t &= 0 \\ m_{61} \cdot \Delta x + m_{63} \cdot \Delta z + m_{65} \cdot \Delta v + f_6 \cdot \Delta t &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Questo (3.25) è un sistema di tre equazioni in quattro incognite; ciò è dovuto al fatto che, come detto, le orbite periodiche si presentano in famiglie e per scegliere un'orbita all'interno di una famiglia va scelto un parametro.

Per il caso di orbite Halo è sufficiente imporre $\Delta z = 0$ essendo queste parametrizzate in A_z ; per orbite di tipo Lyapunov, invece, l'ultima equazione delle (3.24) non esiste e quindi non è richiesta alcuna correzione fuori dal piano. La parametrizzazione effettuata, come detto, in base ad A_x richiede di imporre $\Delta x = 0$ nel sistema di due equazioni in tre incognite che ne risulta.

La procedura così sviluppata è di tipo iterativo, è implementabile fino a raggiungere l'accuratezza voluta e fornisce una nuova condizione iniziale mediante:

$$X_{new} = W_{old} + \Delta x \quad (3.26)$$

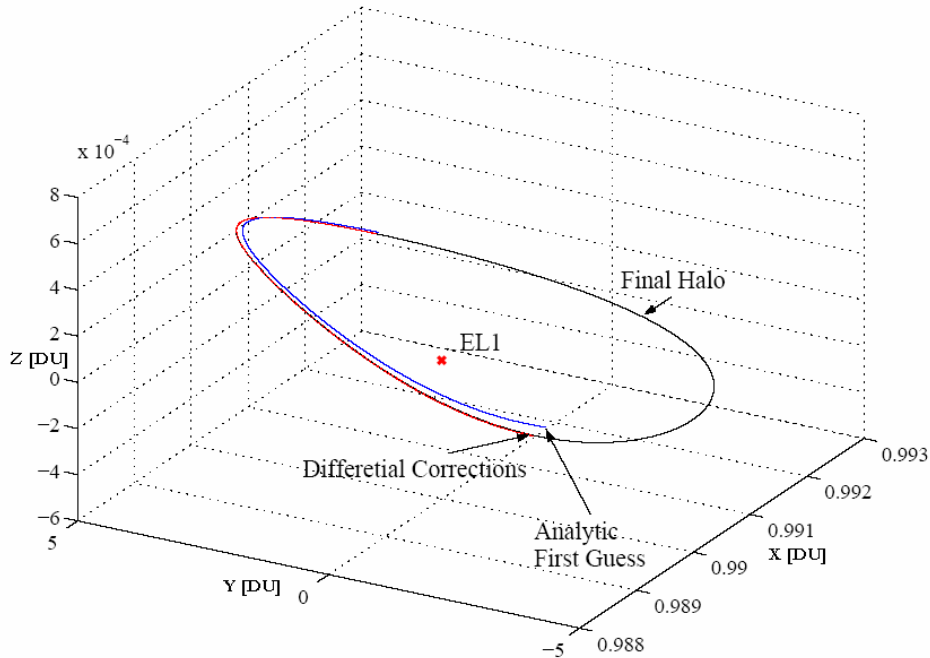


Figura 3.22 - Correzione differenziale di un'orbita Halo attorno ad EL_1

Un'altra procedura numerica utilizzabile per la derivazione di orbite Lyapunov che anche si è analizzata è, invece, la seguente^[13].

Fissato un valore del parametro di massa ed un valore del Δe rispetto all'energia del punto di librazione attorno al quale si vuol calcolare l'orbita periodica:

- Si calcoli la posizione dei punti di librazione del sistema e la loro energia
- La condizione iniziale per un'orbita periodica è del tipo:

$$X_0 = (x_e, 0, 0, 2 \cdot \text{Re}(\beta \cdot w_1)) = (x_e - A_x, 0, 0, v_{y0}) \quad (3.27)$$

con $v_{y0} = -A_x \cdot \nu \cdot \tau$.

La precedente può essere ottenuta dalla soluzione del sistema linearizzato (2.77), imponendo che siano nulle le componenti reali (annullare, quindi, gli esponenziali: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) e che il coefficiente della parte immaginaria sia la semi-ampiezza dell'orbita piana voluta: $\beta = -A_x/2$.

La condizione iniziale è ottenuta dalla soluzione del sistema (2.77) che è scritto in un sistema di riferimento centrato nel punto di librazione; per essere imposta alle equazioni del moto è necessaria una trasformazione di coordinate, che richiede la seconda uguaglianza della (3.27).

- La condizione iniziale descritta dalla (3.27) fornisce una buona approssimazione per un'orbita periodica solo nel caso in cui l'ampiezza lungo x di questa sia molto piccola. Per ottenere un'orbita di qualsivoglia ampiezza è necessaria, nuovamente, una procedura di correzione differenziale. Tale procedura utilizza una soluzione analitica come punto di partenza di un procedimento iterativo che modifica alcuni valori delle condizioni iniziali mantenendone altri costanti (analogamente alla precedente). Nel caso di interesse l'intento è aggiornare v mantenendo fissa x .
- Si definisca la (3.27) per due condizioni iniziali di piccola ampiezza $A_{x1}, A_{x2} \ll 1$ con $A_{x1} < A_{x2}$ e si utilizzino queste come punti di partenza per la procedura. Si ricordi che, come già descritto in precedenza, la simmetria del problema consente di costruire solamente metà dell'orbita periodica.
- Si integrino, dunque, le due condizioni iniziali nelle equazioni complete del moto fino alla successiva intersezione con l'asse x . Si calcoli la M in questo punto.
- Lo stato finale del sistema nel punto di intersezione è del tipo:

$$X(t_{cross}) = (x_{cross}, 0, u_{cross}, v_{cross})^T \quad (3.28)$$

L'intento è quello di utilizzare la matrice di transizione di stato per portare il valore di u_{cross} ad annullarsi (o, almeno, ad essere minore di un certo valore, ad esempio 10^{-8}).

- La correzione in termini di v_{y0} può dunque essere calcolata mediante:

$$\begin{aligned} \delta X_{cross} &= M \cdot \delta X_0 + \dot{X}_{cross} \cdot \delta t_{cross} + h.o.t. \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \delta u_{cross} = M_{34} \cdot \delta v_{y0} + \dot{u}_{cross} \cdot \delta t_{cross} \\ 0 = \delta y_{cross} = M_{24} \cdot \delta v_{y0} + \dot{y}_{cross} \cdot \delta t_{cross} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.29)$$

- La matrice M è quella calcolata all'istante di intersezione che, per quanto detto, costituisce anche il semiperiodo dell'orbita. La condizione iniziale può dunque essere aggiornata costantemente mediante:

$$X_{new} = X_{old} - (0, 0, 0, \delta v_{y0})^T \quad \text{con } \delta v_{y0} = \left(M_{34} - \frac{M_{24}}{v_{cross}} \right)^{-1} \cdot u_{cross} \quad (3.30)$$

- Si osservi come la correzione diminuisca al diminuire dell'entità della u_{cross} ; ciò è dovuto al fatto che la soluzione si sta avvicinando a quella cercata. La procedura tende a convergere, annullando la velocità lungo x , all'intersezione, con poche iterazioni.
- E' necessario, a questo punto, generare una famiglia di orbite periodiche partendo dalla procedura di correzione differenziale descritta. Avendo definito due piccole ampiezze di partenza, e dunque applicato due volte la precedente procedura numerica, l'ampiezza di un'orbita periodica nei dintorni di un punto di librazione può essere aumentata utilizzando un Δ dato dalla differenza delle due condizioni che si ottengono mediante correzione differenziale della (3.27) applicata per le due ampiezze; ovvero:

$$\Delta = X_{02} - X_{01} = (\Delta x_0, 0, 0, \Delta v_0)^T \quad (3.31)$$

- La condizione iniziale, poi utilizzata come punto di partenza per una successiva procedura di correzione differenziale, è:

$$X_{03} = X_{02} + \Delta \quad (3.32)$$

Tale procedimento può essere ripetuto fino ad ottenere un'orbita dell'energia voluta monitorando costantemente la differenza fra l'energia di un'orbita e di quella successiva.

Per un $\Delta e = 0.005$, nel sistema Giove-Sole ed utilizzando condizioni iniziali dell'ordine di 10^{-5} si sono ottenuti i seguenti risultati.

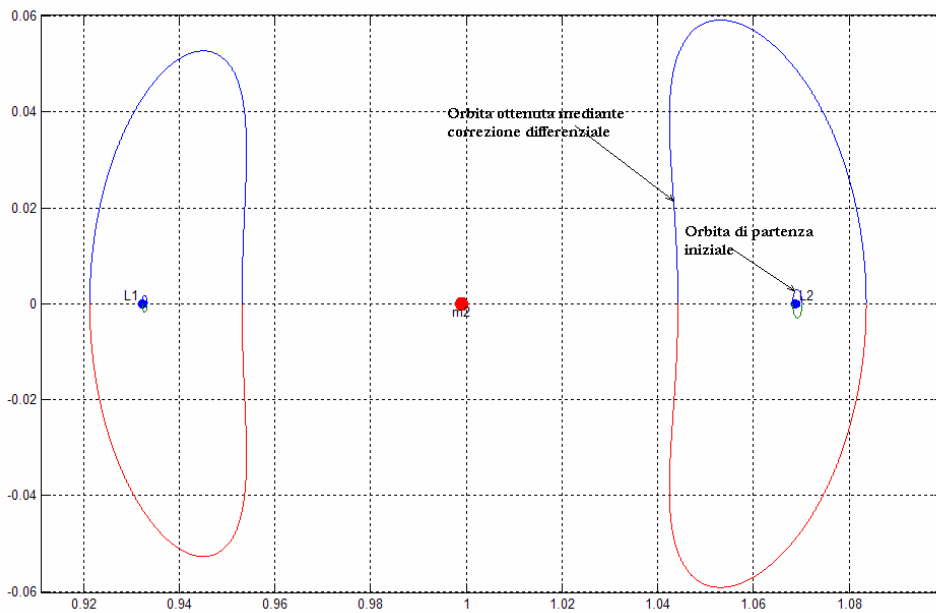


Figura 3.23 - Risultati della procedura numerica

Entrambe le procedure hanno dimostrato essere molto sensibili alla scelta delle condizioni iniziali e numericamente molto instabili.

3.6 Matrice monodroma

Un sistema di equazioni differenziali non autonomo (con dipendenza esplicita dal tempo) che descrive il comportamento di un sistema fisico è, in generale, un problema matematico alquanto complesso. Lo studio della soluzione riguarda, pertanto, più la forma di questa che la sua esatta espressione.

Lo studio di sistemi dinamici, non autonomi, lineari a coefficienti periodici è di particolare importanza e va sotto il nome di *teoria di Floquet*.

Sia dato un sistema differenziale, lineare ed omogeneo di n equazioni al primo ordine:

$$\dot{x}(\sigma, t) = A(\sigma, t) \cdot x(\sigma, t) \quad (3.33)$$

I coefficienti della matrice A siano continui o periodici.

Dato un insieme di condizioni iniziali: $X(\sigma, t_0) = \alpha$, tale sistema ammette una soluzione nella forma:

$$x(t) = \phi(\alpha, t) \quad (3.34)$$

Essendo il sistema lineare, se ϕ è soluzione, anche $c\phi$ (in cui c è una costante) è soluzione ed anche una combinazione lineare di queste è soluzione. Un insieme di soluzioni linearmente indipendenti è una base dello spazio lineare da queste definito. La matrice che ha per colonne l'insieme delle soluzioni linearmente indipendenti è detta **matrice fondamentale delle soluzioni**:

$$\Phi(t) = [\phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(n)}(t)] \quad (3.35)$$

La (3.33) in forma matriciale può essere scritta come:

$$\dot{X}(\sigma, t) = A(\sigma, t) \cdot X(\sigma, t) \quad (3.36)$$

in cui $X(\sigma, t) = [x^{(1)}(\sigma, t), \dots, x^{(n)}(\sigma, t)]$. Tale equazione è spesso detta equazione matriciale differenziale associata alla (3.33). La Φ è, ovviamente, soluzione della (3.36); inoltre, se C è una matrice costante non singolare, anche $C\Phi$ è soluzione della (3.36). Se $\Phi(t_0) = 1$ la matrice fondamentale delle soluzioni è detta **matrice principale**.

Si consideri il caso in cui i coefficienti della matrice A siano funzioni periodiche del tempo di periodo T ; in altre parole:

$$A(t+T) = A(t) \quad (3.37)$$

Floquet ha dimostrato che la matrice fondamentale delle soluzioni, in questo caso, può essere ottenuta come il prodotto di una matrice periodica di periodo T ed una matrice di soluzioni del sistema a coefficienti costanti.

Se $\Phi(t)$ è la matrice fondamentale delle soluzioni per il sistema (3.33), per il quale valga la (3.37), anche $\Phi(t+T)$ è matrice fondamentale delle soluzioni per lo stesso sistema. Esiste dunque una matrice M tale che:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \cdot M \quad (3.38)$$

La matrice M è detta **matrice monodroma**.

Per ogni $\Phi(t)$, inoltre, esiste una matrice $Q(t)$, periodica (di periodo T) e non singolare, ed una matrice R tali che:

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tR} \quad (3.39)$$

Imponendo $t=0$ nella (3.38) si ottiene che:

$$M = \Phi(0)^{-1}\Phi(T) \quad (3.40)$$

Scegliendo la matrice principale come soluzione del sistema, la (3.40) si riduce a:

$$M = \Phi(T) \quad (3.41)$$

La matrice monodroma è semplicemente la matrice principale del sistema valutata alla fine del periodo T . E' una particolare matrice fondamentale delle soluzioni per l'equazione matriciale differenziale valutata alla fine del periodo (dell'orbita periodica nella fattispecie).

Nel caso di interesse la M non è ottenibile analiticamente, poiché essa coinvolge lo stato del sistema che risulta dall'integrazione delle equazioni del moto; essendo il problema non integrabile in forma chiusa, tale processo richiede una integrazione numerica^[20].

La matrice monodroma è calcolabile integrando simultaneamente il sistema:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ \dot{M} = \frac{\partial f}{\partial X} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} X(0) = X_0 \\ M(0) = I \end{cases} \quad (3.42)$$

Questo è un sistema di 6+36 equazioni per orbite Halo e di 4+16 equazioni per orbite Lissajous; ossia di $n+n^2$ equazioni.

Capitolo III - Orbite Periodiche

La M è definita per un punto specifico dell'orbita periodica, ma tutte le matrici monodrome associate ai differenti punti di essa sono legate da relazioni di similitudine. Gli autovalori di queste matrici sono, pertanto, quantità invarianti del sistema.

La matrice M presenta, inoltre, le seguenti proprietà:

- $\text{Det}(M)=1$
- Se λ è un autovalore di M , anche $1/\lambda$ lo è.

MANIFOLDS E SEZIONI DI POINCARÉ

L'obiettivo del capitolo è quello di studiare il problema mediante strumenti che possano risultare validi per il disegno di missioni. Si descriveranno le strutture dei manifolds e le loro implementazioni numeriche; si applicherà, in seguito, un metodo discreto all'analisi del problema riducendosi a studiare solo determinate zone dello spazio delle fasi mediante una metodologia alla Poincaré.

4.1 Introduzione

Come detto nei precedenti capitoli attorno ad ognuno dei punti di equilibrio, nel caso di interesse attorno ad L_1 e L_2 , esiste una famiglia di orbite periodiche. Per appropriati valori dell'energia, una superficie ad energia costante contiene esattamente una di queste soluzioni periodiche.

L'intento è quello di analizzare come le strutture locali, descritte nei par. 2.15-216, che si riscontrano nei dintorni dei punti di librazioni, siano tra loro connesse.

Si richiama il concetto di manifolds come superfici che discriminano fra i diversi tipi di moto (transit o non-transit) e costituite da tutte quelle orbite che tendono in maniera asintotica ad una soluzione periodica. In particolare si definiscono:

- **Manifolds stabili:** quelli che tendono ad un'orbita periodica per $t \rightarrow \infty$ (*to*).
- **Manifolds instabili:** quelli che tendono ad un'orbita periodica per $t \rightarrow -\infty$ (*from*).

Esistono, dunque, per ogni punto di librazione e per ogni soluzione periodica attorno ad esso, una coppia di queste linee e di questi “tubi” identificanti traiettorie che tendono in maniera naturale ed asintotica all'orbite periodiche o al punto di equilibrio.

Considerando diversi sistemi a tre corpi, si delineano, nello spazio delle posizioni, una serie di queste strutture che, intersecandosi vicendevolmente, forniscono una serie di passaggi a bassa energia; questa è l'idea fondamentale delle **Interplanetary Superhighways (ISP)**^[24].

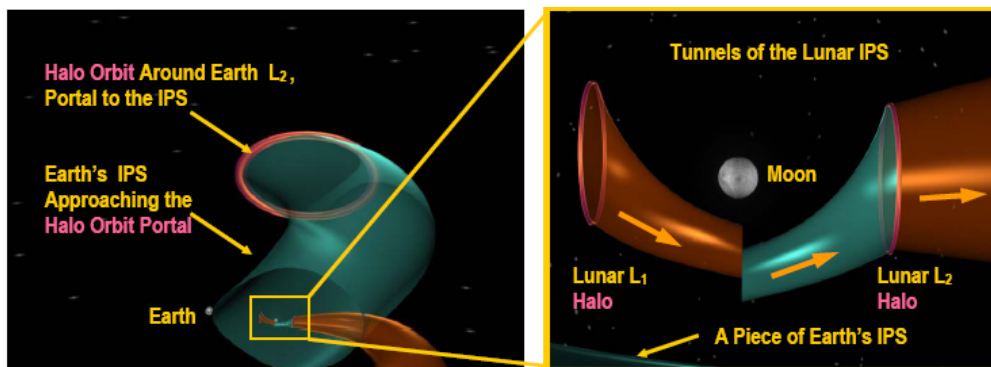


Figura 4.1 - ISP del sistema Terra-Sole e Terra-Luna

I manifolds si identificheranno con la lettera W , con un pedice che indichi il punto o l'orbita periodica a cui è associato e con un apice per descrivere le caratteristiche (stabile od instabile) ed il reame di appartenenza. Quindi, ad esempio, $W_{L_1, p.o.}^{u, S}$ è un manifolds instabile, definito nel reame S ed associato ad un'orbita periodica attorno ad L_1 .

4.2 Esempi di manifolds in natura

Alcune comete di Giove, come P/Oterma, P/Gehrels 3 e P/Helin-Roman-Crockett, effettuano una transizione da un'orbita eliocentrica interna a quella del pianeta ad una eliocentrica esterna e viceversa; la transizione interno-esterno effettuata da questi corpi è dovuta alla forte interazione con la massa di Giove. Durante questo passaggio la cometa può anche subire un temporaneo periodo di cattura compiendo alcune orbite attorno al pianeta: prima dell'incontro con Giove, infatti, la maggiore forza agente su tali corpi è proprio quella gravitazionale del pianeta che li devia in orbite di temporanea cattura.

Tali corpi vanno sotto il nome di *quasi-Hildas*^[25], un'accurata osservazione del loro moto ha rivelato che essi passano, nell'effettuare tale transizione, molto vicini ai punti di librazione del sistema Giove-Sole, in particolare vicino a JL_2 nel passare all'interno dell'orbita del pianeta e vicino ad JL_1 per passarne all'esterno^[26].

Il moto di questi corpi non è descrivibile sulle basi della meccanica kepleriana, ma è facilmente comprensibile analizzando il PCR3BP di pertinenza e la conformazione dei manifolds nello spazio delle posizioni.

L'orbita interna da essi descritta è risonante con Giove ossia il corpo compie tre rivoluzioni attorno al sole mentre il pianeta ne compie due (3:2), le orbite esterne, invece, sono orbite risonanti 2:3 con quelle di Giove. Si è osservata una transizione interno-esterno tra il 1910 ed il 1980 per la cometa P/Oterma.

Graficando una catena omoclinica-eteroclinica (vedi par. 4.3 – 4.4) per lo stesso valore dell'energia della cometa, si ottengono traiettorie che approssimano molto bene quelle delle reali^[27].

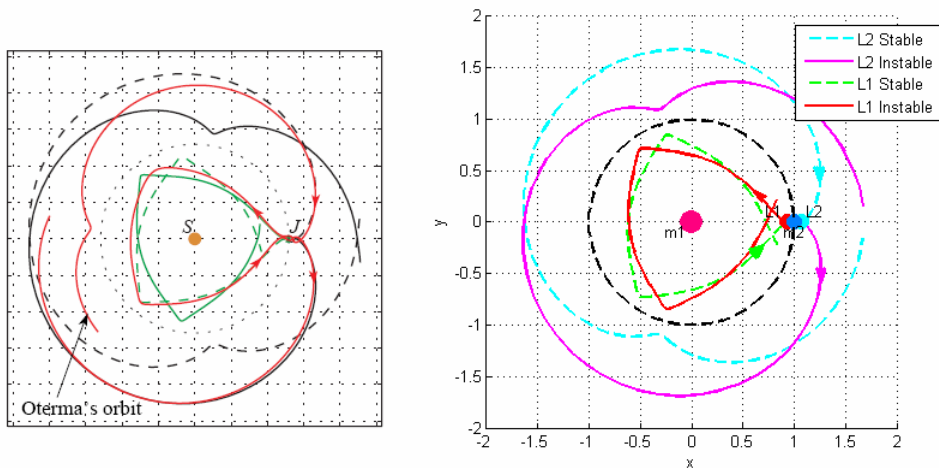


Figura 4.2 - Confronto fra l'orbita di un oggetto quasi-Hildas ed i manifolds del sistema Sole-Giove

4.3 Connessioni omocliniche

Mc Gehee, nel 1969, ha dimostrato che le superfici ad energia costante sono suddivise, oltre che in reami, anche in regioni delimitate da due superfici toroidali invarianti; tali superfici non sono attraversabili dalla massa di prova che, quindi, non può liberamente passare da un'orbita arbitrariamente vicina ad uno dei primari ad una vicina all'altro.

E' interessante notare che in ogni caso le superfici separano anche le due singolarità del problema, i centri dei primari.

Questi tori invarianti \mathcal{A}_1 ed \mathcal{A}_2 si proiettano nel piano $x-y$ in due settori circolari A_1 ed A_2 che, assieme alla regione di Hill, delimitano delle superfici di forma anulare τ_1 e τ_2 le cui immagini, nello spazio delle posizioni bidimensionale, sono T_1 e T_2 .

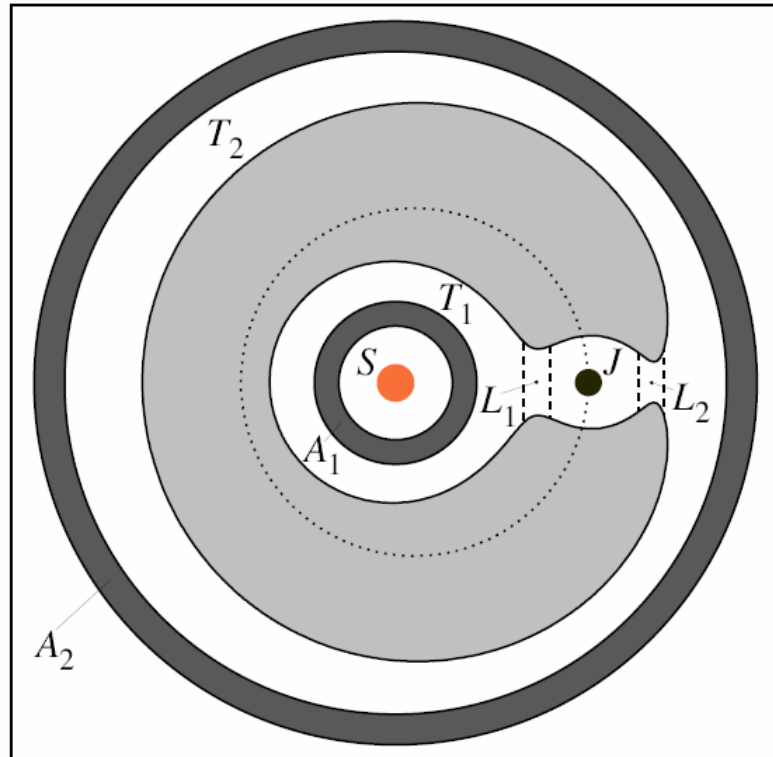


Figura 4.3 - Proiezione nello spazio delle posizioni delle superfici toroidali

Mc Gehee, inoltre, in uno dei suoi teoremi, ha dimostrato che un'orbita che diparte dalle vicinanze di una delle soluzioni periodiche instabili, procede attorno ad uno degli anelli, T_1 o T_2 , prima di ritornare nuovamente nelle vicinanze dell'orbita di partenza. Ciò, ovviamente, significa che traiettorie che si allontanano da L_1 sono vincolate a percorrere lo spazio delle posizioni nel reame S all'esterno di A_1 ; orbite che si allontanano da L_2 devono restare in X , ma dal lato interno di A_2 . La direzione di questo tipo di orbite è la stessa per tutte:

- Verso *antiorario* nel reame interno
- Verso *orario* nel reame esterno

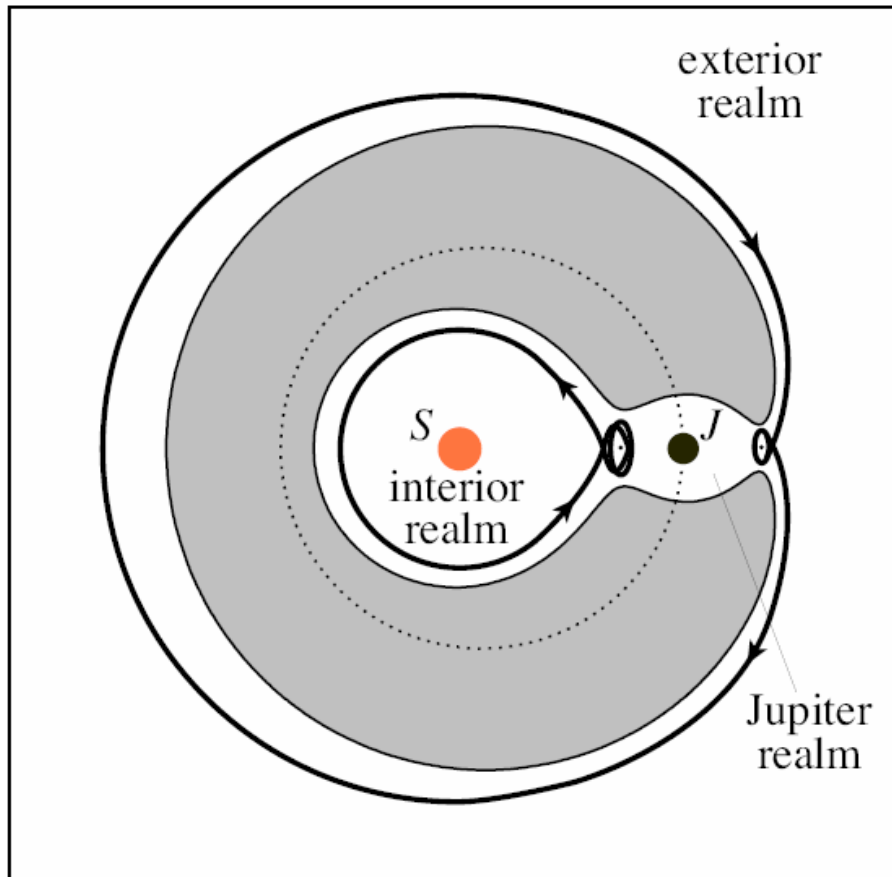


Figura 4.4 - Connessioni Omocliniche

Mettendo assieme la struttura locale della regione di equilibrio, che prevede l'esistenza di soluzioni periodiche, e le traiettorie che le mettono in comunicazione con se stesse percorrendo una superficie di alcuni tori invarianti si è in grado di dimostrare analiticamente l'esistenza di **connessioni omocliniche** sia nel reame esterno che in quello interno. Vanno sotto questo nome quelle traiettorie che tendono alla medesima soluzione periodica sia per tempi positivi che negativi, ovvero sono quelle che mettono in comunicazione il manifold stabile di un'orbita con quello instabile della stessa.

Si affronti con maggior dettaglio il teorema^{[13][28]}. Le regioni di equilibrio vengono definite come zone sufficientemente vicine ai punti di equilibrio al fine di far valere un'analisi di tipo locale (fig. 2.18). In generale i limiti di

tale regione possono essere espressi, nella loro proiezione nel piano x - y , in funzione del raggio di Hill da ambo i lati di m_2 . In particolare:

- R_1 è la proiezione di \mathcal{R}_1 delimitata da due linee verticali, nello spazio bidimensionale delle posizioni, poste ad una distanza da $(1-\mu)$ pari a $-b_1 r_h$ e $-c_1 r_h$.
- R_2 è la proiezione di \mathcal{R}_2 delimitata da due linee verticali, nello spazio bidimensionale delle posizioni, poste ad una distanza da $(1-\mu)$ pari a $b_1 r_h$ e $c_1 r_h$.

R_1 ed R_2 sono quindi definibili da rette poste a:

$$(1 - \mu \pm c_1 \cdot r_h, 0) \qquad (1 - \mu \pm b_1 \cdot r_h, 0) \qquad (4.1)$$

con $b_1 < 1 < c_1$.

Esistono dunque costanti b_1 e c_1 ed un insieme aperto O_1 (O_2) nel piano (μ, e) contenente il grafico $e=E_1(\mu)$ ($e=E_2(\mu)$) che, per piccoli valori di μ e per (μ, e) appartenenti a tale insieme, conferma le seguenti affermazioni:

- La superficie d'energia $M(\mu, e)$ contiene una superficie toroidale A_1 che separa S da J (ovvero A_2 che separa J dall'infinito).
- Per $e > E_1(\mu)$ ($e > E_2(\mu)$), il flusso nella regione di equilibrio è in effetti quello descritto dalle equazioni linearizzate (par. 2.15-2.16).
- Sia τ_1 (τ_2) la superficie, parte di M , delimitata dal toro A_1 (A_2) e dalla sfera esterna (interna) che demarca la regione di equilibrio attorno L_1 (L_2) (vedi fig. 2.21), allora esiste una funzione:

$$\theta : \tau_1 \rightarrow \mathbb{R} \qquad (\theta : \tau_2 \rightarrow \mathbb{R}) \qquad (4.2)$$

tale che θ sia la coordinata angolare per τ strettamente crescente lungo l'orbita.

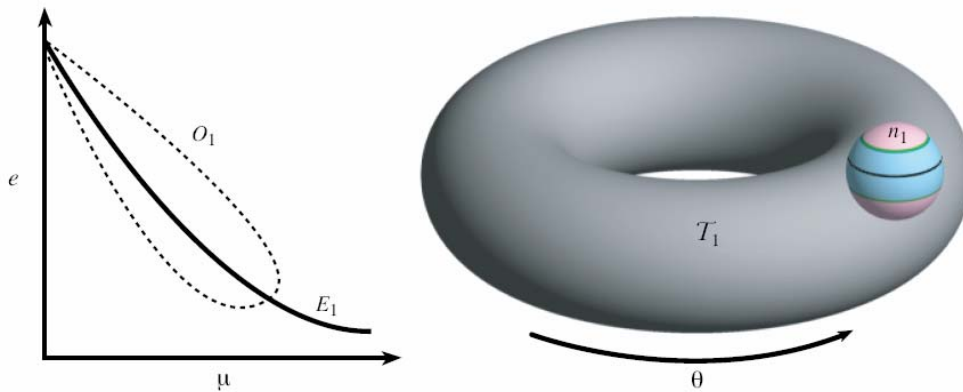


Figura 4.5 - Geometria del teorema di Mc Gehee

L'ultima parte del teorema è quella che ci permette di costruire connessioni omocliniche. Il crescere di θ lungo un segmento d'orbita in τ_1 (τ_2) porta ad affermare che se tale orbita compie un giro completo in τ_1 (τ_2), quindi se i suoi punti estremi appartengono alla sfera delimitante la regione di equilibrio, θ assume un valore che deve essere un multiplo intero e non nullo di 2π . Ogni altro segmento d'orbita con le stesse caratteristiche del precedente ed ottenibile deformando quest'ultimo deve avere lo stesso valore di θ ; inoltre il valore della coordinata angolare aumenta all'aumentare del tempo di permanenza dell'orbita in τ_1 (τ_2).

Considerando R_1 : essendo la superficie τ chiusa ed il flusso Hamiltoniano (regolare), se il valore di θ è pari a 2π significa che se l'orbita esce dalla sfera n per entrare in τ essa deve nuovamente uscire da τ per rientrare in n .

Per un punto p di d_1^- deve quindi esistere un'orbita che lo colleghi ad un punto q di d_1^+ e che si snodi in τ . E' possibile dimostrare, spostando questo punto sulle circonferenze a_1^+ ed a_1^- che deve esistere un segmento d'orbita che colleghi o d_1^- ad a_1^+ oppure a_1^- a d_1^+ .

Si giunge, dunque, analiticamente a dimostrare l'esistenza di orbite che collegano in maniera asintotica (le zone a della sfera) una delle regioni di equilibrio con se stessa attraverso il reame interno o esterno (attraverso le zone d , infatti, il flusso deve uscire dalla sfera o entrarvi).

4.4 Connessioni eterocliniche

Esistono, anche, connessioni fra soluzioni periodiche differenti che determinano il passaggio da un'orbita periodica attorno a L_1 ad un'altra attorno a L_2 , attraversando, per tenere in considerazione la struttura delle regioni di Hill, il reame J . Tali connessioni sono, quindi, orbite che utilizzano il manifold instabile di un'orbita (o un punto) e quello stabile di un'altra che giaccia sulla stessa superficie d'energia: **connessioni eterocliniche**.

Utilizzando connessioni omocliniche ed eterocliniche della stessa energia, è possibile definire catene di orbite che legano in maniera asintotica soluzioni periodiche attorno L_1 e L_2 .

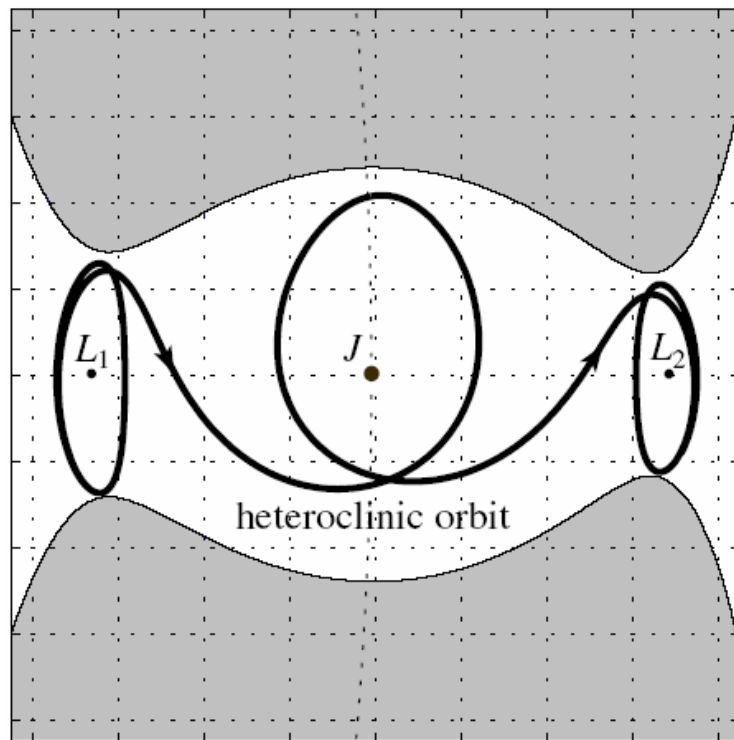


Figura 4.6 - Connessione Eteroclinica

4.5 Manifolds invarianti associati ai punti di librazione

Alla dinamica instabile dei punti collineari sono dunque associati due manifolds monodimensionali ($W_{L_i}^u, W_{L_i}^s$) che rappresentano rispettivamente l'autovettore reale instabile e quello reale stabile, ovvero che costituiscono la parte saddle della soluzione.

Il sistema di equazioni del moto può essere scritto al primo ordine e linearizzato (Tabella 2.9) in generale nella forma:

$$\dot{X} = A \cdot X \quad (4.3)$$

in cui A rappresenta la matrice Jacobiana del sistema (ovvero, in questo caso, la matrice dei coefficienti (2.51)). Come già studiato nel par. 2.12, A presenta due autovalori reali e quattro immaginari; per ottenere i manifolds si è interessati al comportamento della parte reale della soluzione.

Può dedursi, osservando la soluzione generale del sistema linearizzato, (2.76) che l'autovettore associato all'autovalore che moltiplica l'esponenziale positivo porta la soluzione ad allontanarsi dal punto di equilibrio; quindi l'autovalore instabile è quello positivo (λ_u) e l'autovettore instabile è il corrispondente (u_u). Allo stesso modo, l'autovettore che moltiplica $e^{-\lambda t}$ tende ad annullarsi velocemente per tempi positivi ed a far divergere la soluzione per tempi negativi; l'autovalore stabile è, dunque, quello negativo (λ_s) e l'autovettore stabile è il corrispondente (u_s). €

La computazione numerica dei manifolds associati ai punti di librazione richiede la semplice propagazione di una data perturbazione nella direzione dell'autovettore instabile o di quello stabile^{[22][29]}. Sia dunque data una perturbazione d e sia X_0 lo stato del sistema nel punto di equilibrio:

- Per ottenere $W_{L_i}^s$ è necessario integrare indietro nel tempo (poiché l'autovalore stabile costituisce la parte divergente della soluzione per tempi negativi) le equazioni del moto partendo dalla condizione iniziale:

$$X_0^s = X_e \pm d \cdot u_s \quad (4.4)$$

- Per ottenere $W_{L_i}^u$ è necessario integrare in tempi positivi (poiché l'autovalore instabile costituisce la parte divergente della soluzione per tempi positivi) le equazioni del moto partendo dalla condizione iniziale:

$$X_0^u = X_e \pm d \cdot u_u \quad (4.5)$$

La presenza del simbolo \pm indica la presenza di due rami di ogni manifolds.

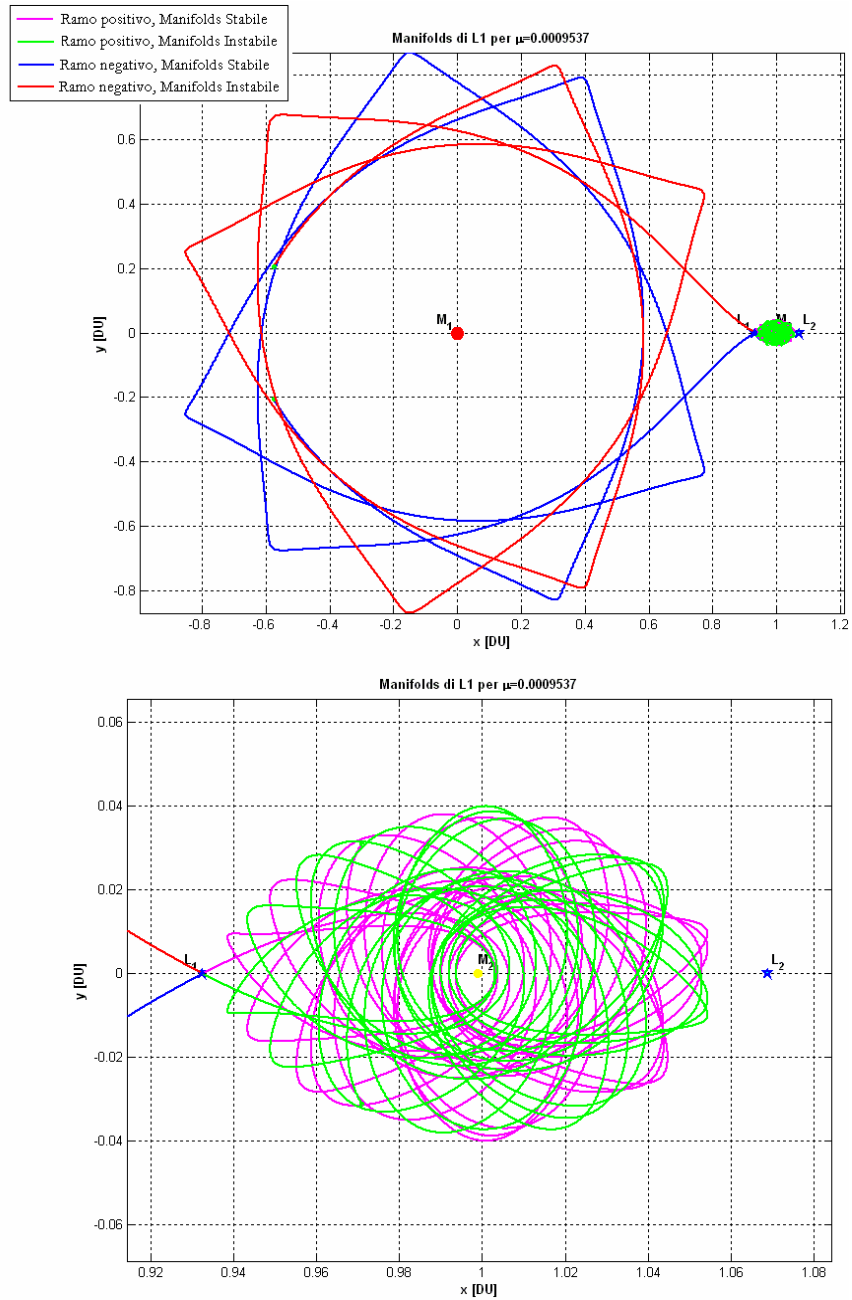


Figura 4.7 - Manifolds associati ad L_1 nel sistema Giove-Sole

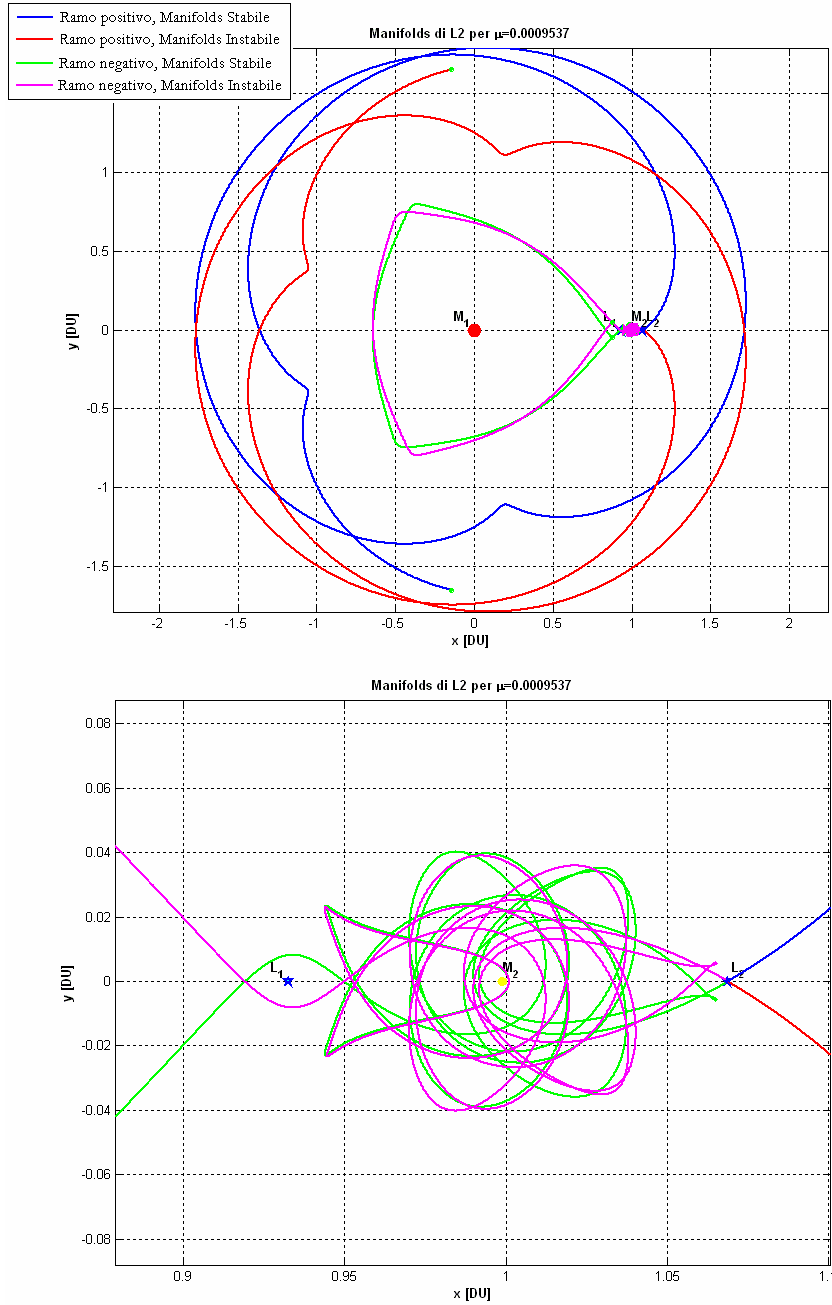


Figura 4.8 - Manifolds associati ad L_2 nel sistema Giove-Sole

Le immagini precedenti sono state ottenute per un valore di μ pari a quello del sistema Giove-Sole, con intervalli di integrazione di $\pm 30 TU$ e con un valore della perturbazione dell'ordine di 10^{-5} .

Si è osservato a tal proposito che per valori inferiori di d , la forma dei manifolds rimane qualitativamente la medesima, mentre per valori superiori le perturbazioni, soprattutto in termini di velocità, sono troppo piccole ed il sistema non riesce a fuggire dai dintorni di m_2 .

Per dare un'idea, ancora una volta, della marcata dipendenza dal parametro di massa del sistema si riportano anche gli andamenti dei medesimi manifolds nel sistema Terra-Sole e Terra-Luna; oltre al parametro di massa si è, ovviamente, scalato anche il valore di d e di TU ; le convenzioni di colore sono, invece, le medesime.

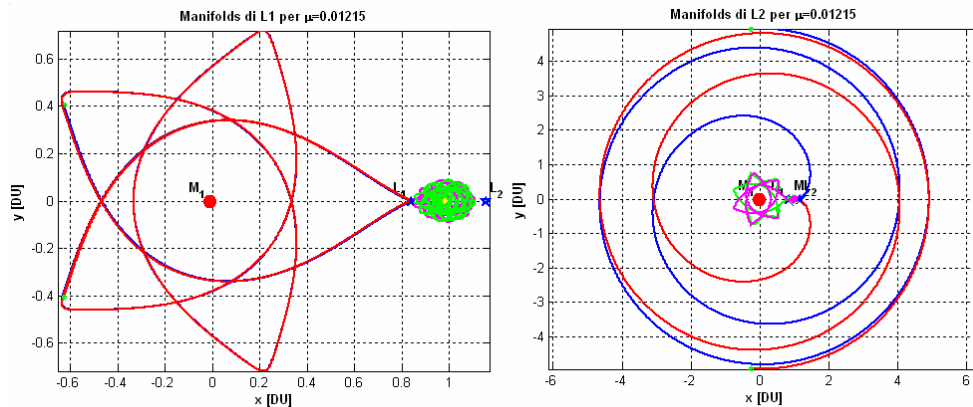


Figura 4.9 - Manifolds associati a LL_1 e LL_2

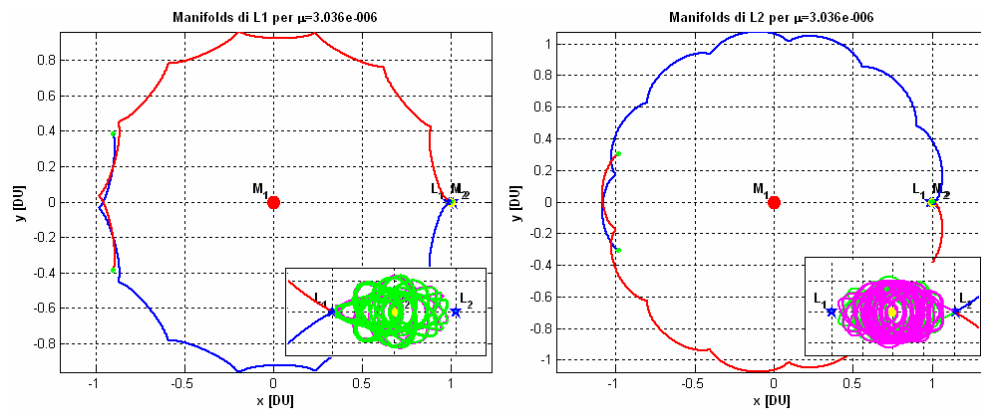


Figura 4.10 - Manifolds associati ad EL_1 ed EL_2

Si fa notare che per applicare le 4.4 e 4.5 gli autovettori del sistema devono essere scritti nella forma (2.60), ovvero normalizzati rispetto al loro primo termine.

All'aumentare della perturbazione d , il comportamento dei manifolds associati ai punti di equilibrio è quello di allargarsi sempre più; ovviamente esiste un limite a questa distorsione oltre il quale la dinamica dei punti non rispetta più quella dei manifolds.

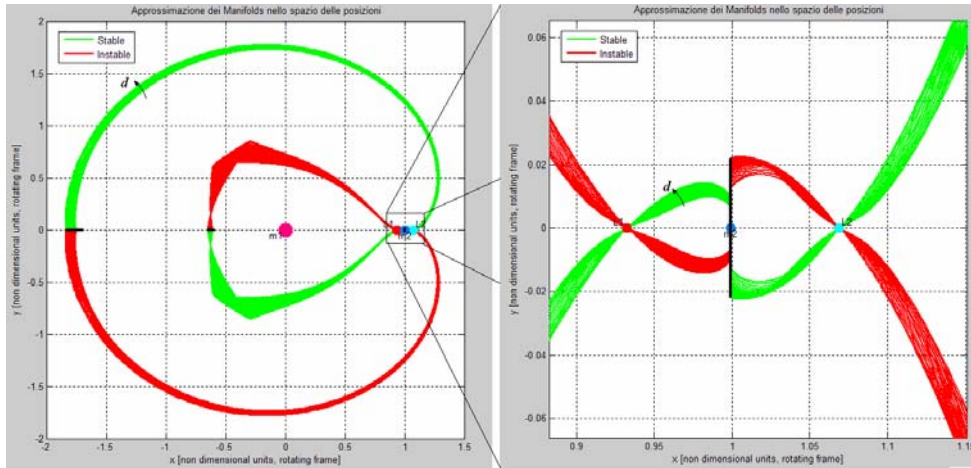


Figura 4.11 - Andamento dei manifolds competenti ai punti JL_1 e JL_2 al variare dell'energia del sistema

Da quanto detto si può intendere, dunque, il termine d come una sorta di energia del sistema, o meglio una differenza fra l'energia del sistema e quella del punto di librazione. Le velocità iniziali, utilizzate per l'integrazione delle equazioni del moto, infatti, sono di entità crescente in funzione di d . Con questa interpretazione le curve di figura 4.11 sono ottenute per un intervallo di d tra [0.0001:0.0005:0.01].

4.6 Manifolds invarianti associati ad orbite periodiche

Così come i punti di equilibrio presentano una parte divergente della soluzione, anche le orbite periodiche attorno essi presentano una dinamica instabile, dunque esistono per esse manifolds che, centrati in quelli associati ai punti di librazione, si presentano bi-dimensionali.

Si sottolinea il fatto che si sta affrontando il caso del PCR3BP poiché in questo i manifolds sono ottenibili più semplicemente ed esiste una precisa catalogazione delle diverse orbite.

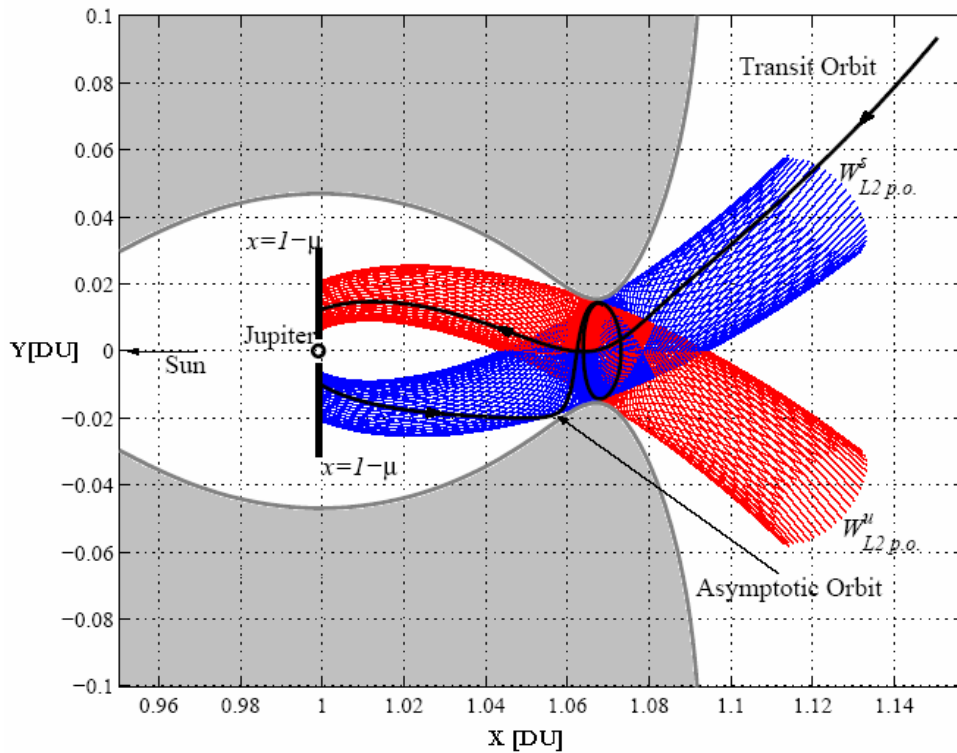


Figura 4.12 - Manifolds associati ad un'orbita periodica attorno a JL_2

La matrice monodroma (vedi par. 3.6) rappresenta una approssimazione di primo ordine (ottenibile mediante una sorta di sviluppo alla Taylor) per mappare il flusso da un punto dell'orbita periodica X_0 ad un punto di una qualunque sezione di Poincaré (vedi par 4.7) X :

$$X \mapsto X_0 + M \cdot (X - X_0) \quad (4.6)$$

Gli autovettore di M danno la direzione dei manifolds monodimensionali associati ad ogni punto dell'orbita periodica. Sia data, come nel par 4.5, una perturbazione d e sia X_0^i un punto generico dell'orbita periodica^{[20][22]}:

- Per ottenere $W_{L_2, p.o.}^s$ è sufficiente propagare in tempi negativi, per ogni punto dell'orbita periodica, la condizione iniziale:

$$X_{0,s}^i = X_0^i \pm d \cdot u_s^i \quad (4.7)$$

- Per ottenere $W_{L_i, p.o.}^u$ è sufficiente propagare in avanti, per ogni punto dell'orbita periodica, la condizione iniziale:

$$X_{0,u}^i = X_0^i \pm d \cdot u_u^i \quad (4.8)$$

u_s^i, u_u^i sono gli autovettore (stabili ed instabili) associati ai relativi autovalori della matrice monodroma valutata in $X = X_0^i$.

Il parametro d rappresenta la distanza fra il punto utilizzato per il calcolo del manifold ed il punto dell'orbita periodica cui esso compete; ovviamente minore è il suo valore e migliore è l'approssimazione del manifold ottenibile con tale metodo di prima approssimazione. Questo procedimento è spesso definito come globalizzazione dei manifolds; si estendono, mediante la matrice M , strutture che sono determinate in ambito locale dalle equazioni linearizzate. L'idea fondamentale, infatti, è quella di ricercare un algoritmo che, da una approssimazione lineare definita nelle regioni di equilibrio, globalizzi queste strutture in tutto lo spazio seguendo il campo vettoriale del sistema.

Come approssimazione di ordine zero, si è ipotizzato di prendere come direzioni di instabilità per i punti dell'orbita periodica proprio quelle degli autovettori reali della matrice Jacobiana del sistema. Ovvero si è considerato il manifold associato ad ogni punto della soluzione periodica come quello associato ad un punto di librazione; tale approssimazione, sensibilmente più semplice da un punto di vista computazionale, è tanto più accurata quanto più l'ampiezza dell'orbita periodica è piccola e, quindi, i suoi punti sono più vicini al punto di librazione. Ciò è giustificato dal fatto che l'andamento dei manifolds bidimensionali è lo stesso di quelli monodimensionali, attorno ai quali sono centrati, competenti a ciascun punto di librazione; si osservi, a tal proposito, come l'andamento di fig. 4.13 e fig. 4.14 sia lo stesso di fig. 4.7 e fig. 4.8.

I risultati così si ottenuti risultano abbastanza accurati soprattutto nell'ambito di uno studio preliminare e rispettano l'andamento dei manifolds implementabili con la procedura precedente. Avendo affrontato questa parte della trattazione nel caso piano, i manifolds sono derivati partendo da un'orbita di tipo Lyapunov (l'unica esistente nel PCR3BP).

Nel sistema Terra-Giove, utilizzando un'ampiezza di $1.25e^6$ km per l'orbita periodica di partenza si ottengono i seguenti risultati. L'intervallo d'integrazione, in entrambe le direzioni di propagazione, è fissato a 5 TU.

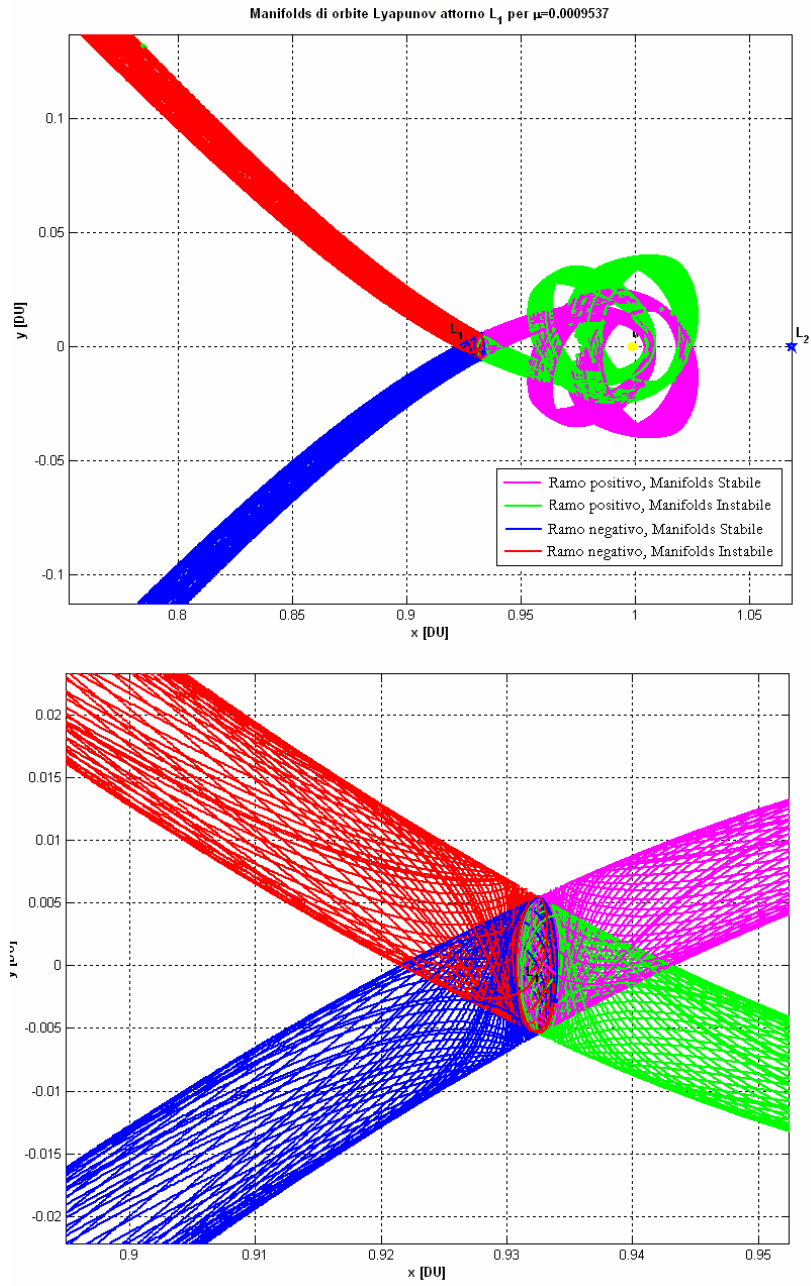


Figura 4.13 - Manifolds associati ad orbite Lyapunov attorno L_1

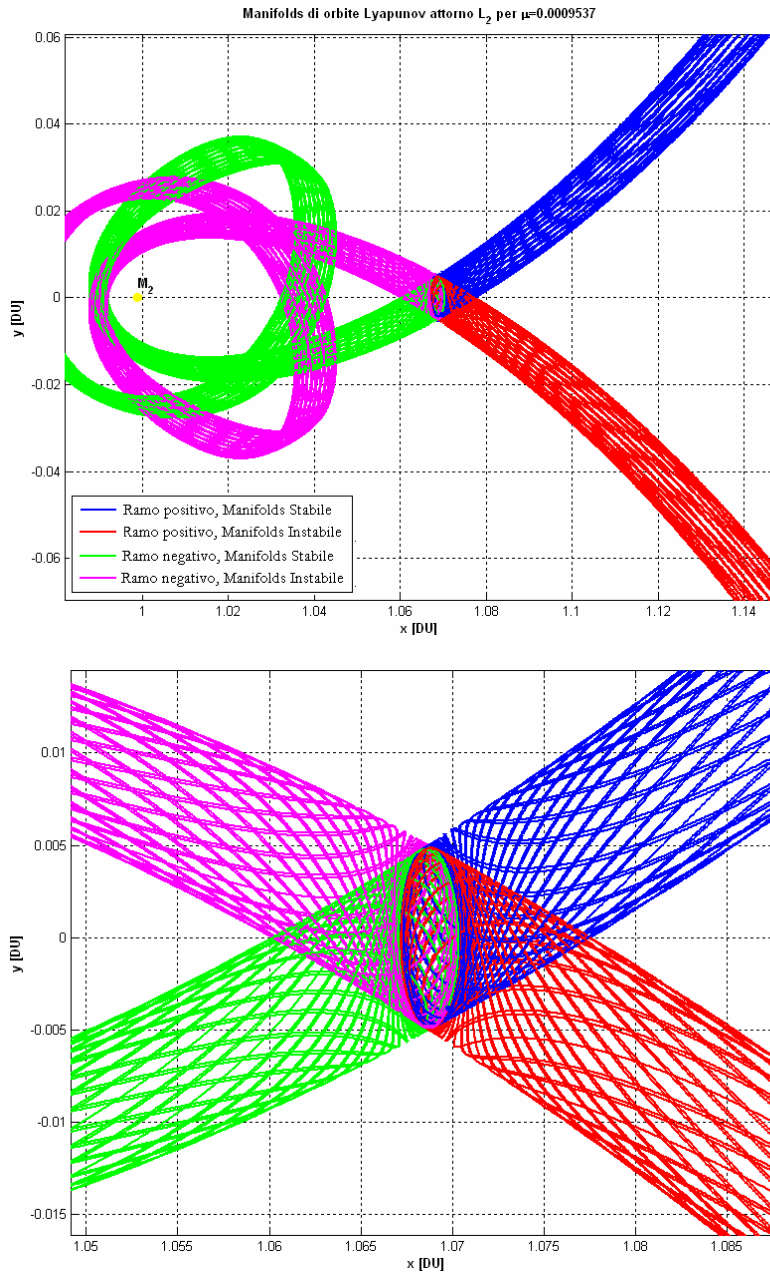


Figura 4.14 - Manifolds associati ad orbite Lyapunov attorno L_2

Si delineano, quindi, nello spazio delle posizioni, oltre a zone di moto permesso e proibito, una serie di strutture ordinate che identificano i diversi comportamenti delle orbite.

Una conformazione generale dello spazio delle posizioni è la seguente.

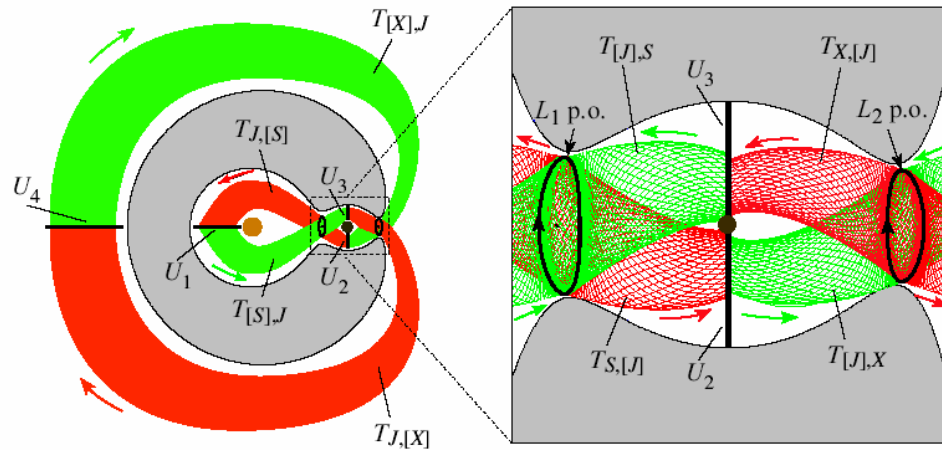


Figura 4.15 - Manifolds nello spazio delle posizioni per il sistema Giove-Sole

Mediante l'approssimazione di ordine zero utilizzata, si ottiene un andamento qualitativamente simile e solo nel reame J si verifica una maggiore distorsione dei manifolds.

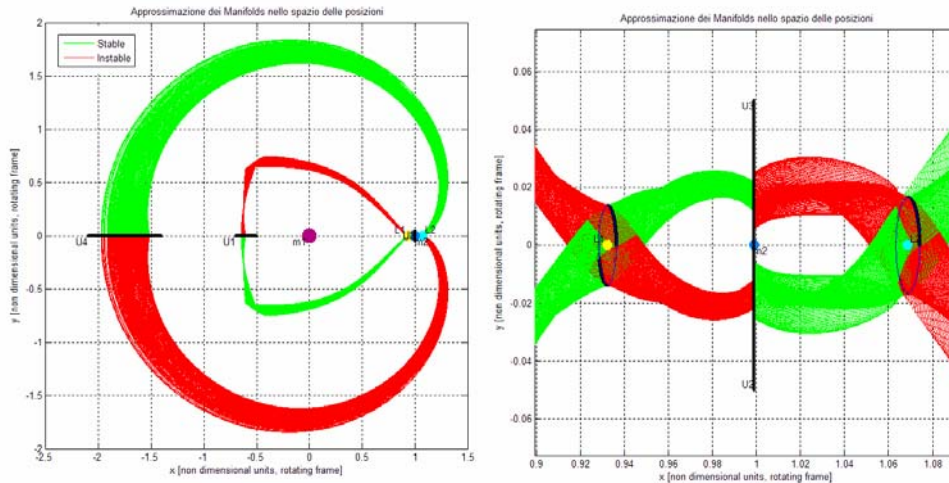


Figura 4.16 - Approssimazione dei manifolds nello spazio delle posizioni per il sistema Giove-Sole

Si osservi come questo andamento riprenda quello dei manifolds competenti ai punti di librazione al variare dell'entità della perturbazione

(fig. 4.11); tale fenomeno si può spiegare ricordando il significato di d . L'andamento di questi manifolds dipende, oltre che dalla posizione, anche dalle componenti iniziali della velocità che vengono incrementate aumentando d , mantenendo la posizione dei punti di librazione, ed utilizzando come condizioni iniziali quelle di un'orbita periodica.

A riprova, si è anche implementato un ramo di manifold relativo ad un'orbita Halo; per questo genere di soluzioni l'approssimazione si rivela alquanto approssimativa.

Come componenti degli autovalori fuori dal piano, lungo cui propagare la perturbazione d , si sono usati quelli associati alla componente z della matrice dei coefficienti.

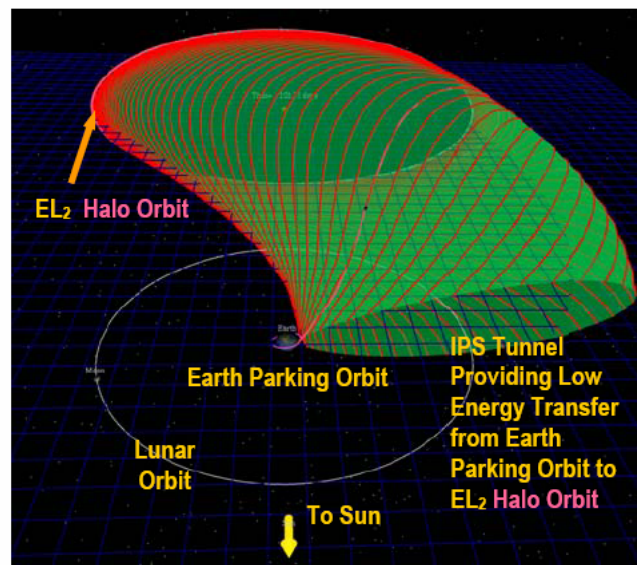
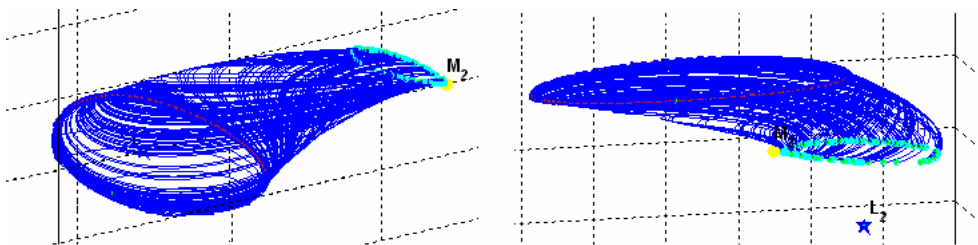


Figura 4.17 - Manifolds di orbite Halo nel sistema Terra-Sole

4.7 Sezioni di Poincarè

L'idea fondamentale di Poincarè [1890] è quella di ricondurre lo studio di strutture globali in un sistema di equazioni differenziali allo studio di una mappatura discreta.

Utilizzando una catena costituita da due connessioni omocliniche ed una eteroclinica è possibile costruire una mappatura che consente lo studio della complessa struttura dell'orbita attorno a tale catena. Trattandosi, infatti, di orbite altamente non lineari, anche dopo centinaia di rivoluzioni, si osservano solo curve spiraleggianti che non sembrano presentare alcuna regolarità.

La mappatura riduce, dunque, lo studio da tutto lo spazio delle fasi ad alcune zone di esso in grado, comunque, di determinare in maniera univoca il comportamento della soluzione in ogni punto. Le sezioni sufficienti a descrivere il flusso sono determinate inserendo dei piani perpendicolarmente al percorso delle orbite e raccogliendo su questi lo stato del sistema all'intersezione.

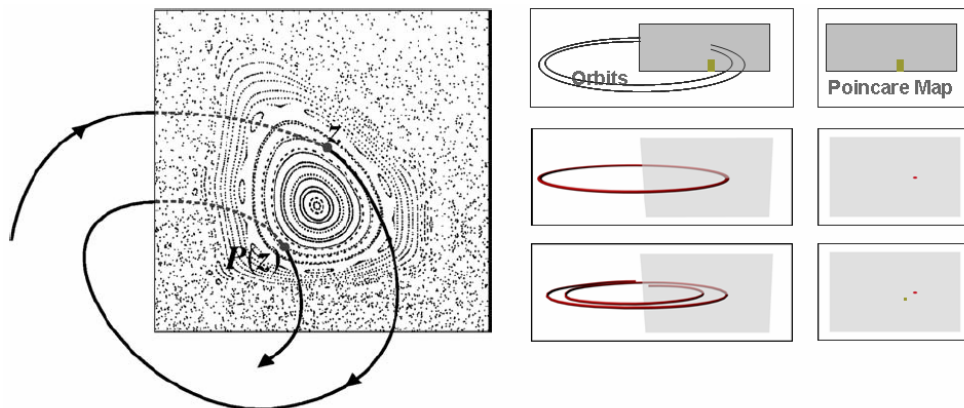


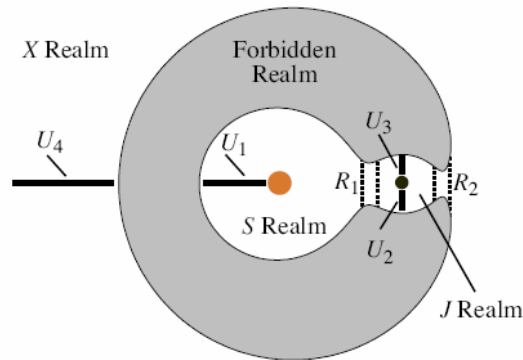
Figura 4.18 - Piano della sezione di Poincarè

Con tale metodo il punto z (vedi fig. 4.18) è mappato in $P(z)$ seguendo la traiettoria fino alla successiva intersezione con il piano. Si osservi come, mediante tale mappatura si riscontra una geometria della soluzione che prevede un mare caotico di orbite in cui si distinguono "isole", determinate da circoli nelle sezioni di Poincarè, rappresentanti soluzioni quasi periodiche. A tali circonferenze, infatti, corrispondono orbite che tendono a ripassare all'incirca dallo stesso punto alla successiva intersezione con il piano.

Si è, a questo punto, interessati ad identificare le posizioni dei piani di sezione e le coordinate da graficare su essi.

In virtù del fatto che la catena omoclinica-eteroclinica deve poter spaziare in tutto il piano, il dominio della mappatura deve trovarsi in posizioni idonee per identificare il moto in ogni reame; in particolare si collocano:

- Un piano nel reame interno con $y=0$: U_1
- Un piano nel reame esterno con $y=0$: U_4
- Un piano nel reame di m_2 con $x=1-\mu$ e $y>0$: U_3
- Un piano nel reame di m_2 con $x=1-\mu$ e $y<0$: U_2



Il dominio totale della mappatura è dunque: $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$

Come detto in precedenza, tale mappatura è costruita nei dintorni di una catena omoclinica-eteroclinica; in particolare si definiscono, nel dominio, quadrati centrati attorno ai punti di intersezione della catena con i piani di sezione (*punti omoclinici o eteroclinici*).

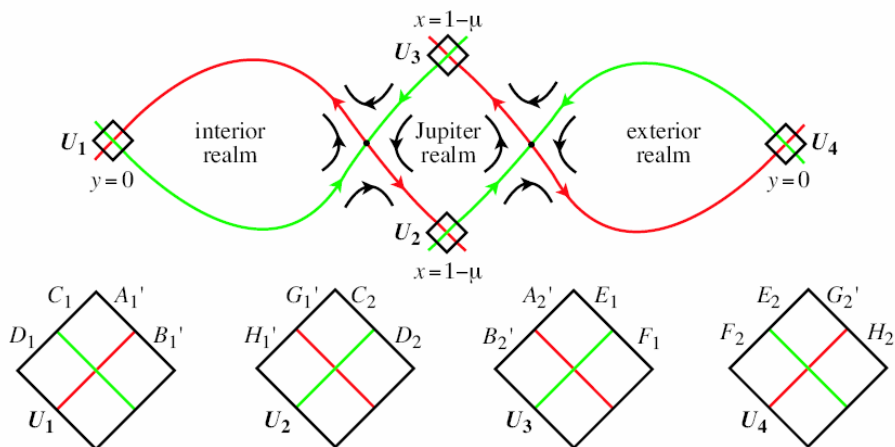


Figura 4.19 - Dominio e partizioni di esso per la mappatura di Poincarè

Da tali quadrati il flusso segue il cammino imposto dai manifolds i quali, a loro volta, suddividono il dominio in ulteriori sotto-dominii in funzione delle proprietà che impongono al flusso^{[13][30]}.

In generale, per ogni sezione, si grafica l'andamento della coordinata non fissata dalla posizione del piano e la derivata della stessa. Ciò consente di ricostruire interamente lo stato del sistema; infatti:

- La posizione della sezione di Poincarè fissa una coordinata del sistema.
- Il punto sulla sezione fissa l'altra coordinata e la relativa velocità.
- L'integrale dell'energia consente di ricavare la quarta coordinata che completa lo stato del problema (2.27):

Riassumendo:

| SEZIONE DI POINCARE' | STATO DEL SISTEMA |
|-----------------------------|--|
| U_1 | $\{(x, u) \mid y = 0, x < 0, v(x, u, e) < 0\}$ in S |
| U_4 | $\{(x, u) \mid y = 0, x < -1, v(x, u, e) > 0\}$ in X |
| U_2 | $\{(y, v) \mid x = 1 - \mu, y < 0, u(y, v, e) > 0\}$ in $J_{\text{metà in feriore}}$ |
| U_3 | $\{(y, v) \mid x = 1 - \mu, y > 0, u(y, v, e) < 0\}$ in $J_{\text{metà su periore}}$ |

Tabella 4.1 - Stato del sistema dalle sezioni di Poincarè

Si osservi come l'analisi è stata condotta nell'ambito del PCR3BP e quindi lo stato del sistema appartiene ad \mathcal{R}^4 .

La regolarità che tale strumento rivela è meglio comprensibile variando le coordinate che sono graficate sul piano di Poincarè: plottando, infatti, eccentricità e semiasse maggiore, le soluzioni assumono un aspetto ancor più regolare; ad ogni pianeta, o meglio ad ognuno dei suoi punti di librazione, è associato un manifold costituito dalle diverse intersezioni della sua orbita con il piano di sezione al variare dell'energia.

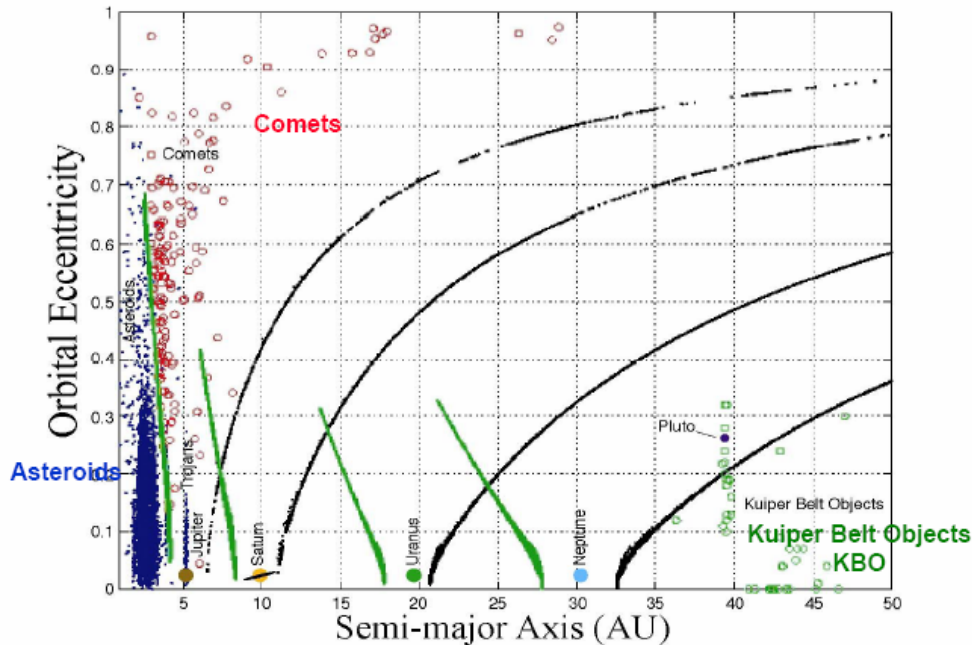


Figura 4.20 - Sezioni di Poincarè per i pianeti esterni del sistema solare

Le linee in verde nell'immagine precedente, alla sinistra dei pianeti, sono i manifolds associati ai relativi punti L_1 ; tale ramo cresce con l'energia del punto. Le curve in nero, invece, rappresentano i manifolds associati ai punti L_2 alla destra dei pianeti. I manifolds concernenti i pianeti interni del sistema solare sono troppo piccoli per esser rappresentabili in tale scala. Si osservi come, ad esempio, il manifold relativo a L_2 di Giove interseca quello relativo ad L_1 di Saturno offrendo, così, una passaggio a bassa energia fra i due pianeti. Il manifold relativo ad JL_1 , inoltre sembra essere il discriminante fra la fascia degli asteroidi (in blu) che si trova al disotto di esso e quella delle comete (in rosso) che si trova al di sopra.

4.8 Cenni di dinamica simbolica

Ogni orbita, che passa per un punto q di uno dei domini della mappatura e la cui immagine e pre-immagine ($P^n(q), n = \pm 1, \pm 2, \dots, \infty$) rimane sempre nel dominio U , ovvero che costituisce un *set invariante* della trasformazione, fornisce informazioni circa il percorso seguito e da seguire. Un set invariante è, in effetti, tutta quella zona del piano che resta sempre nel

dominio della mappatura per qualunque numero di iterazioni, sia in avanti che indietro.

La storia dell'orbita può esser raccolta in una sequenza bi-infinita di simboli; lo studio della struttura dell'orbita mediante queste serie di simboli va sotto il nome di *dinamica simbolica*; la sequenza è costituita, appunto, da due serie:

- La prima famiglia è un insieme di un numero limitato di quattro simboli che tengono conto delle precedenti intersezioni con U . Si utilizzano, quindi, i simboli $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ogni volta che l'orbita interseca il relativo piano di sezione.

Non tutte le combinazioni di questi sono consentite, poiché è necessario rispettare la dinamica del sistema e quindi non è consentito ad un'orbita uscente da un U_i di entrare in un qualunque altro U_i . Un'orbita uscente da U_1 , ad esempio, non può direttamente entrare in U_4 senza passare per U_2 o U_3 ; il simbolo u_4 , non può dunque seguire direttamente, in tale sequenza, u_1 . Le relazioni consentite fra questi quattro simboli sono riassumibili mediante una matrice di transizione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

- La seconda famiglia è, invece, la famiglia infinita di numeri naturali maggiori di un dato intero m . Tale sequenza tiene conto del numero di rivoluzioni intere che la proiezione dell'orbita compie attorno a L_1 o a L_2 quando entra nella regione di equilibrio.

Data, quindi, una sequenza bi-infinita del tipo:

$$\alpha = (u, r) = (\dots, (u_{i-1}, r_{i-1}), (u_{i_0}, r_{i_0}), (u_{i_1}, r_{i_1}), (u_{i_2}, r_{i_2}), \dots) \quad (4.10)$$

esiste una condizione iniziale, attorno ad i punti omoclinici ed eteroclinici, tale che l'orbita corrispondente passi da U_{i_0} ad U_{i_1} (se consentito dalla matrice A (3.9)) compiendo, nell'attraversare la regione di equilibrio, r_0 rivoluzioni attorno al relativo punto di Librazione. Ad esempio, se $i_0=1$ ed

$i_1=2$, la proiezione dell'orbita passa da U_1 ad U_2 compiendo r_0 rivoluzioni attorno ad L_1 . Tale condizione iniziale è, inoltre, unica nei dintorni della catena omoclinica-eteroclinica.

Un elemento del tipo:

$$\beta = (\dots; (u_{i_0}, r_0), \dots, (u_{i_k}, \infty)) \quad (4.11)$$

rappresenta un'orbita che tende asintoticamente verso una soluzione di Lyapunov dopo k iterazioni.

Analogamente, un elemento del tipo:

$$\gamma = (\infty, (u_{i_{-l}}, r_{-l}), \dots, (u_{i_0}, r_0), \dots) \quad (4.12)$$

è un'orbita che tende asintoticamente all'indietro verso un'orbita di Lyapunov e vi giunge dopo l iterazioni (in negativo).

Unendo i due risultati, una sequenza del genere:

$$\delta = (\infty, (u_{i_{-l}}, r_{-l}), \dots, (u_{i_0}, r_0), \dots, (u_{i_k}, r_k)) \quad (4.13)$$

è un'orbita che tende sia in avanti che indietro verso un'orbita periodica e vi giunge dopo k iterazioni in avanti e l all'indietro. Ovviamente, se u_{i_k} ($u_{i_{-l}}$) è pari ad 1 o 2 l'orbita tende verso L_1 e resta nella regione R_1 , mentre se è pari a 3 o 4 tende verso L_2 e rimane in R_2 .

L'insieme α comprende orbite oscillanti (orbita che passano da un reame ad un altro un numero infinito di volte), orbite di cattura (orbite che restano confinate in un solo reame ed al più ne possono uscire, per tornarvi, saltuariamente) ed orbite di non transito. Gli insiemi β e γ comprendono orbite asintotiche verso un'orbita periodica; al gruppo δ , invece, appartengono orbite omocliniche ed eterocliniche.

La mappatura di Poincaré presenta dunque le seguenti proprietà:

- Un infinito numerabile (∞^1) di orbite periodiche cui è impossibile ogni periodo.
- Un infinito non numerabile ($\infty^{2,3,\dots}$) di orbite non periodiche.
- Un passaggio continuo da un'orbita ad un'altra (è un insieme denso).

Questa trasformazione modella molto bene la dipendenza della soluzione del problema dalle condizioni iniziali; prese due condizioni iniziali, molto vicine fra loro, le soluzioni cui esse danno luogo possono essere molto differenti. Più in generale tale comportamento, proprio dei sistemi dinamici non lineari, va sotto il nome di *chaos deterministico*. A tale fenomeno è, in effetti, dovuta la transizione casuale delle comete fra il reame del Sole e quello di Giove.

4.9 Sezioni di Poincarè dei manifolds

Una delle applicazioni più importanti delle sezioni di Poincarè è la possibilità di utilizzarle per determinare condizioni iniziali tali da rispettare itinerari precisi e prestabiliti. Per determinare tali condizioni iniziali, è innanzi tutto necessario guardare le intersezioni dei manifolds con i piani di Poincarè; queste intersezioni, che si configurano come aree sui diversi piani, mantengono le stesse proprietà dei manifolds da cui sono generate.

Si osservi come il fissare un piano di intersezione abbassa di un ordine le dimensioni del sistema; infatti, i manifolds dall'essere superfici si proiettano in aree.

Le curve d'intersezione dei manifolds si identificheranno mediante la lettera Γ con la stessa convenzione di apici e pedici precedentemente utilizzata. Quello che prima era il volume racchiuso da una superficie cilindrica (W), contenente le orbite di transito da un reame all'altro, si proietta ora in un'area racchiusa dalle curve Γ .

Ogni manifold può potenzialmente intersecare diverse volte il piano di sezione e quindi tracciare su esso differenti curve ad ogni passaggio; si aggiungerà, pertanto, un pedice identificativo dell'intersezione.

Partendo del teorema di Mc Gehee, Libbre, Martinez e Simò hanno trovato un'espressione analitica per la proiezione del ramo instabile nel reame S del manifold competente ad L_1 .

$$d = \mu^{1/3} \cdot \left(\frac{2}{3} N - 3^{1/6} + M \cdot \cos t + O(1) \right) \quad (4.14)$$

$$\alpha = -\pi + \mu^{1/3} \cdot (Nt + 2 \cdot M \cdot \sin t + O(1))$$

d indica la distanza dalle curve a velocità nulla, α la coordinata angolare (vedi fig. 4.15) e M ed N sono due costanti.

Inoltre, per una sequenza di μ , che ha la seguente espressione:

$$\mu_k = \frac{1}{N^3 k^3} \cdot (1 + O(1)) \quad (4.15)$$

la prima intersezione con l'asse x è ortogonale all'asse dando un'orbita omoclinica simmetrica per L_I .

E' stato, inoltre, dimostrato che, per valori di μ e $\Delta e = e - E_1$ sufficientemente piccoli, lo stesso ramo del manifold di L_I ($W_{L_I}^{u,S}$) si proietta, alla sua prima intersezione, su U_1 , in una curva diffeomorfica ad un cerchio (vedi fig. 4.21) ed, infine, se nel piano (μ, e) esiste un punto con una μ_k , definita dal precedente teorema, per la quale:

$$\Delta E > L \cdot \mu_k^{4/3} \cdot (\mu - \mu_k)^2 \quad (4.16)$$

alla prima intersezione con il piano esiste un'orbita omoclinica simmetrica (L è una costante).

Esiste anche una complicata espressione analitica per la curva $\Gamma_{L_1,1}^{u,S}$ in funzione di μ e Δe nelle variabili x ed u .

Le principali conseguenze di tali teoremi sono che:

- Non esistono orbite omocliniche simmetriche associate a L_I per tutti i valori del parametro di massa, ma solo per un insieme discreto di questo; per tutti gli altri valori di μ , $\Gamma_{L_1,1}^{u,S}$ interseca il piano (x, u) in un punto diverso da $u=0$.
- Per valori troppo piccoli di Δe , $\Gamma_{L_1,1}^{u,S}$ non interseca per nulla l'asse $u=0$ e quindi, per simmetria neanche $\Gamma_{L_1,1}^{s,S}$ lo intersecherà. Ciò significa che non esiste alcuna connessione omoclinica simmetrica. Per le simmetrie del problema, infatti, le proiezioni dei manifolds stabili ed instabili competenti allo stesso punto, per lo stesso valore di energia, sono, sui piani di Poincarè, curve simmetriche rispetto l'asse orizzontale. Per questo motivo una volta graficato un manifold l'altro è ottenibile direttamente ed i punti di intersezione con l'asse orizzontale ($u=0$ per le sezioni U_1 ed U_4) rappresentano orbite omocliniche simmetriche che si avvalgono del manifold stabile ed instabile della stessa orbita periodica.

- Per un valore fissato di μ , al crescere di Δe , la curva $\Gamma_{L_1,1}^{u,S}$ si allargherà fino a diventare prima tangente ed in seguito secante in più che un punto, essendo una curva chiusa, all'asse x . Nuovamente in virtù della simmetria del problema anche $\Gamma_{L_1,1}^{s,S}$ lo intersecherà nello stesso punto dando quindi luogo ad un'orbita omoclinica e simmetrica. Tale fenomeno si verifica solo per valori di Δe maggiori di quelli definiti dalla (4.16)

Non esistono dimostrazioni analitiche per gli altri rami dei manifolds, ma solamente delle tecniche numeriche per produrli. E', inoltre, solo numerica la dimostrazione dell'esistenza di connessioni eterocliniche ed omocliniche nel reame esterno.

Le sezioni di Poincarè dei manifolds dipendono, ovviamente, dalla forma di questi ultimi; per il sistema Sole-Giove ed un $\Delta e=0.005$, ad esempio, si ottengono le seguenti curve:

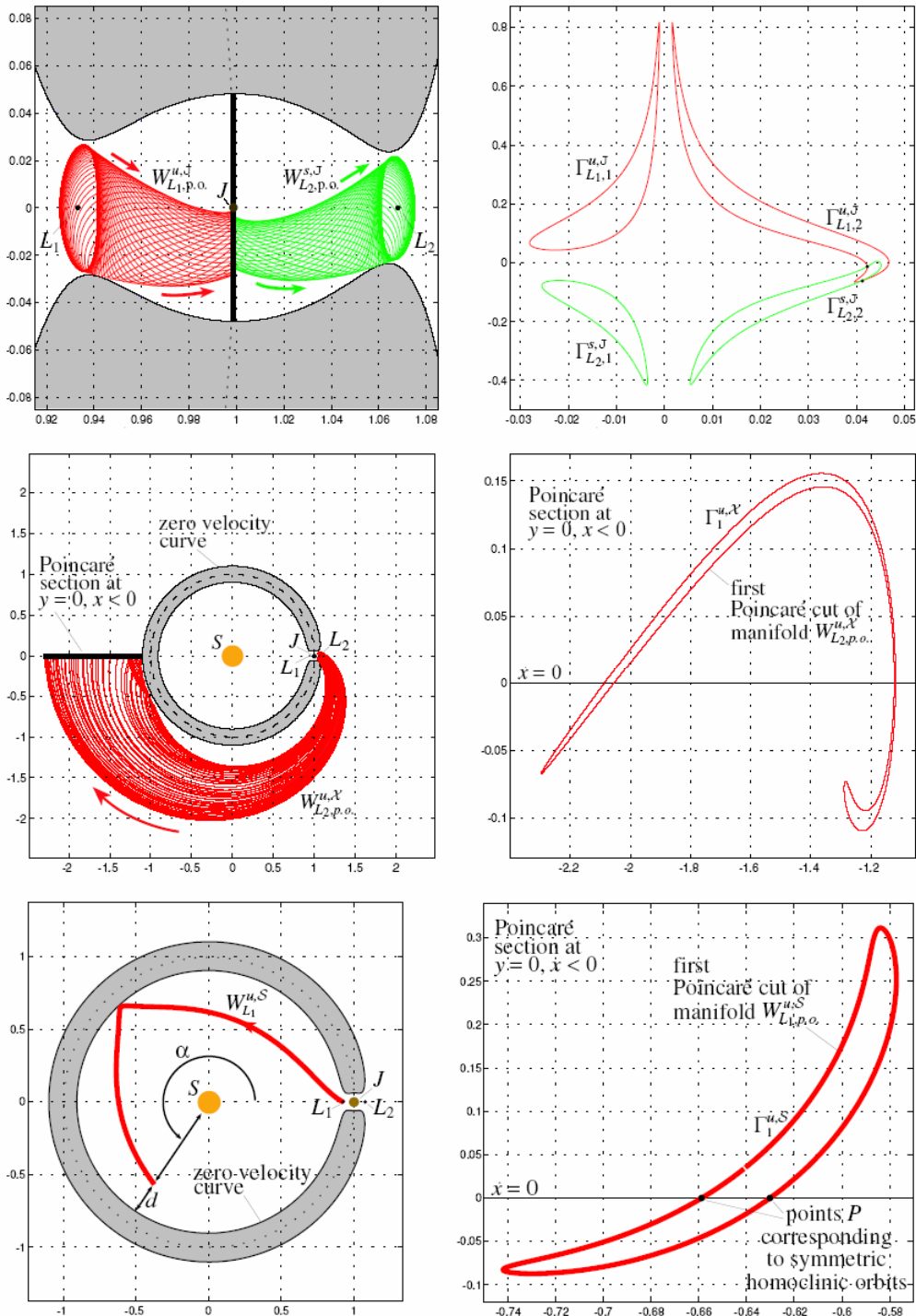


Figura 4.21 - Sezioni di Poincaré per i manifolds del sistema Sole-Giove

Si osservi in dettaglio l'applicazione dei precedenti teoremi nella sezione U_4 ; graficando in questa anche il simmetrico manifold stabile, si possono ottenere i punti corrispondenti a connessioni omocliniche simmetriche e non¹.

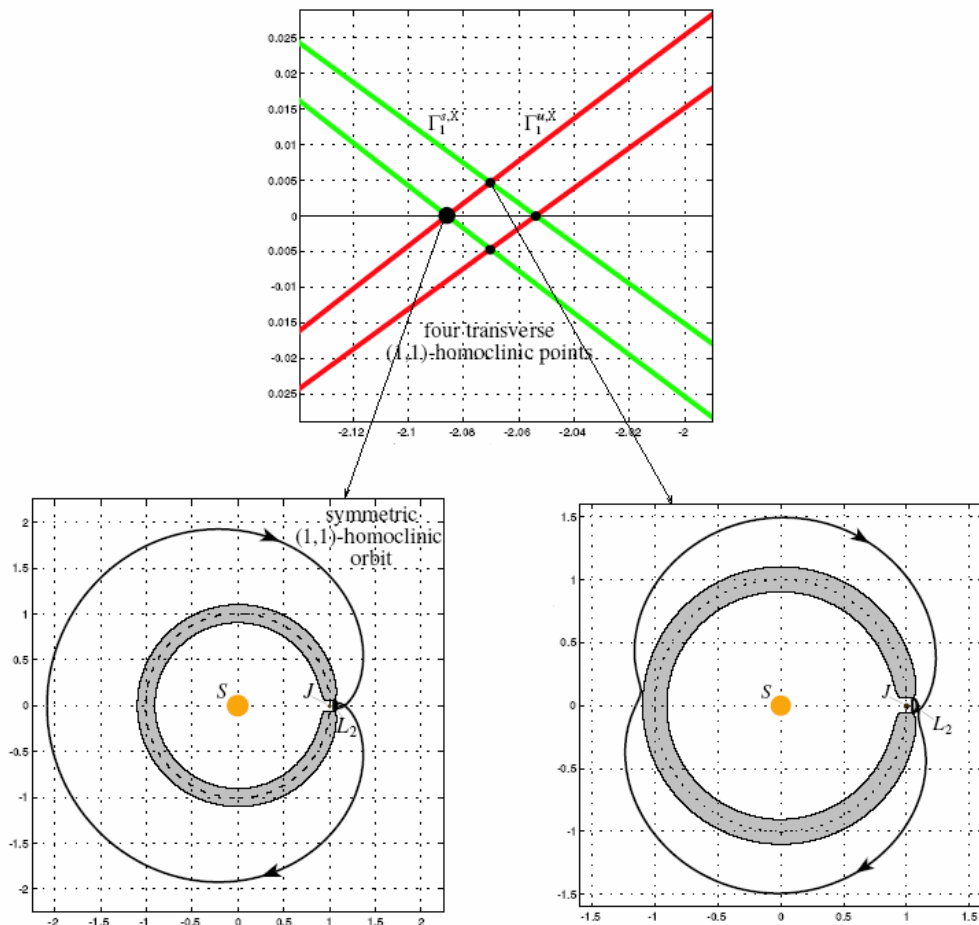


Figura 4.22 - Orbite omocliniche simmetriche ed asimmetriche

In modo analogo la sezione U_2 fornisce i punti di intersezione fra i manifolds stabili ed instabili competenti a due differenti orbite di Lyapunov dai quali è possibile, dunque, ricavare le condizioni iniziali per un'orbita

¹ In effetti la connessione non simmetrica riportata in figura 22 si riferisce al gruppo di punti di intersezione centrati attorno -1.15, per i casi con $u \neq 0$ riportati in figura l'asimmetria sarebbe meno pronunciata.

eteroclinica con un valore di energia che è quello determinato dalle due soluzioni periodiche.

Si noti come le proiezioni dei manifolds relativi alle due orbite non si intersecano al primo passaggio attraverso il piano, bensì al secondo; sono, infatti, le curve $\Gamma_{L_1,2}^{u,J}, \Gamma_{L_2,2}^{s,J}$ ad intersecarsi e non $\Gamma_{L_1,1}^{u,J}, \Gamma_{L_2,1}^{s,J}$; il risultato dei punti identificati in fig. 4.21 è quello di fig. 4.6.

Mediante l'approssimazione di ordine inferiore, utilizzata per ricavare i manifolds, si ottengono, invece, proiezioni solo qualitativamente simili.

Fissato il valore di μ e quello di Δe si ottengono manifolds approssimati del tipo:

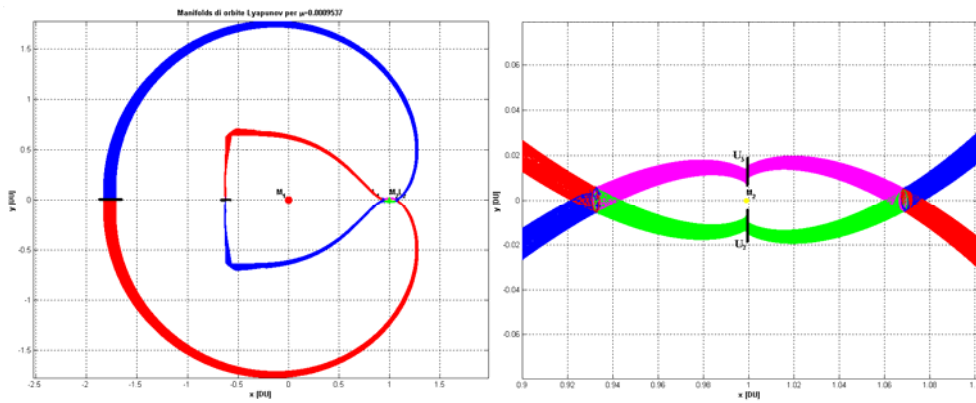


Figura 4.23 - Approssimazione manifolds per il sistema Giove-Sole con $\Delta e=5e^{-5}$

Fermando l'integrazione a coordinate pari a quelle delle differenti sezioni di Poincaré e graficando su questi piani il valore finale della coordinata non fissata e la relativa velocità, si ottengono una serie di punti che assumono un andamento tale da confermare la regolarità di queste strutture.

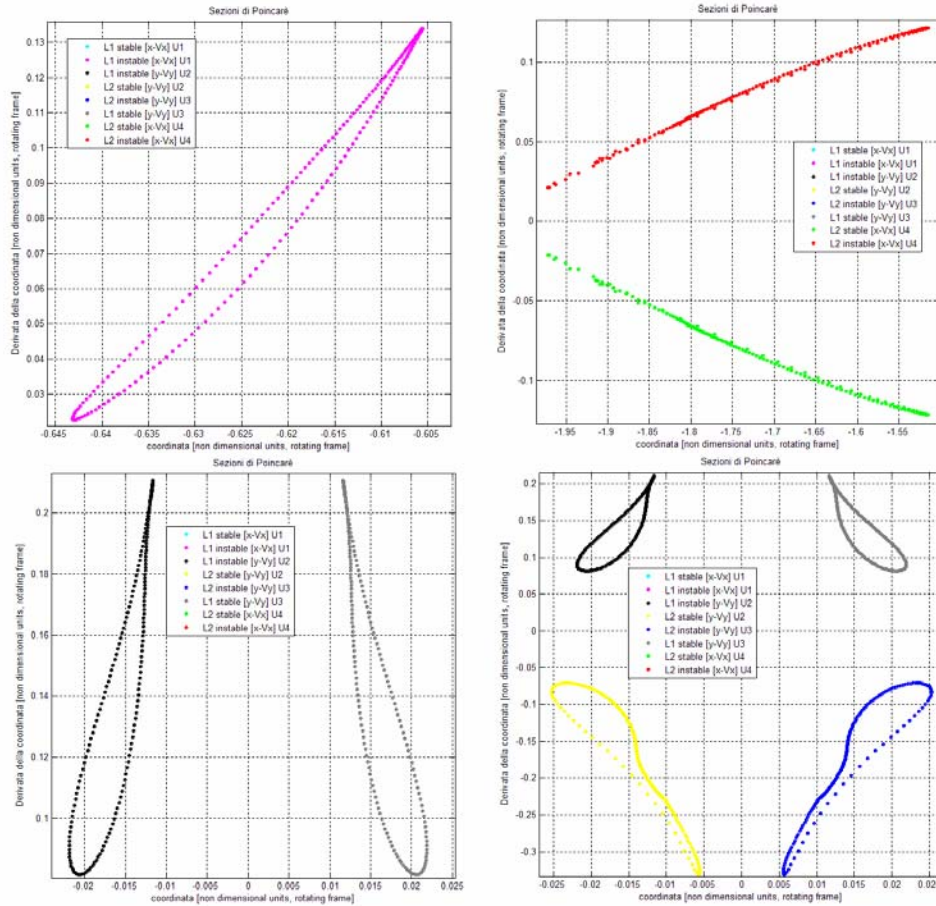
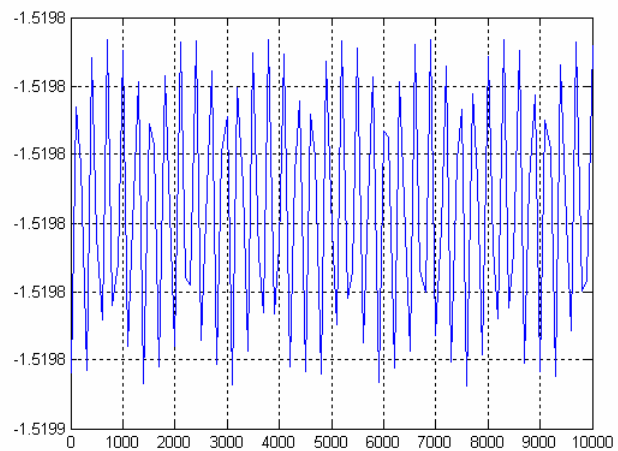


Figura 4.24 - Approssimazione delle sezioni di Poincaré

Per cercare di imporre lo stesso livello di energia al sistema, quindi collocarsi sulla stessa superficie, si è proceduto calcolando il valor medio dell'energia, dall'approssimazione analitica di Richardson, dell'orbita periodica e si è sottratta l'energia associata al punto di librazione relativo.

Si ricorda che tale



approssimazione è tanto migliore quanto minore è il Δe del sistema: le sezioni precedenti sono state ottenute per un'ampiezza lungo x di $1.25e^6$ km a cui corrisponde, per il sistema Giove-Sole un $\Delta e = -1.5198 - E_{JL1} = 5.4536e^{-5}$ ($E_{JL1} = -1.5199$).

L'immagine mostra l'andamento dell'energia per l'orbita analiticamente ottenuta ed utilizzata per il computo delle precedenti sezioni di Poincarè.

Si osservi come, a causa del livello moto basso di energia le curve Γ non intersecano l'asse delle x , non creando, in questo modo, la possibilità per connessioni omocliniche simmetriche.

Si sono anche provati valori maggiori delle ampiezze, quindi delle energie, ma la distorsione osservata nelle orbite periodiche e nei manifolds si è dimostrata eccessiva. Per valori maggiori si rende quindi necessario un utilizzo della procedura numerica descritta (par. 4.4).

4.10 Costruzione di orbite con itinerari assegnati

Un'orbita può essere identificata mediante una sequenza di simboli che descrivono i reami in cui questa è passata o passerà. Un'orbita del tipo [X, J, S], ad esempio, è un'orbita che si trova nel reame J, per tempi negativi va nel reame X e per tempi positivi in S.

Sequenze di tali simboli possono, solo in linea teorica, essere infinite poiché oltre un certo limite il determinismo del problema viene meno: non bisogna dimenticare, infatti, che la natura fortemente non lineare della soluzione determina comportamenti anche molto diversi in seguito ad una piccola variazione di condizioni iniziali.

Si indicheranno le aree di un manifold con una lettera tra parentesi quadre che identifica il reame in cui attualmente si trova (quindi il reame in cui si trova la sezione di Poincarè), con una lettera precedente per indicare il reame da cui proviene e con una successiva per definire quello in cui andrà.

Ricordando che le sezioni di Poincarè dei manifolds conservano le proprietà degli stessi, si è in grado di costruire condizioni iniziali che soddisfano un itinerario assegnato.

Si suppone di costruire un'orbita con un itinerario del tipo [X, J, S], quindi si ricercano i punti appartenenti ad un'area del tipo (X, [J], S). Si consideri l'intersezione fra la proiezione su U_3 del manifold instabile di L_2 e di quello stabile di L_1 nello stesso reame; quello che si ottiene è un'area che ha le proprietà di entrambi i manifolds.

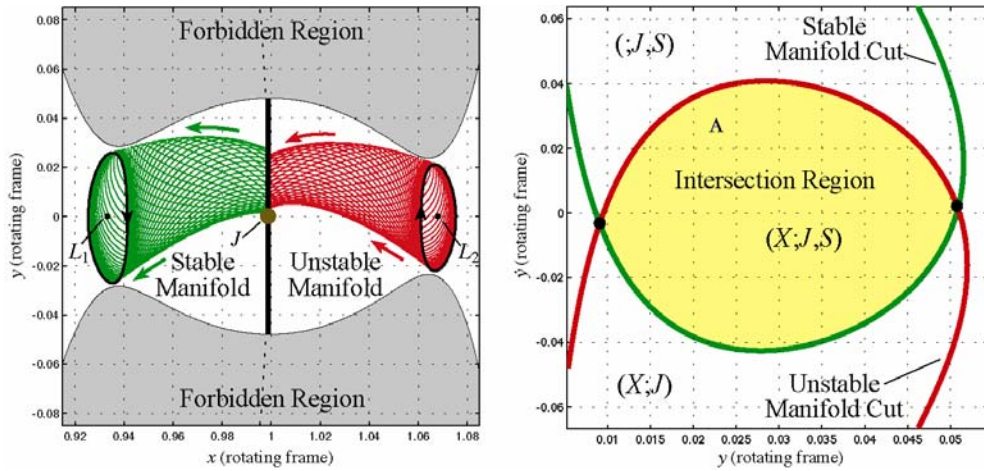


Figura 4.25 - Sezione U_3 del manifolds stabile di JL_1 ed instabile di JL_2

In altre parole, un punto appartenente all'area A (vedi fig. 4.25) è un punto che costituisce le condizioni iniziali per un'orbita eteroclinica; l'appartenenza al manifold instabile di L_2 , infatti, lo porta ad allontanarsi asintoticamente da questo punto e l'appartenenza al manifold (o meglio alla sua proiezione sulla sezione di Poincaré) stabile di L_1 lo conduce verso lo stesso per tempi crescenti. Un punto interno al ramo instabile del manifold competente ad L_2 identifica, inoltre, anche tutte le orbite che sono in grado di passare dal reame X a J , mentre un punto appartenente al ramo stabile di L_1 le orbite di transito da J ad S . Un punto in A è quindi un punto che fornisce uno stato del sistema identificando un'orbita che, partendo da X , attraversa J per entrare in S . Le condizioni iniziali determinabili da un punto di A forniscono orbite del tipo:

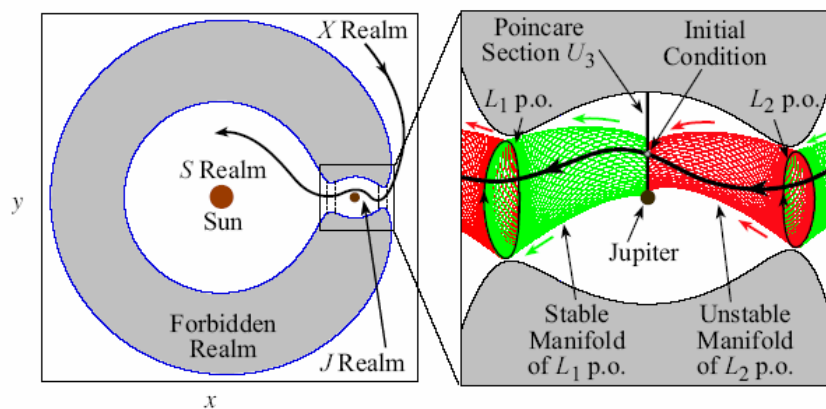


Figura 4.26 - Orbita di transito con un itinerario del tipo (X, J, S)

Dalla appartenenza di un punto ad un'area oppure ad un'altra del piano di Poincarè, si è in grado di desumere il cammino dell'orbita sia per tempi positivi che negativi.

Si osservi come tali orbite sono anche definite "robuste", nel senso che una condizione iniziale determinata da un punto adiacente, entro un certo limite, a quello considerato, fornisce orbite che si comportano allo stesso modo.

Seguendo lo stesso procedimento si possono costruire anche orbite con itinerari più complessi di quello appena descritto.

Si descrive la costruzione di un itinerario identificato da cinque simboli: (X, J, S, J, X); per quanto detto, si tratta di un itinerario che passa dal reame esterno a quello di m_2 , a quello interno, quindi nuovamente a quello di m_2 per tornare nel reame esterno. Tale esempio riprende la traiettoria della cometa p/Oterma (vedi par. 4.2); si utilizzerà ancora un valore di $\mu=9.537e^{-4}$ quello del sistema Giove-Sole ed un valore di energia $e=-1519$ (simile a quello della cometa). Il procedimento per la costruzione dell'itinerario è dunque:

- Considerare sulla sezione U_3 le prime intersezioni dei manifolds di L_1 e L_2 (il numero fra parentesi tonde indica il numero dell'intersezione con il piano).
- Considerare l'aria di questo piano appartenente sia al ramo che si trova in J (reame in cui si trova U_3) e proviene da X (quindi racchiusa dall'intersezione con il manifold instabile di L_2) sia al ramo che si trova in J ed andrà verso S (ovvero l'aria racchiusa dalla curva intersezione del manifold stabile di L_1).
- Si è così identificata (analogamente a prima) una condizione iniziale che soddisfa la prima parte dell'itinerario (X, J, S).
- Si evolva un punto di quest'area, secondo le equazioni del moto, fino alla sezione U_1 (poiché è quella che si trova in S che è il reame verso il quale la soluzione si sta dirigendo).
Si osservi come l'area (X, J, [S]) appartenga completamente all'area (J, [S]) trattandosi di un sott'insieme di questa.
- Si consideri su U_1 sia l'area (X, J, [S]) che quella ([S], J) in maniera da imporre alla soluzione di ritornare nel reame J. Tale area risulta costituita da due strisce; si sceglie una condizione

iniziale appartenente alla striscia più larga che, per quanto detto in precedenza, è più robusta.

- Si propaga tale striscia fino a rientrare nel reame J ed intersecare la sezione U_2 .
- Su tale sezione si considera l'intersezione dell'immagine della striscia $(X, J, S, [J])$ e dell'area determinata dal manifold stabile di L_2 , $([J], X)$ (si osservi a tal proposito come la curva $([J], X)$ sia simmetrica a $[X, [J])$).
- Una qualunque condizione iniziale all'interno dell'area $(X, J, S, [J], X)$, se propagata in avanti ed indietro, fornisce un'orbita che rispetta l'itinerario imposto. Si noti come ciò equivale ad imporre le condizioni iniziali su U_2 , quindi in J , ed ottenere per integrazioni positive il tratto che da J porta in X , mentre per integrazioni negative quello che va in S, J ed X .

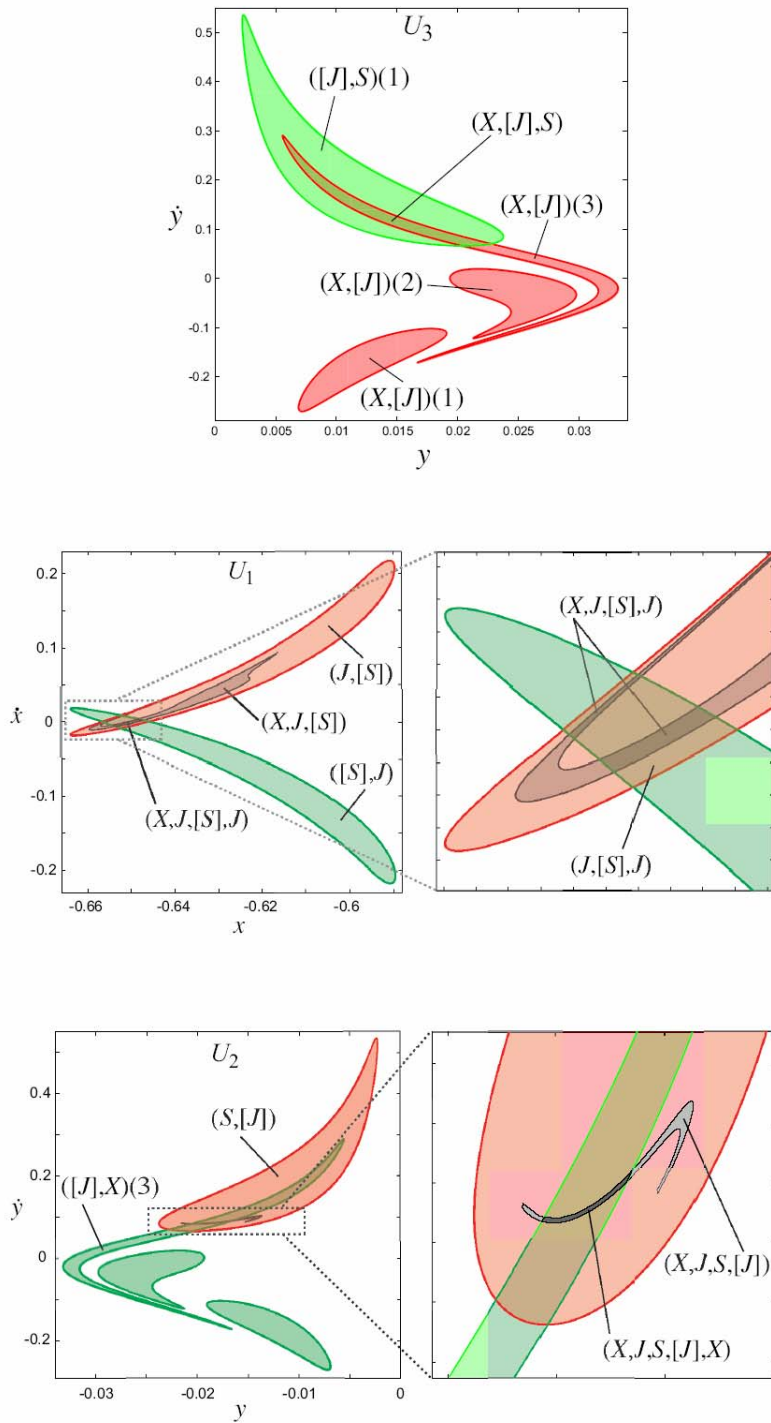


Figura 4.27 - Costruzione di un'orbita con itinerario assegnato

L'orbita che si ottiene da una qualunque delle condizioni iniziali determinabili all'interno della striscia è la seguente; l'integrazione per tempi positivi è indicata con linea continua, quella per tempi negativi con linea tratteggiata.

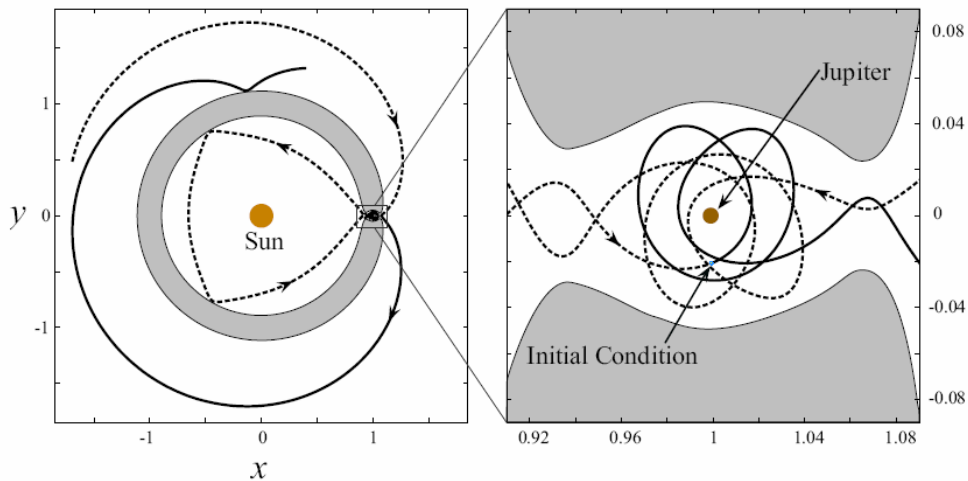


Figura 4.28 - Orbita (X, J, S, J, X)

Si fa infine notare come il modo di identificare un'orbita mediante una stringa di simboli che tengono in considerazione i reami in cui essa è passata o passerà, è, in effetti, la stessa cosa di identificarla mediante una stringa del tipo (4.10); ovvero non si è fatto altro che applicare la dinamica simbolica al problema per disegnare la traiettoria voluta.

4.11 Comportamento delle orbite in funzione delle condizioni iniziali

Al fine di osservare il comportamento della soluzione ed ottenere qualche conferma numerica della validità dell'approssimazione utilizzata e dei suoi limiti, si è proceduto con l'effettuare delle prove imponendo una coordinata su una delle sezioni di Poincarè e ricostruendo da questa lo stato del sistema.

Si è fissato, ad esempio, un valore di μ pari a quello del sistema Giove-Sole e la sezione U_4 ; su questa si sono scelti diversi punti in maniera tale che fosse nulla la derivata della coordinata indipendente. In altre parole:

- La coordinata y è fissata, dalla scelta di U_4 , a zero.

- La coordinata u è imposta, al fine di ottenere orbite simmetriche, nulla.
- La coordinata x è stata fatta variare.
- La coordinata v è stata ricavata dall'energia del sistema:

$$V_{y_0} = \sqrt{2 \cdot E + \mu \cdot r_2^2 + (1 - \mu) \cdot r_1^2 + 2 \frac{(1 - \mu)}{r_1} + 2 \frac{\mu}{r_2} - u_0^2} \quad (4.17)$$

in cui r_1 ed r_2 sono dati dalle (2.15) imponendo nulla la coordinata z trattandosi del caso bidimensionale.

I risultati ottenuti hanno mostrato una certa regolarità: ogni traiettoria, che si è confermato esser simmetrica, partendo dalla U_4 segue l'andamento dei manifolds fino a creare una struttura a “ricciolo”; tale struttura si sposta, al decrescere di x , verso i punti di librazione del sistema fino ad annullarsi quando l'orbita, passando all'interno dell'orbita di Lyapunov, si trasforma in una di transito.

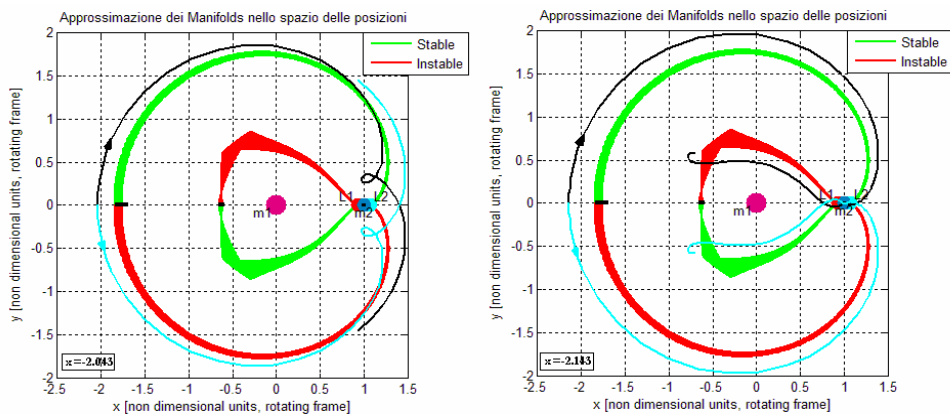


Figura 4.29 - Passaggio da orbite di non-transito ad orbite di transito in X

La ragione di questo comportamento è che la v iniziale tende ad aumentare poiché dipendente dal modulo della x ; lungo l'orbita la velocità tende a diminuire fino a consentire la formazione del “ricciolo”; se il tratto in cui la velocità è molto bassa (o nulla) si trova sufficientemente vicino ai punti di librazione la dinamica ne viene influenzata. Le curve precedenti, in particolare, sono ottenute utilizzando un valore di $\Delta e = 0.0213$ (si ricorda che per ottenere le energie delle orbite rappresentate va sommata l'energia di

JL_2) ed i valori riportati di x_0 . Il valore della coordinata x_0 che in figura 4.21 dovrebbe fornire un'orbita omoclinica (all'incirca -2.07) appartiene all'intervallo in cui si è fatta variare la coordinata stessa e non fornisce alcuna connessione omoclinica. Ciò a conferma del fatto che, come si evince dalle relative sezioni di Poincarè, l'energia del sistema non è sufficiente a determinare l'intersezione delle curve Γ con l'asse $u=0$ e, quindi, il manifold simmetrico.

In maniera del tutto analoga si sono effettuate delle prove nel reame interno sostituendo U_1 ad U_4 . Ancora una volta la soluzione si è dimostrata abbastanza regolare ed ha verificato la dinamica dei manifolds, seguendo all'incirca lo stesso percorso di questi ultimi. Fissando un valore dell'energia pari a $\Delta e=0.01$ e facendo variare la coordinata x_0 sulla sezione di Poincarè si ottengono ancora orbite che dall'essere di non transito diventano di transito fra il reame S ed quello J.

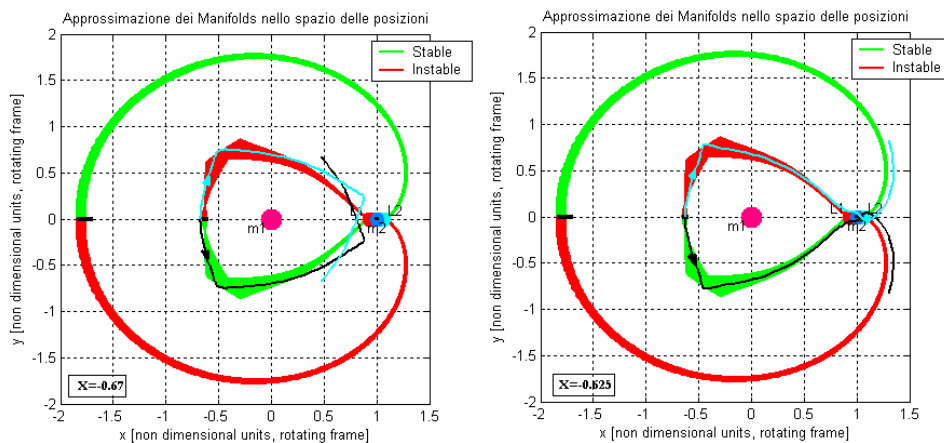


Figura 4.30 - Passaggio da orbite di non-transito ad orbite di transito in S

Mantenendo fisso il valore di μ (quello del sistema Giove-Sole), della coordinata x_0 su U_4 o U_1 e facendo variare il Δe del sistema si è ottenuta, mediante lo stesso procedimento, una connessione omoclinica in X per un valore di $x_0=-2.144$ ed $\Delta e=0.016$ ed una omoclinica in S per $x_0=-0.64$ ed $\Delta e= 0.001045$

I due rami delle orbite sono ottenuti per tempi positivi (ramo nero) e per tempi negativi (ramo ciano).

Si sottolinea come la velocità iniziale lungo y per un punto appartenente alla sezione U_1 sia l'opposto della 4.17; si veda la tabella 4.1.

La sovrapposizione dei due rami può essere ulteriormente migliorata utilizzando successive cifre decimali. Integrando in avanti nel tempo le condizioni finali di uno dei due rami si ottiene l'orbita in maniera continua.

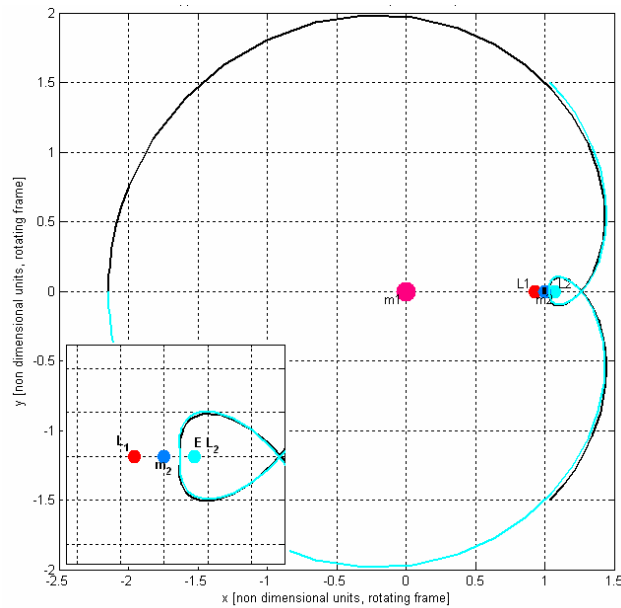


Figura 4.31 - Implementazione numerica di una connessione omoclinica in X

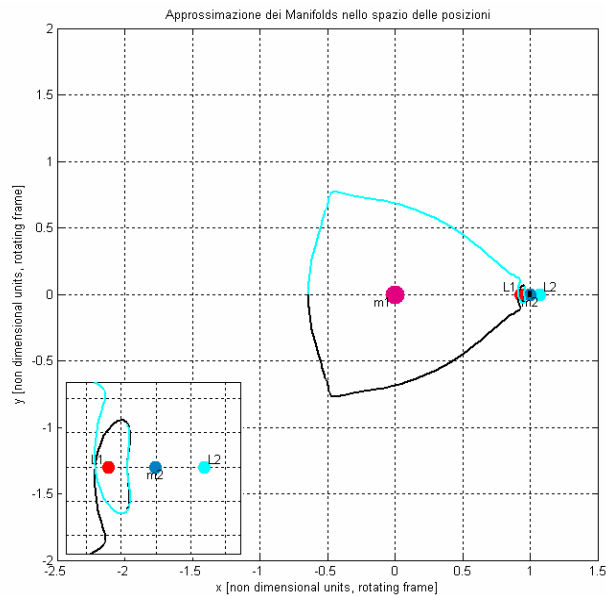


Figura 4.32 - Implementazione numerica di una connessione omoclinica in S

4.12 Condizioni iniziali per l'immissione nei manifolds

Utilizzando il metodo delle sezioni di Poincarè è possibile ottenere informazioni precise sulle condizioni iniziali da assegnare ad un corpo per ottenere l'orbita voluta.

Considerando, ad esempio, il sistema Terra-Sole, un oggetto in moto attorno alla Terra, per essere inserito nel manifold competente ad EL_1 o EL_2 deve possedere un preciso valore di quota, di inclinazione e di velocità. Al fine di attribuire un carattere più applicativo alla trattazione fin qui svolta, si trasformano, dunque, le condizioni iniziali, determinabili dalle sezioni di Poincarè, in termini di posizione e velocità, in quota, inclinazione e Δv necessario. Per disegnare una missione attorno ad un punto di librazione che sfrutta per il trasferimento la dinamica dei manifolds è, infatti, necessario inserirsi in un punto di questi partendo da un'orbita kepleriana attorno alla Terra.

Estendendo il ragionamento alle tre dimensioni, in generale lo stato di un manifold (del genere $W_{EL_1, p.o.}^{s,j}$), su una sezione di Poincarè, è del tipo:

$$X_P^j = \{x_P^j, y_P^j, z_P^j, \dot{x}_P^j, \dot{y}_P^j, \dot{z}_P^j\} \quad (4.18)$$

Tale stato è univocamente determinato fissando il punto dell'orbita periodica cui è associato il manifold; ciò significa che esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'orbita periodica ed quelli della sezione di Poincarè.

Parendo dunque dalle posizioni determinabili dalla sezione di Poincarè (ad esempio U_2 o U_3 per immettere in un'orbita Halo un oggetto in orbita attorno alla Terra), la quota (h) e l'inclinazione (i) sono facilmente individuabili mediante^[22]:

$$h = \sqrt{(x_P^j)^2 + (y_P^j)^2 + (z_P^j)^2} - R_{Earth} \quad (4.19)$$

$$i = \tan^{-1} \left(\frac{z_P^j}{\sqrt{(x_P^j - 1 + \mu)^2 + (y_P^j)^2}} \right) \quad (4.20)$$

L'inclinazione è relativa al piano contenente i due primari ma, trattandosi del sistema Terra-Sole, questo coincide con l'eclittica; l'orbita di partenza, di quota h è, inoltre, circolare.

Dallo stato del sistema (4.18) è desumibile anche il modulo della velocità che compete al manifold; il Δv da imporre al corpo è semplicemente la differenza fra tale modulo e la velocità che il corpo possiede. Avendo supposto di partire da un'orbita circolare di raggio $r=R_e+h$, tale velocità è quella circolare ($v_c = \sqrt{(G \cdot M_{Earth})/r}$). Per l'inserzione nel manifold è quindi necessario un costo di:

$$\Delta v = \sqrt{(\dot{x}_P^j - v_{c,x})^2 + (\dot{y}_P^j - v_{c,y})^2 + (\dot{z}_P^j - v_{c,z})^2} \quad (4.21)$$

Si sottolinea il fatto che queste relazioni valgono per ogni punto dell'orbita periodica.

Tipiche orbite di trasferimento verso Halo attorno ad EL_1 ed EL_2 sono state ottenute integrando in negativo le condizioni iniziali di arrivo di orbite appartenenti ai manifolds.

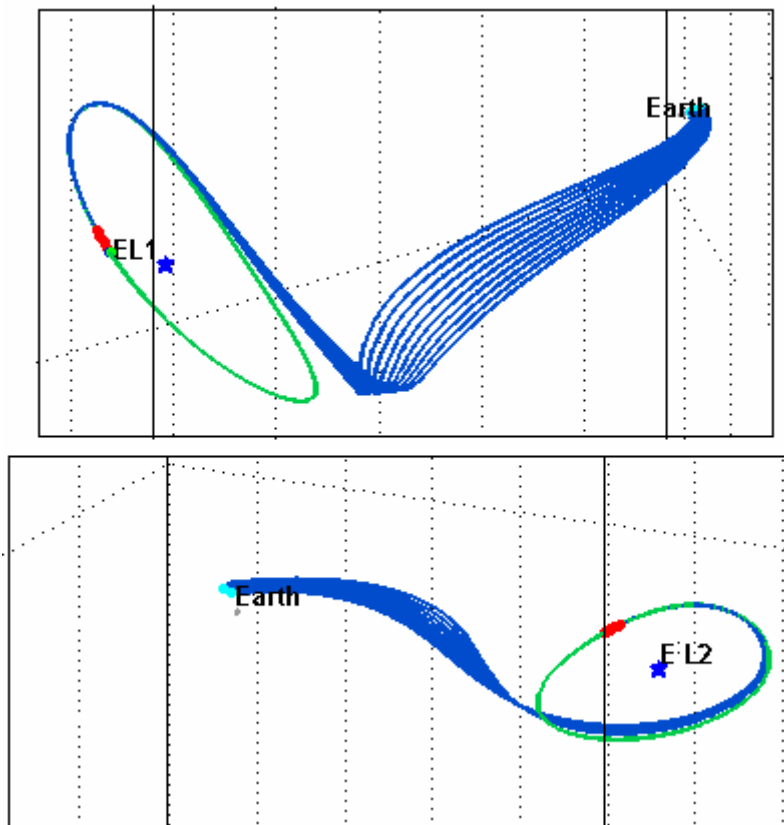


Figura 4.33 - Orbite di trasferimento verso EL_1 ed EL_2

Non vi sono sostanziali differenze fra il Δv necessario per inserirsi in orbite Halo attorno ad EL_1 o ad EL_2 e la principale dipendenza del costo di questo genere di missioni è dall'ampiezza dell'orbita periodica che si vuole utilizzare. Al crescere dell'ampiezza della Halo, tuttavia, il manifolds relativo diventa più grande e vi sono maggiori possibilità di trovare una soluzione economica partendo da un'orbita attorno alla Terra.

I tempi necessari per questi trasferimenti sono dell'ordine dei quattro mesi, i costi dell'ordine dei 5 m/s ed i valori del Δv necessari per lo *station-keeping* su tali orbite, che si riportano in bibliografia, sono dell'ordine dei 10 $m/s/anno$.

IMPLEMENTAZIONE PROPAGATORI

Nel corso del lavoro è sorta la necessità di sviluppare una serie di software in grado di implementare praticamente lo studio teorico svolto. Si descrivono, nel presente capitolo, i diversi schemi utilizzati per modellare il moto di un corpo in campi gravitazionali creati da due o tre masse ed i concetti utilizzati per la realizzazione di una loro decodifica numerica.

5.1 Introduzione

Avendo affrontato e ripercorso le file del problema ristretto a tre corpi, l'intento è ora quello di utilizzarlo per studi preliminari di missioni.

Non vi sono intenti precisi di riprodurre particolari traiettorie, ma si sono svolte una serie di prove volte ad acquisire una certa confidenza con il modello in maniera da ottenere differenti tipi di orbite. In generale ci si è concentrati sul sistema Terra-Sole e su quello Terra-Luna. Sono stati provati trasferimenti verso il nostro satellite e verso orbite periodiche attorno ad EL_1 ed EL_2 . Si è inoltre considerata anche la possibilità di utilizzare, almeno per un ramo della traiettoria, la bassa spinta.

Nel corso del lavoro si è reso necessario implementare una serie di strumenti mediante i quali effettuare prove e confronti con dati esistenti in letteratura. Sono stati, dunque, sviluppati, utilizzando il software MATLAB[®][31], propagatori orbitali basati su differenti concetti.

Si è sviluppato un propagatore che utilizza le equazioni del moto del modello a tre corpi (tabella 2.3) da impiegarsi per studi di prima approssimazione che considera solamente le forze dei due primari.

Per studi di maggior dettaglio si sono implementati due propagatori che, sempre basati sul modello a tre corpi, considerano una perturbazione ciclica attorno al baricentro del sistema; sono questi, in effetti, semplici modelli che consentono di costruire traiettorie in sistemi a quattro corpi utilizzando le soluzioni dei tre corpi.

Come studio di successiva approssimazione si è implementato, infine, un propagatore a quattro corpi che tiene in considerazione la forza dovuta all'attrazione gravitazionale della Terra, del Sole e della Luna; in tale modello le forze vengono considerate come perturbazioni ad un moto kepleriano.

Prima di descrivere i propagatori sviluppati e le prove svolte si descrivono una serie di caratteristiche comuni a tutti.

5.2 Imposizione delle condizioni iniziali

Per individuare il punto di partenza di un'orbita nello spazio, è necessario innanzi tutto identificare il piano orbitale rispetto al sistema di riferimento utilizzato e quindi la posizione del punto sull'orbita (ipotizzata in prima analisi circolare).

Per descrivere una circonferenza nello spazio sono necessari e sufficienti il suo raggio, l'inclinazione rispetto al piano orizzontale e la posizione della linea di intersezione fra il piano cui la circonferenza appartiene e quello di riferimento (linea dei nodi).

La posizione del punto sulla circonferenza è determinabile dalla conoscenza dell'angolo formato con l'asse x di un sistema di riferimento centrato nell'origine della circonferenza ed appartenente al suo piano.

Si definisce questo sistema mediante l'identificazione del suo asse y con la linea dei nodi del piano orbitale; l'asse z è definito normale al piano e concorde con il vettore momento della quantità di moto del satellite ($h = r \wedge v$), l'asse x tale da rendere la terna destrorsa. Trattandosi di orbite circolari, l'angolo formato fra l'asse y e la posizione del punto sull'orbita coincide con l'angolo fra il raggio vettore e la linea dei nodi che prende il

nome di **argomento della latitudine** (tale angolo si utilizza in letteratura per orbite circolari inclinate in cui non è definibile un perigeo^[32]).

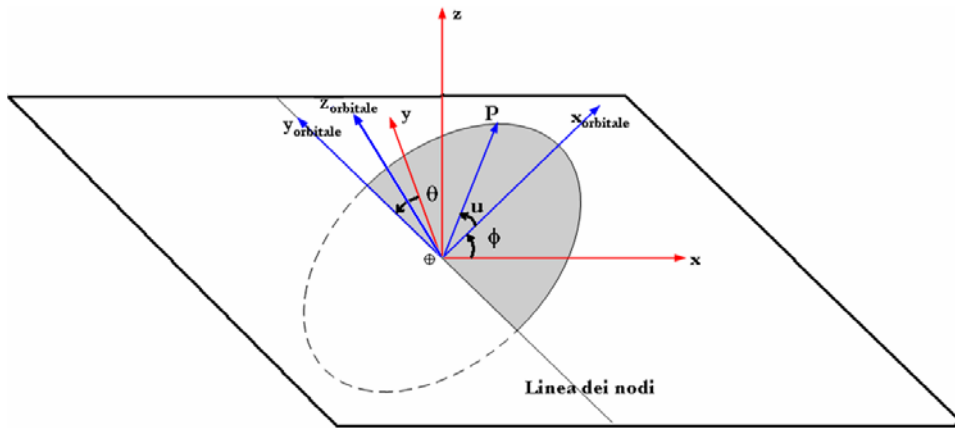
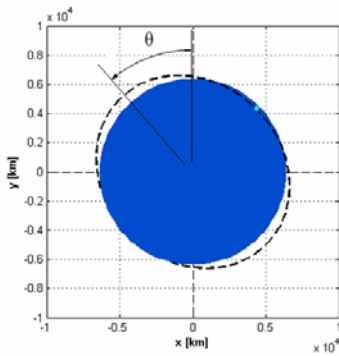


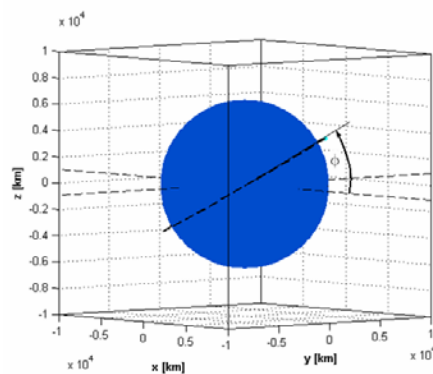
Figura 5.1 - Sistemi di riferimento

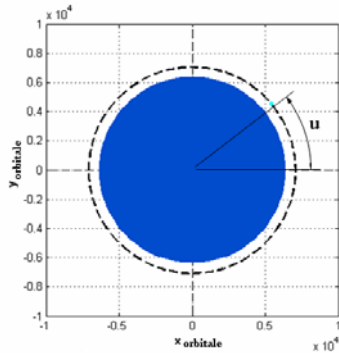
Si identificano dunque la latitudine e la longitudine del piano orbitale rispetto agli assi del sistema sinodico (oppure rispetto agli assi di un sistema geocentrico equatoriale per il propagatore a quattro corpi).



La **longitudine** (θ) si definisce misurando in verso antiorario l'angolo formato dall'asse y del sistema sinodico e dalla linea dei nodi (quindi fra gli assi dei due sistemi).

La **latitudine** (ϕ), invece, si definisce come l'angolo formato fra l'asse x del sistema sinodico e l'asse x del sistema di riferimento costruito sul piano orbitale; tale angolo è misurato fuori dal piano in verso antiorario





L'argomento della latitudine (u) iniziale s'identifica chiaramente sul piano orbitale (il cui orientamento dipende da latitudine e longitudine) come l'angolo fra l'asse x del sistema costruito su questo piano ed il raggio vettore del punto.

Per meglio chiarire come si presentano queste circonferenze nello spazio si riportano di seguito due esempi (il punto color ciano rappresenta il punto identificato):

- Latitudine=30, Longitudine=0, Argomento della latitudine=0

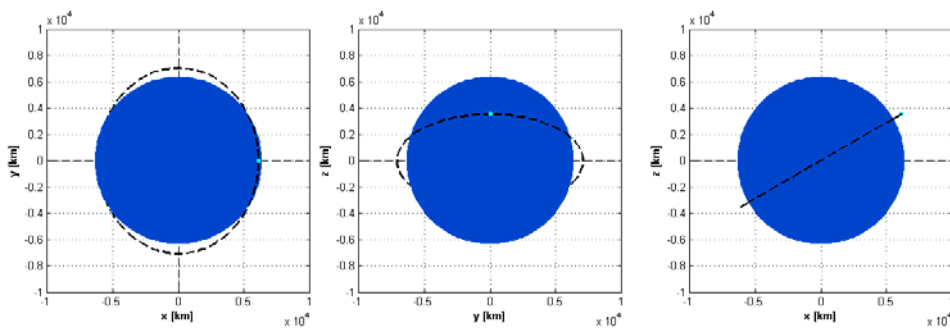


Figura 5.2 - Orbita iniziale con $\phi=30$, $\theta=0$, $u=0$

- Latitudine=90°, Longitudine=90°, Argomento della latitudine=45°

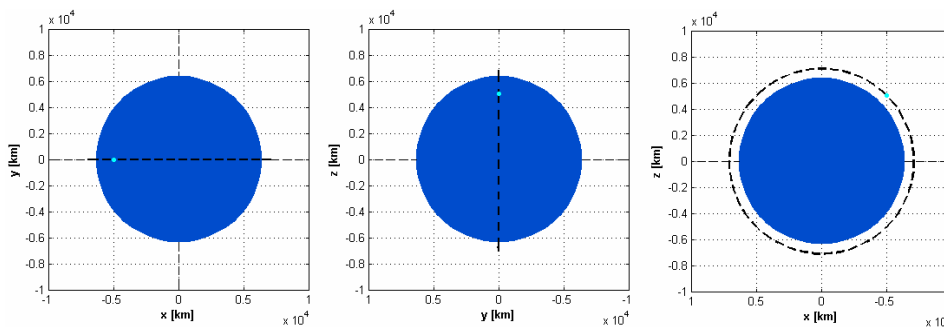


Figura 5.3 - Orbita iniziale con $\phi=90$, $\theta=90$, $u=45$

Tali convenzioni verranno adottate per definire le orbite di partenza attorno alla Terra ed alla Luna e per posizionare il Sole o la Luna sulle relative orbite.

Una volta note condizioni iniziali del punto è necessario riportarle in termini di posizione e velocità del sistema sinodico (o geocentrico equatoriale) per imporle alle equazioni del moto. Mediante la seguente matrice di rotazione si effettua il passaggio in coordinate (x, y, z) .

$$TM = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) \cdot \sin(\pi/2 - \phi_0) & -\sin(\theta_0) & -\cos(\theta_0) \cdot \cos(\pi/2 - \phi_0) \\ \sin(\theta_0) \cdot \sin(\pi/2 - \phi_0) & \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \cdot \cos(\pi/2 - \phi_0) \\ \cos(\pi/2 - \phi_0) & 0 & \sin(\pi/2 - \phi_0) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La matrice TM identifica la matrice di rotazione fra i due sistemi di riferimento; una volta nota, dunque, la posizione sul piano orbitale, dalla conoscenza di r ed u , è possibile desumere la posizione nel sistema di riferimento principale.

La posizione iniziale (pedice 0) nel sistema costruito sul piano orbitale è data da:

$$\begin{aligned} x_{orbitale} &= r \cdot \cos(u_0) \\ y_{orbitale} &= r \cdot \sin(u_0) \\ z_{orbitale} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Essendo il problema definito in uno spazio delle fasi a quattro o sei dimensioni, le condizioni iniziali vanno imposte, oltre che in termini di posizione, anche in termini di velocità. Un punto in moto su un'orbita circolare di raggio r ha, in un sistema planetocentrico inerziale, una velocità circolare^{[5][32]} pari a:

$$V_{circ} = \sqrt{(G \cdot M_{pianeta}) / r} \quad (5.3)$$

Nel sistema rotante, che è quello in cui sono formulate le equazioni per il propagatore a tre corpi e per quelli bicircolari, tale velocità va modificata sommandovi la velocità di trascinamento del sistema. Quest'ultima è la velocità con cui l'origine del sistema di riferimento rotante si muove rispetto a quello inerziale; in questo caso il moto è rotatorio e pertanto essa è $\bar{\omega} \wedge \bar{d}$, in cui \bar{d} non è altro che la posizione del punto nel sistema rotante. In altre parole, in un sistema inerziale centrato nel baricentro dei due primari, la

velocità di un satellite attorno ad un attrattore è la somma della sua velocità circolare (data dalla 5.3) e della velocità del pianeta attorno al centro del sistema di riferimento:

$$V_{sist.Inerziale} = V_{Pianeta} + V_{Circolare} = \omega \wedge R + \sqrt{\frac{G \cdot m_{pianeta}}{r}} \quad (5.4)$$

in cui R è la distanza del pianeta dall'origine del sistema (in coordinate adimensionali R è μ o $1-\mu$).

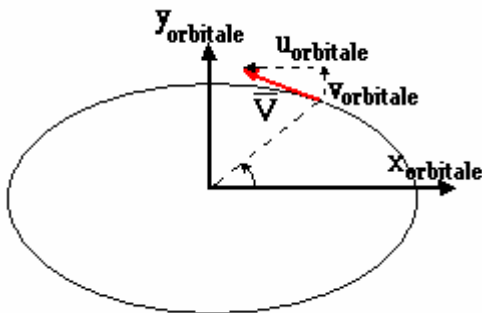
Si è, a questo punto, in presenza di un punto che nel sistema inerziale ha una velocità data dalla 5.4; per riportare tale velocità nel sistema rotante è necessario sottrarre la velocità tangenziale del punto che, in questo sistema è data da $\bar{\omega} \wedge (\bar{R} + \bar{r})$. Quindi:

$$V_{sist.Rotante} = V_{sist.Inerziale} - V_{trascinamento} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{pianeta}}{r}} - \bar{\omega} \wedge \bar{r} \quad (5.5)$$

Si fa notare che ω è la velocità angolare con cui il sistema rotante si muove rispetto a quello inerziale ed è normalizzata ad 1 ed r è il raggio dell'orbita circolare attorno al pianeta che va, a sua volta, adimensionalizzato.

Quindi, nel sistema di riferimento precedentemente descritto le componenti di velocità (u, v, w) sono:

$$\begin{aligned} u_{orbitale} &= -V_{circ} \cdot \sin(u_0) \\ v_{orbitale} &= V_{circ} \cdot \cos(u_0) \\ w_{orbitale} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$



Come si osserva dalla figura accanto, i segni riportati per la velocità circolare (- per u e + per v) sono relativi ad un'orbita di partenza percorsa in verso antiorario (quali quelle in genere utilizzate).

La componente della velocità lungo l'asse z è nulla poiché la rotazione avviene attorno a questo.

Per partenze che prevedono un Δv chimico iniziale si è sempre supposto di imporlo tangenzialmente all'orbita di partenza; in questo caso il modulo della velocità circolare sul piano orbitale va incrementato del Δv assegnato.

Per ottenere, infine, le condizioni iniziali anche in termini di velocità nel sistema di riferimento sinodico (o geocentrico equatoriale), è sufficiente processare anche le componenti della velocità calcolate sul piano orbitale mediante la matrice TM . Quindi le condizioni iniziali generali sono del tipo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = TM \cdot \begin{Bmatrix} x_{orbitale} \\ y_{orbitale} \\ z_{orbitale} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = TM \cdot \begin{Bmatrix} u_{orbitale} \\ v_{orbitale} \\ w_{orbitale} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{Bmatrix}^1 \quad (5.7)$$

Tali condizioni hanno carattere generale e sono state, con gli opportuni valori dei parametri in gioco, utilizzate per determinare orbite di partenza dalla Luna (necessarie per simulare fasi di fuga da questa).

Si riporta l'attenzione, infine, sulle seguenti accortezze:

- Le equazioni del moto di tutti i propagatori sviluppati sono in forma adimensionale e pertanto richiedono condizioni iniziali adimensionali.
- Le condizioni iniziali, in termini di posizione, fornite dalle (5.7), sono relative al centro dell'attrattore che determina l'orbita di partenza (in genere Terra o Luna); per i propagatori in cui il riferimento è centrato altrove, è necessario effettuare una traslazione dell'origine. In particolare la x va traslata di una quantità pari ad $1-\mu$ o μ per i propagatori che utilizzano un sistema di riferimento centrato nel baricentro del sistema a tre corpi (vedi adimensionalizzazioni paragrafo 2.4).
- L'errore che si commette nel trascurare, nella velocità iniziale, la velocità di trascinamento, è dell'ordine di $-r$; per le applicazioni d'interesse che prevedono orbite di partenza LEO o LLO, l'errore che si commette è molto piccolo.

¹ Per un'analisi dimensionale della (5.7) si ricordi che ω è unitaria

Una metodologia applicata in tutti i propagatori, per ottenere trasferimenti fra Terra e Luna, imponendo vincoli sia sull'orbita di partenza sia su quella d'arrivo, è la suddivisione della traiettoria in due rami. Si considerano, infatti, due fasi di fuga, una dalla Terra ed una dalla Luna, partendo da due orbite con parametri assegnati; questi due rami sono in seguito raccordati in un punto. Ovviamente per ottenere che i due tratti di orbita terminino nella stessa posizione, si è lasciato libero un parametro (l'argomento della latitudine iniziale) utilizzato per portare il punto terminale di un ramo dell'orbita su quello dell'altro ramo.

Si osservi come tale procedimento, utilizzando due fasi di fuga, impieghi due intervalli d'integrazione positivi; successivamente il tratto di fuga dalla Luna (essendo questo il ramo di cattura per trasferimenti Terra-Luna) è stato integrato indietro nel tempo per ottenere l'orbita completa.

Spesso uno dei due rami, in genere quello di cattura lunare, si ottiene utilizzando un propulsore elettrico. Come sarà descritto nel prossimo paragrafo, tale spinta compare nelle equazioni del moto mediante un termine aggiuntivo che dipende dal rapporto fra la spinta fornita dal propulsore e la massa istantanea del veicolo. In una fase di fuga la massa dello spacecraft diminuisce a causa del consumo di propellente; la massa, inizialmente imposta, è, quindi quella che arriverà a destinazione e deve essere "aumentata", durante la fase di cattura, della massa consumata.

5.3 Bassa spinta

In alcune delle prove svolte si è considerata la possibilità di utilizzare un propulsore elettrico per ottenere un risparmio in termini di propellente.

Si riportano una serie di equazioni utilizzate, nell'ambito dei programmi implementati, per il calcolo della spinta, del consumo e dell'impulso.

I propulsori sono stati definiti nei simulatori inserendo i valori della potenza (P), dell'impulso specifico (I_{sp}) e del rendimento (η) in maniera tale da poter utilizzare i risultati in termini di spinta e consumo specifico per un primo confronto con i valori riportati nei database. Note P , I_{sp} ed η ..le grandezze di interesse sono ottenibili mediante:

| | |
|------------------------------|---|
| Velocità efficace di scarico | $c = I_{SP} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}$ |
| Spinta | $T = \frac{2 \cdot \eta \cdot P}{c}$ |
| Flusso di massa | $\dot{m} = \frac{T}{c}$ |
| Eq. Tsiolkowsky | $\Delta v = c \cdot \ln \frac{M_{iniziale}}{M_{finale}}$ |
| Impulso totale | $I_{TOT} = c \cdot \Delta m = c \cdot \dot{m} \cdot \Delta t$ $I_{TOT} = T \cdot \Delta t$ |

Tabella 5.1 - Derivazione grandezze per la propulsione elettrica

Per la derivazione dell'accelerazione di spinta, è necessario eseguire istantaneamente il rapporto fra la spinta del propulsore e la massa istantanea del veicolo. Ovvero:

$$a_T = \frac{T}{M_{inizio} - \Delta m} = \frac{T}{M_{inizio} - \dot{m} \cdot \Delta t} \quad (5.8)$$

Al trascorrere del tempo, infatti, il propulsore, funzionando, consuma una certa quantità di propellente e la massa che si trova a dover effettivamente accelerare è sempre minore. L'accelerazione di spinta è il termine che compare nelle equazioni del moto per i diversi propagatori nella fase a bassa spinta.

Nel caso di spinta continua, le equazioni del moto relative ai diversi modelli sono state leggermente modificate con l'aggiunta di un termine che tiene conto della spinta elettrica^{[29][33]}. In particolare si è sommato ad ogni componente un termine del tipo:

$$\begin{aligned} a_x &= a_T \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \\ a_y &= a_T \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \\ a_z &= a_T \cdot \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Questi termini non sono altro che l'accelerazione di spinta fornita dal propulsore moltiplicati per i coseni direttori della velocità. Ciò significa fornire una spinta diretta tangenzialmente all'orbita.

Si osservi come un confronto fra diversi tipi di trasferimento non vada effettuato soltanto in base al Δv richiesto, ma anche, a parità di questo, della massa (quindi del *payload*) che si è in grado di trasportare. Un parametro che tiene in conto di entrambi i fattori è proprio l'impulso totale che si è, pertanto, sempre tenuto in considerazione.

La scelta del propulsore non è stata oggetto di studio e tutte le prove (ad eccezione di quelle necessarie ai confronti con il software D-Orbit, vedi paragrafo 5.8) sono state svolte con il medesimo propulsore; la preferenza è caduta su un motore ad effetto Hall. Si è scelto un propulsore largamente provato, che si collocasse nella media delle prestazioni dei propulsori elettrici e che funzionasse ad un livello di energia vicino a quello nominale (il che ne incrementa la prospettiva di vita e l'affidabilità). Il propulsore scelto è l'**SPT-100 [1350]** i cui valori sono riportati in tabella.

| Voltaggio | Corrente | Potenza | Spinta | Efficienza | Impulso Specifico | Flusso di massa |
|-----------|----------|----------|---------|------------|-------------------|-----------------|
| 300 (V) | 4.75 (A) | 1425 (W) | 92 (mN) | 0.48 | 1505 (s) | 6.23 (mg/s) |

Tabella 5.2 - Valori SPT 100 [1350]

Per simulare la fase di cattura lunare con una fase di fuga, si impone, infine, un valore negativo del consumo di massa. Ciò poiché, la massa, durante l'utilizzo del propulsore, tende a diminuire in maniera continua comportando (dalla 5.8) un aumento della spinta. In altre parole si pone $\Delta m = -\Delta m$ affinché la spinta del propulsore aumenti durante la fase di cattura (quindi verso il pianeta) e non aumenti, invece, durante la fase di fuga (quindi dal pianeta).

Ove non specificato diversamente, la massa iniziale considerata, che per quanto detto è quindi il *payload* da portare in orbita LLO, è di 300 kg.

5.4 Propagatore a tre corpi

Come già accennato, il propagatore a tre corpi è la versione più semplice dei propagatori implementati, che, oltre a fornire interessanti soluzioni di

primitissima approssimazione, contiene anche una serie di metodologie utilizzate negli altri propagatori.

Le equazioni integrate da questo modello sono le equazioni del moto in forma lagrangiana, di seguito riscritte:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x & \dot{v}_x = 2 \cdot v_y + \Omega_x \\ \dot{y} = v_y & \dot{v}_y = -2 \cdot v_x + \Omega_y \\ \dot{z} = v_z & \dot{v}_z = \Omega_z \end{cases} \quad (5.10)$$

Si ricorda che per essere numericamente integrabili le equazioni devono essere al primo ordine.

In tale modello sono state provate anche orbite a bassa spinta sia con propulsione tangenziale che non. Nel caso di spinta continua diretta tangenzialmente all'orbita le (5.10) sono state modificate aggiungendo alle ultime tre i termini dati dalle (5.9). Al fine di prevedere la possibilità di uno sparo non tangenziale, è stata implementata una versione che consente l'imposizione di due angoli di controllo^[34]:

- U angolo di controllo in imbardata (yaw steering angle)
- V angolo di controllo di beccheggio (pitch steering angle)

Mentre U consente di sparare con un certo angolo nel piano, V consente di imporre una direzione di sparo fuori del piano. In questo caso i termini perturbativi che vanno utilizzati in luogo delle (5.9) sono del tipo:

$$\begin{aligned} a_r &= a_T \cdot \sin(u) \cdot \cos(v) \\ a_\theta &= a_T \cdot \cos(u) \cdot \cos(v) \\ a_\phi &= a_T \cdot \sin(v) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Come si osserva le (5.11) sono determinate in coordinate polari essendo in questo caso di più semplice imposizione; le equazioni del moto vanno, quindi, prima trasformate da (x, y, z) ad (r, θ, ϕ) e successivamente modificate aggiungendovi le (5.11). Il plottaggio è stato sempre eseguito in coordinate cartesiane richiedendo una doppia trasformazione polare-cartesiana.

Tali condizioni si sono analizzate per testare l'affidabilità dello strumento poiché, in effetti, soprattutto in uno studio preliminare di missione, lo sparo tangenziale è sempre il più conveniente.

Si sono sviluppate anche versioni di tale propagatore che prevedono orbite di partenza ellittiche al fine di renderne ancor più generale l'utilizzo. Imponendo la quota di perigeo ed apogeo mediante le relazioni geometriche delle coniche, si sono ottenuti i valori di eccentricità, semiasse maggiore, semilato retto e raggio; da questi si sono ricavate posizione e velocità nel sistema di riferimento orbitale da processare mediante la matrice TM per ottenere le condizioni iniziali da imporre alle equazioni del moto.

$$\begin{aligned}
 x_{\text{orbitale}} &= \text{raggio} \cdot \cos(u_0); \\
 y_{\text{orbitale}} &= \text{raggio} \cdot \sin(u_0); \\
 z_{\text{orbitale}} &= 0; \\
 u_{\text{orbitale}} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\text{raggio}}} \cdot \sin(u_0) + \omega \cdot \text{raggio} \cdot \sin(u_0); \\
 v_{\text{orbitale}} &= \sqrt{\frac{\mu}{\text{raggio}}} \cdot (\text{eccentricità} + \cos(u_0)) - \omega \cdot \text{raggio} \cdot \cos(u_0); \\
 w_{\text{orbitale}} &= 0;
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Si noti che l'ultimo termine che compare nelle precedenti espressioni della velocità dipende dal fatto che la (5.3) è relativa ad un sistema di riferimento inerziale, mentre in un sistema rotante questa va modificata della velocità di trascinamento ($-\omega r$).

Per verifica, si sono svolte alcune prove con tale strumento nella sua versione più completa (orbita di partenza ellittica e spinta non tangenziale), mentre nel seguito del lavoro la versione con orbite di partenza circolari e spinta tangenziale si è dimostrata sufficiente. La seguente orbita (figura 5.4), ad esempio, è stata ottenuta utilizzando i valori delle orbite iniziali, del propulsore, degli angoli di controllo e della massa riportati in tabella.

Si è utilizzato, come si vede anche dai valori di inclinazione ed angolo di pitch, un trasferimento bidimensionale e completamente propulso (il propulsore elettrico non è stato mai spento).

Capitolo V - Implementazione Propagatori

| | | |
|---------------------------------------|--|---|
| Massa | 240 kg | |
| Propulsore Elettrico | $I_{SP} = 1534 \text{ s}$ $P = 830.25 \text{ W}$ $\eta = 0.477$ | |
| Orbita di partenza attorno alla Terra | $h_{perigeo} = 560 \text{ km}$ $h_{apogeo} = 35890 \text{ km}$ $\nu \cong 144.5 \text{ deg}$ | $i = \phi = 0$ $\Omega = \theta = 300 \text{ deg}$ |
| Orbita di arrivo attorno alla Luna | $h_{periselenio} = 100 \text{ km}$ $h_{aposelenio} = 100 \text{ km}$ $\nu \cong 353 \text{ deg}$ | $i = \phi = 0 \text{ deg}$ $\Omega = \theta = 0 \text{ deg}$ |
| Angoli di controllo | $U_{Earth} = 40 \text{ deg}$ $V_{Earth} = 0 \text{ deg}$ | $V_{Moon} = 141 \text{ deg}$ $V_{Moon} = 0 \text{ deg}$ |

Tabella 5.3 - Valori utilizzati per un trasferimento a bassa spinta Terra-Luna

Si osservi, come detto in precedenza, che i valori di ν sono ottenuti come conseguenza del coincidere dei due rami in un punto.

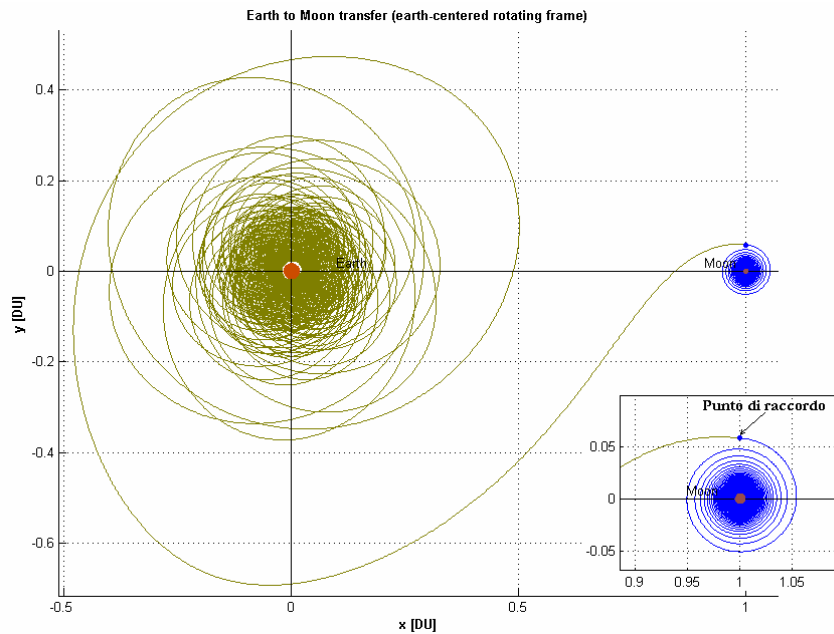
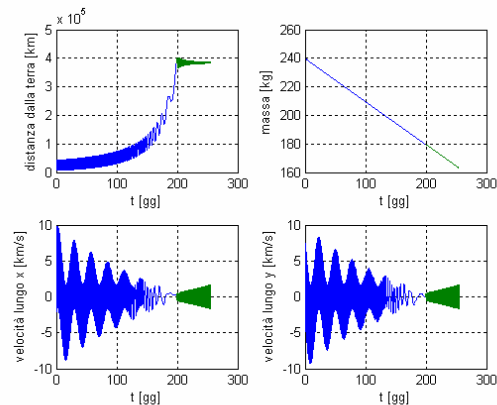


Figura 5.4 - Orbita di trasferimento Terra-Luna ottenuta con il propagatore a tre corpi

I valori di alcune grandezze, calcolate mediante le espressioni di tabella 5.1, e gli andamenti della massa, della posizione e della velocità sono riportati in figura.



Il consumo totale di massa per la fuga terrestre è : 59.9978 [kg]
 Il consumo totale di massa per la cattura lunare è :17.2539 [kg]
 Massa del satellite al termine del primo tratto: 180.0022 [kg]
 Massa del satellite al termine del secondo tratto: 179.8539 [kg]
 L'impulso totale utilizzato per la fuga terrestre è : [Itot=c'DELTA_m]= 9.0288e+005 [Kg*m/s]
 [Itot=l'DELTA_A]= 9.0288e+005 [Kg*m/s]
 L'impulso totale utilizzato per la cattura lunare è : [Itot=c'DELTA_m]= 2.5965e+005 [Kg*m/s]
 [Itot=l'DELTA_A]= 2.5965e+005 [Kg*m/s]

Distanza finale del satellite dalla Terra (in km) = 3.849e+005
 Distanza finale del satellite dalla Luna (in km) = 22393

Tempo impiegato per il primo tratto (in TU)= 46 (198gg 13h 1m 5s)
 Tempo impiegato per il secondo tratto (in TU)= 13.2285 (57gg 2h 18m 20s)

Valutazione errore al raccordo
 La distanza fra i due punti al patch point è = 8.3649e-005 [m]

Il deltaV richiesto per la fase elettrica di fuga terrestre è = 3.0096 [km/s]
 Il deltaV richiesto al punto d'intersezione è = 0.26498 [km/s]
 Il deltaV richiesto per la fase elettrica di cattura lunare è = -1.7864 [km/s]

Figura 5.5 - Andamento valori dell'orbita di figura 5.4

5.5 Modellizzazione del problema dei quattro corpi

Un corpo in moto reale nello spazio, anche in orbite vicine ad un solo attrattore, non subisce solo la forza gravitazionale a questo dovuta, ma tutta una serie di altre forze sia di natura gravitazionale che non. L'intensità delle forze agenti dovute a masse differenti da quella che determina il moto kepleriano è crescente all'aumentare della distanza dall'attrattore primario. Orbite attorno ai punti di librazione ed orbite di trasferimento verso di essi si allontanano molto da un solo primario e coinvolgono sia la forza dovuta all'altro primario sia le forze causate da altre masse.

Trascurando in uno studio preliminare perturbazioni quali vento solare, resistenza atmosferica, pressione di radiazione solare e simili, è necessario studiare l'attendibilità di un modello a tre corpi come strumento di disegno preliminare di missione.

Il problema a può essere affrontato in due modi:

- La presenza di un quarto corpo da luogo ad un altro sistema a tre corpi che, sovrapposto al primo, fornisce una conformazione dello spazio delle posizioni data dalla sovrapposizione delle regioni di Hill e dei manifolds dei due sistemi. Questa può essere utilizzata per progettare traiettorie di trasferimento a bassa energia (bassa richiesta di propellente).
- Si modelli la presenza di un quarto corpo come effetto perturbativo la cui posizione è determinata dal suo moto medio attorno al baricentro del sistema principale. Anche con tale modello è possibile ottenere traiettorie precluse dal semplice utilizzo del CR3BP.

I propagatori implementati, che tengono in considerazione l'effetto di un quarto corpo, seguono questo secondo approccio. Applicazioni del primo metodo sono riportate nel paragrafo 5.7. Il modello utilizzato per considerare la presenza di un quarto corpo è quindi basato sulla descrizione della perturbazione introdotta da questo nel sistema a seconda del suo moto. Possono presentarsi due casi:

- **Concentric Circular Model (CCM)**: M_0 è il corpo centrale attorno al quale si muovono, su orbite circolari, di raggi differenti, M_1 e M_2 . Tale modello è utilizzato, in genere per $M_1, M_2 \ll M_0$. Applicazioni di questo modello sono disponibili in bibliografia soprattutto per disegnare, mediante un approccio basato sul problema dei tre corpi, tour delle lune di Giove^{[35][36]}. Il sistema di satelliti di Giove presenta, infatti, caratteristiche idonee all'applicazione del CCM; il pianeta costituisce l'attrattore primario (M_0), le maggiori delle sue lune, invece, che hanno una massa molto minore e comparabile fra loro, si muovono su orbite con eccentricità molto piccola attorno ad esso.

- **Bicircular Model (BCM):** M_1 ed M_2 sono in moto su orbite circolari attorno al loro baricentro. Quest'ultimo è, inoltre, in moto circolare attorno a M_0 . Il BCM è di solito utilizzato nel caso in cui $M_2 < M_1 < M_0$. Tale modello è quello che si considererà, poiché schematizza bene un sistema come quello Sole (M_0), Terra (M_1) e Luna (M_2) in cui Terra e Luna si muovono su orbite quasi circolari attorno al baricentro del sistema (come richiede una delle ipotesi base del CR3BP) e quest'ultimo, a sua volta, ruota attorno al Sole su un'orbita quasi circolare in prima approssimazione.

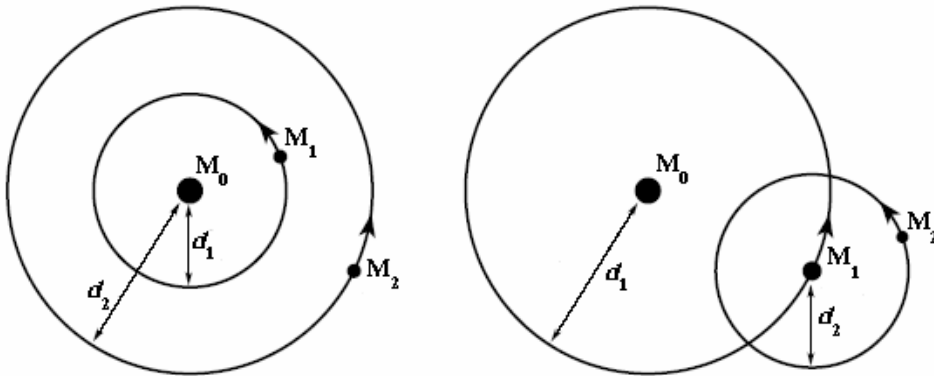


Figura 5.6 - Modello CCM (a sinistra) e BCM (a destra)

Di propagatori basati sul modello bicircolare ne sono stati implementati due; il primo utilizza come sistema principale quello Terra-Luna e prevede una perturbazione periodica dovuta al Sole, il secondo, invece, utilizza il sistema Terra-Sole perturbato dalla Luna.

5.6 Propagatore bicircolare Terra-Luna

Il modello base di questo propagatore prevede il moto della Terra e della Luna su orbite circolari attorno al loro baricentro ed il moto di quest'ultimo attorno al baricentro che forma con il Sole. Ciò significa che, in un sistema di riferimento centrato nel baricentro del sistema Terra-Luna, il Sole si muove su un'orbita circolare (si ricordi che il modello a tre corpi utilizzato è circolare) che ha come raggio la sua distanza media dal baricentro Terra-

Luna (che è l'origine del sistema di riferimento). Il sistema di riferimento è, inoltre, normalizzato come se si trattasse del problema a tre corpi con Terra e Luna come primari.

Il moto del Sole sulla sua orbita avviene in verso orario (cioè così come il suo moto apparente visto dalla Terra) con velocità angolare pari a quella che gli consente di compiere un giro completo in *365 giorni*.

Si sottolinea ancora una volta che questi sono modelli che semplificano il moto di un corpo di piccola massa nel campo gravitazionale formato da quattro corpi; il moto della massa di prova viene studiato utilizzando le soluzioni del modello a tre corpi.

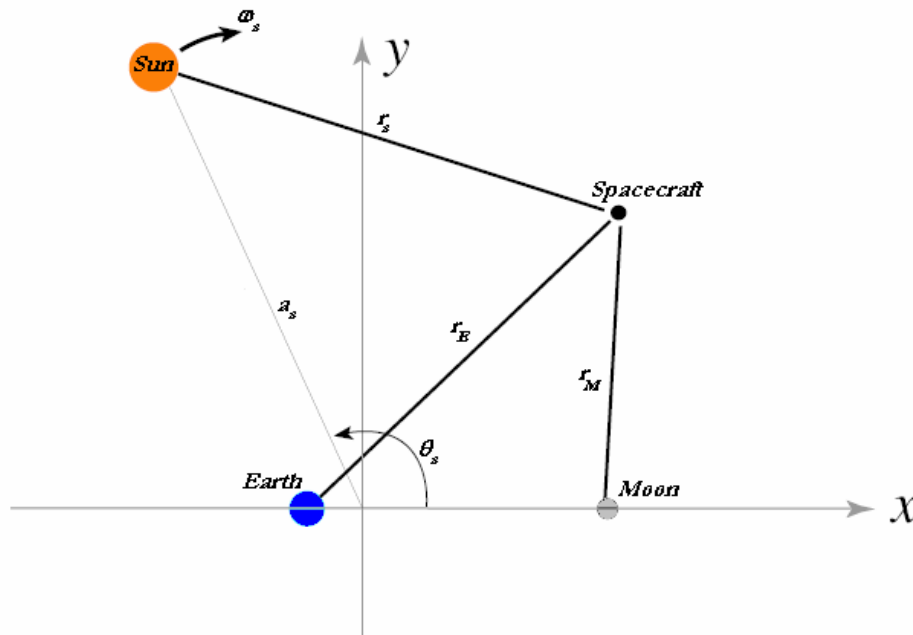


Figura 5.7 - Geometria modello bicircolare Terra-Luna

La derivazione delle equazioni del moto può seguire ancora un approccio di tipo lagrangiano. In questo caso, tuttavia, il potenziale gravitazionale del sistema è modificato dalla presenza della massa del Sole; indicando con il pedice il corpo relativo (vedi figura 5.7) U assume la forma:

$$U = \frac{\mu_M}{r_M} + \frac{\mu_E}{r_E} + \frac{\mu_S}{r_S} \quad (5.13)$$

Le grandezze utilizzate sono ricavabili dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 \mu_M &= \mu \\
 \mu_E &= 1 - \mu \\
 \mu_S &= \frac{m_{Sun}}{(m_E + m_M)}
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
 r_E &= \sqrt{(x + \mu_M)^2 + y^2 + z^2} \\
 r_M &= \sqrt{(x - \mu_E)^2 + y^2 + z^2} \\
 r_S &= \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}
 \end{aligned}$$

Come si osserva, non si è fatto altro che aggiungere il potenziale gravitazionale del Sole costituito dal rapporto della sua massa (adimensionalizzata) e della distanza dall'origine del sistema.

La posizione del Sole, in funzione del tempo, è esprimibile mediante:

$$(x_S, y_S, z_S) = TM \cdot [a_S \cdot \cos(\theta_S) \quad a_S \cdot \sin(\theta_S) \quad 0]^T
 \tag{5.15}$$

La matrice TM è quella introdotta nel paragrafo 5.2 e richiede l'imposizione di θ e ϕ del piano cui appartiene il moto del Sole. a_S è il raggio medio della circonferenza che descrive il Sole in coordinate adimensionali. θ_S è l'angolo istantaneo formato tra la posizione del Sole e l'asse x del sistema (l'argomento della latitudine iniziale per le orbite di partenza) e dipende dalla posizione iniziale del Sole sul suo piano e dalla velocità angolare (il segno meno compare poiché il moto apparente del sole è in verso orario):

$$\theta_S = (u_S) = \theta_{S_0} - \omega_S \cdot t
 \tag{5.16}$$

Si faccia attenzione a non confondere tale angolo con la longitudine iniziale del piano dell'orbita solare.

I valori delle grandezze utilizzati, in coordinate adimensionali sono:

$$\begin{aligned}
 \mu &= 0.01215 \\
 m_s &= 328900.54 \quad \text{MassUnits} \\
 a_s &= 388.81114 \quad \text{DistanceUnits} \\
 \omega_s &= 0.92519598 \quad \text{rad / TimeUnits}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Si fa notare come l'espressione della ω_s sia in effetti la velocità angolare del Sole vista da un sistema che è a sua volta rotante (con velocità angolare unitaria per il sistema di adimensionalizzazioni adottato):

$$\text{Periodo} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a_s^3}{G \cdot \mu_s}} \Rightarrow \omega_s = -2 \cdot \pi / \text{Periodo} + \omega$$

Utilizzando l'espressione dell'energia cinetica data dalla (2.17) può scriversi il Lagrangiano del sistema (2.12), quindi, mediante l'applicazione della (2.11) ottenersi le equazioni del moto nella forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u \\
 \dot{y} &= v \\
 \dot{z} &= w \\
 \dot{u} &= x + 2 \cdot v - c_E \cdot (x + \mu_M) - c_M \cdot (x - \mu_E) - c_S \cdot (x - x_S) - \alpha_S \cdot x_S \\
 \dot{v} &= y - 2 \cdot u - c_E \cdot y - c_M \cdot y - c_S \cdot (y - y_S) - \alpha_S \cdot y_S \\
 \dot{w} &= -c_E \cdot z - c_M \cdot z - c_S \cdot (z - z_S) - \alpha_S \cdot z_S
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
 c_i &= \frac{\mu_i}{r_i^3} \\
 \text{in cui:} & \\
 \alpha_S &= \frac{m_S}{a_S^3}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Osservando le equazioni derivate, si nota come l'ultimo termine che compare a destra delle ultime tre, esprima che ogni punto del sistema Terra-Luna sia attratto dal Sole secondo una legge che è proporzionale alla massa di quest'ultimo ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza (compare il cubo al denominatore poiché al numeratore c'è una lunghezza che dipende dalla coordinata). Tale termine non si ottiene direttamente seguendo l'approccio lagrangiano, ma va aggiunto per tener conto di quanto

detto (si otterrebbe direttamente scrivendo le equazioni in forma inerziale e successivamente trasformando ed adimensionalizzando le coordinate).

Si noti come, nel caso piano la matrice TM sia la matrice identica; la posizione iniziale del Sole può essere imposta solo mediante la (5.16) e le equazioni si ottengono dalle precedenti annullando la componente z (si ottiene quanto riportato in [13]).

Come verifica della affidabilità di questo modello, si è provato ad imporre nulla la massa del Sole (il che ne annulla l'effetto perturbativo) e si è verificato che i risultati ottenuti sono i medesimi di quelli del propagatore a tre corpi.

Con tale propagatore si sono sviluppate missioni di trasferimento Terra-Luna a bassa spinta, che saranno descritte più in dettaglio nel prossimo capitolo; si sono svolte anche una serie di prove per cercare di comprendere il comportamento generale della soluzione (ad esempio la sua dipendenza dalle condizioni iniziali).

5.7 Propagatore bicircolare Terra-Sole

In questo modello il sistema a tre corpi principale è quello Terra-Sole e la Luna è modellata come una perturbazione periodica. Si suppone che Terra e Sole si muovano su orbite circolari attorno al loro baricentro e la Luna si muova su un'orbita circolare attorno al centro della Terra.

Analogamente a prima si procede con il derivare le equazioni del moto mediante un approccio lagrangiano; in questo caso i termini aggiuntivi che comparivano alla fine delle equazioni (5.18) non sono necessari.

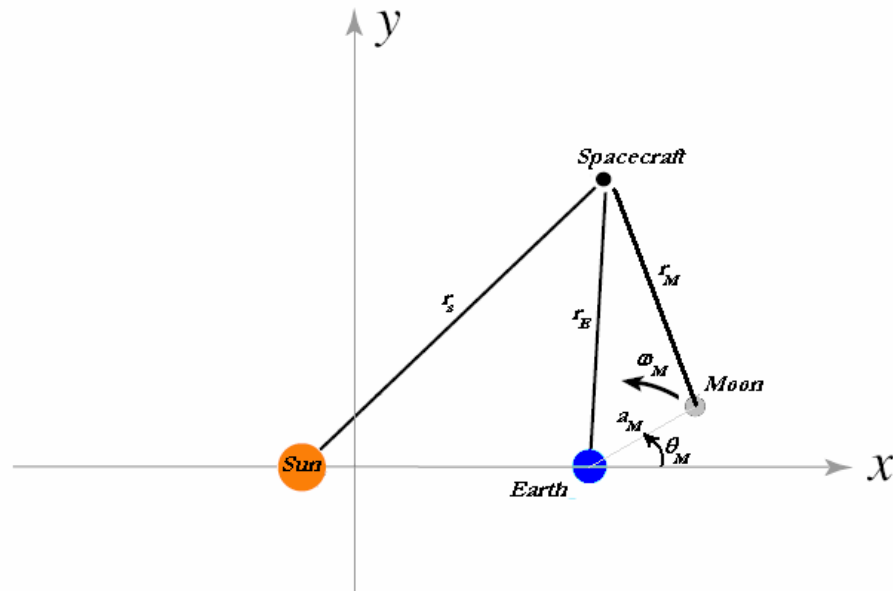


Figura 5.8 - Geometria modello bicircolare Terra-Sole

Essendo il sistema primario quello Terra-Sole valgono le seguenti espressioni, che rappresentano le distanze e le masse nel sistema sinodico rotante:

$$\begin{aligned}
 \mu_E &= \mu \\
 \mu_S &= 1 - \mu \\
 \mu_M &= \frac{m_{Moon}}{(m_E + m_S)}
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
 r_S &= \sqrt{(x + \mu_E)^2 + y^2 + z^2} \\
 r_E &= \sqrt{(x - \mu_S)^2 + y^2 + z^2} \\
 r_M &= \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2}
 \end{aligned}$$

Le coordinate istantanee della Luna dipendono dalla disposizione del piano della sua orbita rispetto all'eclittica e dalla posizione iniziale di essa su questo piano. La posizione istantanea della Luna sul piano della sua orbita dipende dall'angolo iniziale rispetto alla congiungente Terra-Sole e

dalla sua velocità angolare nel sistema di riferimento rotante. Nel sistema definito dai primari Terra-Sole, la Luna sembra muoversi in verso antiorario con una velocità angolare che gli consente di compiere un giro in un mese:

$$\text{Periodo} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{a_M^3 / G \cdot \mu_E} \Rightarrow \omega_M = -2 \cdot \pi / \text{Periodo} + \omega.$$

La posizione della Luna è quindi determinabile da:

$$\theta_M = (u_M) = \theta_{M_0} + \omega_M \cdot t \quad (5.21)$$

Ancora una volta si sottolinea che θ_{M_0} è una sorta di argomento della latitudine iniziale lunare e per definire TM sono necessarie latitudine e longitudine del piano dell'orbita. (x_M, y_M, z_M) ricavabili da:

$$(x_M, y_M, z_M) = TM \cdot [a_M \cdot \cos(\theta_M) \quad a_M \cdot \sin(\theta_M) \quad 0]^T \quad (5.22)$$

a_m , analogamente a prima, è la distanza media Terra-Luna

Si noti che queste coordinate sono relative, in effetti, ad un sistema di riferimento centrato nel centro della Terra; le equazioni del moto, come richiede il sistema Terra-Sole, saranno scritte in un sistema centrato nel baricentro dei due primari. E', dunque, richiesta una traslazione di $1-\mu$ della coordinata x lunare.

Le grandezze utilizzate sono:

$$\begin{aligned} \mu &= 3.036e^{-6} \\ m_M &= 3.733998734625702e^{-8} \quad \text{Mass Units} \\ a_S &= 2.573565073532068e^{-3} \quad \text{Distance Units} \\ \omega_S &= 12.368869 \quad \text{rad / Time Units} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Si noti come, essendo l'unità di massa molto maggiore di quella del caso precedente, le grandezze sono molto più piccole e richiedono, pertanto, molti più decimali. La velocità angolare è, infine, maggiore di quella del propagatore Terra-Luna, poiché in un riferimento rotante con la Terra, attorno al Sole, la Luna si muove molto più rapidamente di quanto non faccia il Sole rispetto alla Terra.

Mediante un procedimento analogo al precedente le equazioni del moto che si ottengono sono:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u \\
 \dot{y} &= v \\
 \dot{z} &= w \\
 \dot{u} &= x + 2 \cdot v - c_S \cdot (x + \mu_E) - c_E \cdot (x - \mu_S) - c_M \cdot (x - x_M) \\
 \dot{v} &= y - 2 \cdot u - c_S \cdot y - c_E \cdot y - c_M \cdot (y - y_M) \\
 \dot{w} &= -c_S \cdot z - c_E \cdot z - c_M \cdot (z - z_M)
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\text{con: } c_i = \frac{\mu_i}{r_i^3} \tag{5.25}$$

Esiste, come è ovvio, essendo il concetto basilare dei due propagatori il medesimo, una certa simmetria nelle equazioni e nelle grandezze in gioco; le equazioni del moto e le distanze per il modello bicircolare Terra-Luna sono, come è facile verificare, ottenibili da quelle Terra-Sole sostituendo i pedici:

$$\begin{aligned}
 E &\rightarrow S \quad \text{il primario di massa maggiore} \\
 M &\rightarrow E \quad \text{il primario di massa minore} \\
 S &\rightarrow M \quad \text{il quarto corpo perturbativo}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ancora una volta nel caso bidimensionale la (5.21) è sufficiente per determinare la posizione istantanea della Luna e non è necessario processare mediante la matrice TM le coordinate di questa sul suo piano orbitale che viene a coincidere con quello del sistema a tre corpi primario (l'eclittica in questo caso) (si ottiene quanto riportato in [13]).

Per entrambi i propagatori le condizioni iniziali sono determinabili come descritto nel paragrafo 5.2 ed eventuali rami a bassa spinta si ottengono aggiungendo alle equazioni del moto i termini perturbativi che tengono conto della presenza del propulsore elettrico (5.9).

5.8 Utilizzo della sovrapposizione di due modelli a tre corpi

Si descrive, per completezza, anche una applicazione del modello a quattro corpi che prevede la sovrapposizione di due sistemi a tre corpi (vedi paragrafo 5.5). Come già descritto, una possibile schematizzazione del moto

di una massa nel campo gravitazionale creato da altri tre corpi è quella di considerare due modelli a tre corpi in sovrapposizione.

L'applicazione di questo modello al trasferimento Terra-Luna è stato analizzato per la progettazione della missione Hiten.

L'approccio tradizionale per costruire orbite di trasferimento Terra-Luna è quello delle coniche raccordate. Questo tipo di studio utilizza un trasferimento alla Homann ed una dinamica propria dei *2-corpi*. Il trasferimento è realizzato utilizzando un'ellisse fra due orbite attorno alla Terra ed alla Luna; i due corpi coinvolti sono alternativamente *Terra-spacecraft* e *Luna-spacecraft*. Le fasi di partenza e di cattura sono modellate come rami iperbolici che, al limite delle sfere di influenza, vengono raccordate con l'ellisse di trasferimento. Nel 1991, il fallimento della missione Muses A/B ha richiesto l'applicazione di un trasferimento richiedente un Δv minore di quello necessario per una manovra alla Homann poiché il carburante a bordo della sonda superstite non era sufficiente per effettuarla. Fu utilizzato (vedi cap. 2 ed appendice A) un trasferimento a bassa energia con cattura balistica da parte della Luna, proposto da Belbruno e Miller, che, utilizzando la perturbazione solare, richiedeva un minor quantitativo di propellente.

Il trasferimento Terra-Luna può esser ottenuto in maniera sistematica utilizzando la dinamica dei due sistemi a tre corpi ristretti: *Terra-Luna-spacecraft* e *Terra-Sole-spacecraft*. Partendo da un'orbita attorno alla Terra, ci si porta nella zona in cui i manifolds dei due sistemi si intersecano (riprendendo il concetto delle ISP)^{[37][38]}.

La costruzione è fatta principalmente nel sistema Terra-Sole utilizzando la sezione di Poincarè U_3 per determinare l'intersezione dei due rami; si ricerca una condizione iniziale su tale piano che, integrata in avanti, nel sistema Terra-Luna, dia un'orbita catturata dalla Luna, integrata all'indietro, invece, nel sistema Terra-Sole, una tendente a portarsi nelle vicinanze della Terra.

- **Ramo Lunare di cattura balistica.** Affinché un'orbita tenda naturalmente verso uno dei punti di Lagrange del sistema è sufficiente che essa appartenga al manifold stabile di un'orbita periodica attorno ad esso. In termini di condizioni iniziali è sufficiente che il punto su una delle sezioni di Poincarè giaccia all'interno della curva Γ . Nel caso in esame è necessario che l'orbita sia naturalmente diretta verso il punto LL_2 e dunque il punto sulla U_3 sia all'interno della $\Gamma_{LL_2, p.o.}^{s,X}$. Trasformando la sezione di Poincarè del manifold stabile di LL_2 nel sistema Terra-Sole si ottiene una curva

chiusa del tipo di figura 5.9. Durante tale tratto di traiettoria si assume che il Sole sia soltanto una perturbazione trascurabile e che un punto, contenuto all'interno della curva $\Gamma_{LL_2,p.o.}^{S,X}$ ed integrato nelle equazioni del moto del sistema Terra-Luna, sia balisticamente catturato dalla Luna. Ovvero si ipotizza che l'orbita si porti all'interno della sfera di influenza lunare e compia almeno una rivoluzione attorno al satellite; a questo punto un piccolo Δv è sufficiente per ottenere una cattura stabile.

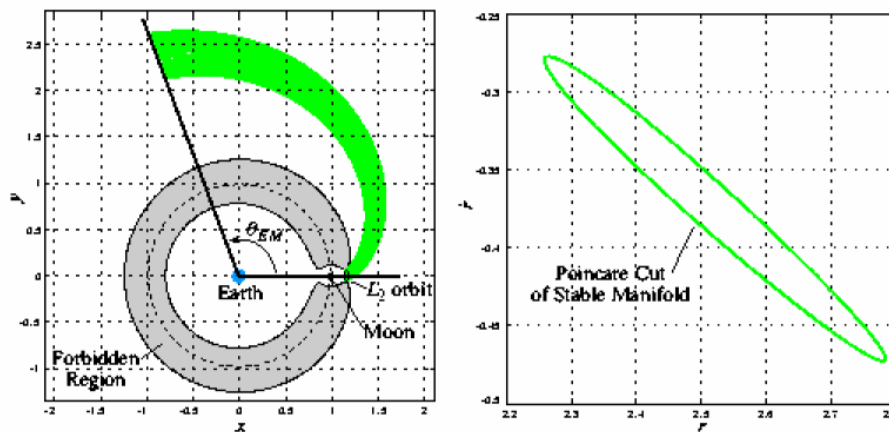


Figura 5.9 - Manifold stabile di LL_2 e relativa sezione di Poincaré

- **Ramo nel sistema Terra-Sole.** Da quanto detto nel paragrafo 2.17, un'orbita subisce una distorsione (un "twist") che dipende dalla sua distanza dal manifold; più vicina essa vi si trova nell'approcciarsi alla regione di equilibrio e più essa viene distorta quando esce da tale regione. Da ciò consegue che una piccola variazione nelle condizioni iniziali, seguendo il "twisting" dell'orbita, causi una congrua modifica del punto di arrivo di questa. Tale proprietà è utilizzata per determinare condizioni iniziali di partenza dall'orbita voluta attorno alla Terra. Si consideri la deformazione che subisce il segmento q_1 - q_2 (figura 5.10) il quale, nell'attraversare la regione di equilibrio (in effetti integrato all'indietro), si trasforma in una linea che segue per un lungo tratto $\Gamma_{EL_2,p.o.}^{S,J}$. Mediante tentativi, si è in grado di portare la pre-immagine del segmento ad essere compatibile con i vincoli imposti dall'orbita di partenza. Analogamente a prima, in tale tratto dell'orbita la Luna è soltanto una perturbazione trascurabile. Si noti come si sceglie, per questa fase, un'orbita che,

essendo al di fuori del manifold è sicuramente un'orbita di non-tansito e pertanto intersecherà il piano di U_3 .

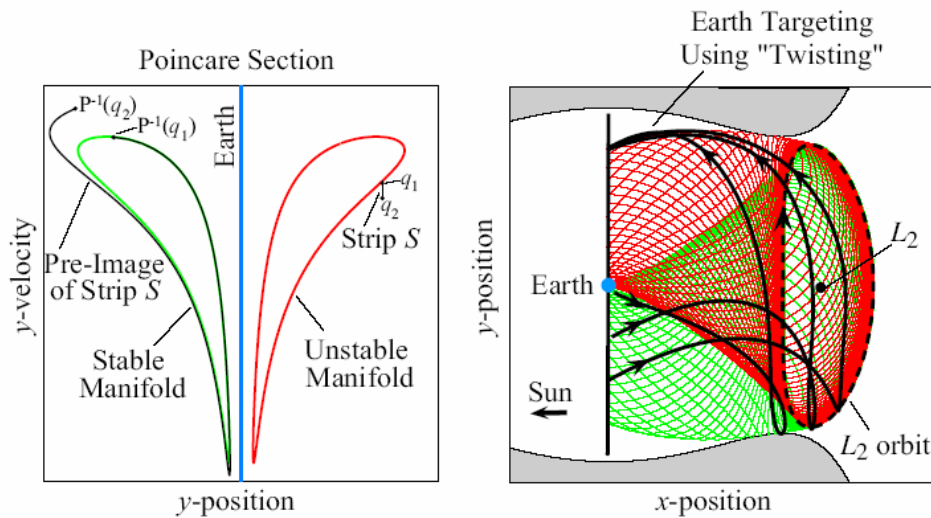


Figura 5.10 - Twisting del segmento p_1-q_1

Sovrapponendo le due sezioni di Poincarè, si sceglie un punto che appartenga all'interno di $\Gamma_{LL_2, p.o.}^{s,x}$ (affinché integrato in avanti sia balisticamente catturato dalla Luna), che stia all'esterno di $\Gamma_{EL_2, p.o.}^{u,J}$ (affinché sia un'orbita che resti in J), ma sufficientemente vicino alla linea di intersezione da subire una sostanziale deformazione necessaria, integrando all'indietro, a rispettare i vincoli imposti dall'orbita di partenza^[39].

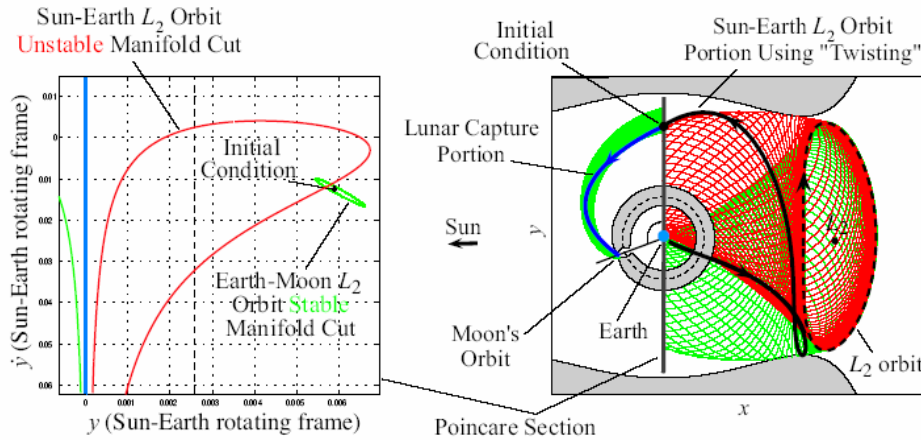
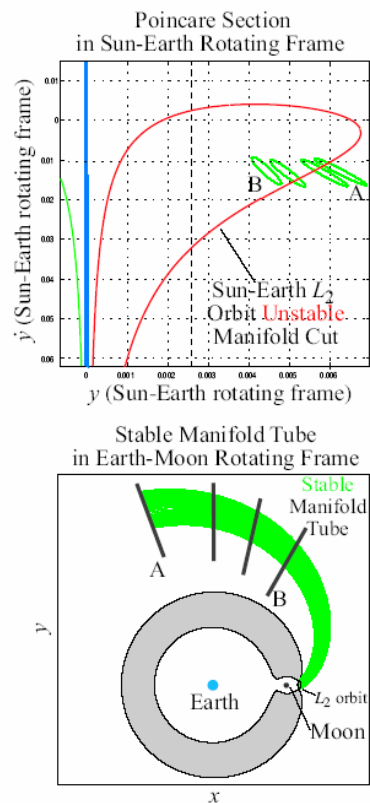


Figura 5.11 - Sovrapposizione delle sezioni di Poincarè per la determinazione delle condizioni iniziali di un trasferimento Terra-Luna



Non è detto che per ogni fase iniziale della Luna i manifolds dei due sistemi si intersechino; la scelta di questo parametro è quindi determinante affinché sia possibile identificare un punto su U_3 che soddisfi i requisiti di entrambi i rami. Si osservi come, essendo nel sistema Terra-Sole, la proiezione del manifold su EL_2 resti immutata.

Figura 5.12 - Dipendenza della posizione della sezione di Poincarè del manifold stabile di LL_2 dalla fase iniziale della Luna

Un'orbita costruita con tale metodologia richiede un $\Delta v=34m/s$ nel punto di raccordo che risulta del 20% inferiore a quello necessario per ottenere lo stesso trasferimento con una manovra alla Homann. Questa analisi di prima approssimazione può costituire il punto di partenza per l'integrazione di sistemi che tengono in considerazione anche altre forze (o le stesse in maniera differente come nel caso di un modello bicircolare) e perturbazioni. Trasferimenti di questo tipo nel sistema di riferimento Terra-Sole e Terra-Luna hanno il seguente aspetto.

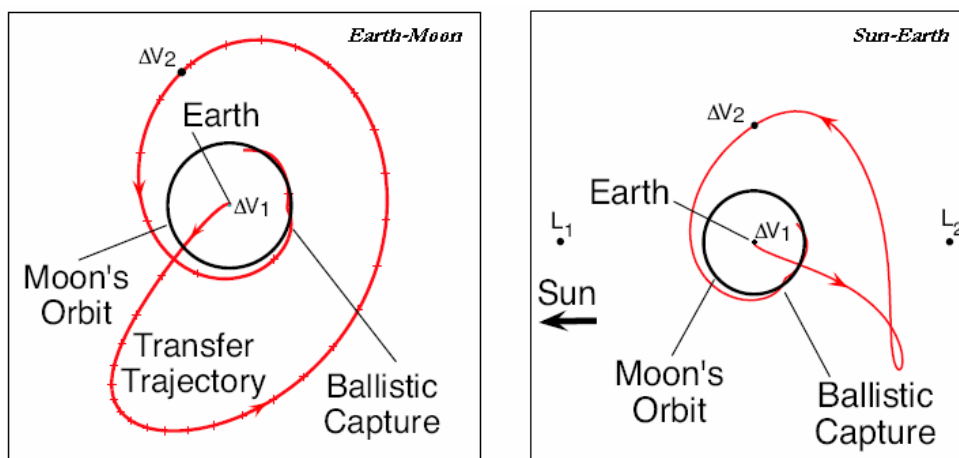


Figura 5.13 - Trasferimento Terra-Luna

Anche paragonando questo tipo di trasferimento a traiettorie che utilizzino i punti LL_1 e LL_2 si rileva, ancora, un risparmio in termini di propellente^[40].

5.9 Propagatore a quattro corpi

Con l'intento di utilizzarlo per uno studio di successiva approssimazione, è stato, nel corso del lavoro, sviluppato un propagatore che integra le equazioni "classiche" del moto considerando l'influsso congiunto dell'attrazione gravitazionale di Terra, Sole e Luna modellandole come perturbazioni al moto kepleriano^[5].

Le equazioni del moto di n corpi, soggetti alle sole mutue azioni gravitazionali, possono essere formulate, in generale, per $n-2$ corpi considerando gli altri come perturbazioni. Mediante tale approccio, le

equazioni del moto per m_1 e m_2 rispetto ad un sistema di riferimento inerziale diventano:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} &= G \cdot \frac{m_2}{r_{12}^3} \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) + G \cdot \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{1j}^3} \cdot (\bar{r}_j - \bar{r}_1) \\ \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} &= G \cdot \frac{m_1}{r_{21}^3} \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) + G \cdot \sum_{j=3}^n \frac{m_j}{r_{2j}^3} \cdot (\bar{r}_j - \bar{r}_2)\end{aligned}\quad (5.27)$$

Combinando le (5.26) fra loro, il moto di una massa rispetto all'altra è ottenibile sottraendo l'equazione del moto di m_2 a quella di m_1 .

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \bar{r} = -G \cdot \sum_{j=3}^n m_j \cdot \left(\frac{\bar{d}_j}{d_j^3} + \frac{\bar{\rho}_j}{\rho_j^3} \right) \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \\ \bar{\rho}_j &= \bar{r}_j - \bar{r}_1 \\ \text{in cui: } \bar{d}_j &= \bar{r} - \bar{\rho}_j \\ \mu &= G \cdot (m_1 + m_2)\end{aligned}\quad (5.29)$$

Si osservi come, se si trascurano gli $n-2$ corpi di disturbo, la (5.27) fornisca esattamente l'equazione che descrive il moto di un corpo sotto la forza gravitazionale di un solo attrattore.

Essendo interessati allo studio di una sonda nel sistema Terra-Sole-Luna il numero di corpi considerato è quattro ($n=4$); le equazioni si specializzano in:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u \\
 \dot{y} &= v \\
 \dot{z} &= w \\
 \dot{u} &= -\frac{\mu}{r^3} \cdot x - G \cdot m_S \cdot \left(\frac{(x-x_S)}{d_S^3} + \frac{x_S}{\rho_S^3} \right) - G \cdot m_M \cdot \left(\frac{(x-x_M)}{d_M^3} + \frac{x_M}{\rho_M^3} \right) \\
 \dot{v} &= -\frac{\mu}{r^3} \cdot y - G \cdot m_S \cdot \left(\frac{(y-y_S)}{d_S^3} + \frac{y_S}{\rho_S^3} \right) - G \cdot m_M \cdot \left(\frac{(y-y_M)}{d_M^3} + \frac{y_M}{\rho_M^3} \right) \\
 \dot{w} &= -\frac{\mu}{r^3} \cdot z - G \cdot m_S \cdot \left(\frac{(z-z_S)}{d_S^3} + \frac{z_S}{\rho_S^3} \right) - G \cdot m_M \cdot \left(\frac{(z-z_M)}{d_M^3} + \frac{z_M}{\rho_M^3} \right)
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

e le grandezze in gioco (5.28) si semplificano in:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\
 \rho_S &= (x_S\hat{i} + y_S\hat{j} + z_S\hat{k}) \\
 \rho_M &= (x_M\hat{i} + y_M\hat{j} + z_M\hat{k}) \\
 d_S &= ((x-x_S)\hat{i} + (y-y_S)\hat{j} + (z-z_S)\hat{k}) \\
 d_M &= ((x-x_M)\hat{i} + (y-y_M)\hat{j} + (z-z_M)\hat{k}) \\
 \mu &= G \cdot m_E
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Dalle precedenti si osserva come l'attrattore primario scelto è la Terra, mentre Sole e Luna fungono da perturbazioni; il sistema di riferimento scelto è geocentrico equatoriale.

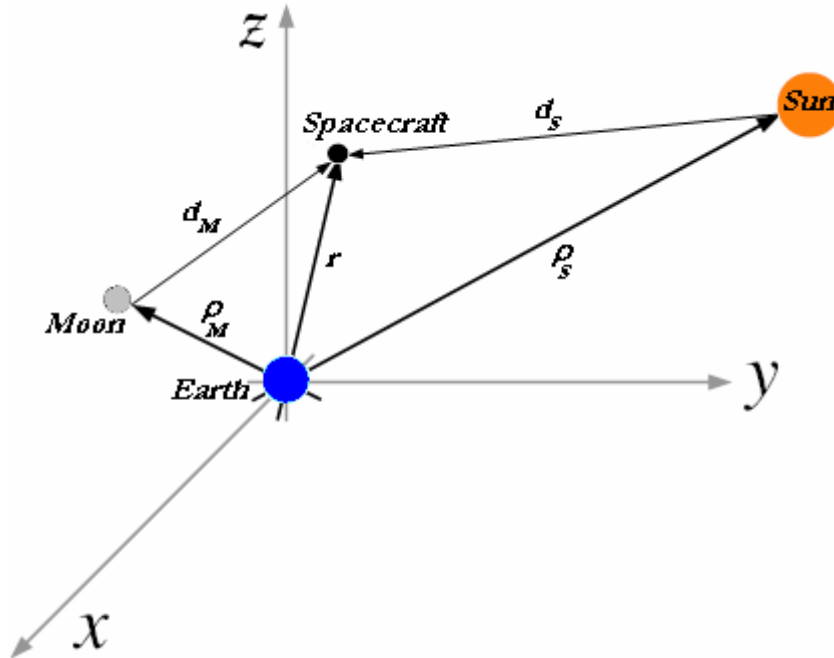


Figura 5.14 - Geometria del modello a quattro corpi

In tale modello anche la posizione del Sole e della Luna è stata imposta, in maniera meno approssimata, mediante le effemeridi^[41] (vedi appendice D). Imponendo la data di partenza dalla Terra e dalla Luna (si ricordi che i trasferimenti fra i due corpi sono stati modellati come due fasi di fuga), le effemeridi forniscono l'effettiva posizione dei due corpi. Da queste si ottengono, quindi, le grandezze istantanee da utilizzare nelle (5.31). Integrando le equazioni del moto nella forma (5.30), si ottengono, infine, le orbite volute.

Le condizioni iniziali sono state imposte sempre allo stesso modo (vedi paragrafo 5.2) prestando attenzione al fatto che il sistema di riferimento è geocentrico equatoriale, quindi le (5.7) vanno modificate eliminando la velocità di trascinarsi. In altre parole, essendo il sistema inerziale, la velocità iniziale sull'orbita è data dalla (5.3). Essendo il sistema di riferimento geocentrico equatoriale, per ottenere la velocità di una sonda in orbita circolare attorno alla Luna, è necessario sommare vettorialmente la sua velocità circolare. Per orbite di fuga dalla Luna, quindi le velocità iniziali da imporre sono date dalle:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = TM \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{\text{orbitale}} \\ \mathbf{v}_{\text{orbitale}} \\ \mathbf{w}_{\text{orbitale}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_{y_{\text{Moon}}} \cdot Z_{\text{Moon}} - \omega_{z_{\text{Moon}}} \cdot Y_{\text{Moon}} \\ \omega_{x_{\text{Moon}}} \cdot Z_{\text{Moon}} - \omega_{z_{\text{Moon}}} \cdot X_{\text{Moon}} \\ \omega_{x_{\text{Moon}}} \cdot Y_{\text{Moon}} - \omega_{y_{\text{Moon}}} \cdot X_{\text{Moon}} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Ciò poiché la velocità angolare della Luna ha tre componenti ed i termini che ne determinano la posizione, essendo utilizzati per definire le condizioni iniziali, devono essere quelli forniti dalle effemeridi alla data specificata.

I rami a bassa spinta della traiettoria sono ottenibili, dopo aver specificato il propulsore elettrico, aggiungendo alle equazioni del moto un termine del tutto simile alle (5.9)

Per testare l'affidabilità del propagatore a quattro corpi implementato, si sono eseguite delle prove di confronto con D-Orbit (un software in corso di sviluppo presso ALTA-SPACE). Poiché il D-Orbit non consente di simulare né fughe da pianeti diversi dalla terra né spinte impulsive, il propagatore è stato modificato in modo da modellare un sollevamento orbitale dalla Terra a bassa spinta. Le prove hanno coinvolto la variazione del propulsore e dei parametri orbitali. Sono stati provati tre tipi di propulsore:

| Model | SPT-100 LeRC | NASA 457M | SPT-1 |
|---------------------|------------------|-------------------|--------------------------------|
| Type | SPT | SPT | SPT |
| Voltage (V) | 300 | 649 | 1251 |
| Current (A) | 4.75 | 111 | 2.49 |
| Power (W) | 1425 | 72039 | 3115 |
| Thrust (mN) | 92 | 2950 | 87 |
| Total Efficiency | 0.48 | 0.59 | 0.43 |
| Totale I_{sp} (s) | 1505 | 2928 | 3112 |
| Cathode flow (mg/s) | 1 | 10 | 0.43 |
| Anode flow (mg/s) | 5.23 | 92.7 | 2.42 |
| | Benchmark | Max Thrust | Max I_{sp} |

Tabella 5.4 - Proprietà dei propulsori paragonati

Il primo è quello scelto per tutte le altre simulazioni (una sorta di benchmark); il secondo è stato scelto poiché è quello che presentava la maggiore spinta fra quelli disponibili nel database del Centro Spazio; l'ultimo è stato selezionato in quanto quello con impulso specifico maggiore.

Capitolo V - Implementazione Propagatori

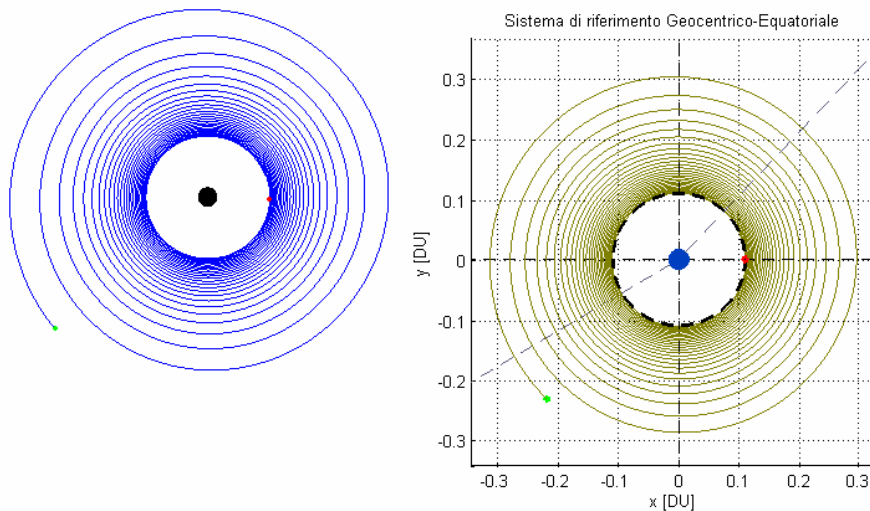
Sono state confrontate (a parità di parametri iniziali, propulsore, epoca di lancio e durata della simulazione) le orbite, la variazione istantanea del raggio e della velocità.

Alcuni confronti sono riportati di seguito; le immagini nella colonna di destra si riferiscono ai risultati ottenuti con il D-Orbit, mentre quelle nella colonna di sinistra sono state ottenute con il simulatore implementato.

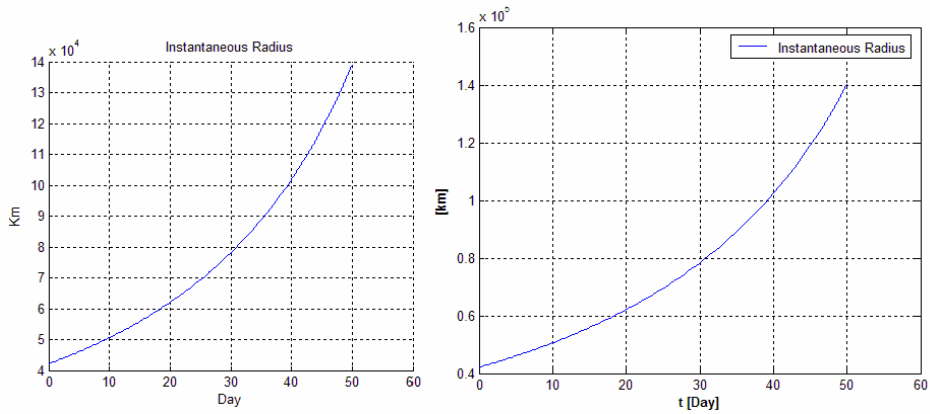
PROVA I

- Propulsore: SPT-100LeRC
- Durata: 50 [gg]
- Massa: 300 [Kg]
- Quota di partenza: 35786 [Km] (orbita GEO)
- Altri parametri impostati a zero

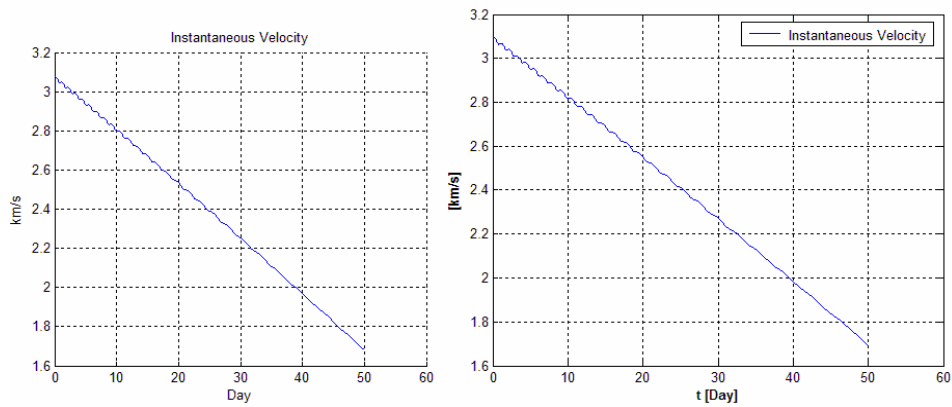
Orbite



Posizione



Velocità

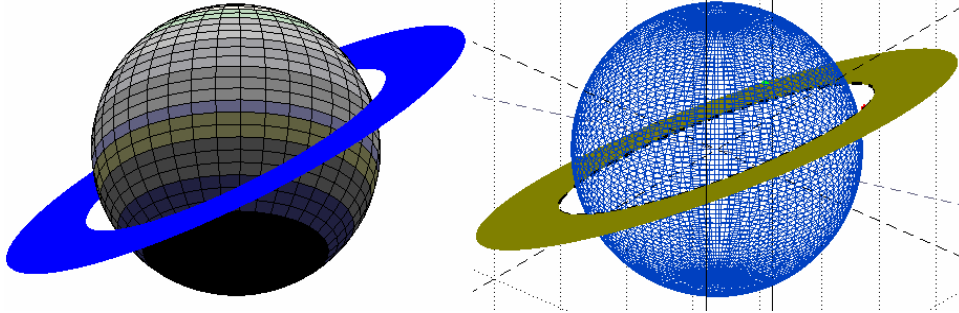


PROVA II

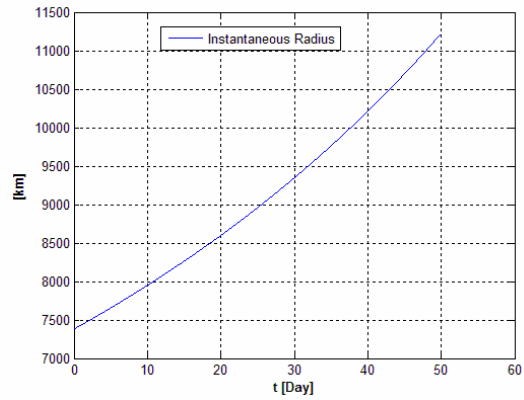
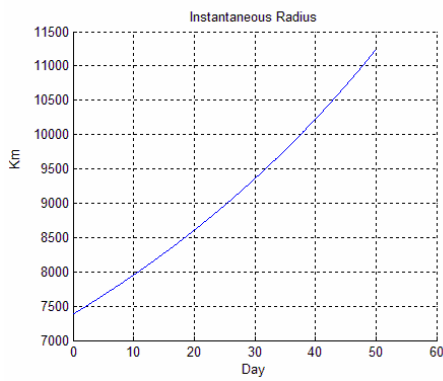
- Propulsore: SPT-100LeRC
- Durata: 50 [gg]
- Mass: 300 [Kg]
- Quota di partenza: 1000 [Km]
- Anomalia Retta del Nodo Ascendente: 200 deg
- Inclinazione: 45 deg
- Altri parametri impostati a zero

Capitolo V - Implementazione Propagatori

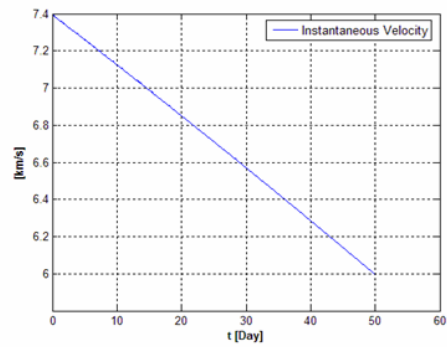
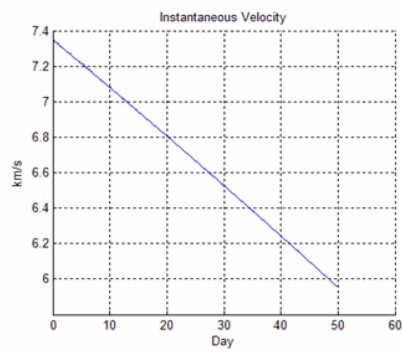
Orbite



Posizione



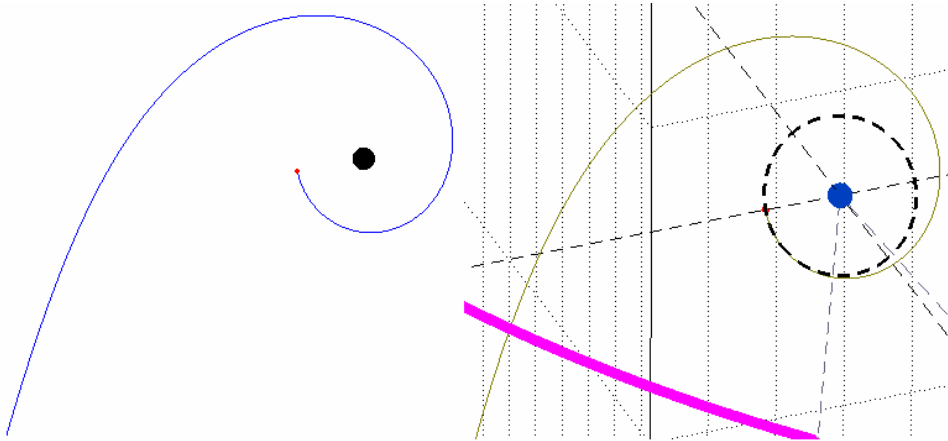
Velocità



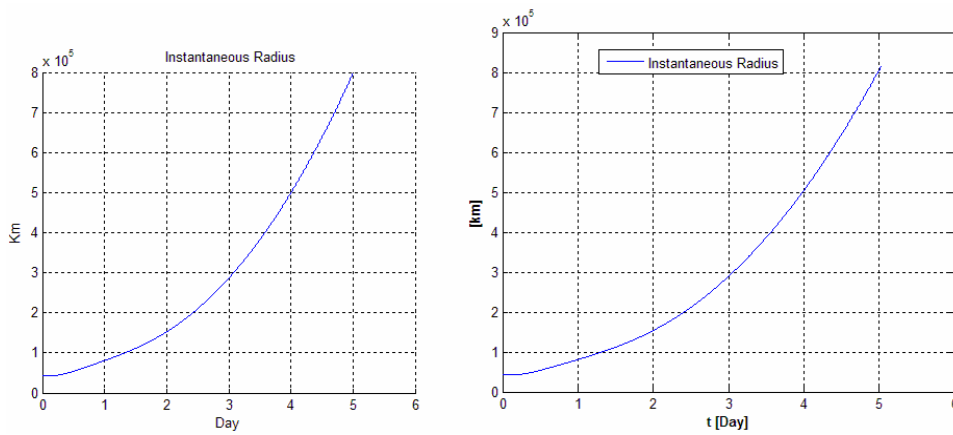
PROVA III

- Propulsore: NASA 457M
- Durata: 5 [gg]
- Mass: 300 [Kg]
- Quota di partenza: 35786 [Km] (orbita GEO)
- Inclinazione: 60 deg
- Altri parametri impostati a zero

Orbite

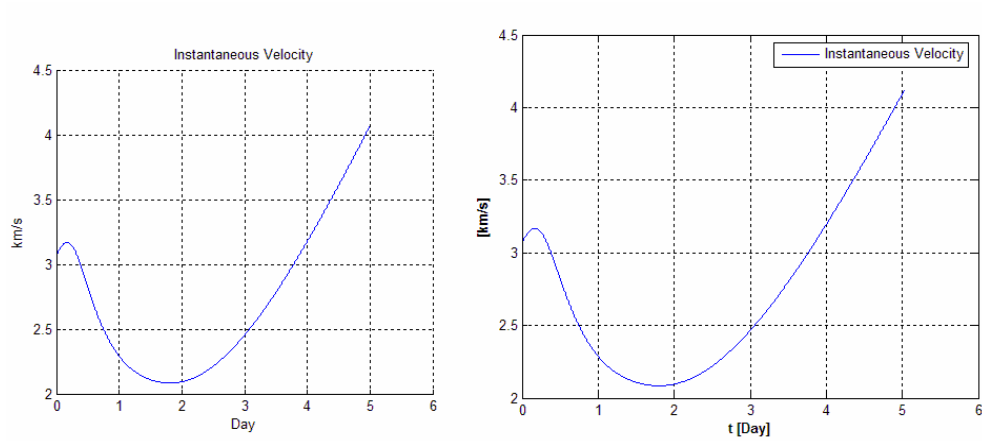


Posizione



Capitolo V - Implementazione Propagatori

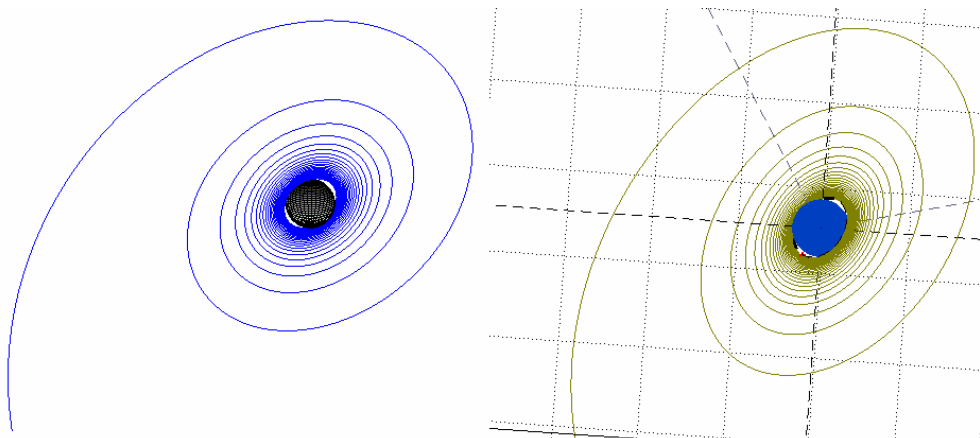
Velocità



PROVA IV

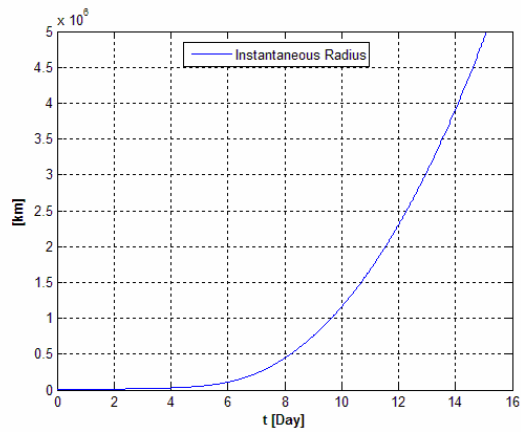
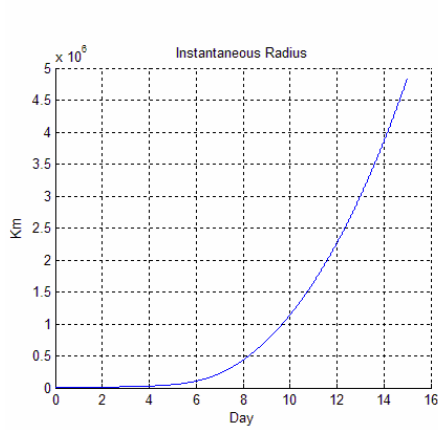
- Propulsore: NASA 457M
- Durata: 15 [gg]
- Mass: 300 [Kg]
- Quota di partenza: 1000[Km]
- Anomalia Retta del Nodo Ascendente: 30 deg
- Inclinazione: 45 deg
- Altri parametri impostati a zero

Orbite

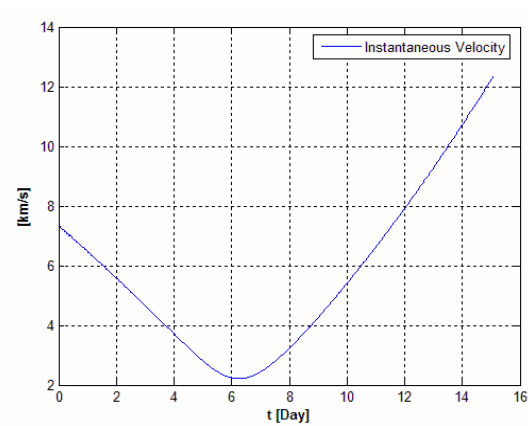
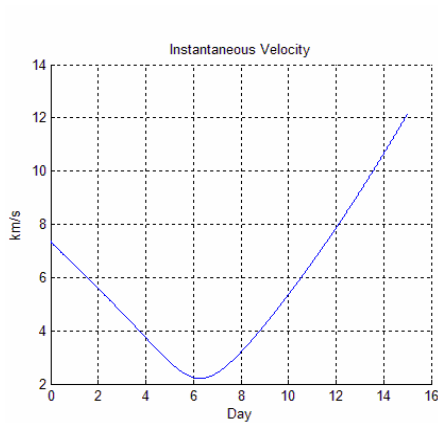


Studio Preliminare di Missioni Spaziali con Modelli a Tre Corpi

Posizione



Velocità

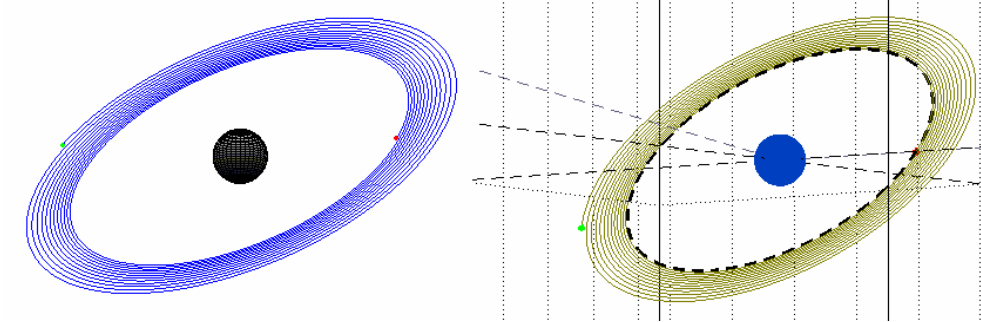


PROVA V

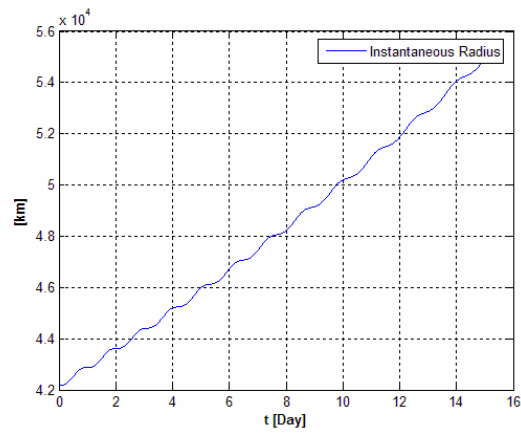
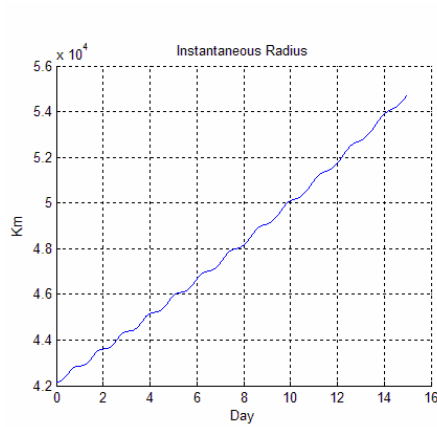
- Propulsore: SPT-1
- Durata: 15 [gg]
- Mass: 300 [Kg]
- Quota di partenza: 35786 [Km] (orbita GEO)
- Inclinazione: 45 deg
- Altri parametri impostati a zero

Capitolo V - Implementazione Propagatori

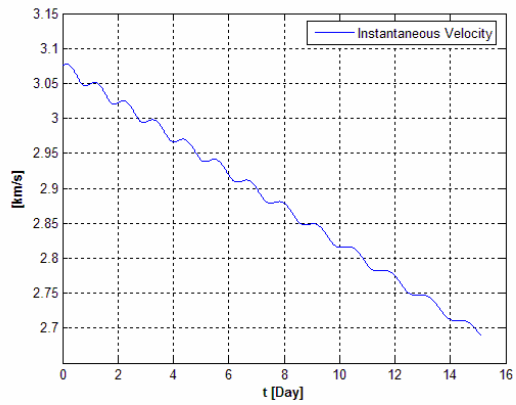
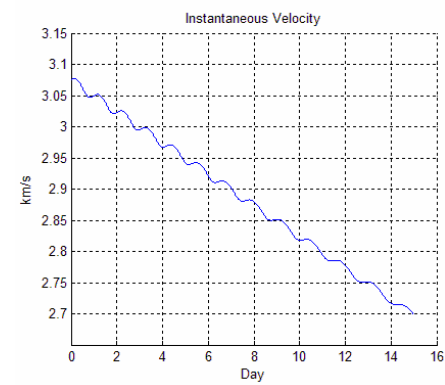
Orbite



Posizione



Velocità



STUDI PRELIMINARI DI MISSIONE

Nella parte finale il lavoro ha assunto un taglio più applicativo ed i propagatori sviluppati sono stati utilizzati per disegnare differenti tipi di missioni, riscontrarle con raffronti bibliografici e trasferimenti effettivamente realizzati. Si sono tentati, in particolare, trasferimenti Terra-Luna con differenti metodologie, derivazioni numeriche di orbite periodiche e traiettorie verso esse dalla Terra.

6.1 Introduzione

Si procede con l'applicare i propagatori descritti nel precedente capitolo per ottenere orbite di trasferimento Terra-Luna, orbite operative di tipo Halo e Lissajous e trasferimenti verso esse; si considera la possibilità di un tratto a bassa spinta della traiettoria e si analizza il comportamento della soluzione in termini di sensibilità rispetto alle condizioni iniziali e dei Δv richiesti.

6.2 Trasferimenti Terra-Luna nell'ambito del CR3BP

Si sono eseguite delle prove per ottenere, mediante due fasi di fuga, una traiettoria che consentisse un trasferimento Terra-Luna. Verrà innanzitutto descritto un trasferimento completamente balistico, o meglio, che richiede un Δv iniziale, uno al raccordo ed uno alla cattura e di seguito un trasferimento che utilizzi il ramo di cattura lunare completamente propulso mediante un SPT 100 [1350] (vedi paragrafo 5.3). Infine si eseguiranno una serie di prove volte ad identificare una posizione iniziale, in termini di v , che risulti più vantaggiosa in termini di Δv all'intersezione dei due rami e si dedurranno i motivi di tali, eventuali risparmi.

6.2.1 Trasferimento Terra-Luna balistico

Uno dei trasferimenti più semplici Terra-Luna è quello che prevede di determinare una traiettoria che, partendo da un'orbita attorno alla Terra di quota voluta, raggiunga direttamente una precisa orbita lunare; ossia si sono determinate le entità dei Δv necessari affinché una sonda in orbita LEO raggiungesse un'orbita LLO. Queste traiettorie di trasferimento, nel sistema rotante ed adimensionale, si presentano come in figura (confrontabili ad esempio con quelle riportate in [42]).

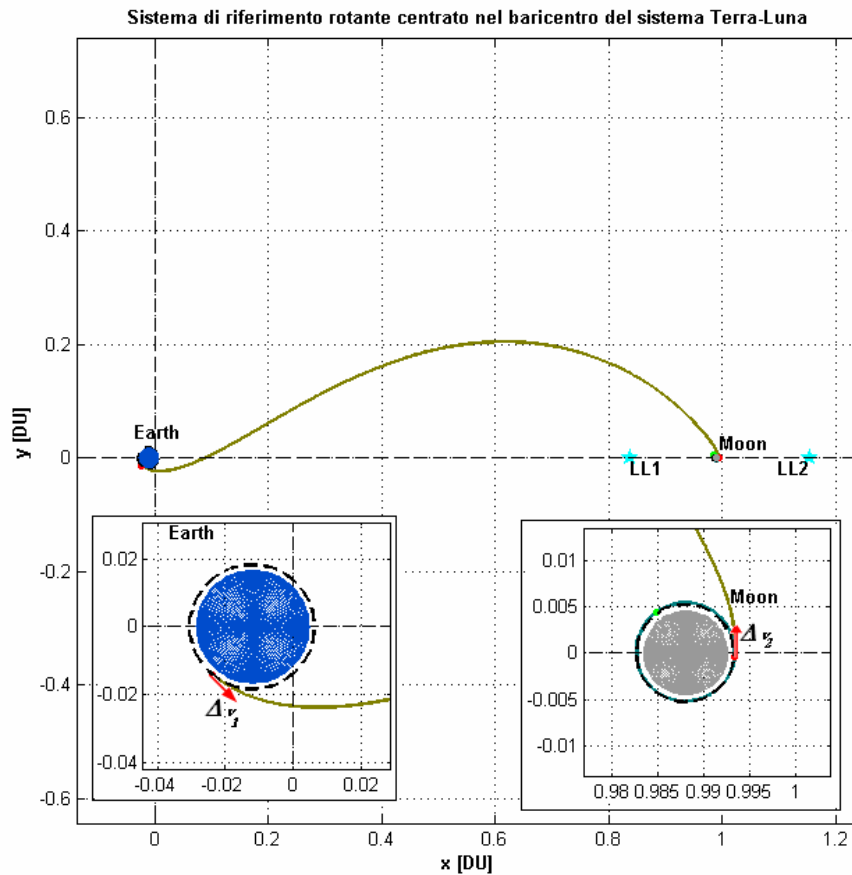


Figura 6.1 - Trasferimento diretto Terra-Luna nel CR3BP

E' stato necessario imporre un Δv anche attorno alla Luna per ottenere la circolarizzazione dell'orbita. Partendo da un'orbita circolare, di quota 700 km , e raggiungendo un'orbita LLO circolare di quota 300 km , il Δv totale richiesto è pari a 3.8710 km/s . E', infatti, necessario un $\Delta v_1 = 3.0105 \text{ km/s}$ per ottenere la fuga dalla Terra ed un $\Delta v_2 = -0.8605 \text{ km/s}$ per ricircolarizzare l'orbita attorno alla Luna.

Per orbite di partenza LEO di quota 167 km ed orbite di arrivo LLO di quota 100 km è necessario $\Delta v = 4.027 \text{ km/s}$.

Un altro metodo di ottenere questo genere di trasferimento nel sistema Terra-Luna è quello di utilizzare la posizione di EL_1 . Partendo dalla stessa orbita circolare attorno alla Terra e portandosi ad una distanza pari a quella di EL_1 con il Δv minimo che si è riuscito ad ottenere, l'orbita presenta un comportamento molto particolare. Come si nota, infatti, la traiettoria tende a seguire la circonferenza definita da EL_1 con una velocità molto bassa; per

intervalli di intergrazione molto lunghi l'orbita si sposta di poco su questa circonferenza. Imponendo un $\Delta v = 3.0841 \text{ km/s}$ ad un angolo di fase iniziale di 170 deg , si ottengono le seguenti posizioni finali dopo gli intervalli di tempo indicati.

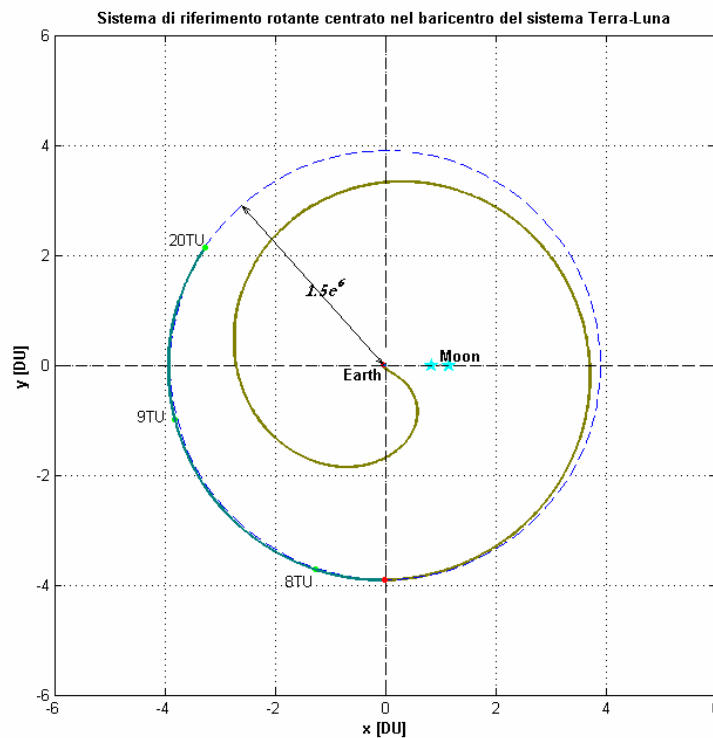


Figura 6.2 - Dinamica ad una distanza di EL_1

L'idea, a questo punto, è quella di utilizzare i punti di librazione del sistema Terra-Sole per ottenere trasferimenti Terra-Luna ed indagare circa il comportamento della soluzione in queste zone. Pertanto si è simulato il trasferimento con due fasi:

- Fase di fuga dalla Terra con l'imposizione di un Δv che sia circa quello necessario a raggiungere la velocità di fuga dall'orbita imposta. Tale fase è stata fatta terminare ad una distanza dalla Terra pari a quella di EL_1 ; in altre parole, se considerato in un sistema di riferimento centrato nel baricentro Terra-Luna e rotante con essi, il primo punto di librazione del sistema Terra-Sole sembra compiere una circonferenza di raggio $1.5e^6 \text{ km}$.

- Fase di fuga dalla Luna che richiede ancora una volta l'imposizione di un Δv per raggiungere condizioni di fuga. Anche tale tratto è stato fatto terminare ad una distanza dalla Luna pari alla posizione di EL_1 rispetto a questa.

I due tratti di traiettoria sono stati, dunque, raccordati e, risolvendo la radice quadrata della somma delle differenze di velocità delle componenti al quadrato, ne è stato calcolato il Δv necessario al punto di raccordo. Si consideri, ad esempio, un'orbita di partenza dalla Terra di 700 km di quota ed un'orbita di arrivo di 300 km ; mediante il procedimento descritto l'orbita assume il seguente aspetto.

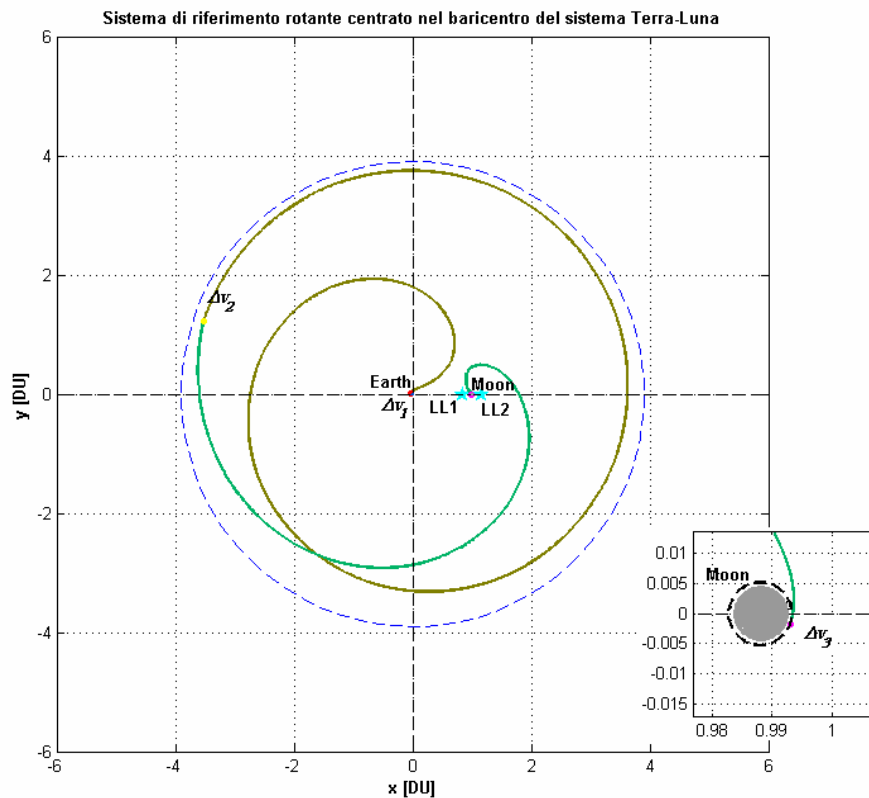


Figura 6.3 - Costruzione in due fasi del trasferimento Terra-Luna nel CR3BP

L'angolo di fase iniziale per l'orbita di fuga dalla Luna è di 340 deg , mentre è di 170 deg quello per la fuga dalla Terra.

A causa della lenta dinamica che l'orbita mostra sulla circonferenza di EL_1 , si è scelto di arrivare molto vicino a questa, ma non su essa, per

sfruttare ancora una certa instabilità senza aumentare in maniera eccessiva i tempi di trasferimento (e quelli di calcolo). Sono, quindi, necessari tre spari impulsivi (uno per la fuga dalla Terra, uno per la fuga dalla Luna ed uno al raccordo dei due tratti) delle seguenti entità:

- $\Delta v_1 = 3.063 \text{ km/s}$, necessario per la fuga dalla Terra;
- $\Delta v_3 = 0.675 \text{ km/s}$, necessario per la fuga dalla Luna;
- $\Delta v_2 = 1.6273 \text{ km/s}$, calcolato al raccordo come differenza delle diverse componenti delle velocità di arrivo.

I tempi necessari per tale trasferimento sono di *25 giorni* per raggiungere una distanza di circa $1.5e^6 \text{ km}$ dalla Luna e di *41 giorni* per raggiungere la stessa dalla Terra.

Dato l'elevato valore del Δv necessario che si è riscontrato con tale metodo, si è tentato anche un tipo di approccio più diretto che prevede di portare l'orbita ad una distanza di EL_1 ed imporre in questo punto un Δv molto piccolo alle condizioni finali del ramo di fuga dalla Terra. Con questo metodo l'orbita viene costruita ancora in due tratti, ma in maniera sequenziale. Imponendo che vi siano ancora tre spari chimici da effettuare, si sono ottenute orbite di trasferimento anche mediante tale approccio. Per l'orbita di figura, che utilizza le stesse orbite di partenza ed arrivo degli esempi precedenti, sono stati imposti:

- $\Delta v_1 = 3.063 \text{ km/s}$ $\Delta v_2 = 0.38814 \text{ km/s}$ $\Delta v_3 = -1.548 \text{ km/s}$

Si noti, dal valore del Δv_3 , come in questo caso l'orbita arriva attorno alla Luna con una velocità abbastanza elevata e, pertanto, lo sparo è richiesto per ottenere la cattura e non solo per la ricircolarizzazione dell'orbita. Mediante tale approccio, tuttavia, sembra esserci un lieve risparmio in termini di Δv . Il valore iniziale dell'argomento della latitudine dalla Terra è preso, per confronto, pari al precedente caso, mentre non è imponibile quello di arrivo attorno alla Luna. I tempi di trasferimento, infine, sono all'incirca i medesimi (rispettivamente *27 e 39 giorni*) dei precedenti.

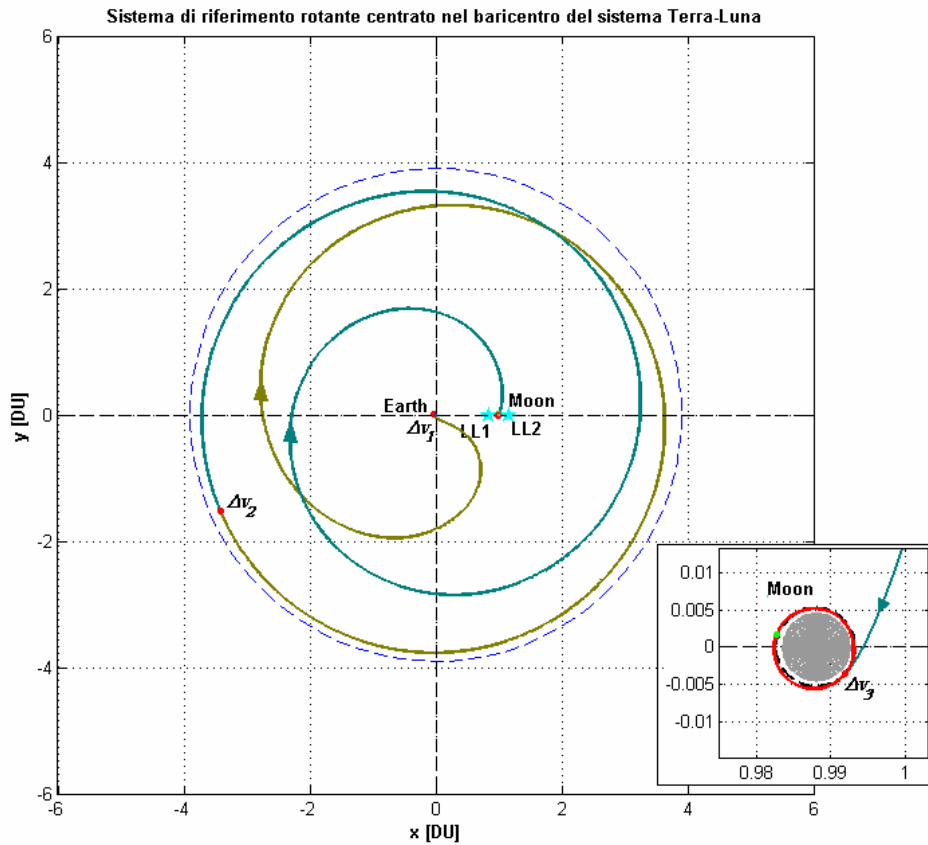


Figura 6.4 - Costruzione sequenziale del trasferimento Terra-Luna nel CR3BP

Si sottolinea che nessuna di queste orbite è stata oggetto di ottimizzazione, pertanto, il valore dei Δv necessari è alquanto elevato.

Tutte le prove riportate fin ora sono state effettuate imponendo il moto della sonda sul piano determinato dai due primari; ossia, benché il propagatore implementato consenta di simulare moti fuori dal piano, in questa fase, al fine di bloccare un grado di libertà nelle prove svolte, è stata ovunque imposta inclinazione nulla.

6.2.2 Trasferimento Terra-Luna con cattura a bassa spinta

Si passa a studiare la possibilità di effettuare un ramo della traiettoria mediante un propulsore elettrico; si sceglie, in particolare, di effettuare mediante spinta continua, il tratto di fuga (cattura) lunare. Queste orbite

mostrano bene un ramo a bassa spinta che spiraleggia partendo da un'orbita assegnata (300 km di quota) attorno alla Luna. Quando il sistema ha acquistato energia sufficiente, essa si allontana definitivamente dalla Luna; il propulsore elettrico è stato, tuttavia, spento solo all'arrivo ad una distanza di $1.5e^6$ km.

Il propulsore scelto e le modifiche da apportare alle equazioni del moto, al fine di tener conto della spinta costante, sono riportate nel paragrafo 6.3.

Una di queste orbite, con i valori delle condizioni iniziali e quelli deducibili in termini di Δv ed impulsi, è riportata in figura 6.5 per una sonda di massa 300 kg.

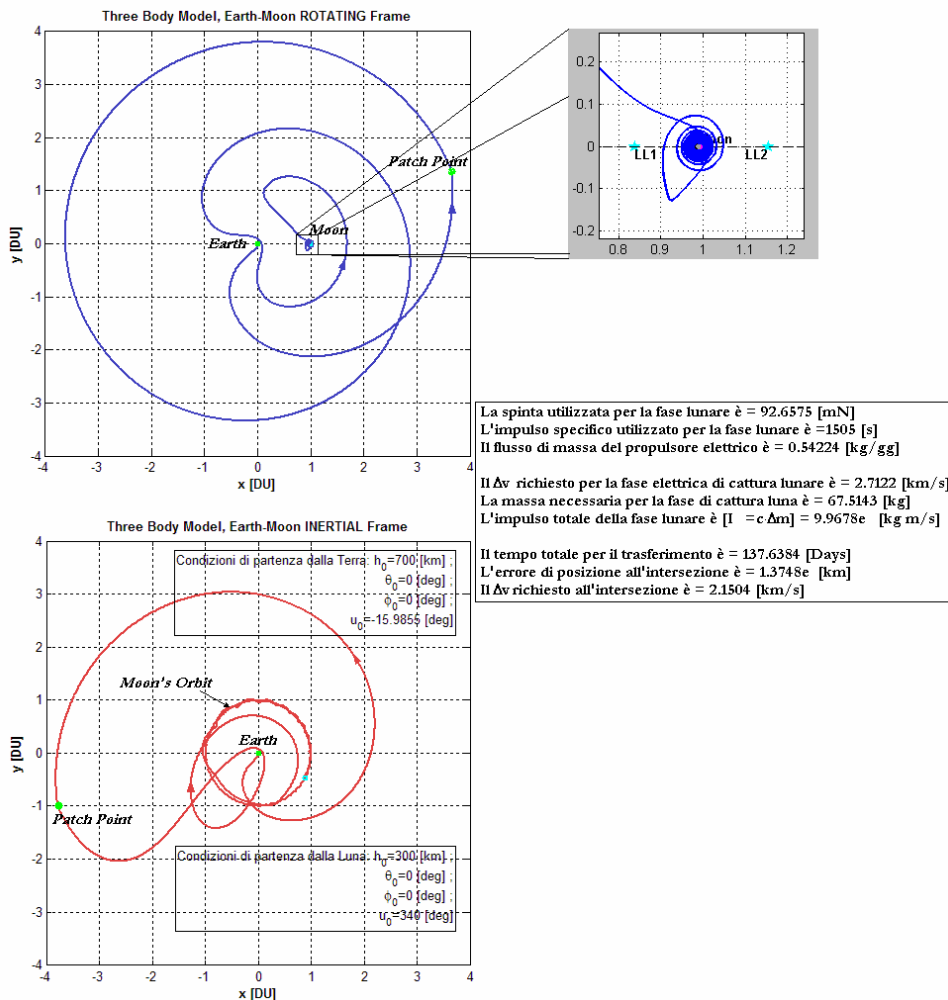


Figura 6.5 - Trasferimento Terra-Luna nel sistema rotante ed in quello inerziale con cattura a bassa spinta nel CR3BP

Si noti la forma dell'orbita attorno alla Luna: in questa zona, dopo una serie di spirali, l'orbita sembra allontanarsi per poi riavvicinarsi alla Luna, passarci accanto o solo in seguito allontanarsi; ciò corrisponde, come si osserva dalla stessa orbita riportata in un sistema di riferimento inerziale, ad uno *swing-by* che l'orbita compie con la Terra, attraversando l'orbita lunare, prima di entrare in un'orbita di cattura stabile attorno alla Luna.

Anche le orbite così determinate non sono state ottimizzate ed il semplice fatto di spegnere il propulsore elettrico alla fine del ramo di fuga lunare porta ad un valore maggiore del Δv sia all'intersezione sia per il ramo a bassa spinta. Come nel caso precedente della costruzione dell'orbita in due rami, il valore del Δv al raccordo è fortemente influenzato, oltre che dagli angoli di fase iniziali che determinano il punto di intersezione, dal fatto che, come può osservarsi dalla figura 6.5, i due rami non terminano proprio tangenti alla circonferenza descritta da EL_1 . Ciò significa che lo sparo da fornire deve essere tale da consentire anche una modifica istantanea della direzione dell'orbita, il che lo incrementa di diversi *km/s*. Si fa notare, infine che in quest'ultimo caso (figura 6.5) è stato ancora l'angolo di fase iniziale attorno alla Terra ad essere variato per portare i due rami a coincidere.

Un andamento nel tempo delle diverse grandezze competenti all'orbita di figura 6.5 è di seguito graficato.

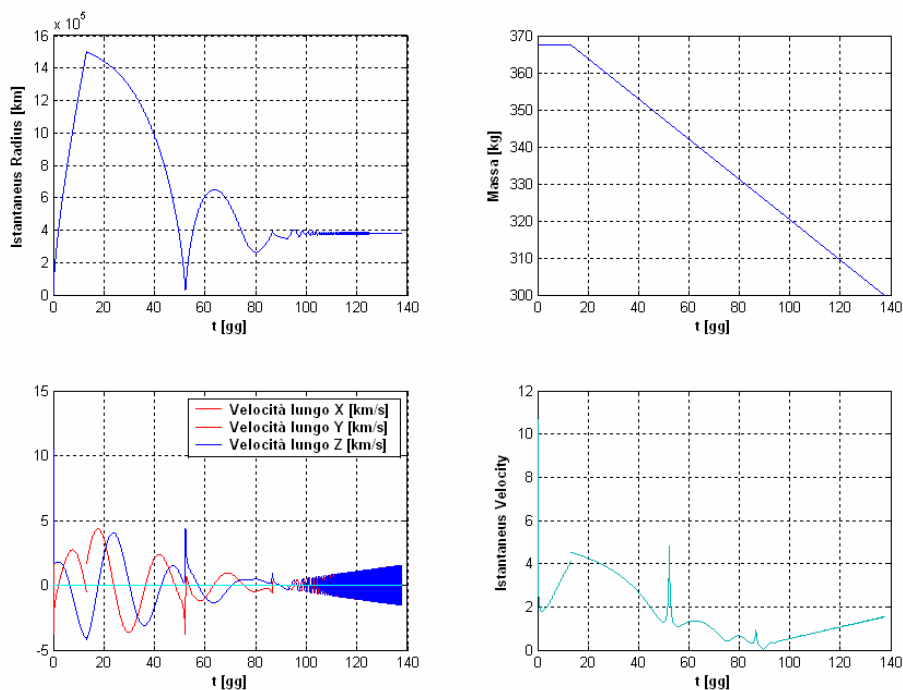
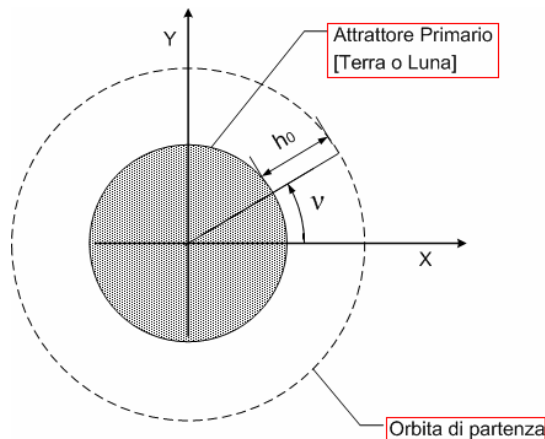


Figura 6.6 - Andamento nel tempo di posizione, massa e velocità per l'orbita di fig 6.5

Si noti la discontinuità nel grafico della velocità che è quella che determina l'entità del Δv necessario.

6.2.3 Trasferimento Terra-Luna: Relazione Fase iniziale- Δv all'intersezione

Al fine di dedurre il comportamento della traiettoria, e quindi del Δv all'intersezione del ramo di fuga dalla Terra con quello di fuga dalla Luna, al variare delle condizioni iniziali, è stata modificata in modo sistematico la fase iniziale di partenza dalla Terra a parità di quota. Ovvero, è stato incrementato l'angolo u_0 di 5 deg, nell'intervallo fra 0 deg e 360 deg, mantenendo costante h_0 (=700 Km).



Si ricorda, con l'immagine accanto, il modo in cui si sono determinate le condizioni iniziali che ora si faranno sistematicamente variare in un range vicino a quello in cui dovrebbero nominalmente trovarsi.

I grafici successivi mostrano il valore della velocità e le coordinate ad una distanza di $1.5e^6$ km dalla Terra (infatti, come può osservarsi, il modulo della distanza è costante e pari a questo valore) ottenute propagando le equazioni del modello a tre corpi ristretto (equazioni 5.10) per la fase balistica di fuga dalla Terra. Le prove sono state eseguite sia per orbite di partenza in verso Orario che Antiorario.

Capitolo VI - Studi Preliminari di Missione

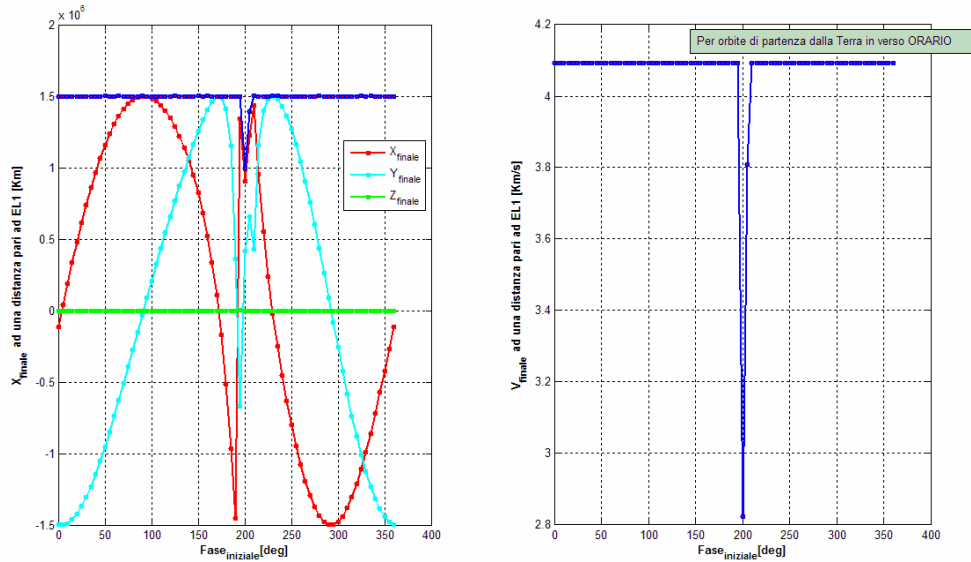


Figura 6.7 - Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Terra in verso Orario

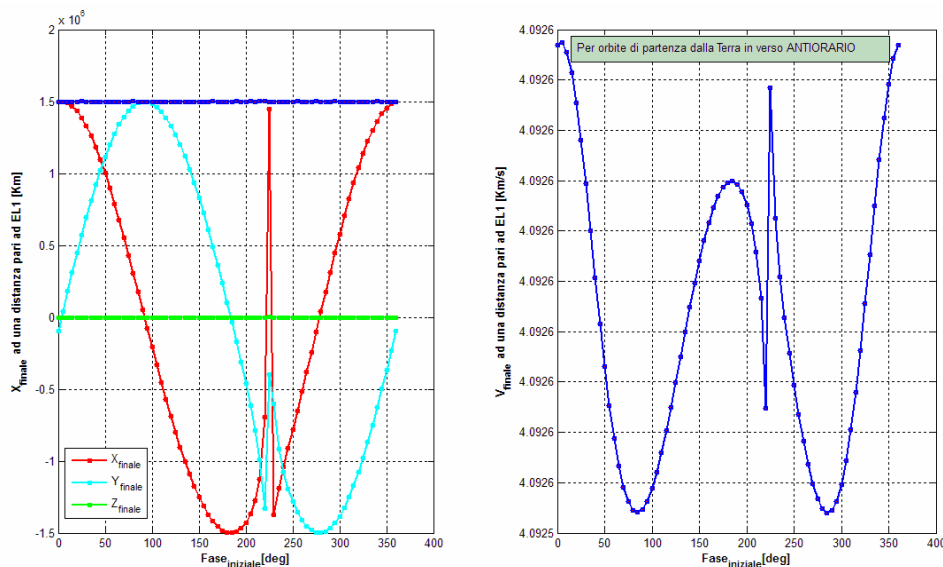


Figura 6.8 - Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Terra in verso Antiorario

In entrambi i grafici delle velocità si nota una discontinuità dovuta al passaggio della corrispondente orbita vicino alla Luna che, esercitando il suo influsso gravitazionale, ne distorce la traiettoria. Ciò è meglio

comprensibile guardando il disporsi delle orbite in un riferimento rotante con origine nel baricentro del sistema Terra–Luna.

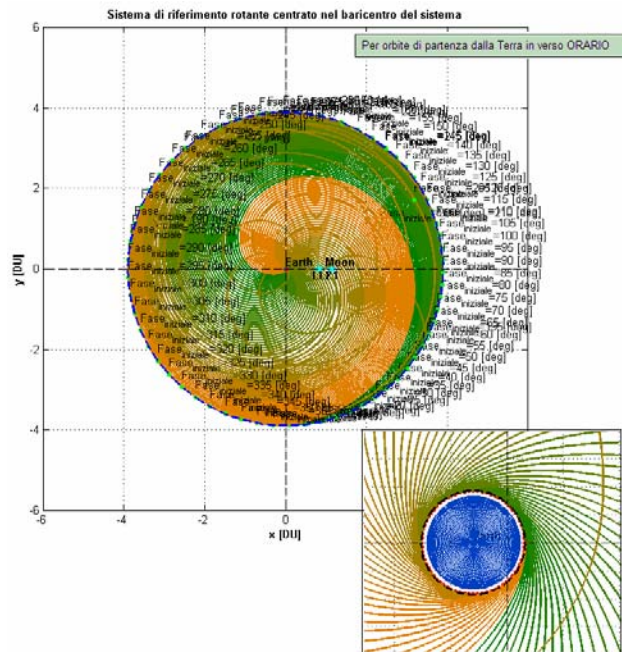


Figura 6.9 - Andamento orbite di fuga dalla Terra al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Orario

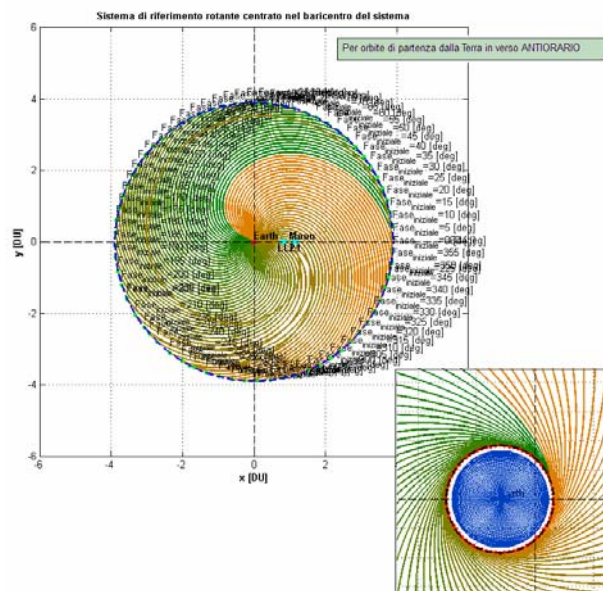


Figura 6.10 - Andamento orbite di fuga dalla Terra al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Antiorario

Si osservano delle orbite che non rispettano la regolarità delle soluzioni e risultano essere proprio quelle corrispondenti alle discontinuità della velocità finale. Si passa, quindi, ad analizzare più nel dettaglio le zone in cui si rilevano le diverse anomalie. Le immagini sottostanti sono ottenute, infatti, evidenziando solo l'intervallo in cui si riscontrano le discontinuità e sono state anche evidenziate le relative orbite. Per orbite di partenza in verso Antiorario:

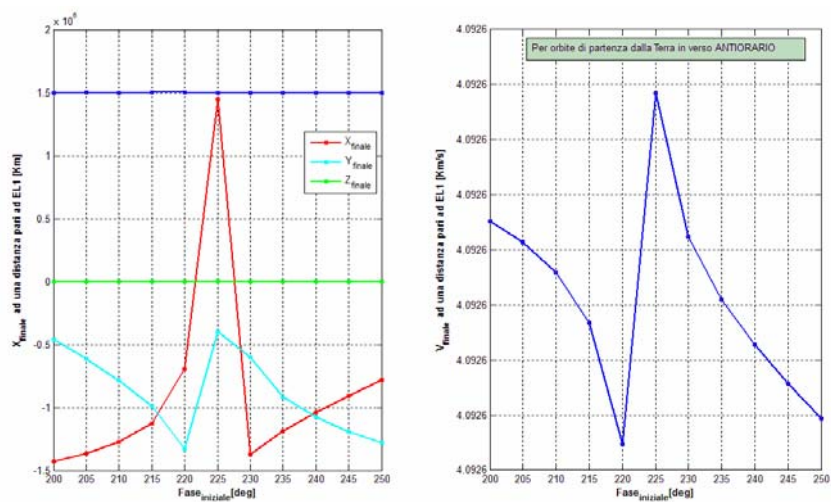


Figura 6.11 - Discontinuità nelle relazioni fra fase iniziale-velocità finale e fase iniziale-posizione finale per orbite di fuga dalla Terra in verso Antiorario

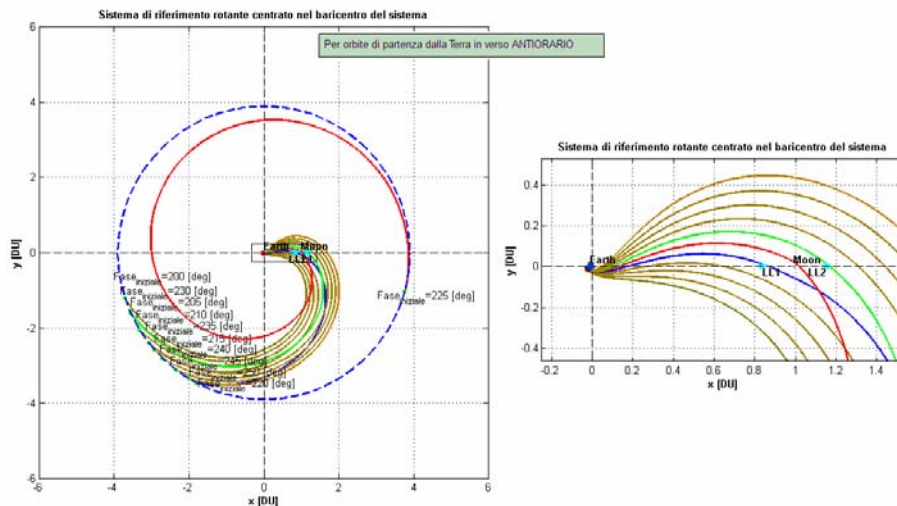


Figura 6.12 - Orbite corrispondenti alle discontinuità di figura 6.11

Analogamente, per orbite di partenza in verso Orario:

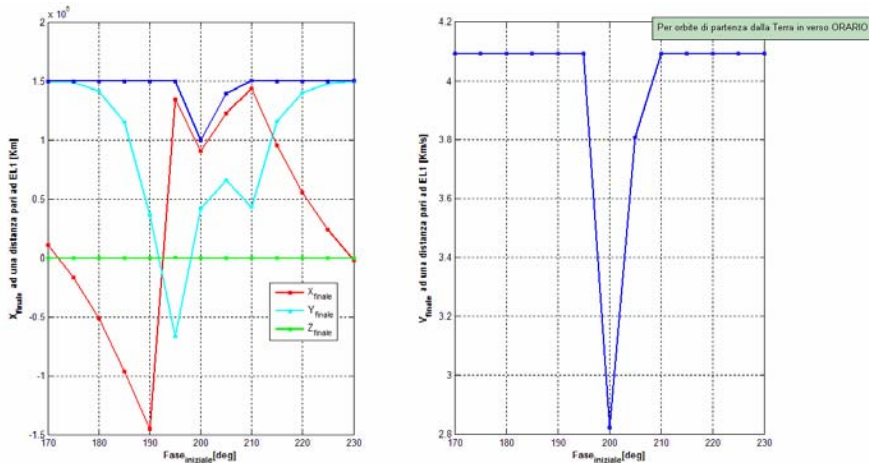


Figura 6.13 - Discontinuità nelle relazioni fra fase iniziale-velocità finale e fase iniziale-posizione finale per orbite di fuga dalla Terra in verso Orario

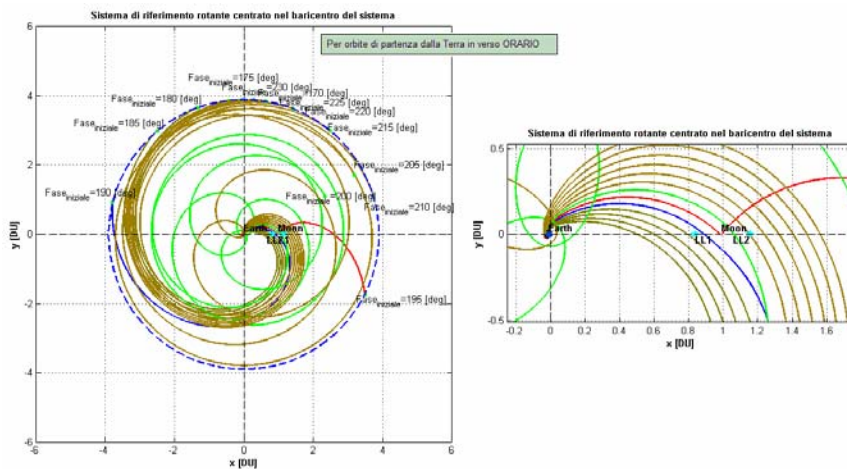


Figura 6.14 - Orbite corrispondenti alle discontinuità di figura 6.13

Con il colore blu è stata rappresentata l'ultima orbita che passa fra la Terra e la Luna, con il colore verde la prima orbita che passa oltre la Luna, mentre con il colore rosso l'orbita che risulta più distorta dal campo gravitazionale lunare (oppure orbite d'impatto). Come può osservarsi, alcune di queste orbite distorte non riescono neanche a raggiungere una distanza pari ad EL_1 nell'intervallo d'integrazione fissato di $25 TU$ (ovvero di circa 108 giorni); mentre orbite "medie", che non presentano particolari anomalie dovute ai

campi gravitazionali, impiegano all'incirca *15 giorni*. E' probabilmente dovuto anche a ciò il picco così basso in modulo in corrispondenza dei *200 deg*, così come l'altro valore "anomalo" di *205 deg* (altra orbita che non arriva ad una distanza pari ad EL_1)

Sono state, quindi, condotte prove analoghe per il ramo di fuga elettrico dalla Luna. Analogamente a quanto fatto in precedenza, a parità di h_0 ($=300$ Km), l'angolo ν è stato incrementato di *5 deg*, nell'intervallo fra *0 deg* e *360 deg*, ed è stato graficato lo stato finale del sistema al variare di questo parametro. Le prove sono state eseguite sia per orbite di partenza in verso Orario che Antiorario.

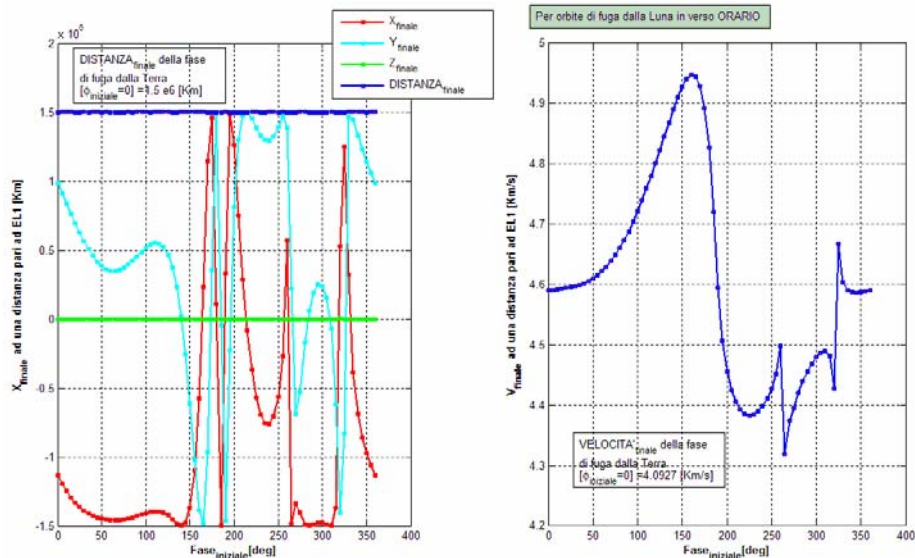


Figura 6.15 - Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Luna verso Orario

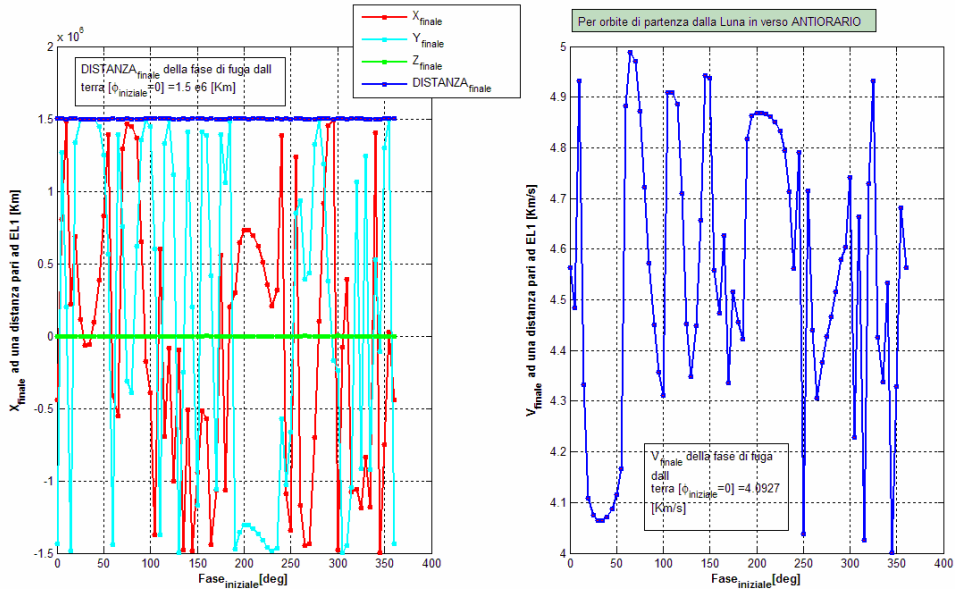


Figura 6.16 - Posizione e velocità finale al variare della fase iniziale per orbite di fuga dalla Luna in verso Antirario

Le orbite di fuga dalla Luna si dispongono, nel sistema di riferimento sinodico adimensionale, mostrando una regolarità decisamente minore al tratto balistico di fuga dalla Terra; tale comportamento è molto probabilmente dovuto alla perturbazione costante del motore elettrico.

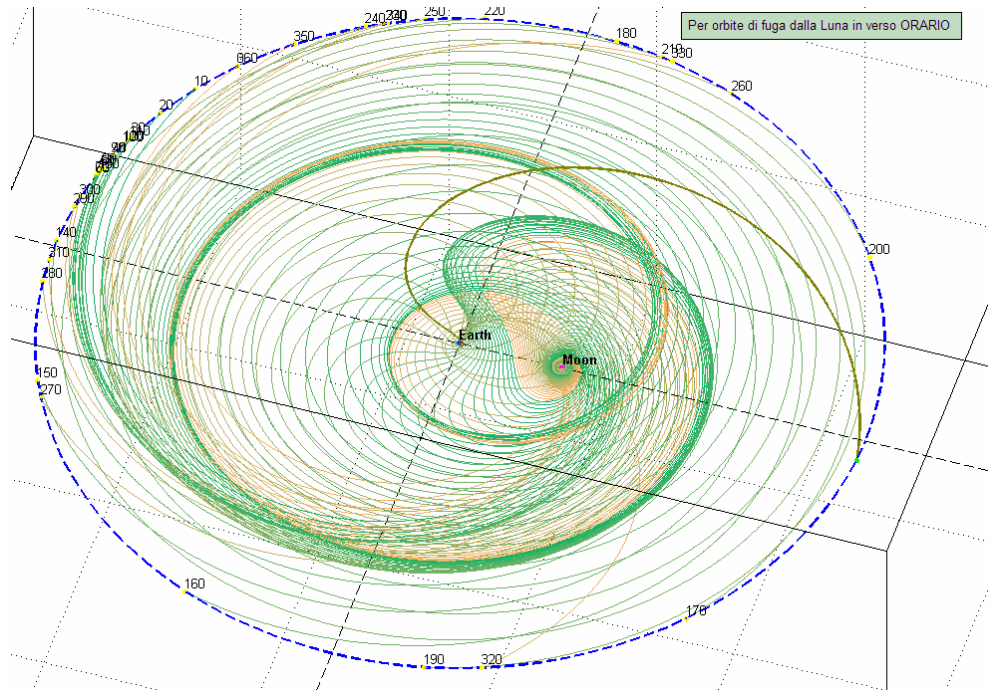


Figura 6.17 - Andamento orbite di fuga dalla Luna al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Orario

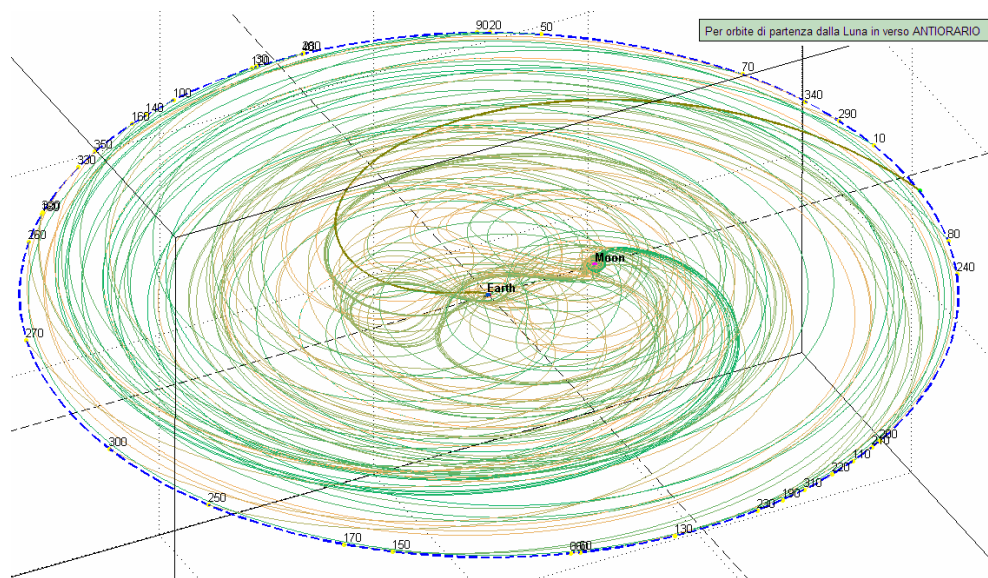


Figura 6.18 - Andamento orbite di fuga dalla Terra al variare di u_0 per orbite di partenza in verso Antiorario

Ancora una volta si suppone che i salti (in effetti ben definiti solo per orbite di fuga dalla Luna in verso Orario) siano dovuti ad orbite che passano sufficientemente vicino alla Terra si da deviare la traiettoria.

Si analizza dunque l'intervallo fra 250 deg e 300 deg (per orbite di fuga in verso Orario) per verificare che l'orbita con fase iniziale di 265 deg corrisponda a qualche anomalia. Ciò può riscontrarsi nelle successive immagini.

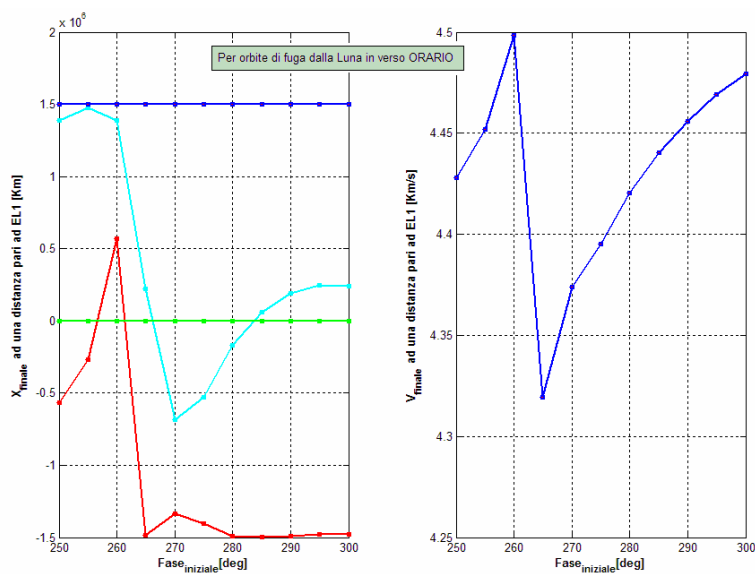


Figura 6.19 - Discontinuità nelle relazioni fra fase iniziale-velocità finale e fase iniziale-posizione finale per orbite di fuga dalla Luna in verso Orario

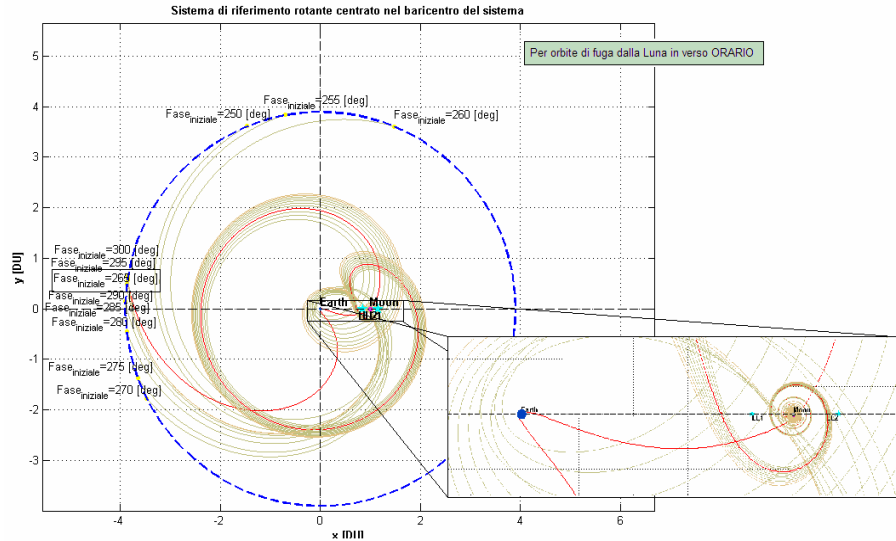


Figura 6.20 - Orbite corrispondenti alle discontinuità di figura 6.19

Il passo successivo è, quindi, quello di valutare le entità dei Δv all'intersezione delle due traiettorie mantenendo fisso il punto di arrivo del ramo di fuga dalla terra, valutato con una fase iniziale di 0 deg , e calcolando la differenza, in modulo, delle velocità rispetto a questo punto.

Ovvero:

$$\Delta V = \sqrt{(u_{EARTHfin} - u_{MOONfin})^2 + (v_{EARTHfin} - v_{MOONfin})^2 + (w_{EARTHfin} - w_{MOONfin})^2} \quad (6.1)$$

I valori $u_{EARTHfin}$, $v_{EARTHfin}$, $w_{EARTHfin}$ sono dunque presi come riferimento; in particolare si prendono a riferimento le componenti di velocità competenti al punto di arrivo, alla solita distanza di $1.5e^6 \text{ km}$, di un'orbita che parta da una quota di 700 km , e valori nulli di ϕ , θ ed u_0 .

$$\begin{cases} u_{EARTHfin} = 3.8944 \\ v_{EARTHfin} = 0.2465 \\ w_{EARTHfin} = 0 \end{cases}$$

Per orbite di partenza dalla Luna in verso Orario si ottiene dunque il seguente legame fra Δv all'intersezione e l'angolo di fase iniziale.

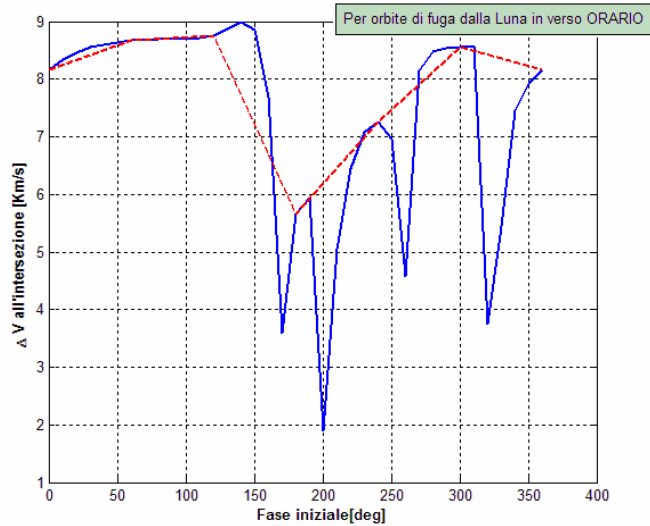


Figura 6.21 - Legame Fase iniziale- ΔV finale per orbite di partenza dalla Luna in verso Orario

Nell'intervallo fra i 260 deg ed i 360 deg (ove si riscontra la “seconda discontinuità” nel grafico delle velocità finali), l'angolo di fase è stato scansionato ogni grado ed il salto nelle velocità si ripercuote su un salto nel ΔV fra i 320 deg ed i 330 deg .

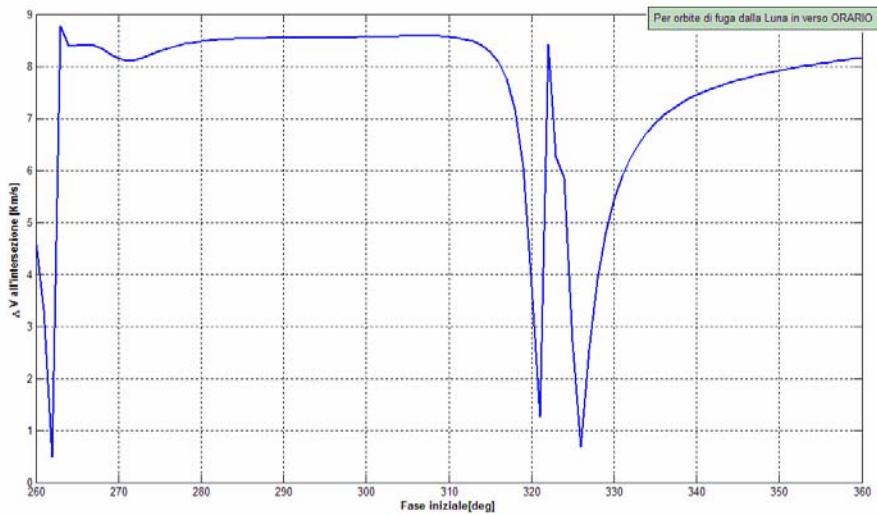


Figura 6.22 - Particolare figura 6.21

Le orbite per angoli iniziali fra 322 deg e 327 deg (quindi alcune di quelle “anomale”) sono riportate nella figura sottostante e se ne può notare la distorsione delle traiettorie dovute all’influsso terrestre.

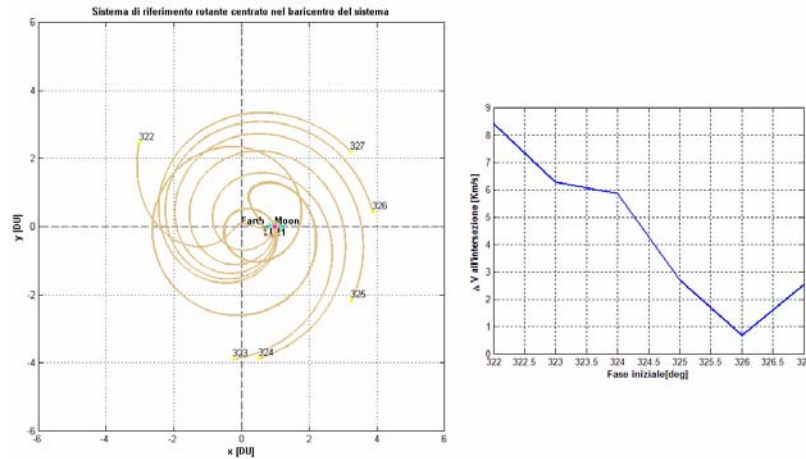


Figura 6.23 - Orbite corrispondenti alle discontinuità di figura 6.22

In particolare, l’orbita corrispondente ad una fase iniziale di 322 deg è quella che presenta un picco nel Δv ; poiché particolarmente distorta dalla Terra arriva ad una distanza di $1.5e^6\text{ km}$ con un angolo di traiettoria abbastanza elevato.

L’irregolarità che si presenta nella distribuzione delle velocità per orbite di partenza in verso Antiorario si riscontra anche nell’andamento dei Δv per questo genere di orbite.

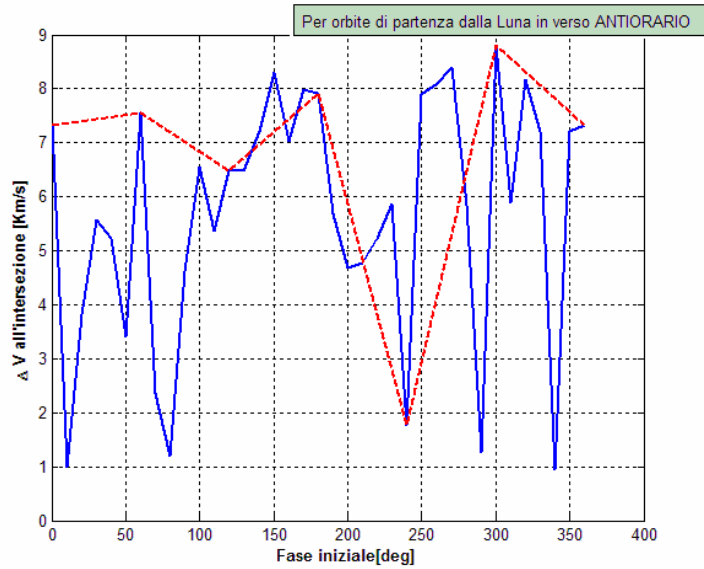


Figura 6.24 - Legame Fase iniziale - ΔV finale per orbite di partenza dalla Luna in verso Antirario

Una scansione ogni grado è stata effettuata, analogamente, fra 260 deg e 360 deg.

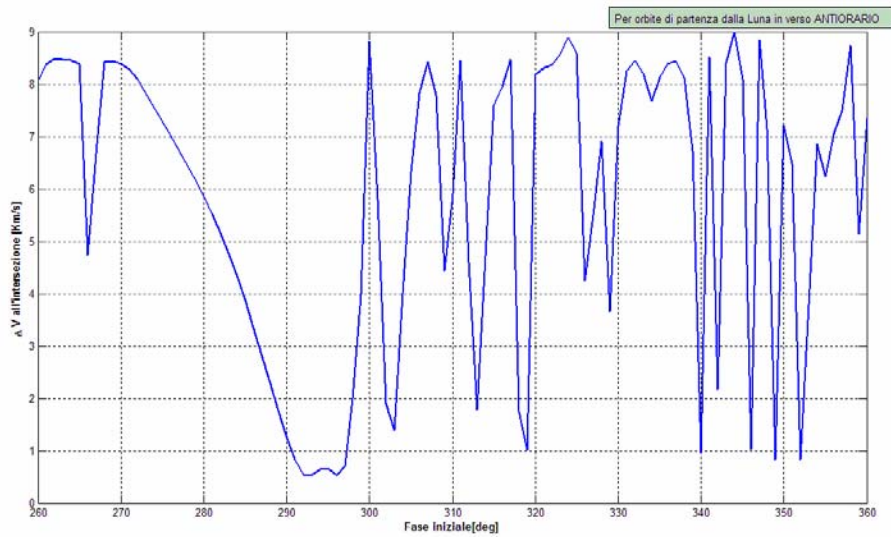


Figura 6.25 - Particolare figura 6.24

Si cerca, quindi, di desumere a quali orbite corrispondono i valori più alti della velocità finale ed a quali i valori più bassi.

Data la maggior regolarità del grafico ottenuto per orbite di partenza in verso Orario (figura 6.15) si analizza questo: si nota una zona in cui le velocità finali si dispongono su un picco attorno ai 4.9 km/s in corrispondenza di un angolo di fase iniziale compreso fra 140 deg e 180 deg . Le traiettorie corrispondenti a tali valori sono riportate nella figura sottostante assieme ad un andamento del Δv all'intersezione.

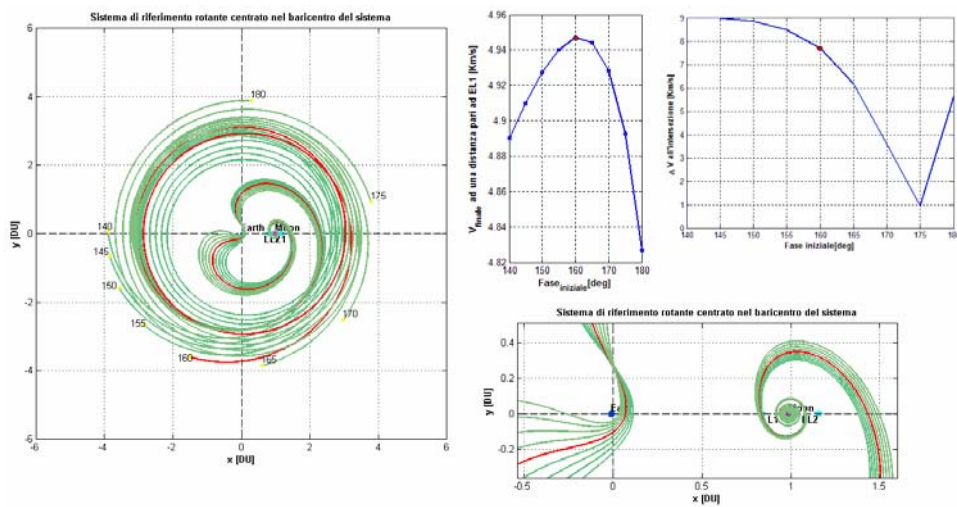


Figura 6.26 - Orbite corrispondenti al picco di velocità di figura 6.15

Come può osservarsi sono tutte orbite che vengono curvate dal campo gravitazionale terrestre passando sufficientemente vicine alla Terra; ciò, in un sistema di riferimento inerziale, corrisponde ad un *fly-by* con il nostro pianeta.

Nell'andamento delle velocità finali (figura 6.15) si osserva, invece, una zona, compresa fra i 200 deg ed i 250 deg , in cui le velocità si dispongono attorno al valore di 4.4 km/s che rappresenta il minimo più regolare del grafico. Traiettorie relative a questo intervallo sono di seguito rappresentate. Si fa notare che le escursioni alquanto elevate che si presentano nei valori del Δv sono anche dovute al fatto che si prende come riferimento un punto di arrivo della fase di fuga dalla Terra che potrebbe non coincidere con il punto di arrivo della fase di fuga (quindi, integrando all'indietro, di cattura) dalla Luna.

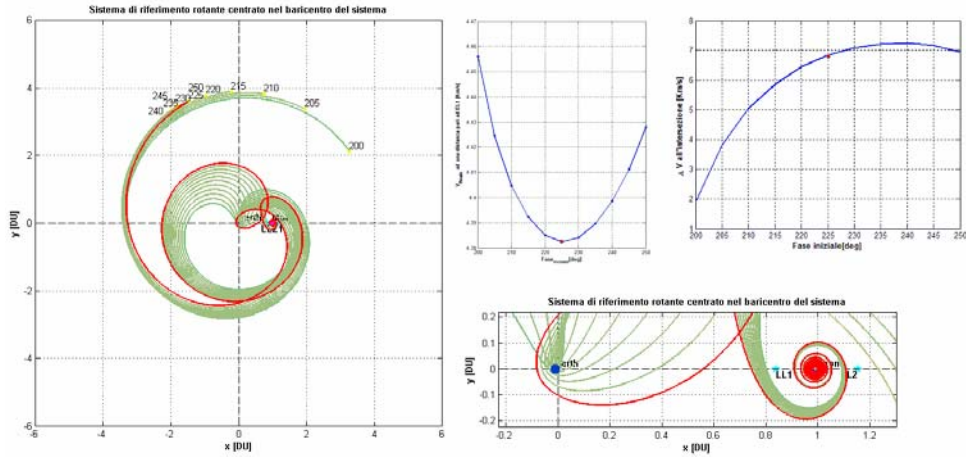


Figura 6.27 - Orbite corrispondenti al minimo di velocità di figura 6.15

L'orbita che presenta il minimo modulo della velocità, non ha riscontri nel grafico del Δv ; inoltre è l'orbita che, nell'intervallo, passa più lontana dalla Terra (esegue dunque il *fly-by* più dolce). Tale comportamento, tuttavia, non sembra avere particolari legami con la posizione dei punti di Lagrange del sistema Terra-Luna.

6.3 Trasferimento Terra-Luna nell'ambito del BCM

Nelle traiettorie precedenti la posizione di EL_1 è stata imposta semplicemente come una distanza dalla Terra di un preciso valore, ma per avere un significato più realistico, essa va identificata mediante la presenza del Sole. Si passa quindi ad analizzare la conformazione delle orbite utilizzando un modello bicircolare che prevede come sistema principale quello Terra-Luna e modellando il Sole come perturbazione (vedi paragrafo 5.7).

6.3.1 Trasferimento Terra-Luna utilizzando EL_1

Si suppone di costruire un trasferimento Terra-Luna in maniera analoga al precedente paragrafo. Ossia, si cerca di determinare due rami della traiettoria, uno di fuga dalla Terra e l'altro dalla Luna, per poi raccorderli ad una distanza di $1.5e^6 km$ dalla Terra.

Partendo da due orbite circolari, una LEO (700 km) ed una LLO (300 km), si utilizza un Δv chimico iniziale per la fuga dalla Terra di 3.07 km/s e uno di 0.738 km/s per la fuga dalla Luna.

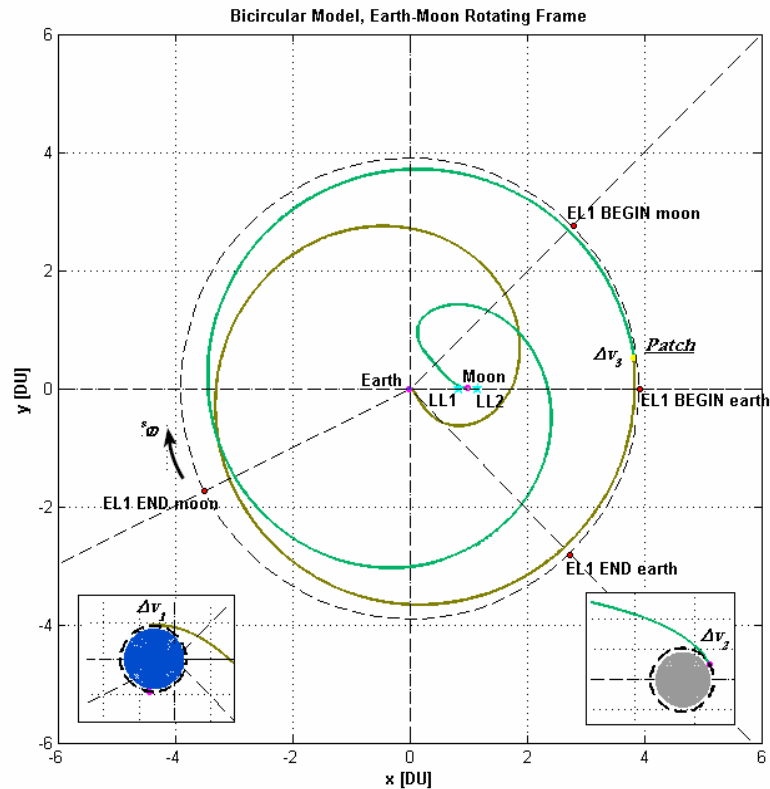


Figura 6.28 - Trasferimento Terra-Luna realizzato in due fasi nel BCM

Il Δv necessario al punto di raccordo, calcolato mediante la (6.1), risulta di 1.0536 km/s; i tempi di trasferimento, invece, di 33.2 giorni per la fase di fuga dalla Terra e 45.7 giorni per la fuga dalla Luna.

Si noti che, per costruire orbite mediante questo genere di propagatori, è necessario imporre, oltre alle condizioni iniziali dell'orbita, anche la posizione iniziale del Sole, che condiziona, di conseguenza, quella di EL_1 . Per orbite costruite in due rami è necessario imporre l'angolo iniziale del Sole per una fase e per l'altra. Nella figura 6.28 l'angolo di fase iniziale per il tratto di fuga dalla Terra è stato imposto a 0 deg, mentre quello di fuga dalla Luna a 45 deg.

Si è osservato, come risulta anche in generale dal legame fase iniziale- Δv all'intersezione, che a parità di impulso non tutte le fasi iniziali forniscono

traiettorie che raggiungono una distanza di EL_1 ; per il trasferimento di figura 6.28, $u_{0_{EARTH}} = 263 \text{ deg}$ e $u_{0_{MOON}} = 30 \text{ deg}$.

La costruzione di orbite mediante questo approccio, che prevede due fasi di fuga, purtroppo non consente di imporre che la posizione finale del Sole per la fase di fuga dalla Terra coincida con quella iniziale per la fase di cattura lunare.

Si passa, analogamente a quanto fatto in precedenza, a costruire la traiettoria in maniera sequenziale. Ovvero si impongono per la fase di cattura lunare le condizioni finali della fase di fuga terrestre, sia per la posizione del Sole, sia per i termini di posizione e velocità, aumentati di un Δv . Si determina, infine il valore dello sparo necessario ad una cattura stabile vicino alla Luna.

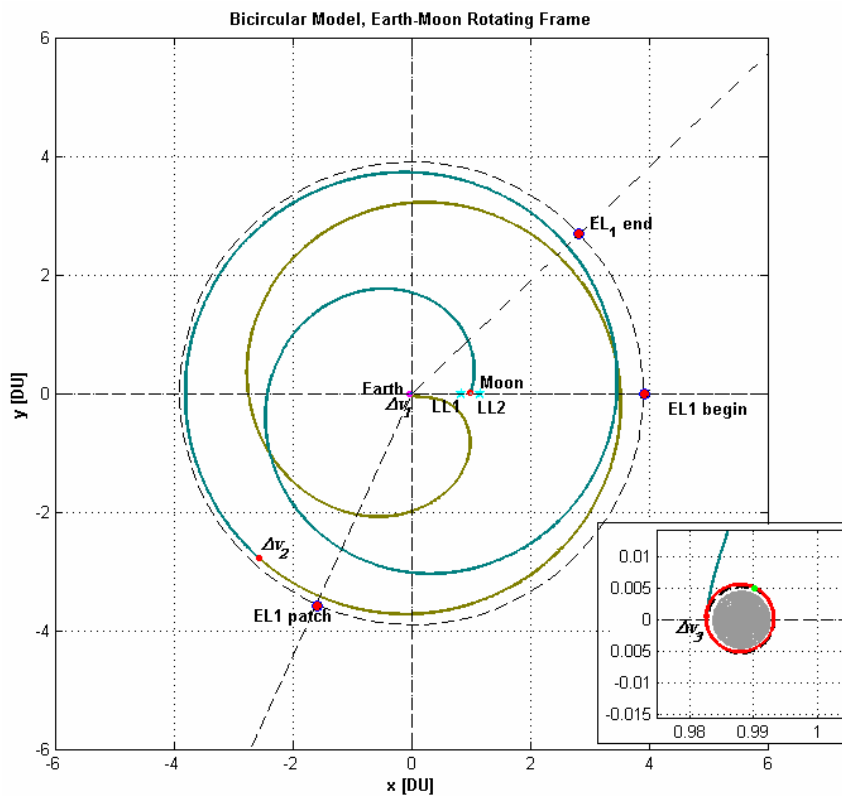


Figura 6.29 - Trasferimento Terra-Luna sequenziale nel BCM

I valori utilizzati per gli impulsi sono:

➤ $\Delta v_1 = 3.055 \text{ km/s}$ $\Delta v_2 = 0.2802 \text{ km/s}$ $\Delta v_3 = -1.551 \text{ km/s}$

Il Δv totale risulta di poco inferiore a quello calcolato nel caso del modello a tre corpi (circa 75 m/s).

Confrontando il valore del Δv_3 con quello relativo alla figura 6.4, si è anche dimostrato, in questo esempio, che è possibile lasciare invariato il valore del Δv necessario alla cattura lunare e modificare l'istante in cui questo viene fornito. Si tratta di modificare la terza-quarta cifra decimale ed è possibile lasciare invariato il modulo dell'impulso, solamente perché si sono considerate orbite LLO della stessa quota. Il tempo di trasferimento per questo tipo di orbita è, analogamente ad un trasferimento costruito in due fasi (figura 6.28), di circa 78 giorni.

Si fa infine notare che, per ottenere un comportamento più verosimile della soluzione, si è cercato di portare il punto in cui fornire il secondo impulso il più vicino possibile ad EL_1 nell'istante di passaggio da una fase all'altra (EL_1 patch).

6.3.2 Trasferimento Terra-Luna utilizzando EL_1 e la bassa spinta

Il metodo di implementare orbite di trasferimento mediante due fasi di fuga si è dimostrato necessario perché costruire traiettorie a bassa spinta mediante integrazioni successive di tratti balistici è risultato essere numericamente molto difficile. Ciò perché la spinta tangenziale viene imposta mediante le (5.9), utilizzando il modulo della velocità al denominatore; quando si devono simulare fasi di cattura il motore elettrico deve sottrarre energia al sistema decelerando la sonda. Il denominatore delle (5.9) diventa sempre più piccolo ed il calcolo del modulo sempre più difficile ed approssimato.

Pertanto, anche in questo caso, si è simulata la cattura a bassa spinta mediante un ramo di fuga dalla Luna.

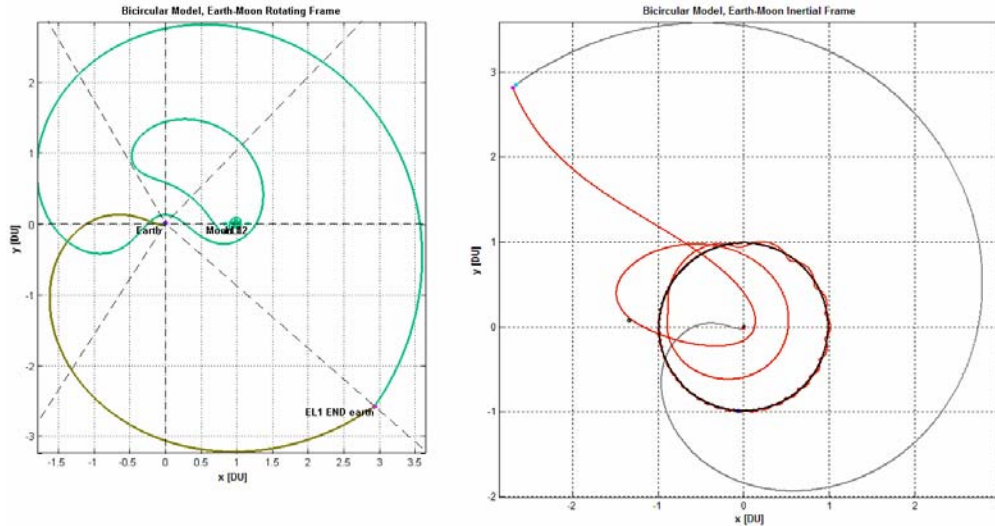


Figura 6.30 - Trasferimento Terra-Luna nel sistema rotante ed in quello inerziale con cattura a bassa spinta nel BCM

I valori di consumo di massa, impulso totale ed i tempi di trasferimento sono del tutto simili a quelli di figura 6.5.

Si noti come, avendo costruito la traiettoria in due fasi, un patch nel sistema di riferimento rotante non è tale anche in un sistema di riferimento inerziale, a causa dei differenti intervalli di integrazione, quindi di rotazione, per i due tratti. Il raccordo fra i due segmenti, come si osserva dall'immagine precedente, non è continuo, ma presenta una cuspidè (confrontabile con quanto riportato in [8]) dovuta, oltre al fatto di non essere un'orbita ottimizzata, alle velocità in gioco nella zona di intersezione. Ad una distanza di EL_1 , infatti, le velocità sono molto basse e l'orbita è molto sensibile alle piccole variazioni; come si accende il propulsore elettrico, la sonda viene velocemente attratta dal sistema Terra-Luna prima di essere catturata dalla Luna.

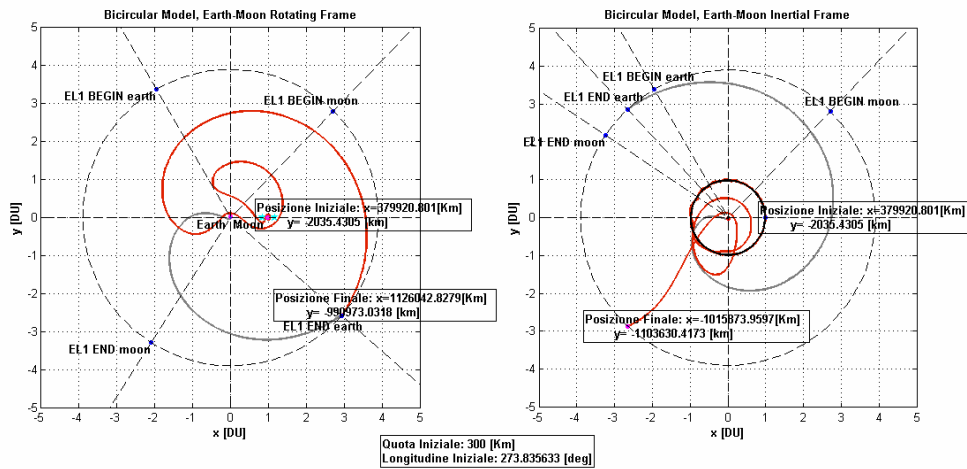
6.3.3 Trasferimento Terra-Luna: Sensibilità rispetto alle condizioni iniziali

Al fine di comprendere come un errore nell'imposizione delle condizioni iniziali si possa ripercuotere sull'intera traiettoria, si è eseguita un'analisi sulla sensibilità della soluzione rispetto ad una variazione sufficientemente piccola dei dati in ingresso; ovvero della latitudine e della quota di partenza.

Le prove si sono svolte utilizzando un modello bi-circolare che tiene conto della presenza del Sole mantenendo però le equazioni del modello PCR3BP del sistema Terra–Luna (utilizzando il relativo propagatore implementato).

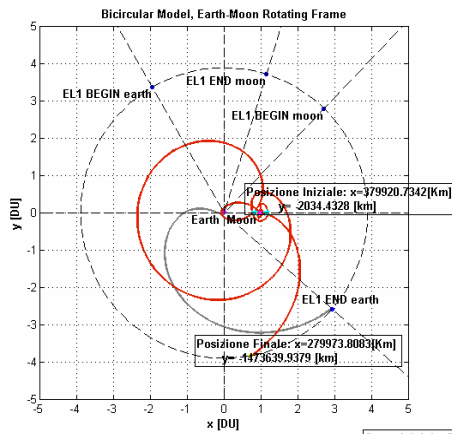
Per quel che riguarda la fase di fuga dalla Luna, è stata variata la quota in un intervallo di qualche km attorno alla quota nominale di partenza (300 km) con passo unitario; la fase, invece, in un intervallo centrato attorno ad una nominalmente determinata per far terminare la soluzione in EL_1 , è stata perturbata con passo di $1/10$ di grado fino ad arrivare ad 1 grado.

I risultati ottenuti sono presentati nelle figure sottostanti. Si può concludere che la variazione di fase iniziale non sembra essere troppo influente; la soluzione, infatti, sembra comportarsi in maniera sostanzialmente lineare rispetto ad una variazione di questo parametro. Una variazione di quota iniziale, invece, determina in maniera drastica l'aspetto dell'orbita, la sua durata, e la posizione del punto finale; il legame, inoltre, tra una perturbazione della quota iniziale e l'evolversi della soluzione, risulta intrinsecamente non lineare.

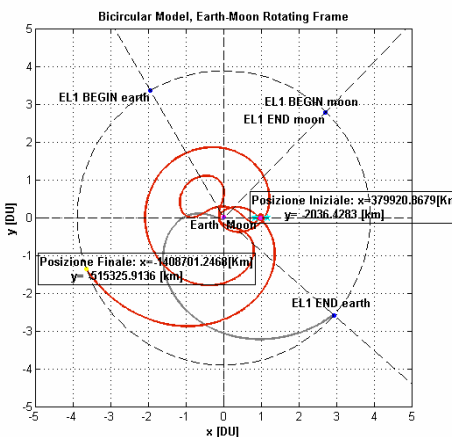
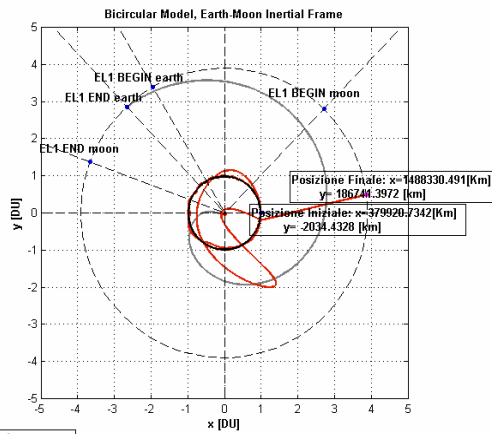


ORBITA NOMINALE

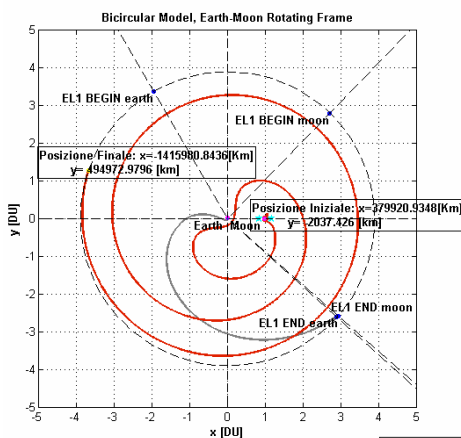
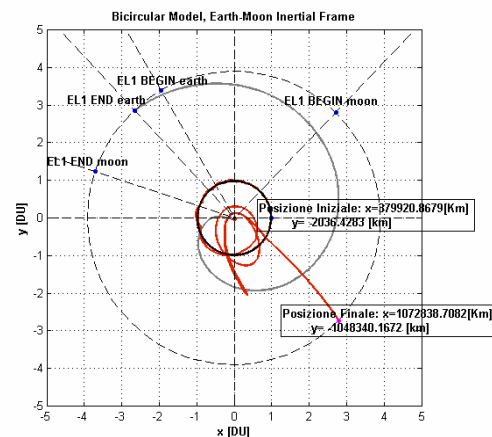
Studio Preliminare di Missioni Spaziali con Modelli a Tre Corpi



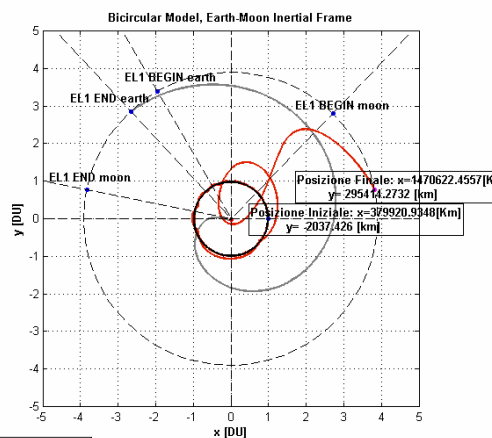
Quota Iniziale: 299 [Km]
 Longitudine Iniziale: 273.8356 [deg]



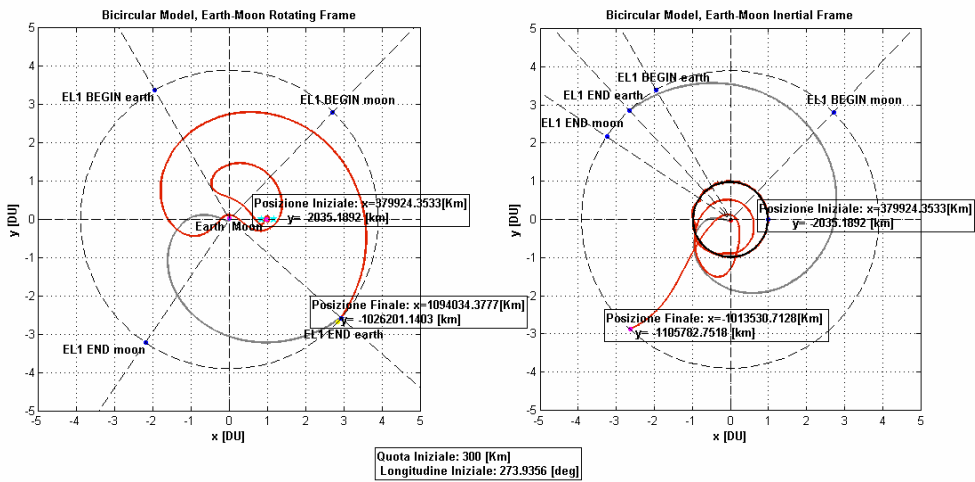
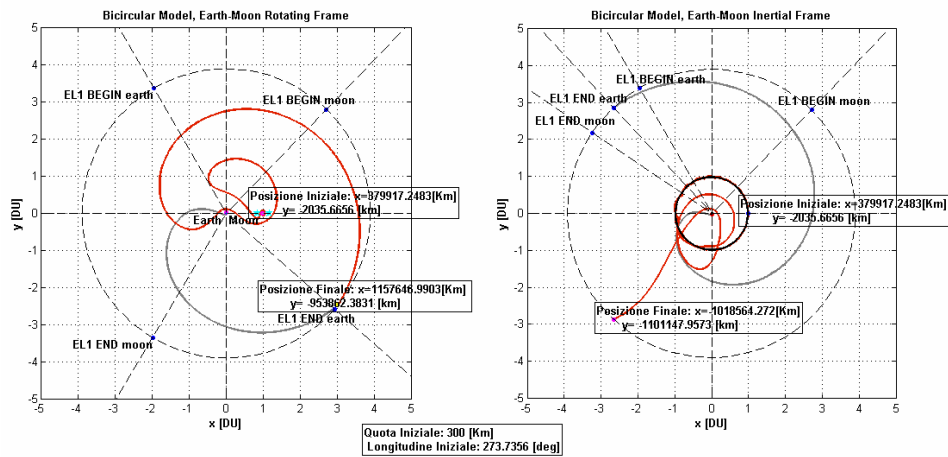
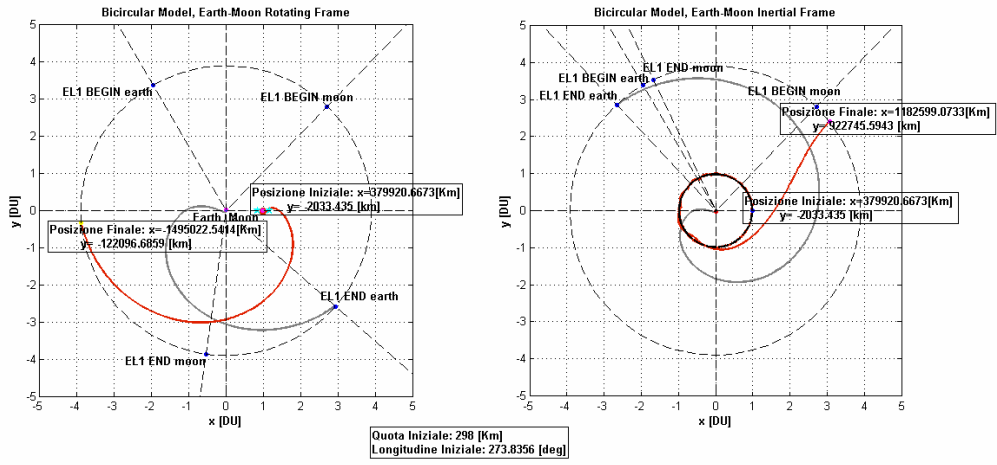
Quota Iniziale: 301 [Km]
 Longitudine Iniziale: 273.8356 [deg]



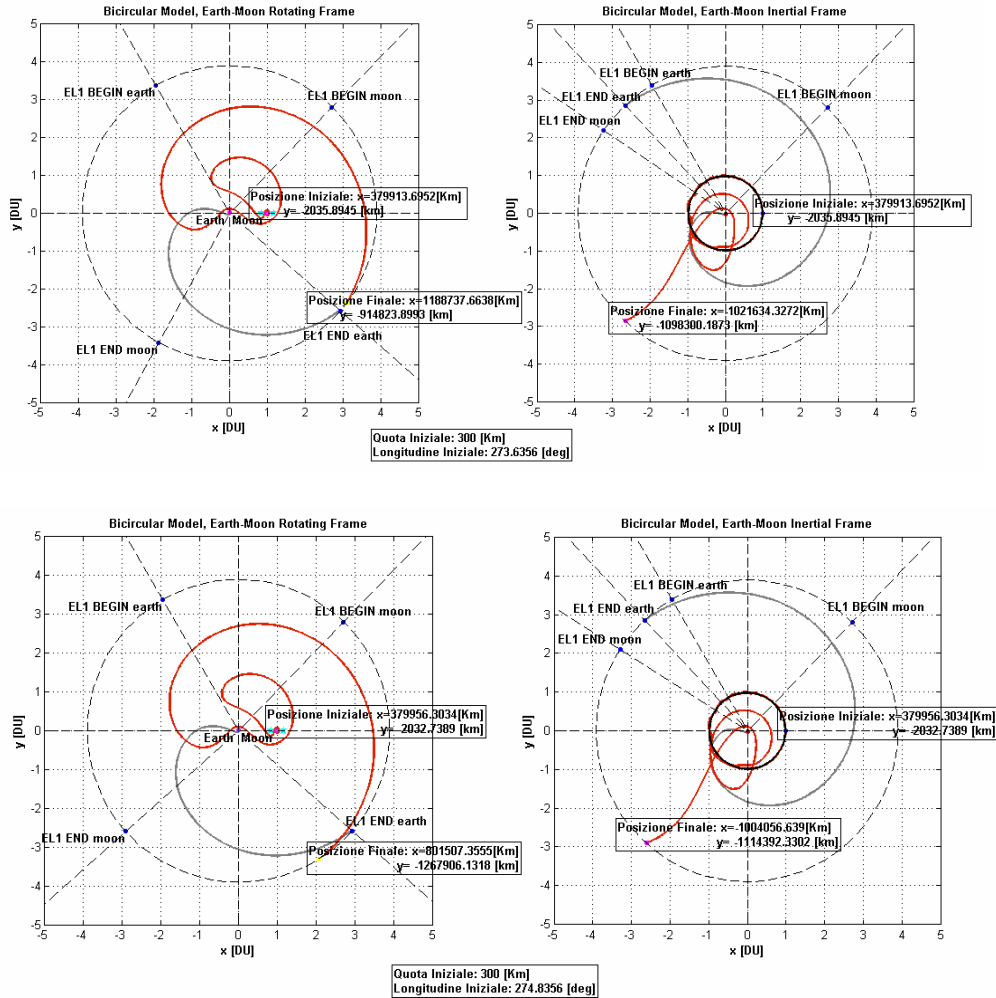
Quota Iniziale: 302 [Km]
 Longitudine Iniziale: 273.8356 [deg]



Capitolo VI - Studi Preliminari di Missione



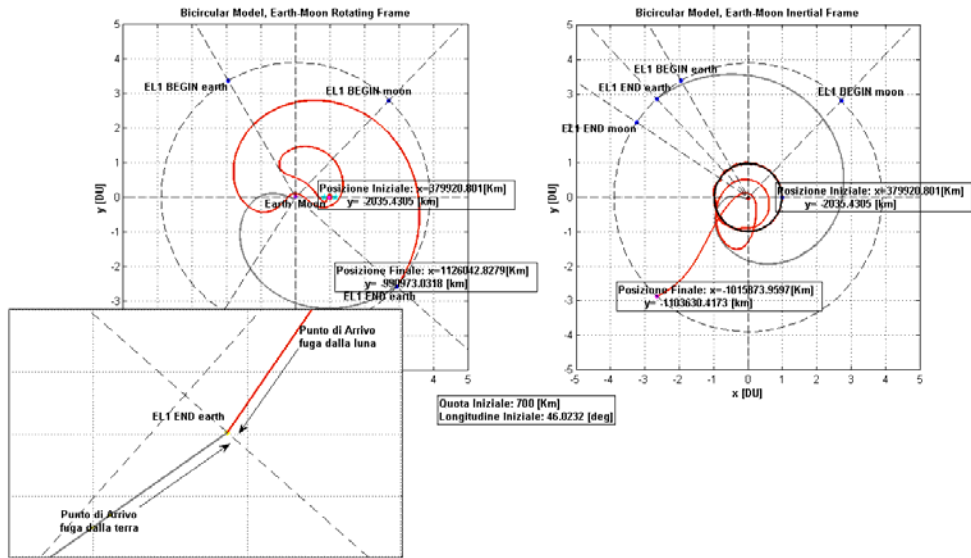
Studio Preliminare di Missioni Spaziali con Modelli a Tre Corpi



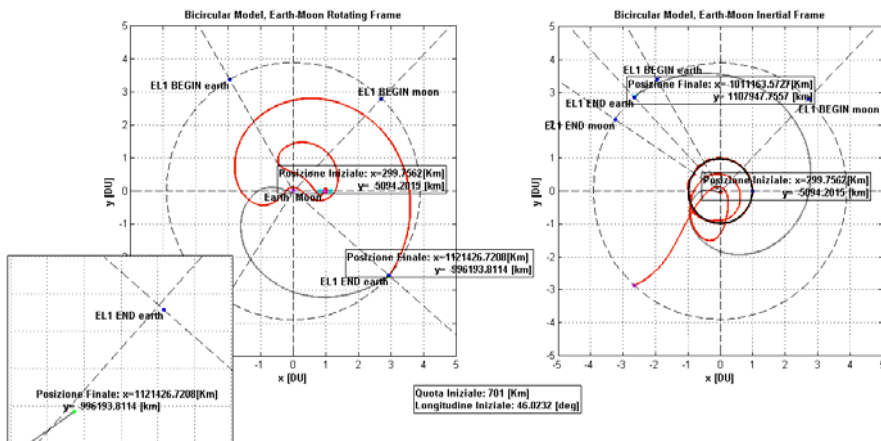
Prove analoghe sono state effettuate anche per la fase di fuga dalla Terra, come si può osservare dalle figure successive. Tale fase risulta essere meno sensibile ad una perturbazione delle condizioni iniziali e nessuno dei due parametri si rivela particolarmente critico, in maniera da dar luogo a comportamenti non lineari della soluzione.

Così come le condizioni iniziali della fase di fuga elettrica dalla Luna sono state perturbate a parità di propulsore elettrico, i parametri iniziali della fuga balistica dalla Terra sono stati variati mantenendo costante il Δv iniziale (3.13 km/s).

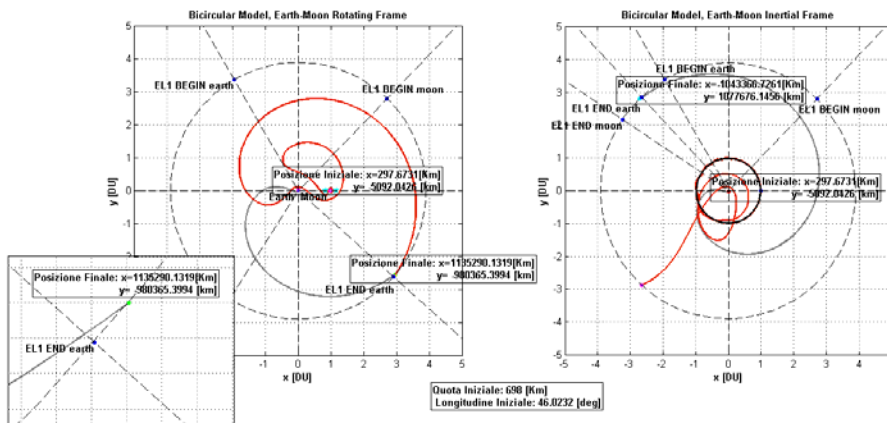
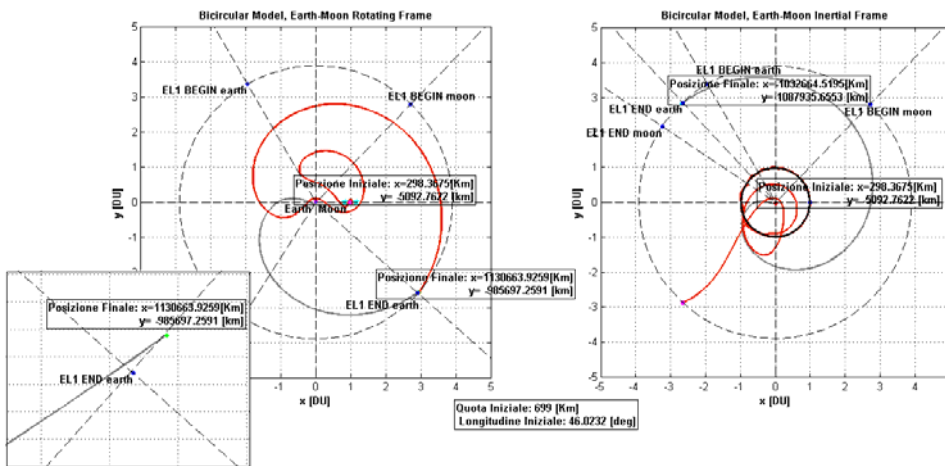
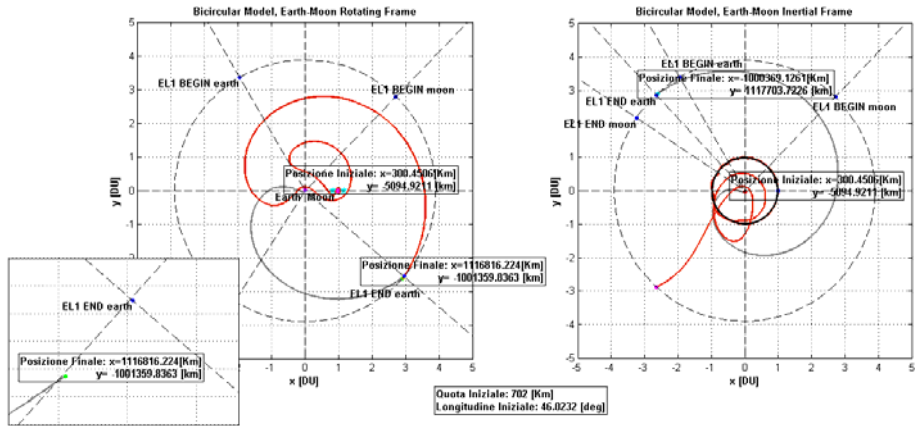
Capitolo VI - Studi Preliminari di Missione



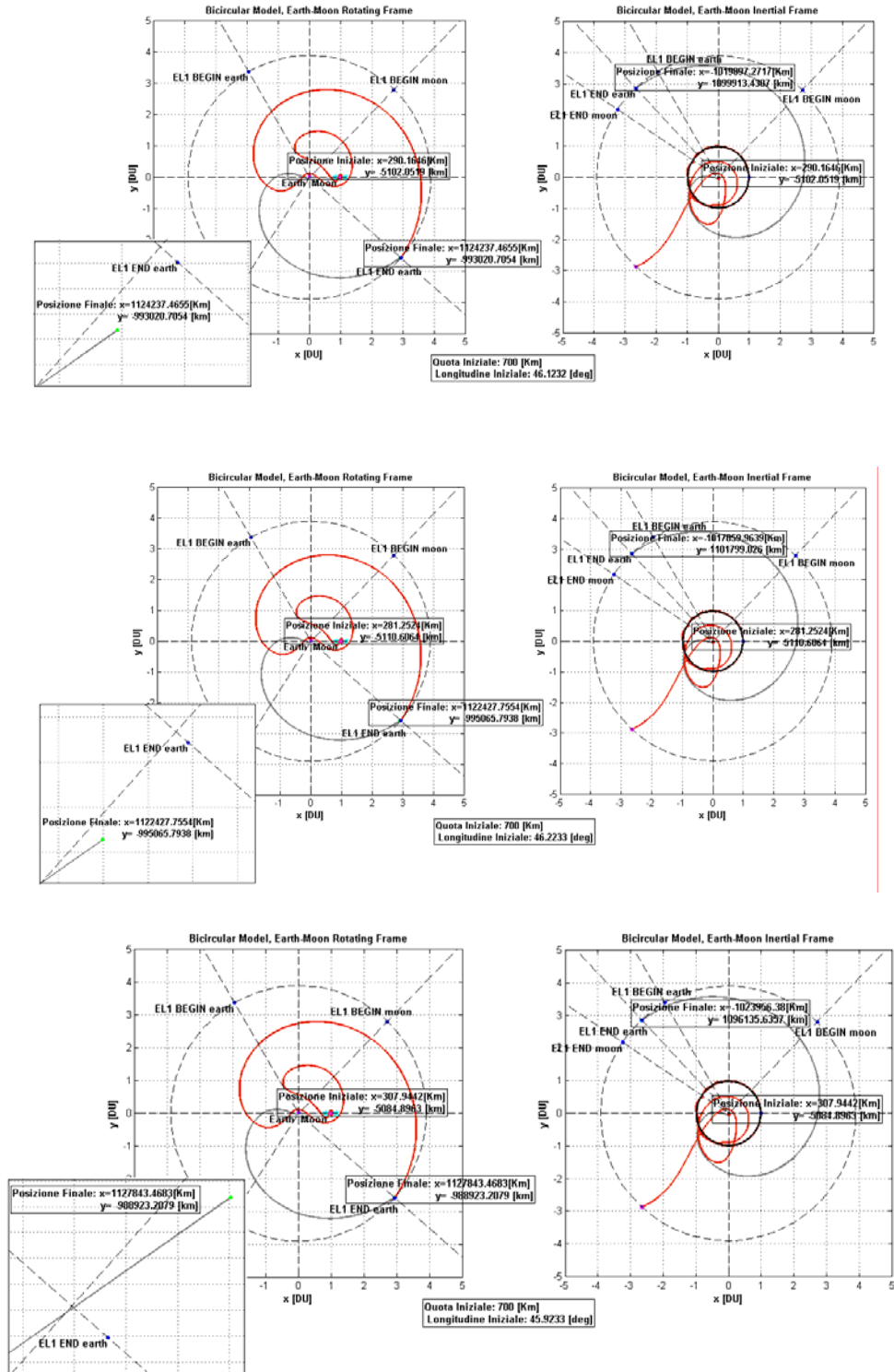
ORBITA NOMINALE

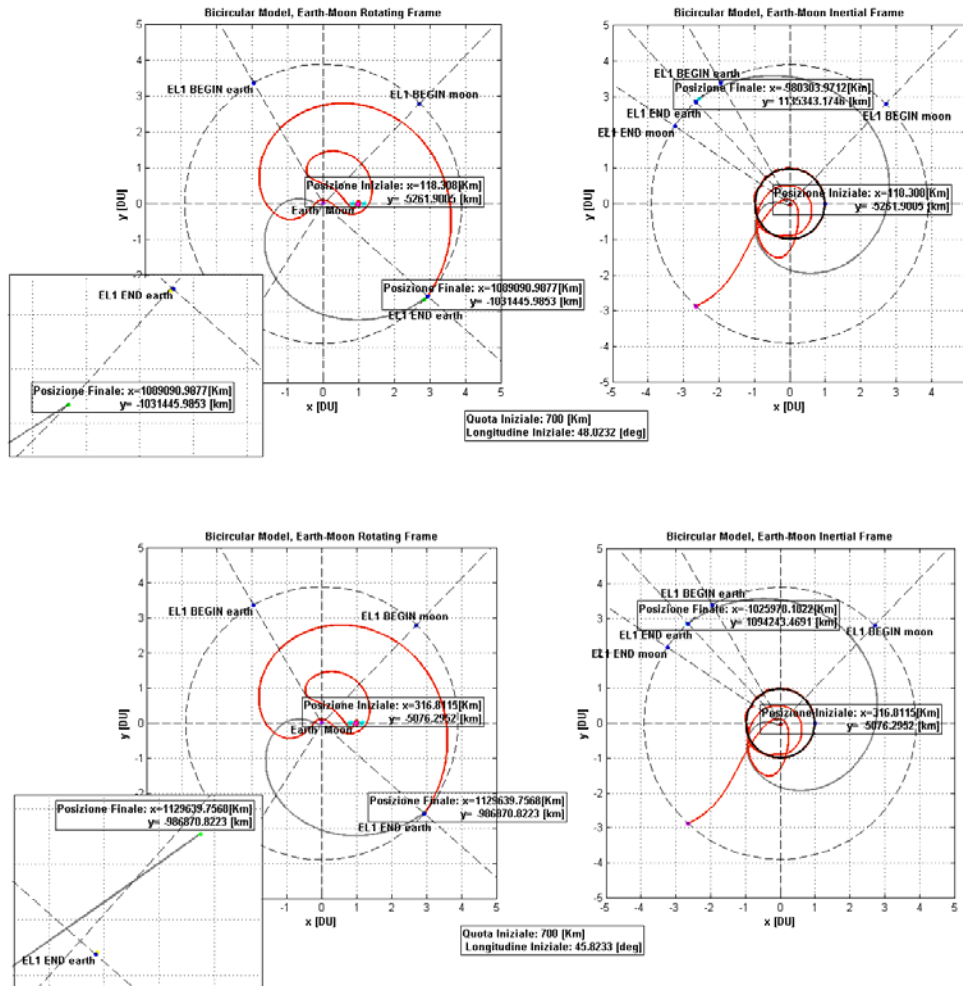


Studio Preliminare di Missioni Spaziali con Modelli a Tre Corpi



Capitolo VI - Studi Preliminari di Missione





6.4 Trasferimenti Diretti ed Indiretti

Per ottenere traiettorie di trasferimento verso orbite Halo attorno ad EL_1 o ad EL_2 sono possibili due differenti approcci:

- **Trasferimento diretto.** La sonda è immessa direttamente nell'orbita di trasferimento che deve soddisfare le condizioni, in termini di posizione e Δv riportate nel par. 4.12. Tale trasferimento offre limitate finestre di lancio e richiede una subitanea correzione di *mid-course* poiché il Δv che viene fornito dal lanciatore potrebbe non essere preciso. E' un trasferimento decisamente più semplice del

successivo e si presta bene per orbite operative con una grande A_y . L'energia necessaria al trasferimento viene fornita interamente dal lanciatore e, quindi, tale approccio richiede valori più elevati di C_3 (vedi appendice E).

- **Trasferimento con assists gravitazionali lunari.** La sonda viene immessa in orbite di fasamento attorno alla Terra che siano risonanti con la Luna in maniera tale che essa stessa provveda, dopo un certo numero di “loops”, a fornire l'energia sufficiente al sistema^[43]. Le finestre di lancio dipendono dal numero di ellissi di fasamento utilizzate e le correzioni di *mid-course* non sono così critiche né è necessario effettuarle subito dopo il lancio. Molto utile per trasferimenti verso orbite operative con una piccola A_y e, grazie all'influsso gravitazionale della Luna, l'energia C_3 richiesta al lanciatore è minore.

6.4.1 Un trasferimento diretto: La missione ISEE-3

Tale missione fu la prima ad utilizzare un'orbita operativa periodica attorno ad uno dei punti collineari del sistema Terra-Sole (vedi introduzione); essa si avvale di un trasferimento diretto^[44] (vedi fig.6.31).

The ISEE-3 transfer trajectory to an $A_z = 120000 \text{ km}$ halo orbit

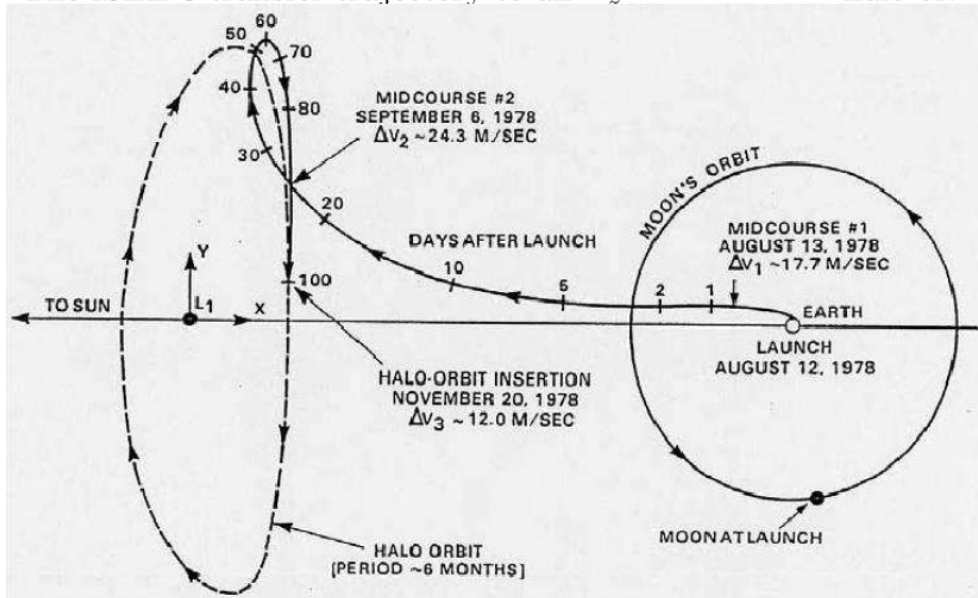


Figura 6.31 - Traiettoria nominale della missione ISEE-3

L'orbita di partenza per la sonda, di massa 480 kg , è un'orbita quasi equatoriale e fortemente ellittica; i valori sono riportati in tabella.

| | |
|---------------|------------|
| Inclinazione | 1.0 deg |
| Quota Apogeo | 108.920 km |
| Quota Perigeo | 181 km |

Tabella 6.1 - Dati orbita di partenza della missione ISEE-3

Si riportano di seguito i valori dei Δv utilizzati e le date in cui questi sono stati effettuati.

| Data | Δv |
|------------|------------|
| 12/08/1978 | Lancio |
| 13/08/1978 | 17.7 m/s |
| 07/09/1978 | 24.3 m/s |
| 21/12/1978 | 12 m/s |

Tabella 6.2 - Δv utilizzati per la missione ISEE-3

Come si nota i valori degli impulsi sono molto piccoli e, mentre i primi due sono delle correzioni di *mid-course*, l'ultimo Δv è quello necessario all'inserimento nell'orbita di lavoro.

6.4.2 Un trasferimento indiretto: La missione WMAP

La missione WMAP è stata disegnata sfruttando un trasferimento di tipo indiretto verso la sua orbita operativa; ovvero è la Luna che le fornisce l'energia necessaria per raggiungere un'orbita Lissajous attorno ad EL_2 .

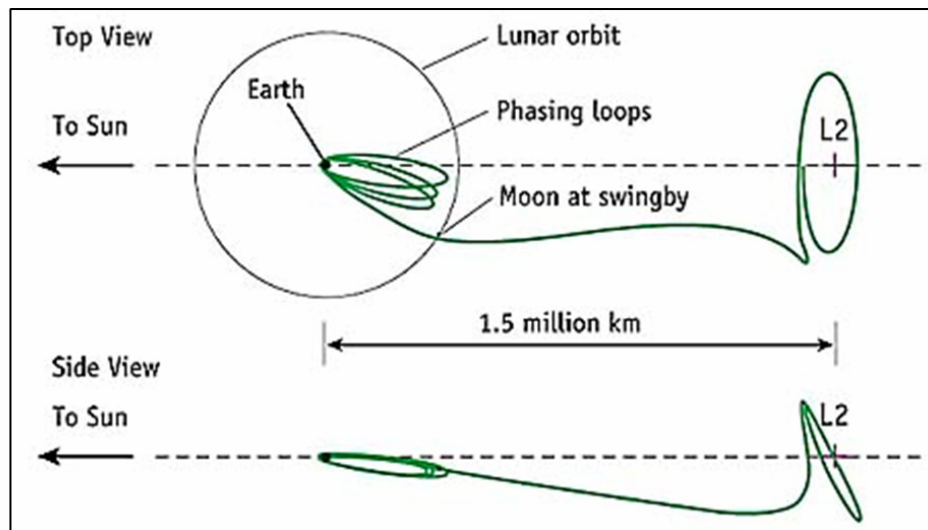


Figura 6.32 - Traiettoria nominale della missione WMAP

L'orbita di partenza, l'energia C_3 al lancio ed altri valori di interesse per la missione sono riportati nella seguente tabella.

| | |
|--------------------------|--|
| Massa | 840 kg |
| Data Lancio | 30/06/2001 GMT ¹ 19.46 [2001:181:1946] |
| Lanciatore | Delta II 7425 |
| Quota immissione Perigeo | ≈ 185 km |
| Inclinazione immissione | 28.7 deg |

¹ Greenwich Mean Time

| | |
|---------------------------------------|--|
| Orbita operativa | <i>Lissajus 1°-10° attorno ad EL_2 ($A_y \sim 264,000$ km, $A_z \sim 264,000$ km), Class II</i> |
| Lunar Swing-by | <i>30/07/01 GMT 16.37 (circa 1 mese dopo il lancio)</i> |
| Durata del viaggio dopo lo “swing-by” | <i>≈ 100 giorni</i> |
| Finestre di lancio | <i>≈ 20 min per 7 giorni consecutivi 2 volte al mese</i> |
| Station Keeping | <i>Per mantenere l’orbita operativa, 4 volte l’anno</i> |
| Design Life | <i>27 mesi = 3 mesi trajectory + 2 anni at L2</i> |
| Potenza | <i>419 Watts</i> |
| Controllo assetto | <i>3-axis controlled, 3 wheels, gyros, star trackers, sun sensors</i> |
| Propulsori | <i>8 propulsori chimici ad idrazina</i> |
| Energia specifica al lancio C_3 | <i>-2.6 km²/s²</i> |

Tabella 6.3 - Dati missione WMAP

La prima fase del viaggio consiste in tre “ phasing loops” attorno alla Terra, seguiti da un assist gravitazionale della Luna per portare WMAP nella sua orbita operativa.

Sono stati effettuati 7 spari (3 all’apogeo e 4 al perigeo) come preparazione al *fly-by* con la Luna; ciò richiede orbite di fasamento di elevata eccentricità (apogeo ≈ 400.000 km)

L’orbita operativa scelta è di tipo Lissajous piuttosto che Halo poiché così la sonda si trova in differenti posizioni con differenti velocità dopo ogni 6 mesi.

L’entità dei Δv e la data in cui questi sono applicati è riportata nella seguente tabella (fra parentesi, nell’ultima, è riportato il riferimento rispetto al quale è calcolata la distanza)^[45].

| Event | yyyy:ddd:hhmm GMT | ΔV (m/s) | Burn (s) | Altitude (km) |
|-------------------------|----------------------|---------------------|-------------|---------------|
| Apogee 1 | 2001:185:1322 | 1.921 | 106 | 299,478 (E) |
| Perigee 1 | 2001:189:0433 | 20.194 | 1274 | 3,098 (E) |
| Apogee 2 (+Z Cal) | 2001:193:1611 | 0.254 | 41 | 347,891 (E) |
| Perigee 2 | 2001:198:0336 | 2.514 | 177 | 2,955 (E) |
| Apogee 3 (-Z Cal) | 2001:202:1854 | 0.296 | 40 | 356,012 (E) |
| Perigee 3 | 2001:207:1029 | 7.410 | 546 | 4,741 (E) |
| Perigee 3 Correction | 2001:208:0430 | 0.308 | 24 | 158,306 (E) |
| Lunar Swing-By | 2001:211:1637 | N/A | N/A | 5,279 (M) |
| Mid-Course Correction 1 | 2001:218:1637 | 0.103 | 18 | 755,736 (E) |
| Mid-Course Correction 2 | 2001:257:1637 | 0.042 | 6 | 1,402,107 (E) |
| Station Keeping 1 | 2002:016:1650 | 0.428 | 72 | (L2) |
| Station Keeping 2 | 2002:128:1603 | 0.348 | 49 | (L2) |
| Station Keeping 3 | 2002:211:1638 | 0.460 | 66 | (L2) |

Tabella 6.4 - Δv utilizzati nella missione WMAP

6.5 Implementazione di un trasferimento diretto

A questo punto si è interessati ad ottenere un'orbita Halo attorno ad uno dei punti collineari di librazione del sistema Terra-Sole, cercando di raggiungerla mediante un trasferimento diretto. Prendendo a modello il trasferimento effettuato dalla missione ISEE-3, si cercherà di ottenere un trasferimento verso un'orbita Halo attorno ad EL_1 , prima in un modello a tre corpi ed in seguito in un modello bicircolare che veda la Luna come perturbazione.

I valori su cui agire per ottenere il trasferimento, una volta fissata l'orbita di partenza, sono l'entità degli impulsi e l'istante in cui fornirli. Per similitudine con la missione ISEE-3 si suppone di fornire tre impulsi dopo un intervallo di tempo dal lancio pari a quello utilizzato nella missione di riferimento.

Supponendo che il lanciatore lasci la sonda al perigeo dell'orbita, la velocità iniziale è calcolata mediante l'integrale dell'energia:

$$v_{in} = \sqrt{2 \cdot \mu_{Earth} \cdot \left(\frac{1}{r_{perigeo}} - \frac{1}{2 \cdot a} \right)} \quad (6.2)$$

L'orbita così ottenuta ha un aspetto molto simile a quello di figura 6.31.

I valori necessari dei Δv sono:

➤ $\Delta v_1 = -8.3 \text{ m/s}$ $\Delta v_2 = -1.5991 \text{ m/s}$ $\Delta v_3 = -0.123 \text{ m/s}$

La logica utilizzata per la determinazione dei precedenti valori ha previsto, innanzitutto, uno studio sul comportamento dell'orbita in funzione delle intensità degli impulsi; in seguito se ne è scelto uno (in questo caso il secondo) per ottenere un controllo fine della traiettoria mediante successive cifre decimali.

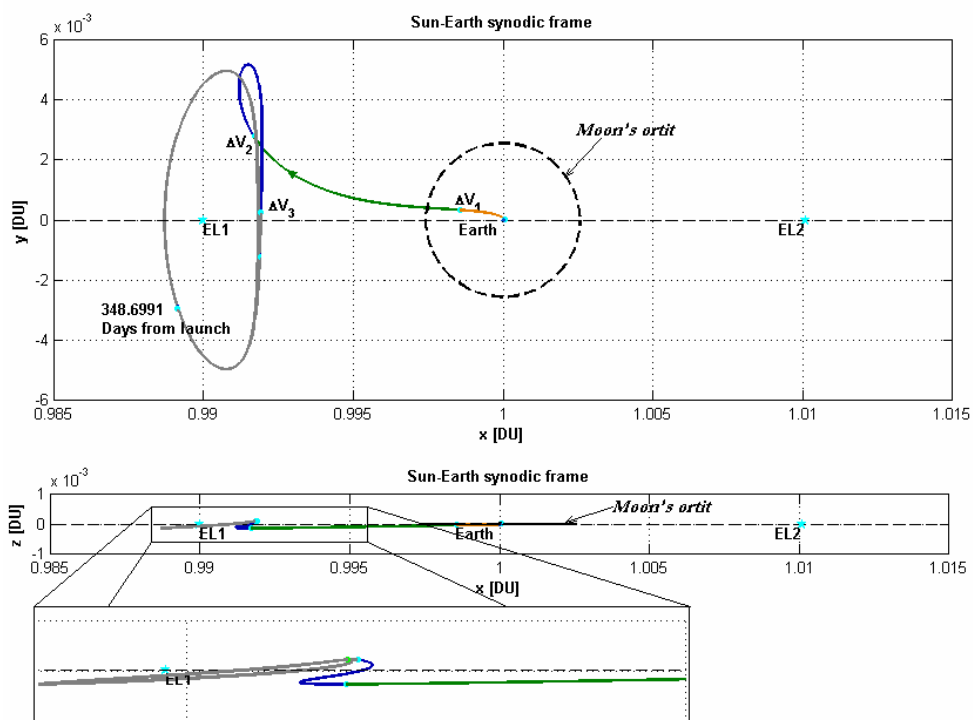


Figura 6.33 - Trasferimento diretto mediante tre impulsi nel CR3BP

Una delle informazioni assenti nella tabella 6.1 (e non disponibili in bibliografia) è l'angolo di fase iniziale che si è, quindi, determinato mediante prova ed errore; in altre parole è stato trattato come un parametro libero (in ogni caso solo un range di u_0 porta la soluzione verso il punto di Lagrange di interesse).

Si è tentato di implementare, sempre nell'ambito di un modello a tre corpi, anche un trasferimento, simile al precedente, ma che preveda un singolo Δv iniziale. Ossia, al modulo iniziale della velocità determinato dalla (6.2) con la stessa ipotesi che il lanciatore lasci la sonda al perigeo dell'orbita di partenza, si è sommato un impulso di -1.30902501 m/s . Per ottenere un

confronto con la precedente orbita (fig. 6.33), l'angolo di fase iniziale è stato lasciato immutato ($u_0=5.15983796$ deg).

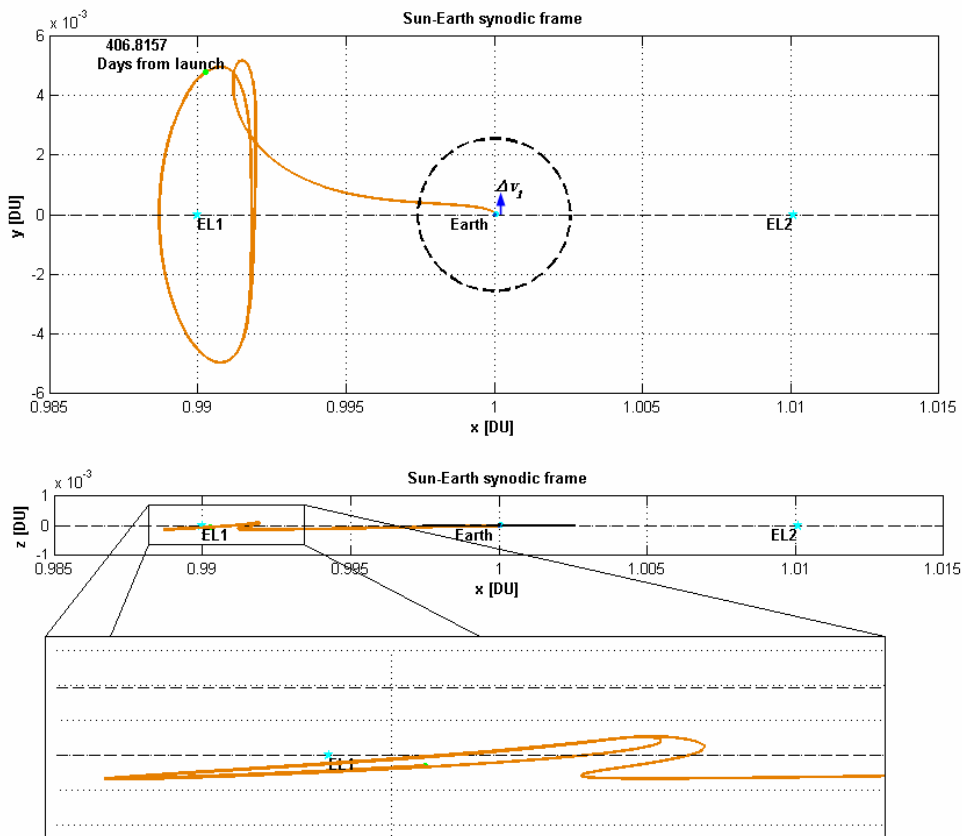


Figura 6.34 - Trasferimento diretto mediante un unico impulso nel CR3BP

Si noti come l'orbita Halo che si ottiene in entrambi i casi è di piccola ampiezza lungo z , proprio come quella della missione ISEE-3 (vedi introduzione). L'elevato numero di cifre decimali necessario per quest'ultimo Δv e per il valore di u_0 è dovuto, essenzialmente, ai seguenti fattori:

- La natura fortemente non lineare delle soluzioni, che rende queste orbite estremamente sensibili alle condizioni iniziali.
- Non sono stati previste né manovre di correzione lungo la traiettoria, né *station-keeping* per una durata di più di un anno. Tutta il trasferimento è, quindi, determinato dalle sole condizioni di

posizione e velocità dalla sua orbita di partenza (l'intervallo d'integrazione per l'orbita determinata mediante tre *mid-course corrections* (fig. 6.33) è minore del successivo (fig. 6.34), infatti, il Δv utilizzato per il controllo fine richiede meno cifre decimali).

Un andamento dei valori di posizione e velocità relativi all'orbita di figura 6.33 è di seguito riportato. Si osservi la brusca diminuzione di velocità subito dopo la partenza dalla Terra e l'oscillazione, in termini di posizione, attorno ad una distanza di $1.5e^6$ km, e di velocità, attorno circa 0.3 km/s, nell'orbita di lavoro.

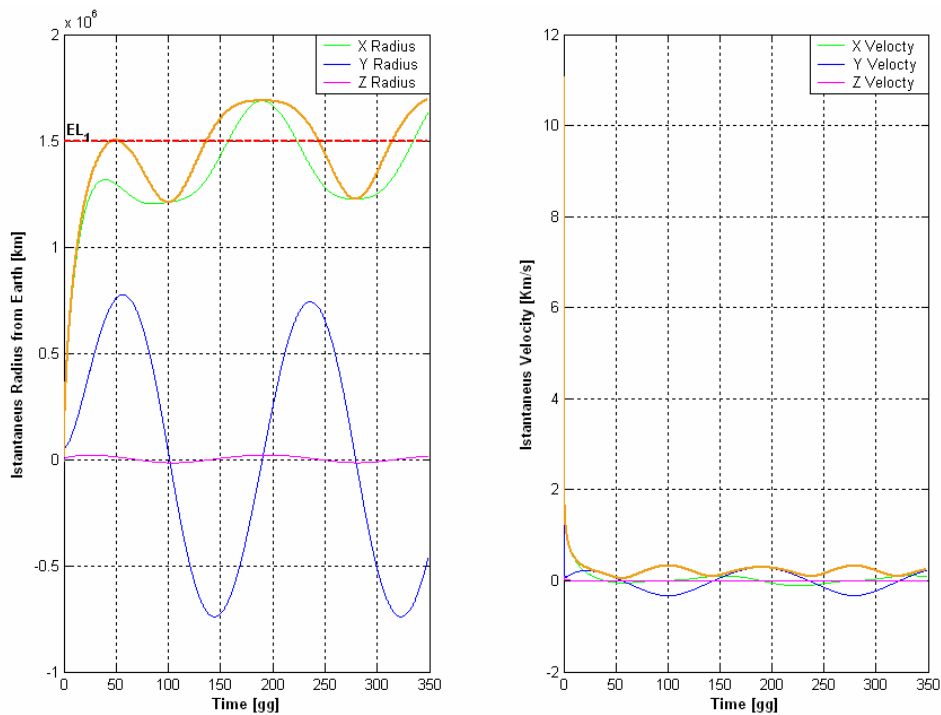


Figura 6.35 - Andamento nel tempo di posizione e velocità dell'orbita di figura 6.33

Si passa, quindi, ad analizzare la stessa orbita in un modello che preveda anche l'influsso lunare. Si utilizza il propagatore bicircolare che prevede Terra-Sole come primari; solo in questo, infatti, EL_1 può esser visualizzato come un punto fisso.

Si sceglie di mantenere fisso, ancora una volta, il valore di u_0 e di utilizzare, oltre gli istanti, anche le entità degli impulsi impiegati nella missione ISEE-3. Vincolati, quindi, due gradi di libertà del problema, si

esegue un controllo fine, per portare la soluzione verso un trasferimento diretto ad un'orbita Halo, sulla posizione iniziale della Luna.

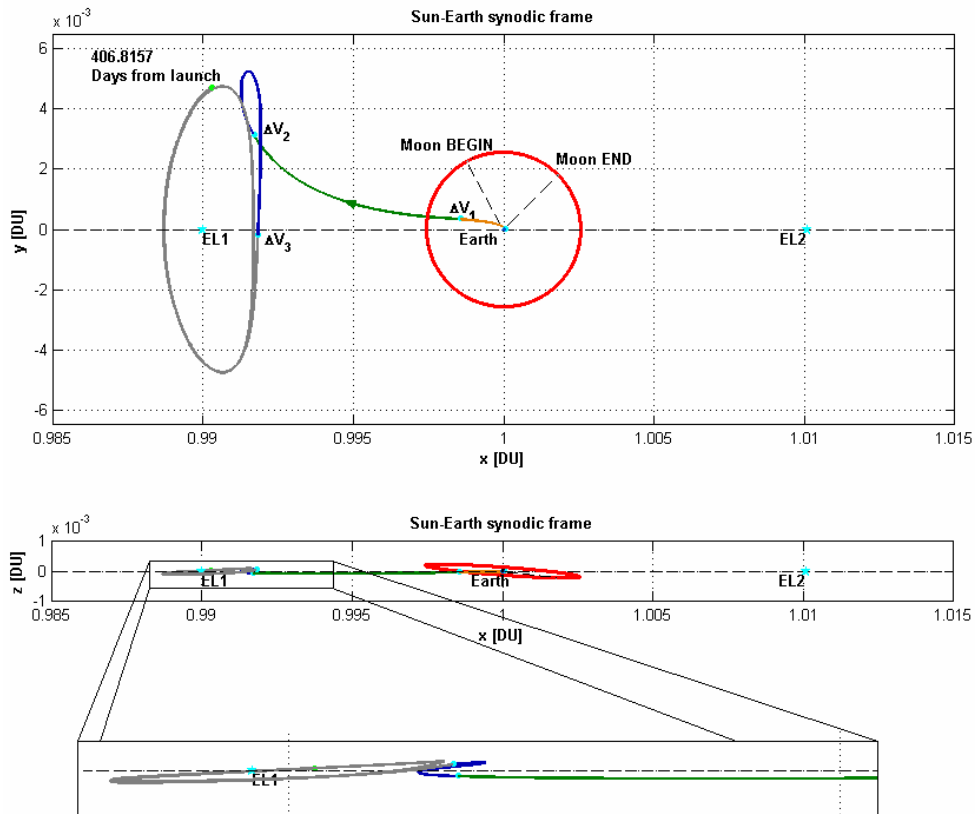


Figura 6.36 - Trasferimento diretto mediante tre impulsi nel BCM

La posizione del piano orbitale lunare è stata fissata mediante i seguenti valori (definiti nel par. 5.2) che ne rappresentano inclinazione rispetto all'eclittica e posizione della linea dei nodi: $\phi = -5.15 \text{ deg}$ $\theta = 25.1 \text{ deg}$. La posizione della Luna sul suo piano, invece, è stata determinata di conseguenza per rispettare tutti i vincoli imposti alla missione: $u_{0Moon} = 82.9955464 \text{ deg}$.

L'andamento della posizione e della velocità istantanee per l'orbita di figura 6.36, come per quella di figura 6.34, è del tutto simile a quello riportato in figura 6.35.

Si è quindi dimostrato che è possibile implementare, mediante i semplici strumenti di calcolo sviluppati, orbite di trasferimento dirette considerando

anche una strategia multi-sparo e l'influsso lunare; ossia si tratta di soluzioni abbastanza generali che possono soddisfare diversi vincoli di missione.

Si fa osservare che orbite di trasferimento verso soluzioni periodiche, soprattutto determinate mediante tale procedimento "diretto", riprendono bene l'andamento dei trasferimenti verso i punti di librazione relativi^[46].

6.6 Implementazione di un trasferimento indiretto

La naturale evoluzione di un trasferimento diretto è un trasferimento che consente di fornire al satellite una minore energia C_3 (vedi appendice *E*) e gli offre vincoli meno stringenti sulla finestra di lancio. Si è dunque interessati ad un trasferimento indiretto verso EL_1 o EL_2 . Prendendo a riferimento la missione WMAP si cercherà di implementare un'orbita verso EL_2 .

Si cercherà innanzi tutto di determinare un trasferimento planare di questo tipo e successivamente si passerà al caso spaziale. Si fa notare come questo approccio, per raggiungere un'orbita periodica attorno ad uno dei punti di librazione, sia intrinsecamente a quattro corpi; non è possibile, quindi, implementarlo in un modello CR3BP; si utilizzerà, pertanto, il propagatore basato sul modello bicircolare Terra-Sole (vedi paragrafo 5.7).

Nel caso piano, noto il tempo necessario affinché l'orbita raggiunga (data una certa fase iniziale attorno alla Terra) una distanza pari al raggio dell'orbita lunare (T), è possibile determinare l'angolo di fase iniziale della Luna. Essendo ω_M la velocità angolare della Luna sulla sua orbita (vedi valori (5.23)), l'angolo di fase iniziale affinché essa si trovi all'incirca dove la soluzione termini, dopo un tempo T , è data da:

$$\theta_{finale} = \theta_0 + \omega_M \cdot T \Rightarrow \theta_0 = \theta_{finale} - \omega_M \cdot T \quad (6.3)$$

Il valore di θ_f è stato determinato a posteriori osservando il punto di arrivo della soluzione dopo un tempo T ad una distanza di 384.400 km .

Per vincolare qualche grado di libertà del problema si è imposto che l'entità ed il valore degli spari, fino allo *swing-by* lunare, fossero gli stessi di quelli della missione WMAP ed anche l'orbita di partenza fosse la medesima. Si suppone, ancora una volta, che il lanciatore lasci la sonda al perigeo dell'orbita ed in questo punto, mediante la (6.2), se ne calcola la velocità (il semiasse maggiore dell'orbita è determinabile dalla conoscenza dell'energia C_3 riportata in tabella 6.3 (vedi appendice *E*)).

Non tutte le fasi iniziali di partenza dalla Terra forniscono orbite che raggiungono una distanza pari al raggio lunare.

Per dare un'idea del procedimento seguito:

- Si sceglie un angolo di fase iniziale tale che la soluzione, dopo tre ellissi di fasamento, si porti nella direzione di EL_2 . Si desume l'intervallo di tempo richiesto affinché il punto finale della traiettoria si trovi ad una distanza pari a quella Terra-Luna, ovvero, si calcola l'angolo finale formato con l'asse x del sistema sinodico. Per un angolo $u_0=176 \text{ deg}$ si ottiene, imponendo nulla la fase iniziale della Luna, dopo $T=T_{\text{sparo}}=0.45 \text{ TU}$, la seguente disposizione delle tre ellissi di fasamento.

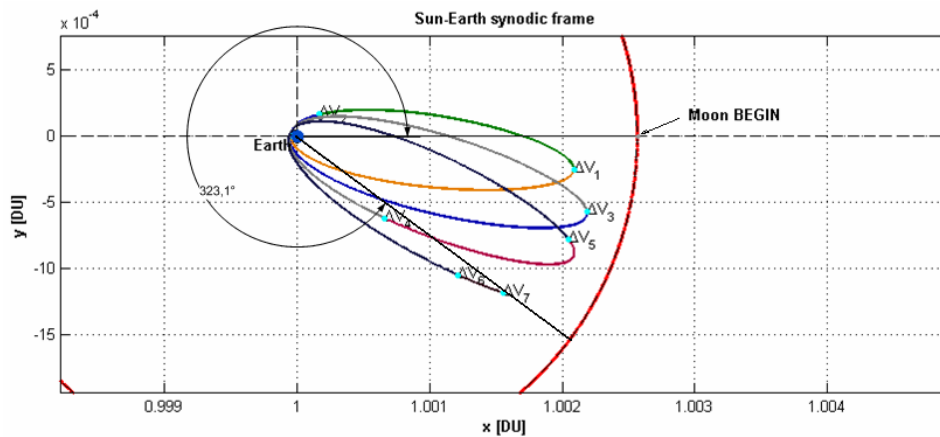


Figura 6.37 - Preparazione all'incontro lunare nel BCM planare

- Si determina l'angolo di fase iniziale che deve essere imposto affinché la Luna si trovi nella zona in cui arriva la soluzione mediante la (6.3). Nel caso in esame l'argomento della latitudine iniziale risulta di circa 317 deg . L'angolo così calcolato porterebbe la Luna ad essere in corrispondenza della traiettoria all'inizio della fase di integrazione per ottenere lo *swing-by*; affinché la Luna si trovi in questa zona non nell'istante iniziale della fase di integrazione, il risultato della (6.3) va scalato di circa 30 deg . Questo valore è stato determinato sperimentalmente ed è giustificato dal fatto che la soluzione delle equazioni del moto, trovandosi all'apogeo della sua ellisse, si muove molto più lentamente di quanto non faccia la Luna sulla sua orbita.

- Si impone alla Luna un angolo di fase intero che sia prossimo a quello calcolato analiticamente, in questo caso 287 deg , e si rilascia il vincolo sull'intervallo di integrazione lasciando la soluzione libera di continuare ad evolversi.
- Si effettua una scansione più fitta della fase iniziale in un intervallo centrato attorno al valore inizialmente supposto finché non si ottiene un incontro fra sonda e satellite. Nella traiettoria di figura 6.38 l'angolo iniziale è stato imposto pari a 177.41525 deg .
- Dopo lo *swing-by* si varia l'intensità dello sparo necessario per l'inserimento nell'orbita periodica mantenendo fisso l'istante in cui effettuarlo. Si sceglie ancora di utilizzare l'istante dell'ottavo sparo della missione di riferimento, mentre si trascurano le manovre successive di *station-keeping* e *mid-course corrections*.

Fornendo un Δv_8 di 0.92273 m/s si ottiene un'orbita del tipo di quella riportata nella figura successiva.

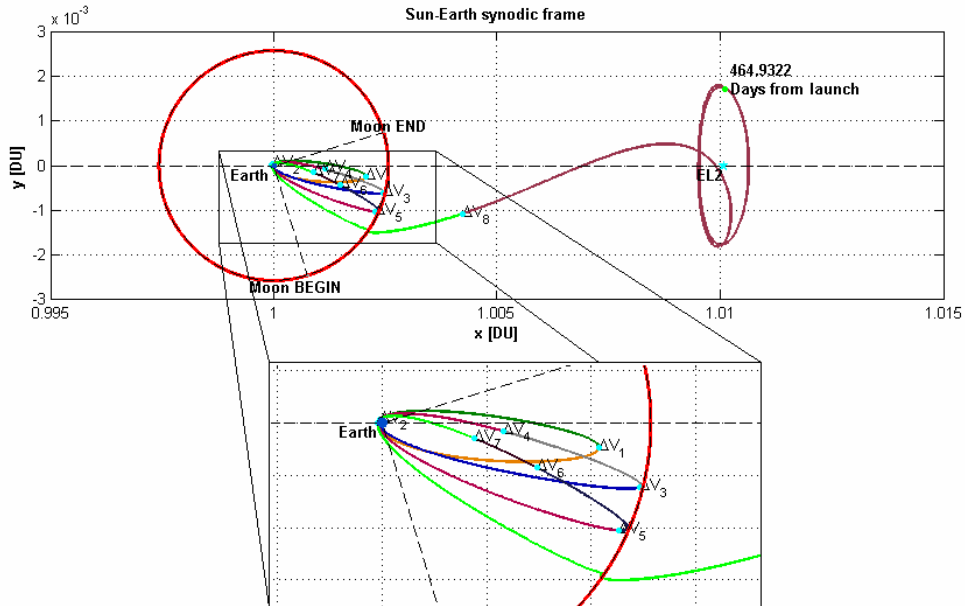


Figura 6.38 - Trasferimento indiretto nel BCM planare

Ancora una volta il numero elevato di cifre decimali dipende dall'assenza di ulteriori correzioni durante l'orbita operativa per l'intervallo temporale riportato in figura.

Si noti, infine, che sia il valore dell'angolo di fase iniziale sia quello dell'intensità dello sparo, sono stati entrambi oggetto di piccole variazioni per ottenere il trasferimento dopo l'incontro lunare.

Il valore del Δv_8 , che è in effetti il valore che si è cercato di minimizzare lasciando invariati i precedenti spari, tende a diminuire con l'ampiezza dell'orbita Halo che si vuole raggiungere. Il seguente esempio, che utilizza un trasferimento indiretto verso un'orbita Lyapunov con A_x molto piccola (circa 0.02 DU), necessita, con gli opportuni valori di fase iniziale sia dall'orbita di partenza e della Luna, di un $\Delta v_8 = 0.0412 \text{ m/s}$.

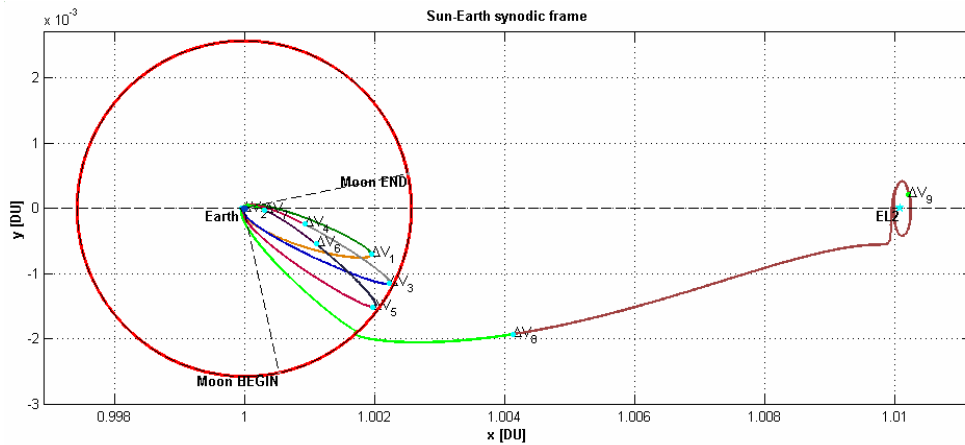


Figura 6.39 - Trasferimento nel BCM planare verso un'orbita Lyapunov di piccola ampiezza

Nel passaggio allo studio del caso spaziale, la relazione (6.3) non può più utilizzarsi, poiché la misura dell'angolo finale della traiettoria andrebbe effettuata sul suo piano orbitale, mentre la posizione iniziale della Luna sul piano della sua orbita. Pertanto si procede in maniera analoga a prima, ma la posizione iniziale della Luna viene determinata mediante procedimenti di prova ed errore. In seguito allo *swing-by* si esegue un controllo fine del valore dell'impulso necessario ad ottenere una soluzione periodica senza successive manovre di correzione o *station-keeping*.

Sono state così costruite traiettorie di trasferimento indiretto verso orbite Lissajous (come quella utilizzata dalla missione WMAP) attorno ad EL_2 e verso orbite Halo attorno allo stesso punto di equilibrio.

Nel caso spaziale, come descritto nel paragrafo 5.7, la posizione della Luna non è imponibile mediante il solo angolo di fase iniziale, ma è necessario anche collocare il piano orbitale rispetto al sistema di riferimento sinodico; a tal fine sono stati utilizzati gli stessi valori del caso di figura 6.36.

Per quel che riguarda, infine, i valori di partenza della sonda, sono stati utilizzati, ove disponibili, quelli di tabella 6.3; gli alti sono stati ottenuti, per entrambi i trasferimenti, mediante un procedimento simile al precedente.

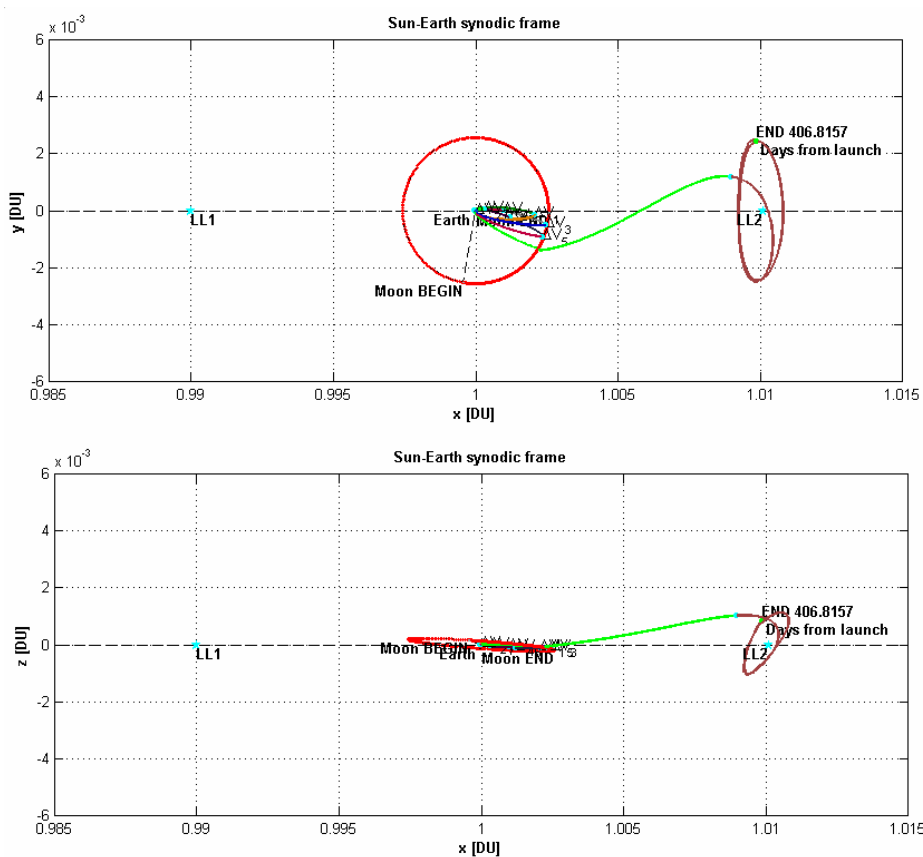


Figura 6.40 - Trasferimento indiretto verso un'orbita Halo

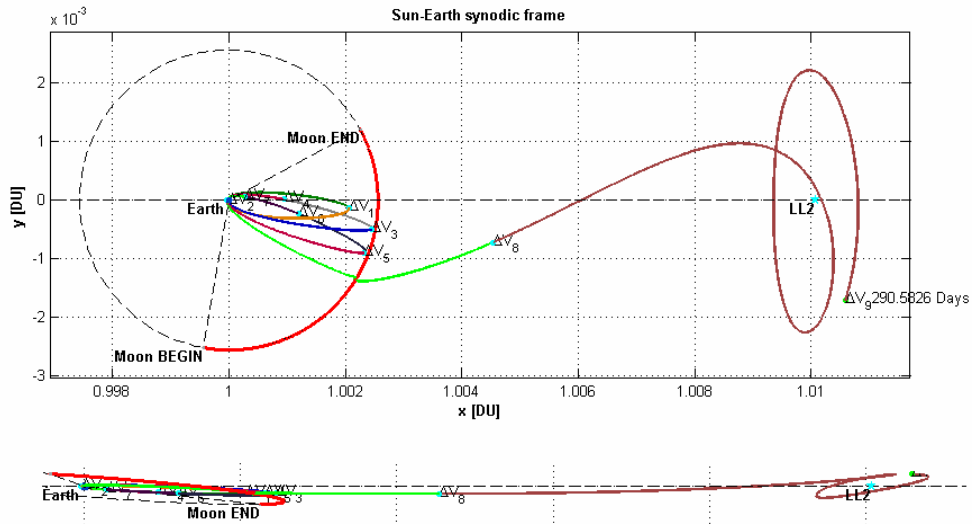


Figura 6.41 - Trasferimento indiretto verso un'orbita Lissajous

Nelle immagini precedenti i termini Halo e Lissajous sono utilizzati in maniera indicativa solamente per alludere ad orbite periodiche attorno EL_2 rispettivamente di grande o piccola A_z . Con tale metodo di implementazione del trasferimento, infatti, il tipo di orbita operativa è determinato di conseguenza.

6.7 Implementazione di un trasferimento Terra-Luna utilizzando un'orbita Halo

Mediante l'utilizzo di un modello bicircolare Terra-Luna, riprendendo il procedimento sviluppato nel paragrafo 6.5, si cerca di ottenere un trasferimento Terra-Luna che si avvalga dell'utilizzo di un'orbita Halo. A differenza di quanto fatto nel paragrafo 6.2 non si impone solamente di raggiungere una distanza di $1.5e^6$ km, ma di utilizzare proprio una soluzione periodica. Sfruttando l'instabilità di quest'orbita ed utilizzando un impulso per la cattura lunare, si cerca di realizzare il trasferimento.

Sempre nell'ottica di fissare qualche grado di libertà del problema, si impone l'utilizzo di tre spari nello stesso istante e della stessa intensità di quelli della missione ISEE-3 (tabella 6.2) e si lascia libero sia un impulso necessario per la cattura lunare sia la fase iniziale di partenza dalla Terra. Si vincola, in questo caso, il piano orbitale lunare e la posizione della Luna

sulla sua orbita; si esegue un controllo fine sulla fase iniziale di partenza dalla Terra sparo di cattura lunare e dell'istante in cui effettuarlo.

A titolo di prova si modificano i valori di inclinazione e anomalia retta del nodo ascendente del piano lunare utilizzati nel paragrafo 6.5; si impone, in particolare: $\phi = 5.15 \text{ deg}$ $\theta = 0 \text{ deg}$ $u_0 = 278 \text{ deg}$.

Con un angolo di fase iniziale di -10.8626 deg , si osserva un allontanamento dell'orbita dalla Halo (in seguito al compimento di un intero giro) dopo un intervallo di circa 600 giorni , lasciando evolvere la soluzione fino alle vicinanze dell'orbita lunare. Imponendo un Δv di -46.4 m/s dopo 664.4 giorni dal lancio, l'orbita che si ottiene è la seguente.

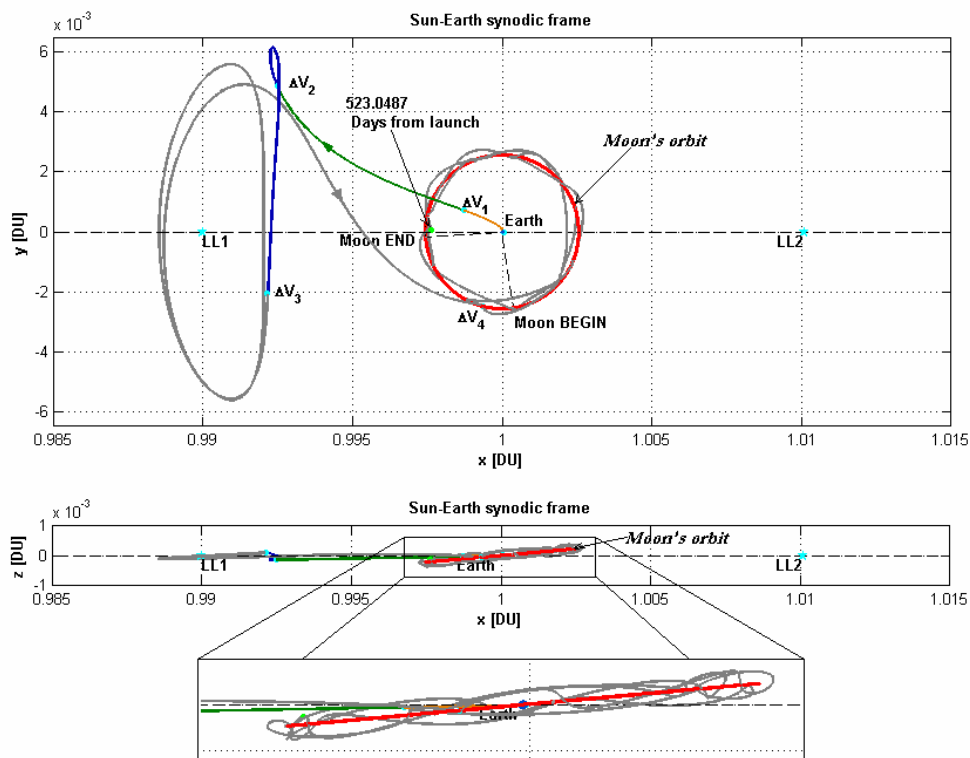


Figura 6.42 - Trasferimento Terra-Luna utilizzando un'orbita Lissajous attorno ad EL_1

Il Δv totale richiesto per un trasferimento di questo genere è dell'ordine dei 100 m/s più il Δv necessario ad immettere il satellite su un'orbita altamente ellittica (con alta C_3 , vedi appendice E).

La stessa, vista in un riferimento solidale con la Luna, assume l'aspetto riportato in figura 6.43; si noti come, dopo una serie di rivoluzioni attorno al pianeta, l'orbita impatta sulla sua superficie.

Si riportano di seguito anche gli andamenti della distanza e della velocità istantanee del trasferimento; si noti la prima fase del trasferimento che riprende quella di figura 6.35, mentre le oscillazioni del secondo tratto identificano la cattura da parte della Luna.

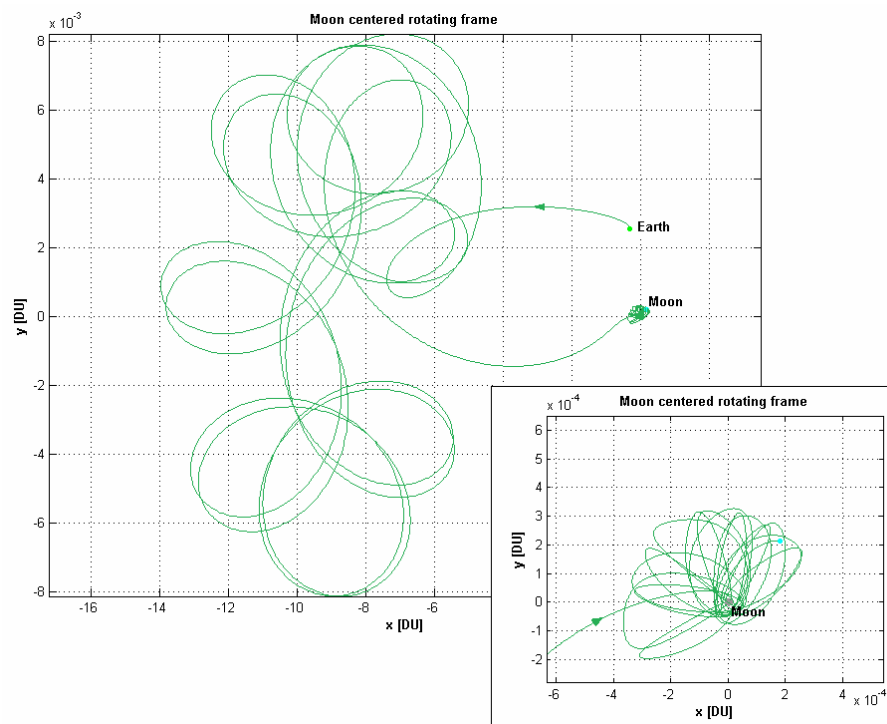


Figura 6.43 - Orbita di figura 6.42 in un riferimento centrato sulla Luna

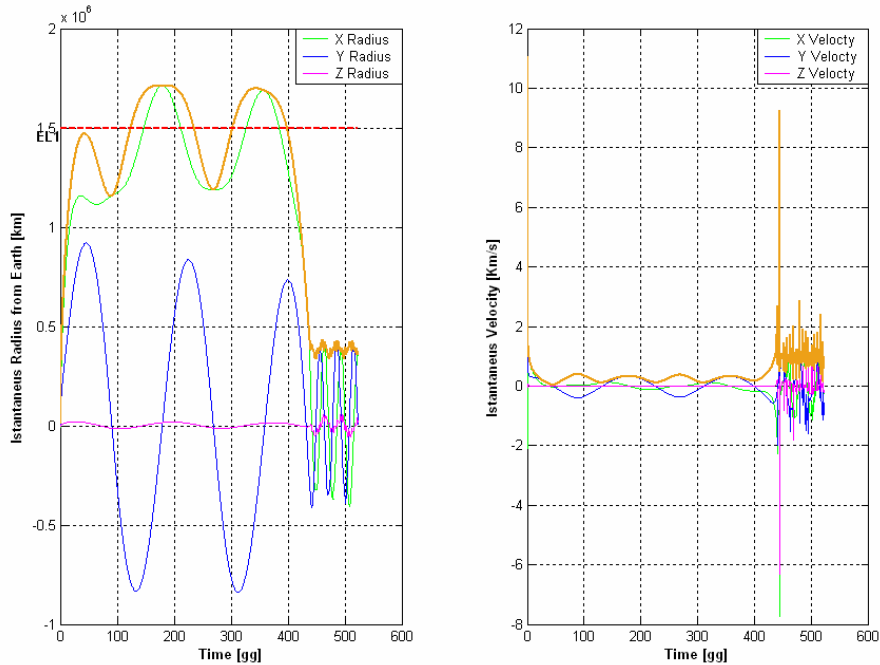


Figura 6.44 - Andamento nel tempo di posizione e velocità per l'orbita di figura 6.42

6.8 Implementazione di un trasferimento a bassa spinta verso un'orbita Halo

Si passa ad implementare una traiettoria che, partendo da un'orbita LEO, si porti verso un'orbita Halo utilizzando esclusivamente la spinta fornita da un propulsore elettrico. Nell'ottica di riuscire a sfruttare eventuali influssi favorevoli del campo gravitazionale lunare, si procede utilizzando il propagatore bicircolare Terra-Sole, le cui equazioni sono modificate mediante i termini definiti dalle (5.9).

Si utilizza una quota di partenza di 700 km , cinque propulsori del tipo SPT-100 [1350] (vedi tabella 5.2) per una massa iniziale di 500 kg e si sceglie di raggiungere una soluzione periodica attorno ad EL_1 .

La traiettoria deve prevedere una prima fase di sollevamento orbitale a bassa spinta; quindi i propulsori possono essere spenti e la soluzione giungere balisticamente nell'orbita di lavoro. Si prevede, tuttavia, la necessità di una correzione di *mid-course* durante il trasferimento balistico data l'elevata sensibilità della soluzione alle piccole correzioni; tale controllo verrà ancora fornito mediante spinta elettrica.

La posizione della Luna viene fissata ancora mediante il suo piano orbitale, utilizzando i valori di paragrafo 6.5, e con il suo angolo di fase iniziale su questo piano.

Si sceglie una combinazione dell'angolo di fase iniziale della Luna e della disposizione dell'orbita di partenza tale da portare la soluzione verso EL_1 dopo aver fissato l'istante in cui spegnere il propulsore elettrico. Si opta per un intervallo di $1.14 TU$ dal lancio per l'inizio della fase balistica che rappresenta all'incirca il tempo necessario ad arrivare ad una distanza di poco inferiore a quella Terra-Luna. La combinazione di angoli che soddisfa questi requisiti è:

$$u_{0_{Moon}} = 35 \text{ deg}, \quad \begin{cases} \theta_0 = 230 \text{ deg} \\ \phi = -5.2 \text{ deg} \\ u_0 = 10 \text{ deg} \end{cases} \quad (6.4)$$

A questo punto, osservando il comportamento della soluzione, si determina l'istante in cui fornire la correzione elettrica e la durata di questa. Si ricorda che, come detto nel paragrafo 6.3.2, la decelerazione fornita da una bassa spinta va a diminuire i denominatori delle (5.9) e ciò porta ad un calcolo sempre più intensivo e difficoltoso del modulo del vettore velocità; è necessario, pertanto, evitare di imporre intervalli di integrazione tali da diminuire eccessivamente il modulo della velocità.

Fornendo uno sparo della durata di $0.003721 TU = 5.2 \text{ ore}$ dopo $2 TU$ dal lancio si riesce ad ottenere la seguente orbita.

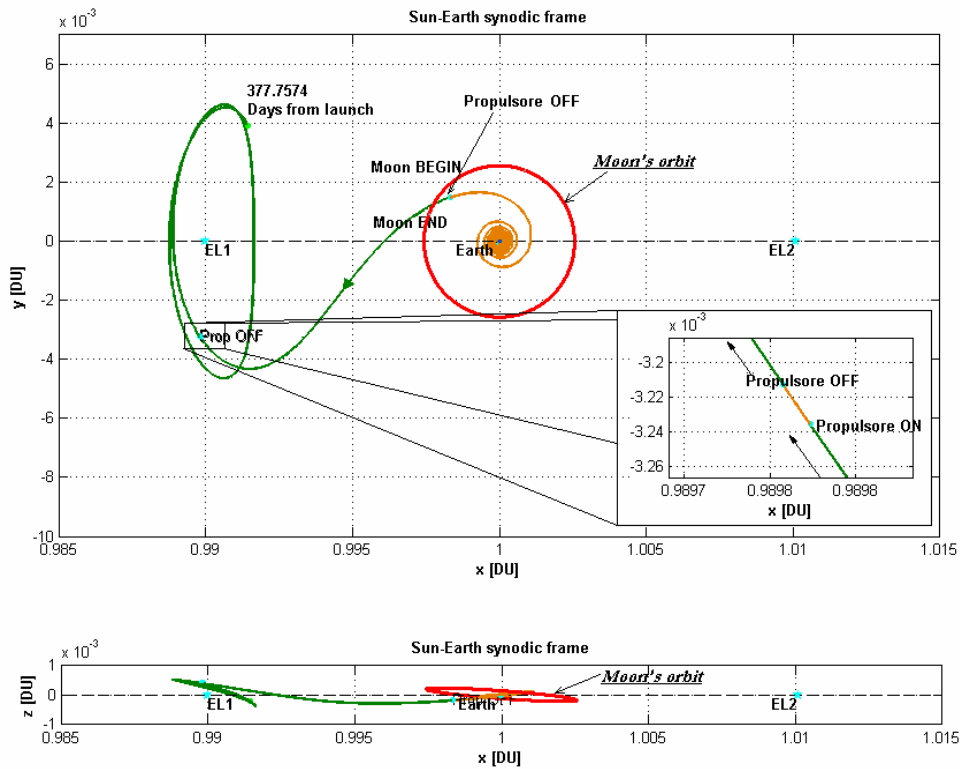


Figura 6.45 - Trasferimento a bassa spinta verso un'orbita Halo attorno EL_1

La massa consumata dai cinque propulsori è all'incirca di 180 kg per un impulso totale di $2.652e^6 \text{ Kg}\cdot\text{m/s}$.

Si riporta anche un grafico degli andamenti di posizione e velocità per questo genere di orbita; si osservino le oscillazioni molto fitte della prima fase, che sono quelle relative al sollevamento orbitale dalla Terra, e quelle presenti in un secondo tratto (dopo circa 100 giorni), corrispondenti all'orbita Halo di lavoro.

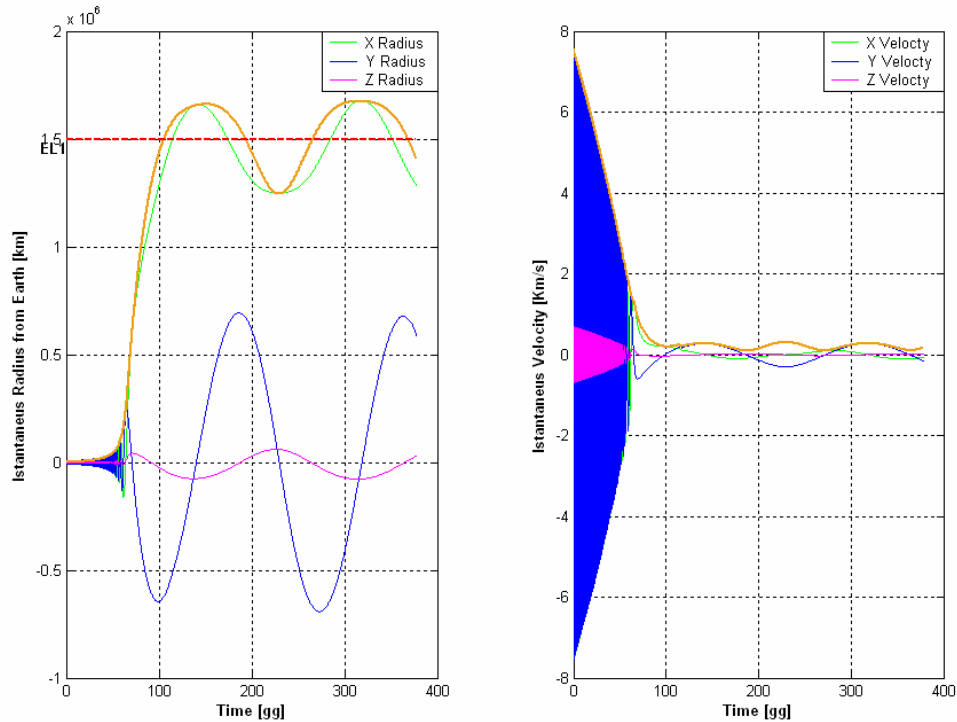


Figura 6.46 - Andamento nel tempo di posizione e velocità per l'orbita di figura 5.45

6.9 Comportamento del punto EL_1 in un modello a quattro corpi

L'intento dello sviluppo del propagatore a quattro corpi è quello di impiegarlo per analizzare l'attendibilità delle soluzioni ottenute in un modello a tre corpi ristretto o bicircolare. Il suo utilizzo, tuttavia, è rimasto, allo stadio attuale, ancora a livello embrionale. L'uso dello strumento per prove di maggiore accuratezza è stato solamente accennato mediante alcune prove che verificassero il comportamento della soluzione nei dintorni di EL_1 .

Si sono imposte alle equazioni (5.30) condizioni iniziali tali da mettere un punto in EL_1 con velocità relativa nulla e verificarne il comportamento. Le condizioni iniziali utilizzate per imporre la velocità relativa nulla sono, quindi, del tipo:

$$\left. \begin{aligned} V_{assoluta} &= V_{relativa} + V_{trascinamento} \\ V_{relativa} &= 0 \\ V_{trascinamento} &= \bar{\omega} \wedge \bar{r} = [0 \ 0 \ \omega_S] \wedge [x \ y \ z] \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{assoluta \text{ INIZIALE}} = [-\omega_S \cdot y \ \omega_S \cdot x \ 0]$$

(6.5)

Nelle immagini successive il tratto blu indica il cammino di EL_1 , mentre la curva dorata identifica la soluzione.

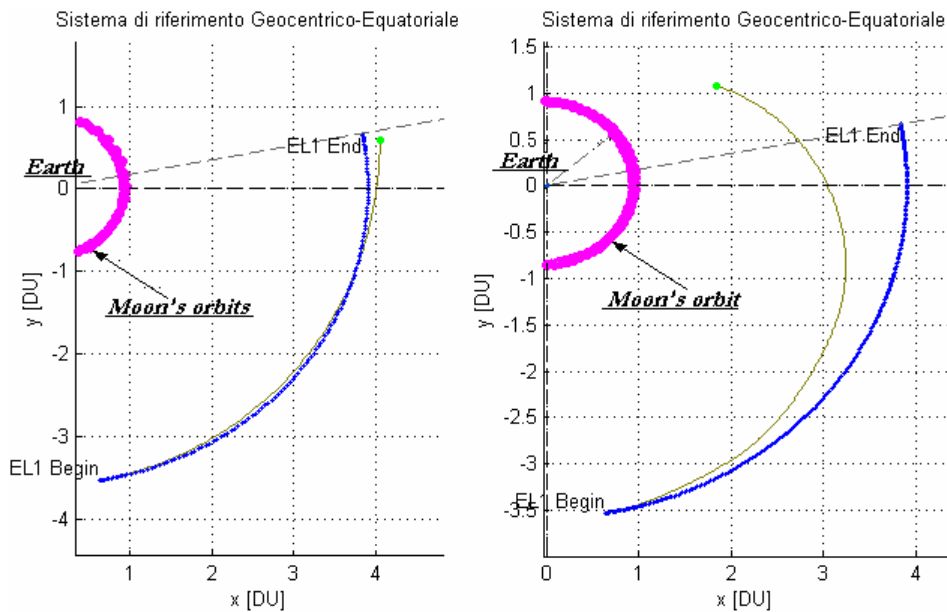


Figura 6.47 - Dinamica di EL_1 in un modello a 4 corpi

Modellando il sole come perturbazione e trascurando l'attrazione gravitazionale lunare (immagine a SX), oppure includendola (immagine a DX), un punto messo in EL_1 con velocità relativa nulla vi permane procedendo con l'integrazione per circa *3 mesi* se non si considera l'influsso lunare, altrimenti la soluzione vi si discosta dopo all'incirca *15 giorni* a conferma dell'instabilità di questo punto.

Perturbando le condizioni iniziali di EL_1 in maniera tale da disporle su una circonferenza di raggio dell'ordine di 10^{-3} DU si osserva che le orbite così propagate tendono a seguire ancora in corso del punto di librazione a meno della deviazione dovuta all'influsso lunare che porta la traiettoria verso l'interno del sistema. L'integrazione è fatta ancora per un periodo di *3 mesi*.

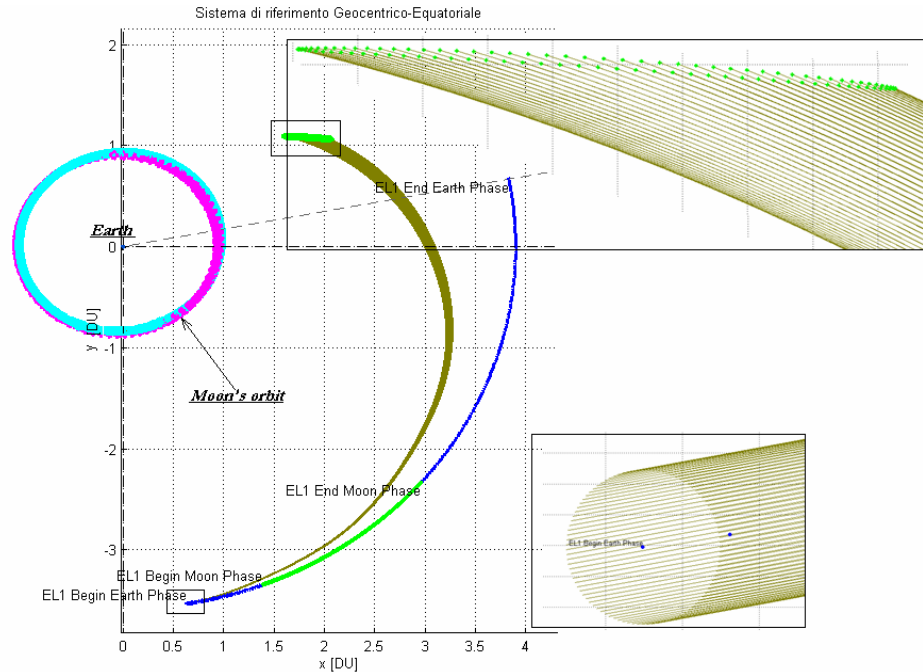


Figura 6.48 (Dinamica nei dintorni di EL_1 in un modello a 4 corpi)

6.10 Trasferimento Terra-Luna nel modello a quattro corpi utilizzando la dinamica di EL_1

Si è, infine, tentato di realizzare un trasferimento Terra-Luna che utilizzasse la dinamica del punto EL_1 nell'ambito di un modello a quattro corpi (utilizzando il relativo propagatore, vedi paragrafo 5.9).

Per le modalità con cui il propagatore relativo è stato realizzato, è necessario imporre una data di lancio, necessaria per desumere la posizione istantanea di Sole e Luna in un sistema di riferimento geocentrico equatoriale. In maniera del tutto arbitraria si sceglie come data di partenza il 31/12/2008.

Si ipotizza un'orbita di partenza ancora di 700 km di quota e si costruisce il trasferimento in maniera sequenziale (analogamente a quanto fatto nel paragrafo 6.2.1). Si impone quindi uno sparo per fuggire dall'attrazione terrestre, uno di *mid-course* ed uno per la cattura lunare.

I parametri, in termini di inclinazione, argomento della latitudine ed anomalia retta del nodo ascendente sono stati determinati in maniera tale da far passare la soluzione per il punto EL_1 . In realtà, al trascorrere dell'intervallo d'integrazione, EL_1 compie una circonferenza di raggio $1.5e^6$

km di raggio; pertanto si è portata la soluzione a percorrere un tratto di tale circonferenza nell'intervallo di tempo in cui vi si trova il punto EL_1 . I valori individuati, che soddisfano tale richiesta, sono:

$$\phi = 25 \text{ deg} \quad \theta = 80 \text{ deg} \quad u_0 = 27 \text{ deg}$$

Si noti come non siano questi ad essere oggetto di un controllo fine (non vi sono cifre decimali) e come si sia imposta un'inclinazione dell'orbita di partenza molto prossima a quella del piano dell'eclittica dall'equatore.

Si è dunque lasciato che la soluzione evolvesse naturalmente fino ad EL_1 ed oltre; successivamente sono stati finemente modificati i valori degli impulsi necessari affinché la soluzione raggiungesse l'orbita lunare in un istante ed in un punto per il quale passasse anche la Luna. I valori determinati per i tre impulsi sono:

- $\Delta v_1 = 3.0942 \text{ km/s}$, necessario per la fuga dalla Terra.
- $\Delta v_2 = -0.18 \text{ km/s}$, come correzione di *mid-course*.
- $\Delta v_3 = -0.53 \text{ km/s}$, necessario per la cattura lunare e dipendente dal tipo di orbita voluta attorno alla Luna.

Mediante tale approccio non è possibile imporre a priori i parametri dell'orbita di arrivo, ma questi vengono determinati di conseguenza.

Per ottenere tale genere di trasferimento, oltre ad essere determinanti i valori degli impulsi forniti, si rivelano altresì influenti gli istanti in cui essi vengono imposti. Si sono utilizzati valori tali da fornire il secondo impulso nell'istante in cui la traiettoria passasse molto vicina all'orbita lunare ed un terzo impulso poco prima dell'incontro con la Luna.

Il trasferimento è di seguito riportato assieme ad un andamento dei valori di posizione e velocità istantanei rispetto alla Terra.

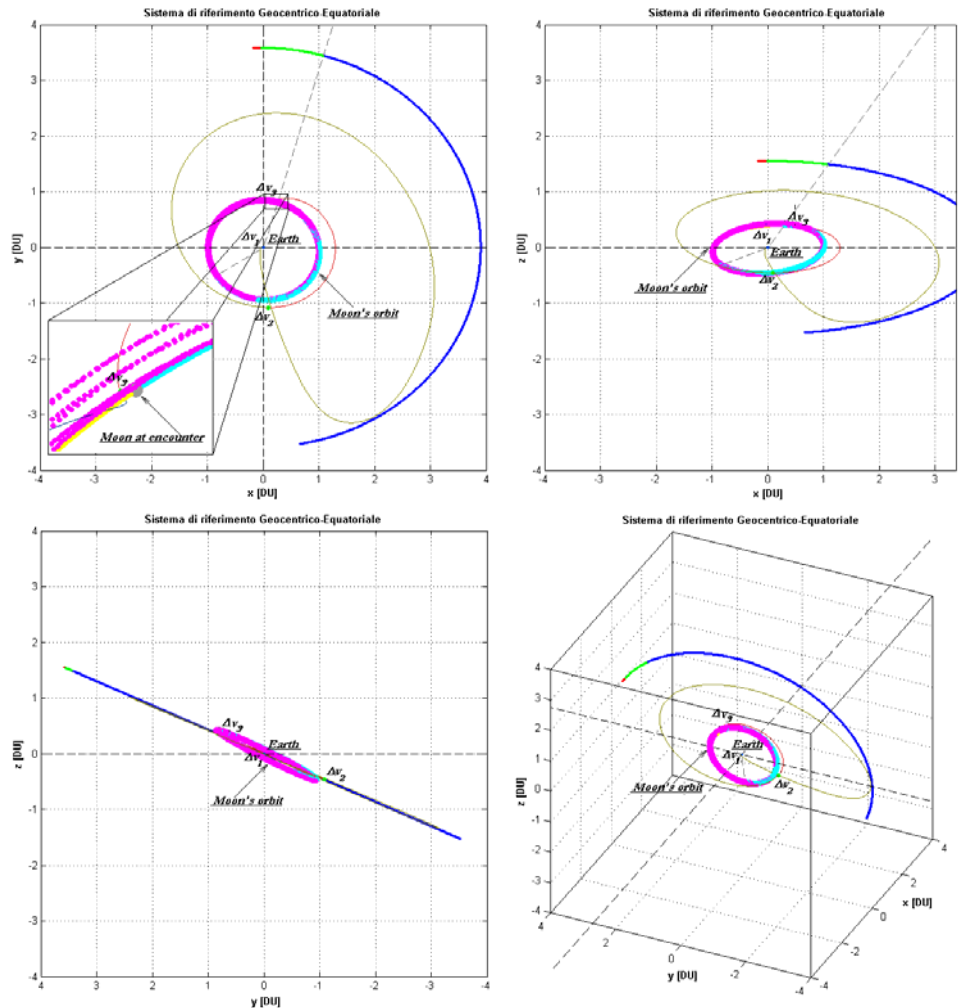


Figura 6.49 – Trasferimento Terra-Luna in un modello a quattro corpi

Nell'immagine precedente il cammino di EL_1 per i diversi intervalli di integrazione è stato rappresentato, rispettivamente, con tratto blu, verde e rosso. Analogamente il cammino lunare per le tre fasi è rappresentato con punti ciano, magenta e giallo.

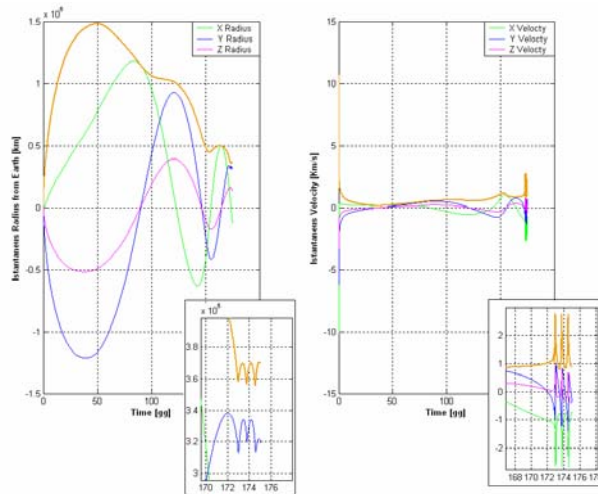


Figura 6.50 – Andamento nel tempo dei valori istantanei di posizione e velocità per l'orbita di figura 6.49

L'immagine di seguito riporta lo stesso trasferimento visto in un sistema di riferimento centrato sulla Luna; la curva è determinabile sottraendo istantaneamente alla posizione della sonda quella della Luna.

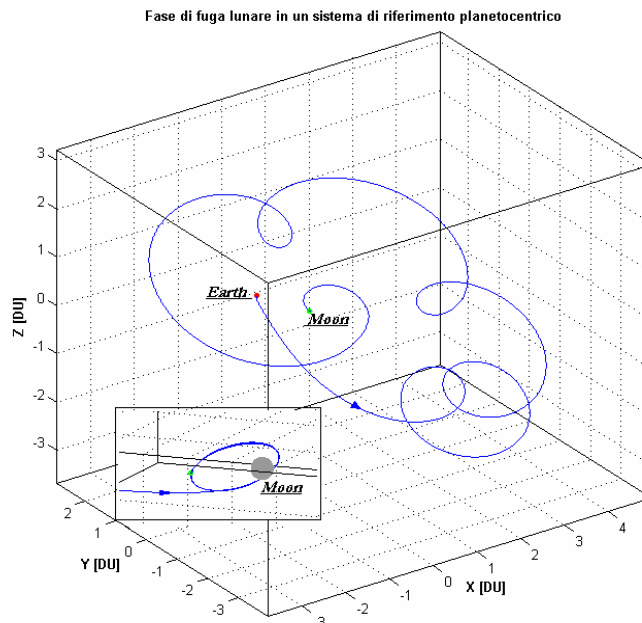


Figura 6.51 – Orbita di figura 6.49 vista in un sistema di riferimento centrato sulla Luna

Il secondo impulso viene fornito dopo $36 TU$, mentre il terzo dopo $40.058 TU$ dal lancio. Il tempo totale per il trasferimento è all'incirca di 170 giorni ed il Δv totale richiesto è all'incirca di $0.654 km/s$ più quello necessario per fuggire dalla Terra (comparabile con quello riportato in appendice).

Si noti come la traiettoria di trasferimento, vista in un sistema di riferimento centrato sulla Luna, assuma un aspetto simile a quello di figura 6.43, lasciando supporre che l'orbita nei pressi di EL_1 tenderebbe ad essere quasi periodica.

Si aggiunge, per concludere, che questo propagatore è stato anche utilizzato per sviluppare fasi di fuga lunari a bassa spinta, imponendo l'orbita di partenza e la data di partenza dal satellite ed utilizzando un propulsore del tipo di quello citato nel paragrafo 5.3. Un'immagine, a titolo di esempio, è di seguito riportata.

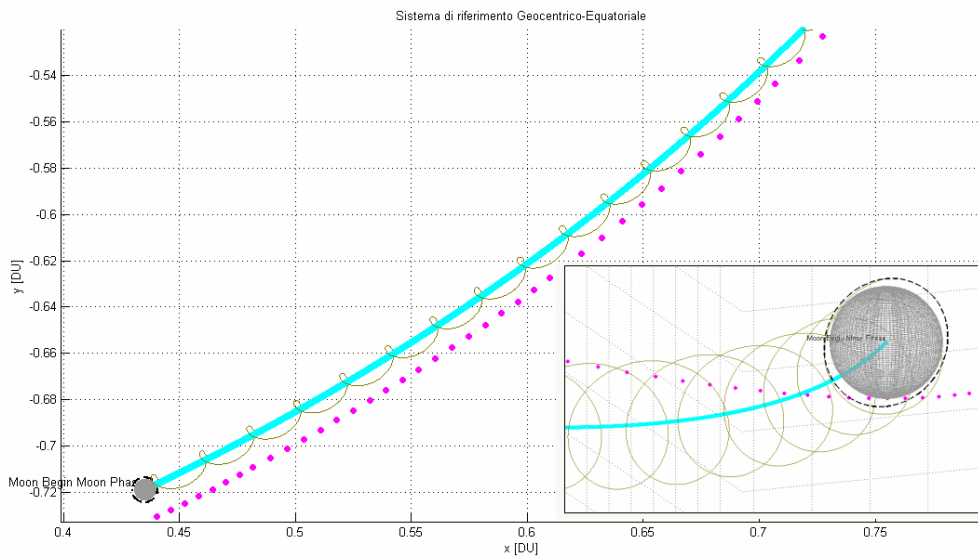


Figura 6.52 – Fuga lunare a bassa spinta in un modello a quattro corpi

CONCLUSIONI E PROSPETTIVE DI SVILUPPO

7.1 Conclusioni

Nel corso del lavoro svolto, il modello ristretto dei tre corpi ed i modelli da questo derivabili, si sono dimostrati validi strumenti per effettuare disegni preliminari di missione. Il comportamento di un corpo, studiato nello spazio deformato dai campi gravitazionali di due corpi di grande massa, sembra, infatti, corrispondere in maniera più accurata, di quanto non faccia un modello kepleriano, al comportamento di corpi reali. Questo approccio offre, inoltre, prospettive per implementare missioni che vanno ben al di là dei limiti imposti dal modello dei *2-corpi*.

La perdita degli elementi orbitali classici viene compensata con l'acquisizione di informazioni su una struttura ordinata dello spazio delle fasi; l'esistenza di orbite periodiche attorno punti che non sono corpi fisici e di superfici che discriminano fra traiettorie in grado di spazzare tutto il piano ed orbite confinate in zone ben precise, diventano strumenti molto potenti per disegni di missione.

Anche nel passaggio a schemi più complessi che prevedono l'influsso di una quarta massa, il modello ristretto dei tre corpi sembra fornire informazioni abbastanza inerenti alla realtà. Basti pensare che missioni progettate interamente nell'ambito di questa approssimazione sono state realizzate realmente e con successo in ambienti condizionati da n influssi gravitazionali.

Mediante i semplici strumenti che, con il supporto teorico di questa trattazione, si sono costruiti, sono state riprodotte missioni esistenti e se ne sono implementate delle nuove che rispondono a diversi vincoli. L'attenzione si è focalizzata su trasferimenti Terra-Luna che fossero più economici di un approccio alla Homann e su trasferimenti verso orbite periodiche attorno ai punti di librazione. Sia spari impulsivi che tratti a spinta continua sono stati presi in considerazione e sono state svolte diverse prove finalizzate a cogliere il comportamento generale della soluzione e la sua sensibilità dai parametri liberi in gioco. La dipendenza dalle condizioni iniziali, in particolare, si è dimostrata alquanto critica; così come le sensibilità all'intensità degli spari ed all'istante in cui fornirli. La richiesta di propellente per trasferimenti verso orbite periodiche attorno ai punti di librazione è dell'ordine di qualche decina di m/s e la richiesta maggiore in termini di Δv è quella necessaria per fuggire dal campo gravitazionale terrestre. Anche per i trasferimenti Terra-Luna, nei quali sembra esserci un certo vantaggio rispetto alle manovre classiche dell'ordine di qualche centinaio di m/s , il modello sembra molto sensibile ai parametri dell'orbita di partenza e di arrivo.

7.2 Sviluppi

Allo stadio attuale il lavoro si è fermato a studi preliminari e la sua naturale evoluzione sembra quella di passare a realizzare traiettorie che soddisfino specifici vincoli di missione e all'ottimizzazione delle traiettorie ottenibili. L'elevata sensibilità della soluzione al valore dei Δv ed alle condizioni iniziali può certamente esser ridotta prevedendo diversi impulsi, manovre di *mid-course corrections* e *station keeping*.

Per quel che concerne la conformazione dello spazio deducibile dal modello, sembra sequenziale il passaggio dalla trattazione principalmente analitica effettuata a metodi numerici di successiva approssimazione. In particolare il calcolo dei manifolds e delle orbite periodiche deve essere realizzato mediante un approccio meno approssimato ed il loro utilizzo dovrebbe fornire traiettorie in maniera più sistematica di quanto non fatto nella presente trattazione.

Si sottolinea, infine, la necessità di utilizzare, per studi di missione che non siano preliminari, strumenti più accurati e certificati.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Jerrod E. Marsden and Shane D. Ross, “*New Methods in Celestial Mechanics and Mission Design*”, BULLETIN (New Series) Of the American Mathematical Society, Vol. 00, No. 0, 2005
- [2] Canalias E., Gomez G. and Marcote M., Masdemont J.J, “*Assessment of Mission Design Including Utilization of Libration Points and Weak Stability Boundaries*”, Final Report, ESTEC Contract No. 18142/04/NL/MV, June 2004
- [3] C. L. Bennett et al, “*The Microwave Anisotropy Probe1 Mission*” , The Astrophysical Journal, Vol. 583, pp. 1–23, January, 2003
- [4] M. W. Lo and S. D. Ross, “*The Lunar L1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond*”, AIAA space Conference, Albuquerque, New Mexico, 2001
- [5] R.H. Battin, “*An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics* “, AIAA, New York, 1987
- [6] Finaly, Freundlich, “*Celestial Mechanics*”, Pergamon Press, New York, 1958
- [7] V. Szebehely, Theory of Orbits, “*The Restricted Problem of Three Bodies*”, Academic Press inc., New York, 1967
- [8] E.A. Belbruno and J.K. Miller, “*Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture* “, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 16, No. 4, pp. 770-775, 1993
- [9] Douglas L. Smith, “*Next Exit 0.5 Million Kilometres*”, Engineering & Science, No. 4, 2002
- [10] S. D. Ross, W. S. Koon, M. W. Lo and J. E. Marsden , “*Design of a multi-moon orbiter*”, 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics

- Meeting. Ponce, Puerto Rico, Paper, No. AAS 03-143, 2003
- [11] Y. P. Petrov, “*Variational Methods in Optimum Control Theory*”, Mathematics in science and engineering, New York academic press, 1968
- [12] M. Kim, “*Periodic orbits for future space-based deep space observations*”, Diplomarbeit, Österreich, 2001
- [13] Shane David Ross, “*Cylindrical Manifolds and Tube Dynamics in the Restricted Three-Body Problem*”, Thesis, California Institute of Technology Pasadena, California, 2004
- [14] G. Gomez, W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, J. Masdemont and S. D. Ross , “*Invariant manifolds, the spatial three-body problem and space mission design*”, Paper No. AAS 01-301. In D. B. Spencer, C. C. Seybold, A. K. Misra and R. J. Lisowski, eds., Advances in the Astronautical Sciences, vol. 109, pages 3–22. Univelt, San Diego, 2001
- [15] Conley, C., ”*Low Energy Transit Orbits in the Restricted Three-Body Problem*“, SIAM Journal Appl. Math., No. 16, pp. 732-746, 1968
- [16] G.G´omez, W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, J. Masdemont and S. D. Ross, “*Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem*”, Institute of physics publishing, Nonlinearity, 2004
- [17] D.W. Dunham, R.W. Farquar, “*Libration Point Missions 1978-2002*”, International Conference on Libration Point Orbits and Applications, Girona, Spain, 2002
- [18] D.L. Richardson, “*A Note on a Lagrangian Formulation for Motion about the Collinear Points*“, Celestial Mechanics, Vol. 22, No. 3, pp. 231-235, 1980
- [19] D.L. Richardson, “*Analytic Construction of Periodic Orbits about the Collinear Points*“, Celestial Mechanics, Vol. 22, No. 3, pp. 241-253, 1980
- [20] R. Thurman and P.A. Worfolk , “*The Geometry of Halo Orbits in the*

Bibliografia

Circular Restricted Three-Body Problem“, Geometry Center Research Report, GCG95, University of Minnesota, 1996

- [21] Divakar Viswanath, “*The Lindstedt–Poincarè Technique as an Algorithm for Computing Periodic Orbits*”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 43, No. 3, pp. 478–495, 2001
- [22] Bernelli-Zazzera F., Topputo F. and Massari M., “*Assessment of Mission Design Including Utilization of Libration Points and Weak Stability Boundaries*”, Final Report, ESTEC Contract No. 18147/04/NL/MV, June 2004
- [23] D.L. Richardson, “*Halo Orbit Formulation for the ISEE-3 Mission*“, Journal of Guidance and Control, Vol. 3, No. 6, pp. 543-548, 1980
- [24] M. Lo, “*The Interplanetary Superhighway and the Origins Program*”, IEEE Space 2002 Conference, Big Sky, MT, March 2002
- [25] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, “*The GENESIS Trajectory and Heteroclinic Connections*”, Advanced Concepts Research Program, the Genesis Mission, and NSF grant KDI/ATM-9873133.
- [26] Michael Dellnitz, Oliver Junge, Martin W. Lo, Jerrold E. Marsden, Kathrin Padberg, Robert Preis, Shane D. Ross and Bianca Thiere , “*Transport of Mars-Crossing Asteroids from the Quasi-Hilda Region*”, Physical review letters, No. 94, 2005
- [27] M. W. Lo, S. D. Ross, “*Low Energy Interplanetary Transfers Using Lagrangian Points*”, Nasa Tech Brief, Vol. 23, No. 11, from JPL new technology report, NPO-20377, 1999
- [28] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, “*Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics* ”, Chaos, Vol. 10, No. 2, pp. 427-469, 2000
- [29] F. Cremaschi, F. Topputo, G. Sangiovanni, M. Vasile, “*Low Thrust Interplanetary Trasfers Through Invariant Manifolds and an Evolutionary Neurocontrol*”, XVIII Congresso nazionale AIDAA, , Volterra, 19-22 settembre 2005

- [30] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, “*Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*”, International Conference on Differential Equations, Berlin, 1999 Edited by B. Fiedler, K. Gröger and J. Sprekels, World Scientific, pp. 1167–1181, 2000
- [31] D. Redfern, C. Campbell, “*The Matlab[®] 5 Handbook*”, Springer-Verlag, New York, 1998
- [32] G. Mengali, “*Meccanica del volo spaziale*”, Edizioni PLUS, Università di Pisa, 2001
- [33] Craig A. Kleuver, “*Optimal Earth-Moon Trajectories Using Combined Chemical-Electric Propulsion*”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol. 20, No. 2, pp. 253-258, March–April 1997
- [34] Craig A. Kleuver, Bion L. Pierson, “*Optimal Low-Thrust Three-Dimensional Earth-Moon Trajectories*”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol. 18, No. 4, pp. 830-837, July–August 1995
- [35] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, “*Constructing a Low Energy Transfer Between Jovian Moons*”, Contemporary Mathematics, Vol. 292, 2000
- [36] W.S. Koon, M. W. Lo, J.E. Marsden and S.D. Ross, “*Constructing a Low Energy Transfer between Jovian Moons*”, Proceedings of the International Conference on Celestial Mechanics, Northwestern University, Chicago, Illinois, 15-19 December, 1999
- [37] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, S. Ross, “*Shoot the Moon*”, AAS/AIAA Astrodynamics Conference, Clear-water, Florida, Paper AAS 00-166, January 2000
- [38] W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, “*Low energy transfer to the Moon*”, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, No. 81, pp. 63-73, 2001
- [39] M. W. Lo, S. D. Ross, “*Low Energy Interplanetary Transfer from Near-Earth to Near-Moon Orbit*”, Nasa Tech Brief, Vol. 26, No. 3,

Bibliografia

from JPL new technology report, NPO-20936, 2002

- [40] Martin W. Lo, Min-Kun J. Chung, “*Lunar Sample Return via the Interplanetary Superhighway*”, Navigation and Mission Design Section, Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology 4800 Oak Grove Dr., 301/140L Pasadena, CA 91109
- [41] D. A. Vallado, “*Fundamentals of Astrodynamics and Application*”, Mc Grow-Hill, 1997
- [42] Giovanni Mengali and Alessandro A. Quarta, “*Optimization of Biimpulsive Trajectories in the Earth–Moon Restricted Three-Body System*”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol. 28, No. 2, March–April 2005
- [43] Roby S. Wilson, Kathleen C. Howell, “*Trajectory Design in the Sun–Earth–Moon System Using Lunar Gravity Assists*”, Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol. 35, No. 2, pp. 191-198, March–April 1998
- [44] R.W. Farquhar, D.P. Muhonen and D.L. Richardson, “*Mission Design for a Halo Orbiter of the Earth*”, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 14, No. 3, pp. 170-177, 1977
- [45] M. Limon et al, “*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP): Explanatory Supplement*”, The WMAP Science Working Group, (Greenbelt, MD: NASA/GSFC), February, 2003
- [46] R. Broucke, “*Travelling Between the Lagrangian Points and the Moon*”, Journal of Guidance and Control, Vol. 2, No. 4, pp. 257-263, 1979
- [47] The Boeing Company, “*Delta II Payload Planners Guide*”, 2000

PRESENTAZIONI E SITI INTERNET

W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, “*Comets, Nonlinear Dynamics and Space Mission Design*”, PowerPoint presentation, <http://www.cds.caltech.edu/~koon/presentations/>

W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, “*Invariant Manifolds, 3-Body Problem & Petit Grand Tour of Jovian Moons*”, PowerPoint presentation, <http://www.ima.umn.edu/talks/workshops/>

David Folta, “*Libration Orbit Seminar*”, Code 595, Goddard Space Flight Center Mission Engineering and Systems Analysis, PowerPoint presentation, October, 2003, http://fdab.gsfc.nasa.gov/live/Home/Pub&Ev_Conferences_Symposiums.html

Emily Avers, “*Space Mission Scrapbook*”, S105, PowerPoint presentation, March, 2003, <http://www.astro.indiana.edu/>

http://www.nasa.gov/mission_pages/genesis/
<http://www.cds.caltech.edu/>
<http://www.astronautix.com/>
<http://www.johnstonsarchive.net/>
<http://www.map.gsfc.nasa.gov/>
<http://www.math.ucr.edu/home/baez/lagrange.html>
<http://www.ieec.fcr.es/libpoint/main.html>
<http://www.scienceworld.wolfram.com/>
<http://www.newsreader.mathworks.com/>
<http://www.esa.int/>
http://www.it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale
<http://www.mathworld.wolfram.com/>

APPENDICI

APPENDICE

Cenni sulla Weak Stability Boundary

Il classico approccio al disegno di un trasferimento Terra-Luna è una manovra alla Homann, un procedimento definibile solamente in un modello a *2-corpi*. Tale metodologia, tuttavia, presenta una velocità di eccesso iperbolico relativa alla Luna che richiede un Δv per ottenere un'orbita di cattura.

Studiando, invece, il problema da un punto di vista non kepleriano, è possibile ottenere un trasferimento più economico, in termini di Δv , poiché esso viene balisticamente catturato dalla Luna; ovvero, compie almeno un giro attorno al nostro satellite e con uno sparo di piccola entità tale cattura instabile può essere stabilizzata. Il tempo necessario al trasferimento, tuttavia, è molto maggiore rispetto a quello richiesto per una traiettoria classica.

L'orbita è disegnata utilizzando l'effetto perturbativo di Terra-Sole-Luna sullo *spacecraft*; ossia utilizzando quelle regioni dello spazio in cui l'influsso su m dei tre corpi tende a bilanciarsi: **zone a stabilità marginale (WSB)**^[8].

Le zone a stabilità marginale, per un corpo che si muove in uno spazio delle fasi esadimensionale, sono pentadimensionali ed in esse le forze che m sente, dovute al corpo principale e ad altre perturbazioni, sono quasi uguali; ciò da luogo ad una dinamica fortemente non lineare. La WSB è stata definita come quella zona in cui può avvenire la cattura del corpo o la fuga, a parità di posizione, con una piccola differenza di velocità. E' proprio questo il concetto che si intende utilizzare per ottenere un trasferimento più conveniente di quello alla Homann fra Terra e Luna. La WSB può anche esser vista come una generalizzazione del concetto di sfera di influenza a problemi a più corpi.

L'idea è quella di partire dalla Terra e raggiungere la zona in cui l'attrazione gravitazionale della Terra e del Sole tendono a bilanciarsi, quindi all'incirca ad una distanza di $1.5e^6$ km dalla terra (WSB_E). A causa dell'estrema sensibilità del moto in questa regione un piccolo cambiamento

delle condizioni iniziali può dar luogo ad un'orbita di fuga dal sistema Terra-Luna o ad un'orbita che venga catturata balisticamente dalla Luna. Si intende utilizzare un piccolo valore di Δv per raggiungere la WSB_M , determinata dal bilanciarsi delle forze gravitazionali fra Terra e Luna.

Si noti l'idea, comune ad un tipo di trasferimento biparabolico, di andare ben oltre il sistema Terra-Luna, imporre "all'infinito" una piccola correzione e, dunque, ritornare verso la Luna. "L'infinito" è, in questo caso, una distanza grande, ma finita, dai due corpi in cui la dinamica non lineare può dar luogo al trasferimento voluto con un piccolo quantitativo di energia.

L'utilizzo della WSB_M , inoltre, elimina l'eccesso iperbolico rispetto alla superficie lunare ed una cattura, anche se instabile, non richiede propellente per essere ottenuta.

Un paragone fra diversi tipi di trasferimenti Terra-Luna mostra i vantaggi, in termini di richiesta di propellente, di un trasferimento che utilizzi la WSB . Partendo da un'orbita circolare attorno alla terra di 167 km , con un Δv di 3.143 km/s per raggiungere un'orbita lunare di 100 km di quota; si considera, inoltre un Δv di 0.648 km/s per ottenere la circolarizzazione dell'orbita di cattura.

| Trasferimento | ΔV_1 km/s | $\Delta V_{midcourse}$ km/s | ΔV_c km/s | $\Delta V_{tot}+0.648$ km/s | % rispetto Homann |
|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|--------------------------|
| Weak Stability Boundary | 0.018 | 0.029 | 0 | 0.695 | -18 |
| Bi Parabolic | 0.089 | 0 | 0.073 | 0.810 | -4 |
| Homann | 0 | 0 | 0.20 | 0.848 | 0 |
| Bi Elliptic | 0.018 | 0.287 | 0.052 | 1.005 | +19 |

Tabella 1 (ΔV richiesti per diversi trasferimenti Terra-Luna)

Il ΔV_1 è calcolato come differenza fra la velocità necessaria al trasferimento e quella circolare competente ad un'orbita di quota 167 km . Il $\Delta V_{midcourse}$ è quello necessario per le correzioni durante il trasferimento, mentre il ΔV_c è l'entità dello sparo necessario per l'inserzione nell'orbita circolare lunare, quindi:

$$\Delta V_1 = V_{iniziale} - V_{circolare}$$

$$\Delta V_c = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r}} - \sqrt{\frac{2\mu R}{(R+r)r}} \quad (0.1)$$

con r ed R sono il periasse e l'apoasse dell'orbita ellittica di cattura balistica attorno alla Luna.

Questo genere di trasferimento richiede *3-5 mesi* e presenta un risparmio del *18%* in termini di Δv rispetto ad una manovra alla Homann, del *14%* e del *37%* rispetto ad un trasferimento biparabolico e biellittico; in particolare si ha un notevole vantaggio nel ΔV_c necessario.

Si noti come lo svantaggio principale del trasferimento biellittico sia nel $\Delta V_{midcourse}$ richiesto; per questo trasferimento, al fine di fare un paragone con la WSB, l'apoasse considerato è dell'ordine di $1.5e^6$ km.

L'aspetto di un classico trasferimento Terra-Luna ottenuto utilizzando una manovra alla Homann ed una basata sulla WSB è riportato in figura.

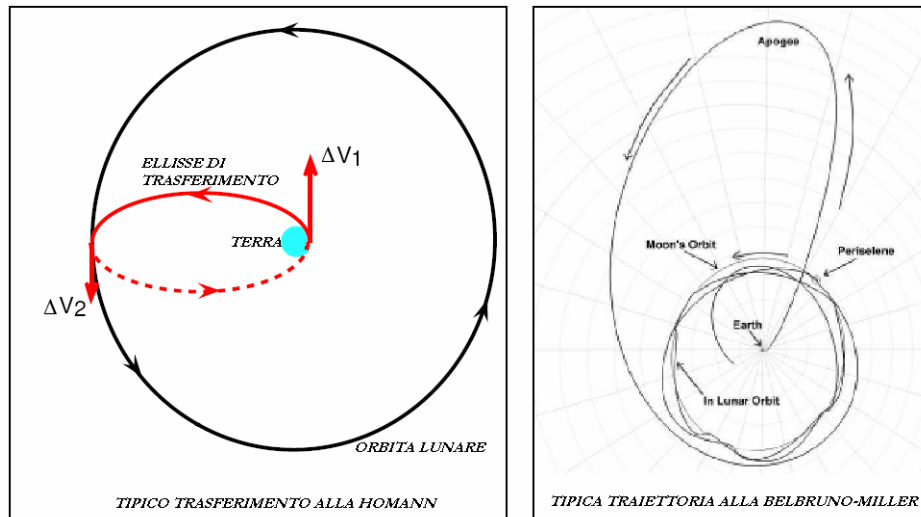


Figura A.1 (Paragone fra trasferimenti Terra-Luna alla Homann e WSB)

APPENDICE B

I polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre nascono come particolari soluzioni dell'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \quad (0.1)$$

Introducendo coordinate sferiche r, θ, φ , legate alle coordinate cartesiane dalle classiche relazioni:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (0.2)$$

Una soluzione generale dell'equazione di Laplace (0.1) può esser scritta come:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_0^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_0 \cdot \cos \theta}} = \frac{1}{r_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r_1^2} - \frac{2 \cdot r_0}{r_1} \cos \theta}} \quad (0.3)$$

$$\text{In cui: } \vec{r}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \quad \vec{r}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{Bmatrix} \quad (0.4)$$

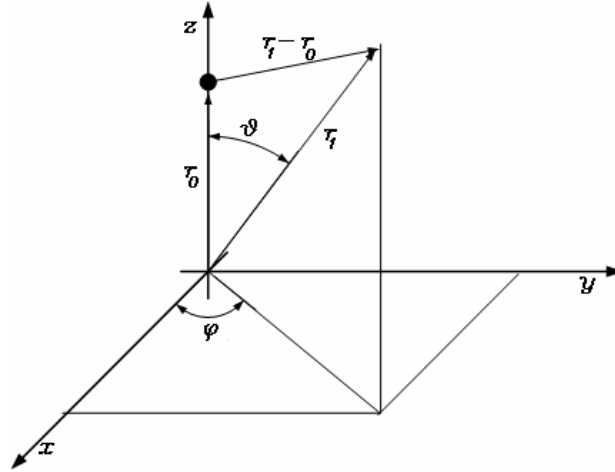


Figura B.2 (Geometria del problema di Laplace)

Tale soluzione è assialsimmetrica, essendo indipendente dall'angolo azimutale φ ; se il termine $\cos\theta$ si sostituisce con s ed il termine $\frac{r_0}{r_1} (< 1)$ con t la soluzione può essere espressa come uno sviluppo in serie di t con i coefficienti funzione di s :

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2 \cdot t \cdot s}} = \frac{1}{r_1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(s) \quad (0.5)$$

I coefficienti P_l di tale espansione in serie sono appunto i polinomi di Legendre di grado l . Per generarli è sufficiente applicare la funzione che definisce tali coefficienti; ovvero:

$$g(s, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2 \cdot t \cdot s}} = \frac{1}{r_1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(s) \quad (0.6)$$

Possono, inoltre essere esplicitamente forniti dalla formula di Rodrigues:

$$P_l(s) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^{(l)}}{ds^{(l)}} (s^2 - 1)^l \quad \text{con } l = 1, 2, \dots, \infty \quad (0.7)$$

Una formula che fornisce, inoltre, in maniera ricorsiva questi polinomi, valida per $l \geq 2$, è:

Appendici

$$P_l(s) = \left(\frac{2l-1}{l} s \right) P_{l-1}(s) - \left(\frac{l-1}{l} \right) P_{l-2}(s) \quad (0.8)$$

Si osservi come il polinomio di Legendere di ordine 0 ($l=0$) sia nullo, mentre quello di ordine 1 ($l=1$) sia esattamente uguale all'argomento per ogni valore di questo.

Nel caso in esame l'argomento dei polinomi è x/ρ .

APPENDICE C

Costanti dello sviluppo analitico di Richardson

Si riportano di seguito le espressioni delle costanti che compaiono nello sviluppo dell'approssimazione analitica di Richardson.

$$d_1 = 3 \cdot \nu^2 \cdot (k \cdot (6 \cdot \nu^2 - 1) - 2 \cdot \nu) / k;$$

$$d_2 = 8 \cdot \nu^2 \cdot (k \cdot (11 \cdot \nu^2 - 1) - 2 \cdot \nu) / k;$$

$$a_{21} = 3 \cdot c_3 \cdot (k^2 - 2) / (4 \cdot (1 + 2 \cdot c_2));$$

$$a_{22} = 3 \cdot c_3 / (4 \cdot (1 + 2 \cdot c_2));$$

$$a_{23} = -(3 \cdot c_3 \cdot \nu) \cdot (3 \cdot k^3 \cdot \nu - 6 \cdot k \cdot (k - \nu) + 4) / (4 \cdot k \cdot d_1);$$

$$a_{24} = -(3 \cdot c_3 \cdot \nu) \cdot (2 + 3 \cdot k \cdot \nu) / (4 \cdot k \cdot d_1);$$

$$d_{21} = -c_3 / (2 \cdot \nu^2);$$

$$d_{31} = 3 \cdot (4 \cdot c_3 \cdot a_{24} + c_4) / (64 \cdot \nu^2);$$

$$d_{32} = 3 \cdot (4 \cdot c_3 \cdot (a_{23} - d_{21}) + c_4 \cdot (4 + k^2)) / (64 \cdot \nu^2);$$

$$b_{21} = -3 \cdot c_3 \cdot \nu \cdot (3 \cdot k \cdot \nu - 4) / (2 \cdot d_1);$$

$$b_{22} = 3 \cdot c_3 \cdot \nu / d_1;$$

$$b_{31} = (3 / (8 \cdot d_2)) \cdot (8 \cdot \nu \cdot (3 \cdot c_3 \cdot (k \cdot b_{21} - 2 \cdot a_{23}) - c_4 \cdot (2 + 3 \cdot k^2)) + (9 \cdot \nu^2 + 1 + 2 \cdot c_2) \cdot (4 \cdot c_3 \cdot (k \cdot a_{23} - b_{21}) + k \cdot c_4 \cdot (4 + k^2)));$$

$$b_{32} = (1 / d_2) \cdot (9 \cdot \nu \cdot (c_3 \cdot (k \cdot b_{22} + d_{21} - 2 \cdot a_{24}) - c_4) + (3 / 8) \cdot (9 \cdot \nu^2 + 1 + 2 \cdot c_2) \cdot (4 \cdot c_3 \cdot (k \cdot a_{24} - b_{22}) + k \cdot c_4));$$

$$a_{31} = -9 \cdot \nu \cdot (4 \cdot c_3 \cdot (k \cdot a_{23} - b_{21}) + k \cdot c_4 \cdot (4 + k^2)) / (4 \cdot d_2) +$$

$$+ ((9 \cdot \nu^2 + 1 - c_2) / (2 \cdot d_2)) \cdot (3 \cdot c_3 \cdot (2 \cdot a_{23} - k \cdot b_{21}) + c_4 \cdot (2 + 3 \cdot k^2));$$

$$a_{32} = -(1/d_2) \cdot ((9 \cdot \nu/4) \cdot (4 \cdot c_3 \cdot (k \cdot a_{24} - b_{22}) + k \cdot c_4) +$$

$$+ (3/2) \cdot (9 \cdot \nu^2 + 1 - c_2) \cdot (c_3 \cdot (k \cdot b_{22} + d_{21} - 2 \cdot a_{24}) - c_4));$$

$$a_1 = 3/2 \cdot c_3 \cdot (2 \cdot a_{21} + a_{23} + 5 \cdot d_{21}) - 3/8 \cdot c_4 \cdot (12 - k^2);$$

$$a_2 = 3/2 \cdot c_3 \cdot (a_{24} - 2 \cdot a_{22}) + 9/8 \cdot c_4;$$

$$s_1 = (3/2 \cdot c_3 \cdot (2 \cdot a_{21} \cdot (k^2 - 2) - a_{23} \cdot (k^2 + 2) - 2 \cdot k \cdot b_{21}) -$$

$$+ 3/8 \cdot c_4 \cdot (3 \cdot k^4 - 8 \cdot k^2 + 8)) / (2 \cdot \nu \cdot (\nu \cdot (1 + k^2) - 2 \cdot k));$$

$$s_2 = (3/2 \cdot c_3 \cdot (2 \cdot a_{22} \cdot (k^2 - 2) + a_{24} \cdot (k^2 + 2) + 2 \cdot k \cdot b_{22} + 5 \cdot d_{21}) +$$

$$+ 3/8 \cdot c_4 \cdot (12 - k^2)) / (2 \cdot \nu \cdot (\nu \cdot (1 + k^2) - 2 \cdot k));$$

$$l_1 = a_1 + 2 \cdot \nu^2 \cdot s_1;$$

$$l_2 = a_2 + 2 \cdot \nu^2 \cdot s_2;$$

$$b_{33} = -k \cdot (12 \cdot c_3 \cdot (b_{21} - 2 \cdot k \cdot a_{21} + k \cdot a_{23}) + 3 \cdot c_4 \cdot k \cdot (3 \cdot k^2 - 4) + 16 \cdot \nu \cdot s_1 \cdot (\nu \cdot k - 1)) / (16 \cdot \nu);$$

$$b_{34} = k \cdot (12 \cdot c_3 \cdot k \cdot a_{22} - 3 \cdot c_4 \cdot k - 8 \cdot s_2 \cdot \nu \cdot (\nu \cdot k - 1)) / (8 \cdot \nu);$$

$$b_{35} = -k \cdot (12 \cdot c_3 \cdot (b_{22} + k \cdot a_{24}) + 3 \cdot c_4 \cdot k) / (16 \cdot \nu);$$

Si fa notare che nel lavoro di Richardson esiste una imprecisione nella rimozione dei termini secolari nelle equazioni del terzo ordine. Ciò si ripercuote sulle equazioni e sulle soluzioni analitiche per orbite Halo.

L'errore essenzialmente si riscontra nell'equazione della y che non prevede termini moltiplicativi per l'ampiezza di $\sin(\tau_1)$ di terzo ordine, come invece richiede l'approssimazione.

Mancano, in effetti, le costanti b_{33} , b_{34} , b_{35} .

Tale osservazione può esser facilmente verificata confrontando con i riferimenti [12] e [20] con [19].

Ricordando che la costante c_2 è la costante c ricavabile dalle (1.48), espressioni ricorsive per il calcolo delle c_i sono:

Appendici

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\gamma_L^3} \cdot \left[(\pm 1)^n + (-1)^n \cdot \frac{(1-\nu)\gamma_L^{n+1}}{(1 \mp \gamma_L)^{n+1}} \right] \quad \text{con } L = L_1 \text{ o } L = L_2 \\ c_n &= \frac{1}{\gamma_L^3} \cdot \left[1 - \mu + \frac{\mu \cdot \gamma_L^{n+1}}{(1 + \gamma_L)^{n+1}} \right] \quad \text{con } L = L_3 \end{aligned} \tag{0.1}$$

APPENDICE D

Le effemeridi

Per la determinazione dell'esatta posizione dei corpi celesti sono disponibili presso il Jet Propulsion Laboratory delle espressioni molto precise delle effemeridi.

Nello sviluppo di algoritmi matematici, tuttavia, è più conveniente inserire una serie di espressioni che sono più semplici e numericamente implementabili

Per l'utilizzo delle espressioni è innanzi tutto necessario derivare la *data Giuliana* (J.D.) relativa alla data d'inizio missione^[32]. La data Giuliana utilizza un sistema di conteggio del tempo basato sui giorni invece che sugli anni. Lo zero della J.D. si pone a mezzogiorno del 4713 a.c.. I numeri che così determinano una data, al periodo attuale, sono molto grandi; per evitare di dover lavorare con essi si utilizza spesso la *data Giuliana modificata* (M.J.D.)

$$M.J.D. = J.D. - 2400000.5 \quad (3.1)$$

Si osservi che mentre la data Giuliana comincia a mezzogiorno la data giuliana modificata comincia a mezzanotte. Il legame fra la data civile e quella Giuliana è il seguente:

$$M.J.D. = B + DY + \text{int}\{30.6001 \cdot (MO + 12 \cdot D + 1)\} + \text{int}\{365.25 \cdot (YR - D)\} - 679.006$$

$$\text{con } \begin{cases} YR = \text{anno} \\ MO = \text{mese} \quad (\text{Gennaio} = 1, \text{Febbraio} = 2, \dots) \\ DY = \text{giorno} \\ D = \begin{cases} 0 & \text{se } MO \geq 3 \\ 1 & \text{se } MO < 3 \end{cases} \\ A = \text{int}\left\{YR - \frac{D}{100}\right\} \\ B = 2 + \text{int}\left\{\frac{A}{4}\right\} - A \end{cases} \quad (3.2)$$

in cui *int* rappresenta la parte intera.

Imponendo la data di inizio missione la conversione in J.D. è ottenibile applicando le equazioni precedenti; al trascorrere del tempo di integrazione, tuttavia, la posizione di questi corpi celesti deve esser fatta variare. Alla J.D. di partenza va quindi sommato l'intervallo di tempo trascorso sempre convertito in data Giuliana. In altre parole, se *t* è il tempo trascorso dall'inizio dell'integrazione ($t_0=0$), essendo l'integrazione sempre svolta in unità adimensionali:

$$DT_{gg} = \frac{t \cdot \text{TimeUnits}}{3600 \cdot 24} \quad (3.3)$$

Questa variazione di tempo misurata in giorni va sommata alla $JD_{iniziale}$ e dunque, convertita in **secoli Giuliani**, che sono il parametro libero in ingrasso nelle equazioni delle effemeridi, mediante:

$$T_{eff} = \frac{JD_{actual} - 2451545.0}{36525} \quad \text{con } JD_{actual} = JD_{iniziale} + DT_{gg} \quad (3.4)$$

La posizione del Sole e della Luna in un sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale è, infine ricavabile dalle seguenti espressioni che hanno un'accuratezza di *0.01 deg* e sono valide dal 1950 al 2050, a causa del troncamento imposto ai diversi termini^[41].

Appendici

Posizione sole (sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale)

$$\begin{aligned}
 \lambda_S &= 280.4606184 + 36000.77005361 \cdot T_{\text{eff}}; & \text{rad} \\
 \nu_{\text{Media}_S} &= 357.5277232 + 35999.05034 \cdot T_{\text{eff}}; & \text{rad} \\
 \lambda_{\text{ECLIP}_S} &= \lambda_S + 1.9114666471 \cdot \sin(\nu_{\text{Media}_S}) + 0.019994643 \cdot \sin(2 \cdot \nu_{\text{Media}_S}); & \text{rad} \\
 \phi_{\text{ECLIP}_S} &= 0; & \text{rad} \\
 \varepsilon &= 23.439291 - 0.0130042 \cdot T_{\text{eff}}; & \text{rad} \\
 r_S &= 1.000140612 - 0.016708617 \cdot \cos(\nu_{\text{Media}_S}) - 0.000139589 \cdot \cos(2 \cdot \nu_{\text{Media}_S}); & \text{AU} \\
 x_S &= r_S \cdot \cos(\lambda_{\text{ECLIP}_S}) \cdot \text{AU}; & \text{DU} \\
 y_S &= r_S \cdot \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\lambda_{\text{ECLIP}_S}) \cdot \text{AU}; & \text{DU} \\
 z_S &= r_S \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\lambda_{\text{ECLIP}_S}) \cdot \text{AU}; & \text{DU}
 \end{aligned}$$

Posizione Luna (sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale)

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\text{ECLIP}_M} &= 218.32 + 481267.8813 \cdot T_{\text{eff}} + 6.29 \cdot \sin(134.9 + 477198.85 \cdot T_{\text{eff}}) - 1.27 \cdot \sin(259.2 - 413335.38 \cdot T_{\text{eff}}) + \\
 &+ 0.66 \cdot \sin(235.7 + 890534.23 \cdot T_{\text{eff}}) + 0.21 \cdot \sin(269.9 + 954397.70 \cdot T_{\text{eff}}) - 0.19 \cdot \sin(357.5 + 35999.05 \cdot T_{\text{eff}}) + \\
 &- 0.11 \cdot \sin(186.6 + 966404.05 \cdot T_{\text{eff}}); & \text{rad} \\
 \phi_{\text{ECLIP}_M} &= 5.13 \cdot \sin(93.3 + 483202.03 \cdot T_{\text{eff}}) + 0.28 \cdot \sin(228.2 + 960400.87 \cdot T_{\text{eff}}) + \\
 &- 0.28 \cdot \sin(318.3 + 6003.18 \cdot T_{\text{eff}}) - 0.17 \cdot \sin(217.6 - 407332.20 \cdot T_{\text{eff}}); & \text{rad} \\
 \chi_M &= 0.9508 + 0.0518 \cdot \cos(134.9 + 477198.85 \cdot T_{\text{eff}}) + 0.0095 \cdot \cos(259.2 - 413335.38 \cdot T_{\text{eff}}) + \\
 &+ 0.0078 \cdot \cos(235.7 + 890534.23 \cdot T_{\text{eff}}) + 0.0028 \cdot \cos(269.9 + 954397.70 \cdot T_{\text{eff}}); & \text{rad} \\
 r_M &= \frac{1}{\sin(\chi_M)}; & \text{Earth Radii} \\
 x_M &= r_M \cdot \cos(\phi_{\text{ECLIP}_M}) \cdot \cos(\lambda_{\text{ECLIP}_M}) \cdot \text{ER}; & \text{DU} \\
 y_M &= r_M \cdot (\cos(\varepsilon) \cdot \cos(\phi_{\text{ECLIP}_M}) \cdot \sin(\lambda_{\text{ECLIP}_M}) - \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\phi_{\text{ECLIP}_M})) \cdot \text{ER}; & \text{DU} \\
 z_M &= r_M \cdot (\sin(\varepsilon) \cdot \cos(\phi_{\text{ECLIP}_M}) \cdot \sin(\lambda_{\text{ECLIP}_M}) + \cos(\varepsilon) \cdot \sin(\phi_{\text{ECLIP}_M})) \cdot \text{ER}; & \text{DU}
 \end{aligned}$$

(3.5)

Nelle precedenti si è indicato con λ , la longitudine, φ , l'inclinazione dall'eclittica (infatti quella relativa al Sole è nulla), ν l'anomalia media del corpo sull'eclittica e con ε l'inclinazione dell'eclittica rispetto al piano equatoriale (essendo il sistema di riferimento rispetto a questo definito). Da queste si ricava la distanza del corpo dalla Terra e quindi le sue componenti. Si osservi come, nell'ottica di un utilizzo in un sistema di equazioni adimensionalizzate, le distanze siano state tutte ridotte a Distance Units (è utilizzabile come DU, e di conseguenza come Mass Units e Time Units, quelle definibili dal sistema Terra-Sole o quelle del sistema Terra-Luna).

La Luna compie un moto che è molto più irregolare di quello del Sole e le espressioni che ne descrivono la posizione coinvolgono centinaia di termini, pertanto l'accuratezza delle precedenti per il calcolo di (x_M, y_M, z_M) è leggermente minore di quella relativa a (x_S, y_S, z_S) .

Per dare un'idea di come il moto dei due corpi si presenti le loro posizioni, calcolate mediante il procedimento descritto, sono riportate nelle due immagini successive.

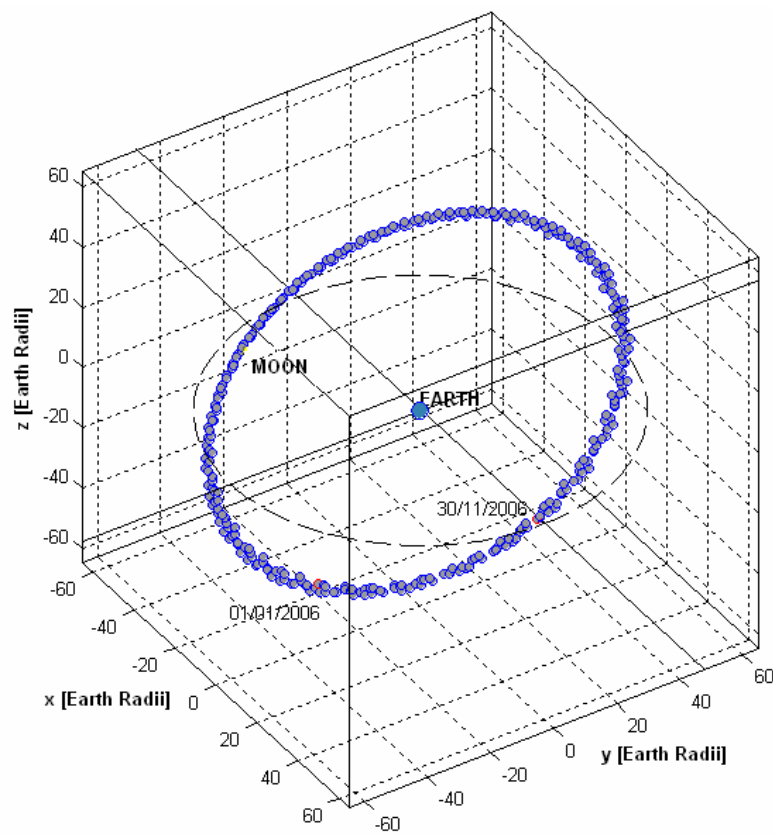


Figura D.3 (Posizione Luna calcolata mediante le effemeridi dal 01/01/2006 al 30/11/2006)

Appendici

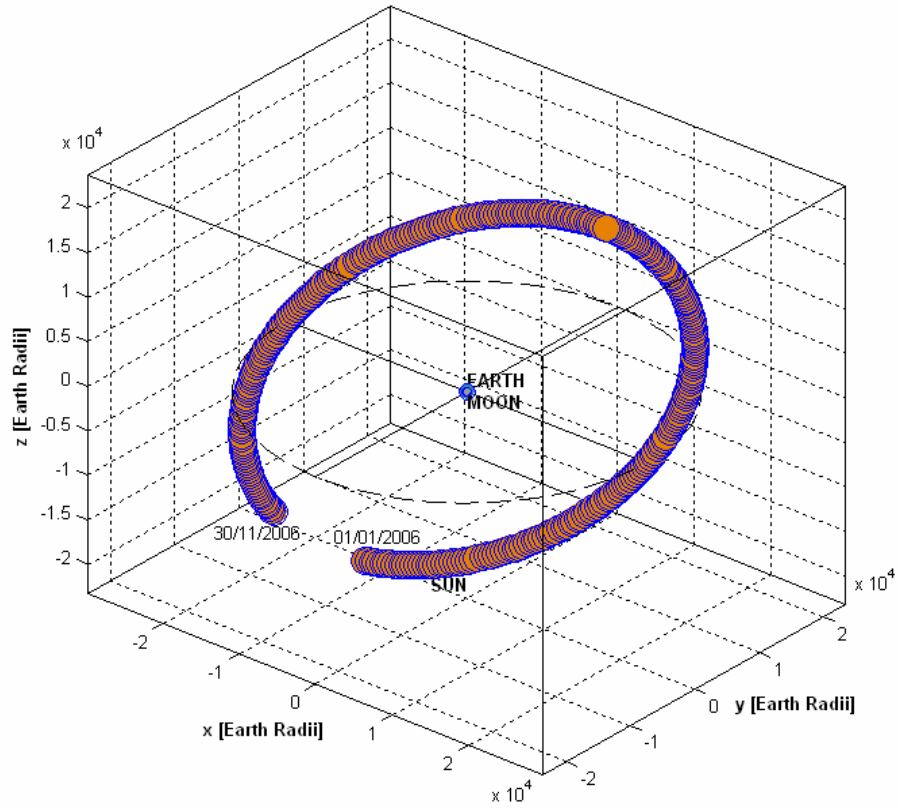


Figura D.4 (Posizione Sole calcolata mediante le effemeridi dal 01/01/2006 al 30/11/2006)

Nota sull'energia C_3

Le prestazioni di un lanciatore sono spesso misurate in termini dell'energia che esso fornisce al *payload* dopo il distacco dell'ultimo stadio; questa energia è determinante per l'esito della missione.

Una misura di questa energia è la costante C_3 . Essa può essere computata come:

$$c_3 = -\frac{\mu}{a} = v_\infty^2 \tag{0.1}$$

E' necessaria una C_3 di $0.0 \text{ km}^2/\text{s}^2$ per fuggire dal sistema Terra-Luna, di $2.0 \text{ km}^2/\text{s}^2$ per raggiungere la Luna e di $0.6 \text{ km}^2/\text{s}^2$ per ottenere un trasferimento diretto.

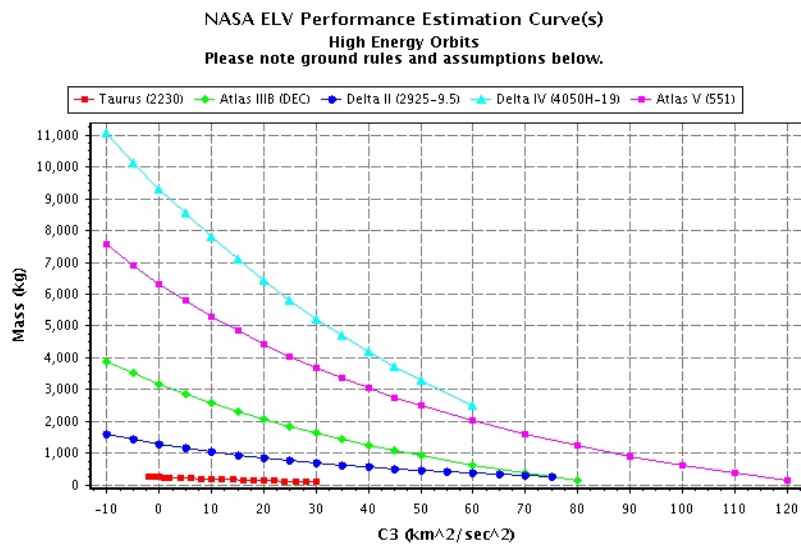
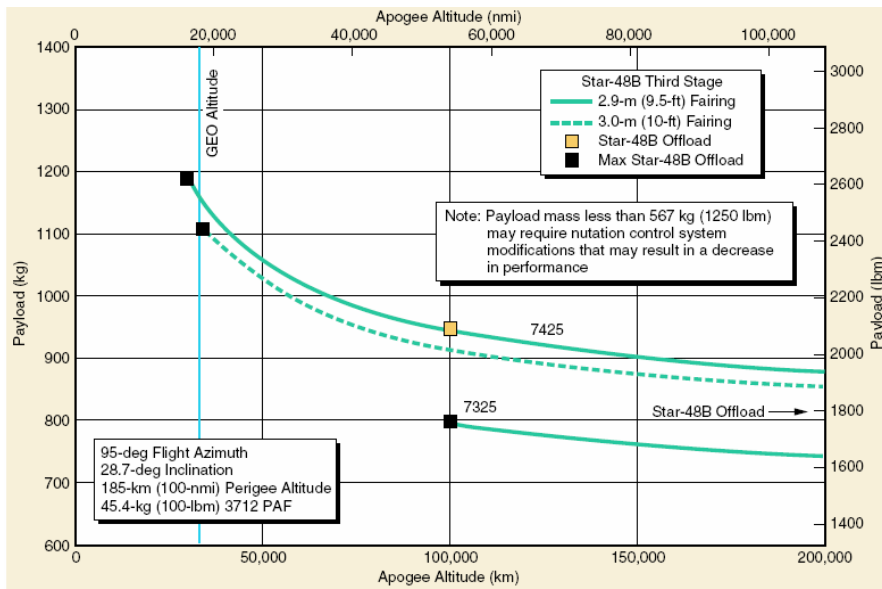
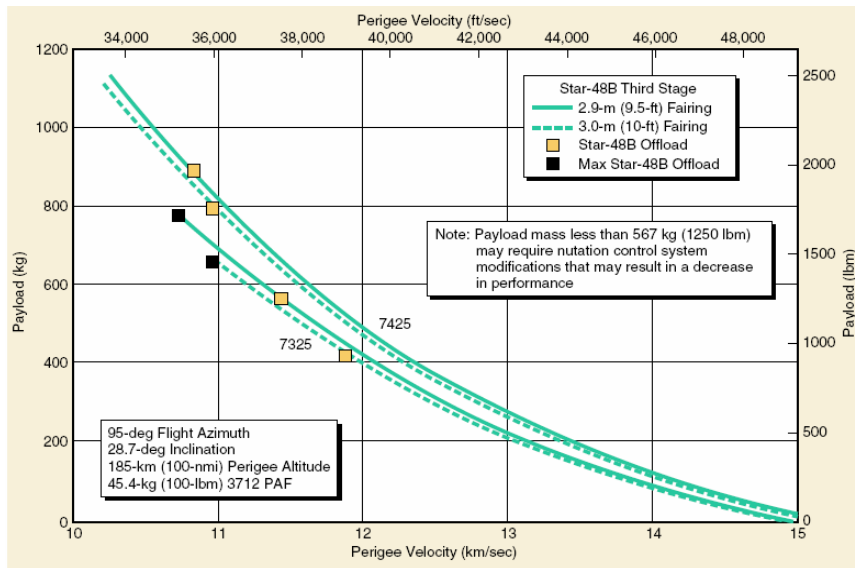


Figura E.1 – Energie c_3 per alcuni lanciatori

Il lanciato re utilizzato per il lancio della missione WMAP fu un DELTA II 7425; le sue caratteristiche, che determinano quindi l'evolversi della missione, sono di seguito riportate per inclinazioni di immissione pari a 28.7 deg [47].



Appendici

