

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA**



**Dottorato di Ricerca**

**Veicoli Terrestri e Sistemi di Trasporto**

Tesi

**Analisi del comportamento dinamico di veicoli dotati  
di differenziale**

Candidato

**Tito Amato**

Tutor:

**Prof. Ing. Massimo Guiggiani**

**Ing. Francesco Frendo**



# Indice

<b>1</b>	<b>Comportamento del pneumatico</b> _____	<b>4</b>
1.1	Cinematica	4
1.2	Il modello "a spazzola" ( <i>Brush Model</i> )	10
1.3	Comportamento transitorio	19
1.4	Formule empiriche (Magic Formula)	20
<b>2</b>	<b>Comportamento direzionale</b> _____	<b>23</b>
2.1	Ipotesi semplificative	23
2.2	Grandezze di riferimento	24
2.3	Equazioni di congruenza	26
2.4	Equazioni di equilibrio	29
2.4.1	Calcolo delle accelerazioni	29
2.4.2	Forze e momenti	30
2.5	Equazioni costitutive (modello di pneumatico)	34
2.6	Caratteristica effettiva dell'assale	35
2.7	Modello monotraccia di autoveicolo	40
2.7.1	Comportamento a regime	43
2.7.2	Comportamento transitorio	46
2.7.3	Comportamento in frequenza	53
2.7.4	Lunghezza di rilassamento equivalente dell'assale	57
2.7.5	Esempio numerico	58
<b>3</b>	<b>Tipologie di differenziali</b> _____	<b>63</b>
3.1	Assale rigido	63
3.2	Differenziale libero o ordinario	64
3.3	Differenziale precaricato	70
3.4	Differenziale autobloccante ZF	72
3.5	Differenziale autobloccante Torsen	74
3.6	Giunto viscoso	78
<b>4</b>	<b>Veicolo dotato di differenziale bloccato</b> _____	<b>82</b>
4.1	Ipotesi semplificative	82
4.2	Equazioni di congruenza: scorrimenti teorici	82

4.2	Equazioni costitutive (modello di pneumatico)	87
4.4	Equazioni di equilibrio	88
4.4.1	Calcolo delle accelerazioni	88
4.4.2	Forze e momenti	88
4.5	Modello di veicolo con differenziale bloccato	93
4.5.1	Comportamento a regime	96
4.5.1.1	Slow Ramp Steer	102
4.5.1.2	Steering Pad	103
4.5.2	Comportamento transitorio	104
4.5.3	Esempio numerico	108
<b>5</b>	<b>Veicolo dotato di differenziale generico</b>	<b>117</b>
5.1	Ipotesi semplificative	118
5.2	Revisione delle equazioni di congruenza	119
5.3	Equazioni costitutive (modello di pneumatico)	121
5.4	Equazioni di equilibrio	123
5.4.1	Equilibrio del veicolo	123
5.4.2	Equilibrio della driveline	123
5.5	Modello di autoveicolo con differenziale generico	126
	<b>Conclusioni</b>	<b>128</b>
	<b>Elenco dei principali simboli</b>	<b>131</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>137</b>

## Prefazione

La dinamica del veicolo è quel ramo della scienza applicata che studia il comportamento di autoveicolo. Questo ultimo comprende numerosi aspetti tra cui i principali sono: il comfort, ossia la capacità del veicolo di filtrare le eccitazioni prevalentemente verticali dovute alle asperità stradali; la direzionalità o guidabilità, ossia la capacità del veicolo di seguire una determinata traiettoria; la stabilità, ossia la capacità del veicolo di mantenere la traiettoria impostata anche in presenza di disturbi esterni; la motricità, ossia la capacità del veicolo di tradurre la coppia motrice in accelerazione longitudinale, ecc . . .

Nell'ultimo decennio, si è assistito alla progressiva introduzione di sistemi "attivi" o meglio sistemi "meccatronici" con lo scopo di migliorare le prestazioni in particolari aspetti del comportamento del veicolo. Ad esempio il sistema anti-bloccaggio ABS (Anti-lock Brake System), che è divenuto obbligatorio per le autovetture immatricolate in Europa, evita il bloccaggio delle ruote durante le manovre di frenata di emergenza o di frenata su bassa aderenza garantendo la direzionalità del veicolo. Invece, nell'ambito del controllo dei moti di cassa, sono stati introdotti il controllo elettronico della rigidità antirollio (Active Roll Control) e dello smorzamento degli ammortizzatori (Continuous Damping Control). Per incrementare la stabilità del veicolo, soprattutto durante bruschi transitori, è stato introdotto l'ESP (Electronic Stability Program) che agendo sull'impianto frenante genera dei momenti di imbardata che riducono un comportamento eccessivamente sotto - sovrasterzante del veicolo coadiuvando così un normale guidatore nelle manovre di emergenza. Quest'ultima funzione può essere ottenuta anche attraverso un controllo della coppia motrice agente sulla ruota ossia attraverso differenziali attivi o controllati. In questo caso si potrebbe utilizzare lo stesso dispositivo anche per migliorare la motricità del veicolo.

Per lo studio di questi aspetti sono stati via via sviluppati metodologie e strumenti di indagine sia in ambito sperimentale sia, in seguito allo sviluppo dell'hardware informatico, in ambito CAE (Computer Aided Engineering). Tuttavia, se in alcuni aspetti si è giunti a metodologie e metriche consolidate e largamente condivise tra la comunità scientifica internazionale, in quelli in cui il giudizio soggettivo

è ancora predominante non è stata ancora raggiunta una comprensione organica e rigorosa.

Tra questi, l'impatto del differenziale sugli aspetti di direzionalità, stabilità e motricità del comportamento di un autoveicolo risulta ancora oggi un tema "nebuloso", affrontato e risolto soprattutto attraverso l'esperienza.

Il presente lavoro si pone come finalità lo sviluppo di una teoria semplice ma organica e rigorosa per l'analisi del comportamento direzionale di autoveicolo dotato di differenziale generico. In particolare si valuteranno tutte quelle implicazioni derivanti da una differenza significativa tra le forze motrici delle ruote di uno stesso assale, differenza che può essere ottenuta sia attraverso differenziali passivi sia attraverso differenziali controllati (ossia con rapporto di bloccaggio controllato) o completamente attivi.

Il lavoro è così strutturato: il capitolo 1 è dedicato allo studio del comportamento della ruota con pneumatico, in particolare si definiscono le grandezze cinematiche che caratterizzano le condizioni di moto della ruota e, attraverso l'introduzione di un modello semplice di pneumatico (brush model), si analizzano gli aspetti principali del comportamento del pneumatico. Nel capitolo 2 si entra nel vivo della dinamica del veicolo, attraverso lo studio del comportamento di un veicolo dotato di differenziale libero ideale; in particolare si definiscono i concetti di rigidità di deriva e lunghezza di rilassamento equivalente dell'assale in cui compaiono i contributi di pneumatico e sospensione, si analizza il comportamento stazionario attraverso i gradienti sottosterzo ed assetto e si costruirà il diagramma di maneggevolezza (handling diagram) di un autoveicolo. Non solo, ma verrà analizzato anche il comportamento transitorio attraverso lo studio dei parametri che caratterizzano la risposta al gradino e delle principali funzioni di risposta in frequenza delle variabili di stato del veicolo. Il capitolo 3 è dedicato allo studio del comportamento di varie tipologie di differenziali passivi, attraverso la definizione della ripartizione della coppia motrice in funzione delle caratteristiche costruttive del differenziale ed in base alle condizioni di moto delle due ruote dello stesso assale. Nel capitolo 4 si affronta lo studio del comportamento direzionale di un veicolo dotato di differenziale completamente bloccato; in particolare si analizza, attraverso un radicale rivisitazione del modello monotraccia classico di veicolo, la distribuzione della coppia motrice in funzione delle variabili di stato del veicolo e su come queste ultime siano legate al momento di imbardata generato dalla differenza delle forze motrici tra le due ruote

---

dello stesso assale. Il capitolo 5 è invece dedicato all'analisi del comportamento del veicolo dotato di un generico differenziale passivo, attraverso la soluzione numerica, in ambiente MatLab/Simulink®, di un sistema di equazioni differenziali non-lineari che definiscono il moto del veicolo.

## Capitolo 1

# Comportamento del pneumatico

Il pneumatico è un parametro fondamentale nella dinamica del veicolo; esso infatti rappresenta l'interfaccia tra veicolo e superficie stradale. In particolare al pneumatico vengono demandati svariati compiti tra cui il filtraggio delle asperità stradali (*road roughness filtering*), la trasmissione di coppie motrici e resistenti (*braking/driving performances*) ed infine l'azione delle forze necessarie a controllare la traiettoria del veicolo (*cornering performances*).

Il comportamento del pneumatico è influenzato da innumerevoli fattori tra i quali i principali risultano: le proprietà meccaniche del pneumatico (rigidezze e smorzamenti), le proprietà della superficie stradale (coefficiente di aderenza tra pneumatico e strada, struttura del manto stradale) ed infine le condizioni di moto tra pneumatico e strada (modulo e direzione della deformazione/slittamento).

Nel presente capitolo verranno dapprima definite le grandezze caratteristiche del moto della ruota con pneumatico rispetto alla strada; successivamente verrà descritto un modello semifisico del pneumatico (*brush model*) che permette di fornire una spiegazione (sia pure semplicistica) di molti dei principali fenomeni. Infine verranno descritte le formule empiriche (*Magic Formula*) che, pur non avendo nessun legame con la realtà fisica e quindi con il comportamento effettivo del pneumatico stesso, cercano di approssimare in modo semplice ma accurato gli andamenti rilevati sperimentalmente di forze e momenti. Queste formule empiriche vengono principalmente impiegate nella formulazione di modelli matematici per lo studio della dinamica dell'intero veicolo.

### 1.1 Cinematica

All'asse della ruota viene imposto un moto puramente *traslatorio* con velocità  $\mathbf{V}$  parallela alla strada. La strada è supposta perfettamente piana e orizzontale, oltre che ferma. La velocità di rotazione del cerchio della ruota attorno al suo asse è indicata con  $\boldsymbol{\Omega}$  (è appena il caso di osservare che non avrebbe senso parlare di velocità di rotazione del pneumatico perché non si tratta di un corpo assimilabile ad un corpo rigido).

In Fig. 1.1 è indicato il sistema di riferimento adottato.

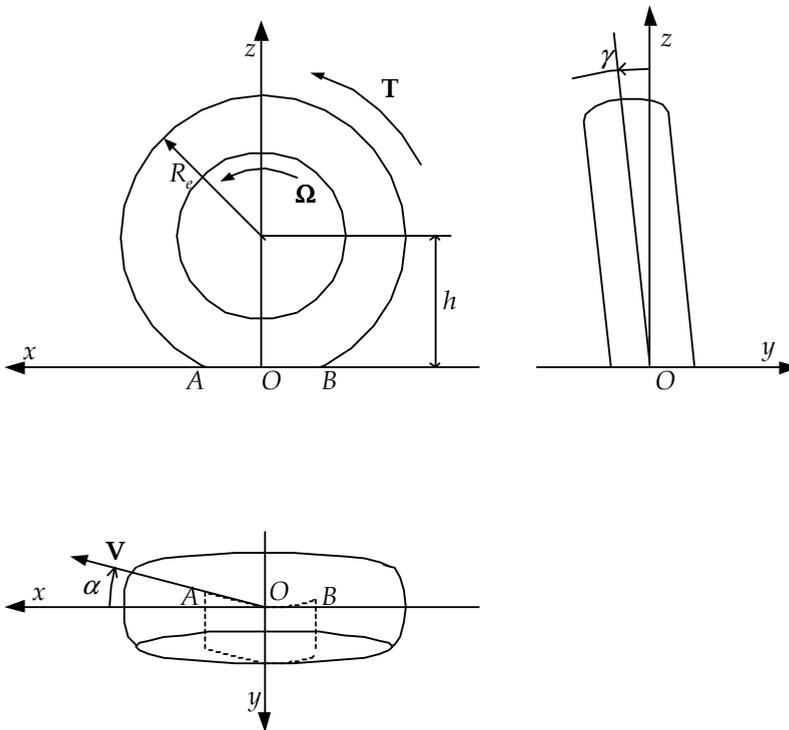


Fig. 1.1: Sistema di riferimento.

L'origine  $O$  viene presa sul piano stradale e coincidente con il "centro" dell'impronta della ruota. Più precisamente, l'origine  $O$  viene individuata dall'intersezione di tre piani: il piano stradale, il piano medio longitudinale del cerchio e il piano verticale contenente l'asse di rotazione della ruota. L'intersezione del piano longitudinale con la strada individua l'asse  $x$ , diretto nel senso di avanzamento della ruota, mentre l'asse  $z$  è ortogonale alla strada e diretto verso l'alto. L'asse  $y$ , ortogonale agli altri due, coincide con la proiezione sul piano stradale dell'asse della ruota ed è diretto in modo da considerare positive le rotazioni antiorarie. In definitiva  $(x, y, z; O)$  non è altro che il sistema di riferimento cartesiano disposto in modo abbastanza naturale. Rispetto alla strada, ha anch'esso moto traslatorio con velocità  $\mathbf{V}$ .

E' importante osservare che la definizione del sistema di riferimento  $(x, y, z; O)$  non cambia se il piano medio della ruota non è perpendicolare

alla strada, ma inclinato di un angolo  $\gamma$  detto di campanatura o di camber (Fig. 1.1).

Le azioni trasmesse dalla strada alla ruota hanno come risultante una forza  $\mathbf{F}$  che, in generale, non passa per l'origine  $O$  del sistema di riferimento scelto. E' quindi necessario introdurre una coppia di trasporto  $\mathbf{M}$  se, come di consueto, si vuole rappresentare la risultante con un vettore per  $O$ . Si ha così che tutte le azioni elementari sono equivalenti ad una forza  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$  per  $O$  e ad una coppia  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ .

Dato che i due assi  $x$  e  $y$  giacciono sul piano stradale si ha una netta separazione di ruoli: le azioni tangenziali dovute all'aderenza determinano le componenti  $F_x$ ,  $F_y$  e  $M_z$ , dette rispettivamente, forza longitudinale, forza laterale, e momento di autoallineamento, mentre le azioni normali alla strada (cioè la distribuzione di pressione) contribuiscono solo alle componenti  $M_x$ ,  $M_y$  e  $F_z$ , cioè, al momento di ribaltamento, al momento di resistenza al rotolamento e alla forza verticale.

L'angolo  $\alpha$  viene chiamato angolo di deriva e rappresenta l'angolo fra l'asse  $x$  e la velocità di avanzamento  $V$ . L'asse ha quindi un moto traslatorio di componenti

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha, \\ V_y &= -V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Il cerchio, oltre che a traslare, ha anche un moto rotatorio intorno al proprio asse con velocità angolare  $\Omega = (0, \Omega, 0)$  dipendente dalla velocità  $\mathbf{V}$ , dalla coppia  $\mathbf{T}$  (wheel drive torque) applicata all'asse della ruota (coppia motrice se  $\mathbf{T} > 0$ , o frenante se  $\mathbf{T} < 0$ ), dall'angolo di deriva  $\alpha$  dal carico verticale  $F_z$ , nonché dal tipo di pneumatico, dalla pressione di gonfiaggio, etc.

Noti  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$  ed  $\Omega = (0, \Omega, 0)$  è possibile, in ogni istante, individuare l'asse elicoidale (o asse di Mozzi) dell'atto di moto del cerchio. Come noto, i punti dell'asse elicoidale hanno velocità parallela al vettore velocità angolare. Pertanto, nel caso in esame, l'asse elicoidale è sempre parallelo all'asse  $y$  ed i suoi punti hanno velocità  $(0, -V \sin \alpha, 0)$ . Se si indica con  $R$  la distanza con segno fra l'asse del cerchio e l'asse elicoidale si ottiene subito (Fig. 1.2)

$$R = \frac{V_x}{\Omega}. \quad (1.1)$$

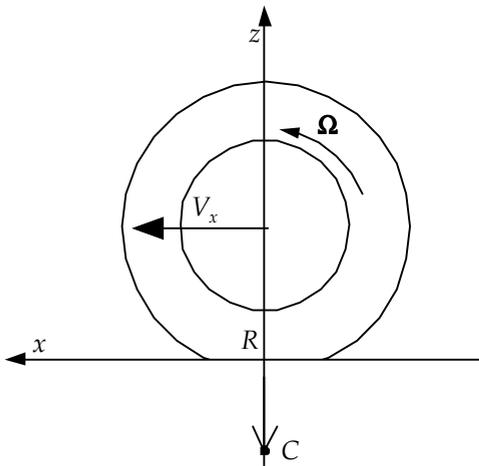


Fig. 1.2: Traccia C dell'asse elicoidale del cerchio.

Nel caso particolare in cui si abbia angolo di deriva nullo ( $\alpha = 0$ ), ovvero  $V_y = 0$ , l'asse elicoidale diventa un asse di istantanea rotazione e tutti i suoi punti hanno velocità nulla. E' evidente che l'asse elicoidale si trova sempre "sotto" all'asse del cerchio, ossia a distanza  $R$  verso il basso, come illustrato in Fig. 1.2, in cui si è indicata con  $C$  la traccia dell'asse elicoidale nel piano coordinato  $x$ - $z$ .

Convenzionalmente si parla di *puro rotolamento* quando la ruota con pneumatico rotola in direzione perfettamente longitudinale ( $\alpha = 0$ ) e senza coppia applicata all'asse (ruota folle:  $T = 0$ ). In queste particolari condizioni, fissato il carico verticale  $F_z$  agente sulla ruota e la velocità  $V$  del suo asse, il cerchio ruoterà con una certa velocità angolare che viene indicata con  $\Omega_0$ .

La distanza  $R = R_0$  fra l'asse di istantanea rotazione del cerchio (e non del pneumatico che non può essere considerato corpo rigido) e l'asse della ruota è, dalla (1.1) in cui si ponga  $V_x = V$  e  $\Omega = \Omega_0$ ,

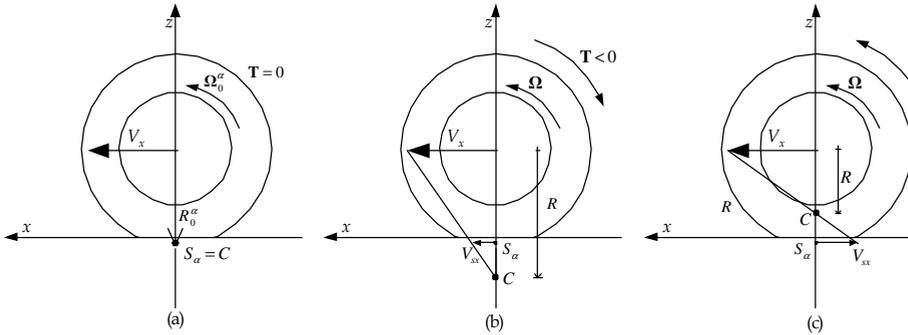
$$R_0 = \frac{V}{\Omega_0} \quad (1.2)$$

In generale  $R_0$  è maggiore della distanza  $h$  da terra del centro ruota, ma è inferiore al raggio esterno  $R_e$  della ruota indeformata ( $h < R_0 < R_e$ ). Pertanto in condizioni di puro rotolamento, l'asse elicoidale si trova sotto il piano stradale. Si noti che  $R_0$  non può essere misurato direttamente, ma ottenuto solo tramite la (1.2).

Se, a parità di tutti gli altri parametri, alla ruota non viene applicata alcuna coppia ma presenta un angolo di deriva  $\alpha \neq 0$ , si avrà una velocità di rotazione del cerchio  $\Omega_0^\alpha$ , minore di  $\Omega_0$ . Inoltre, dato che il cerchio non ha più moto piano, l'asse di istantanea rotazione viene rimpiazzato dall'asse elicoidale. In base alla (1.1) anche in queste nuove condizioni si può calcolare la distanza  $R = R_0^\alpha$  (Fig. 1.3(a))

$$R_0^\alpha = \frac{V \cos \alpha}{\Omega_0^\alpha} \quad (1.3)$$

fra l'asse della ruota e l'asse elicoidale associato al moto del cerchio. In queste particolari condizioni, la traccia dell'asse elicoidale sul piano  $x$ - $z$  viene indicata con  $S_\alpha$ , come mostrato in Fig. 1.3(a).



**Fig. 1.3: Effetto dell'applicazione di una coppia  $T$  sulla posizione della traccia  $C$  dell'asse elicoidale del cerchio.**

In definitiva,  $R_0$  non è che il valore assunto da  $R_0^\alpha$  quando  $\alpha = 0$ ; entrambi sono stati definiti per  $T = 0$ .

L'applicazione all'asse del cerchio di una coppia  $T \neq 0$ , come in Fig. 1.3 (b) e Fig. 1.3 (c), porta ad una velocità angolare  $\Omega$  del cerchio stesso diversa da  $\Omega_0^\alpha$  e quindi ad un riposizionamento dell'asse elicoidale, che verrà a trovarsi ad una distanza  $R = V \cos \alpha / \Omega$  dall'asse della ruota. In queste nuove condizioni di funzionamento il punto  $S_\alpha$ , definito in precedenza ( e quindi ancora a distanza  $R_0^\alpha$  ) ha, come mostrato in Fig. 1.3(b) e Fig. 1.3(c), una velocità  $\mathbf{V}_s$  rispetto alla strada, che viene detta *velocità di scorrimento* e le cui componenti sono date da

$$\mathbf{V}_s = \begin{cases} V_{sx} = V_x - V_r = V \cos \alpha - \Omega R_0^\alpha = (\Omega_0^\alpha - \Omega) R_0^\alpha \\ V_{sy} = -V_y = -V \sin \alpha = -\Omega_0^\alpha R_0^\alpha \tan \alpha. \end{cases} \quad (1.4)$$

La velocità di scorrimento  $\mathbf{V}_s$  è quindi diretta secondo l'asse  $x$  se  $\alpha = 0$  e come l'asse  $y$  se  $\mathbf{T} = 0$ , ovvero se  $\Omega = \Omega_0^\alpha$ . Inoltre il verso di  $\mathbf{V}_{sx}$  dipende dal segno di  $\mathbf{T}$ . Infatti, come illustrato in Fig. 1.3(b), si ha  $\mathbf{T} < 0$  (si applica alla ruota una coppia frenante) e  $\mathbf{V}_{sx}$  è concorde con  $\mathbf{V}$  (velocità di avanzamento della ruota) mentre l'asse elicoidale risulta ancora al di sotto del piano stradale. Invece se  $\mathbf{T} > 0$  (si applica alla ruota una coppia motrice), come illustrato in Fig 1.3(C),  $\mathbf{V}_{sx}$  è opposto a  $\mathbf{V}$  ed inoltre l'asse elicoidale si è spostato al di sopra del piano stradale (cioè nel semipiano  $z > 0$ ).

E' utile definire un vettore ausiliario  $\mathbf{V}_r = (\Omega R_0^\alpha, 0, 0)$ . La velocità  $\mathbf{V}_r$  può a buon diritto essere chiamata *velocità di rotolamento* in quanto rappresenta quella parte di  $\mathbf{V}$  che non comporta strisciamento fra ruota e strada. Si ha infatti la relazione

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_s \quad (1.5)$$

Dato che le velocità  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_s$ ,  $\mathbf{V}_r$  hanno sempre la terza componente nulla, da questo punto in poi si considerano, per semplicità, come vettori a due componenti.

Per caratterizzare completamente il moto del cerchio sono sufficienti i valori di  $\mathbf{V}$ ,  $\alpha$  e  $\Omega$ . E' però più utile introdurre due parametri adimensionali che meglio esprimono lo scostamento dalle condizioni di funzionamento con  $\mathbf{T} = 0$ . Si definisce, quindi, il vettore *scorrimento teorico*  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{V}_s}{V_r} = \left( \frac{\Omega_0^\alpha}{\Omega} - 1; -\frac{\Omega_0^\alpha}{\Omega} \tan \alpha \right). \quad (1.6)$$

Ad esempio, nel caso di ruota bloccata ( $\Omega = 0$ ) con  $\alpha = 0$  si ha  $\boldsymbol{\sigma} = (+\infty, 0)$  mentre  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  in condizioni nominali di puro rotolamento ( $\Omega = \Omega_0^\alpha = \Omega_0$  e  $\alpha = 0$ ).

Si definisce, invece, il vettore *scorrimento pratico*  $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{V}_s}{V_x} = \left( 1 - \frac{\Omega}{\Omega_0^\alpha}, -\tan \alpha \right). \quad (1.7)$$

Ad esempio, se  $\mathbf{T} = 0$  si ha scorrimento longitudinale  $s_x = 0$ , mentre se  $\alpha = 0$  si ha scorrimento laterale  $s_y = 0$ . Nel caso di ruota bloccata ( $\Omega = 0$ ) con  $\alpha = 0$  si ha  $\mathbf{s} = (1, 0)$ .

## 1.2 Il modello "a spazzola" (*Brush Model*)

Il modello "a spazzola" ([1], [2]) pur con la semplicità, consente di comprendere i principali aspetti del comportamento del pneumatico. L'insieme cerchione + pneumatico viene schematizzato con un *disco* sottile (di larghezza infinitesima) di raggio  $R_e$  deformabile solo in senso radiale al quale è ancorato il battistrada che può essere visto come un insieme di *setole* radiali, ciascuna di lunghezza trascurabile, deformabili solo in senso longitudinale e trasversale e perfettamente rigide in senso radiale (vedi fig. 1.4).

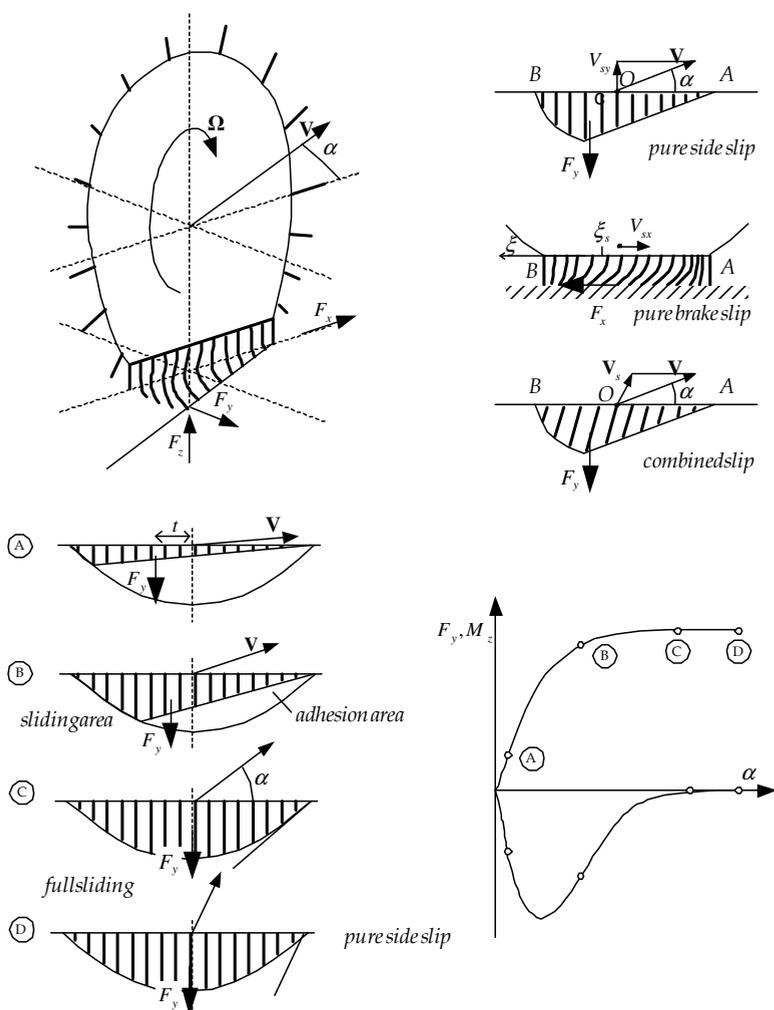


Fig. 1.4: modello a spazzola.

Le punte delle setole entrano in contatto con la superficie stradale e vi possono aderire se le condizioni di aderenza lo permettono. Grazie alla loro deformabilità, una eventuale velocità relativa non nulla  $V_s$  del disco rispetto alla strada nella zona di contatto  $A - B$  può, entro certi limiti, essere compensata dalla deformazione delle setole senza dar luogo a strisciamenti delle loro punte sulla strada. Una ipotesi fondamentale del modello è che la deformazione di ciascuna setola sia indipendente dalle altre. Per semplicità nel seguito si suppone che l'angolo di camber sia nullo.

Siano  $2b$  e  $2a$  rispettivamente la larghezza e la lunghezza dell'impronta di contatto (supposta rettangolare) tra pneumatico e strada, simmetrica rispetto all'origine  $O$  del sistema di riferimento definito nel § 1.1. Se si ipotizza trascurabile la resistenza al rotolamento ( $M_y = 0$ ), è possibile assumere un andamento simmetrico rispetto all'asse  $z$  della pressione di contatto  $p(x)$  tra disco e strada ( $-a \leq x \leq a$ ). In particolare si assume un andamento parabolico fra i punti  $A$  (leading edge) e  $B$  (trailing edge) in corrispondenza dei quali la pressione è nulla:

$$p = p(x) = p_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right] \quad (1.8)$$

dove  $p_0 = p(0)$  è il valore massimo. Per semplicità si assume che la pressione sia uniforme in senso trasversale.

Il valore della pressione massima  $p_0$  dipende, oltre che dalle dimensioni dell'impronta di contatto, dal carico verticale gravante sulla ruota; infatti dall'equilibrio verticale discende:

$$p_0 = \frac{3}{8ab} F_z \quad (1.9)$$

Per le successive analisi è conveniente introdurre una coordinata locale  $\xi$  con origine in  $A$  e diretta in senso opposto ad  $x$ , così da avere il tratto di contatto individuato da  $0 \leq \xi \leq 2a$  (fig. 1.4). La pressione di contatto  $p$  può esprimersi in funzione di  $\xi$  secondo la legge

$$p = \hat{p}(\xi) = \frac{p_0}{a^2} (2a\xi - \xi^2).$$

Il modello più semplice si ha supponendo un comportamento elastico *lineare* ed *isotropo* di ciascuna setola, ovvero un legame lineare tra la deformazione  $\mathbf{e}$  della punta della setola e la tensione tangenziale  $\mathbf{t}$  esercitata dalla strada sulla setola stessa:

$$\mathbf{t}(\xi) = k \mathbf{e}(\xi) \quad (1.10)$$

Il parametro  $k$  rappresenta la rigidezza flessionale della singola setola e dipende dalle caratteristiche costruttive del pneumatico.

Il punto  $A$  di inizio dell'impronta a terra è il punto in cui ciascuna setola stabilisce il contatto con la strada (fig. 1.4). Pertanto, la setola che si trova in certo istante in  $A$  è indeformata. Nel passare da  $A$  a  $B$  ogni setola subisce una deformazione a causa della velocità relativa  $\mathbf{V}_s$  fra strada e disco. Il tempo  $t$  di permanenza di setola nel tratto di contatto dipende dal modulo della velocità di rotolamento secondo la relazione  $t = \xi/V_r$ . La generica setola con punto base di coordinata  $\xi$  può quindi *potenzialmente* subire una deformazione  $\mathbf{e}$  del suo apice pari a

$$\mathbf{e}(\xi) = -\mathbf{V}_s t = -\frac{\mathbf{V}_s}{V_r} \xi = -\boldsymbol{\sigma} \xi \quad (1.11)$$

Si parla di deformazione potenziale perché per realizzarsi deve essere compatibile con le condizioni di *aderenza* locale. In genere per coefficiente di aderenza  $\mu_0$  si intende il valor medio del coefficiente di attrito statico (o di primo distacco) tra ruota e strada. Il coefficiente di aderenza in genere non è costante ma dipende da innumerevoli fattori; oltre che dalle caratteristiche delle superfici a contatto si ha una certa dipendenza dai valori locali della velocità di strisciamento, della temperatura e della pressione relativa.

In questa sede si preferisce assumere, per semplicità, una discontinuità tra coefficiente di aderenza  $\mu_0$  e coefficiente di aderenza in condizioni di strisciamento macroscopico  $\mu_1$  definito coefficiente di aderenza limite:

$$\mu_0 = (1 + \chi)\mu_1 \quad (1.12)$$

con  $\chi > 0$ .

Viene inoltre ipotizzato che il coefficiente di aderenza non dipenda dalla direzione di scorrimento.

L'espressione (1.11) è valida, pertanto, fino a quando la tensione tangenziale non raggiunge il valore dato dal prodotto del coefficiente di aderenza  $\mu_0$  e la pressione locale  $p(\xi)$ . In altre parole il valore massimo della deformazione elastica della singola setola è data :

$$|\mathbf{e}(\xi)| \leq 2a\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = e_m(\sigma) \quad (1.13)$$

dove con  $\sigma_m$  si è indicato lo scorrimento limite

$$\sigma_m = \frac{2\mu_0 p_0}{ka} = \frac{3\mu_0 F_z}{4ka^2 b} \quad (1.14)$$

Il valore limite  $\sigma_m$  dello scorrimento è inversamente proporzionale alla rigidezza  $k$  del pneumatico.

All'interno della impronta di contatto possiamo distinguere due zone: la zona aderente (*stick region*) all'interno della quale la tensione tangenziale è una funzione lineare dello scorrimento  $\sigma$  ed una zona di slittamento (*slip region*) in cui la tensione tangenziale ha un andamento dipendente dalla pressione di contatto  $p(\xi)$  (fig. 1.4 e 1.5). Il punto di passaggio tra le due zone è dato semplicemente da:

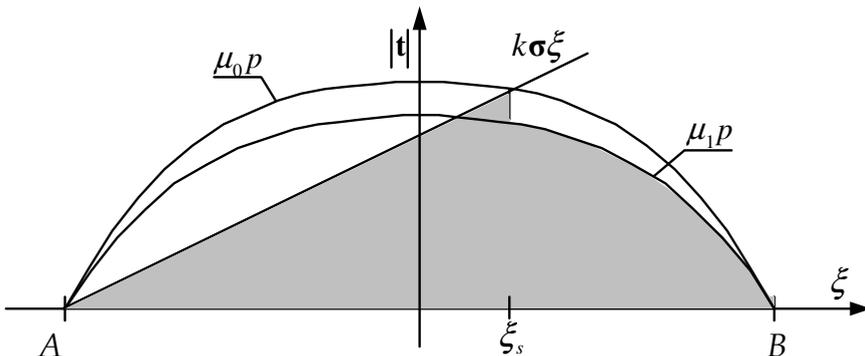
$$\xi_s(\sigma) = 2a \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_m} \right) \quad (1.15)$$

Pertanto in condizioni di scorrimento limite, essendo  $\xi_s = 0$ , tutta l'impronta si trova in condizioni di slittamento.

In definitiva, nell'impronta di contatto si ha in generale la seguente distribuzione di tensioni tangenziali:

$$\mathbf{t}(\xi) = \begin{cases} -\sigma k \xi, & \text{se } 0 \leq \xi \leq \xi_s \quad (\text{zona di aderenza}) \\ -\frac{\sigma}{\sigma} \mu_1 p(\xi), & \text{se } \xi_s \leq \xi \leq 2a \quad (\text{zona di slittamento}) \end{cases} \quad (1.16)$$

A causa della deformabilità del pneumatico si hanno nell'impronta due zone in condizioni differenti: una zona iniziale in condizioni di aderenza ed una zona finale in condizioni di slittamento (fig. 1.4 e 1.5).



**Fig. 1.5:** Distribuzione delle tensioni tangenziali lungo la linea mediana dell'impronta a terra.

dell'impronta a terra, indipendentemente dal fatto che la coppia  $\mathbf{T}$  sia frenate o motrice e indipendentemente dalla direzione di deriva. E' il

segno di  $\Omega$ , non quello di  $\sigma$  che posiziona le due zone. Nella zona aderente le azioni tangenziali dipendono essenzialmente dalla rigidezza  $k$  del pneumatico, mentre nella zona di slittamento dipendono dal coefficiente di aderenza  $\mu_1$ . La transizione tra le due zone è determinata dai parametri che definiscono  $\xi_s$ .

La risultante di tutte le tensioni tangenziali  $\mathbf{t}$  costituisce la forza tangenziale totale  $\mathbf{F}_t$  agente sul pneumatico. Se  $0 \leq \xi_s \leq 2a$ , ovvero  $\sigma \leq \sigma_m$ , si ha per la (1.16)

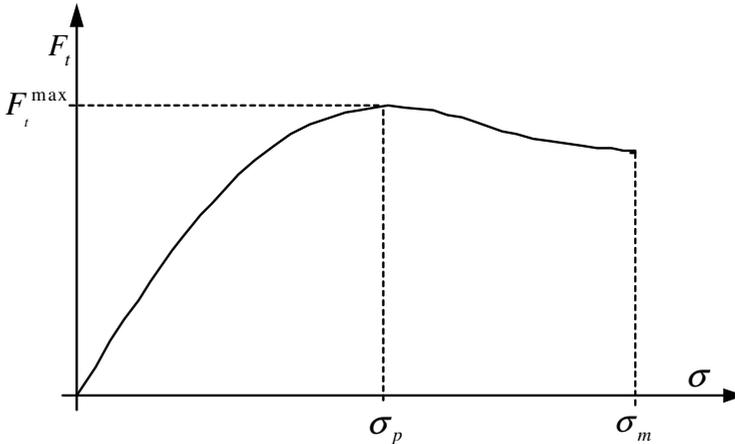
$$\mathbf{F}_t = 2b \int_0^{2a} \mathbf{t}(\xi) d\xi = -\frac{\sigma}{\sigma} 2b \left[ k\sigma \int_0^{\xi_s(\sigma)} \xi d\xi + \mu_1 \int_{\xi_s(\sigma)}^{2a} \hat{p}(\xi) d\xi \right] = -\frac{\sigma}{\sigma} F_t(\sigma) \quad (1.17)$$

Utilizzando il legame tra  $\xi_s$  e  $\sigma$  (1.15) e la (1.9) è possibile esplicitare la funzione  $F_t(\sigma)$ , modulo della forza tangenziale  $\mathbf{F}_t$ , valida se  $\sigma \leq \sigma_m$

$$F_t = F_t(\sigma) = \mu_1 F_z \left[ 1 - (1 - \theta)^3 + 3\chi\theta(1 - \theta)^2 \right] \quad (1.18)$$

dove, per brevità, si è definito il rapporto  $\theta$

$$\theta = \frac{\sigma}{\sigma_m} \quad (1.19)$$



**Fig. 1.6:** Andamento qualitativo della forza tangenziale in funzione dello scorrimento.

In Fig. 1.6 è riportato il tipico andamento di  $F_t$  in funzione di  $\sigma$  secondo la (1.18) fino alla condizione di slittamento di tutta l'impronta  $\sigma = \sigma_m$ ; oltre tale valore la forza tangenziale si mantiene costantemente

uguale a  $\mu_1 F_z$ . La forza tangenziale  $F_t$ , raggiunge il massimo valore  $F_t^{\max}$  per  $\theta = \theta_p$  con

$$\theta_p = \frac{1 + \chi}{1 + 3\chi} \quad (1.20)$$

Pertanto, essendo  $\chi > 0$ , la massima forza tangenziale si ha per  $\theta_p < 1$ , ovvero quando solo una parte dell'impronta è in condizioni di strisciamento.

Il valore dello scorrimento per avere la massima forza tangenziale è dato pertanto da

$$\sigma_p = \theta_p \sigma_m = \left( \frac{1 + \chi}{1 + 3\chi} \right) \frac{3\mu_0 F_z}{4ka^2b} \quad (1.21)$$

Il valore  $F_t^{\max}$  può essere desunto dalle relazioni (1.18) e (1.20)

$$F_t^{\max} = F_t(\sigma_p) = \mu_1 F_z \left( 1 + \frac{4\chi^3}{(3\chi + 1)^2} \right) \quad (1.22)$$

Dalle relazioni (1.20), (1.21) e (1.22) si nota come, nel modello in esame, la rigidità  $k$  del pneumatico ha influenza sul valore di  $\sigma_p$ , ma non su  $\theta_p$  e sul valore massimo di  $F_t$ . In altre parole, variando solo la rigidità del pneumatico si può avere una inclinazione iniziale più o meno pronunciata della funzione  $F_t(\sigma)$ , ma non si può influenzare la massima forza tangenziale che dipende solo dalle condizioni di aderenza e dal carico verticale  $F_z$ .

Una misura della *prontezza di risposta* del pneumatico per piccoli valori dello scorrimento  $\sigma$  è fornita dalla derivata di  $F_t(\sigma)$  calcolata nell'origine:

$$C = \left. \frac{dF_t}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{3\mu_0 F_z}{\sigma_m} = 4ka^2b \quad (1.23)$$

E' interessante osservare che la rigidità  $C$  non dipende dalle condizioni di aderenza, ma solo dalla rigidità  $k$  del pneumatico e dalle dimensioni dell'impronta.

In base a quanto esposto, si può concludere che per piccoli valori dello scorrimento il comportamento del pneumatico è determinato principalmente dal suo comportamento strutturale, compresa la pressione di gonfiaggio, mentre il comportamento per valori di scorrimento prossimi a quello limite è sostanzialmente influenzato dalle condizioni di aderenza.

Una volta ottenuta l'espressione della forza tangenziale  $F_t$ , è possibile ricavare le due componenti  $F_x$  ed  $F_y$

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(\sigma_x, \sigma_y) = -\frac{\sigma_x}{\sigma} F_t(\sigma) \\ F_y &= F_y(\sigma_x, \sigma_y) = -\frac{\sigma_y}{\sigma} F_t(\sigma) \end{aligned} \quad (1.24)$$

dove  $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

Anche per le due componenti si possono utilizzare gli sviluppi di Taylor nell'intorno di  $\sigma = 0$ , utili qualora si vogliano utilizzare modelli linearizzati

$$\begin{aligned} F_x &= -C\sigma_x + O(\sigma^2) \\ F_y &= -C\sigma_y + O(\sigma^2) \end{aligned} \quad (1.25)$$

dove  $C$  è la rigidità definita in (1.23). Più precisamente valgono le seguenti relazioni

$$C = \left. \frac{dF_t}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = - \left. \frac{\partial F_x}{\partial \sigma_x} \right|_{\sigma=0} = - \left. \frac{\partial F_y}{\partial \sigma_y} \right|_{\sigma=0}$$

mentre

$$\left. \frac{\partial F_x}{\partial \sigma_y} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial F_y}{\partial \sigma_x} \right|_{\sigma=0} = 0$$

Se si vuole far comparire l'angolo di deriva  $\alpha$  si può utilizzare il seguente legame generale

$$\sigma_y = -(1 + \sigma_x) \tan \alpha \quad (1.26)$$

Avendo stabilito una dipendenza di  $\sigma_y$  da  $\sigma_x$  ed  $\alpha$ , ha senso considerare la derivata parziale della forza laterale  $\hat{F}_y(\sigma_x, \alpha) = F_y(\sigma_x, -(1 + \sigma_x) \tan \alpha)$  rispetto ad  $\alpha$ . In particolare si ottiene

$$C_\alpha = \left. \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha=0 \\ \sigma_x=0}} = C \quad (1.27)$$

La grandezza  $C_\alpha$  viene comunemente chiamata *rigidità di deriva* (*cornering stiffness*) e nel modello a spazzola è uguale a  $C$ , anche se ciò non è necessariamente vero nella realtà.

Tenendo conto del legame  $\sigma_x = s_x / (1 - s_x)$  fra gli scorrimenti longitudinali, è immediato ottenere che  $d\sigma_x / ds_x = 1$  quando  $s_x = 0$ .

Pertanto, anche la rigidità longitudinale  $C_s = \partial F_x / \partial s_x$  (*braking stiffness*), nel modello a spazzola, è uguale a  $C$ .

Nella realtà, comunque, ci possono essere apprezzabili differenze nei valori misurati delle due rigidità,  $C_\alpha$  e  $C_s$ . In genere la rigidità longitudinale  $C_s$  risulta superiore del 50% ca. rispetto alla rigidità di deriva  $C_\alpha$ ; ciò è dovuto principalmente alla flessibilità laterale e torsionale del pneumatico. Per tener conto di questo comportamento sarebbe necessario introdurre, nel modello a spazzola, un comportamento anisotropo della generica setola.

La forza tangenziale  $F_t$  in generale non passa per l'origine  $O$  del sistema di riferimento (fig. 1.5) in quanto le tensioni tangenziali non sono distribuite in modo simmetrico rispetto ad  $O$ . Si ha quindi un momento di sola componente  $M_z$  la cui espressione risulta

$$M_z = 2b \int_0^{2a} t_y(\xi)(a-\xi)d\xi = -\frac{\sigma_y}{\sigma} \mu_1 F_z a \left[ -\theta(1-\theta)^3 + \chi(1-\theta)^2 \theta(4\theta-1) \right] \quad (1.28)$$

È evidente che il momento  $M_z$  si annulla per  $\theta=0$  (azioni tangenziali nulle) e per  $\theta \geq 1$  (scorrimento completo dell'impronta). È importante però notare che si ha  $M_z = 0$  anche per un valore intermedio

$$\theta = \frac{1+\chi}{1+4\chi}$$

Se si vuole linearizzare la relazione (1.28) rispetto allo scorrimento  $\sigma$  è necessario utilizzare la seguente rigidità

$$\left. \frac{dM_z}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \left( \frac{\sigma_y}{\sigma} \right) C \frac{a}{3} \quad (1.29)$$

Anche questo valore di rigidità non dipende dalle condizioni di aderenza fra pneumatico e strada. In base alla relazione precedente, per piccoli valori dell'angolo di deriva si ha il seguente legame tra forza laterale e momento  $M_z$

$$M_z = -F_y t = -F_y \frac{a}{3}$$

In altri termini, la forza laterale ha un braccio (*pneumatic trail*)  $t = a/3$  rispetto all'origine  $O$ , che corrisponde ad un andamento "triangolare" delle tensioni tangenziali.

Tutto quanto riferito fino ad ora sul pneumatico presuppone di mantenere il carico verticale  $F_z$  sempre costante. Tuttavia il carico

verticale agente su di un pneumatico è largamente variabile a causa principalmente delle azioni inerziali agenti sul veicolo.

Variazioni di  $F_z$  non si possono trattare facilmente con il modello a spazzola. Infatti, anche se  $F_z$  compare esplicitamente nelle formule, si dovrebbe tener conto dei suoi effetti anche sulle seguenti grandezze: lunghezza  $2a$  dell'impronta, rigidezza  $k$  del pneumatico, pressione massima  $p_0$ , coefficienti di aderenza  $\mu_0$  e  $\mu_1$  (a causa della diversa distribuzione della pressione nell'impronta a terra). Se nessuno di questi effetti fosse presente, la funzione  $F_t(\sigma)/F_z$  e la rigidezza  $C$  sarebbero del tutto indipendenti da  $F_z$ . Invece se si assume che la lunghezza di contatto  $2a$  vari col quadrato dello schiacciamento del pneumatico  $\rho$  e che  $F_z$  dipenda linearmente da  $\rho$ , si ha che  $a^2 \propto F_z$  e di conseguenza, nel modello a spazzola, la forza laterale  $F_y$  varia proporzionalmente con  $F_z$  mentre il momento  $M_z$  è proporzionale a  $F_z^{3/2}$ .

La realtà è invece ben diversa. La crescita della rigidezza di deriva  $C_\alpha$  con  $F_z$  non è proporzionale, infatti è sempre meno pronunciata con l'aumentare di  $F_z$  stesso (vedi fig. 1.7), fino ad arrivare ad una specie di saturazione. In taluni casi si ha addirittura una diminuzione di  $C_\alpha$  quando il carico verticale supera un certo valore di soglia.

Il modello a spazzola può essere adattato per includere il legame non lineare tra la rigidezza di deriva  $C_\alpha$  ed il carico verticale  $F_z$  facendo sì che la rigidezza  $k$  delle setole decresca linearmente con  $F_z$ .

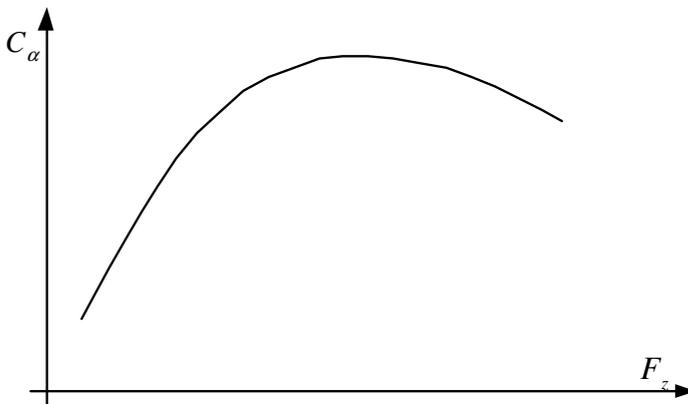


Fig. 1.7: Andamento qualitativo della rigidezza di deriva in funzione del carico verticale

Sempre sperimentalmente si è rilevato che un incremento di  $F_z$  comporta una lieve diminuzione del rapporto  $F_t^{\max} / F_z$ . Probabilmente, si ha una riduzione dei coefficienti aderenza a causa dell'incremento della pressione media dell'impronta.

Infine, vale la pena ricordare che anche lo scorrimento limite

$$\sigma_m = \frac{3\mu_0 F_z}{C}$$

è influenzato da  $F_z$ . L'effetto globale è un lieve aumento di  $\sigma_m$  con  $F_z$ . Lo stesso vale anche per  $\sigma_p$ , a cui si ha la massima forza tangenziale.

### 1.3 Comportamento transitorio

A causa della deformabilità della carcassa del pneumatico, il raggiungimento delle condizioni di regime descritte nel paragrafo precedente avviene in maniera progressiva. In altri termini, l'imposizione di un certo scorrimento  $\sigma$  non implica l'immediata generazione di una forza tangenziale  $F_t$ . Un semplice modello matematico per descrivere il comportamento del pneumatico può essere il seguente

$$\frac{d}{V} \dot{\tau}_i + \tau_i = \sigma_i(t), \quad i = x, y \quad (1.30)$$

dove la quantità  $d$  rappresenta la *lunghezza di rilassamento (relaxation length)* mentre  $\sigma_i(t)$  rappresenta l'andamento dello scorrimento (longitudinale o laterale) in condizioni di regime.

La relazione (1.30) rappresenta un'equazione differenziale ordinaria non omogenea, del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti (la velocità di avanzamento  $V$  è supposta costante) nella funzione incognita  $\tau_i$  che rappresenta lo scorrimento ritardato. Se lo scorrimento  $\sigma_i(t)$  è costante, cioè  $\sigma_i(t) = \bar{\sigma}_i$ , e se lo scorrimento iniziale è nullo ( $\sigma_i(0) = 0$ ) la soluzione dell'equazione differenziale diventa

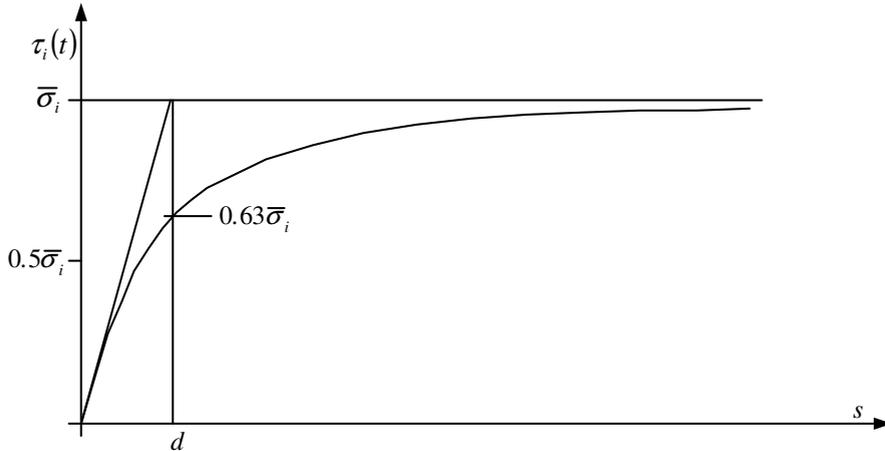
$$\tau_i(t) = \bar{\sigma}_i \left( 1 - e^{-\frac{V}{d}t} \right) = \bar{\sigma}_i \left( 1 - e^{-\frac{s}{d}} \right)$$

dove  $s$  rappresenta lo spazio percorso dalla ruota.

Come illustrato in fig. 1.8, la lunghezza di rilassamento  $d$  può essere ottenuta osservando che per  $s = d$  si ha  $\tau_i = (1 - e^{-1})\bar{\sigma}_i \cong 0.63\bar{\sigma}_i$ .

Se lo scorrimento di regime presenta un andamento sinusoidale nel tempo  $\sigma_i(t) = \sigma_i^0 \sin(\omega t)$  si ottiene quale integrale particolare

$$\tau_i^p(t) = \frac{\sigma_i^0}{\sqrt{1 + (\omega d / V)^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega d / V))$$



**Fig. 1.8: Andamento dello scorrimento ritardato durante un transitorio con scorrimento costante.**

Dato che l'integrale dell'omogenea decade rapidamente, questa funzione rappresenta la soluzione di regime. Si noti che l'introduzione della lunghezza di rilassamento porti ad una riduzione dell'ampiezza e ad aumento del ritardo di risposta. Va comunque osservato che il modello (1.30) è stato qui utilizzato in modo improprio perché l'asse della ruota non ha più moto traslatorio.

Questa teoria è ingannevolmente semplice; nella realtà ha notevole influenza la velocità di avanzamento  $V$ , dallo scorrimento  $\sigma$  e dal carico verticale  $F_z$ .

A livello operativo l'introduzione del comportamento transitorio del pneumatico comporta un aumento delle variabili che descrivono lo stato del sistema (veicolo), infatti la forza tangenziale diventa una funzione incognita del tempo.

## 1.4 Formule empiriche (Magic Formula)

Per descrivere il comportamento del pneumatico si possono anche utilizzare formule empiriche con le quali si cerca di approssimare in

modo semplice ma accurato gli andamenti rilevati sperimentalmente di forze e momenti.

Queste formulazioni vengono principalmente utilizzate nei modelli matematici per lo studio della dinamica dell'intero veicolo. In questo ambito interessa solo fornire una descrizione accurata del comportamento del pneumatico (al di là della interpretazione fisica), inoltre l'impiego di un vero modello di pneumatico richiederebbe un livello di dettaglio così elevato da renderlo ingestibile.

Sebbene da un punto di vista generale si tratti di un semplice problema di approssimazione numerica, tuttavia nel caso del pneumatico si hanno numerosi vincoli da rispettare. In primo luogo, ha notevole importanza approssimare in maniera accurata anche la derivata prima delle funzioni, evitando di avere fluttuazioni della pendenza non presenti nella realtà; di fatto ciò equivale ad avere dei vincoli anche sulla derivata seconda.

Questi aspetti rendono il problema di approssimazione molto più delicato. Un altro aspetto da considerare è la facilità e versatilità di impiego, caratterizzato dal numero di parametri da fissare e dal loro eventuale significato fisico.

Ad oggi le formulazioni più utilizzate fanno riferimento alla cosiddetta *Magic Formula* ([1], [2], [3]) che utilizza, come base di interpolazione, la seguente funzione trascendente:

$$y(x) = D \sin(C \arctan(Bx - E[Bx - \arctan(Bx)])) \quad (1.31)$$

dove alla variabile libera  $x$  si può assegnare il significato di angolo di deriva  $\alpha$  se con  $y$  si indica la forza laterale  $F_y$ , oppure di scorrimento longitudinale  $s_x$  se si vuole rappresentare l'andamento della forza longitudinale  $F_x$ . I quattro parametri  $B, C, D, E$  vanno fissati in modo da ottenere l'andamento voluto.

La determinazione dei valori opportuni dei quattro parametri per meglio approssimare dei dati sperimentali richiede la soluzione di un problema di approssimazione non lineare quindi non è banale. Di solito si assume  $1 < C < 2$  con  $-(1 + C^2/2) < E < 1$  in modo tale da avere una curva che parta con concavità verso il basso e con un solo massimo relativo  $y^{\max} = D$ . Ecco spiegato perché i parametri  $C$  ed  $E$  sono detti, rispettivamente, *shape* e *curvature factor*, mentre il parametro  $D$  è il *peak value*. Il restante parametro  $B$  è utilizzato per fissare la pendenza nell'origine ed è quindi chiamato *stiffness factor*. Spesso i quattro

parametri vengono resi dipendenti dal carico verticale  $F_z$  e dall'angolo di camber.

Nella formulazione di modelli di veicolo con pneumatici non lineari verrà utilizzata la variante MF-5.2 della *Magic Formula*. Questa particolare formulazione permette di tener conto, tra l'altro, del comportamento transitorio del pneumatico e di condizioni di scorrimento combinato longitudinale e trasversale.

## Capitolo 2

# Comportamento direzionale

Lo studio del comportamento direzionale di un autoveicolo, in estrema sintesi, ha lo scopo di definire il legame tra gli input del driver e la traiettoria del veicolo. In particolare si indaga come, a parità di input del driver (ad es. angolo volante), il comportamento dinamico del veicolo sia influenzato dai suoi parametri costruttivi (ad es. pneumatici, rigidità barre antirollio, ....etc).

Un parametro fondamentale nello sviluppo di un modello è il suo livello di dettaglio. Modelli molto accurati sono anche estremamente complicati, sia nella formulazione matematica, che nella interpretazione dei risultati; inoltre coinvolgono molti parametri difficilmente rilevabili con precisione e pertanto l'accuratezza del modello risulta solo illusoria.

Il modello di veicolo sviluppato nel presente capitolo avrà il livello di dettaglio minimo necessario per la descrizione dei concetti fondamentali e per l'identificazione di quei parametri oggettivi che definiscono la dinamica laterale di un veicolo.

## 2.1 Ipotesi semplificative

E' sempre bene avere presenti le ipotesi fatte nello sviluppo di un certo modello matematico. Si eviterà così di impiegare il modello in modo inappropriato, ossia per studiare casi che non verificano adeguatamente le ipotesi fatte. Inoltre, si saprà meglio dove agire per modificare il modello permettendogli di coprire una più vasta gamma di casi.

Per prima cosa si suppone che il veicolo si muova su strada piana e orizzontale, cioè assimilabile ad un piano geometrico. Essendo interessati al solo comportamento direzionale, si può inoltre assumere di evitare brusche frenature ed accelerazioni, ovvero di avere una velocità di avanzamento  $u$  costante. Queste ipotesi permettono di trascurare i moti di scuotimento e di beccheggio della carrozzeria che, per inciso, è supposta perfettamente rigida.

Il moto di rollio della cassa può essere trascurato solo imponendo delle restrizioni sui valori di accelerazione laterale ( $a_y \leq 0.4g$ ). I limiti effettivi dipendono dai parametri costruttivi del veicolo quali l'altezza

del baricentro  $h_G$ , le carreggiate  $t_i$  e la rigidezza equivalente antirollio del veicolo in esame.

Inoltre, pur trascurando il moto di rollio, è possibile tener conto del suo effetto sul comportamento del pneumatico e quindi sulla dinamica del veicolo utilizzando la caratteristica effettiva dell'assale (vedi § 2.6).

Rimane da considerare il grado di libertà di rotazione  $\delta_i$  delle ruote anteriori (sterzanti) intorno all'asse di sterzo. Questo ultimo risulta, in realtà, un asse sghembo definito (vedi fig. 2.1) attraverso gli angoli di incidenza (*caster angle*) e di inclinazione (*kingpin angle*) e le distanze longitudinale e trasversale tra la sua intersezione con il piano stradale ed il centro dell'impronta, rispettivamente braccio a terra longitudinale (*caster moment arm*) e braccio a terra trasversale (*scrub radius*). Per semplicità si suppone che l'asse di sterzo sia ortogonale al terreno e passante per il centro ruota (in § 2.7.4 verrà analizzata l'influenza della posizione dell'asse di sterzo e della velocità di rotazione del volante  $\dot{\delta}_{sw}$  sugli angoli di deriva anteriori). Così facendo si trascurano le variazioni di camber  $\gamma$ , convergenza  $\varepsilon$  e carreggiata legate alla rotazione delle ruote.

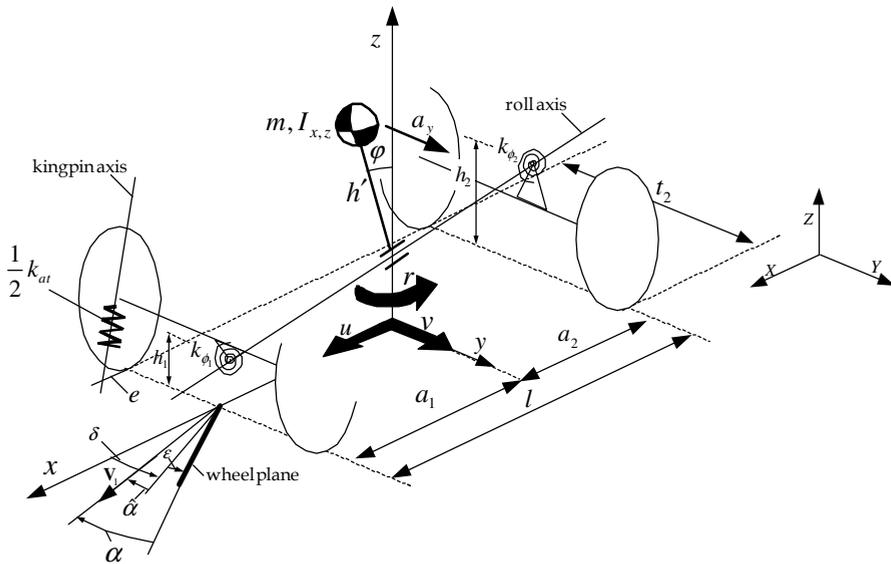
A causa dell'elasticità della tiranteria di sterzo e dei bracci delle sospensioni, nonché dell'effetto di un eventuale sistema di servosterzo, il valore dell'angolo di sterzo delle ruote non è univocamente determinato dalla posizione del volante. Per semplicità si può supporre di avere un sistema di guida perfettamente rigido. In tal modo la posizione angolare delle ruote sterzanti risulta assegnata e non costituisce una variabile.

Per ultima l'ipotesi di piccoli angoli di sterzo delle ruote, compatibile, tra l'altro, con l'ipotesi precedente di piccoli valori di accelerazione laterale.

L'effetto totale di tutte queste ipotesi è un modello con tre soli gradi di libertà, in cui il veicolo è schematizzato come un unico corpo rigido in moto piano (vedi fig. 2.1).

## 2.2 Grandezze di riferimento

Sulla base delle precedenti ipotesi, si procede a formulare matematicamente un modello di veicolo. Un possibile schema è rappresentato in fig. 2.1. Si tratta di un unico corpo rigido di massa  $m$  e baricentro  $G$ .



**Fig. 2.1: modello di veicolo a 3 g.l.: velocità laterale, velocità di imbardata ed angolo di rollio.**

Per consuetudine, si definisce un sistema di riferimento cartesiano  $(x, y, z; G)$  solidale al veicolo, e quindi detto di assi corpo, con origine nel baricentro e versori  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Come illustrato in fig. 2.1, l'asse  $x$  viene assunto parallelo alla strada e diretto in avanti, asse  $z$  ortogonale alla strada e diretto verso l'alto ed asse  $y$  perpendicolare agli altri due e diretto verso sinistra.

In generale, questo sistema di riferimento non coincide con la terna centrale d'inerzia. Se però si assume che il veicolo sia simmetrico rispetto al piano longitudinale contenente i due assi  $x$  e  $z$ , almeno l'asse  $y$  è centrale di inerzia e quindi si annullano i prodotti di inerzia  $J_{xy}$  e  $J_{zy}$ , mentre è in generale non nullo il prodotto d'inerzia  $J_{zx}$ .

Come già detto, il veicolo è supposto in moto piano. Si indica con  $\mathbf{\Omega} = r\mathbf{k}$  la sua velocità di imbardata (*yaw rate*), con  $\mathbf{k}$  ortogonale al piano stradale e diretto verso l'alto. Pertanto  $r$  è positiva se il corpo ruota in senso antiorario. La velocità assoluta del baricentro è indicata con  $V_G$ . La posizione del baricentro rispetto al veicolo dalle lunghezze  $a_1$  e  $a_2$  (dette semipassi); con  $l = a_1 + a_2$  si indica il passo (*wheelbase*) mentre  $t_1$  e  $t_2$

rappresentano rispettivamente la carreggiata anteriore e posteriore del veicolo.

Per la cosiddetta sterzata cinematica, cioè con angoli di deriva tutti nulli, l'angolo  $\delta_i$  della ruota interna alla curva è maggiore di quello della ruota esterna  $\delta_e$  secondo la relazione

$$\frac{t_1}{l} = \frac{1}{\tan(\delta_e)} - \frac{1}{\tan(\delta_i)} \quad (2.1)$$

da cui si ricava

$$\delta_e = \delta_i - \frac{t_1}{l} \delta_i^2 + O(\delta_i^3).$$

Pertanto, per piccoli angoli di sterzo, si ha  $\delta_i \cong \delta_e$ .

Si può ora procedere alla formulazione matematica del modello mediante i seguenti tre gruppi di equazioni, fra loro ben distinti: equazioni di congruenza, equazioni di equilibrio ed equazioni costitutive.

### 2.3 Equazioni di congruenza

L'angolo di deriva  $\alpha$  individua la direzione della velocità del centro ruota rispetto al piano di simmetria longitudinale della ruota stessa (assunto positivo se diretto in senso orario). Avendo schematizzato il veicolo come unico corpo rigido, la velocità del baricentro  $V_G$  e la velocità di imbardata  $r$  determinano univocamente gli angoli di deriva  $\alpha_{ij}$  delle quattro ruote.

Come indicato nelle fig. 2.1 e fig. 2.2, è conveniente esprimere la velocità assoluta  $V_G$  del baricentro  $G$  utilizzando un sistema di riferimento cartesiano  $(x, y, z; G)$  solidale con il veicolo e quindi detto di assi corpo, in cui il versore  $\mathbf{i}$  sia diretto longitudinalmente verso la direzione di avanzamento, il versore  $\mathbf{j}$  sia diretto trasversalmente verso sinistra e il terzo asse, individuato da  $\mathbf{k}$ , sia ortogonale alla strada e diretto verso l'alto. Dato che si considerano solo le velocità, non ha molta importanza posizionare l'origine, ma è prassi comune porla in  $G$ .

Si ha così  $V_G = (u, v, 0)$ , ovvero

$$V_G = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (2.2)$$

La componente  $u$  è detta velocità di avanzamento mentre la componente  $v$  è detta velocità laterale del veicolo.

L'angolo  $\beta = \arctan(v/u)$  fra l'asse longitudinale del veicolo e la direzione della velocità del baricentro viene detto angolo di assetto del veicolo (*sideslip angle*).

Nel sistema di riferimento prescelto, la velocità angolare del veicolo ha, nelle ipotesi fatte, due componenti nulle:  $\Omega = (0,0,r)$ . Si ha cioè solo imbardata, senza beccheggio e rollio.

Si considerano le velocità assolute dei centri delle ruote al fine di legare gli angoli di deriva alla velocità di imbardata  $r$  ed alle componenti  $u$  e  $v$ .

Analiticamente risulta

$$\begin{aligned} V_{11} &= \left( u - r \frac{t_1}{2}, v + ra_1 \right) \\ V_{12} &= \left( u + r \frac{t_1}{2}, v + ra_1 \right) \\ V_{21} &= \left( u - r \frac{t_2}{2}, v - ra_2 \right) \\ V_{22} &= \left( u + r \frac{t_2}{2}, v - ra_2 \right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ne seguono subito le seguenti relazioni rigorose, in cui le prime due sono relative alle ruote anteriori e le altre due alle ruote posteriori

$$\begin{aligned} \tan(\delta - \alpha_{11}) &= \frac{v + ra_1}{u - r \frac{t_1}{2}} \\ \tan(\delta - \alpha_{12}) &= \frac{v + ra_1}{u + r \frac{t_1}{2}} \\ \tan(-\alpha_{21}) &= \frac{v - ra_2}{u - r \frac{t_2}{2}} \\ \tan(-\alpha_{22}) &= \frac{v - ra_2}{u + r \frac{t_2}{2}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Se si tiene conto che in normali condizioni di esercizio  $u \gg |r|t_i/2$ , si ottiene l'importante risultato che le due ruote di uno stesso assale lavorano con angoli di deriva quasi uguali. Si può quindi indicare con  $\alpha_1$  l'angolo di deriva di entrambe le ruote anteriori e con  $\alpha_2$  l'angolo di deriva delle ruote posteriori. Le precedenti relazioni si riducono così a due

$$\begin{aligned}\tan(\delta - \alpha_1) &= \frac{v + ra_1}{u} \\ \tan(-\alpha_2) &= \frac{v - ra_2}{u}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Nella realtà, in condizioni di normale funzionamento l'angolo di deriva della ruota esterna alla curva è lievemente inferiore a quello della ruota interna, e ciò discende da considerazioni puramente cinematiche. Infatti, come mostrato in fig 2.2, la posizione del centro di istantanea rotazione  $C$  definisce univocamente tutti gli angoli di deriva, note che siano le posizioni delle ruote, ovvero i loro angoli di sterzo e/o di convergenza.

Per semplificare ulteriormente, si può considerare che la velocità di avanzamento  $u$  è, di norma, ben più elevata della velocità laterale  $v$  e delle velocità dovute alla presenza di  $r$ . Si ha cioè che  $u \gg |v + ra_1|$  e  $u \gg |v - ra_2|$ .

E' quindi legittimo nelle (2.5) confondere l'arco con la tangente ed ottenere le seguenti equazioni di congruenza linearizzate

$$\begin{aligned}\delta - \alpha_1 &= \frac{v + ra_1}{u} \\ -\alpha_2 &= \frac{v - ra_2}{u}\end{aligned}\tag{2.6}$$

che legano le velocità  $u, v$  ed  $r$  agli angoli di deriva  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

Se valgono le stesse ipotesi, anche l'angolo di assetto  $\beta$  di fig. 2.2 può essere valutato mediante una relazione linearizzata

$$\beta = \frac{v}{u}\tag{2.7}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni di congruenza (2.6) si ottiene l'importante relazione cinematica

$$\delta = (a+b)\frac{r}{u} + \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{l}{R} + \alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.8)$$

dove si è introdotta la lunghezza (con segno)

$$R = \frac{u}{r} \quad (2.9)$$

Essendo stata ottenuta direttamente dalle (2.6), la relazione (2.8) vale anche in condizioni non stazionarie. La lunghezza  $R$  rappresenta semplicemente la distanza del centro di istantanea rotazione  $C$  dall'asse del veicolo (fig. 2.2). La lunghezza  $R$  è positiva se  $C$  si trova dalla sinistra del veicolo ( $r > 0$ ).

Per inciso, si fa notare che la condizione  $u \gg |r|t_i/2$ , utilizzata in precedenza per ottenere le equazioni (2.6), può essere scritta come  $|rR| \gg |r|t_i/2$ , ovvero come  $|R| \gg t_i/2$ , che è forse più espressiva.

La quantità

$$\delta_0 = \frac{l}{R} \quad (2.10)$$

è detta *angolo di Ackermann*, e rappresenta l'angolo di sterzo per percorrere una curva di raggio costante pari ad  $R$ , supponendo di avere angoli di deriva nulli (sterzata cinematica).

## 2.4 Equazioni di equilibrio

La stesura delle equazioni di equilibrio richiede due distinte operazioni: il calcolo delle accelerazioni e la valutazione delle forze e dei momenti agenti.

### 2.4.1 Calcolo delle accelerazioni

L'espressione dell'accelerazione  $\mathbf{a}_G$  del baricentro si ottiene immediatamente derivando la velocità  $\mathbf{v}_G = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$  (eq. (2.2)) rispetto al tempo  $t$ . Naturalmente, occorre tener presente che i versori cambiano direzione durante il moto per cui  $d\mathbf{i}/dt = r\mathbf{j}$  e  $d\mathbf{j}/dt = -r\mathbf{i}$ . Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_G &= \frac{d\mathbf{V}_G}{dt} = \dot{u}\mathbf{i} + ur\mathbf{j} + \dot{v}\mathbf{j} - vr\mathbf{i} \\
 &= (\dot{u} - vr)\mathbf{i} + (\dot{v} + ur)\mathbf{j} \\
 &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

In questo modo si è scomposta  $\mathbf{a}_G$  in *accelerazione longitudinale*

$$a_x = \dot{u} - vr \tag{2.12}$$

e in *accelerazione laterale*

$$a_y = \dot{v} + ur = \dot{v} + \frac{u^2}{R} \tag{2.13}$$

rispetto all'asse del veicolo.

Per i successivi sviluppi è utile definire l'accelerazione laterale a regime

$$\tilde{a}_y = ur = \frac{u^2}{R} \tag{2.14}$$

così da avere  $a_y = \dot{v} + \tilde{a}_y$ . Se si rapporta  $\tilde{a}_y$  all'accelerazione di gravità  $g$  si ottiene

$$k = \frac{\tilde{a}_y}{g} \tag{2.15}$$

il cui valore massimo è spesso detto *tenuta in curva*.

Per concludere il calcolo delle accelerazioni non rimane da considerare che l'accelerazione angolare data semplicemente da  $\dot{\Omega} = (0, 0, \dot{r})$ .

## 2.4.2 Forze e momenti

Su un autoveicolo agiscono tre tipi di forze: la forza peso dovuta alla gravità, le reazioni sulle quattro ruote dovute al contatto pneumatico-strada e le forze aerodinamiche dovute alla presenza dell'aria.

Le azioni esterne agenti sul veicolo danno luogo, in ogni istante, ad una forza risultante agente lungo una certa retta di applicazione. Rispetto al sistema di riferimento di assi corpo  $(x, y, z; G)$ , si indicano con

$(X, Y, Z)$  le tre componenti della forza risultante agente globalmente sul veicolo e con  $(L, M, N)$  le sue tre componenti di momento.

Le tre equazioni di equilibrio (in forma newtoniana) dell'unico corpo rigido in moto piano, di massa  $m$  e momento di inerzia  $J = J_z$  rispetto all'asse verticale  $z$  per  $G$ , si possono quindi indicare sinteticamente nel modo seguente

$$\begin{aligned} ma_x &= X \\ ma_y &= Y \\ Jr &= N \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove  $X = \sum$  forze longitudinali,  $Y = \sum$  forze laterali e  $N = \sum$  momenti intorno all'asse  $z$ . In base alle relazioni (2.12) e (2.13) si ha che  $a_x = \dot{u} - vr$  e  $a_y = \dot{v} + ur$ .

Nell'ambito del modello piano in esame, le principali forze agenti sul veicolo sono le forze trasmesse dai pneumatici. A queste si possono aggiungere la resistenza aerodinamica  $X_a = \frac{1}{2} \rho S C_x u^2$  e l'eventuale spinta laterale del vento  $Y_a$ .

Utilizzando le stesse convenzioni introdotte nel capitolo sul comportamento dei pneumatici, si indicano con  $F_{xij}$  le componenti longitudinali e con  $F_{yij}$  le componenti trasversali delle forze trasmesse dalla strada alle quattro ruote. Si osservi che i termini longitudinale e trasversale sono qui relativi alla ruota e non al veicolo. Per semplicità si suppongono nulli tutti i momenti di autoallineamento  $M_{zij}$ . Lo spostamento di pochi centimetri della retta di applicazione delle forze laterali avrebbe ben poca influenza sulla dinamica globale del veicolo.

Nelle  $F_{xij}$  vengono inglobate le forze di trazione e la resistenza al rotolamento, anche se queste ultime sono spesso di entità trascurabile rispetto alle altre forze nel moto in curva.

Tenendo conto che per angoli di sterzo fino a circa  $15^\circ$  è lecito porre  $\cos \delta \cong 1$  e  $\sin \delta \cong \delta$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) - (F_{y_{11}} + F_{y_{12}}) \delta + (F_{x_{21}} + F_{x_{22}}) - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \\
m(\dot{v} + ur) &= (F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) \delta + (F_{y_{11}} + F_{y_{12}}) + (F_{y_{21}} + F_{y_{22}}) \\
J\dot{r} &= [(F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) \delta + (F_{y_{11}} + F_{y_{12}})] a_1 - (F_{y_{21}} + F_{y_{22}}) a_2 \\
&\quad - (F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) \frac{t_1}{2} - (F_{x_{21}} - F_{x_{22}}) \frac{t_2}{2} + (F_{y_{11}} - F_{y_{12}}) \delta \frac{t_1}{2}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

E' conveniente sommare i contributi delle due ruote dello stesso assale ponendo

$$\begin{aligned}
F_{x_1} &= F_{x_{11}} + F_{x_{12}} \\
F_{x_2} &= F_{x_{21}} + F_{x_{22}} \\
F_{y_1} &= F_{y_{11}} + F_{y_{12}} \\
F_{y_2} &= F_{y_{21}} + F_{y_{22}}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

in modo da rendere più compatta la notazione.

Se la ripartizione della coppia motrice tra le due ruote dello stesso asse avviene mediante un differenziale ordinario (non autobloccante) e se i due pneumatici dello stesso assale hanno raggi sotto carico uguali, allora si può assumere che  $F_{x_{11}} = F_{x_{12}}$  e  $F_{x_{21}} = F_{x_{22}}$ , con il conseguente annullamento di parte dell'ultima riga in (2.18). Se restringiamo il campo di applicazione ai veicoli a due ruote motrici, quelle dell'assale posteriore, si ha un'ulteriore semplificazione trascurando le resistenze al rotolamento dei due pneumatici anteriori, ponendo che sia  $F_{x_{11}} = F_{x_{12}} = 0$ .

Rimane però il termine con  $(F_{y_{11}} - F_{y_{12}}) \delta t_1 / 2$ . Contenendo la differenza delle forze laterali delle due ruote anteriori, costituisce un termine alquanto "fastidioso" per i successivi sviluppi. Rende infatti vana l'ultima delle posizioni (2.19). A prima vista si può pensare che sia  $F_{y_{11}} \cong F_{y_{12}}$ , ma come evidenziato durante la formulazione delle equazioni costitutive, anche se le ruote dello stesso asse lavorano con angoli di deriva quasi uguali questo non basta per avere forze laterali quasi uguali.

Come si vedrà in seguito le forze laterali dipendono dal carico verticale gravante su ciascuna ruota ed in curva, a causa dell'accelerazione laterale, sulle due ruote gravano carichi verticali

diversi. La differenza tra le forze laterali dell'assale anteriore va moltiplicata per l'angolo di sterzo (in radianti) che abbiamo supposto inferiore dei  $15^\circ$ .

Tutte queste considerazioni fanno sì che non sia del tutto sconsiderato trascurare il termine  $(F_{y_{11}} - F_{y_{12}}) \delta t_1 / 2$  con il vantaggio di una notevole semplificazione matematica oltre che formale.

In base a quanto detto, si possono scrivere le equazioni di equilibrio nella seguente forma

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= F_{x_2} - F_{y_1} \delta - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \\ m(\dot{v} + ur) &= F_{y_1} + F_{y_2} \\ J\dot{r} &= F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

in cui compaiono le componenti longitudinali e laterali delle forze esercitate globalmente da ciascun assale.

Rimanendo in tema di equilibrio, affrontiamo anche il problema della ripartizione di carico verticale fra l'assale anteriore e quello posteriore. In condizioni di marcia rettilinea con velocità uniforme, i carichi verticali agenti sui due assali, rispettivamente  $F_{z_1}$  ed  $F_{z_2}$ , discendono dalle seguenti equazioni di equilibrio del veicolo nel piano  $x - z$

$$\begin{aligned} F_{z_1} + F_{z_2} - mg &= 0 \\ -F_{z_1} a_1 + F_{z_2} a_2 + X_a h_a &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} F_{z_1} &= \frac{mga_2}{l} + X_a \frac{h_a}{l} = W_1 + X_a \frac{h_a}{l} \\ F_{z_2} &= \frac{mga_1}{l} - X_a \frac{h_a}{l} = W_2 - X_a \frac{h_a}{l} \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove si indicato con  $h_a$  la distanza dal piano stradale della forza di resistenza aerodinamica  $X_a$  (*drag force*) agente sul veicolo.

Se il veicolo si trova in curva e/o in condizioni non stazionarie le precedenti equazioni equilibrio subiscono delle modifiche dovute alla

componente longitudinale dell'accelerazione  $a_G$  ed al prodotto di inerzia  $J_{zx}$

$$\begin{aligned} F_{z1} + F_{z2} - mg &= 0 \\ -F_{z1} a_1 + F_{z2} a_2 + X_a h_a &= m(\dot{u} - vr)h_G - J_{zx} r^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

In condizioni stazionarie  $\dot{u} = 0$ , ma gli altri effetti permangono, anche se vengono spesso trascurati perché abbastanza piccoli.

## 2.5 Equazioni costitutive (modello di pneumatico)

Per completare il modello di veicolo, resta da definire il comportamento di ciascun pneumatico. La forza laterale  $F_{yij}$ , esercitata dalla strada su ciascuna ruota, dipende principalmente dal corrispondente angolo di deriva  $\alpha_{ij}$ , ma non solo; anche supponendo noto il coefficiente di aderenza, si ha un'influenza non trascurabile del carico verticale  $F_{zij}$ , ed anche dall'angolo di camber  $\gamma_{ij}$  e della forza longitudinale  $F_{xij}$ .

Nelle condizioni di moto di pura dinamica laterale, con velocità di avanzamento costante, la forza longitudinale delle ruote motrici, in presenza di differenziale ordinario, risulta di modesta entità; pertanto l'influenza sulla forza laterale può essere trascurata (assenza di azioni combinate).

In questa trattazione utilizzeremo il modello di pneumatico linearizzato, il modello più semplice fra forza laterale, angolo di deriva ed angolo di camber

$$F_{yij} = C_{\alpha_{ij}} \alpha_{ij} + C_{\gamma_{ij}} \gamma_{ij} \quad (2.23)$$

avendo indicato con  $C_{\alpha_{ij}}$  e  $C_{\gamma_{ij}}$  rispettivamente la rigidità e di deriva e di camber del pneumatico.

Il campo di impiego è limitato a quei casi in cui gli angoli di deriva sono piccoli. Se gli angoli di deriva sono piccoli, ne segue che anche il trasferimento di carico verticale  $\Delta F_{zi}$  in curva tra le due ruote di uno stesso assale sarà contenuto. Si può quindi linearizzare anche la dipendenza delle rigidità di deriva  $C_{\alpha_{ij}}$  e di camber  $C_{\gamma_{ij}}$  da  $\Delta F_{zi}$  a partire dai valori, rispettivamente  $C_{\alpha_{ij}}^0$  e  $C_{\gamma_{ij}}^0$ , che assumono in

corrispondenza del carico verticale agente sul pneumatico quando il veicolo è in moto rettilineo uniforme con velocità  $u$ . Analiticamente si ha

$$\begin{aligned} C_{\alpha_{ij}} &\cong C_{\alpha_i}^0 \pm \zeta_{\alpha_i} \Delta F_{z_i} \\ C_{\gamma_{ji}} &\cong C_{\gamma_i}^0 \pm \zeta_{\gamma_i} \Delta F_{z_i} \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove  $\zeta_{\alpha}$  e  $\zeta_{\gamma}$  identificano la sensibilità delle rigidezze, di deriva e camber, al carico verticale.

Nella presenta trattazione verrà trascurata l'influenza dell'angolo di camber. Sperimentalmente, infatti, si ha che il rapporto tra la rigidezza di deriva (*cornering stiffness*) e la rigidezza di camber (*camber thrust*)  $C_{\gamma}/C_{\alpha}$  è pari a 0.05 ca. per un pneumatico radiale. Inoltre l'angolo di camber in una autovettura non supera di norma i 2° con spinte di camber dell'ordine dei 100 N, quindi si tratta di forze di modesta entità.

## 2.6 Caratteristica effettiva dell'assale

L'introduzione di opportune ipotesi semplificative ha permesso di esprimere le accelerazioni del veicolo in funzione delle forze (laterale e longitudinale) esercitate da ciascun assale.

In generale si definisce caratteristica effettiva dell'assale ([1], [2]) (*effective axle cornering characteristics*) la relazione  $Y(\hat{\alpha})$  tra la forza laterale e l'angolo di deriva "apparente" di un assale, cioè l'angolo di deriva dovuto all'angolo di sterzo imposto dal driver e alle velocità dei centri ruota (eq. 2.6). In altri termini l'angolo di deriva *apparente*  $\hat{\alpha}$  è l'angolo di deriva del pneumatico  $\alpha$  depurato dall'angolo di sterzo  $\varepsilon$  indotto dalle caratteristiche elastocinematiche della sospensione:

$$F_y = Y(\hat{\alpha}), \quad \hat{\alpha} = \alpha - \varepsilon \quad (2.23)$$

In condizioni di moto stazionario, attraverso l'utilizzo della caratteristica effettiva dell'assale è possibile tener conto, anche in un modello piano di veicolo a 3 gdl, del comportamento elastocinematico della sospensione, dell'angolo di rollio e del trasferimento di carico verticale. La restrizione alle condizioni di moto stazionario discende dal fatto che in condizioni di moto transitorio o oscillatorio, con sfasamenti evidenti tra le accelerazioni di imbardata e di rollio, le variabili quali

l'angolo di rollio ed i carichi verticali non possono essere considerate funzioni algebriche dell'accelerazione laterale.

In accordo con l'ipotesi di valori modesti di accelerazione laterale ( $a_y \leq 0.4g$ ), è possibile linearizzare la relazione 2.23

$$F_y = C_{eff} \hat{\alpha} \quad (2.24)$$

dove  $C_{eff}$  identifica la rigidezza di deriva effettiva dell'assale (*effective axle cornering stiffness*).

Le variazioni di carico verticale  $\Delta F_{z_{ij}}$  (*load transfer*) sulla singola ruota di un autoveicolo sono dovute al momento ribaltante causato dall'accelerazione laterale. In condizioni di moto stazionario, l'entità del trasferimento di carico dipende dal prodotto della massa  $m$  per l'accelerazione laterale, ovvero dalla somma delle forze laterali esercitate dai due assali. In accordo con l'ipotesi di assenza di apprezzabili trasferimenti di carico longitudinali il carico verticale globale  $F_{z_i}$  agente sulle due ruote di uno stesso assale rimane costante durante il moto. In altri termini si può assumere che l'aumento di carico verticale sulla ruota esterna sia pari alla diminuzione di carico sulla ruota interna:  $\Delta F_{z_{i1}} = \Delta F_{z_{i2}}$ .

Per mantenere la trattazione quanto più semplice possibile, si schematizza il veicolo come composto da tre corpi rigidi (fig. 2.1): la massa sospesa  $m_s$ , l'assale anteriore e l'assale posteriore. Nello schema, la massa sospesa è vincolata a ciascun assale mediante una coppia rotoidale posizionata in corrispondenza del cosiddetto centro di rollio (*roll center*), inoltre le due coppie hanno un asse coincidente, detto asse di rollio (*roll axis*). La posizione dei centri di rollio, e di conseguenza l'asse di rollio, dipendono dalle caratteristiche elastocinematiche (*kinematic & compliance*) delle sospensioni. Considerando la simmetria del veicolo rispetto al piano  $x-z$  e con l'ipotesi di piccoli angoli di rollio, i centri di rollio possono essere considerati fissi con l'asse di rollio contenuto nel piano  $x-z$ .

Dato che nella realtà il rapporto tra massa non sospesa  $m_n = m - m_s$  e massa sospesa vale circa 1/10, in questa sede si suppone  $m_n = 0$  (o in altri termini potrebbe essere considerata come due masse puntiformi posizionate sui centri di rollio).

L'elasticità di ciascuna sospensione e della eventuale barra di torsione può essere rappresentata da una rigidezza torsionale

equivalente  $k_{\phi}$  agente direttamente sulla coppia rotoidale. L'angolo di rollio è uguale perché si è ipotizzata una carrozzeria perfettamente rigida.

Sono rilevanti le seguenti grandezze geometriche (fig. 2.1): i due semipassi  $a_1$  e  $a_2$  e il passo  $l = a_1 + a_2$ , la carreggiata anteriore e posteriore  $t_1$  e  $t_2$ , l'altezza da terra  $h_G$  del baricentro, le altezze da terra  $h_1$  e  $h_2$  dei centri di rollio (negative il corrispondente centro di rollio e sotto il piano stradale).

Per l'equilibrio laterale globale a regime

$$mur = F_{y_1} + F_{y_2} = Y$$

$$F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 = 0$$

da cui si ricavano le forze laterali dell'assale, rispettivamente  $F_{y_1} = Y a_2 / l$  e  $F_{y_2} = Y a_1 / l$ , dipendenti esclusivamente dalla posizione longitudinale del baricentro.

Per l'equilibrio alla rotazione della massa sospesa rispetto all'asse di rollio si ricava immediatamente l'espressione dell'angolo di rollio:

$$\phi = Y \frac{h_G - h}{k_{\phi_1} + k_{\phi_2} - mg(h_G - h)} = Y \frac{h'}{k_{\phi} - mgh'}$$

dove si è indicato con  $k_{\phi} = k_{\phi_1} + k_{\phi_2}$  la rigidezza totale antirollio mentre con  $h = (a_2 h_1 + a_1 h_2) / l$  l'altezza della traccia dell'asse di rollio sul piano verticale contenente il baricentro.

Infine, per l'equilibrio di ciascun assale rispetto all'asse di rollio

$$-\Delta F_{z_i} t_i + F_{y_i} h_i + k_{\phi_i} \phi = 0$$

Utilizzando i precedenti risultati si perviene a

$$\Delta F_{z_i} = \frac{1}{t_i} \left( \frac{l - a_i}{l} h_i + \frac{k_{\phi_i}}{k_{\phi} - mgh'} h' \right) Y = \sigma_i Y \quad (2.25)$$

che esprimono un legame lineare il trasferimento di carico verticale su ciascun assale alla forza laterale  $Y$  agente globalmente sul veicolo.

I coefficienti  $\sigma_i$  (*lateral load transfer coefficients*) sono composti da due termini, ognuno con un preciso significato fisico. Il primo termine individua quella parte di  $\Delta F_{z_i}$  che è trasferita dai braccetti della sospensione (*jacking forces*), mentre il secondo termine indica la parte trasferita dagli elementi elastici (molle e barre antirullo).

Dalle relazioni (2.25) e dalle espressioni delle forze laterali dell'assale (a regime) si ha

$$\Delta F_{z_i}(\alpha_i) = \frac{1}{t_i} \left( h_i + \frac{k_{\phi_i}}{k_{\phi} - mgh' l - a_i} \frac{h'l}{l - a_i} \right) F_{y_i}(\alpha_i) = \sigma_i \frac{l}{l - a_i} F_{y_i}(\alpha_i) \quad (2.26)$$

Rimane adesso da esplicitare il legame tra l'angolo di deriva  $\alpha$  e l'angolo di deriva apparente  $\hat{\alpha}$  attraverso l'introduzione delle caratteristiche elastocinematiche della sospensione. In generale l'angolo di deriva dell'assale è dato da:

$$\alpha_i = \delta_i(\delta_{sw}, \varepsilon_i) - \frac{v \pm r a_i}{u} \quad (2.27)$$

dove si è esplicitata la dipendenza dell'angolo di rotazione  $\delta_i$  della ruota attorno all'asse di sterzo dai due termini: l'angolo volante (*steering wheel angle*)  $\delta_{sw}$  imposto dal driver attraverso la linea di sterzo (solo per l'assale sterzante) e l'angolo di sterzo  $\varepsilon_i$  medio dell'assale derivante dalle variazioni di convergenza delle singole ruote dovute allo spostamento verticale della ruota (e quindi al rollio) ed alle flessibilità della sospensione sotto i carichi laterali.

In accordo con l'ipotesi di piccoli angoli (di rollio e di sterzo) e di bassi livelli di accelerazione laterale è possibile linearizzare il legame  $\delta_i(\delta_{sw}, \varepsilon_i)$ :

$$\delta_i(\delta_{sw}, \varepsilon_i) = \frac{\delta_{sw}}{n_{sw}} + \varepsilon_{\phi_i} \phi + (\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) F_{y_i} \quad (2.28)$$

Nella relazione (2.28) il parametro  $n_{sw}$  identifica il rapporto sterzo (*steering ratio*) cioè il rapporto tra l'angolo di rotazione del volante e l'angolo di rotazione delle ruote.

La quantità  $\varepsilon_{\phi_i}$  rappresenta la variazione di convergenza in funzione del rollio (*roll steer gradient*), mentre  $\varepsilon_{sf_i}$  rappresenta la

variazione di convergenza in funzione di una forza laterale applicata nella traccia dell'asse di sterzo sul piano stradale (*side force steer gradient*).

Infine la quantità  $\varepsilon_{at_i}$  rappresenta la variazione di convergenza in funzione del momento autoallineante generato dalla forza laterale attraverso il braccio a terra longitudinale (*mechanical trail*) ed il braccio di pneumatico (*pneumatic trail*), in particolare si ha

$$\varepsilon_i(M_z) = -\frac{t_{m_i} + t_{t_i}}{k_{at_i}} F_{y_i} = -\varepsilon_{at_i} F_{y_i} \quad (2.29)$$

dove si è indicato con  $k_{at_i}$  la rigidezza totale del sistema sospensione - linea sterzo rispetto all'asse di sterzo.

La forza laterale dell'assale è data dalla somme delle forze laterali esercitate dai singoli pneumatici:

$$\begin{aligned} F_{y_{i1}} &= (C_{\alpha_i}^0 - \zeta_{\alpha_i} \Delta F_{z_i})(\alpha_i + \varepsilon_0) \\ F_{y_{i2}} &= (C_{\alpha_i}^0 + \zeta_{\alpha_i} \Delta F_{z_i})(\alpha_i - \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove si è indicato con  $\varepsilon_0$  l'eventuale convergenza iniziale della ruota.

In definitiva, la forza laterale del generico assale è data da:

$$F_{y_i} = \frac{C_{\alpha_i}}{1 - C_{\alpha_i} \left( \varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i} + \varepsilon_{\phi_i} \frac{h'}{k_{\phi} - mgh'} \frac{l}{l - a_i} \right) + 2\varepsilon_0 \zeta_{\alpha_i} \sigma_i \frac{l}{l - a_i}} \hat{\alpha}_i = C_{eff_i} \hat{\alpha}_i \quad (2.31)$$

dove si è indicato con  $C_{\alpha_i} = 2C_{\alpha_i}^0$  la rigidezza di deriva dell'assale; questa coincide con la rigidezza di deriva effettiva dell'assale qualora si annullino gli effetti elastocinematici della sospensione.

Dalla (2.31) emerge che, nel caso di pneumatici lineari, l'effetto del trasferimento di carico verticale sulla rigidezza di deriva dell'assale è legato alla presenza di una convergenza iniziale delle ruote dell'assale.

Dal momento che si ha sempre  $\varepsilon_{at_i} \geq 0$ , la flessibilità del sistema sterzo - sospensione ai momenti autoallineanti comporta una diminuzione della rigidezza effettiva dell'assale. Adottando opportune variazioni di convergenza in funzione di rollio e di carico laterale è possibile variare (a parità di pneumatici sui i due assali) la rigidezza di

deriva effettiva dei due assali compensando ad es. il carattere sotto/sovrasterzante di un autoveicolo indotto dalla sua ripartizione di massa.

## 2.7 Modello monotraccia di autoveicolo

A questo punto si tratta di mettere insieme equazioni di congruenza, equazioni di equilibrio ed equazioni costitutive per ottenere le equazioni di stato che sono alla base del famoso modello monotraccia (*single track model*) ([1], [2], [4], [5], [6]), illustrato in fig. 2.2.

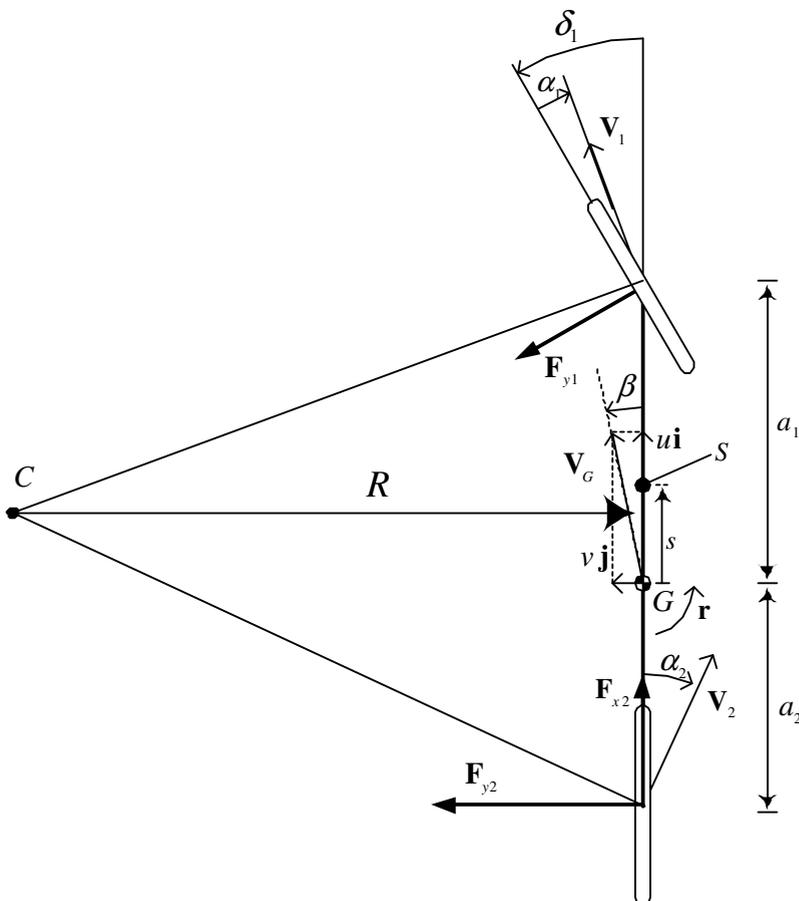


Fig. 2.2: Modello monotraccia classico di autoveicolo.

In fig. 2.2 è evidenziato il legame puramente cinematico fra la posizione del centro di istantanea rotazione  $C$  e i due angoli di deriva  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . La posizione di  $C$  (e quindi anche la sua distanza  $R$  dall'asse del veicolo) è univocamente determinata dalla *direzione* della velocità di due punti del corpo rigido, come, ad es.,  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{V}_2$ . La velocità di tutti gli altri punti discende di conseguenza.

*Equazioni di congruenza*

$$\alpha_1 = \delta - \frac{v + r a_1}{u}$$

$$\alpha_2 = -\frac{v - r a_2}{u}$$

*Equazione di equilibrio*

$$m(\dot{u} - vr) = F_{x_2} - F_{y_1} \delta - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2$$

$$m(\dot{v} + ur) = F_{y_1} + F_{y_2}$$

$$J\dot{r} = F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2$$

*Equazioni costitutive*

$$F_{y_1} = C_1 \alpha_1$$

$$F_{y_2} = C_2 \alpha_2$$

Nelle equazioni costitutive le grandezze  $C_i$  identificano le rigidzze di deriva effettive di ciascun assale.

Una volta fissato il modello non resta che stabilire cosa considerare noto e cosa incognito. Forse la scelta più naturale è supporre assegnate la forza longitudinale  $F_{x_2}$  e l'angolo di sterzo  $\delta(t)$ . Rimangono incognite le tre funzioni  $u(t)$ ,  $v(t)$  ed  $r(t)$ . In base alle equazioni di congruenza si possono esprimere gli angoli di deriva come  $\alpha_1 = \alpha_1(u, v, r, t)$  e  $\alpha_2 = \alpha_2(u, v, r, t)$ , e quindi anche le forze laterali  $F_{y_1}$  e  $F_{y_2}$  diventano funzioni di  $u$ ,  $v$ ,  $r$ , e  $t$ .

Si perviene così ad un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine in forma normale nelle variabili di stato  $u(t)$ ,  $v(t)$  ed  $r(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \frac{1}{m} \left[ F_{x_2} - F_{y_1} \delta - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \right] + vr = f_1(u, v, r, t) \\
\dot{v} &= \frac{1}{m} \left[ F_{y_1} + F_{y_2} \right] - ur = f_2(u, v, r, t) \\
\dot{r} &= \frac{1}{J} \left[ F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 \right] = f_3(u, v, r, t)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Nelle funzioni  $f_i(u, v, r, t)$  compare esplicitamente anche il tempo  $t$  ed il sistema è detto *non autonomo*.

Un'ulteriore semplificazione del modello la si ottiene supponendo assegnata la velocità di avanzamento, ossia la funzione  $u(t)$ . Infatti la prima equazione in (2.32) diventa un'equazione algebrica nella nuova incognita che sarà necessariamente la forza di trazione  $F_{x_2}(t)$ . Si perviene così alla massima semplificazione matematica con le due equazioni di stato nelle variabili  $v(t)$  ed  $r(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= - \left( \frac{C_1 + C_2}{mu} \right) v - \left( \frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{mu} + u \right) r + \frac{C_1}{m} \delta \\
\dot{r} &= - \left( \frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{Ju} \right) v - \left( \frac{C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2}{Ju} \right) r + \frac{C_1 a_1}{J} \delta
\end{aligned} \tag{2.33}$$

L'equazione rimanente serve semplicemente per valutare la forza di trazione  $F_{x_2}(t)$

$$F_{x_2} = m(\dot{u} - vr) + C_1 \left( \delta - \frac{v + r a_1}{u} \right) \delta + \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \tag{2.34}$$

Introducendo la notazione matriciale, il sistema di due equazioni differenziali si può riscrivere come

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{b} \tag{2.35}$$

dove  $\mathbf{w}(t) = (v(t), r(t))$  rappresenta il vettore delle variabili di stato, il vettore dei termini noti è dato da  $\mathbf{b} = (C_1 \delta(t)/m, C_1 a_1 \delta(t)/J)$  e

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(u(t)) = - \begin{bmatrix} \frac{C_1 + C_2}{mu} & \frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{mu} + u \\ \frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{Ju} & \frac{C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2}{Ju} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

è la matrice dei coefficienti. È importante notare che la matrice  $\mathbf{A}$  dipende dalla velocità di avanzamento  $u(t)$ , ma non dall'angolo di sterzo  $\delta(t)$ . Il contrario vale per il termine noto  $\mathbf{b}$ .

Inoltre, con  $u(t)$  assegnata, le equazioni di congruenza (2.6) diventano un legame lineare fra  $(\alpha_1, \alpha_2)$  e  $(v, r)$ , quindi facile da invertire

$$\begin{aligned} v &= \frac{u}{l} [a_2(\delta - \alpha_1) - a_1\alpha_2] \\ r &= \frac{u}{l} [(\delta - \alpha_1) - \alpha_2] \end{aligned} \quad (2.37)$$

si ha quindi la possibilità di scegliere fra  $(v, r)$  e  $(\alpha_1, \alpha_2)$  quali variabili di stato.

### 2.7.1 Comportamento a regime

Se il veicolo è stabile, l'integrale particolare  $\mathbf{w}_p(t)$  rappresenta il tipo di moto in condizioni di regime (non necessariamente stazionarie se  $\dot{\delta}(t) \neq 0$ ). Infatti, la parte transitoria della soluzione decade e, dopo un tempo sufficientemente lungo, diventa del tutto trascurabile.

Nel caso di sterzo in posizione fissa ( $\delta = \text{const.}$ ) e velocità di avanzamento uniforme, il veicolo si stabilizza su un percorso circolare.

Per l'equilibrio globale a regime si ha

$$\begin{aligned} m r_p &= m \tilde{a}_y = F_{y_1} + F_{y_2} \\ F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali, tenendo conto delle equazioni costitutive, si ricavano le espressioni degli angoli di deriva  $\alpha_{i_p}$

$$\alpha_{i_p} = \frac{m}{C_i} \frac{l - a_i}{l} \tilde{a}_y = \frac{W_i}{C_i} \frac{\tilde{a}_y}{g} \quad (2.38)$$

Tenendo conto della (2.8) si ha che la differenza tra l'angolo di sterzo imposto  $\delta$  e l'angolo di Ackermann  $\delta_0 = l/R_p$  diventa, a regime:

$$\delta - \frac{l}{R_p} = \alpha_{1_p} - \alpha_{2_p} = \frac{m}{l} \left( \frac{a_2}{C_1} - \frac{a_1}{C_2} \right) \tilde{a}_y = \frac{m}{l} \left( \frac{C_2 a_2 - C_1 a_1}{C_1 C_2} \right) \tilde{a}_y = \left( \frac{W_1}{C_1} - \frac{W_2}{C_2} \right) \frac{\tilde{a}_y}{gl} \quad (2.39)$$

Si definisce gradiente di sottosterzo  $\eta$  ([1], [2]) di un autovettura la derivata, rispetto all'accelerazione laterale a regime  $\tilde{a}_y$ , della differenza tra l'angolo di sterzo imposto  $\delta$  e l'angolo di Ackermann  $\delta_0 = l/R_p$ ; in altri termini:

$$\eta = \frac{d}{d\tilde{a}_y} \left( \delta - \frac{l}{R_p} \right) = \frac{d}{d\tilde{a}_y} (\alpha_{1_p} - \alpha_{2_p}) = \frac{m}{l} \left( \frac{C_2 a_2 - C_1 a_1}{C_1 C_2} \right) = \frac{1}{gl} \left( \frac{W_1}{C_1} - \frac{W_2}{C_2} \right) \quad (2.40)$$

Il segno di  $\eta$  definisce il comportamento sotto/sovrasterzante di un autoveicolo; più in particolare un veicolo è detto *sottosterzante* se  $\eta > 0$  (ovvero se  $C_2 a_2 > C_1 a_1$ ), *sovrasterzante* se  $\eta < 0$  (ovvero se  $C_2 a_2 < C_1 a_1$ ), *neutro* se  $\eta = 0$  (ovvero se  $C_2 a_2 = C_1 a_1$ ).

Tenendo conto della (2.14) è possibile esplicitare l'angolo di sterzo necessario per percorrere una curva di raggio  $R_p$  ad una certa velocità  $u$ , sviluppando un certo livello di accelerazione laterale  $\tilde{a}_y$ :

$$\delta = \frac{l}{R_p} + \eta \tilde{a}_y = \left( \frac{l}{u^2} + \eta \right) \tilde{a}_y \quad (2.41)$$

Dalla (2.41) emerge che in caso di veicolo sovrasterzante ( $\eta < 0$ ) esiste un valore di velocità in corrispondenza del quale si annulla l'angolo di sterzo indipendentemente dal livello di accelerazione laterale  $\tilde{a}_y$ . Dal momento che, come verrà dimostrato in seguito, in corrispondenza di tale valore di velocità il veicolo diventa instabile, questa viene definita velocità critica  $u_{cr}$

$$u_{cr} = \sqrt{-\frac{l}{\eta}} = l \sqrt{\frac{C_1 C_2}{C_1 a_1 - C_2 a_2}} \quad (2.42)$$

In altri termini, in corrispondenza della velocità critica, in un veicolo sovrasterzante, il guadagno tra accelerazione laterale  $\tilde{a}_y$  ed angolo di sterzo  $\delta$  tende ad infinito.

Nel caso di veicolo sottosterzante ( $\eta > 0$ ) viene spesso introdotta la velocità caratteristica  $u_{car}$

$$u_{car} = \sqrt{\frac{l}{\eta}} \quad (2.43)$$

che rappresenta la velocità in cui il rapporto  $r_p / \delta$  tra velocità di imbardata ed angolo di sterzo raggiunge il massimo valore. Risolvendo, infatti, il sistema algebrico  $\mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{b} = 0$  che discende immediatamente dalla (2.35), possibile ottenere l'espressione della velocità di imbardata a regime:

$$r_p = \frac{C_1 C_2 l u}{C_1 C_2 l^2 - m u^2 (C_1 a_1 - C_2 a_2)} \delta = \frac{u}{l + \eta u^2} \delta \quad (2.44)$$

Dalla (2.41) si ricava, inoltre, che in corrispondenza della velocità caratteristica si ha  $\delta = 2l / R_p$ , ovvero l'angolo di sterzo è esattamente il doppio di quello necessario in condizioni di derivate nulle.

La velocità laterale a regime  $v_p$  è data invece da

$$v_p = \frac{(C_2 a_2 l - m a_1 u^2) C_1 u}{C_1 C_2 l^2 - m u^2 (C_1 a_1 - C_2 a_2)} \delta \quad (2.45)$$

La presenza di una velocità laterale  $v_p$  a regime sta ad indicare che la traiettoria del baricentro non è tangente all'asse longitudinale del veicolo.

Utilizzando le equazioni di congruenza (2.6) e (2.7) è, infatti, possibile ricavare l'espressione dell'angolo di assetto  $\beta_p$

$$\beta_p = \frac{a_2}{R_p} - \alpha_{2_p} = a_2 \frac{\tilde{a}_y}{u^2} - \alpha_{2_p} = \left( \frac{a_2}{u^2} - \frac{m}{C_2} \frac{l - a_2}{l} \right) \tilde{a}_y = \left( \frac{a_2}{u^2} - \frac{W_2}{C_2 g} \right) \tilde{a}_y \quad (2.46)$$

dove il termine in parentesi viene definito gradiente di assetto  $\eta_\beta$ .

A velocità prossime a zero (derivate nulle  $\equiv$  sterzata cinematica), l'angolo di assetto è concorde con l'angolo di sterzo (si ha  $\beta_p = a_2/R_p = a_2\delta/l$ ); al crescere della velocità di avanzamento  $u$  e quindi degli angoli di deriva, l'angolo  $\beta_p$  cala fino ad annullarsi per  $u = u_\beta$

$$u_\beta = \sqrt{\frac{C_2 a_2}{m} \frac{l}{l - a_2}}$$

oltre questa velocità  $\beta_p$  diventa discorde con  $\delta$ .

### 2.7.2 Comportamento transitorio

Il primo passo consiste nello studio della stabilità di moto. A questo scopo risulta conveniente riscrivere le equazioni di moto (eq. 2.33) nella seguente forma ([2]):

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + ur) + \frac{C}{u}v + \frac{Cs}{u}r &= C_1\delta \\ mk^2\dot{r} + \frac{Cs}{u}v + \frac{Cq^2}{u}r &= C_1a\delta \end{aligned} \quad (2.47)$$

dove  $C = C_1 + C_2$  è la somma delle rigidità di deriva effettive dei due assali,  $k$  è il raggio di inerzia, la lunghezza  $q = \sqrt{(C_1a_1^2 + C_2a_2^2)}/C$  corrisponde ad un *braccio medio*; la lunghezza  $s = (C_1a_1 - C_2a_2)/C$  rappresenta la distanza dal baricentro al cosiddetto *neutral steer point S* (positiva per  $S$  davanti a  $G$ , vedi fig. 2.2).

In particolare  $S$  è definito come quel punto lungo l'asse longitudinale del veicolo dove l'applicazione di una forza laterale esterna (ad es. la spinta dovuta al vento laterale o alla pendenza trasversale della strada) non modifica l'angolo di imbardata del veicolo.

Supponiamo che il veicolo si trovi in condizioni di regime con  $u$  e  $\delta$  costanti (cioè percorra una traiettoria circolare) quando, a causa della presenza del vento, una forza laterale, concorde con la forza d'inerzia, agisca sul veicolo: se il punto di applicazione della spinta laterale del vento si trova davanti al punto  $S$  il veicolo tende ad imbardare nella direzione della forza cioè tende a sottosterzare in quanto il driver, per mantenere la traiettoria, deve aumentare l'angolo di sterzo; si tratta

quindi di un comportamento intuitivo e gestibile senza particolari difficoltà.

Al contrario, se il punto di applicazione della spinta laterale si trova dietro al punto  $S$  il veicolo tende ad imbarbare nella direzione opposta a quella della forza contribuendo ad aumentare l'accelerazione laterale con possibile perdita di aderenza del veicolo. Si tratta quindi di un comportamento poco intuitivo con percezione di "insicurezza" da parte del driver.

Eliminando la velocità laterale  $v$  dalle eq. 2.47 si ottiene l'equazione differenziale lineare del secondo ordine rispetto alla velocità di imbardata  $r$ :

$$m^2 k^2 u^2 \ddot{r} + mC(q^2 + k^2)u \dot{r} + (C_1 C_2 l^2 - mu^2 Cs)r = mu^2 a_1 C_1 \dot{\delta} + u C_1 C_2 l \delta \quad (2.48)$$

tenendo conto che

$$s = -\frac{C_1 C_2}{C} \frac{l}{m} \eta$$

la 2.48 diventa:

$$m^2 k^2 u^2 \ddot{r} + mC(q^2 + k^2)u \dot{r} + C_1 C_2 l^2 \left(1 + \eta \frac{u^2}{l}\right) r = mu^2 a_1 C_1 \dot{\delta} + u C_1 C_2 l \delta \quad (2.49)$$

La (2.49) (così come la (2.48)) rappresenta un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti nella variabile  $r$ . La stabilità del moto dipende dai coefficienti  $c_i$  dell'equazione omogenea associata:

$$c_2 \ddot{r} + c_1 \dot{r} + c_0 r = 0$$

in particolare si ha stabilità di moto se tutti i coefficienti  $c_i$  sono positivi.

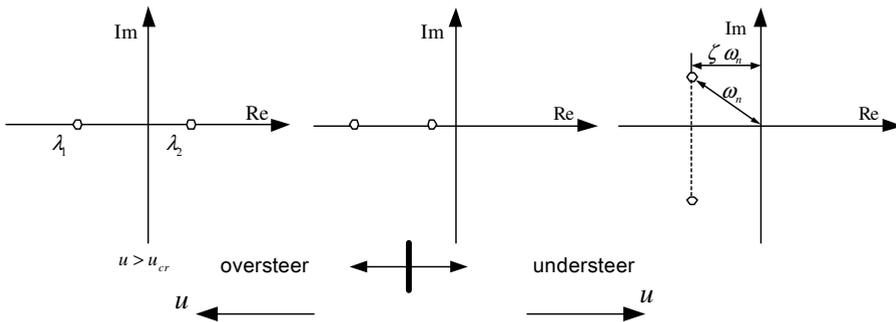
Dalla (2.49) appare evidente che solo il coefficiente  $c_0$  può assumere valori negativi quando il gradiente di sottosterzo è negativo,  $\eta < 0$ , (cioè quando il veicolo è sovrasterzante) e quando la velocità di avanzamento  $u$  supera il valore critico  $u_{cr} = \sqrt{-(l/\eta)}$ .

Ha un certo interesse studiare il tipo di moto durante il transitorio, cioè conoscere quale sia l'evoluzione delle radici dell'equazione caratteristica della equazione omogenea associata alla (2.49) al crescere della velocità di avanzamento  $u$ , anche quando il veicolo ha un comportamento stabile (vedi fig. 2.3).

Nell'ipotesi (valida in veicoli da turismo) che  $q \cong k \cong l/2$ , si hanno radici reali (e quindi moto aperiodico) quando:

$$(C_1 - C_2)^2 l - 4C_1 C_2 \eta u^2 > 0 \quad (2.50)$$

Dalla (2.50) emerge chiaramente che tutti i veicoli, a velocità sufficientemente bassa, hanno comportamento stabile con radici reali, cioè sono caratterizzati da moto transitorio aperiodico smorzato.



**Fig. 2.3: Radici dell'equazione caratteristica per un veicolo sottosterzante e sovrasterzante in funzione della velocità di avanzamento.**

Un veicolo sovrasterzante ( $\eta < 0$ ) presenta sempre radici reali e distinti indipendentemente dalla velocità di avanzamento; di questi uno diventa positivo non appena si supera la velocità critica  $u_{cr}$  e corrisponde alla perdita di stabilità da parte del veicolo.

Un veicolo sottosterzante ha inizialmente radici reali e negativi. Oltre una certa velocità

$$u = u_t = \frac{(C_1 - C_2)}{2} \sqrt{\frac{l}{C_1 C_2 \eta}} \cong l \frac{C_2 - C_1}{2m} \quad (2.51)$$

si trasformano però in complessi coniugati con parte reale negativa. Pur avendo sempre comportamento stabile, cambia il tipo di moto durante il

transitorio. A bassa velocità è di tipo aperiodico smorzato, mentre per  $u > u_t$  è di tipo oscillatorio smorzato.

Il comportamento transitorio di un generico sistema del secondo ordine ([7]), come quello descritto dall'equazione (2.49) può essere indagato attraverso la sua risposta al gradino unitario. Nel caso della dinamica del veicolo si tratta di analizzare il comportamento del veicolo nel transitorio di un colpo di sterzo a velocità di avanzamento costante.

In fig. 2.4 è riportato l'andamento qualitativo della velocità di imbardata a fronte di un gradino unitario di angolo volante, e sono indicati i parametri più importanti sui quali si può basare una misura della qualità del transitorio.

In particolare si indica con massima sovraelongazione  $P$  (*yaw rate overshoot*) la differenza fra il valore massimo raggiunto dalla velocità di imbardata ed il suo valore di regime (normalmente viene espresso in percentuale del valore finale).

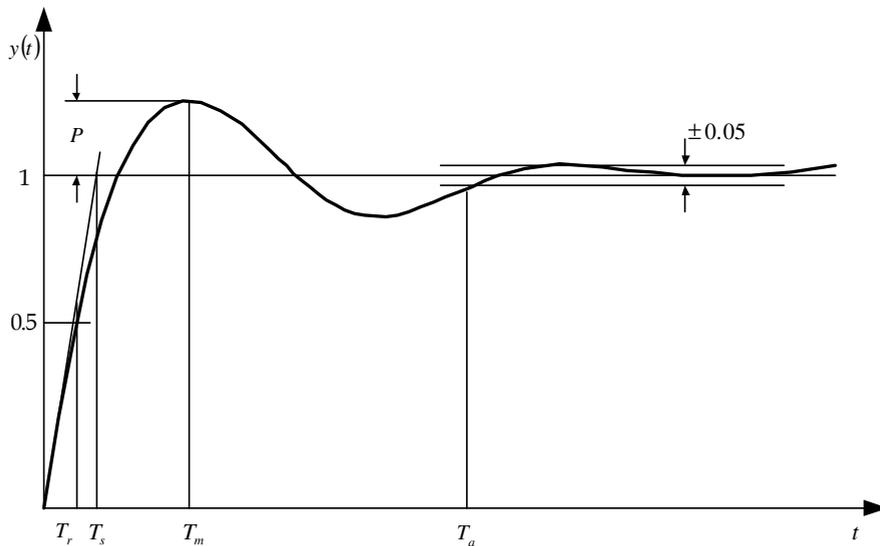
Il tempo di ritardo  $T_r$  (*yaw rate delay*) rappresenta l'istante di tempo in cui la velocità di imbardata  $r(t)$  raggiunge il 50 % del valore di regime; mentre il tempo di salita  $T_s$  è l'intervallo di tempo necessario perché la retta  $z = \dot{r}(0)t$  raggiunge il valore stabilizzato.

Il tempo di assestamento  $T_a$  è il tempo occorrente perché la velocità di imbardata rimanga entro il  $\pm 5$  % del valore finale. L'istante di massima sovraelongazione  $T_m$ , infine, è l'istante di tempo in corrispondenza del massimo valore raggiunto dalla velocità di imbardata.

La risposta al gradino unitario di un generico sistema del secondo ordine è dato, nel caso di radici complesse coniugate con parte reale negativa, dalla seguente relazione:

$$y(t) = 1 - Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.52)$$

in cui  $\omega_n = \sqrt{c_0/c_2}$  rappresenta la pulsazione propria del sistema non smorzato,  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  è la pulsazione propria del sistema con  $\zeta = c_1/(2c_2\omega_n)$  fattore di smorzamento del sistema,  $A = 1/\sqrt{1 - \zeta^2}$  ed infine  $\varphi = \arccos(\zeta)$ .



**Fig. 2.4:** I più importanti parametri della risposta al gradino di un tipico sistema dinamico.

Dall'equazione (2.52) emerge che il comportamento transitorio del veicolo risulta univocamente determinato dai parametri  $\zeta$  ed  $\omega_n$ : la

sovraelongazione  $P = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ , il tempo di assestamento  $T_a = \frac{3}{\zeta\omega_n}$ , il

tempo di salita  $T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-\zeta^2} - 1}$ .

La sovraelongazione dipende solo dal fattore di smorzamento  $\zeta$  mentre il tempo di assestamento ed il tempo di salita dipendono anche dalla pulsazione propria  $\omega_n$ .

Si tratta adesso di legare questi parametri alle caratteristiche costruttive del veicolo attraverso l'equazione (2.49).

Le espressioni della pulsazione propria  $\omega_n$  del sistema non smorzato ed del fattore di smorzamento  $\zeta$  per il modello monotraccia lineare classico di veicolo sono:

$$\omega_n^2 = \frac{C_1 C_2 l^2}{m^2 k^2} \frac{1 + \eta \frac{u^2}{l}}{u^2} = \frac{C_1 C_2 l^2}{m^2 k^2 u^2} \left[ 1 + \left( \frac{u}{u_{car}} \right)^2 \right] \cong 2 \frac{C}{m u} \sqrt{1 + \eta \frac{u^2}{l}}$$

$$\zeta = \frac{C}{2 \sqrt{C_1 C_2 l^2 \left( 1 + \eta \frac{u^2}{l} \right)}} \frac{k^2 + q^2}{k} \cong \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta \frac{u^2}{l}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{u}{u_{car}} \right)^2}}$$
(2.53)

dove le ultime espressioni sono state ottenute adottando le ipotesi ragionevoli di  $k \cong q \cong l/2$  e  $|s|/l \ll 1$ .

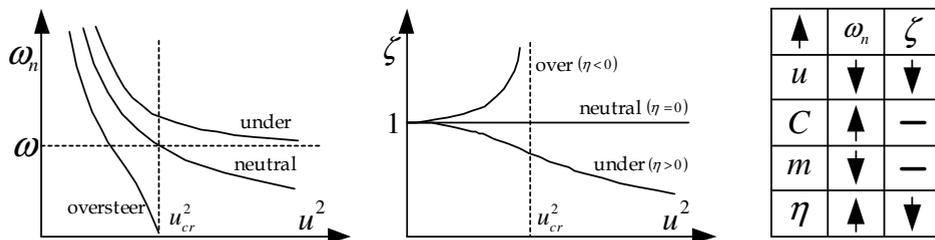
Il termine  $C_1 C_2 / m^2$  in (2.53) indica che per incrementare la velocità di risposta del sistema è necessario aumentare la rigidità di deriva equivalente di ciascun assale e ridurre la massa del veicolo. Inoltre suggerisce che, a parità di rigidità di deriva totale del veicolo ( $C_1 + C_2$ ), la condizione  $C_1 = C_2$  è quella che massimizza la pulsazione propria del sistema non smorzato. Tuttavia l'effetto della distribuzione della rigidità di deriva totale del veicolo tra i due assali non è molto marcato; infatti se, per esempio, assumiamo  $C_1 = 0.8 C_2$  si ha una riduzione del prodotto  $C_1 C_2$  (rispetto al caso ottimale  $C_1 = C_2$ ) del 1 % ca.

Il secondo fattore  $l/k^2$  in (2.53) rappresenta un parametro geometrico ed indica come è distribuita di massa del veicolo tra i due assali. Per una maggiore prontezza di risposta il rapporto  $l/k^2$  dovrebbe essere grande che, in termini fisici, significa distribuire la massa del veicolo all'interno degli assali (piccoli sbalzi) quanto più possibile vicino al baricentro del veicolo. Grandi sbalzi, infatti, si traducono in un incremento del raggio di inerzia  $k$  a parità di massa.

Il terzo fattore che definisce  $\omega_n$  in (2.53) è  $(1 + u^2 \eta / l) / u^2$  e dimostra come il comportamento transitorio può dipendere da una caratteristica "stazionaria" del veicolo quale il gradiente di sottosterzo  $\eta$ . Inoltre, all'aumentare della velocità di avanzamento, si ha sempre una riduzione della pulsazione  $\omega_n$  (vedi fig. 2.5); tuttavia valori positivi del gradiente di sottosterzo contribuiscono a mitigare questo trend.

Anche l'andamento del rapporto di smorzamento  $\zeta$  (vedi fig. 2.5) dipende dal segno del gradiente di sottosterzo  $\eta$ . In caso di veicolo sottosterzante ( $\eta > 0$ ),  $\zeta$  diminuisce all'aumentare della velocità; mentre

nel caso di veicolo sovrasterzante ( $\eta < 0$ ) il fattore di smorzamento (sempre  $>1$  coerentemente alla condizione di moto aperiodico smorzato) aumenta all'aumentare della velocità. In corrispondenza della velocità critica, inoltre, la pulsazione propria si annulla ed il fattore di smorzamento tende all'infinito. In caso di veicolo neutro ( $\eta = 0$ ) la pulsazione propria diminuisce all'aumentare della velocità; il fattore di smorzamento risulta, invece, indipendente da  $u$ .



**Fig. 2.5:** Influenza di alcuni parametri costruttivi sulla pulsazione naturale e il fattore di smorzamento del veicolo.

Tenendo conto delle espressioni di  $\omega_n$  e  $\zeta$  di eq. 2.53, è possibile ottenere le espressioni esplicite di:

*Tempo di assestamento*

$$T_a = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{6k^2 mu}{C(q^2 + k^2)} \cong \frac{12mu}{C} \quad (2.54)$$

*Massima sovraelongazione*

$$P = e^{\frac{-\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cong e^{\frac{-\pi}{\sqrt{2\left(1+\eta\frac{u^2}{l}\right)}}} \quad (2.55)$$

*Tempo di salita*

$$T_s = \frac{mk^2 u}{a_1 C_1 l \left(1 + \eta \frac{u^2}{l}\right)} \cong \frac{mlu}{4a_1 C_1 \left(1 + \eta \frac{u^2}{l}\right)} \quad (2.56)$$

E' importante sottolineare come il tempo di salita  $T_s$ , a parità di gradiente di sottosterzo, sia inversamente proporzionale alla rigidezza effettiva dell'assale anteriore.

### 2.7.3 Comportamento in frequenza

L'analisi del comportamento in frequenza consiste, in generale, nello studio della risposta di un sistema dinamico ad un input sinusoidale  $x(t) = X \sin(\omega t)$  di ampiezza  $X$  e pulsazione  $\omega = 2\pi f$  ([7]).

Se il sistema considerato è stabile, l'output risulta di tipo sinusoidale con pulsazione  $\omega$  pari a quella dell'input, ampiezza  $Y = Y(\omega)$  e sfasato della quantità  $\varphi = \varphi(\omega)$  (ovvero ritardato/anticipato del tempo  $t = \varphi(\omega)/\omega$ ); cioè  $y(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$ .

Si definisce funzione di risposta armonica la funzione  $F(\omega)$ , di variabile reale e a valori complessi, avente come modulo il rapporto  $Y(\omega)/X$  e come argomento l'angolo  $\varphi(\omega)$ , cioè:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{i\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos \varphi(\omega) + i \sin \varphi(\omega))$$

Tale funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente da  $X$ ; essa descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio  $0 \leq \omega < \infty$ .

La funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  è legata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema dalla relazione  $F(\omega) = G(i\omega)$ .

La rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica viene effettuata con speciali diagrammi; fra questi sono di largo impiego i *diagrammi di Bode*: essendo la funzione di risposta armonica a valori complessi, si impiegano due diversi diagrammi, uno dei quali (detto *diagramma delle ampiezze* o *dei moduli*) riporta il modulo della risposta armonica (sovente in scala logaritmica) in funzione della pulsazione  $\omega$  (oppure in funzione della frequenza  $f$ ) e l'altro (detto *diagramma delle fasi* o *degli argomenti*) riporta l'argomento della risposta armonica, sempre in funzione della pulsazione  $\omega$ .

I parametri più significativi di una funzione di risposta in frequenza sono: la *pulsazione di risonanza*  $\omega_R$  cioè la pulsazione in corrispondenza della quale il modulo di  $G(i\omega)$  assume il valore massimo,

il *picco di risonanza*  $M_R$  cioè il rapporto fra il valore massimo del modulo di  $G(i\omega)$  ed il suo valore statico  $G_0(0)$ , ed infine la banda passante  $\omega_f$  cioè la pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 db (equivalenti al rapporto  $\sqrt{2}/2$ ) al valore statico  $G_0(0)$ .

Nel caso dello studio della dinamica del veicolo si tratta di analizzare il comportamento del veicolo, identificato dalle funzioni di risposta armonica  $r/\delta - \beta/\delta - a_y/\delta$ , quando viene imposto un angolo di sterzo con andamento sinusoidale  $\delta = \delta_0 \sin(\omega t)$ .

In campo sperimentale viene condotta una manovra molto simile denominata *sweep* o *RSI (random steering input)*: il driver, mantenendo costante la velocità di avanzamento del veicolo, impone un angolo volante di tipo armonico di ampiezza massima costante e con frequenza variabile da 0.5 a 4 Hz. In genere vengono effettuati diversi passaggi parametrizzando in funzione dell'ampiezza dell'angolo di sterzo  $\delta_0$  (per identificare il campo di comportamento lineare del veicolo) ed in funzione della velocità di avanzamento  $u$ .

Nell'analisi delle funzioni di risposta armonica, attraverso l'utilizzo dei diagrammi di Bode, il diagramma delle fasi viene sostituito dal più significativo (dal punto di vista fisico) diagramma dei tempi di ritardo  $t(\omega) = \phi(\omega)$  in funzione della frequenza  $f$ .

Le equazioni di moto (2.47) possono essere riscritte in una comune forma alternativa utilizzando la notazione delle "derivate di stabilità". Secondo questa notazione la forza laterale è rappresentata con  $Y$  ed il momento di imbardata con  $N$ ; mentre il pedice indica la derivata della queste due grandezze rispetto alle variabili di moto del sistema:

$$\begin{aligned}\sum Y &= Y_\beta + Y_r + Y - mu(\dot{\beta} + r) = 0 \\ \sum N &= N_\beta \beta + N_r r + N - mk^2 r = 0\end{aligned}$$

utilizzando quale variabile di stato l'angolo di assetto  $\beta = v/u$  al posto della velocità laterale  $v$ . In definitiva si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{1}{mu} [Y_\beta \beta + (Y_r - mu)r + Y_\delta \delta] \\ \dot{r} &= \frac{1}{mk^2} (N_\beta \beta + N_r r + N_\delta \delta)\end{aligned}\tag{2.57}$$

dove  $Y_\beta = -C$ ,  $Y_r = -Cs/u$ ,  $Y_\delta = C_1$  mentre  $N_\beta = -Cs$ ,  $N_r = -Cq^2/u$  ed  $N_\delta = C_1 a_1$ .

Isolando nella (2.57) la velocità di imbardata  $r$  e l'angolo di assetto  $\beta$  si ottiene:

$$\begin{aligned} c_2 \ddot{\beta} + c_1 \dot{\beta} + c_0 \beta &= b'_1 \dot{\delta} + b_0 \delta \\ c_2 \ddot{r} + c_1 \dot{r} + c_0 r &= b''_1 \dot{\delta} + b''_0 \delta \end{aligned} \quad (2.58)$$

con

$$c_2 = m^2 k^2 u^2$$

$$c_1 = -(mk^2 Y_\beta + mu N_r) = mC(q^2 + k^2)u$$

$$c_0 = N_\beta(mu - Y_r) + N_r Y_\beta = C_1 C_2 l^2 \left(1 + \eta \frac{u^2}{l}\right)$$

$$b'_1 = \frac{C C_1 q^2}{u} - C_1 a_1 \left(mu - \eta \frac{C_1 C_2 l}{mu}\right)$$

$$b'_0 = mk^2 C_1$$

$$b''_1 = a_1 C_1 mu^2$$

$$b''_0 = l C_1 C_2 u$$

A questo punto applicando la trasformata di Laplace alla (2.58) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\delta}(s) &= \frac{b'_1 s + b'_0}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \\ \frac{r}{\delta}(s) &= \frac{b''_1 s + b''_0}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \\ \frac{a_y}{\delta}(s) &= u \frac{b'_1 s^2 + (b''_1 + b'_0) s + b''_0}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \end{aligned} \quad (2.59)$$

dove l'ultima espressione è stata ottenuta dalle prime due utilizzando la relazione  $a_y = u(\dot{\beta} + r)$  valida per velocità di avanzamento  $u$  costante.

Applicando la relazione  $F(\omega) = G(i\omega)$  alle (2.59):

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\delta}(i\omega) &= \left(\frac{\beta}{\delta}\right)_{ss} \cdot \frac{1 - \frac{mk^2 u}{a_1 m u^2 - a_2 C_2 l} i\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{i\omega}{\omega_n}\right)}; & \left(\frac{\beta}{\delta}\right)_{ss} &= -\frac{b}{l} \frac{1 - \frac{a_1}{a_2} \frac{m}{C_2 l} u^2}{1 + \eta \frac{u^2}{l}} \\
\frac{r}{\delta}(i\omega) &= \left(\frac{r}{\delta}\right)_{ss} \cdot \frac{1 + \frac{m a_1 u}{C_2 l} i\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{i\omega}{\omega_n}\right)}; & \left(\frac{r}{\delta}\right)_{ss} &= \frac{u/l}{1 + \eta \frac{u^2}{l}} \\
\frac{a_y}{\delta}(i\omega) &= \left(\frac{a_y}{\delta}\right)_{ss} \cdot \frac{1 - \frac{mk^2}{C_2 l} + \frac{a_2}{u} i\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{i\omega}{\omega_n}\right)}; & \left(\frac{a_y}{\delta}\right)_{ss} &= \frac{u^2/l}{1 + \eta \frac{u^2}{l}}
\end{aligned}
\tag{2.60}$$

Le grandezze  $(\beta/\delta)_{ss}$ ,  $(r/\delta)_{ss}$  ed  $(a_y/\delta)_{ss}$  rappresentano rispettivamente i valori assunti dalle risposte di funzione armonica per  $\omega=0$ , cioè i guadagni stazionari; mentre  $\omega_n$  e  $\zeta$  sono quelle definite in (2.53).

Infine si riportano le espressioni di modulo e fase di ciascuna funzione di risposta armonica:

$$\begin{aligned}
GAIN\left[\frac{\beta}{\delta}(\omega)\right] &= \sqrt{\frac{b_1'^2 + (b_0'\omega)^2}{(c_0 - c_2\omega^2)^2 + (c_1\omega)^2}} \\
PHASE\left[\frac{\beta}{\delta}(\omega)\right] &= -\frac{\pi}{2} \left[ \operatorname{sgn}\left(\frac{b_1'}{c_2 p_1 p_2}\right) - 1 \right] + \arctan\left(\frac{b_0'}{b_1'}\omega\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_1}\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_2}\right) \\
GAIN\left[\frac{r}{\delta}(\omega)\right] &= \sqrt{\frac{b_1''^2 + (b_0''\omega)^2}{(c_0 - c_2\omega^2)^2 + (c_1\omega)^2}} \\
PHASE\left[\frac{r}{\delta}(\omega)\right] &= -\frac{\pi}{2} \left[ \operatorname{sgn}\left(\frac{b_1''}{c_2 p_1 p_2}\right) - 1 \right] + \arctan\left(\frac{b_0''}{b_1''}\omega\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_1}\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_2}\right)
\end{aligned}$$

$$GAIN \left[ \frac{a_y}{\delta}(\omega) \right] = u \sqrt{\frac{(b_0'' - b_1' \omega^2)^2 + \omega^2 (b_1'' + b_0')^2}{(c_0 - c_2 \omega^2)^2 + (c_1 \omega)^2}}$$

$$PHASE \left[ \frac{a_y}{\delta}(\omega) \right] = -\frac{\pi}{2} \left[ \operatorname{sgn} \left( \frac{b_1' z_1 z_2}{c_2 p_1 p_2} \right) - 1 \right] + \arctan \left( -\frac{\omega}{z_1} \right) + \arctan \left( -\frac{\omega}{z_2} \right) - \arctan \left( -\frac{\omega}{p_1} \right) - \arctan \left( -\frac{\omega}{p_2} \right)$$

$$\text{con } p_{1,2} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2 c_0}}{2c_2} \text{ e } z_{1,2} = \frac{-(b_0' + b_1'') \pm \sqrt{(b_0' + b_1'')^2 - 4b_0'' b_1'}}{2b_1'}$$

### 2.7.4 Lunghezza di rilassamento equivalente dell'assale

Nello studio del comportamento transitorio del veicolo descritto in precedenza sono stati trascurati alcuni aspetti, tra cui i principali risultano il comportamento transitorio del pneumatico e l'influenza del comportamento elastocinematico della sospensione.

Il comportamento transitorio del pneumatico, descritto in § 1.3, è assimilabile a quello di un sistema del primo ordine con costante di tempo  $d/u$  dove  $d$  rappresenta la cosiddetta *lunghezza di rilassamento* del pneumatico, in sintesi:

$$\frac{d}{u} \dot{\tau}_i + \tau_i = \alpha_i(t), \quad \tau_i(t) = \tau_p \left( 1 - e^{-\frac{u}{d} t} \right)$$

L'effetto del comportamento elastocinematico della sospensione si traduce, come visto anche in § 2.6, in una sterzata aggiuntiva dell'assale e quindi in una variazione dell'angolo di deriva del pneumatico. Tuttavia, nelle manovre caratterizzate da variazioni repentine dell'angolo volante (ad es. *step steer input*) associate ad un braccio a terra longitudinale (*caster moment arm*) e dell'asse di sterzo, ha senso considerare la velocità laterale  $e \dot{\delta}$  dovuta alla rotazione della ruota.

Dall'eq (2.27) risulta:

$$\alpha_i = \delta_i(\delta_{sw}, \varepsilon_i) - \frac{v \pm r a_i}{u} - e \frac{\dot{\delta}_i}{u} \quad (2.61)$$

con

$$\delta_i(\delta_{sw}, \varepsilon_i) = \frac{\delta_{sw}}{n_{sw}} + \varepsilon_{\phi_i} \phi + (\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) F_{y_i}$$

Utilizzando un legame costitutivo lineare  $F_{y_i} = C_{\alpha_i} \tau_i$ , si ottiene:

$$\left[ \frac{d + (\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) e_i C_{\alpha_i}}{u} \right] \dot{\tau}_i + \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) C_{\alpha_i}}{u} \right] \tau_i = \hat{\alpha}_i + \varepsilon_{\phi_i} \left( \phi - e_i \frac{\dot{\phi}}{u} \right) - \frac{e_i}{n_{sw_i}} \frac{\dot{\delta}_{sw_i}}{u} \quad (2.62)$$

che rappresenta un'equazione differenziale del primo ordine con costante di tempo  $\lambda_i$  pari a :

$$\lambda_i = - \frac{u - (\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) C_{\alpha_i}}{d + (\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) e_i C_{\alpha_i}} \quad (2.63)$$

pertanto la quantità

$$d_{eff_i} = - \frac{u}{\lambda_i} = \left[ d + (\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) e_i C_{\alpha_i} \right] \frac{u}{u - (\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) C_{\alpha_i}} \cong \frac{d}{1 - \frac{(\varepsilon_{sf_i} - \varepsilon_{at_i}) C_{\alpha_i}}{u}} \quad (2.64)$$

rappresenta la *lunghezza di rilassamento effettiva dell'assale*.

Dalle equazioni appena scritte si nota come il roll steer gradient  $\varepsilon_{\phi_i}$  non influenza la lunghezza di rilassamento dell'assale. Una variazione di convergenza positiva sotto carico laterale comporta un aumento della lunghezza di rilassamento dell'assale; al contrario la cedevolezza sotto momento autoallineante ne comporta una riduzione.

### 2.7.5 Esempio numerico

Utilizzando le formule ottenute se ne comprende meglio il valore e l'utilità.

Si consideri un veicolo a trazione posteriore identificato dalle seguenti caratteristiche costruttive:

- Massa  $m = 1695 \text{ kg}$  e momento di inerzia  $J = 3293 \text{ kgm}^2$ ;
- Semipassi  $a_1 = 1.032 \text{ m}$  e  $a_2 = 1.668 \text{ m}$ , da cui  $l = 2.7 \text{ m}$ ;

- Altezza del baricentro  $h_G = 0.55 m$ , altezze dei centri di rollio anteriore e posteriore pari rispettivamente a  $h_1 = 20 mm$  e  $h_2 = 100 mm$ ;
- Rigidezze verticali molle anteriore e posteriore,  $k_{fm_1} = 20 N/mm$  e  $k_{fm_2} = 20 N/mm$ ;
- Rigidezze equivalenti antirollio a terra anteriore e posteriore,  $k_{fb_1} = 45 N/mm$  e  $k_{fb_2} = 15 N/mm$ ;
- Variazioni di convergenza in scuotimento anteriore e posteriore,  $\varepsilon_{z1} = -0.15^\circ/100mm$  e  $\varepsilon_{z2} = 0.01^\circ/100mm$ ;
- Variazioni di convergenza sotto carico laterale anteriore e posteriore,  $\varepsilon_{fy1} = -0.1^\circ/kN$  e  $\varepsilon_{fy2} = 0.1^\circ/kN$ ;
- Rapporto di sterzo  $\eta_{sw} = 13.2$ ;
- Rigidezze di deriva dei pneumatici  $C_{\alpha_1}^0 = C_{\alpha_2}^0 = 70000 N/rad$ .

Il primo passo è quello di calcolare i parametri del modello monotraccia lineare, ovvero le caratteristiche effettive degli assali in funzione delle rigidezze di deriva dei pneumatici e del comportamento elastocinematico delle sospensioni. A partire dalle rigidezze verticali del singolo corner e delle altezze dei centri di rollio e del baricentro è possibile calcolare il gradiente di rollio stazionario, pari a  $4.56^\circ/g$ , ed i coefficienti  $\sigma_i$  (2.25) di ripartizione del trasferimento di carico verticale, rispettivamente  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.265$ .

Le rigidezze di deriva effettive degli assali (2.31) anteriore e posteriore diventano rispettivamente  $C_{eff,1} = C_1 = 80778 N/rad$  e  $C_{eff,2} = C_2 = 172415 N/rad$ .

Dal momento che  $C_1 a_1 - C_2 a_2 < 0$ , si tratta di un veicolo sottosterzante, il cui comportamento stazionario può essere caratterizzato attraverso il gradiente di sottosterzo (al volante) pari a  $\eta = 68.3^\circ/g$  ed il gradiente di assetto (privo del contributo cinematico) pari a  $\eta_\beta = -2.11^\circ/g$ . La velocità caratteristica risulta  $u_{car} = 61.6 km/h$  mentre la velocità  $u_\beta$  in corrispondenza alla quale si ha l'annullamento dell'angolo di assetto cinematico è pari a  $u_\beta = 75.8 km/h$ .

Si può studiare adesso il comportamento del veicolo, stazionario e transitorio, in una idealizzazione della prova di colpo di sterzo. Nella realtà, una volta lanciata la vettura in marcia rettilinea ad una certa velocità (di norma 80 - 100 km/h), si dà una brusca sterzata (con

variazione dell'angolo del volante di almeno  $250^\circ/s$ ) e si attende che il moto si stabilizzi mantenendo fisso l'angolo volante per un tempo sufficiente (spesso bastano 3 s). Durante tutta la manovra si tiene fissa l'alimentazione del motore, senza cercare di compensare l'inevitabile calo della velocità di avanzamento.

Per semplicità si suppone in questa sede che il colpo di sterzo avvenga in un tempo nullo (*step - steer input*) con velocità di avanzamento  $u$  costante.

Dal punto di vista matematico, si tratta di risolvere il problema differenziale (2.35) o (2.47) con angolo di sterzo  $\delta = \text{cost.}$  e con condizioni iniziali nulle  $\mathbf{w}(0) = (v(0), r(0)) = (0, 0)$ , che corrispondono, appunto, alla marcia rettilinea. Occorre anche fissare la velocità di avanzamento  $u$ . Ad esempio si assume  $u = 100 \text{ km/h} = 27.78 \text{ m/s}$ .

Il primo passo è valutare la soluzione particolare  $\mathbf{w}_p$ , ovvero il comportamento a regime, quando il veicolo percorre una traiettoria circolare. Trattandosi di un modello linearizzato si devono scegliere angoli piccoli. Si suppone quindi di dare un colpo di sterzo con angolo volante pari a  $\delta_{sw} = 40^\circ$  che corrispondono a  $\delta \cong 3^\circ = 0.052 \text{ rad}$ .

In base alla (2.44) e (2.45) si ottengono i valori di regime della velocità di imbardata  $r_p = 8.59^\circ/s$  e della velocità laterale  $v_p = -0.19 \text{ m/s} = -0.684 \text{ km/h}$ . Si ha quindi  $u \gg |v_p|$  e  $u \gg |r_p| a_2$ , come a suo tempo ipotizzato. L'angolo di assetto risulta pari a  $\beta_p = -0.396^\circ = 0.0069 \text{ rad}$ .

La distanza  $R_p = u / r_p$  dell'asse del veicolo dal centro di rotazione si calcola immediatamente ottenendo  $R_p \cong 185 \text{ m}$ . L'accelerazione laterale a regime vale  $\tilde{a}_y = u^2 / R_p = 0.42 \text{ g} = 4.12 \text{ m/s}^2$ .

Dalla (2.38) si possono calcolare i due angoli di deriva a regime ottenendo  $\alpha_{1p} = 3.1^\circ = 0.054 \text{ rad}$  e  $\alpha_{2p} = 0.91^\circ = 0.016 \text{ rad}$ . Entrambi sono minori di  $4^\circ$  e questo convalida la scelta di un modello lineare per i pneumatici. Trattandosi di un veicolo sottosterzante si ha che  $\alpha_{1p} > \alpha_{2p}$ .

Il secondo passo è il calcolo dell'integrale  $\mathbf{w}_o(t)$  dell'omogenea associata, basato su autovalori ed autovettori della matrice  $\mathbf{A}$ , dipendente da  $u$  ma non da  $\delta$ .

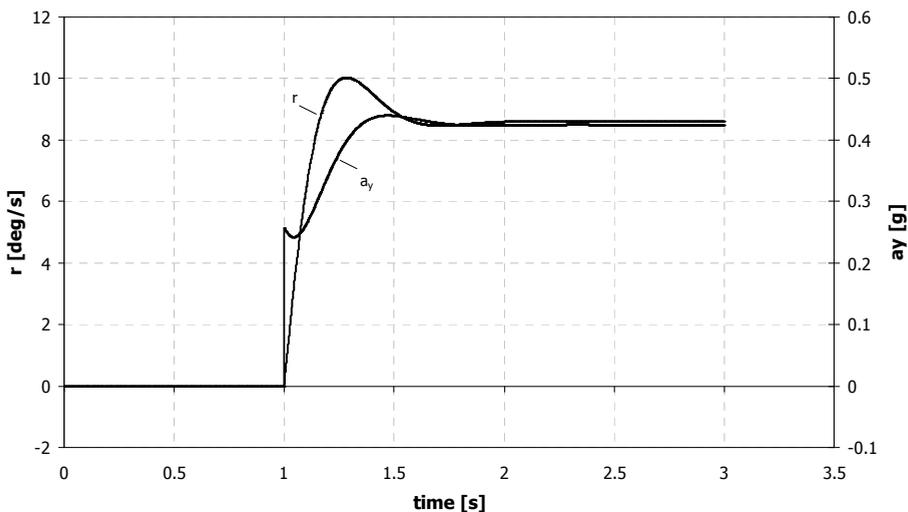
Trattandosi di un veicolo sottosterzante, dalla (2.51) si può calcolare la velocità  $u_t$  alla quale avviene la transizione da autovalori reali e distinti ad autovalori complessi coniugati:  $u_t = 40.5 \text{ km/h}$ .

Posto  $u = 27.78 \text{ m/s}$ , si ottengono i due autovalori  $\lambda_1 = -5.8 + i 9.84 \text{ s}^{-1}$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ . Dato che  $u > u_t$ , sono complessi coniugati. La parte transitoria del moto è oscillatoria smorzata, con pulsazione  $\omega_n = 11.42 \text{ rad/s}$  e frequenza  $f = \omega/2\pi = 1.82 \text{ Hz}$ ; mentre il fattore di smorzamento  $\zeta = 0.508$ .

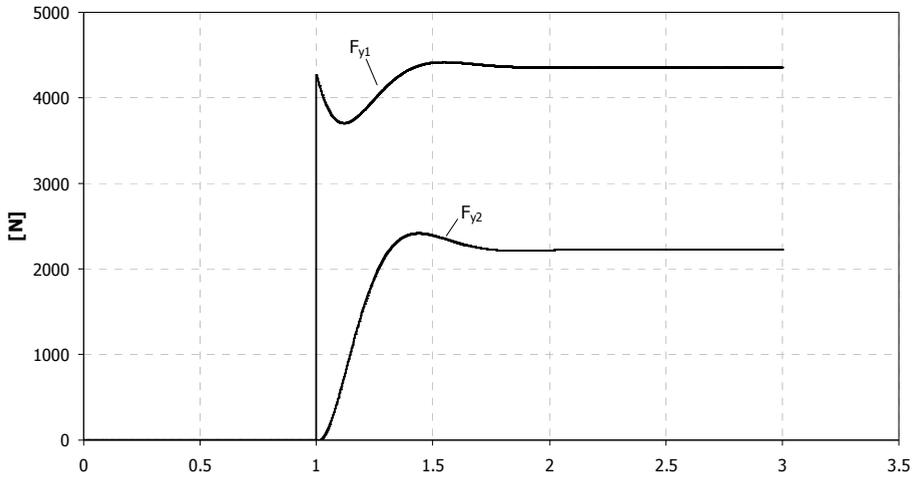
In fig. 2.6 è riportato l'andamento della velocità di imbardata e dell'accelerazione laterale in funzione del tempo. Di fatto, dopo il primo secondo di tempo dopo l'input a gradino del volante, esse sono entrambe a regime.

Mediante le equazioni di congruenza (2.6) è immediato conoscere l'andamento degli angoli di deriva  $\alpha_1(t)$  e  $\alpha_2(t)$ , e quindi delle forze laterali degli assali, durante il transitorio iniziale. Si noti come, nel modello in esame, la istantanea variazione di  $\delta$  comporti eguale discontinuità in  $\alpha_1$  e quindi in  $F_{y1}$  come rappresentato in fig. 2.7. Questo comportamento, poco realistico, è da imputarsi al semplice legame costitutivo, privo di lunghezza di rilassamento (§ 1.3), utilizzato per descrivere il comportamento del pneumatico.

Secondo la (2.64) la lunghezza di rilassamento equivalente dell'assale è funzione della lunghezza di rilassamento del pneumatico e del comportamento elastocinematico della sospensione.



**Fig. 2.6:** Andamento della velocità di imbardata e dell'accelerazione laterale nella manovra di colpo di sterzo.



**Fig. 2.7:** andamento delle forze laterali degli assali nella manovra di colpo di sterzo.

Ad esempio assumendo una lunghezza di rilassamento del pneumatico  $d_1 = d_2 = 0.25 \text{ m}$ , si ottiene una lunghezza di rilassamento degli assali pari rispettivamente a  $d_{eff,1} = 0.15 \text{ m}$  e  $d_{eff,2} = 0.65 \text{ m}$ .

## Capitolo 3

# Tipologie di differenziali

Il differenziale è un meccanismo che permette di suddividere la coppia agente su un albero di entrata in parti prefissate, su due alberi di uscita, indipendentemente dalle velocità angolari degli alberi stessi. Questo meccanismo è impiegato per trasmettere la coppia uscente dal cambio, sia alle due ruote motrici di uno stesso assale, sia a più assali di una stessa vettura; in questa seconda applicazione prende il nome di differenziale di ripartizione o, nel caso di un veicolo a due assi a trazione integrale, di differenziale centrale.

Al differenziale vengono demandati due compiti principali: 1. consentire una differenza di velocità angolare tra i due alberi di uscita e 2. gestire la ripartizione di coppia motrice tra le due ruote di uno stesso assale (nei veicoli a due ruote motrici 2wd) oppure tra i due assali nel caso di veicoli a trazione integrale (4wd).

In questo capitolo verranno descritti i principi di funzionamento dei più diffusi tipi di differenziali; in particolare verrà esaminata l'influenza del rendimento meccanico interno del differenziale sul valore della ripartizione della coppia. Nei capitoli successivi (§ 4 e § 5) verrà analizzato l'effetto indotto sulla dinamica del veicolo dalla ripartizione di coppia motrice tra le due ruote di uno stesso assale, rispettivamente nel caso di differenziale bloccato (o assale rigido) e nel caso di differenziale con generico rapporto di bloccaggio.

### 3.1 Assale rigido

Il modo più semplice per collegare le due ruote di un asse motore (*drive axle*) è quello di interporvi una barra rigida rendendo così solidali i due estremi ([4], [6]). La potenza a disposizione viene trasferita all'albero centrale all'asse posteriore mediante una coppia di ingranaggi conici con assi normali fra loro (coppia conica) oppure mediante un accoppiamento pignone - catena - corona. Questa soluzione è definita assale rigido (*locked axle* o *spool*) e fu adottata sui primi veicoli per l'evidente semplicità costruttiva ed il relativo basso costo; oggi è presente su alcuni veicoli da competizione quali i kart.

La caratteristica intrinseca di questo tipo di collegamento si scontra con le condizioni cinematiche della marcia in curva, dove le ruote

dello stesso assale richiederebbero velocità di rotazione differenti. Come verrà analizzato nel dettaglio in § 4, l'imposizione di una uguale velocità angolare delle due ruote di un assale comporta, indipendentemente dalla coppia motrice trasmessa, la nascita di scorrimenti longitudinali significativamente diversi per le due ruote dai quali discende un momento di imbardata di segno opposto a quello della velocità di imbardata e che, di conseguenza, si oppone all'inserimento in curva del veicolo.

La ripartizione della coppia sulle due ruote non è definibile a priori perché dipende unicamente dalle condizioni dinamiche in cui si trova l'assale ed il veicolo (coppia motrice, accelerazione laterale, aderenza etc...).

### 3.2 Differenziale libero o ordinario

Con l'intento di permettere alle ruote dello stesso assale velocità di rotazione differenti e di consentire contemporaneamente la trasmissione di una coppia motrice è stato ideato il differenziale libero o ordinario (*open differential*) ([4], [6]).

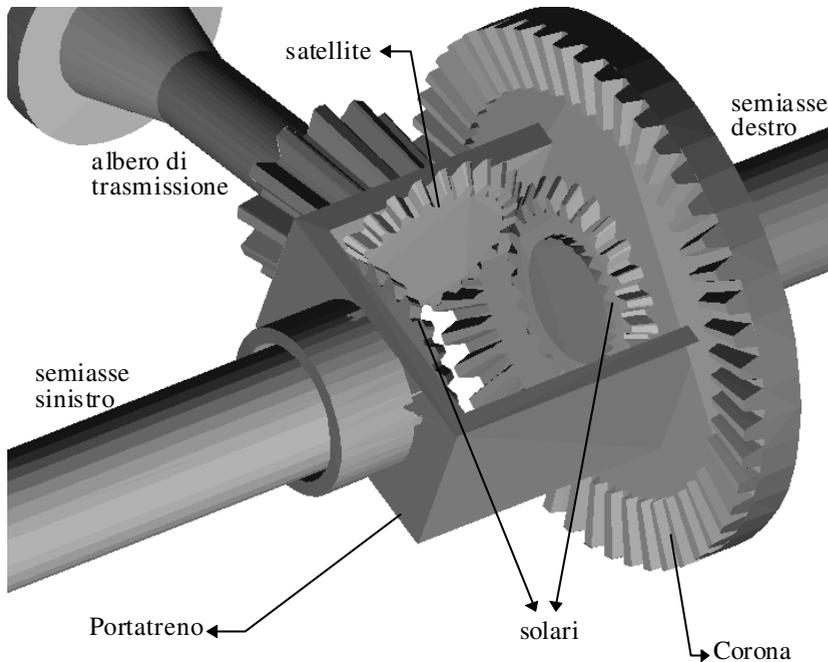


Fig. 3.1: Prospetto di un differenziale ordinario semplificato.

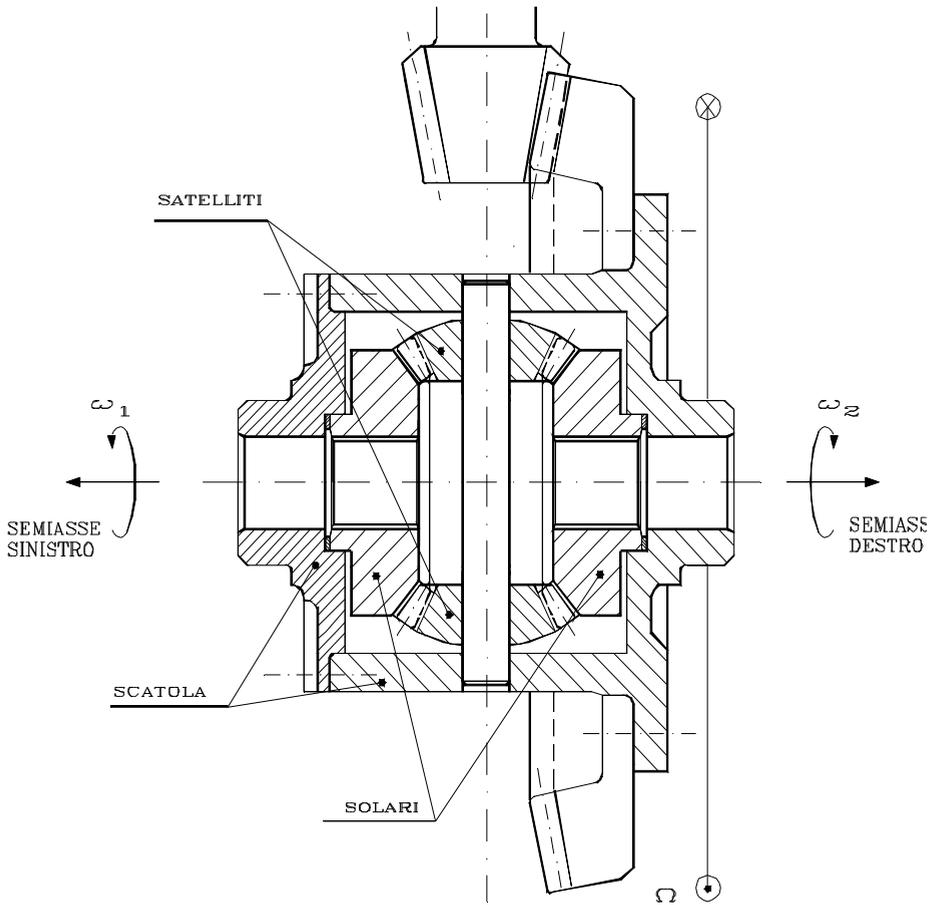


Fig. 3.2: Sezione diametrale di un differenziale ordinario.

Questo è un particolare rotismo epicicloidale ai cui solari sono calettati i due semiassi delle ruote, e che trasmette potenza tramite il portatreno. La particolarità, oltre all'orientamento degli assi, rispetto ad un classico rotismo epicicloidale è insita nella identica dimensione e tipo di dentatura dei due solari. La figura 3.1 ne mostra un prospetto di tipo semplificato mentre la figura 3.2 ne rappresenta una sezione diametrale.

La corona del differenziale prende il moto direttamente dall'albero di trasmissione e lo trasmette rigidamente al portatreno e dunque al satellite. Il satellite ripartisce poi il moto e dunque la potenza ai due solari che fanno capo alle ruote. Il legame fra le velocità angolari dei solari  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e quella del portatreno  $\Omega$ , solidale alla scatola del differenziale e alla corona è regolato dalla formula di Willis per i rotismi epicicloidali:

$$\frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = \tau_0 \quad (3.1)$$

dove  $\tau_0$  è il rapporto di trasmissione fra i due solari, pari a -1 in quanto possiedono lo stesso numero di denti e, supponendo il satellite in rotazione su se stesso, velocità di rotazione opposta.

Assegnando a  $\tau_0$  il valore -1 e sviluppando la (3.1) si ottiene la relazione caratteristica di un differenziale valida in qualsiasi condizione di funzionamento:

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (3.2)$$

Schematizzando i due solari e il satellite come in fig. 3.3 si nota come le azioni agenti sul satellite siano le coppie resistenti delle due ruote  $C_1$  e  $C_2$  (non sono da confondersi con le rigidzze di deriva definite in § 2), le relative componenti di attrito  $C_{1a}$  e  $C_{2a}$ , e naturalmente la coppia motrice  $C_m$  trasmessa dal portatreno, applicata al centro della ruota.

Quello di fig. 3.3 rappresenta un caso generico e tale per cui i due semiassi e dunque i solari ruotano a velocità diverse. Ciò determina una velocità non nulla del satellite  $\omega_s$  attorno al proprio asse e dunque una rotazione relativa tra esso e i due solari. Quest'ultima velocità relativa comporta, come tutti gli accoppiamenti fra ruote dentate, la nascita di coppie (forze) di attrito  $C_{1a}$  e  $C_{2a}$  generate dallo strisciamento dei denti.

Nell'ipotesi che sia  $\omega_1 > \Omega > \omega_2$  e che le coppie di attrito siano definibili come:

$$\begin{cases} C_1 = C_{1a} \tan \varphi \\ C_2 = C_{2a} \tan \varphi \end{cases}$$

Il sistema di equazioni che regola il differenziale è dunque il seguente:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_m \\ (C_2 - C_1)R \cos \vartheta = (C_1 + C_2)R \tan \varphi \sin \vartheta \end{cases}$$

dal quale si ricavano immediatamente le espressioni della coppia alle ruote:

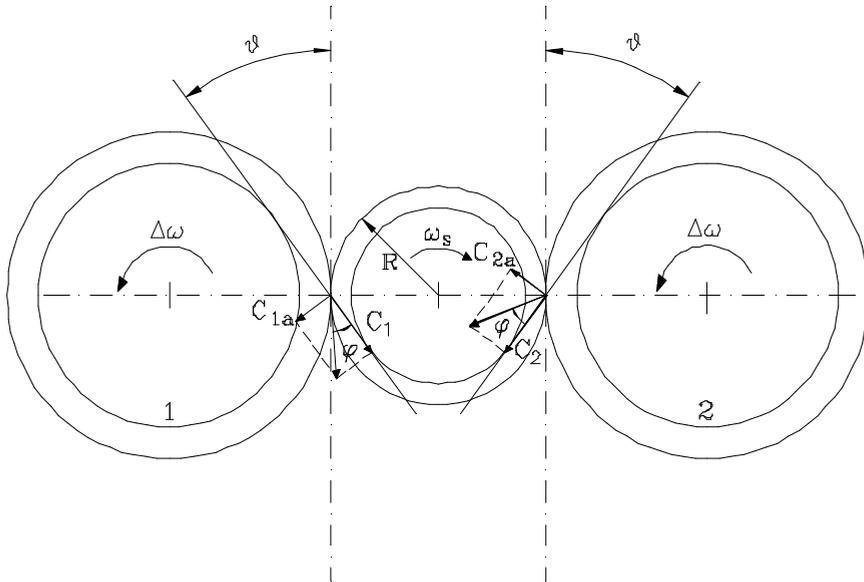


Fig. 3.3: Forze agenti sul satellite.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_m}{2}(1 - \tan \varphi \tan \vartheta) \\ C_2 = \frac{C_m}{2}(1 + \tan \varphi \tan \vartheta) \end{cases} \quad (3.3)$$

dove  $\varphi$  è l'angolo di attrito del materiale mentre  $\vartheta$  è l'angolo di pressione fra le ruote dentate.

In presenza di una differenza di velocità, la nascita di coppie di attrito sulle ruote dentate, provoca una dissimetria sulla ripartizione della coppia alle ruote secondo la (3.3) a favore della ruota più lenta:

$$\Delta C = C_2 - C_1 = C_m \tan \varphi \tan \vartheta \quad (3.4)$$

La (3.4) indica come, oltre al termine costante nell'angolo di pressione  $\vartheta$ , la differenza sia provocata unicamente dalla coppie di attrito presenti solo quando  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

Eseguendo invece il rapporto fra le coppie disponibili alle ruote si ottiene:

$$h_0 = \frac{1 - f \cdot \tan \vartheta}{1 + f \cdot \tan \vartheta}$$

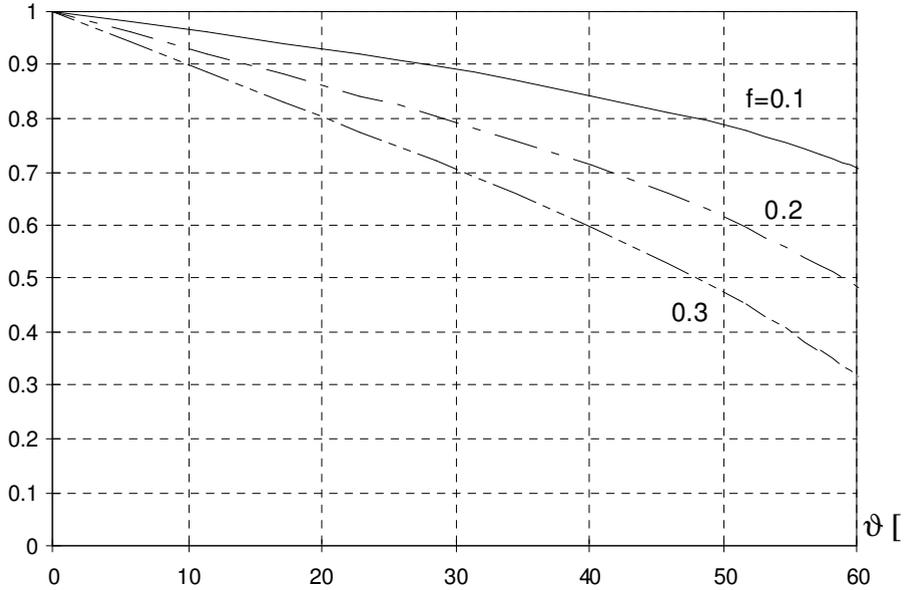


Fig. 3.4: Rendimento di un differenziale ordinario.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1 - \tan \varphi \tan \vartheta}{1 + \tan \varphi \tan \vartheta} = \frac{1 - f \tan \vartheta}{1 + f \tan \vartheta} = \eta_0 \quad (3.5)$$

Il rapporto  $\eta_0$  definito dalla (3.5) è comunemente indicato come “rendimento” del differenziale ed ha il pregio di raggruppare tutte le fonti che provocano disuguaglianza fra le coppie alle ruote:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_m}{2} \left( 1 - \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} \right) \\ C_2 = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

pertanto la differenza tra le due coppie motrici diventa:

$$\Delta C = C_2 - C_1 = C_m \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} \quad (3.7)$$

Sia la (3.4) che la (3.7) indicano che in un differenziale libero ordinario la differenza delle due coppie motrici è proporzionale alla coppia trasmessa  $C_m$ . Inoltre nel differenziale libero ideale, con rendimento  $\eta_0$  unitario, oppure se le ruote hanno la stessa velocità angolare (e pertanto non si hanno strisciamenti tra gli organi interni del differenziale) le coppie trasmesse alle ruote sono uguali. Il rendimento  $\eta_0$  definito in (3.5) è riportato in fig. 3.4 in funzione dell'angolo di pressione  $\vartheta$  e per diversi valori del coefficiente di attrito  $f$ .

Le coppie trasmissibili dalle ruote accoppiate ad un differenziale libero sono dunque legate fra loro dalla (3.6) e quindi sempre uguali a meno della quantità  $C_m(1 - \eta_0)/(1 + \eta_0)$ . Il rapporto  $(1 - \eta_0)/(1 + \eta_0)$  per un differenziale libero ha valori usuali intorno a 0.052. Ciò significa che la differenza fra le coppie uscenti dal differenziale è dell'ordine del 5% della coppia motrice.

Un parametro di confronto fra i due differenziali è il rapporto di bloccaggio  $b$  (*locking factor*) definito come rapporto tra il delta coppia tra le due ruote  $\Delta C$  e la coppia trasmessa  $C_m$ :

$$b = \frac{\Delta C}{C_m} = \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} = \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} \quad (3.8)$$

Il rapporto di bloccaggio fornisce un'indicazione sulla differenza fra le coppie trasmissibili dalle ruote dello stesso asse e quindi un grado di indipendenza l'una dall'altra. Un rendimento  $\eta_0$  elevato produce un valore basso di  $b$  e dunque una forte dipendenza fra le coppie trasmissibili, viceversa con valori bassi del rendimento. Per un differenziale ordinario con un rendimento  $\eta_0 = 0.9$  il rapporto di bloccaggio è  $b \cong 0.05$ ; ciò significa che nel caso particolare in cui una ruota non possa trasmettere coppia la sua coniugata è in grado di trasferire al suolo una coppia pari a  $b C_m$  e quindi pari al 5% della coppia riversata sull'assale.

Un altro elemento determinante per il comportamento del veicolo con un certo tipo di differenziale è la ripartizione percentuale della coppia motrice fra le ruote dell'assale nelle normali condizioni di marcia per cui sia  $\omega_1 > \omega_2$ :

$$\begin{aligned}
 rC_1 &= 100 \frac{C_1}{C_m} = 50(1-b) \\
 rC_2 &= 100 \frac{C_1}{C_m} = 50(1+b)
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Nel caso di differenziale ordinario con  $b \cong 0.05$  si ha  $rC_1 \cong 47.5\%$  ed  $rC_2 \cong 52.5\%$

### 3.3 Differenziale precaricato

Con l'intento di disaccoppiare maggiormente le coppie uscenti da un differenziale sono nati i differenziali autobloccanti. Essi, grazie al basso rendimento interno, contrastano, ma non impediscono, il nascere di una differenza tra le velocità angolari delle due ruote dello stesso assale. Ciò consente di trasferire parte della coppia motrice dalla ruota più veloce a quella più lenta.

Il metodo più semplice e quello realizzato dal differenziale a precarico costante detto anche differenziale precaricato (*preloaded differential*). In esso si trovano solitamente due frizioni a dischi, precaricate da una molla, fra scatola differenziale e i due solari (fig. 3.5). Il precarico delle molle (solitamente a tazza) ed il tipo di dischi utilizzato sono i soli parametri che determinano l'entità della coppia di strisciamento  $M_f$  generata dall'eventuale differenza di velocità tra i due semiassi e dunque fra solari e scatola.

Il differenziale precaricato è, in altri termini, un differenziale ordinario a cui è stata aggiunta una coppia di frizioni. Queste ultime generano, come detto, due momenti  $M_f$  con lo stesso modulo ma verso opposto. La frizione posta sul semiassale più veloce genera una coppia  $M_f$  che sarà vista dallo stesso semiassale come frenante e dalla scatola come motrice. Viceversa la frizione posta sul semiassale più lento produce una coppia della stessa entità ma che sarà vista come motrice dal semiassale e come frenante dalla scatola. L'equilibrio della scatola rimane dunque inalterato in quanto i due momenti  $M_f$  di uguale modulo ma verso opposto si compensano a vicenda. I due semiassi, invece, oltre a ricevere la coppia motrice dal portatreno, sentono ognuno un momento  $M_f$  che si oppone alla differenza di velocità angolare con la scatola. La distribuzione della coppia, con la solita ipotesi  $\omega_1 > \omega_2$ , risulta dunque essere:

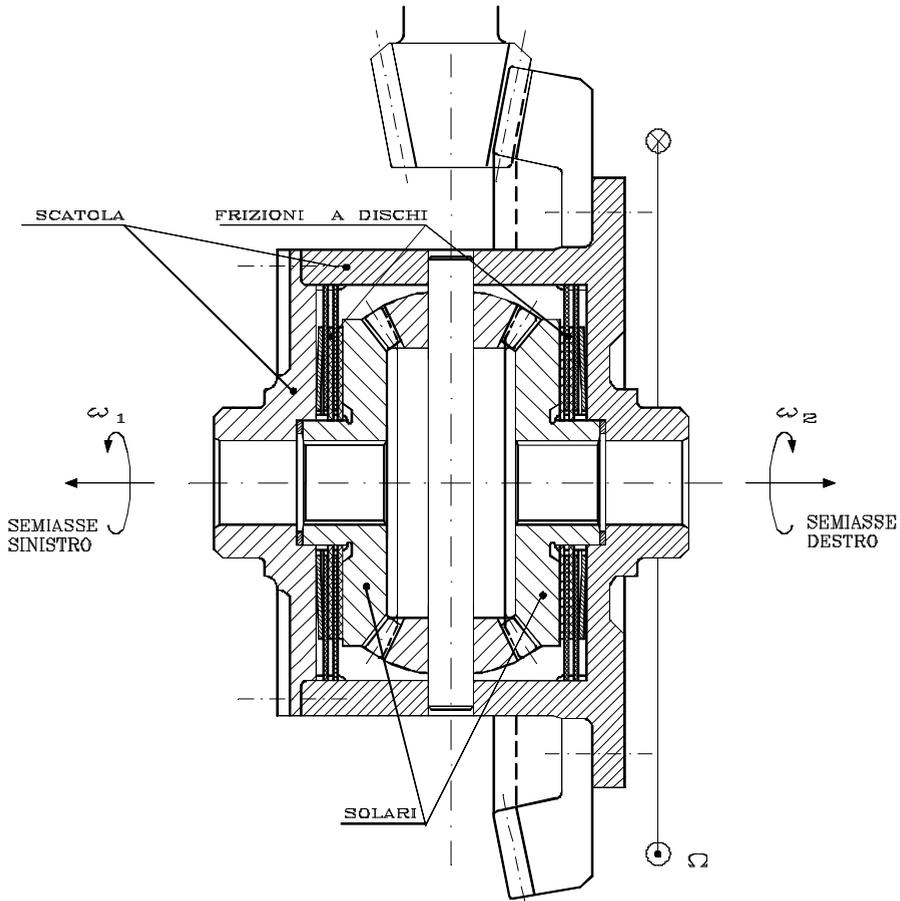


Fig. 3.5: Differenziale precaricato.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_m}{2} \left( 1 - \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) - M_f \\ C_2 = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) + M_f \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\Delta C = C_2 - C_1 = C_m \left( \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) + 2M_f \quad (3.11)$$

$$b = \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} + 2 \frac{M_f}{C_m} \quad (3.12)$$

Si può notare come il rapporto di bloccaggio  $b$  di un differenziale con precarico costante sia inversamente proporzionale alla coppia motrice trasmessa; di conseguenza la ripartizione percentuale della coppia motrice tra le due ruote è dipendente dalla coppia motrice.

### 3.4 Differenziale autobloccante ZF

Con il differenziale autobloccante ZF (*self-locking differential*), evoluzione di quello precaricato, si è invece raggiunto l'obiettivo di diversificare la coppia trasmissibile dai due semiassi in funzione della coppia motrice.

Nello ZF infatti sono presenti ancora le due frizioni a dischi fra scatola differenziale e solari, ma la forza con cui queste vengono azionate non è più costante ma legata direttamente alla coppia motrice. Ciò risulta più chiaro osservando la fig. 3.6 in cui, oltre alla sezione del differenziale, è presente anche una particolare vista (nella direzione X) che raffigura l'accoppiamento tra il perno porta - satelliti ed i due anelli di spinta. Questi sono resi solidali alla scatola del differenziale in senso rotazionale da opportuni accoppiamenti prismatici, ma sono liberi di muoversi in direzione assiale. A seconda della coppia trasmessa, la reazione con i perni porta - satelliti sulle superfici cuneiformi tende più o meno a spostare in senso assiale gli anelli, comprimendo le frizioni.

Il momento frenante che si scambiano scatola differenziale e ciascun solare sarà dunque pari a:

$$M_f = k_{ZF} \frac{C_m}{2} \quad (3.13)$$

dove la costante  $k_{ZF}$  è funzione di alcuni parametri costruttivi delle frizioni e dell'angolo  $\alpha$  di inclinazione delle superfici cuneiformi sugli anelli di spinta.

Come per il differenziale precaricato si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti sui semiassi e sommare il contributo della pura coppia motrice e delle frizioni. In questo modo, sempre supponendo la disuguaglianza  $\omega_1 > \omega_2$ , si ottiene:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_m}{2} \left( 1 - \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} \right) - M_f = \frac{C_m}{2} \left( 1 - \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} - k_{FZ} \right) \\ C_2 = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} \right) + M_f = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} + k_{FZ} \right) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\Delta C = C_2 - C_1 = C_m \left( \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} + k_{ZF} \right) \quad (3.15)$$

$$b = \frac{\Delta C}{C_m} = \frac{1 - \eta_0}{1 + \eta_0} + k_{ZF} \quad (3.16)$$

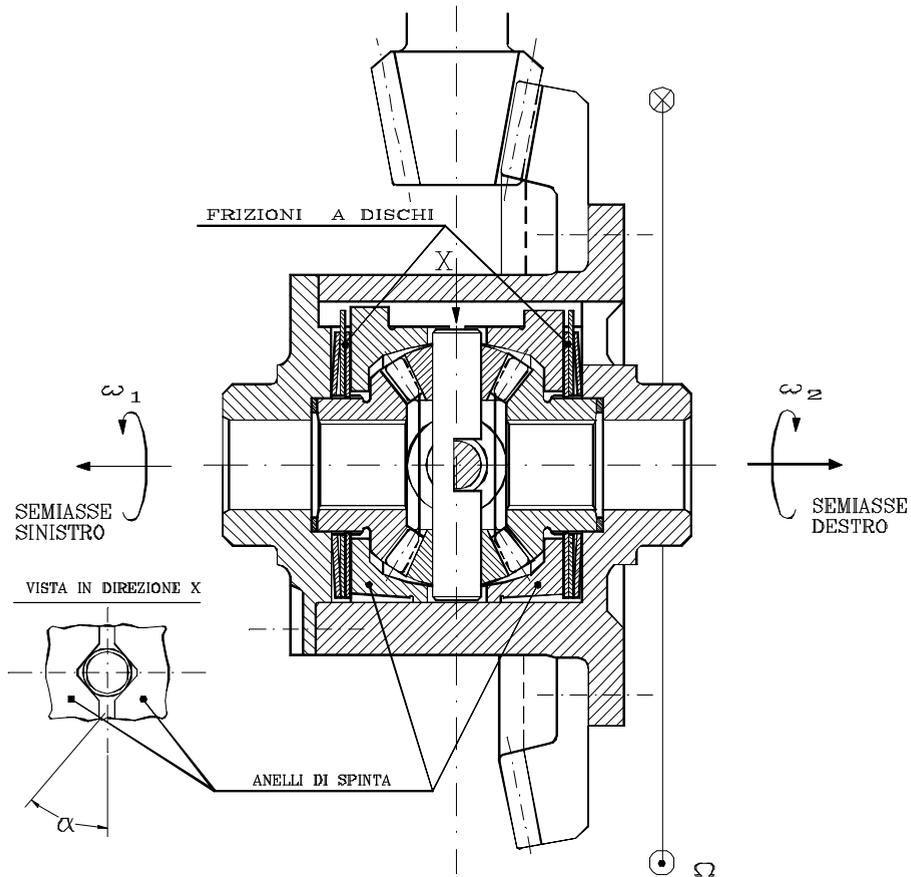


Fig. 3.6: Sezione di un differenziale autobloccante ZF.

Come si nota dalle relazioni precedenti la caratteristica del differenziale ZF di azionare le frizioni in funzione della coppia motrice consente, in termini analitici, di trovare una diretta analogia con il differenziale ordinario dal quale si discosta unicamente per il valore del rendimento. Infatti il rapporto di bloccaggio è costante in quanto lo ZF è "sensibile" alla coppia motrice e adatta il disaccoppiamento  $\Delta C$  proprio in funzione di  $C_m$ . Dunque la ripartizione percentuale della coppia motrice tra le due ruote non è più dipendente da  $C_m$  ma costante in ogni condizione come per il differenziale ordinario.

### 3.5 Differenziale autobloccante Torsen

Un altro tipo di differenziale che sfrutta il basso rendimento interno per diversificare le coppie trasmissibili dai due semiassi è il Torsen (*Torque - Sensitive*) di cui la fig. 3.7 mostra uno spaccato.

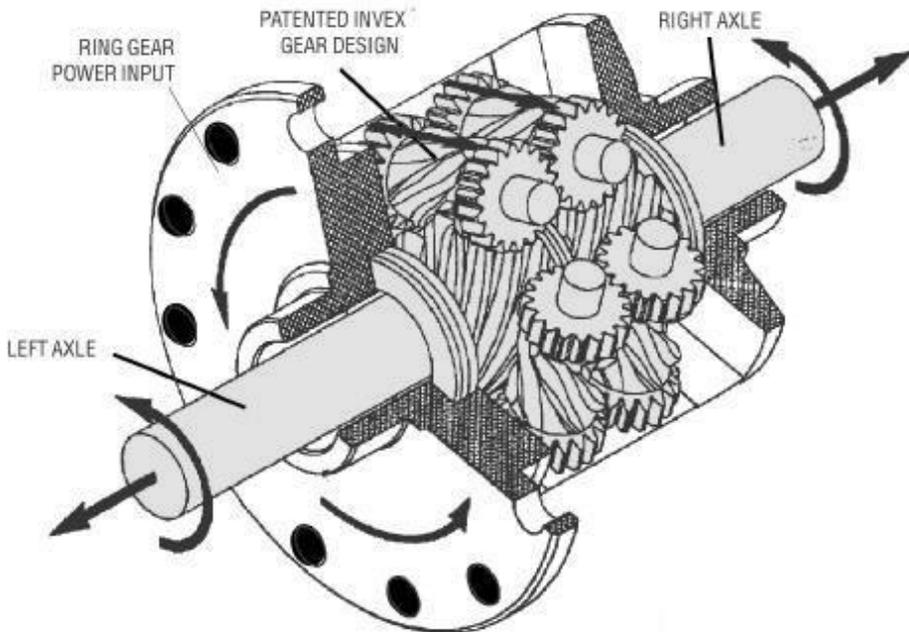


Fig. 3.7: Spaccato di un differenziale Torsen.

Gli estremi dei due semiassi sono costituiti da viti senza fine e rappresentano i solari. Vi sono poi tre coppie di ingranaggi elicoidali che fungono da satelliti. Questi sono collegati con la scatola del differenziale

mediante altrettanti perni. Gli ingranaggi elicoidali costituenti una coppia sono costantemente in presa fra loro mediante una coppia di ingranaggi a denti dritti calettati alle estremità. Quando le due ruote dell'asse sentono la stessa resistenza all'avanzamento tutti i satelliti ruotano rigidamente attorno all'asse del differenziale e non vi è strisciamento alcuno tra viti senza fine e ruote elicoidali ( $\omega_1 = \omega_2$ ). Se la differenza fra le aderenze e dunque fra le coppie resistenti fra le due ruote supera la somma degli attriti di primo distacco che caratterizzano i componenti del Torsen, i satelliti iniziano a ruotare su se stessi e dunque ingranano fra loro ed ognuno con la rispettiva vite senza fine ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ).

Proprio il basso rendimento che caratterizza l'accoppiamento vite senza fine e ruota elicoidale è alla base del funzionamento di questo differenziale. In fig. 3.8 è schematizzato l'accoppiamento fra le viti senza fine e una coppia di ruote elicoidali con le rispettive forze in gioco nel caso di funzionamento attivo. Ogni ruota elicoidale scambia, con la corrispondente vite senza fine, una forza  $F_i$  che possiede due componenti. Di queste, quella parallela all'asse di rotazione del differenziale deve essere uguale per entrambe le forze  $F_i$  perché costituisce le forze di scambio fra le ruote a denti dritti di ogni coppia di satelliti. Essendo poi le rotazioni delle ruote elicoidali attorno al proprio asse esattamente opposte, sono analogamente opposti gli strisciamenti che originano gli angoli di attrito  $\varphi$ .

Dunque le due forze  $F_i$  dovranno avere direzione opposta rispetto alla normale alla superficie inclinata dell'angolo d'elica  $\alpha$ . Ne consegue, per costruzione, che le componenti in direzione normale all'asse  $N_1$  ed  $N_2$  hanno modulo diverso; in particolare trascurando l'angolo di pressione  $\vartheta$ :

$$N_1 \tan\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \varphi)\right) = N_2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \varphi)\right)$$

da cui

$$\eta = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\tan(\alpha - \varphi)}{\tan(\alpha + \varphi)} = \frac{1 - f \tan \alpha}{1 + f \tan \alpha} \frac{\tan \alpha - f}{\tan \alpha + f} \quad (3.17)$$

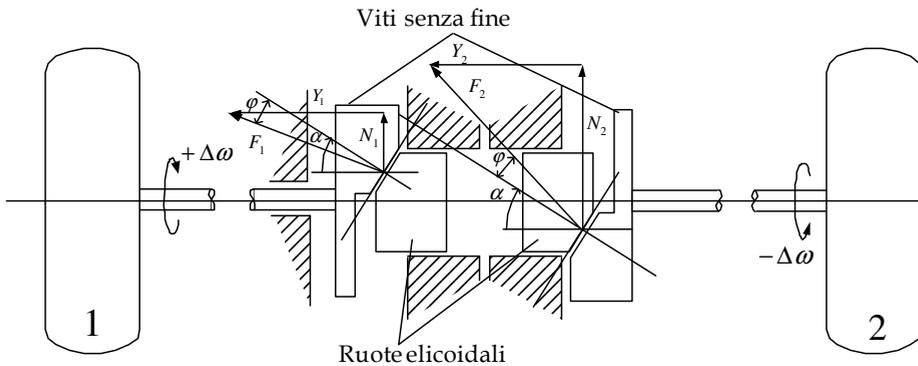


Fig. 3.8: Schema semplificato di un differenziale Torsen e forze in gioco.

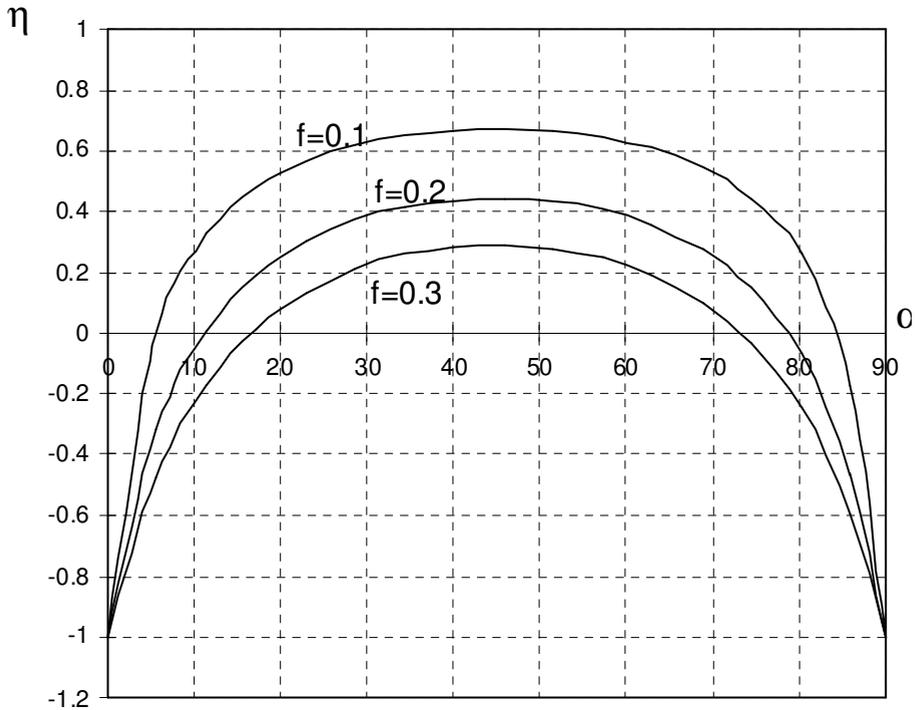
Tenendo conto anche dell'angolo di pressione

$$\eta = \frac{\cos \vartheta - f \tan \alpha}{\cos \vartheta + f \tan \alpha} \frac{\cos \vartheta \tan \alpha - f}{\cos \vartheta \tan \alpha + f} \quad (3.18)$$

La trattazione fin qui svolta ha trascurato tutti gli altri attriti interni di strisciamento del differenziale Torsen, che si attivano quando i satelliti iniziano a ruotare su se stessi. L'andamento di  $\eta$  in funzione dell'angolo d'elica  $\alpha$  è rappresentato in fig. 3.9. L'angolo d'elica  $\alpha$  tipico di questo differenziale è  $40^\circ$  e con un coefficiente di attrito pari a 0.1 ca. si nota come siano facilmente raggiungibili valori di rendimento dell'ordine di  $0.6 \div 0.7$ . Considerando poi i rimanenti attriti da strisciamento prima trascurati si arriva comodamente a valori di  $\eta$  intorno a 0.2.

Il differenziale Torsen può dunque essere considerato analiticamente analogo ad uno ordinario ma come sempre il fattore discriminante è il rendimento. Supponendo  $\omega_1 > \omega_2$  si può scrivere:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_m}{2} \left( 1 - \frac{1-\eta}{1+\eta} \right) \\ C_2 = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{1-\eta}{1+\eta} \right) \end{cases} \quad (3.19)$$



**Fig. 3.9:** Andamento del rendimento di un differenziale Torsen in funzione dell'angolo d'elica.

Tenendo conto dell'espressione del rendimento (3.17) si ottiene:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_m}{2} \left( 1 - \frac{f(1 + \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha (1 + f^2)} \right) \\ C_2 = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{f(1 + \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha (1 + f^2)} \right) \end{cases} \quad (3.20)$$

$$b = \frac{f(1 + \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha (1 + f^2)} \quad (3.21)$$

Con i valori prima citati di  $\eta$  si ottiene un rapporto di bloccaggio di 0.66 ca.; dunque nella peggiore ipotesi per cui risulti  $C_1 = 0$  l'altra ruota può trasmettere fino al 66% della coppia motrice. Nelle normali condizioni di marcia la ripartizione di coppia è 17/83%.

### 3.6 Giunto viscoso

I dispositivi analizzati finora sono usati in sostituzione del differenziale ordinario libero. Il giunto viscoso solitamente rappresentato dal “giunto Ferguson” per la sua stessa natura non sostituisce il differenziale libero, come in precedenza, ma ne integra il funzionamento. Come si vede in fig. 3.10 esso è costituito da un sistema di lamelle collegate alternativamente ai due alberi che fanno capo al giunto, ed immerse in un fluido ad alta viscosità che dunque si oppone alla diversa velocità di rotazione delle stesse.

I due alberi risultano così vincolati non in modo rigido ma, qualora si inneschi una differenza tra le velocità di rotazione  $\Delta\omega$ , essi vengono investiti da una coppia proporzionale in modulo e segno al  $\Delta\omega$ . In generale, infatti, due piastre piane con velocità relativa  $\Delta v$  a distanza  $s$ , immerse in un fluido con viscosità dinamica  $\mu$  si scambiano una forza per unità di superficie pari a:

$$|\tau| = \frac{\mu \Delta v}{s}$$

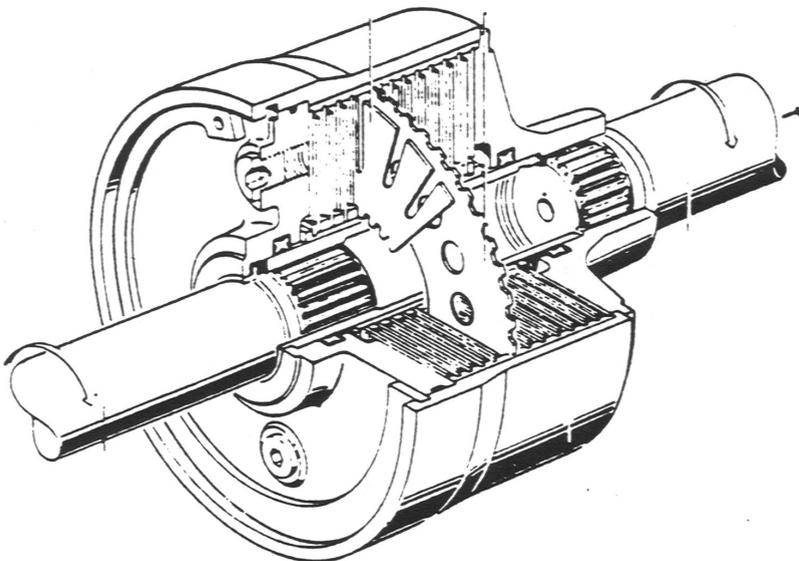


Fig. 3.10: Spaccato di un giunto viscoso

Di conseguenza due dischi piani con rotazione relativa  $\Delta\omega$  di raggio interno  $r_i$  ed esterno  $r_e$  nelle stesse condizioni si scambiano una coppia

$$C_g = \frac{\pi \Delta\omega \mu}{2s} (r_e^4 - r_i^4) = k \Delta\omega \quad (3.22)$$

Naturalmente la coppia  $C_g$  è vista come frenante dall'albero più veloce, e motrice da quello più lento. Se poi i dischi non sono due ma  $n$  la coppia di strisciamento diventa:

$$C_g = \frac{n \pi \Delta\omega \mu}{2s} (r_e^4 - r_i^4) = k_g \Delta\omega \quad (3.23)$$

Avendo come obiettivo quello di opporsi ad una differenza di velocità tra i semiassi, il giunto viscoso può essere abbinato ad un differenziale libero secondo due configurazioni principali. Una, di concezione decisamente semplice ma complessa da realizzare, prevede il collegamento del giunto, mediante opportuni rinvii, fra i due semiassi. Un'altra soluzione, anche se meno immediata, consente una realizzazione molto più semplice, e prevede il collegamento del giunto fra la corona del differenziale ed il semiasse adiacente. Infatti ad una differenza fra le velocità angolare dei semiassi corrisponde una differenza, anche se ridotta, fra ciascun semiasse e la corona ed è dunque sfruttabile per il funzionamento del giunto viscoso. Le due soluzioni descritte sono riportate in fig. 3.11 rispettivamente come "soluzione B" e "soluzione A".

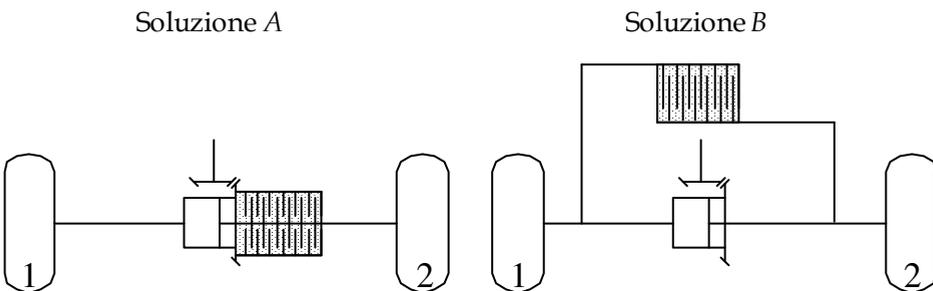


Fig. 3.11: Schema delle possibili applicazioni di un giunto viscoso.

Supponendo valida la “soluzione A” e, come sempre,  $\omega_1 > \omega_2$  il giunto viscoso genera una coppia  $C_g$ , ed essendo sempre  $\omega_2 < \Omega < \omega_1$  la coppia sarà vista dalla corona del differenziale come frenante e dal semiasse 2 come motrice. La coppia disponibile al portatreno sarà dunque  $C_p = C_m - C_g$ .

Le coppie che si riversano sui solari sono le solite

$$\begin{cases} C_{s,1} = \frac{C_p}{2} \left( 1 - \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) \\ C_{s,2} = \frac{C_p}{2} \left( 1 + \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) \end{cases}$$

Infine le coppie disponibili ai semiasse avranno l'espressione:

$$\begin{cases} C_1 = C_{s,1} = \frac{C_m - C_g}{2} \left( 1 - \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) \\ C_2 = C_{s,2} + C_g = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) + \frac{C_g}{2} \left( 1 + \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) \end{cases} \quad (3.24)$$

La differenza di velocità  $\Omega - \omega_2$  che agisce sul giunto può essere espressa come:

$$\Omega - \omega_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \omega_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\Delta\omega_{12}}{2}$$

pertanto le (3.24) diventano:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_m - k_g \frac{\Delta\omega_{12}}{2}}{2} \left( 1 - \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) \\ C_2 = \frac{C_m}{2} \left( 1 + \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) + k_g \frac{\Delta\omega_{12}}{4} \left( 1 + \frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right) \end{cases} \quad (3.25)$$

Il rendimento di un assale che prevede un assale ordinario abbinato ad un giunto viscoso è il seguente:

$$\eta = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\left( C_m - k_g \frac{\Delta\omega_{12}}{2} \right) \eta_0}{C_m - k_g \frac{\Delta\omega_{12}}{2} \eta_0} \quad (3.26)$$

Il rapporto di bloccaggio di questo gruppo è di conseguenza:

$$b = \frac{1-\eta}{1+\eta} = \frac{C_m(1-\eta_0) + k_g \Delta\omega_{12} \eta_0}{C_m(1+\eta_0)} \quad (3.27)$$

Dalla (3.27) si nota come il rapporto di bloccaggio dipenda direttamente da  $\Delta\omega_{12}$  e dunque abbia valori molto bassi quando il gruppo è poco impegnato ( $\Delta\omega$  piccoli) e vada linearmente crescendo con la differenza di velocità tra i semiassi fino a raggiungere valori prossimi a 0.6. Pertanto anche nell'ipotesi in cui  $C_1 = 0$  l'altra ruota è in grado di scaricare fino al 60 % della coppia motrice. E' da notare che il range di variazione dei valori di  $\eta$  e  $b$ , fissati i parametri di funzionamento del giunto, è funzione di  $\Delta\omega$  e della coppia  $C_m$  e dunque ampiamente variabile a seconda delle condizioni di utilizzo.

## Capitolo 4

# Comportamento direzionale di un veicolo dotato di differenziale bloccato

L'oggetto di indagine di questa sezione è rappresentato dall'impatto che ha il bloccaggio completo del differenziale sul comportamento direzione di un autoveicolo.

Infatti, come si vedrà più in dettaglio, l'assale rigido comporta la nascita di scorrimenti longitudinali di diversa entità sulle due ruote dell'assale motore (posteriore) che, traducendosi in un momento di imbardata aggiuntivo, modificano sensibilmente il comportamento dinamico del veicolo.

In particolare si renderà necessaria una rivisitazione del classico modello monotraccia e di concetti fondamentali quali il gradiente di sottosterzo.

### 4.1 Ipotesi semplificative

Si ritengono valide tutte le ipotesi fatte per il modello classico in § 2.1; in particolare si suppone che anche il modello di veicolo con differenziale bloccato sia schematizzabile come un unico corpo rigido in moto piano.

Anche il sistema di riferimento scelto è, ovviamente, identico a quello scelto per il modello monotraccia classico in modo tale che valgano, anche qui, tutte le grandezze cinematiche e fisiche definite in precedenza.

L'unica differenza consiste nell'assenza del dispositivo di ripartizione di coppia (differenziale ordinario).

### 4.2 Equazioni di congruenza: scorrimenti teorici

La sostituzione di un differenziale ordinario con un assale rigido sull'assale motore (posteriore) comporta una sostanziale variazione delle condizioni cinematiche delle ruote posteriori.

Supponiamo che il veicolo, in condizioni di moto stazionario, si muova con velocità di avanzamento  $u$  costante su una traiettoria circolare di raggio  $R$ . In queste condizioni le velocità longitudinali dei centri ruota sono diverse, in particolare la ruota interna presenta un valore inferiore: