

Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2004–2005



Tesi di Laurea Specialistica

***Trasporto termoelettrico spin selettivo in
strutture ibride SINIS***

Candidato:

Pino D'Amico

Relatori:

Chiar.mo Prof. Rosario Fazio

Dott. Fabio Taddei

Dott. Francesco Giazotto

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione	7
1 Superconduttori e giunzioni NIS	9
1.1 Coppie di Cooper	9
1.2 Teoria BCS	12
1.3 Gap superconduttivo	15
1.4 Eccitazioni elementari: spettro e densità degli stati	18
1.5 Superconduttori e campi magnetici	21
1.6 Trasporto nella giunzione NIS	25
1.6.1 Corrente di carica	26
1.6.2 Correnti di energia e di calore	27
2 Sistemi elettronici fuori dall'equilibrio	31
2.1 Distribuzioni di Fermi-Dirac	31
2.2 Non equilibrio	33
2.3 Esempio di non equilibrio: filo mesoscopico diffusivo tra elettrodi normali	38
3 Struttura SINIS con campo magnetico	41
3.1 Considerazioni preliminari	41
3.2 Caratteristiche del sistema	43
3.3 Struttura SINIS senza campi magnetici	45
3.4 Struttura SINIS con campi magnetici	51
3.4.1 Campi collineari	52
3.4.2 Campi non collineari	59
3.5 Temperatura elettronica e potenziale chimico efficaci	60
3.6 Correnti	65

Conclusioni e prospettive future	71
A Descrizione dell'interazione	73
A.1 Equazione di Boltzmann	73
A.2 Integrali di collisione per scattering inelastico	74
A.2.1 Interazione elettrone-elettrone	74
A.2.2 Interazione elettrone-fonone	75
Bibliografia	79
Ringraziamenti	81

Introduzione

La nanoelettronica studia le proprietà dei gas elettronici presenti all'interno di materiali di dimensioni tipiche che vanno da qualche decina a qualche centinaia di nm. A queste scale di lunghezza è possibile investigare proprietà inusuali dei gas elettronici e possono essere realizzate situazioni del tutto particolari, molto diverse da quelle comunemente osservate in sistemi di dimensioni macroscopiche, in quanto gli elettroni manifestano le proprie caratteristiche quantomeccaniche. Tipicamente nella nanoelettronica le temperature di interesse sono criogeniche (dell'ordine o minore di 1K).

Assemblando materiali con diverse proprietà, quali superconduttori, semiconduttori, metalli normali, isolanti e ferromagneti, è possibile costruire *nanostrutture* in cui le proprietà dei singoli costituenti vengono adoperate per realizzare situazioni fisiche esotiche.

Un'effetto particolarmente interessante ottenibile nelle nanostrutture è il non-equilibrio termodinamico elettronico. Infatti le temperature criogeniche e le dimensioni ridotte dei costituenti, permettono di poter sopprimere i vari tipi di interazione a cui sono soggetti gli elettroni e quindi impediscono il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico. Altri effetti interessanti possono manifestarsi in presenza di campi magnetici, in quanto questi possono modificare le proprietà dello stato superconduttivo.

In questa tesi analizziamo una struttura Superconduttore/Isolante/Metallo normale/Isolante/Superconduttore (SINIS) in presenza di campi magnetici localizzati sui superconduttori. In particolare siamo interessati alle proprietà del gas elettronico all'interno della regione N. Le dimensioni mesoscopiche della regione N permettono di portare il gas elettronico fuori dall'equilibrio termodinamico e la presenza dei campi magnetici localizzati sui superconduttori consente di manipolare spin selettivamente la funzione di distribuzione degli elettroni.

I risultati originali di questo lavoro di tesi risiedono nell'aver mostrato che le due popolazioni di spin si comportano distintamente all'interno della regione N

della struttura SINIS. Nella configurazione $\theta = 0$ le temperature efficaci delle due popolazioni sono uguali mentre i potenziali chimici hanno comportamento diverso. Nella situazione opposta $\theta = \pi$, le due popolazioni hanno stesso potenziale chimico ma temperature diverse. Nelle situazioni intermedie le due popolazioni mostrano appunto situazioni intermedie, cioè ci sono differenze sia nella temperatura che nel potenziale chimico efficaci.

Del tutto originale è anche il dispositivo proposto per la generazione di correnti spin-polarizzate. Infatti sfruttando la configurazione $\theta = \pi$ siamo riusciti ad ottenere correnti di carica spin-polarizzate tra la regione N della struttura SINIS ed un ulteriore elettrodo superconduttivo. Il trasporto di carica avviene in maniera termoelettrica, in quanto sfrutta le diverse temperature delle popolazioni di spin up e down.

La tesi è così organizzata:

- Nel capitolo 1 introduciamo la teoria BCS della superconduttività, che utilizziamo per descrivere la densità degli stati dei superconduttori immersi in campo magnetico; analizziamo le proprietà della giunzione NIS (la struttura SINIS è composta da due giunzioni NIS con la regione N in comune) studiandone le proprietà di trasporto.
- Nel capitolo 2 descriviamo lo stato di non equilibrio termodinamico di un gas elettronico, partendo dallo stato di equilibrio e generalizzando i concetti di temperatura e potenziale chimico per il caso del non equilibrio. Ricaviamo le equazioni che permettono di ottenere la temperatura ed il potenziale chimico *efficaci*, utilizzate per descrivere la regione N della struttura SINIS.
- Nel capitolo 3 analizziamo la struttura SINIS con campi magnetici localizzati sui superconduttori, ricavando le diverse funzioni di distribuzione per le due popolazioni di spin all'interno della regione N, studiandone il comportamento al variare dell'angolo relativo θ tra i due campi. Dalle funzioni di distribuzione ricaviamo le temperature ed i potenziali chimici efficaci relativamente alle due popolazioni di spin. Utilizziamo la configurazione antiparallela dei campi $\theta = \pi$, per generare correnti spin-polarizzate tra la regione N della struttura e un ulteriore elettrodo superconduttivo.
- In appendice mostriamo il formalismo utilizzato comunemente per la descrizione dettagliata dei processi di interazione elettronica presenti all'interno di fili mesoscopici di metallo normale.

Capitolo 1

Superconduttori e giunzioni NIS

La giunzione NIS è il blocco fondamentale per la costruzione della struttura SINIS analizzata in questo lavoro di tesi e pertanto in questo capitolo descriveremo le sue caratteristiche fondamentali. A tal fine introduciamo la teoria BCS della superconduttività [1], facendo riferimento ai testi [2, 3] focalizzando in particolare l'attenzione sulla densità degli stati che descrive le eccitazioni di quasiparticella del superconduttore.

1.1 Coppie di Cooper

L'idea che stà alla base della teoria BCS, che rappresenta la prima teoria microscopica della superconduttività, è stata introdotta da Cooper, il quale mostrò che due elettroni interagenti al di sopra del livello di Fermi formano uno stato legato indipendentemente dall'intensità dell'interazione attrattiva tra di essi. In generale la funzione d'onda che descrive due elettroni è la seguente:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \phi_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} \chi(\sigma_1, \sigma_2) \quad (1.1)$$

dove \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 sono le posizioni dei due elettroni, $\phi_{\mathbf{q}}$ rappresenta la funzione d'onda nel riferimento del centro di massa, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è la distanza relativa, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ è la coordinata del centro di massa, σ_1 e σ_2 denotano lo spin dei due elettroni e χ è la funzione d'onda di spin.

Consideriamo il caso in cui la funzione d'onda di spin rappresenti lo stato di singoletto

$$\chi(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (1.2)$$

e restringiamoci alla situazione in cui il sistema è fermo nel riferimento del centro di massa

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

sostituendo, per comodità di scrittura, $\phi_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\rho})$ con $\phi(\boldsymbol{\rho})$, dove è sottintesa la condizione (1.3).

L'equazione di Schroedinger per i due elettroni è data da

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\epsilon + 2\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.4)$$

dove ϵ è l'energia della coppia di elettroni e k_F è l'impulso di Fermi. Sviluppando ϕ in serie di Fourier

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \quad (1.5)$$

e sostituendo tale sviluppo nell'equazione (1.4) otteniamo

$$\sum_{\mathbf{k}'} \left[\frac{\hbar^2}{2m} 2k'^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left(\epsilon + 2\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (1.6)$$

Assumiamo invarianza traslazionale per il potenziale $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\boldsymbol{\rho})$, moltiplichiamo per $e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}$ ed integriamo su $d^3\rho$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{m} \int \sum_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\rho}} g(\mathbf{k}') k'^2 d^3\rho + \int \sum_{\mathbf{k}'} V(\boldsymbol{\rho}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\rho}} g(\mathbf{k}') d^3\rho = \\ = \left(\epsilon + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) \int \sum_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\rho}} g(\mathbf{k}') d^3\rho. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Sfruttando ora la proprietà

$$\int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\boldsymbol{\rho}} d^3\rho = L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (1.8)$$

dove L^3 rappresenta il volume d'integrazione, l'equazione (1.7) diventa

$$\frac{\hbar^2}{m} k^2 g(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = (\epsilon + 2\epsilon_F) g(\mathbf{k}) \quad (1.9)$$

dove abbiamo definito

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{L^3} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\rho} V(\rho) d^3\rho \quad (1.10)$$

ed introdotto l'energia di Fermi $\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$.

Poichè stiamo considerando un mare di Fermi con corrispondente energia ϵ_F e momento \mathbf{k}_F di Fermi, tutti i livelli energetici con $k < k_F$, dove k e k_F rappresentano i valori assoluti dei rispettivi momenti, sono occupati e quindi per tali valori di k dobbiamo imporre la condizione $g(\mathbf{k}) = 0$. Consideriamo il seguente potenziale d'interazione:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -\frac{V}{L^3} & \text{per } \left| \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_F \right| \wedge \left| \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - \epsilon_F \right| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.11)$$

dove ω_D è la frequenza di *Debye* e rappresenta la frequenza di *cut-off* per l'interazione attrattiva tra i due elettroni nel caso in cui questa è mediata da fononi.

Inserendo la (1.11) nella (1.9) ed integrando otteniamo:

$$\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{m} + \epsilon + \epsilon_F \right) g(\mathbf{k}) = -\frac{V}{L^3} \sum_{\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}'). \quad (1.12)$$

Dividendo ambo i membri per $\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{m} + \epsilon + \epsilon_F \right)$, sommando su \mathbf{k} e semplificando $\sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k})$ l'equazione (1.12) assume la forma:

$$\frac{V}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - \epsilon - 2\epsilon_F} = 1. \quad (1.13)$$

A questo punto, facendo il cambio di variabile $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_F = \xi$, rimpiazziamo la sommatoria con un integrale introducendo la densità degli stati $N(\xi)$ e riscriviamo la (1.13) nella seguente forma:

$$V \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{N(\xi) d\xi}{2\xi - \epsilon} = 1. \quad (1.14)$$

La densità degli stati può essere considerata costante ed uguale al suo valore all'energia di Fermi $\epsilon = \epsilon_F$ sull'intervallo d'integrazione della (1.14), cioè possiamo porre $N(\xi) = N(0)$ e portare la densità degli stati fuori dal segno di integrale della (1.14), ottenendo

$$\frac{1}{2} N(0) V \ln \left(\frac{\epsilon - 2\hbar\omega_D}{\epsilon} \right) = 1; \quad (1.15)$$

assumendo $|\epsilon| \ll \hbar\omega_D$ otteniamo il risultato finale:

$$\epsilon = -2\hbar\omega_D e^{-(2/N(0)V)}. \quad (1.16)$$

L'equazione (1.16) ha le seguenti interessanti proprietà:

- Il segno di ϵ è negativo e quindi lo stato risultante è uno *stato legato*
- La presenza di uno stato legato suggerisce un *gap* nello spettro energetico
- Lo stato risultante è uno stato legato per qualunque valore di V
- L'equazione (1.16) non può essere espansa in serie di potenze di V perchè $e^{-1/z}$ non è olomorfa in $z = 0$, e quindi il problema non può essere trattato con la teoria delle perturbazioni.

1.2 Teoria BCS

L'idea di Cooper esposta nel precedente paragrafo porta alla conclusione che una teoria della superconduttività deve produrre un gap nello spettro delle eccitazioni, come tra l'altro osservato in vari esperimenti. La presenza di uno stato legato suggerisce che la funzione d'onda dello stato fondamentale deve essere costruita a partire da coppie di elettroni. Esaminiamo quindi una funzione d'onda della seguente forma:

$$\psi_N = \psi(1, 2)\psi(3, 4)\psi(5, 6)\dots\psi(N - 1, N) \quad (1.17)$$

dove le funzioni d'onda di coppia sono definite come segue

$$\psi(1, 2) \equiv \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2). \quad (1.18)$$

La funzione d'onda (1.17) deve descrivere un insieme di *fermioni*, cioè deve rispettare il *principio di Pauli*, quindi applichiamo su di essa l'operatore di antisimmetrizzazione \hat{A}

$$\psi_N = \hat{A} \{ \psi(1, 2)\psi(3, 4)\psi(5, 6)\dots\psi(N - 1, N) \}. \quad (1.19)$$

Seguendo le considerazioni fatte nel precedente paragrafo, scegliamo le coppie di elettroni ferme nel riferimento del centro di massa $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv$

$\phi(\boldsymbol{\rho})$ accoppiate con spin opposto e sviluppiamo la $\phi(\boldsymbol{\rho})$ in serie di Fourier come in (1.5)

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}. \quad (1.20)$$

Sostituendo la (1.20) nella (1.19) otteniamo

$$\psi_N = \sum_{\mathbf{k}_1} \cdots \sum_{\mathbf{k}_{N/2}} \hat{A} \left(e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \cdots e^{i\mathbf{k}_{N/2} \cdot (\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N)} \right) \times \\ [(1 \uparrow)(2 \downarrow) \cdots (N-1 \uparrow)(N \downarrow)]. \quad (1.21)$$

La (1.20) descrive lo stato fondamentale del sistema nella rappresentazione delle coordinate; essendo più comodo utilizzare la rappresentazione nel numero d'occupazione, cioè lavorare in seconda quantizzazione, introduciamo gli operatori di creazione e di distruzione per riscrivere la (1.20). Chiamando $|\phi_0\rangle$ lo stato di vuoto, cioè lo stato in cui non sono presenti elettroni, gli operatori di creazione e di distruzione sono definiti nel seguente modo:

1. $c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$ crea un elettrone nello stato di momento \mathbf{k} e spin σ
2. $c_{\mathbf{k},\sigma}$ distrugge l'eventuale elettrone presente nello stato di momento \mathbf{k} e spin σ .

Poichè gli operatori appena introdotti creano e distruggono fermioni, questi devono rispettare le seguenti regole di commutazione

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger c_{\mathbf{l},\beta}^\dagger + c_{\mathbf{l},\beta}^\dagger c_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger &= 0 \\ c_{\mathbf{k},\alpha} c_{\mathbf{l},\beta} + c_{\mathbf{l},\beta} c_{\mathbf{k},\alpha} &= 0 \\ c_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger c_{\mathbf{l},\beta} + c_{\mathbf{l},\beta} c_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.22)$$

dove \mathbf{k}, \mathbf{l} rappresentano vettori d'onda e α, β le proiezioni dello spin.

Come esempio di cambiamento di rappresentazione consideriamo il caso qui sotto

$$\hat{A} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} (1 \uparrow)(2 \downarrow) \longmapsto c_{\mathbf{k}_1 \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}_1 \downarrow}^\dagger |\phi_0\rangle;$$

dove si può vedere come con la scrittura in seconda quantizzazione si ha una visione immediata degli stati occupati che non nella rappresentazione delle coordinate.

Sostituendo le (1.22) nella (1.21) otteniamo la scrittura in seconda quantizzazione per lo stato ad N particelle

$$|\psi_N\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1} \cdots \sum_{\mathbf{k}_{N/2}} g_{\mathbf{k}_1} \cdots g_{\mathbf{k}_{N/2}} c_{\mathbf{k}_1 \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}_1 \downarrow}^\dagger \cdots c_{\mathbf{k}_{N/2} \uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}_{N/2} \downarrow}^\dagger |\phi_0\rangle. \quad (1.23)$$

La funzione d'onda (1.23) non si presta ad una facile manipolazione e furono Bardeen, Cooper e Schrieffer a proporre una funzione d'onda alternativa, appunto la *funzione d'onda di BCS*, che rappresenta il punto di partenza della teoria BCS

$$|\psi_{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \right) |\phi_0\rangle \quad (1.24)$$

in cui il prodotto si riferisce a tutti gli stati di onda piana. Osserviamo innanzi tutto che i coefficienti $u_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}$ non sono indipendenti tra di loro ma sono fissati dalla condizione di normalizzazione sulla funzione d'onda $\langle \psi_{BCS} | \psi_{BCS} \rangle = 1$ dalla quale si ottiene

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \quad (1.25)$$

La differenza tra la (1.23) e la (1.24) risiede nel fatto che la prima descrive uno stato con $N/2$ coppie di elettroni mentre nella seconda il numero di coppie non è fissato a priori e quindi il numero di coppie può essere qualunque. Facciamo ora vedere che le due descrizioni sono sostanzialmente equivalenti e che quindi è lecito utilizzare la $|\psi_{BCS}\rangle$ per il calcolo delle proprietà del sistema.

Innanzitutto la funzione di BCS può essere sviluppata in termini delle funzioni con $N/2$ coppie con l'uguaglianza

$$|\psi_{BCS}\rangle = \sum_N \lambda_N |\psi_N\rangle \quad (1.26)$$

dove i coefficienti di sviluppo devono obbedire alla condizione $\sum_N |\lambda_N|^2 = 1$ ottenuta grazie alla normalizzazione della $|\psi_{BCS}\rangle$. Consideriamo ora il numero di particelle associate alla $|\psi_{BCS}\rangle$. Definendo l'operatore numero

$$\hat{N} \equiv \sum_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} \quad (1.27)$$

il numero medio delle particelle è dato dal valor medio di tale operatore sullo stato di BCS

$$\bar{N} = \langle \psi_{BCS} | \hat{N} | \psi_{BCS} \rangle. \quad (1.28)$$

Utilizziamo la (1.24) per valutare la (1.28) ed otteniamo

$$\bar{N} = \sum_{\mathbf{k}} 2|v_{\mathbf{k}}|^2. \quad (1.29)$$

La varianza del numero di particelle, definita come

$$\overline{\delta N^2} \equiv \overline{N^2} - \bar{N}^2 \quad (1.30)$$

nel nostro caso è data da

$$\begin{aligned}\overline{\delta N^2} &= \langle \psi_{BCS} | \hat{N} \hat{N} | \psi_{BCS} \rangle - \langle \psi_{BCS} | \hat{N} | \psi_{BCS} \rangle^2 \\ &= \sum_{\mathbf{k}} 4|v_{\mathbf{k}}|^2 |u_{\mathbf{k}}|^2.\end{aligned}\quad (1.31)$$

Trasformando la somma in integrale nella (1.31)

$$\sum_{\mathbf{k}} \mapsto (V/2\pi)^3 \int d^3k$$

si vede che la varianza è proporzionale al volume occupato dalle particelle, il quale è proporzionale al numero delle particelle stesso. È quindi possibile fare la seguente stima

$$\frac{(\overline{\delta N^2})^{1/2}}{\bar{N}} \approx \bar{N}^{-1/2}.\quad (1.32)$$

Valori tipici per i metalli sono $\bar{N} \approx 10^{22}$ e quindi otteniamo $\bar{N}^{-1/2} \approx 10^{-11}$ il che significa che i coefficienti di sviluppo della (1.26) sono molto piccoli intorno al valor medio \bar{N} , cioè i calcoli effettuati con la funzione d'onda di BCS (1.24) sono sostanzialmente equivalenti a quelli ottenuti con la (1.23). Questo è il motivo che ha spinto BCS ad utilizzare la (1.24).

Introdotta la funzione d'onda di BCS e giustificata la sua validità, restano da determinare le proprietà del sistema quali il gap superconduttivo, la sua dipendenza dalla temperatura, lo spettro delle eccitazioni e la densità degli stati.

1.3 Gap superconduttivo

Per determinare i parametri u e v introduciamo l'hamiltoniana di interazione del sistema

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k},l} V_{\mathbf{k}l} c_{l\uparrow}^\dagger c_{-l\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}\quad (1.33)$$

dove il termine d'interazione accoppia esplicitamente solo elettroni con momento e spin opposti. Non essendo fissato il numero di particelle è importante sottrarre dall'hamiltoniana (1.33) il termine $\mu \hat{N}$ dove μ rappresenta il potenziale chimico. Dobbiamo quindi imporre

$$\delta \langle \psi_{BCS} | H - \mu \hat{N} | \psi_{BCS} \rangle = 0\quad (1.34)$$

Il termine da minimizzare diventa, dopo opportuni calcoli,

$$\langle \psi_{BCS} | H - \mu \hat{N} | \psi_{BCS} \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{l}} v_{\mathbf{l}} \quad (1.35)$$

dove $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ e la minimizzazione deve essere fatta tenendo conto della condizione $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$. Introducendo un'angolo $\theta_{\mathbf{k}}$ che soddisfa le condizioni precedenti,

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{k}} &= \sin(\theta_{\mathbf{k}}) \\ v_{\mathbf{k}} &= \cos(\theta_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (1.36)$$

è possibile minimizzare rispetto a $\theta_{\mathbf{k}}$, cioè imporre

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{\mathbf{k}}} \langle \psi_{BCS} | H - \mu \hat{N} | \psi_{BCS} \rangle = 0 \quad (1.37)$$

dalla quale otteniamo

$$\sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \sin(2\theta_{\mathbf{k}}) \sin(2\theta_{\mathbf{l}}) - 2\xi_{\mathbf{k}} \sin(2\theta_{\mathbf{k}}) = 0 \quad (1.38)$$

che può essere scritta in forma più compatta

$$\tan(2\theta_{\mathbf{k}}) = \frac{\sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \sin(2\theta_{\mathbf{l}})}{2\xi_{\mathbf{k}}}. \quad (1.39)$$

Definiamo ora le quantità

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} u_{\mathbf{l}} v_{\mathbf{l}} = - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \sin(2\theta_{\mathbf{l}}) \quad (1.40)$$

$$E_{\mathbf{k}} = (\Delta_{\mathbf{k}}^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}. \quad (1.41)$$

$E_{\mathbf{k}}$ sarà l'energia d'eccitazione delle quasi particelle di momento $\hbar\mathbf{k}$, mentre $\Delta_{\mathbf{k}}$ risulterà essere indipendente da \mathbf{k} e quindi rappresenta la minima energia di eccitazione, chiamato anche *gap superconduttivo*. Inserendo queste due definizioni nella (1.39) otteniamo

$$\tan(2\theta_{\mathbf{k}}) = - \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\xi_{\mathbf{k}}} \quad (1.42)$$

da cui ricaviamo le seguenti due condizioni per le funzioni $u_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}$

$$2u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta}{E_{\mathbf{k}}} \quad (1.43)$$

$$v_{\mathbf{k}}^2 - u_{\mathbf{k}}^2 = -\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}. \quad (1.44)$$

Dall'equazione (1.44) e dalla condizione di normalizzazione $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$ ricaviamo le espressioni per $u_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}$

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{(\Delta^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}} \right] \quad (1.45)$$

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{(\Delta^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}} \right].$$

L'unica informazione che manca è $\Delta_{\mathbf{k}}$, per la quale otteniamo l'equazione di autoconsistenza sostituendo la (1.43) nella (1.40)

$$\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{l}} \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{(\Delta_{\mathbf{k}}^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2)^{1/2}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}}. \quad (1.46)$$

Facciamo ora l'ipotesi che il potenziale sia come quello introdotto da Cooper, descritto nel primo paragrafo

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} = \begin{cases} -V & \text{se } |\xi_{\mathbf{k}}| \wedge |\xi_{\mathbf{l}}| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.47)$$

Inserendo questo potenziale nell'equazione (1.40) otteniamo

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \Delta & \text{se } |\xi_{\mathbf{k}}| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{se } |\xi_{\mathbf{k}}| \geq \hbar\omega_D \end{cases} \quad (1.48)$$

Cioè il gap è indipendente da \mathbf{k} come già anticipato e quindi la condizione di autoconsistenza (1.46) si semplifica nella più semplice formula

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}}}. \quad (1.49)$$

Come fatto nel primo paragrafo, sostituiamo la somma con l'integrale su ξ considerando la densità degli stati costante ed uguale a quella calcolata all'energia

di Fermi $N(0)$, ed otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{(2\Delta^2 + \xi^2)^{1/2}} \\ &= \sinh^{-1} \frac{\hbar\omega_D}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.50)$$

o equivalentemente

$$\frac{\Delta}{\hbar\omega_D} = \left[\sinh \left(\frac{1}{N(0)V} \right) \right]^{-1}. \quad (1.51)$$

Poichè valori tipici della temperatura di Debye sono $\theta_D = \hbar\omega_D/k_B \approx 300K$ mentre la temperatura critica è tipicamente $\Delta/k_B \approx T_c \approx 10K$ possiamo approssimare la (1.51) ed ottenere

$$\Delta \approx 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V}. \quad (1.52)$$

La (1.52) mostra la somiglianza tra il gap superconduttivo e l'energia di legame della coppia di Cooper data dalla (1.16).

1.4 Eccitazioni elementari: spettro e densità degli stati

Per determinare lo spettro delle eccitazioni del superconduttore riconsideriamo l'hamiltoniana (1.33) d'interazione introdotta nel paragrafo precedente

$$H = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{l}\downarrow} c_{\mathbf{l}\uparrow} \quad (1.53)$$

dove $\xi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \mu$ è l'energia riferita al potenziale chimico.

Seguiamo il metodo introdotto da Bogolubov e Valatin per portare l'hamiltoniana (1.53) in una forma in cui si vede esplicitamente quali sono le eccitazioni elementari del sistema. Introduciamo innanzi tutto i valori d'aspettazione sullo stato fondamentale degli operatori $c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}$

$$b_{\mathbf{k}} = \langle c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle \quad (1.54)$$

che che permettono di scrivere la seguente relazione

$$c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} = b_{\mathbf{k}} + (c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} - b_{\mathbf{k}}). \quad (1.55)$$

Grazie alla (1.55) l'hamiltoniana (1.53) diventa

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} (c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} b_{\mathbf{l}} + b_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{l}\downarrow} c_{\mathbf{l}\uparrow} - b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{l}}) \quad (1.56)$$

e definiamo

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{l}} V_{\mathbf{k}\mathbf{l}} b_{\mathbf{l}} \quad (1.57)$$

in modo che la (1.56) assuma la forma

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}} (\Delta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} + \Delta_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} - \Delta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*). \quad (1.58)$$

Introduciamo a questo gli operatori fermionici definiti da Bogoliubov-Valatin

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{0}}^{\dagger} &= u_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \\ \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{1}}^{\dagger} &= u_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \end{aligned}$$

e le relazioni inverse

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\uparrow} &= u_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{0}} + v_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{1}}^{\dagger} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} &= - v_{\mathbf{k}}^* \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{0}} + u_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{1}}^{\dagger}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Osserviamo innanzitutto che questi operatori rappresentano stati di *quasiparticella* nel senso che creano o distruggono contemporaneamente elettroni e buche. Sostituendoli nella (1.58) ed imponendo la condizione

$$2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}}^{\dagger} v_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 = 0 \quad (1.60)$$

otteniamo

$$H = \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}} + \Delta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^*) + \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} (\gamma_{\mathbf{k}\mathbf{0}}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{0}} + \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{1}}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}\mathbf{1}}). \quad (1.61)$$

Osserviamo che è sempre possibile imporre una condizione sui parametri u e v perchè l'unico vincolo che devono rispettare è $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$, quindi c'è comunque la libertà di scegliere un'ulteriore condizione in base alle necessità, come la (1.60).

La (1.61) permette di fare due considerazioni:

- la prima somma ci dice che l'energia dello stato fondamentale differisce da quello di stato normale a $T=0$ (in cui $E_{\mathbf{k}} = |\xi_{\mathbf{k}}|$ e $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$) per l'*energia di condensazione*.
- la seconda somma ci dà l'aumento di energia rispetto allo stato fondamentale in termini degli operatori numero $\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}}$.

Quindi le eccitazioni elementari del sistema risultano essere le quasi particelle descritte dagli operatori fermionici $\gamma_{\mathbf{k}}$, chiamati *Bogoliuboni*, che hanno energia

$$E_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + |\Delta_{\mathbf{k}}|^2)^{1/2}. \quad (1.62)$$

Essendo i *Bogoliuboni* dei fermioni, questi obbediranno alla statistica di Fermi, cioè all'equilibrio termodinamico saranno descritti da

$$f(E) = \left(\exp\left(\frac{E}{KT}\right) + 1 \right)^{-1} \quad (1.63)$$

ed inoltre, poichè gli operatori di creazione e distruzione sono in corrispondenza uno a uno con gli operatori elettronici, è possibile determinare la densità degli stati imponendo che il numero di stati presenti in un certo intervallo di energia sia lo stesso per gli elettroni e per le quasiparticelle, cioè in formule

$$N_S(E)dE = N_N(\xi)d\xi. \quad (1.64)$$

Poichè siamo interessati ad energie che si discostano di qualche millielettronvolt dall'energia di Fermi, e fissando quest'ultima a zero per convenzione, possiamo considerare $N_n(\xi)$ praticamente equivalente a $N_n(0)$ che è costante. Invertendo la (1.62)

$$\xi_{\mathbf{k}} = (E_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_{\mathbf{k}}^2) \quad (1.65)$$

ed utilizzando la (1.64) nella forma

$$\frac{N_S(E)}{N_N(0)} = \frac{d\xi}{dE} \quad (1.66)$$

ottienamo la densità degli stati cercata

$$\frac{N_S(E)}{N_N} = \begin{cases} \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} & \text{se } |E| > \Delta \\ 0 & \text{se } |E| < \Delta. \end{cases} \quad (1.67)$$

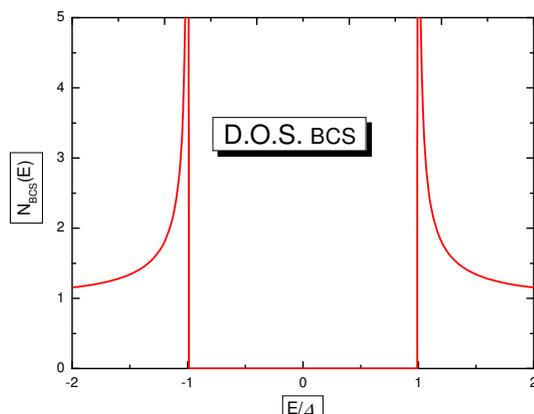


Figura 1.1: Andamento della densità degli stati della teoria BCS della superconduttività (1.67). La curva è normalizzata alla densità degli stati nel caso normale, calcolata all'energia di Fermi $N_N(E_F)$.

In figura (1.1) mostriamo l'andamento della densità degli stati appena ricavata in funzione dell'energia dove si può osservare l'assenza di stati accessibili in tutto l'intervallo $(-\Delta, \Delta)$. Riassumendo la teoria BCS permette di calcolare le quantità interessanti per la descrizione della superconduttività a partire dalla fisica microscopica e quindi dalla descrizione della funzione d'onda dello stato fondamentale. Introdotta l'hamiltoniana che tiene conto dei processi di accoppiamento, questa permette di evidenziare in modo chiaro la presenza di eccitazioni fermioniche di quasi particella, di conoscerne l'energia e la densità degli stati e di ricavare le quantità termodinamiche d'interesse.

1.5 Superconduttori e campi magnetici

In questo paragrafo consideriamo l'effetto che hanno i campi magnetici sulle proprietà della densità degli stati di film di superconduttori. Tipicamente quando un superconduttore si trova in presenza di un campo magnetico, quest'ultimo penetra superficialmente per uno spessore dell'ordine di $10^2 - 10^3 \text{ nm}$ [4]. Quindi se un superconduttore sufficientemente sottile lungo una direzione viene immerso in un campo magnetico perpendicolare a tale direzione avremo una penetrazione totale, come mostrato schematicamente in figura (1.2). In tale regime le proprietà della densità degli stati (1.67) vengono modificate in virtù dell'interazione degli elettro-

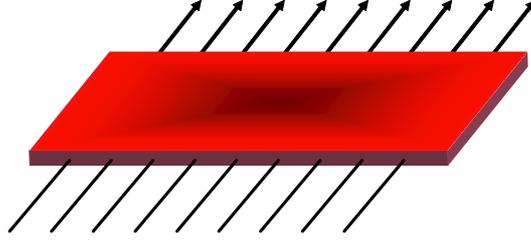


Figura 1.2: Rappresentazione schematica di un film superconduttivo immerso in campo magnetico. Le linee di campo penetrano completamente all'interno del campo magnetico.

ni con il campo magnetico. Nei lavori [5, 6, 7] viene verificato sperimentalmente, attraverso misure di tunnelling in giunzioni quali Al-Al₂O₃-Ag, che applicando campi magnetici dell'ordine di 10K0e su *film* di superconduttori quali Al e Ga di dimensioni laterali dell'ordine di 10nm, la densità degli stati viene modificata dall'interazione dello spin elettronico con il campo magnetico

$$H_M = -\frac{1}{2}g\mu_B\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.68)$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (1.69)$$

g è il fattore giromagnetico, che per gli elettroni vale 2, \mathbf{h} il campo magnetico applicato

$$\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z) \quad (1.70)$$

e $\boldsymbol{\sigma}$ è il vettore costruito con le matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

La (1.68) può quindi essere riscritta come

$$H_M = -\mu_B\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.72)$$

Poichè ci interessano dimensioni sufficientemente ridotte (10nm), è possibile trascurare l'effetto del campo magnetico sul moto orbitale degli elettroni [5]

e considerare la (1.72) l'unica interazione che gli elettroni hanno con il campo magnetico applicato. Essendo questo applicato parallelamente al piano del superconduttore, le componenti di \mathbf{h} si riducono a due

$$\mathbf{h} = (h_x, 0, h_z) \quad (1.73)$$

dove stiamo scegliendo x e z come assi che descrivono il piano della giunzione, come illustrato in figura (1.3). Con \mathbf{h} dato dalla (1.73) l'hamiltoniana d'interazio-

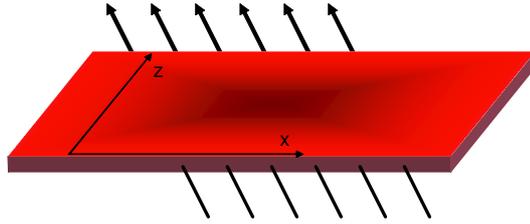


Figura 1.3: Film superconduttore immerso in campo magnetico. Sul piano del film vengono fissati gli assi (x,z) come riferimento ed il campo magnetico può in generale non essere allineato con nessuno dei due assi.

ne (1.72) diventa

$$H_M = -\mu_B \begin{pmatrix} h_z & h_x \\ h_x & -h_z \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Osserviamo che per un dato superconduttore è sempre possibile scegliere la direzione del campo magnetico coincidente con l'asse z , in modo da ottenere

$$H_M = -\mu_B \begin{pmatrix} h_z & 0 \\ 0 & -h_z \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

ma poichè il sistema trattato in questa tesi è una struttura SINIS con campi applicati separatamente sui due superconduttori analizziamo anche il caso in cui l'asse di quantizzazione dello spin e la direzione del campo magnetico non sono collineari, cioè quando l'hamiltoniana è data da (1.74). Considerando l'angolo θ tra l'asse z e la direzione del campo magnetico, quest'ultimo può essere scritto come

$$\mathbf{h} = h(\sin(\theta), 0, \cos(\theta)) \quad (1.76)$$

dove h rappresenta il modulo del campo magnetico, e quindi la (1.74) assume la forma

$$H_M = -\mu_B h \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

Gli autovalori delle (1.74;1.75) sono

$$E_M = \mp \mu_B h \quad (1.78)$$

Gli autostati corrispondenti agli autovalori (1.78) sono

$$|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \quad (1.79)$$

relativamente alla (1.75), mentre quelli realtivi alla (1.77) si ottengono attraverso una rotazione di θ nel piano $x - z$

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle \\ |-\rangle &= -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Quindi l'energia degli elettroni che occupano gli stati di quasi particella dipende dallo spin

$$E_{\uparrow,\downarrow} = (\xi^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{2}} \mp \mu_B h, \quad (1.81)$$

e come conseguenza si ha che la densità degli stati dipenderà dallo spin

$$N_S^\sigma = N_S(E \pm \mu_B h) \quad (1.82)$$

dove N_S è data dalla (1.67). Sperimentalmente questa dipendenza è stata osservata misurando la conduttanza differenziale $\frac{dI}{dV}(V)$ attraverso giunzioni tipo Al-Al₂O₃-Ag, come mostrato in figura (1.4). La curva sperimentale è la somma delle due curve tratteggiate, corrispondenti alle due popolazioni dello spin, e si può osservare la traslazione corrispondente a

$$2\mu_B h.$$

La conduttanza differenziale ci da informazioni dirette sulla densità degli stati del superconduttore. Infatti, essendo

$$\frac{dI}{dV}(V_C) = \int_{-\infty}^{\infty} N_S(E) \frac{\beta e^{\beta(E+eV_C)}}{(1 + e^{\beta(E+eV_C)})^2} dE \quad (1.83)$$

dove $\beta = \frac{1}{k_B T}$, per $T = 0$ si ottiene l'uguaglianza

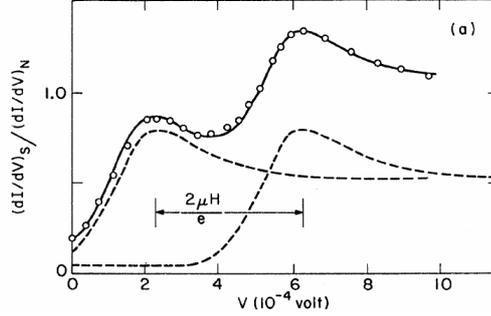


Figura 1.4: Misura della conduttanza differenziale realizzata su una giunzione Al-Al₂O₃-Ag, adattata da [5]. Le misure sono state effettuate a $T = 0.4\text{K}$ con $h = 37.2\text{KOe}$. La curva sperimentale (pallini vuoti) è la sovrapposizione delle due curve tratteggiate che rappresentano le conduttanze differenziali relative alle due popolazioni di spin.

$$\frac{dI}{dV}(V_C) = N_S(eV_C) \quad (1.84)$$

grazie al limite

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\beta e^{\beta(E+eV_C)}}{(1 + e^{\beta(E+eV_C)})^2} = \delta(eV_C), \quad (1.85)$$

dove δ è la funzione di Dirac.

Per temperature $k_B T \ll \Delta$ la conduttanza differenziale sarà approssimativamente data dalla (1.84). In questo caso il *kernel* $\frac{\beta e^{\beta(E+eV_C)}}{(1+e^{\beta(E+eV_C)})^2}$ è una funzione simmetrica in eV_C molto piccata intorno al massimo eV_C e quindi la conduttanza differenziale (1.83) avrà lo stesso andamento della densità degli stati, in qualche modo allargata dalla temperatura finita.

1.6 Trasporto nella giunzione NIS

Il trasporto in giunzioni ibride si ottiene collegando la giunzione in questione ad un generatore di tensione e studiando il trasporto di carica, di energia e di calore attraverso la giunzione stessa.

1.6.1 Corrente di carica

Considerando la giunzione NIS mostrata in figura (1.5), in cui a sinistra è presente l'elettrodo normale, a destra quello superconduttivo collegati ad una differenza di potenziale V_C , vogliamo determinare la corrente di carica che fluisce da un elettrodo all'altro. Per ottenere un'espressione della corrente totale, consideriamo innanzi tutto il numero netto di particelle che fluiscono attraverso la giunzione nell'unità di tempo ad una data energia E (detto *rate* \mathcal{R}). In accordo con [8], utilizziamo la *regola d'oro di Fermi* ed otteniamo la seguente espressione

$$\mathcal{R}(E) = \frac{1}{eR_T} N_N(E - eV_C) N_S(E) [f_N(E - eV_C) - f_S(E)]. \quad (1.86)$$

Come si può osservare nella (1.86), allo scopo di tener conto della differenza di potenziale applicato, le funzioni che si riferiscono al metallo normale sono traslate della quantità eV_C . Descriviamo i termini introdotti nella (1.86): e è la carica elettronica; N_N ed N_S sono le densità degli stati, normalizzate al loro valore all'energia di Fermi, del metallo normale e del superconduttore rispettivamente; f_N ed f_S sono le funzioni di distribuzione degli elettrodi che consideriamo all'equilibrio termodinamico con l'ambiente esterno a temperatura T_0 ; R_T è la resistenza della barriera isolante definita dalla seguente espressione [8]

$$R_T = \frac{\hbar}{\pi A |T|^2 N_N^0 N_S^0} \quad (1.87)$$

dove A è l'area della giunzione, $|T|^2$ è il coefficiente di trasmissione della barriera, che consideriamo indipendenti dall'energia e dallo spin, N_N^0 e N_S^0 sono le densità degli stati dei due elettrodi nel caso in cui questi si trovino entrambi nello stato di metallo normale, calcolate all'energia di Fermi. La corrente di carica totale che

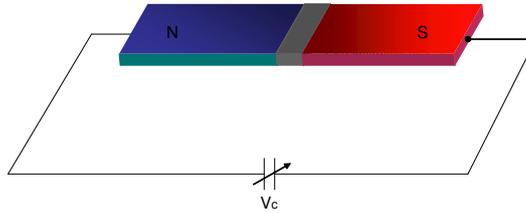


Figura 1.5: Rappresentazione schematica di una giunzione NIS connessa ad un generatore di tensione, con d.d.p. V_C . In grigio al centro la barriera isolante.

fluisce da N ad S si ottiene integrando la (1.86) sull'energia

$$I = \frac{1}{eR_T} \int_{-\infty}^{\infty} N_N(E - eV_C) N_S(E) [f_N(E - eV_C) - f_S(E)] dE. \quad (1.88)$$

Poichè tipicamente le temperatura a cui si effettuano esperimenti con le giunzioni sono dell'ordine di 1K, possiamo considerare costante ed uguale ad 1 la densità degli stati normalizzata del metallo normale N_N e quindi riscrivere la (1.88)

$$I = \frac{1}{eR_T} \int_{-\infty}^{\infty} N_S(E) [f_N(E - eV) - f_S(E)] dE. \quad (1.89)$$

1.6.2 Correnti di energia e di calore

Utilizzando l'espressione data per il rate $\mathcal{R}(E)$ è possibile determinare la corrente di energia che fluisce attraverso la giunzione NIS. Moltiplicando il rate $\mathcal{R}(E)$ per la propria energia ed integrando come fatto per ottenere la corrente di carica, otteniamo la corrente di energia

$$\dot{E} = \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{\infty} E N_N(E - eV_C) N_S(E) [f_N(E - eV_C) - f_S(E)] dE. \quad (1.90)$$

Sottraendo alla (1.90) la corrente di carica I moltiplicata per la differenza di potenziale applicata, otteniamo la corrente di calore

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= I_E - eVI \\ &= \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{\infty} (E - eV_C) N_N(E - eV_C) N_S(E) \times \\ &\times [f_N(E - eV_C) - f_S(E)] dE. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Nel caso in cui non c'è differenza di potenziale ai capi degli elettrodi, \dot{Q} e \dot{E} coincidono ed il trasporto di energia attraverso la giunzione avviene solo se N ed S si trovano a temperature diverse.

Osserviamo che nelle correnti di carica e di calore, definite dalla (1.88) e dalla (1.91), entra in gioco la densità degli stati ricavata nel paragrafo precedente. Questa contiene il gap superconduttivo che consideriamo costante ed uguale al suo valore a $T = 0$

$$\Delta \approx 1.764 k_B T_c \quad (1.92)$$

poichè negli esperimenti con le giunzioni le temperature tipiche sono

$$T \ll T_c \quad (1.93)$$

regime in cui la (1.92) è un'ottima approssimazione.

Le giunzioni NIS hanno l'interessante caratteristica di raffreddare gli elettroni presenti nel metallo normale. Per osservare questo comportamento mostriamo in figura (1.6) l'andamento della corrente di calore in funzione V_C . Come si può os-

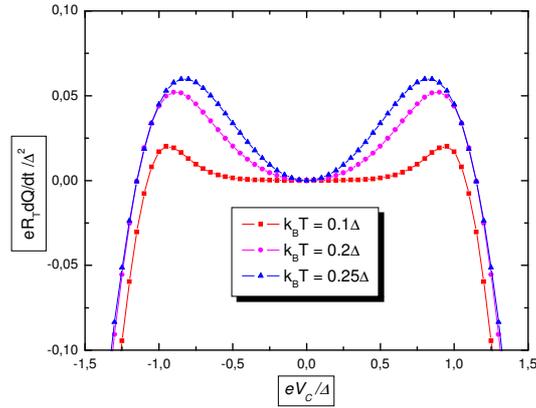


Figura 1.6: Corrente di calore calcolata per una giunzione NIS, per tre valori della temperatura del bagno termico T . La corrente è stata scelta uscente dall'elettrodo normale, quindi valori positivi delle curve in figura indicano estrazione di calore dall'elettrodo normale.

servare dalla fig.(1.6) la corrente di calore è simmetrica in V_C . Questa è calcolata dal metallo normale verso il superconduttore, quindi valori positivi di \dot{Q} indicano estrazione di calore dal metallo con conseguente refrigerazione di quest'ultimo. Le tre curve, corrispondenti a diversi valori della temperatura del bagno termico, indicano che l'estrazione di calore massima si ottiene intorno a $eV_C = \Delta$. Per comprendere fisicamente il meccanismo che sta alla base dell'estrazione di calore consideriamo lo schema mostrato in figura (1.7). A causa della differenza di potenziale applicata, gli elettroni ad energia più elevata, cioè quelli più *caldi* presenti nel metallo normale, vengono trasferiti nel superconduttore grazie alla presenza di stati accessibili al di sopra del *gap*, con conseguente raffreddamento del gas elettronico. Se invertiamo il segno di V_C il trasferimento di calore avviene attraverso l'estrazione di *buche calde* dal metallo normale.

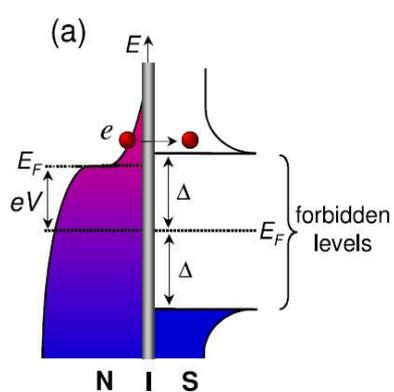


Figura 1.7: Rappresentazione schematica della situazione che viene a crearsi quando è applicata una differenza di potenziale V ad una giunzione NIS. Gli elettroni della coda della funzione di distribuzione, quindi ad energia più elevata, possono essere trasferiti nel superconduttore grazie alla presenza di stati accessibili oltre il gap Δ . Figura adattata da [9].

Capitolo 2

Sistemi elettronici fuori dall'equilibrio

In questo capitolo analizziamo le caratteristiche di un sistema elettronico in condizioni di non-equilibrio termodinamico. In particolare siamo interessati agli elettroni di conduzione presenti all'interno di un metallo. Partiamo dalla descrizione dello stato di equilibrio termodinamico, descrivendolo nel caso di temperatura finita ed in quello di temperatura nulla, per passare successivamente alla descrizione dello stato di non-equilibrio termodinamico per il quale definiremo i concetti di temperatura e potenziale chimico *efficaci*.

2.1 Distribuzioni di Fermi-Dirac

Consideriamo un insieme di elettroni all'equilibrio termodinamico. Poichè gli elettroni sono fermioni, e quindi obbediscono al principio di esclusione di Pauli, la probabilità di occupazione degli stati di singola particella ad energia E , detta funzione di distribuzione, è data dalla funzione di Fermi-Dirac,

$$f(E) = \frac{1}{e^{\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right)} + 1} \quad (2.1)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, μ è il potenziale chimico, e T è la temperatura assoluta. In fig.(2.1) mostriamo il comportamento della funzione di Fermi-Dirac al variare della temperatura considerata, avendo fissato $\mu = 0$. Come si può osservare, a temperature diverse da zero, per $E \ll 0$ la funzione di distribuzione assume valore 1, mentre per $E \gg 0$ va a zero esponenzialmente. Per valori

dell'energia $E \approx 0$ la funzione di distribuzione subisce un *allargamento* tanto più grande quanto più elevata è la temperatura, essendo questo dell'ordine di $k_B T$. Nel caso $T = 0$ tutti i livelli energetici con $E < 0$ sono occupati, mentre per $E > 0$ l'occupazione è sempre nulla. La funzione di distribuzione in questo ha quindi un andamento a gradino, esprimibile attraverso la funzione di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

grazie alla quale otteniamo

$$f_0(E) = \theta(-E) \quad (2.3)$$

dove lo 0 sta a ricordare $T = 0$. L'equilibrio termodinamico degli elettroni di con-

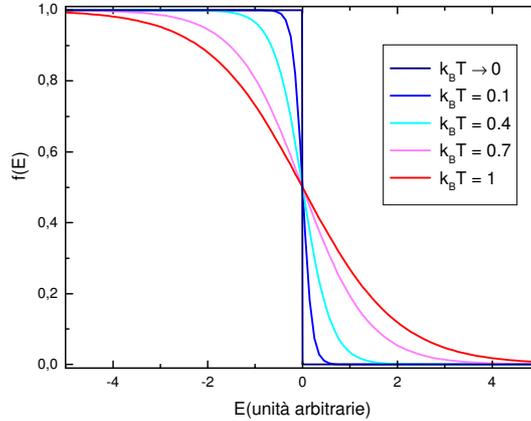


Figura 2.1: Funzione di distribuzione di Fermi-Dirac calcolata per diversi valori della temperatura T del sistema. Abbiamo posto il potenziale chimico a zero.

duzione all'interno di un metallo viene raggiunto grazie alla presenza di diversi meccanismi di interazione quali elettrone-elettrone, elettrone-fonone, elettrone-impurezze magnetiche presenti nel metallo. Il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico permette di descrivere gli elettroni attraverso la (2.1) e quindi di assegnare loro una temperatura ed un potenziale chimico. La particolarità delle strutture mesoscopiche a temperature criogeniche risiede nella possibilità di portare il gas elettronico in condizioni tali da poter trascurare i meccanismi di interazione menzionati sopra ed ottenere quindi una situazione di non-equilibrio termodinamico, come illustreremo nel prossimo paragrafo.

2.2 Non equilibrio

Innanzitutto descriviamo alcune lunghezze caratteristiche dei sistemi mesoscopici al fine di chiarire il regime di trasporto che stiamo considerando, riferendoci a [10]. Un conduttore usualmente mostra un comportamento *ohmico* se le sue dimensioni sono molto più grandi di alcune lunghezze caratteristiche, precisamente:

1. la lunghezza d'onda di de Broglie λ
2. il cammino libero medio L_m
3. la lunghezza di rilassamento della fase L_ϕ

Lunghezza d'onda A temperature criogeniche gli elettroni d'interesse per il trasporto sono quelli che si trovano ad energie prossime all'energia di Fermi, quindi siamo interessati alle lunghezze d'onda relative all'energia E_F :

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_F}} \quad (2.4)$$

dove k_F ed E_F sono il vettore d'onda e l'energia di Fermi, ed m è la massa dell'elettrone.

Cammino libero medio Le collisioni elastiche sperimentate da un elettrone all'interno di un metallo, portano ad un cambiamento della direzione dell'impulso. Tale cambiamento viene descritto introducendo il tempo di rilassamento dell'impulso, τ_m , dal quale si ricava la corrispondente lunghezza di rilassamento dell'impulso L_m , detta anche *cammino libero medio*, definito come la distanza che un elettrone può percorrere prima che il suo impulso iniziale venga distrutto. Ricordando che siamo interessati sempre ad elettroni con energia prossima all'energia di *Fermi*, otteniamo

$$L_m = v_F \tau_m, \quad (2.5)$$

dove v_F è la velocità di Fermi Poichè siamo interessati al regime di trasporto diffusivo, cioè vogliamo che gli elettroni sperimentino vari urti elastici in modo poter descrivere il sistema in maniera isotropa, le dimensioni tipiche del nostro metallo L , dovranno essere $L > L_m$.

Lunghezza di rilassamento della fase I processi responsabili della distruzione della fase della funzione d'onda elettronica, sono le interazioni con oggetti in movimento. All'interno di un metallo questi possono essere i fononi, gli altri elettroni di conduzione e le eventuali impurezze magnetiche con spin variabile nel tempo. Portando il metallo in questione a temperature criogeniche e considerando materiali sufficientemente puri, le interazioni elettrone-fonone ed elettrone-impurezze magnetiche possono essere trascurate e l'unico meccanismo di rilassamento della fase rimane l'interazione elettrone-elettrone. Il tempo di rilassamento della fase, τ_ϕ è definito come il tempo necessario affinché l'elettrone perda la sua fase iniziale a causa di collisioni con scatteratori in movimento. Al tempo τ_ϕ è associata una lunghezza di rilassamento di fase L_ϕ , che nel regime di trasporto diffusivo è data da:

$$L_\phi^2 = D\tau_\phi \quad (2.6)$$

dove D è il coefficiente di diffusione dato da

$$D = \frac{v_F^2 \tau_m}{3}. \quad (2.7)$$

Definite le lunghezze caratteristiche per la descrizione di un metallo, chiariamo ora quali sono le condizioni in cui ci mettiamo per descrivere la regione N nella struttura SINIS, argomento di questa tesi. Vogliamo che il regime di trasporto sia diffusivo per poter considerare funzioni di distribuzione indipendenti dalla direzione nello spazio, quindi, come già anticipato, consideriamo lunghezze caratteristiche $L > L_m$. Inoltre vogliamo poter trascurare le interazioni a cui sono soggetti gli elettroni. Per far questo bisogna trascurare l'interazione elettrone-fonone, considerando temperature criogeniche (tipicamente $\ll 1\text{K}$) e l'interazione elettrone-impurezze presenti nel metallo scegliendo materiali con elevata purezza (99.9999%) [11]. Rimane da trattare l'interazione coulombiana tra gli elettroni. Per poter considerare trascurabile anche l'interazione coulombiana è necessario richiedere l'ulteriore condizione $L < L_\phi$. In queste situazioni, infatti, anche l'interazione elettrone-elettrone, unica responsabile della distruzione della fase, può essere trascurata e quindi, a tutti gli effetti, le interazioni che riportano il sistema elettronico all'equilibrio termodinamico possono essere considerate trascurabili. Riassumendo, la regione N della struttura SINIS trattata in questa tesi ha una lunghezza L vincolata dalla seguente relazione:

$$L_m < L < L_\phi. \quad (2.8)$$

Valori tipici per il cammino libero medio elastico e per la lunghezza di rilassamento della fase sono :

- $L_m \approx 10\text{nm}$
- $L_\phi \approx 3 - 4\mu\text{m}$

quindi la condizione (2.8) è sperimentalmente raggiungibile, il che giustifica la nostra analisi della struttura SINIS, fatta nel capitolo 3.

La trattazione dell'interazione all'interno di sistemi mesoscopici diffusivi può essere affrontata con l'equazione di Boltzmann, in cui sono presenti integrali di scattering inelastico che descrivono le interazioni elettroniche, come mostrato in appendice. Poichè i concetti di temperatura e potenziale chimico introdotti nel paragrafo precedente sono caratteristiche proprie dell'equilibrio termodinamico, volendo descrivere il gas elettronico presente all'interno di un metallo in condizioni di non equilibrio ci poniamo la domanda: è possibile associare ad un gas elettronico in condizioni di non equilibrio una temperatura ed un potenziale chimico in modo da poterlo paragonare ad un gas all'equilibrio termodinamico? La risposta è sì: all'interno di un metallo, per il gas elettronico in condizioni di non equilibrio possiamo definire temperatura e potenziale chimico in maniera *efficace*.

Per determinare la temperatura efficace ed il potenziale chimico efficace consideriamo lo schema mostrato in figura (2.2). Alla sinistra dello schema è rappresentato il metallo in cui è presente il gas elettronico in condizioni di non-equilibrio ed a destra un'elettrodo metallico all'equilibrio termodinamico con potenziale chimico μ_0 e temperatura T_0 , chiamato sonda. I due elementi sono connessi attraverso una barriera isolante che consideriamo sufficientemente opaca in modo da non alterare le proprietà di non-equilibrio del sistema in esame. Facendo ricorso alle definizioni date nel capitolo precedente per le correnti di carica (1.89) e di calore (1.91), definiamo il potenziale chimico efficace μ_{eff} e la temperatura efficace T_{eff} seguendo l'argomento dato in [12]:

Il potenziale chimico efficace μ_{eff} ed il potenziale chimico della sonda μ_0 sono uguali se la corrente di carica I che fluisce nel sistema mostrato in fig.(2.2) è nulla, mentre la temperatura efficace e quella della sonda sono uguali se è nulla la corrente di calore \dot{Q} .

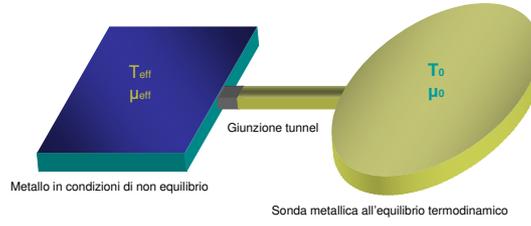


Figura 2.2: Sistema per la determinazione della temperatura e del potenziale chimico efficaci per un metallo normale. Il metallo in condizioni di non equilibrio (sinistra), è connesso tramite una giunzione tunnel (grigio) ad un elettrodo normale all'equilibrio termodinamico con temperatura T_0 e potenziale chimico μ_0 .

Per ottenere T_{eff} e μ_{eff} , imponiamo quindi le due condizioni

$$I = 0 \quad (2.9)$$

$$\dot{Q} = 0$$

relativamente al sistema in fig.(2.2) e manipoliamo le equazioni per ottenere il risultato cercato. Considerando il fatto che in questo caso stiamo analizzando una struttura NIN, nel caso particolare in cui uno dei due metalli si trova in condizioni di non equilibrio, possiamo esprimere le condizioni (2.9) attraverso le equazioni (1.89,1.91):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(E) - f^0(E, \mu_0, T_0)) dE = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E (f(E) - f^0(E, \mu_0, T_0)) dE = 0 \quad (2.10)$$

dove f^0 rappresenta la funzione di distribuzione della sonda, f quella del sistema in condizioni di non equilibrio ed abbiamo assunto uguali e costanti le densità degli stati di entrambi i costituenti in quanto alle temperature di interesse si può assumere $N_N(E) \approx N_N(E_F)$. Manipoliamo le equazioni (2.10) esprimendo le funzioni di distribuzione in termini della propria parte pari e parte dispari, definite come segue.

Data una funzione $g(x)$ definiamo parte pari e parte dispari le seguenti funzioni

$$g_p(x) = 1 - g(-x) - g(x)$$

$$g_d(x) = g(-x) - g(x). \quad (2.11)$$

Per definizione queste funzioni sono pari o dispari rispetto ad $x = 0$. Utilizzando tale proprietà possiamo eliminare l'intervallo d'integrazione $(-\infty, 0)$ dalle (2.10). Esprimendo la funzione $g(x)$ in termini delle proprie parti pari e dispari

$$g = 1/2 - \frac{g_p + g_d}{2}$$

riscriviamo le (2.10) nella seguente forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [(f_p(E) - f_p^0(E, \mu_0, T_0)) + (f_d(E) - f_d^0(E, \mu_0, T_0))] dE = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E [(f_p(E) - f_p^0(E, \mu_0, T_0)) + (f_d(E) - f_d^0(E, \mu_0, T_0))] dE = 0. \quad (2.12)$$

Gli integrali (2.12) si estendono su tutte le energie e sfruttando il fatto che l'integrale di una funzione dispari su un intervallo pari è nullo e viceversa, possiamo riscrivere le (2.12) nel seguente modo

$$\int_0^{\infty} (f_p(E) - f_p^0(E, \mu_0, T_0)) dE = 0 \quad (2.13)$$

$$\int_0^{\infty} E (f_d(E) - f_d^0(E, \mu_0, T_0)) dE = 0. \quad (2.14)$$

Dalla (2.13) otteniamo la condizione

$$\int_0^{\infty} f_p(E) dE = \int_0^{\infty} f_p^0(E, \mu_0, T_0) dE \quad (2.15)$$

e, poichè

$$\int_0^{\infty} f_p^0(E, \mu_0, T_0) dE = -\mu_0 \quad (2.16)$$

arriviamo all'equazione cercata per μ_{eff}

$$\mu_{eff} \equiv \mu_0 = - \int_0^{\infty} f_p(E) dE. \quad (2.17)$$

Per ottenere l'espressione di T_{eff} , consideriamo lo sviluppo di Sommerfeld per un gas di elettroni all'equilibrio termodinamico a temperatura T_0 e potenziale chimico μ_0 , trascurando come di consueto gli ordini dello sviluppo superiori ad $O(T^2)$ [4]

$$\frac{(\pi k_B T_0)^2}{6} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} E [f^0(E, \mu_0, T_0) - f^0(E, \mu_0, T = 0)] dE \right]^{1/2}. \quad (2.18)$$

Considerando le parti pari e dispari delle funzioni $f^0(E, \mu_0, T_0)$ e $f^0(E, \mu_0, T = 0)$, riscriviamo la (2.18) nella seguente forma

$$\frac{(\pi k_B T_0)^2}{6} = \left[\int_0^{\infty} E [f_d^0(E, \mu_0, T = 0) - f_d^0(E, \mu_0, T_0)] dE \right]^{1/2}. \quad (2.19)$$

Sottraendo membro a membro la (2.19) alla (2.14) otteniamo l'equazione cercata per T_{eff}

$$T_{eff} \equiv T_0 = \frac{\sqrt{6}}{\pi k_B} \left[\int_0^{\infty} E (f_d^0(E; \mu_{eff}, T = 0) - f_d(E)) dE \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

Abbiamo così ottenuto le espressioni per μ_{eff} e T_{eff} , che utilizzeremo successivamente per descrivere il metallo normale nella struttura SINIS.

2.3 Esempio di non equilibrio: filo mesoscopico diffusivo tra elettrodi normali

Diamo ora un primo esempio di sistema in cui è possibile osservare il non equilibrio. Facendo riferimento alla figura (2.3) utilizziamo la nozione di *rate* introdotta nell'equazione (1.86) per determinare la funzione di distribuzione del filo. Supponendo di essere in condizioni da poter trascurare i processi di rilassamento

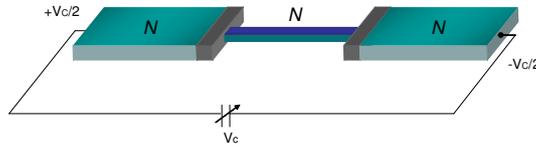


Figura 2.3: Rappresentazione schematica di una struttura NININ. Il filo diffusivo mesoscopico al centro è connesso ai due elettrodi normali tramite giunzioni tunnel e la struttura è polarizzata ad una tensione V_C .

all'interno del metallo centrale, situazione raggiunta in un filo mesoscopico in regime diffusivo, la funzione di distribuzione si ottiene eguagliando i *rate* attraverso le due giunzioni NIN presenti

$$\mathcal{R}_L(E) = \mathcal{R}_R(E) \quad (2.21)$$

dove L e R indicano gli elettrodi di sinistra e di destra rispettivamente. Considerando la struttura immersa in un bagno termico a temperatura T , elettrodi all'equilibrio termodinamico formati dallo stesso metallo (in modo da semplificare le densità degli stati), otteniamo la funzione di distribuzione

$$f(E) = \frac{f_L(E) + f_R(E)}{2} \quad (2.22)$$

dove

$$\begin{aligned} f_L(E) &= f(E - eV_C/2) \\ f_R(E) &= f(E + eV_C/2) \end{aligned}$$

rappresentano le funzioni di distribuzione di Fermi-Dirac relative ai due elettrodi normali. La funzione di distribuzione (2.22) è data da una combinazione lineare delle funzioni di distribuzione dei due elettrodi. Mostriamo in figura (2.4) l'andamento di $f(E)$ per tre valori di V_C . Come si può osservare all'aumentare di V_C la $f(E)$ assume un andamento a doppio gradino, ed il *plateau* che si osserva ha una larghezza pari a eV_C . Inoltre si può notare che il potenziale chimico è indipendente da V_C . La distribuzione mostrata in fig.(2.4) è stata osservata sperimentalmente da Pothier et al. [13]. All'interno del filo di metallo normale si raggiunge una situazione di *non - equilibrio*, che può essere descritta con i concetti di temperatura e potenziale chimico efficaci introdotti precedentemente. In figura (2.5) mostriamo l'andamento della temperatura efficace del filo in funzione di V_C . Come si può osservare la temperatura efficace è simmetrica in V_C , come ci aspettavamo dalla simmetria della giunzione, ed è sempre maggiore della temperatura del bagno termico. In questo caso la potenza fornita dal generatore di tensione viene dissipata producendo il riscaldamento del filo. Il comportamento di T_{eff} cambia drasticamente se gli elettrodi normali vengono sostituiti con elettrodi superconduttivi, come mostreremo successivamente.

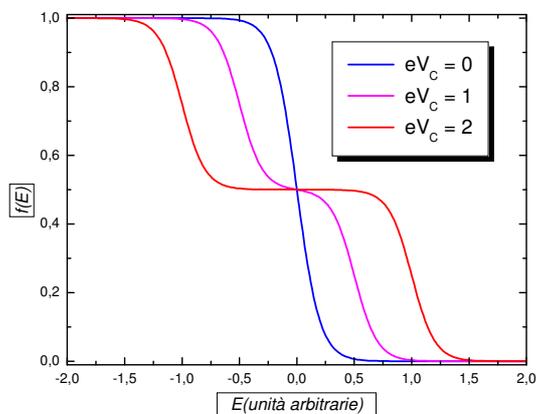


Figura 2.4: Funzione di distribuzione per il filo di metallo normale di fig.(2.3). La temperatura del bagno termico, a cui si trovano gli elettrodi normali, è pari a $k_B T = 0.1$, in unità di energia arbitrarie. Le curve corrispondono a tre diversi valori della tensione di polarizzazione V_C .

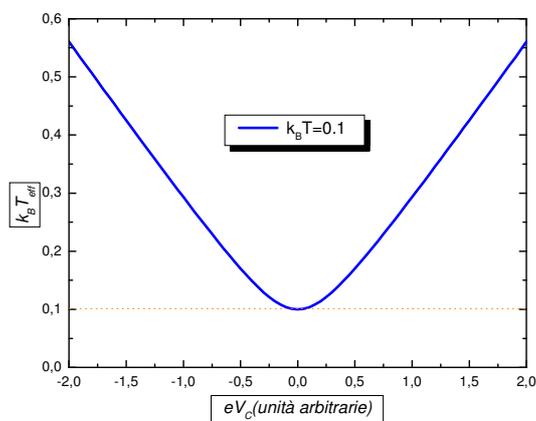


Figura 2.5: Andamento della temperatura efficace del filo mesoscopico al variare di V_C . La curva ha un andamento non monotono e la temperatura si mantiene sempre al di sopra della temperatura del bagno termico. Non è possibile refrigerare il gas elettronico all'interno del filo, caratteristica peculiare delle strutture SINIS, come mostreremo nel capitolo successivo.

Capitolo 3

Struttura SINIS con campo magnetico

In questo capitolo analizziamo la struttura SINIS, composta da due giunzioni NIS in serie, con campi magnetici applicati ai superconduttori. Innanzi tutto consideriamo i recenti esperimenti effettuati su giunzioni SINIS per dare un'idea delle applicazioni e della realizzazione sperimentale di tali strutture. In seguito esaminiamo in dettaglio una giunzione SINIS con campi magnetici localizzati sui superconduttori. Le proprietà di non-equilibrio della zona N possono essere modificate variando la differenza di potenziale V_C applicata alla giunzione mentre la presenza di campi magnetici applicati in modo opportuno sugli elettrodi superconduttivi permette di manipolare separatamente le due popolazioni di spin elettronico. Per prima cosa calcoliamo le due funzioni di distribuzione relative ai differenti valori dello spin elettronico e determiniamo i potenziali chimici e le temperature efficaci, analizzandole al variare dell'angolo reattivo tra i due campi magnetici. Infine mostreremo come utilizzare le proprietà della zona N per generare correnti di carica polarizzata attraverso un'ulteriore giunzione NIS, controllata con una differenza di potenziale V_b .

3.1 Considerazioni preliminari

La struttura SINIS è al centro di recenti ricerche e presenta caratteristiche interessanti sia per quanto riguarda le proprietà di raffreddamento elettronico [11, 9] sia per quanto riguarda le applicazioni nel campo dell'elettronico e della *spintronica* [14, 15, 16, 17]. Gli elettrodi superconduttivi sono tipicamente costituiti da Al, che

possiede un *gap* $\Delta \approx 200\mu\text{eV}$ e una temperatura critica $T_C \approx 1.2\text{K}$ mentre per la zona normale viene utilizzato il Cu. In figura (3.1) mostriamo una rappresentazione

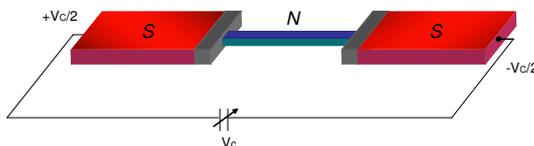


Figura 3.1: Schema di giunzione SINIS controllata in tensione. Il filo mesoscopico diffusivo N è connesso a due elettrodi superconduttivi tramite due giunzioni tunnel (zone in grigio) di uguale resistenza R_T . La struttura è controllata grazie ad una differenza di potenziale V_C fornita da un generatore di tensione.

schematica della struttura SINIS, controllata tramite una differenza di potenziale V_c ed in figura (3.2) mostriamo una struttura SINIS realizzata con litografia elettronica combinata con evaporazione elettronica in UHV (ultra alto vuoto) di Al e Cu [11], dalla quale è possibile avere un'idea delle dimensioni planari tipiche della struttura. La struttura di fig. (3.2) è stata utilizzata in un esperimento per il

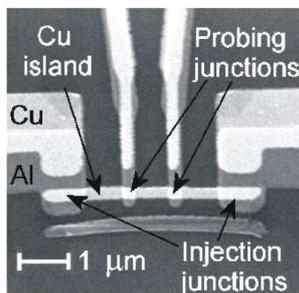


Figura 3.2: SEM (Scanning Electron Micrograph) di giunzione SINIS utilizzata in un esperimento per il raffreddamento elettronico [11]. Il metallo normale, di cui viene mostrata la scala di lunghezza $1\mu\text{m}$, è Rame con purezza nominale del 99.9999%. Gli elettrodi superconduttivi sono di Alluminio ed al centro del filo sono connessi, sempre attraverso due giunzioni tunnel, due ulteriori elettrodi superconduttivi (sonde) per misurare la temperatura e la funzione di distribuzione (attraverso misure di conduttanza differenziale). Le resistenze tunnel del SINIS utilizzate in questo esperimento sono $R_T \approx 200\Omega$, mentre le resistenze delle due sonde sono $\gg 1\text{K}\Omega$. Lo spessore della struttura è di 30nm .

raffreddamento elettronico [11], mentre in figura (3.3) mostriamo in (a) lo sche-

ma e in (b) la microfotografia di un sistema utilizzato per realizzare un transistor Josephson sfruttando una giunzione SINIS [17].

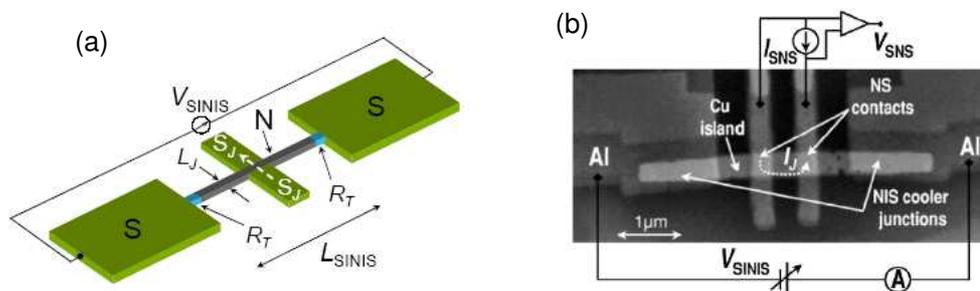


Figura 3.3: (a) Schema di transistor Josephson, in cui viene utilizzata la struttura SINIS; il filo mesoscopico N fa parte sia del SINIS che di un'ulteriore giunzione SNS. Ci sono due generatori di tensioni, uno applicato al SINIS e l'altro all'SNS. Questo dispositivo permette di sfruttare le proprietà di refrigerazione della struttura SINIS per ottenere un transistor con un guadagno in corrente di ≈ 20 e una potenza dissipata molto bassa [9]. (b) SEM (Scanning Electron Micrograph) di transistor Josephson [17]. Il filo mesoscopico di Alluminio è connesso a due elettrodi di Alluminio tramite giunzioni tunnel per ottenere una struttura SINIS, e ad ulteriori due elettrodi di Alluminio per formare una giunzione SNS. Il filo di rame è largo $0.37\mu\text{m}$ e spesso 30nm , le resistenze del SINIS sono $R_T \approx 240\Omega$ ed i due elettrodi sono spessi 60nm . La resistenza della giunzione Josephson è 11.5Ω e la separazione tra gli elettrodi è di $\approx 0.4\mu\text{m}$.

3.2 Caratteristiche del sistema

Per affrontare il problema della determinazione delle funzioni di distribuzione nella zona N della struttura SINIS, discutiamo innanzi tutto le proprietà fisiche del gas di elettroni presente nella zona in considerazione. In generale, per parlare di equilibrio termodinamico in un gas elettronico, è necessaria la presenza di meccanismi di interazione come discusso nel capitolo 2, che permettono il rilassamento energetico del gas elettronico.

Gli elettroni di conduzione all'interno di un metallo presentano diversi meccanismi di interazione. Consideriamo i processi di interazione elettrone- fonone (e-p), elettrone-elettrone (e-e). Ad ogni meccanismo di interazione è associato un tempo di rilassamento (τ_{e-e} e τ_{e-p}) che dipende dalla temperatura del bagno termico in cui è immerso il sistema ed in generale dalle condizioni al contorno in

cui si trova il gas elettronico. Ad esempio in una giunzione SINIS, le resistenze associate alle barriere tunnel (R_T) e le dimensioni fisiche della zona N sono fattori importanti che determinano l'efficienza del rilassamento (e-e). Tutti questi processi permettono l'instaurarsi di una condizione di equilibrio termodinamico, in cui il gas elettronico è descritto dalla funzione di distribuzione di Fermi-Dirac (2.1), che riscriviamo per comodità

$$f(E) = \frac{1}{e^{\left(\frac{E}{k_B T_e}\right)} + 1}. \quad (3.1)$$

Nella (3.1) abbiamo posto il potenziale chimico a zero, e la temperatura T_e rappresenta la temperatura elettronica. Se il rilassamento (e-p) è sufficientemente efficiente, allora la temperatura elettronica sarà uguale a quella del reticolo cristallino (T_l), che consideriamo in equilibrio con il bagno termico,

$$T_e \equiv T_l. \quad (3.2)$$

Poichè il tempo di rilassamento τ_{e-p} dipende fortemente dalla temperatura del bagno termico T_l [20]

$$\tau_{e-p} \propto T_l^{-3} \quad (3.3)$$

è possibile trascurare il rilassamento energetico dovuto a tale meccanismo di interazione abbassando T_l a valori $T_l \leq 1K$ [9]. In tale regime il gas elettronico sarà descritto sempre dalla (3.1), solo che la temperatura T_e non verificherà l'uguaglianza (3.2), ma assumerà un proprio valore. Quindi il gas elettronico si troverà in equilibrio termodinamico ad una temperatura diversa dal reticolo cristallino, cioè è possibile descrivere il gas come se il reticolo non esistesse affatto. Tale regime viene detto di *quasi-equilibrio*.

Il rilassamento elettronico all'interno della zona N in una struttura SINIS può a sua volta essere trascurato scegliendo i valori delle resistenze R_T e le dimensioni del metallo N in modo opportuno. Ad esempio scegliendo barriere isolanti con resistenze dell'ordine di $R_T \approx 10^3 \Omega$ e dimensioni della zona N quali $L = 1 \mu m$ ed $A = 0.2 \times 0.02 \mu m^2$ [11] l'interazione coulombiana tra gli elettroni può essere fortemente soppressa. In definitiva è possibile trascurare il rilassamento (e-e) ed ottenere quindi un gas di elettroni in condizioni di *non equilibrio* termodinamico, descritto da una funzione di distribuzione diversa dalla (3.1).

3.3 Struttura SINIS senza campi magnetici

Sfruttando le considerazioni fatte nel paragrafo precedente, possiamo determinare la funzione di distribuzione f_N del gas elettronico all'interno della zona N trascurando i meccanismi di interazione, cioè considerando gli elettroni *liberi*. Per rendere più scorrevole la lettura d'ora in poi utilizzeremo la seguente notazione:

$$\begin{aligned} N_L(E) &= N_S \left(E - \frac{eV_C}{2} \right) \\ N_R(E) &= N_S \left(E + \frac{eV_C}{2} \right) \\ f_L(E) &= f_S \left(E - \frac{eV_C}{2} \right) \\ f_R(E) &= f_S \left(E + \frac{eV_C}{2} \right) \end{aligned}$$

dove N_S ed f_S sono la densità degli stati normalizzata e la funzione di distribuzione dei superconduttori ed L e R indicano sinistra e destra. Poichè la struttura SINIS è composta da 2 giunzioni NIS in serie consideriamo l'espressione data per il rate (1.86) nel capitolo 1 e riscriviamola per la situazione illustrata in figura (3.1). Per la giunzione SIN di sinistra (L) e la giunzione NIS di destra (R) otteniamo la seguenti espressioni

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L(E) &= \frac{1}{eR_T} N_L(E) N_N(E) [f_L(E) - f_N(E)] \\ \mathcal{R}_R(E) &= \frac{1}{eR_T} N_R(E) N_N(E) [f_N(E) - f_R(E)]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nelle equazioni (3.4) le due resistenze vengono assunte identiche, la densità degli stati dei superconduttori è quella di BCS (1.67) e le funzioni di distribuzione dei superconduttori sono funzioni di Fermi-Dirac (3.1) alla temperatura del bagno termico T . Le ipotesi fatte sul rilassamento elettronico permettono di determinare la funzione di distribuzione che descrive gli elettroni presenti nel metallo normale semplicemente eguagliando le (3.4)

$$\mathcal{R}_L(E) = \mathcal{R}_R(E). \tag{3.5}$$

Fisicamente l'equazione (3.5) richiede che il numero di elettroni che entrano nel metallo N attraverso giunzione (L) ad una data energia E è uguale al numero

di elettroni che escono da N attraverso la giunzione (R) alla stessa energia E , il che indica l'assenza di processi di rilassamento all'interno del gas elettronico. Risolvendo l'equazione (3.5) otteniamo la funzione di distribuzione cercata, come mostrato anche in [8].

$$f_N(E) = \frac{N_L(E)f_L(E) + N_R(E)f_R(E)}{N_L(E) + N_R(E)}. \quad (3.6)$$

Come possiamo osservare la (3.6) risulta essere indeterminata per alcuni valori dell'energia in quanto la densità degli stati (1.67) è nulla in un'intervallo di energia che dipende da V_C . Ci sono due approcci per risolvere questo problema:

1. Ridefiniamo la funzione di distribuzione $f_N(E)$ per le energie in cui il denominatore si annulla
2. Consideriamo una densità degli stati modificata rispetto alla (1.67), ammettendo che ci siano stati accessibili nell'intervallo $(-\Delta, \Delta)$ nel caso $V_C = 0$.

Nel primo caso sostituiamo la (3.6) con la seguente funzione di distribuzione per il gas elettronico

$$f(E) = \begin{cases} f_N(E) & \text{se } N_s(E - \frac{eV_C}{2}) + N_s(E + \frac{eV_C}{2}) \neq 0 \\ f_0(E) & \text{se } N_s(E - \frac{eV_C}{2}) + N_s(E + \frac{eV_C}{2}) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

dove $f_0(E)$ rappresenta la funzione di distribuzione di Fermi-Dirac del bagno termico in cui è immersa la struttura. Fisicamente la (3.7) significa che alle energie per le quali non ci sono stati accessibili nei superconduttori, e quindi non c'è trasporto attraverso la struttura, gli elettroni presenti all'interno della zona N sono accoppiati al reticolo e quindi distribuiti secondo la $f_0(E)$.

Nel secondo caso consideriamo la funzione di distribuzione (3.6), in cui sostituiamo la densità degli stati (1.67) con:

$$N_s(E) = \left| \text{Re} \left[\frac{E + i\Gamma}{\sqrt{(E + i\Gamma)^2 - \Delta^2}} \right] \right|. \quad (3.8)$$

La (3.8) contempla l'esistenza di stati accessibili nell'intervallo $(-\Delta, \Delta)$ dovuti a processi quali scattering inelastico all'interno del superconduttore ed effetto prossimità inverso a causa delle barriere isolanti [21]. Γ , chiamato fattore di *depairing* ha inoltre l'effetto di smussare le singolarità della densità degli stati intorno ai valori $\pm\Delta$, come mostrato in figura (3.4). Mostriamo quattro andamenti

della densità degli stati, relativi ad altrettanto quattro valori del fattore Γ . All'aumentare di Γ la densità degli stati viene smussata in un intorno dei valori $\pm\Gamma$ ed inoltre la presenza di stati accessibili all'interno dell'intervallo $(-\Delta, \Delta)$ aumenta notevolmente. Al variare di V_C la funzione di distribuzione della zona N assume

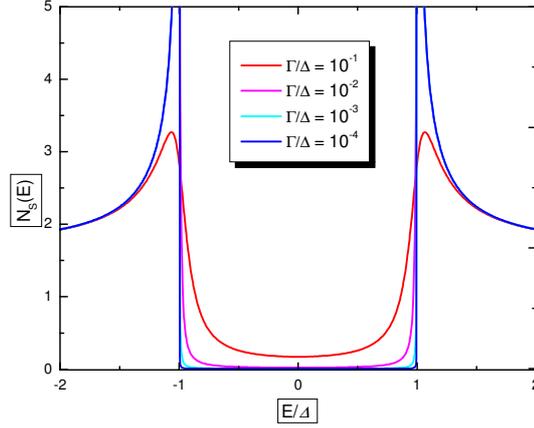


Figura 3.4: Densità degli stati normalizzata alla densità normale all'energia di Fermi, calcolata secondo la (3.8), per diversi valori del rapporto Γ/Δ . Come si può osservare, all'aumentare del rapporto Γ/Δ , $N_S(E)$ ammette la presenza di stati all'interno di $(-\Delta, \Delta)$ il che può essere interpretato come parziale perdita delle proprietà superconduttive.

comportamenti diversi. Inoltre questa ha profili differenti se calcolata con la (3.6) utilizzando la (3.8), oppure con la (3.7) utilizzando la (1.67). In figura (3.5) mostriamo l'andamento della funzione di distribuzione al variare di V_C nel caso in cui la DOS è quella di BCS (1.67), mentre in figura (3.6) mostriamo l'andamento della funzione di distribuzione nel caso in cui la DOS contenga il *depairing* con valore $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Dalla figura (3.5) notiamo che aumentando V_C la funzione di distribuzione si stringe sempre di più fino a diventare un gradino per $eV_C = 2\Delta$: come si può osservare l'andamento di $f(E)$ inizia ad essere discontinuo all'aumentare di V_C a causa della definizione (3.7). Invece dalla figura (3.6) osserviamo che la funzione di distribuzione tende a diventare un gradino in modo continuo all'aumentare di V_C , grazie all'introduzione della densità degli stati modificata (3.8).

Per osservare l'effetto del *depairing* consideriamo la situazione $eV_C = 2\Delta$ ed analizziamo la funzione di distribuzione per diversi valori di Γ . Come si può osservare dalla fig.(3.7) all'aumentare di Γ la funzione di distribuzione tende ad

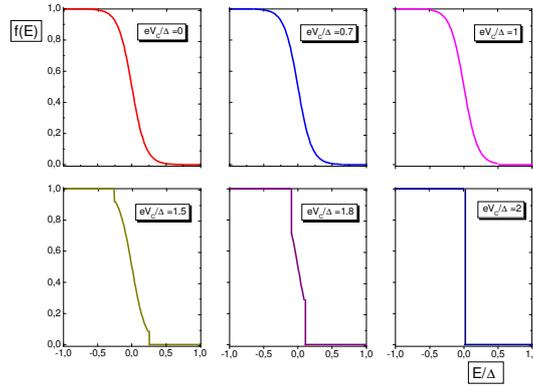


Figura 3.5: Funzione di distribuzione elettronica della zona N nella struttura SINIS senza campi magnetici applicati, calcolata per diversi valori della tensione di controllo V_C (ogni *box* corrisponde ad un diverso valore di V_C) utilizzando la densità degli stati BCS (1.67). La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$.

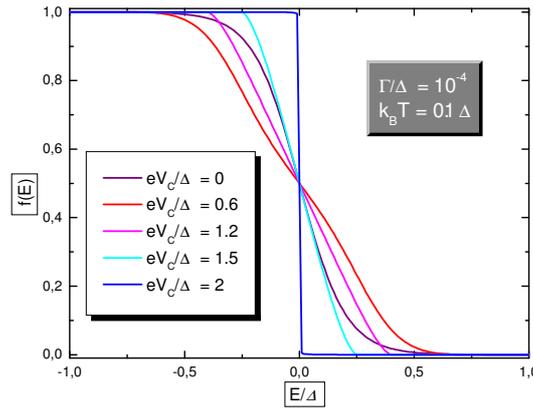


Figura 3.6: Funzione di distribuzione elettronica della zona N nella struttura SINIS, calcolata per diversi valori della tensione di controllo V_C , utilizzando la densità degli stati modificata (3.8), con fattore di *depairing* fissato a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$.

allargarsi, cioè la temperatura aumenta, in quanto gli elettrodi superconduttivi hanno un parziale ritorno allo stato normale e quindi la struttura SINIS si comporta all'incirca come una struttura NININ, e quindi la potenza erogata dal generatore viene dissipata nel riscaldamento del filo. Dalle figure (3.5;3.6), si evince che la struttura SINIS permette di raffreddare gli elettroni all'interno della zona N

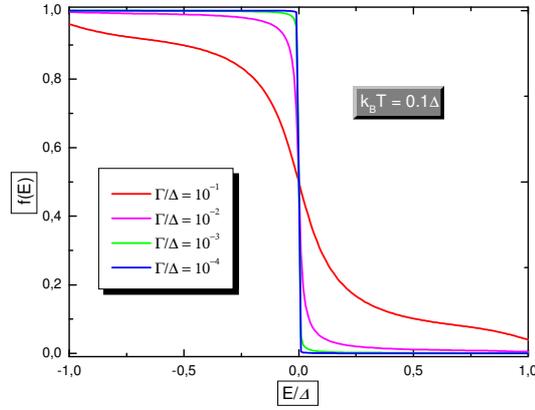


Figura 3.7: Funzione di distribuzione elettronica della regione N nella struttura SINIS calcolata per diversi valori del fattore di *depairing* Γ , con tensione di polarizzazione fissata a $eV_C = 2\Delta$ e temperatura del bagno termico $k_B T = 0.1\Delta$.

semplicemente variando la differenza di potenziale V_C . Utilizzando l'equazione (2.18) calcoliamo la temperatura efficace al variare di V_C e mostriamo l'andamento in figura (3.8). L'andamento di T_{eff} è simmetrico in V_C e la temperatura

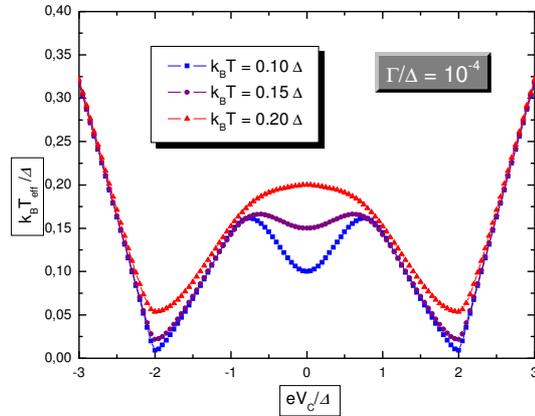


Figura 3.8: Temperatura elettronica della zona N della struttura SINIS calcolata in funzione di V_C , con fattore di *depairing* $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve corrispondono a diversi valori della temperatura del bagno termico T .

minima si ottiene per $eV_C = \pm 2\Delta$. Questo andamento può essere compreso ri-

cordando che la struttura SINIS è composta da due giunzioni NIS connesse in serie con la zona N in comune. Come anticipato nel capitolo 1 una giunzione NIS permette di raffreddare gli elettroni all'interno di N applicando una differenza di potenziale V_C . Il raffreddamento è indipendente dal segno di V_C ed è massimo quando $eV_C = \Delta$ [9, 22] per temperature sufficientemente basse come nel nostro esempio ($k_B T = 0.1\Delta$). Quindi, trovandosi la zona N in una situazione in cui il raffreddamento avviene attraverso due giunzioni NIS, ed essendo $eV_C = 2\Delta$ la situazione in cui su entrambe i superconduttori viene applicato un potenziale di modulo Δ/e , il raffreddamento raggiunge il suo valore massimo. Inoltre si può osservare che aumentando V_C partendo da 0 si ha inizialmente un riscaldamento, il cosiddetto *riscaldamento anomalo* discusso anche in [11]. Questo effetto dipende dal *depairing* ed evidenzia la presenza di stati all'interno del *gap* nella densità degli stati. Come si può osservare, all'aumentare della temperatura del bagno termico T l'effetto scompare. In figura (3.9) mostriamo l'andamento della temperatura efficace nel caso $\Gamma = 0$. Si può notare l'assenza dell'*riscaldamento anomalo*, a dimostrazione del fatto che questo è dovuto al *depairing* non nullo.

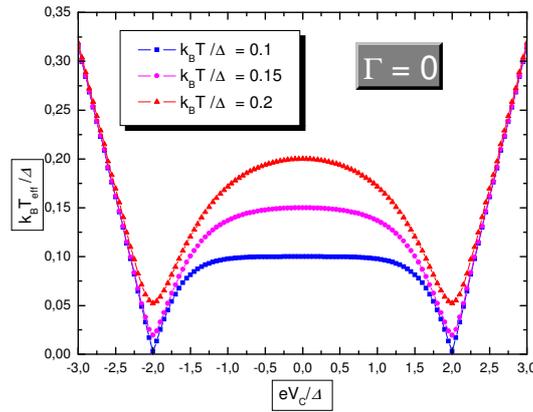


Figura 3.9: Temperatura elettronica della regione N nella struttura SINIS calcolata in funzione di V_C , con fattore di *depairing* $\Gamma = 0$, per tre diverse temperature del bagno termico. La densità degli stati dei superconduttori in questo caso è quella normale della teoria BCS, data dalla (1.67).

3.4 Struttura SINIS con campi magnetici

Nel paragrafo precedente abbiamo analizzato il comportamento della funzione di distribuzione della zona N in assenza di campi magnetici applicati sulla struttura. Le funzioni di distribuzione mostrate nelle figure (3.5,3.6) si riferiscono all'intero gas elettronico, indipendentemente dallo spin degli elettroni. Introducendo campi magnetici all'interno della struttura, si ottengono funzioni di distribuzione diverse per le due popolazioni di spin, come discusso nel lavoro [14]. Per poter sfruttare l'effetto che i campi magnetici producono sulla densità degli stati dei superconduttori, è necessario applicare tali campi come discusso nel capitolo 1 fig.(1.2).

In questo lavoro di tesi abbiamo analizzato il sistema mostrato in figura (3.10), in cui i campi magnetici sono applicati parallelamente alla struttura e localizzati sugli elettrodi superconduttivi ad un angolo relativo θ tra di loro. Nell'analisi che segue abbiamo considerato campi magnetici di modulo

$$h = 0.2 \left(\frac{\Delta}{\mu_B} \right)$$

ed abbiamo scelto come temperatura del bagno termico

$$T = 0.1 \left(\frac{\Delta}{k_B} \right).$$

Come nel paragrafo precedente, vogliamo determinare la funzione di distribu-

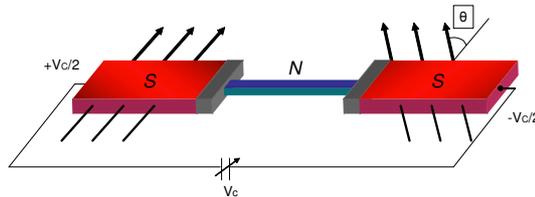


Figura 3.10: Rappresentazione schematica di una struttura SINIS con campi magnetici localizzati sul piano dei *film* superconduttivi. L'angolo relativo formato tra i due campi nel piano della struttura è θ . Le resistenze *tunnel* sono rappresentate in grigio.

zione degli elettroni nella regione N. Poichè sono presenti i campi magnetici, per ognuna delle due popolazioni di spin avremo una funzione di distribuzione differente in quanto i campi magnetici modificano la densità degli stati dei superconduttori come descritto nel capitolo 1. Prendiamo come asse di quantizzazione del

sistema la direzione del campo magnetico applicato sul superconduttore di sinistra, e nel seguito della tesi le due direzioni dello spin saranno riferite a tale asse. Analizziamo separatamente il caso di campi collineari e non collineari, in quanto in quest'ultima configurazione è necessario tener presente la rotazione degli autostati dello spin come descritto nel capitolo 1, per impostare correttamente le equazioni che permettono di determinare le funzioni di distribuzione.

3.4.1 Campi collineari

Se i campi magnetici applicati sono collineari, cioè nei casi

$$\theta = 0, \pi \quad (3.9)$$

nei processi di tunneling attraverso le due giunzioni NIS gli autostati dello spin nei due superconduttori rimangono gli stessi. Nel caso in cui i campi sono *pa-*

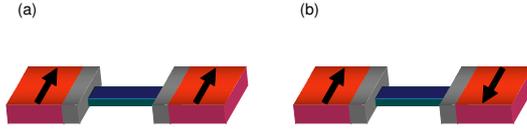


Figura 3.11: Struttura SINIS con campi magnetici localizzati sui *film* superconduttivi in configurazione (a) parallela e (b) antiparallela. È sottintesa la presenza dei generatori di tensione connessi ai due elettrodi superconduttivi.

ralleli, cioè quando $\theta = 0$ fig.(3.11(a)), gli autostati della (1.72), relativi ai 2 superconduttori, hanno gli stessi autovalori. Tenendo conto di questa considerazione scriviamo l'equazione (1.86) relativamente alle due giunzioni NIS presenti nella struttura ed alle 2 direzioni dello spin:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L^\uparrow(E, \theta = 0) &= \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_L(E + \mu_B h) [f_L(E) - f_N(E)] \\ \mathcal{R}_L^\downarrow(E, \theta = 0) &= \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_L(E - \mu_B h) [f_L(E) - f_N(E)] \\ \mathcal{R}_R^\uparrow(E, \theta = 0) &= \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_R(E + \mu_B h) [f_N(E) - f_R(E)] \\ \mathcal{R}_R^\downarrow(E, \theta = 0) &= \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_R(E - \mu_B h) [f_N(E) - f_R(E)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Imponendo le uguaglianze

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_L^\uparrow(E, \theta = 0) &= \mathcal{R}_R^\uparrow(E, \theta = 0) \\ \mathcal{R}_L^\downarrow(E, \theta = 0) &= \mathcal{R}_R^\downarrow(E, \theta = 0)\end{aligned}$$

otteniamo le funzioni di distribuzione per le due popolazioni di spin

$$f_N^\uparrow(E, \theta = 0) = \frac{N_L(E + \mu_B h) f_L(E) + N_R(E + \mu_B h) f_R(E)}{N_L(E + \mu_B h) + N_R(E + \mu_B h)} \quad (3.11)$$

$$f_N^\downarrow(E, \theta = 0) = \frac{N_L(E - \mu_B h) f_L(E) + N_R(E - \mu_B h) f_R(E)}{N_L(E - \mu_B h) + N_R(E - \mu_B h)}, \quad (3.12)$$

Nel caso *antiparallelo* fig.(3.11(b)), ($\theta = \pi$), gli stati di spin $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ hanno autovalori con segno opposto nei due superconduttori. Di conseguenza le equazioni (3.10) assumono la forma

$$\mathcal{R}_L^\uparrow(E, \theta = \pi) = \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_L(E + \mu_B h) [f_L(E) - f_N(E)]$$

$$\mathcal{R}_L^\downarrow(E, \theta = \pi) = \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_L(E - \mu_B h) [f_L(E) - f_N(E)]$$

$$\mathcal{R}_R^\uparrow(E, \theta = \pi) = \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_R(E - \mu_B h) [f_N(E) - f_R(E)]$$

$$\mathcal{R}_R^\downarrow(E, \theta = \pi) = \frac{1}{eR_T} N_N(E) N_R(E + \mu_B h) [f_N(E) - f_R(E)].$$

Imponendo le uguaglianze

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_L^\uparrow(E, \theta = \pi) &= \mathcal{R}_R^\uparrow(E, \theta = \pi) \\ \mathcal{R}_L^\downarrow(E, \theta = \pi) &= \mathcal{R}_R^\downarrow(E, \theta = \pi)\end{aligned}$$

otteniamo le funzioni di distribuzione nel caso $\theta = \pi$

$$f_N^\uparrow(E, \theta = \pi) = \frac{N_L(E + \mu_B h) f_L(E) + N_R(E - \mu_B h) f_R(E)}{N_L(E + \mu_B h) + N_R(E - \mu_B h)} \quad (3.13)$$

$$f_N^\downarrow(E, \theta = \pi) = \frac{N_L(E - \mu_B h) f_L(E) + N_R(E + \mu_B h) f_R(E)}{N_L(E - \mu_B h) + N_R(E + \mu_B h)}, \quad (3.14)$$

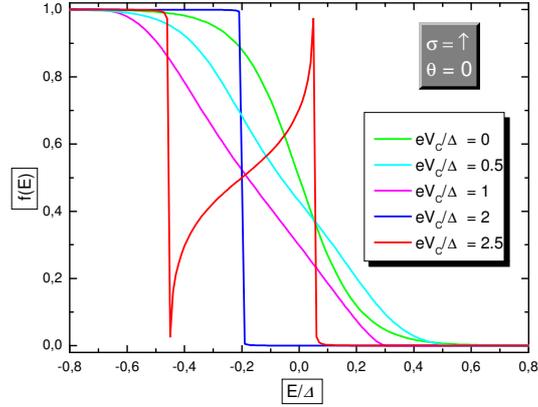


Figura 3.12: Funzione di distribuzione elettronica della regione N nella struttura SINIS per la popolazione di spin up, relativamente alla configurazione parallela dei campi $\theta = 0$. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori della tensione di polarizzazione V_C .

Mostriamo ora i risultati relativi alle funzioni di distribuzione calcolate nel caso *parallelo* $\theta = 0$. In figura (3.12) mostriamo le funzioni di distribuzione per la popolazione di spin up. Si possono osservare diverse caratteristiche che saranno evidenziate nei grafici delle temperature e dei potenziali chimici. Per prima cosa all'aumentare della tensione di polarizzazione la funzione di distribuzione *trasla* verso valori negativi dell'energia di una quantità pari a

$$\delta E = -\mu_B h$$

a causa della variazione della densità degli stati prodotta dai campi magnetici \mathbf{h} . In secondo luogo è possibile osservare che la funzione assume la forma a gradino per $eV_C = 2\Delta$, comportamento che può essere compreso facendo riferimento alla figura (1.7), come nella situazione in assenza di campo magnetico. Considerando la popolazione di spin down, in fig.(3.13) si può osservare lo stesso andamento descritto per lo spin up con la differenza che in questo caso la funzione si sposta verso valori positivi dell'energia di una quantità

$$\delta E = \mu_B h$$

sempre a causa della presenza dei campi magnetici. Poichè quella con campi magnetici paralleli è una configurazione simmetrica, nel senso che il sistema rimane

lo stesso se consideriamo la trasformazione

$$V_C \longrightarrow -V_C$$

il comportamento delle funzioni di distribuzione è lo stesso nel caso con $V_C < 0$. Inoltre la trasformazione

$$h \longrightarrow -h$$

a V_C fissato, manda la funzione di distribuzione di spin up in quella di spin down e viceversa. Diversa è la situazione nella configurazione antiparallela $\theta = \pi$.

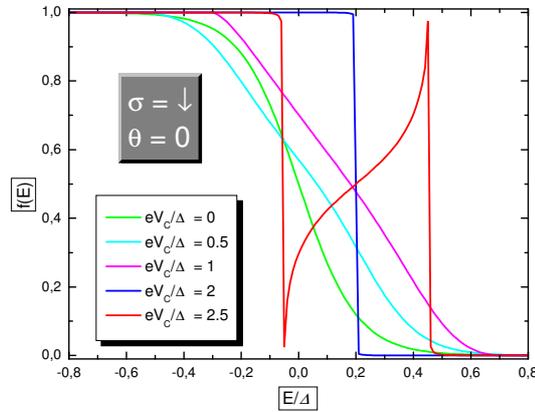


Figura 3.13: Funzione di distribuzione elettronica della regione N nella struttura SINIS per la popolazione di spin down, relativamente alla configurazione parallela dei campi $\theta = 0$. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori della tensione di polarizzazione V_C .

In questo caso non il sistema non è più simmetrico se $V_C \longrightarrow -V_C$ e quindi analizziamo i due casi separatamente per entrambe le popolazioni di spin. In fig.(3.14;3.15) analizziamo le funzioni di distribuzione nel caso $V_C > 0$. Come si può osservare in questa configurazione dei campi le funzioni rimangono centrate in $E = 0$ e l'unico effetto di V_C è quello di modificare la larghezza delle funzioni intorno al valore dell'energia $E = 0$. La forma a gradino viene raggiunta per valori diversi di V_C , precisamente per

$$V_C = \frac{2\Delta}{e} + \frac{2\mu_B h}{e} = 2.4 \frac{\Delta}{e}$$

nel caso della popolazione di spin up e per

$$V_C = \frac{2\Delta}{e} - \frac{2\mu_B h}{e} = 1.6 \frac{\Delta}{e}$$

nel caso della popolazione di spin down.

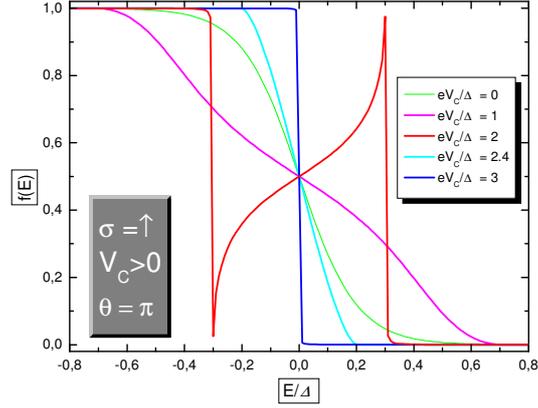


Figura 3.14: Funzione di distribuzione elettronica della regione N nella struttura SINIS per la popolazione di spin up, relativamente alla configurazione antiparallela dei campi $\theta = \pi$. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori della tensione di polarizzazione, nel caso $V_C > 0$.

Nel caso $V_C < 0$, come mostrato in fig. (3.15;3.17) valgono le stesse considerazioni fatte per il caso $V_C > 0$, con la differenza che la forma a gradino si ottiene per valori

$$V_C = -\frac{2\Delta}{e} + \frac{2\mu_B h}{e} = -1.6 \frac{\Delta}{e}$$

per la popolazione di spin up e per

$$V_C = -\frac{2\Delta}{e} - \frac{2\mu_B h}{e} = -2.4 \frac{\Delta}{e}$$

per quella di spin down.

Come già anticipato la configurazione con campi antiparalleli non è simmetrica, e quindi le funzioni di distribuzione per una data popolazione di spin corrispondono a quelle dell'altra popolazione se effettuiamo la trasformazione:

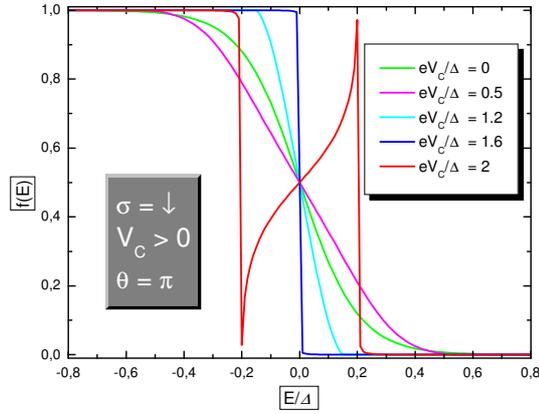


Figura 3.15: Funzione di distribuzione elettronica della regione N nella struttura SINIS per la popolazione di spin down, relativamente alla configurazione antiparallela dei campi $\theta = \pi$. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori della tensione di polarizzazione, nel caso $V_C > 0$.

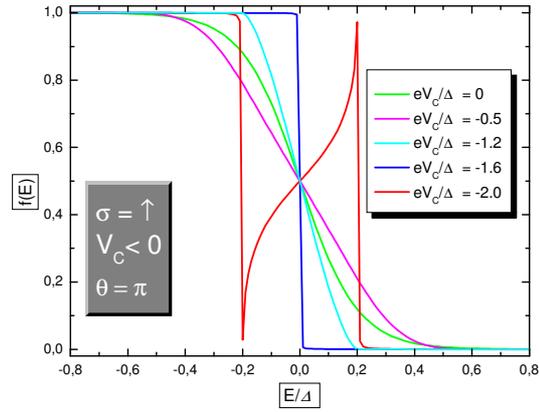


Figura 3.16: Funzione di distribuzione elettronica della regione N nella struttura SINIS per la popolazione di spin up, relativamente alla configurazione antiparallela dei campi $\theta = \pi$. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori della tensione di polarizzazione, nel caso $V_C < 0$.

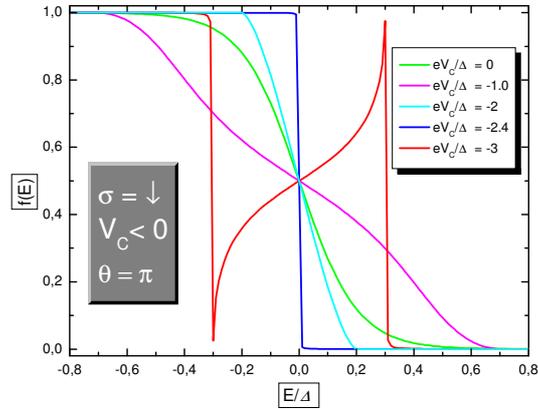


Figura 3.17: Funzione di distribuzione elettronica della regione N nella struttura SINIS per la popolazione di spin down, relativamente alla configurazione antiparallela dei campi $\theta = \pi$. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori della tensione di polarizzazione, nel caso $V_C < 0$.

$$(V_C \longrightarrow -V_C) \wedge (h \longrightarrow -h).$$

Riassumiamo le proprietà osservate per le funzioni di distribuzione:

- Nella configurazione parallela le due popolazioni di spin sono descritte da funzioni che hanno la stessa forma, traslate lungo l'asse delle energie. La traslazione dipende da V_C e raggiunge il valore massimo di $2\mu_B h$. Quindi come mostreremo in dettaglio successivamente, la temperatura elettronica efficace delle due popolazioni di spin è la stessa al contrario dei potenziali chimici efficaci.
- Nella configurazione antiparallela, le funzioni per le due popolazioni di spin rimangono centrate in $E = 0$ e la loro forma cambia in maniera differente al variare di V_C . Questo implica che fissato V_C le due popolazioni di spin possono trovarsi a temperature differenti, come mostreremo in dettaglio successivamente.

3.4.2 Campi non collineari

Nel caso in cui i campi magnetici non sono collineari, gli autostati dello spin relativamente al superconduttore di destra, si ottengono ruotando gli stati $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ di un angolo θ come descritto dalla (1.80). Attraverso la giunzione NIS di destra sono possibili due processi di tunnelling per ogni direzione dello spin:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &\longleftrightarrow |+, -\rangle \\ |\downarrow\rangle &\longleftrightarrow |+, -\rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

e questo introduce nuovi termini nelle equazioni di bilancio utilizzate per la determinazione delle funzioni di distribuzione. Gli autostati $|\pm\rangle$ hanno gli stessi autovalori di $|\uparrow, \downarrow\rangle$ e quindi sono descritti dalle densità degli stati $N_S(E \pm \mu_B h)$ come analizzato nella (1.82). Per ognuno dei processi descritti in (3.15) dobbiamo considerare il rate relativo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_R^{|\uparrow\rangle \leftarrow |+\rangle}(E) &= R_R^\uparrow(E, \theta = 0) \\ \mathcal{R}_R^{|\uparrow\rangle \leftarrow |-\rangle}(E) &= R_R^\uparrow(E, \theta = \pi) \\ \mathcal{R}_R^{|\downarrow\rangle \leftarrow |+\rangle}(E) &= R_R^\downarrow(E, \theta = \pi) \\ \mathcal{R}_R^{|\downarrow\rangle \leftarrow |-\rangle}(E) &= R_R^\downarrow(E, \theta = 0). \end{aligned}$$

Tenendo conto della rotazione degli stati

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

le equazioni di bilancio per le due popolazioni di spin è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L^\uparrow(E) &\equiv \cos^2(\theta/2)\mathcal{R}_R^{|\uparrow\rangle \leftarrow |+\rangle}(E) + \sin^2(\theta/2)\mathcal{R}_R^{|\uparrow\rangle \leftarrow |-\rangle}(E) \\ \mathcal{R}_L^\downarrow(E) &\equiv \sin^2(\theta/2)\mathcal{R}_R^{|\downarrow\rangle \leftarrow |+\rangle}(E) + \cos^2(\theta/2)\mathcal{R}_R^{|\downarrow\rangle \leftarrow |-\rangle}(E). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dalle (3.17) otteniamo le funzioni di distribuzione

$$\begin{aligned} f^\uparrow(E, \theta) &= \frac{[\cos^2(\theta/2)N_R(E+\mu_B h) + \sin^2(\theta/2)N_R(E-\mu_B h)]f_R + N_L(E+\mu_B h)f_L}{\cos^2(\theta/2)N_R(E+\mu_B h) + \sin^2(\theta/2)N_R(E-\mu_B h) + N_L(E+\mu_B h)} \\ f^\downarrow(E, \theta) &= \frac{[\sin^2(\theta/2)N_R(E+\mu_B h) + \cos^2(\theta/2)N_R(E-\mu_B h)]f_R + N_L(E-\mu_B h)f_L}{\sin^2(\theta/2)N_R(E+\mu_B h) + \cos^2(\theta/2)N_R(E-\mu_B h) + N_L(E-\mu_B h)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Come si può osservare dalle (3.18), quando i campi magnetici non sono collineari le funzioni di distribuzione contengono un termine in più sia al numeratore che al denominatore rispetto al caso collineare. Questo termine è dovuto alla presenza di un *canale di tunneling* in più attraverso la seconda giunzione NIS per ognuna delle due popolazioni di spin.

3.5 Temperatura elettronica e potenziale chimico efficaci

Dalle funzioni di distribuzione ricavate nel precedente paragrafo abbiamo determinato la temperatura ed il potenziale chimico efficaci utilizzando le (2.17; 2.20), al variare di V_C , analizzando il comportamento al variare dell'angolo θ tra i due campi magnetici. Riscriviamo per comodità le equazioni per determinare la temperatura elettronica ed il potenziale chimico efficaci:

$$T_{eff} = \frac{\sqrt{6}}{\pi k_B} \left[\int_0^\infty E (f_d^0(E; \mu_{eff}, T=0) - f_d(E)) dE \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_{eff} = - \int_0^\infty f_p(E) dE.$$

Mostriamo innanzi tutto le curve relative alle temperature efficaci nelle due configurazioni parallela ed antiparallela, in quanto le particolarità della struttura SINIS che vogliamo evidenziare sono proprio quelle termiche. Dalla fig. (3.18) si può osservare che nel caso $\theta = 0$ la temperatura efficace non dipende dallo spin, come già accennato precedentemente. Quindi anche se il sistema si trova in condizioni di non equilibrio, questo non è evidenziato nella temperatura bensì nel potenziale chimico. Nel caso $\theta = \pi$ le due popolazioni di spin hanno temperature efficaci diverse per fissato V_C , tranne nel caso $V_C = 0$ in cui tutti gli elettroni sono in equilibrio termodinamico alla temperatura del bagno termico $k_B T = 0.1\Delta$ fig.(3.19). Questo regime è piuttosto inusuale, ed è uno dei risultati principali di questo lavoro di tesi. Infatti tipicamente la temperatura di un gas elettronico è indipendente dallo spin. Avere a disposizione nello stesso filo metallico due gas elettronici a temperatura diversa ci permetterà di estrarre correnti spin-polarizzate in maniera termoelettrica come mostreremo nel paragrafo successivo, cioè sfruttando la differenza di temperatura efficace delle due popolazioni. Per evidenziare la differenza di temperatura tra le due popolazioni, ne mostriamo l'andamento in

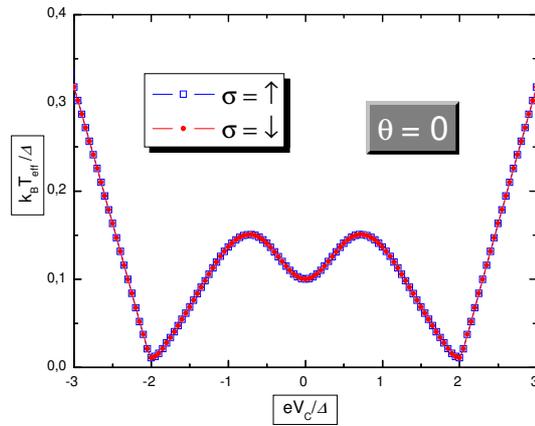


Figura 3.18: Temperatura efficace elettronica della regione N della struttura SINIS, con campi magnetici in configurazione parallela $\theta = 0$, per le due popolazioni di spin. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$.

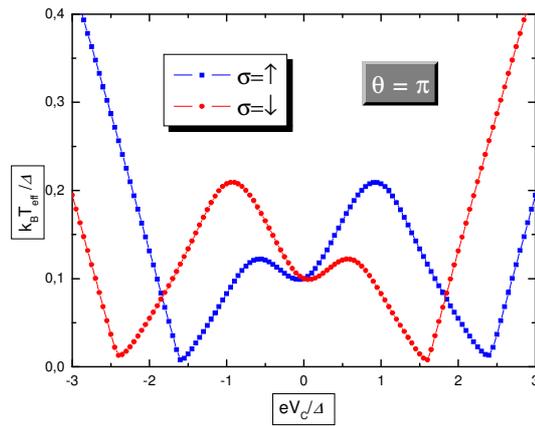


Figura 3.19: Temperatura efficace elettronica della regione N della struttura SINIS, con campi magnetici in configurazione antiparallela $\theta = \pi$, per le due popolazioni di spin. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$.

fig.(3.20). Da tale andamento è possibile capire perchè la configurazione $\theta = \pi$ è un'ottima candidata per il trasporto termoelettrico spin selettivo: tra le due popo-

lazioni è presente una differenza di temperatura che supera anche il valore della temperatura del bagno termico. Discusse le due configurazioni estreme, mostria-

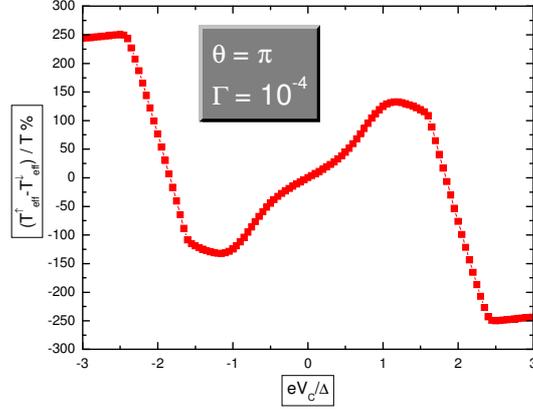


Figura 3.20: Differenza tra le temperature efficaci delle due popolazioni di spin della regione N della struttura SINIS in configurazione ($\theta = \pi$). La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$.

mo i risultati relativi ad angoli intermedi. Discutiamo prima il comportamento della temperatura efficace e poi quello del potenziale chimico efficace. In tutti i grafici, partendo dalla curva corrispondente a $\theta = 0$, si ha una progressiva trasformazione nella curva corrispondente a $\theta = \pi$ dovuta alla presenza sempre più predominante del canale di *tunneling* $|\uparrow\rangle \rightarrow |-\rangle$. In fig.(3.21) si può osservare l'andamento della temperatura efficace della popolazione di spin up mentre in fig.(3.22) mostriamo i risultati relativi alla popolazione di spin down. Si può osservare sia il *riscaldamento anomalo* che la presenza del campo magnetico. Il primo è visibile dal riscaldamento iniziale presente in tutte le curve, dovuto agli stati presenti all'interno del *gap* come discusso precedentemente. La presenza del campo magnetico è osservabile dalla non specularità delle curve in tutte le configurazioni $\theta \neq 0$. In questo caso, infatti, il sistema non è simmetrico sotto la trasformazione $V_C \rightarrow -V_C$ come già discusso. Consideriamo ora i potenziali chimici efficaci per le due popolazioni di spin, mostrati in fig.(3.23) e (3.24). Per $\theta = 0$ si può osservare che il potenziale chimico si porta ai valori $\mp \mu_B h$ rispettivamente per le popolazioni up e down. Questi sono i valori dello *shift* energetico dovuto all'interazione con il campo magnetico. Nella configurazione $\theta = \pi$ il potenziale chimico è sempre nullo per entrambe le popolazioni di spin, ed il comportamento

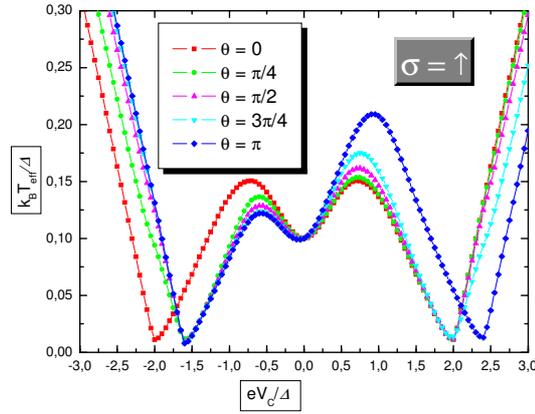


Figura 3.21: Temperatura efficace elettronica della regione N della struttura SINIS, al variare dell'angolo relativo tra i due campi θ , per la popolazione di spin up. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori di θ .

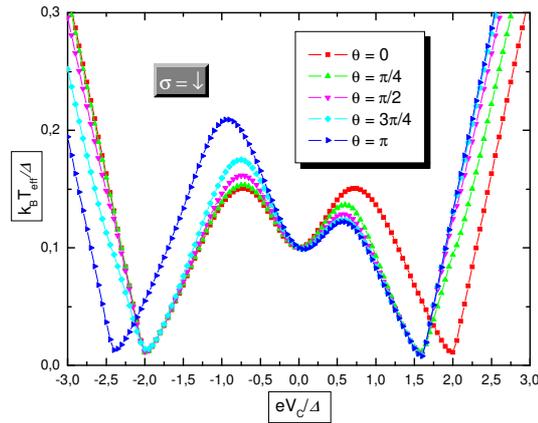


Figura 3.22: Temperatura efficace elettronica della regione N della struttura SINIS, al variare dell'angolo relativo tra i due campi θ , per la popolazione di spin down. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori di θ .

delle curve corrispondenti ai casi intermedi è dato dalla sovrapposizione dei due casi estremi. Infatti si può osservare che partendo da $\theta = 0$ e ruotando i campi verso $\theta = \pi$, le curve tendono a schiacciarsi verso lo zero. Il dettaglio del compor-

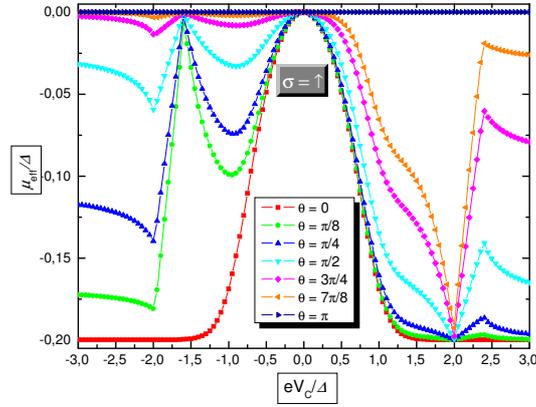


Figura 3.23: Potenziale chimico efficace elettronico della regione N nella struttura SINIS, al variare dell'angolo relativo tra i due campi θ , per la popolazione di spin up. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori di θ .

tamento delle varie curve è dovuto alla contemporanea presenza del *depairing* e dei campi magnetici. Nel paragrafo successivo mostriamo come utilizzare questa

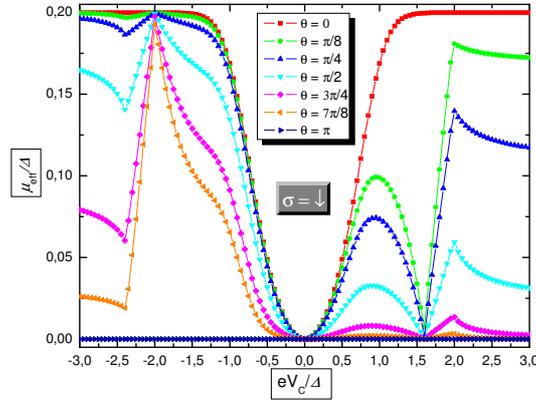


Figura 3.24: Potenziale chimico efficace elettronico della regione N nella struttura SINIS, al variare dell'angolo relativo tra i due campi θ , per la popolazione di spin down. La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ ed il fattore di *depairing* a $\Gamma/\Delta = 10^{-4}$. Le curve si riferiscono a diversi valori di θ .

configurazione per ottenere correnti polarizzate attraverso una giunzione NIS tra la regione N della struttura SINIS ed un ulteriore superconduttore, controllato da una differenza di potenziale V_B .

3.6 Correnti

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che è possibile ottenere due popolazioni di spin a differenti temperature efficaci per $\theta \neq 0$. Proponiamo ora un dispositivo per estrarre, dal filo N della struttura SINIS, correnti spin polarizzate in modo termoelettrico, cioè sfruttando le differenti temperature efficaci delle due popolazioni. Il dispositivo è mostrato in figura (3.25). Come si può osservare si tratta di una struttura SINIS con campi in configurazione antiparallela ($\theta = \pi$), con un ulteriore elettrodo superconduttivo connesso al filo N tramite una giunzione *tunnel*. La scelta di un elettrodo superconduttivo è fondamentale per poter estrarre corrente in maniera termoelettrica; infatti un elettrodo normale non permetterebbe di sfruttare le temperature spin-dipendenti in quanto una giunzione NIN è sostanzialmente insensibile alla differenza di temperatura tra le due zone normali. Al contrario il trasporto di carica in una giunzione NIS dipende dalla temperatura della regione N [9], e quindi un elettrodo superconduttivo è ottimo per i nostri scopi. Vogliamo che le proprietà del filo N non siano modificate dalla presenza di questa ulteriore giunzione e quindi imponiamo la seguente condizione sulla resistenza associata al nuovo isolante

$$R_T \ll R_P. \quad (3.19)$$

Utilizzando l'equazione (1.88) per la corrente di carica, in cui f_N è data dalle (3.14), ed f_S è la funzione di Fermi-Dirac con potenziale chimico V_b , scriviamo le correnti di carica spin polarizzate che fluiscono attraverso la giunzione NIS con resistenza di barriera R_P :

$$\begin{aligned} I^\uparrow &= \frac{1}{eR_P} \int_{-\infty}^{\infty} N_N(E)N_S(E - eV_B) \left[f_N^\uparrow(E) - f_S(E - eV_B) \right] dE \\ I^\downarrow &= \frac{1}{eR_P} \int_{-\infty}^{\infty} N_N(E)N_S(E - eV_B) \left[f_N^\downarrow(E) - f_S(E - eV_B) \right] dE. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Poichè il potenziale chimico del filo è sempre nullo in configurazione antiparallela, scegliamo valori negativi per V_B , in modo da avere una corrente positiva

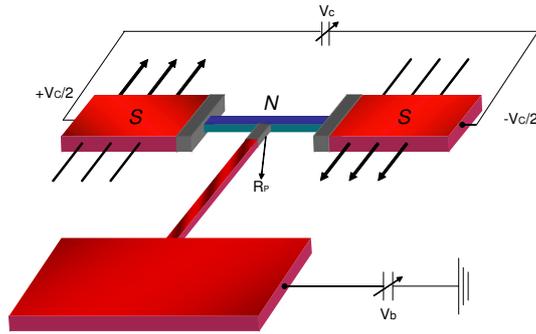


Figura 3.25: Dispositivo per l'estrazione di correnti spin-polarizzate formato da una struttura SINIS in configurazione antiparallela $\theta = \pi$ con la regione N connessa, tramite una giunzione tunnel di resistenza R_P , ad un ulteriore elettrodo superconduttivo. La struttura SINIS è controllata con una differenza di potenziale V_C , mentre la giunzione NIS tramite un'ulteriore differenza di potenziale V_B . Le resistenze *tunnel* della struttura SINIS R_T sono considerate molto più piccole della resistenza della giunzione NIS $R_T \ll R_P$.

che fluisce nell'elettrodo superconduttivo. Inoltre, poichè stiamo considerando una giunzione NIS, valori di V_B che permettono di sfruttare le caratteristiche del superconduttore sono

$$V_B \leq \frac{\Delta}{e} \quad (3.21)$$

in quanto per questi valori è possibile osservare l'effetto della temperatura sul trasporto di carica. Una volta superata la soglia del *gap*, l'effetto della temperatura sul trasporto di carica diventa trascurabile in quanto, anche a temperatura nulla, gli elettroni presenti all'interno del metallo trovano stati liberi nel superconduttore e quindi il trasporto di carica avviene indipendentemente dalla temperatura. Mostriamo ora i risultati relativi alle correnti di carica per alcuni valori di V_B . Come si può osservare dalla fig.(3.26), calcolata per $eV_B = -0.1\Delta$ le correnti relative alle due popolazioni di spin sono traslate una rispetto all'altra e sono presenti degli intervalli in cui è presente solo la corrente relativa ad una data popolazione. Per comprendere meglio quanto appena detto consideriamo le curve delle correnti nel caso $eV_B = -0.5\Delta$, come mostrato in figura (3.27). Definiamo la polarizzazione della corrente nel seguente modo:

$$\mathcal{P} = \frac{I^\uparrow - I^\downarrow}{I^\uparrow + I^\downarrow} \quad (3.22)$$

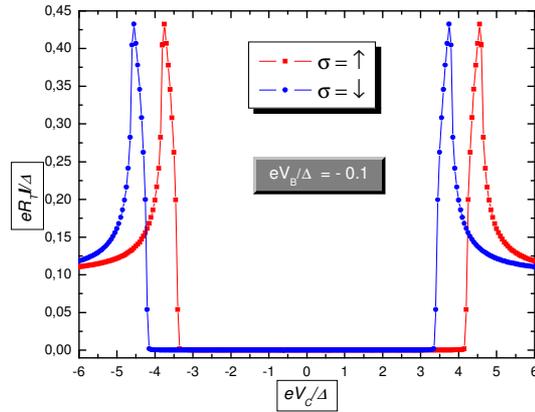


Figura 3.26: Corrente di carica per le due popolazioni di spin, calcolata dalla regione N della struttura SINIS verso il terzo elettrodo superconduttivo, al variare della tensione di controllo V_C . La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ e la tensione di bias a $eV_b = -0.1\Delta$.

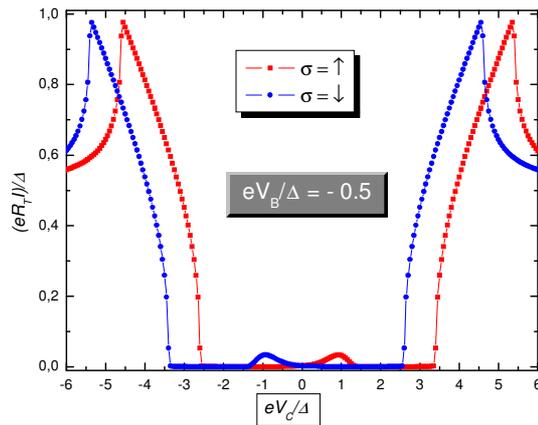


Figura 3.27: Corrente di carica per le due popolazioni di spin, calcolata dalla regione N della struttura SINIS verso il terzo elettrodo superconduttivo, al variare della tensione di controllo V_C . La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ e la tensione di bias a $eV_b = -0.5\Delta$.

in modo tale che $\mathcal{P} = \pm 1$ corrisponda ad avere corrente con polarizzazione 100% \uparrow o \downarrow rispettivamente. Mostriamo la polarizzazione della corrente relativamente

alla fig.(3.27) Come si può osservare ci sono degli interi intervalli in cui è pos-

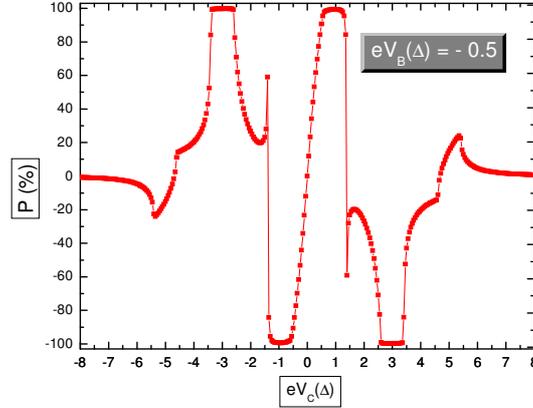


Figura 3.28: Polarizzazione della corrente di carica, calcolata dalla regione N della struttura SINIS verso il terzo elettrodo superconduttivo, al variare della tensione di controllo V_C . La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ e la tensione di bias a $eV_b = -0.5\Delta$.

sibile ottenere corrente polarizzata 100%, il che rende il nostro dispositivo una possibile sorgente di corrente spin-polarizzata, molto interessante dal punto di vista dell'applicazione nel campo della *spintronica*, in cui uno dei grossi problemi è proprio la disposizione di sorgenti di carica spin-polarizzata. Mostriamo inoltre in fig.(3.29) l'andamento della polarizzazione in funzione della temperatura del bagno termico. È possibile osservare che a partire da temperature molto basse, $k_B T = 0.01\Delta$, l'effetto desiderato è pressochè invariato fino a $k_B T = 0.1\Delta$, a parte i dettagli nelle varie curve Mostriamo di seguito i risultati per le correnti e le polarizzazioni nel caso $eV_B = -\Delta$. Come si può osservare le correnti in fig.(3.30) sono conseguenza dell'andamento delle temperature efficaci, mostrate in fig.(3.19). Infatti in una giunzione NIS, come già anticipato all'inizio del paragrafo, la corrente di carica dipende fortemente dalla temperatura della regione N. Dalla polarizzazione risultante, mostrata in fig.(3.31), risulta che in questo caso, $eV_B = -\Delta$, la polarizzazione totale si ha solo per valori ben precisi di V_C , corrispondenti a $eV_C = \pm 1.6\Delta$ e $\pm 2.4\Delta$, il che rende preferibile la situazione mostrata in fig.(3.28), in cui sono presenti intervalli finiti con polarizzazione completa della corrente.

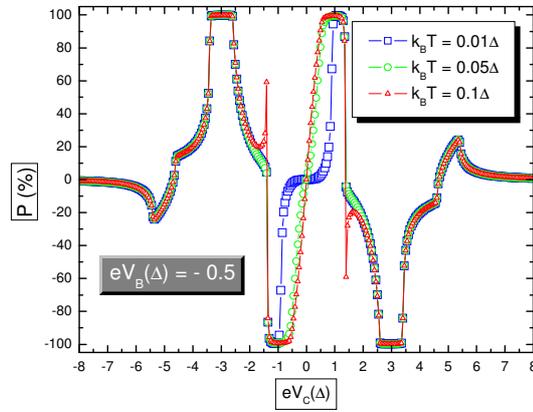


Figura 3.29: Polarizzazione della corrente di carica, calcolata dalla regione N della struttura SINIS verso il terzo elettrodo superconduttivo, al variare della tensione di controllo V_C . Il campo magnetico è fissato a $\mu_B h = 0.2\Delta$ e la tensione di bias a $eV_b = -0.5\Delta$. Le curve si riferiscono a diverse temperature del bagno termico T .

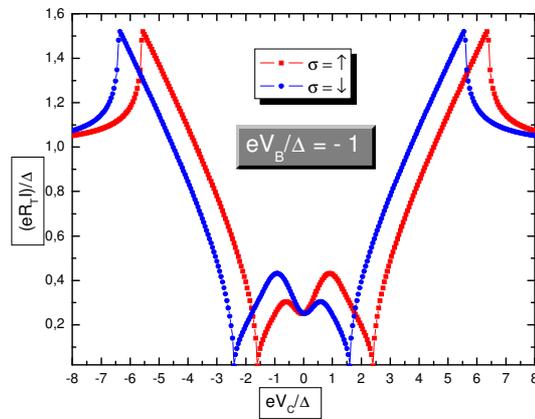


Figura 3.30: Corrente di carica per le due popolazioni di spin, calcolata dalla regione N della struttura SINIS verso il terzo elettrodo superconduttivo, al variare della tensione di controllo V_C . La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ e la tensione di bias a $eV_b = -\Delta$.

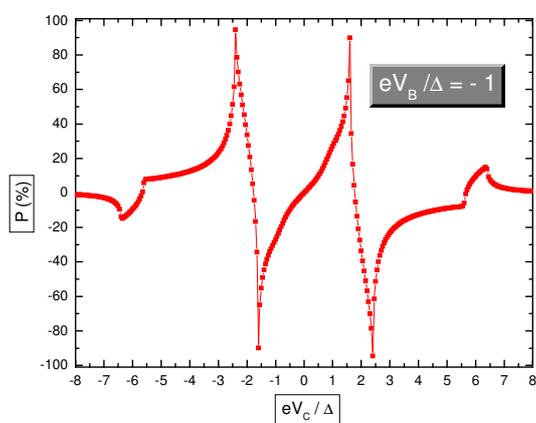


Figura 3.31: Polarizzazione della corrente di carica, calcolata dalla regione N della struttura SINIS verso il terzo elettrodo superconduttivo, al variare della tensione di controllo V_C . La temperatura del bagno termico è fissata a $k_B T = 0.1\Delta$, il campo magnetico a $\mu_B h = 0.2\Delta$ e la tensione di bias a $eV_b = -\Delta$.

Conclusioni e prospettive future

In questo lavoro di tesi abbiamo analizzato una struttura SINIS in presenza di campi magnetici localizzati sugli elettrodi superconduttivi. Le dimensioni mesoscopiche della struttura e la temperatura criogenica permettono di portare il gas elettronico, presente all'interno della regione N, in condizioni di non-equilibrio termodinamico. La presenza dei campi magnetici localizzati sui superconduttori permette inoltre di ottenere funzioni di distribuzione distinte per le componenti di spin up e down del gas elettronico.

Partendo dall'equazione di bilancio della carica che fluisce nella struttura, abbiamo determinato le funzioni di distribuzione, relative alle due popolazioni di spin, degli elettroni di conduzione presenti all'interno della regione N della struttura. Abbiamo analizzato l'andamento delle funzioni di distribuzione al variare della differenza di potenziale di controllo e dell'angolo relativo (θ) tra i due campi magnetici. Dalle funzioni di distribuzione abbiamo calcolato le temperature ed i potenziali chimici per le due popolazioni di spin, opportunamente definiti in maniera *efficace*. Variando l'angolo relativo tra i due campi, le due popolazioni passano dal regime in cui hanno la stessa temperatura efficace ed i potenziali chimici completamente diversi ($\theta = 0$), al regime in cui i potenziali chimici efficaci sono uguali e la differenza tra le temperature efficaci è massima ($\theta = \pi$).

Abbiamo utilizzato tale configurazione dei campi magnetici per proporre un nuovo dispositivo, con il quale estrarre corrente spin-polarizzata dalla regione N della struttura SINIS. Connettendo N ad un ulteriore elettrodo superconduttivo tramite una giunzione tunnel, abbiamo sfruttato le diverse temperature delle due popolazioni di spin per trasportare correnti di carica. Poichè in una giunzione NIS il trasporto di carica dipende fortemente dalla temperatura dell'elettrodo normale, e poichè nella regione N le due popolazioni di spin hanno temperatura diversa, la corrente relativa ad una data popolazione di spin dipende dalla sua temperatura efficace. Abbiamo calcolato la polarizzazione della corrente al variare di V_C determinando intervalli di valori per i quali la corrente è completamente

spin-polarizzata.

Le prospettive future del presente lavoro di tesi risiedono nello studio dell'influenza delle interazioni elettroniche sulle funzioni di distribuzione delle due popolazioni di spin all'aumentare della resistenza di giunzione e della lunghezza della regione N. Concludiamo sottolineando l'importanza che il dispositivo da noi proposto può avere nel campo della *spintronica*: uno dei problemi principali in questo settore di ricerca è proprio la disponibilità di sorgenti di corrente spin-polarizzata. Il nostro dispositivo risulta essere un ottimo candidato per il superamento di tale ostacolo.

Appendice A

Descrizione dell'interazione

Considerando fili metallici mesoscopici di dimensioni dell'ordine del μm è possibile considerare il gas costituito dagli elettroni di conduzione in regime diffusivo. Questo vuol dire che gli elettroni possono collidere in maniera elastica e quindi la descrizione del gas è una descrizione isotropa, in quanto dopo un urto l'elettrone in questione non ha più memoria della sua direzione iniziale. Tale regime si raggiunge quando

$$L_m \ll L \quad (\text{A.1})$$

dove L_m è il cammino libero medio elastico ed L è la lunghezza del filo in questione.

A.1 Equazione di Boltzmann

La descrizione del regime diffusivo si ottiene dall'equazione di Boltzmann, che permette di determinare la funzione di distribuzione degli elettroni all'interno del metallo in questione. Quest'equazione descrive i processi di interazione del gas elettronico attraverso termini di *sorgente* e di *pozzo* esplicitati tramite appropriati integrali di collisione.

In generale l'equazione semiclassica di Boltzmann descrive l'occupazione media del numero di particelle, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ nell'elemento di volume $\{d\mathbf{r}d\mathbf{p}\}$ intorno al punto $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$ dello spazio delle fasi sei-dimensionale

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.2})$$

Si tratta di un'equazione di continuità per il flusso di particelle

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + e\mathbf{E} \cdot \partial_{\mathbf{p}}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = I_{el} [f] + I_{in} [f] \quad (\text{A.3})$$

dove \mathbf{E} rappresenta il campo elettrico responsabile del movimento dei portatori di carica, e gli integrali di collisione elastica e inelastica, I_{el} e I_{in} giocano il ruolo di pozzi e sorgenti di carica. L'equazione può essere semplificata se consideriamo il limite diffusivo $L_m \ll L$, come mostrato in [19, 23, 24]. In questo limite le particelle non hanno *memoria* della loro direzione iniziale, il che si traduce nell'isotropia della funzione f rispetto alla velocità delle particelle \mathbf{v} . La funzione di distribuzione si può sviluppare come segue

$$f(\hat{\mathbf{v}}) = f_0 + \hat{\mathbf{v}} \cdot \delta f \quad (\text{A.4})$$

e si può fare l'approssimazione di tempo di rilassamento per quanto riguarda l'integrale di collisione elastica, introducendo un tempo di scattering elastico τ

$$I_{el} = -\mathbf{v} \cdot \delta f / \tau. \quad (\text{A.5})$$

Inoltre, nel limite in cui l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione è sufficientemente lenta rispetto al tempo τ si può eliminare l'integrale di collisione elastica ed ottenere l'equazione di diffusione con un termine di sorgente di carica

$$(\partial_t - D\nabla_{\mathbf{r}}^2) f_0(\mathbf{r}; \mathbf{E}, t) = I_{in} [f_0] \quad (\text{A.6})$$

dove si assume che le particelle si muovano con velocità di Fermi, $v = v_F \hat{\mathbf{v}}$, e di conseguenza la costante di diffusione sarà $D = v_F^2 \tau / 3$.

A.2 Integrali di collisione per scattering inelastico

In generale l'integrale di collisione che compare nell'equazione (A.6) dipende da vari tipi di interazione, elettrone-elettrone, elettrone-impurezze magnetiche, elettrone-fonone ed in generale interazione con i fotoni presenti nell'ambiente elettromagnetico circostante.

A.2.1 Interazione elettrone-elettrone

Per quanto riguarda l'interazione elettrone-elettrone l'integrale di collisione è stato trattato diffusamente, [23, 25] ed è della forma

$$I_{coll}^{e-e} = \kappa_{e-e} \int d\omega dE' \omega^\alpha \left(I_{coll}^{in}(\omega, E, E') - I_{coll}^{out}(\omega, E, E') \right) \quad (\text{A.7})$$

dove α e κ_{e-e} dipendono dal tipo di scattering in considerazione, $\hbar\omega$ è l'energia scambiata nel processo di *scattering* ed i termini di collisione *in* e *out* sono dati da

$$I_{coll}^{in} = [1 - f(E)] [1 - f(E')] f(E - \hbar\omega) f(E' + \hbar\omega) \quad (\text{A.8})$$

$$I_{coll}^{out} = f(E) f(E') [1 - f(E - \hbar\omega)] [1 - f(E' + \hbar\omega)]. \quad (\text{A.9})$$

Lo scattering elettrone-elettrone può essere dovuto all'interazione di Coulomb, o mediato da impurezze magnetiche che possono invertire il proprio spin in processi di scattering o addirittura da impurezze magnetiche con dinamica interna. Tutti questi processi, come accennato nel capitolo 2, contribuiscono al rilassamento energetico, cioè tendono a riportare la funzione di distribuzione verso quella di Fermi.

A.2.2 Interazione elettrone-fonone

In questo caso l'integrale di collisione è della forma [23, 26]

$$I_{coll}^{e-ph} = 2\pi \int_0^\infty d\omega \alpha^2 F(\omega) [I_{coll}^{in}(E, \omega) - I_{coll}^{out}(E, \omega)] \quad (\text{A.10})$$

dove

$$I_{coll}^{in}(E, \omega) = f(E + \hbar\omega) [1 - f(E)] [1 + n_{ph}(\omega)] + [1 - f(E)] f(E - \hbar\omega) n_{ph}(\omega) \quad (\text{A.11})$$

$$I_{coll}^{out}(E, \omega) = f(E) [1 - f(E - \hbar\omega)] [1 + n_{ph}(\omega)] + f(E) [1 - f(E + \hbar\omega)] n_{ph}(\omega). \quad (\text{A.12})$$

La funzione $\alpha F(\omega)$ nell'integrale d'interazione dipende dal tipo di fononi considerati (longitudinali o trasversali), dalla relazione tra la lunghezza d'onda fononica λ_{ph} ed il cammino libero medio degli elettroni L_m e dal tipo di potenziale di scattering considerato. La funzione $n_{ph}(\omega)$ rappresenta la funzione di distribuzione dei fononi, che in condizioni di equilibrio o di quasi equilibrio è data dalla distribuzione di Bose-Einstein

$$n_{ph}(\omega) = (\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1)^{-1}. \quad (\text{A.13})$$

A temperature criogeniche, cioè in condizioni tipiche negli esperimenti con giunzioni mesoscopiche, e quando siamo in condizioni di bassa tensione applicata, i fononi ottici possono essere trascurati e si può concentrare l'attenzione solo su quelli acustici.

L'equazione di Boltzmann (A.6) rappresenta un'equazione di bilancio ed ha come incognita la funzione di distribuzione del gas elettronico considerato. Gli integrali di collisione ridistribuiscono l'energia all'interno del sistema ed il ritorno all'equilibrio termodinamico, a partire da una data funzione di distribuzione di partenza, dipende da quanto è presente l'interazione, cioè dal valore di κ_{e-e} . Nel caso del filo mesoscopico diffusivo della struttura SINIS, la funzione di distribuzione di partenza si ottiene attraverso la seguente equazione di bilancio [27]:

$$\frac{1}{e^2 R_T \Omega \nu_F} [N_L(F_L - f(E)) + N_R(f_R - f(E))] + \kappa_{e-e} \int d\omega dE' \omega^\alpha \left(I_{coll}^{in}(\omega, E, E') - I_{coll}^{out}(\omega, E, E') \right) = 0$$

dove ν_F è la densità degli stati del metallo normale calcolata all'energia di Fermi, Ω è il volume della regione N della struttura SINIS, R_T i valori delle resistenze *tunnel* ed $N_{L,R}$ e $f_{L,R}$ si riferiscono agli elettrodi superconduttivi di destra e di sinistra rispettivamente. Per un filo quasi unidimensionale nel regime diffusivo si ha che [28, 29]

$$\alpha = -\frac{3}{2} \\ \kappa_{e-e} = \pi \sqrt{2D} \hbar^{3/2} \nu_F A \quad (\text{A.14})$$

dove D è la costante di diffusione del filo e A la sezione. Riscalando le energie rispetto al *gap* superconduttivo Δ

$$\begin{aligned} \hbar\omega &\longrightarrow \hbar\omega/\Delta \\ E' &\longrightarrow E'/\Delta \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

e dividendo la (A.14) per $e^2 R_T \Omega \nu$ otteniamo

$$N_L(f_L - f(E)) + N_R(f_R - f(E)) = K_{e-e}^{coll} \int d\omega dE' \omega^{3/2} I(\omega, E', E) \quad (\text{A.16})$$

dove

$$I(\omega, E', E) = I_{coll}^{in} - I_{coll}^{out} \quad (\text{A.17})$$

$$K_{e-e}^{coll} = \frac{R_T L^2}{R_C D} \sqrt{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R_T}{R_K} \sqrt{\frac{\Delta}{E_{Th}}} \quad (\text{A.18})$$

dove $R_C = L/\sigma A$ è la resistenza del filo, $R_K = h/2e^2$ e $E_{Th} = \hbar D/L^2$. Dalla (A.18) si può osservare che il prefattore dell'integrale di scattering può essere reso trascurabile nella descrizione della zona N del SINIS, scegliendo opportunamente le resistenze *tunnel* R_T e la lunghezza L .

Bibliografia

- [1] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [2] J.B. Ketterson, S.N. Song, *Superconductivity*, Cambridge University Press (1999).
- [3] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, Dover Publications (2004).
- [4] G. Grosso and G. Pastori Parravicini, *Solid State Physics*, Academy Press (2000).
- [5] R. Meservey, P.M. Tedrow and P. Fulde, Phys. Rev. Lett. **25**, 1270 (1970).
- [6] R. Meservey and P.M. Tedrow, Phys. Rev. B, **7**, 318 (1973).
- [7] R. Meservey and P. M. Tedrow, Phys. Lett. **51A**, 57 (1975).
- [8] D.R. Heslinga and T.M. Klapwijk, Phys. Rev. B **47**, 5157 (1993).
- [9] F. Giazotto, T.T. Heikkilä, A. Luukanen, A.M. Savin and J.P. Pekola, preprint *cond-mat/0508093* (2005).
- [10] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge University Press (1995).
- [11] J.P. Pekola, T.T. Heikkilä, A.M. Savin, J.T. Flyktman, F. Giazotto and F.W.J. Hekking, Phys. Rev. Lett. **92**, 056804-1 (2004).
- [12] T. Heikkilä, Ph.D. Thesis Helsinki University of Technology (2002), <http://lib.tkk.fi/Diss/2002/isbn9512261863/isbn9512261863.pdf>.
- [13] H. Pothier, S. Guéron, N.O. Birge, D. Esteve and M.H. Devoret, Phys. Rev. Lett. **79**, 3490 (1997).

- [14] F. Giazotto, F. Taddei, R. Fazio and F. Beltram, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 066804 (2005).
- [15] F. Giazotto, F. Taddei, T.T. Heikkilä, R. Fazio, F. Beltram, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 2877 (2003).
- [16] F. Giazotto, T.T. Heikkilä, F. Taddei, R. Fazio, J.P. Pekola and F. Beltram, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 137001 (2004).
- [17] A.M. Savin, J.P. Pekola, J.T. Flyktman, A. Anthore and F. Giazotto, *Appl. Phys. Lett.* **84**, 4179 (2004).
- [18] I. Žutić, J. Fabian and S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 323 (2004).
- [19] K.E. Nagaev, *Phys. Rev. B* **52**, 4740 (1995).
- [20] M.L. Roukes, M.R. Freeman, R.S. Germain, R.C. Richardson and M.B. Ketchen, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 422 (1985).
- [21] R.C. Dynes, J.P. Garno, G.B. Hertel, T.P. Orlando, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2437 (1984).
- [22] J.M. Rowell and D.C. Tsui, *Phys. Rev. B* **14**, 2456 (1976).
- [23] J. Rammer, *Quantum Transport Theory*, Perseus books, Reading, Massachusetts (1998).
- [24] E.V. Sukhorukov, D. Loss, *Phys. Rev. B* **59**, 13054 (1999).
- [25] F. Pierre, Ph.D. Thesis, Université Paris 6 (2000).
- [26] F.C. Wellstood, C. Urbina and J. Clarke, *Phys. Rev. B* **49**, 5942 (1994).
- [27] F. Giazotto, T.T. Heikkilä, F. Taddei, R. Fazio, J.P. Pekola and F. Beltram, *J. Low. Temp. Phys.* **136**, 435 (2004).
- [28] A. Kamenev and A. Andreev, *Phys. Rev. B* **60**, 2218 (1999).
- [29] B. Huard, A. Anthore, F. Pierre, H. Potier, N.O. Birge, D. Esteve, *Solid State Commun.* **131**, 599 (2004).

Ringraziamenti

Dopo tanto peregrinare è arrivata la fine di questo cammino. Sono tante le persone da ringraziare e quindi sicuramente dimenticherò qualcuno ... di sicuro nessuno se la prenderà:) Inizierei con le persone che mi sono accanto da tutta la vita, che mi hanno dato la possibilità di arrivare fin qui, che mi hanno sostenuto in ogni occasione, che hanno apprezzato le mie scelte ... un grazie di cuore a mia madre Marta, mio padre Ottavio e mio fratello Luca. Un grazie sentito anche a tutti i miei parenti: i nonni Amerigo e Filippina, gli zii Rosalia, Michele, Fabrizio, Elia, Tonino, Carla, Pietro, Flavia, Pasqualino, Anna, Gianni, Maria, Marino, Giovanna, Guido, i cugini Maurizio, Emilia, Patrizia, Stephane, Stephanie, Roberto, Mirella, Marzia, Gioele, Dalila, Angelo, Filippo, Maria, Valeria, ... in un modo o nell'altro anche voi siete parte di questo mio traguardo. Anche se non sono più qui, li porterò sempre nel mio cuore ... grazie per i bei ricordi dell'infanzia, grazie a nonno Ampino e a nonna Consilia. Grazie alla classe 80 di Quadri, Domenico, Vincenzo, Carmine, Rosalba, Beatrice, Concetta e Annaminda ... i rapporti si sono affievoliti, come sempre accade quando si è lontani, comunque siete indimenticabili. Grazie al mitico Delfino e ai *Cancerogeni*. Grazie alla 5^a A del Patini, in particolare al molisano compagno di banco Demis e alla prof Cipriani che ha saputo *stuzzicare* la mia curiosità. Grazie alla Sevel Volley, Luciano ecc...ecc...ecc... Grazie agli amici pisani Grazie al gruppone Castel di Sangro (Valerio, Francesco, Andrea) - Ascoli (Bibbo, Fabio)- Follo(Gianluca), e relative ragazze e tutti gli altri associati. Da casa Ponchietti, a casa Tagliavini e poi ... il mio peregrinare nelle case dello studente. Grazie agli amici Nettuniani, Fascettiani, Don Boschiani ... Sara, Sonia, Daniela, Elena, Rosario, Angela, Luka ecc...ecc... Grazie agli amici della valdera, in particolare Lia ed Emy. Grazie ai musicanti Giulia, Piergiorgio e Andrea. Grazie a tutti gli amici che ho conosciuto a fisica, in particolare il gargagnino Giuseppe ed il Pirino nazionale... Grazie al prof. Fazio che mi ha dato l'opportunità di tornare nel suo gruppo dopo l'abbandono ed un grazie infinito a Fabio e Francesco per i consigli, la competenza e la pazienza con cui mi hanno

guidato in questo lavoro di tesi. E, *dulcis in fundo*, un grazie di vero cuore alla mia piccola Sara, il tuo aiuto è stato fondamentale in quest'ultimo periodo ... devi volermi proprio un mare di bene se sei ancora qui con me alle 5 del mattino!!!