Università di Pisa

Facoltà di Scienze
Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2004/2005

Tesi di Laurea
27 ottobre 2005

Funzioni $W^{1/2}$ a valori in S^1 e correnti

Candidato
Luca Covassin

Relatore
Prof. Mariano Giaquinta

Indice

Introduzione **3**

1 Preliminari **3**
1.1 Funzioni $W^{1/2}(\Omega)$ 3
1.2 Correnti 6

2 Chiusura e compattezza **13**
2.1 Sollevamenti 13
2.2 Chiusura e compattezza 18

3 Densità: caso 1-dimensionale **25**

4 Densità: caso 2-dimensionale **31**
4.1 Dipoli 31
4.2 Densità in B^2 35

5 Caso generale **41**
5.1 Costruzione del dipolo 41

Bibliografia **50**

Introduzione

Negli ultimi anni si è visto un discreto interesse nello studio delle funzioni nello spazio di Sobolev $W^{1/2}$ da un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a valori in S^1. Ciò è motivato dal fatto che, come per lo spazio $W^{1,2}$ a valori in S^1, le successioni di mappe regolari con norme $W^{1/2}$ equilimitate mostrano anch'esse delle concentrazioni di energia $W^{1/2}$, ed inoltre se $n \geq 2$ esistono delle funzioni in $W^{1/2}(\Omega, S^1)$ che non possono essere approssimate in norma $W^{1/2}$ con delle funzioni in $C^\infty(\Omega, S^1)$, come si può vedere dalla funzione $u(x) = \frac{x}{|x|}$ definita su B^2. Per tali ragioni siamo interessati a tali spazi, in particolare all'identificazione di quali siano i limiti deboli delle successioni regolari con energie $W^{1/2}$ equilimitate, stimarne l'energia e più in generale studiare lo spazio di tali limiti.

Nel primo capitolo definiremo lo spazio $W^{1/2}(\Omega)$ come il sttospazio delle funzioni $u \in L^2$ per cui l'integrale

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+1}} dx\, dy$$

è finito, dandone alcune proprietà fondamentali. In particolare vedremo il legame che c'è tra tale spazio e lo spazio $W^{1,2}(\Omega \times [0, 1])$, definendo quindi il concetto di traccia di una funzione in $W^{1,2}$. In seguito definiremo le correnti ed in particolare vedremo cos'è lo spazio $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$, dandone alcune proprietà.

Nel secondo capitolo vedremo che ogni corrente in $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ ha un sollevamento ad una corrente in $\Omega \times \mathbb{R}$, ovvero esiste una $r : \Omega \to \mathbb{R}$ per cui T coincide con il bordo del sottografico di r; in particolare otterremo che tale r potrà essere presa in $W^{1/2} + BV(\Omega)$ nel caso 1-dimensionale, mentre nel caso generale possiamo prenderla in $L^1(\Omega)$. Nel seguito dimostreremo il teorema di chiusura e compattezza, vedendo che limiti deboli di successioni equilimitate in $cart^{1/2}$ sono anch'essi in tale spazio, dando inoltre una stima superiore per la loro energia. Come conseguenza immediata di tale fatto vedremo che i limiti deboli di funzioni equilimitate in $W^{1/2}(\Omega, S^1)$ stanno in $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$.

Nel terzo capitolo dimostreremo che le funzioni in $C^\infty(B^1, S^1)$ sono dense in $W^{1/2}(B^1, S^1)$, in seguito sfruttando questo risultato vedremo che ogni corrente in $cart^{1/2}(B^1 \times S^1)$ è il limite debole di una successione di grafici di mappe regolari in $W^{1/2}(B^1, S^1)$.

Nel capitolo successivo studieremo il caso 2-dimensionale, vedendo che a differenza di quello 1-dimensionale le concentrazioni saranno dei dipoli, ovvero avremo che l'energia si concentrerà lungo un segmento e quindi esso non avrà bordo nullo, dando origine a concentrazioni di segno opposto sugli estremi del segmento. Per tale motivo provvederemo prima ad approssimare tali concentrazioni ed in seguito vedremo che il risultato di densità è valido anche nel caso 2-dimensionale. Nell'ultimo capitolo, dopo aver generalizzato il dipolo nel caso n-dimensionale ed essere riusciti ad approssimarlo, proveremo che ogni corrente in $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ è il limite debole di una successione di grafici di funzioni regolari in $W^{1/2}(\Omega, S^1)$.

I risultati che abbiamo provato in questa tesi sono la rielaborazione di alcuni lavori recenti sulla classe $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$, in particolare abbiamo utilizzato il lavoro [7] di Giaquinta, Modica e Souček, per ciò che riguarda i risultati di compattezza e gli articoli [6], [4] per i risultati di densità. Per ciò che concerne i preliminari invece abbiamo utilizzato come riferimento i testi [1], [8] e [14], e rimandiamo perciò a tali testi per le dimostrazioni dei teoremi enunciati in tale capitolo.

Capitolo 1

Preliminari

Vogliamo ora dare una definizione degli spazi che utilizzeremo in seguito, elencando alcune delle principali proprietà di tali spazi.

1.1 Funzioni $W^{1/2}(\Omega)$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, ricordiamo che lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$, con $m \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$, è lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ che hanno le derivate distribuzionali fino all'ordine m in $L^p(\Omega)$, dotato della seguente norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty \tag{1.1}$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty. \tag{1.2}$$

Vogliamo quindi definire gli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ per un generico $s \geq 0$. A tal proposito definiamo $T^{\sigma,p}(\Omega)$, con $0 < \sigma < 1$ e $1 \leq p < \infty$, come lo spazio delle funzioni (classi di equivalenza) $u \in L^p(\Omega)$ per cui la seguente norma

$$\|u\|_{T^{\sigma,p}} := \left\{ \|u\|_p^p + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+(1-\sigma)p}} \, dx \, dy \right\}^{1/p}$$

è finita.

Definizione 1 *Dato $s \geq 0$. Se $s = m$ è intero, definiamo $W^{s,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$; se non è intero, scriviamo $s = m + \sigma$, con $0 < \sigma < 1$, e definiamo $W^{s,p}(\Omega)$ come lo spazio delle fuzioni $u \in W^{m,p}(\Omega)$, che hanno derivate distribuzionali D^α, $|\alpha| = m$, appartenenti a $T^{1-\sigma,p}(\Omega)$.*

Se $s = m + \sigma$ con $0 < \sigma < 1$, poniamo quindi in $W^{s,p}(\Omega)$ la seguente norma

$$\|u\|_{s,p} = \left\{ \|u\|_{m,p}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}} \, dx \, dy \right\}^{1/p}. \tag{1.3}$$

Con tale norma abbiamo che $W^{s,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach; in particolare se $p = 2$ sarà di Hilbert. Nel seguito saremo interessati nello studio dello spazio $W^{1/2,2}(\Omega)$, che indicheremo più semplicemente con $W^{1/2}(\Omega)$, ovvero le funzioni $u \in L^2(\Omega)$ che hanno seminorma $W^{1/2}$ finita

$$|u|_{1/2,\Omega}^2 := \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+1}} \, dx \, dy. \tag{1.4}$$

Le funzioni in $W^{1/2}$ possono essere caratterizzate anche in termini della loro restrizione 1-dimensionale. Indichiamo con $\Pi_j^\perp$ il piano $x_j = 0$ in $\mathbb{R}^n$, con x' i punti in $\Pi_j^\perp$ e con $\Omega_{j,x'}$ l'aperto 1-dimensionale dato dall'intersezione di Ω con la retta $\Pi_j(x')$ ortogonale a $\Pi_j^\perp$ e passante per x'. Data $u \in L^2(\Omega)$, per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. $x' \in \Pi_j$ la restrizione di u a $\Omega_{j,x'}$,

$$u \llcorner \Pi_{\Omega_{j,x'}} : \Omega_{j,x'} \to \mathbb{R},$$

è ben definita e vale

Proposizione 1 *Sia $u \in L^2(\Omega)$. Allora $u \in W^{1/2}(\Omega)$ se e solo se per ogni $j = 1, \dots, n$ e per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. $x' \in \Pi_j$ abbiamo $u \llcorner \Pi_{\Omega_{j,x'}} \in W^{1/2}(\Omega_{j,x'})$. Inoltre $|u|_{1/2,\Omega}^2$ è equivalente a*

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Pi_j} |u \llcorner \Pi_{\Omega_{j,x'}}|_{1/2,\Omega_{j,x'}}^2 \, dx'.$$

Osserviamo che se $u \in W^{1/2}(\Omega)$ allora per ogni $j = 1, \dots, n$, $D_j u$ appartiane allo spazio duale $W^{-1/2}(\Omega)$ di $W^{1/2}$ ed abbiamo

$$|\langle Du, \varphi \rangle| \leq c |u|_{1/2} |\varphi|_{1/2} \ \ \forall \, u, \varphi \in W^{1/2}(\Omega). \tag{1.5}$$

Inoltre se $v \in W^{1/2} \cap L^\infty(\Omega)$ allora vDu definisce una distribuzione in Ω, ovvero un funzionale lineare continuo su $W^{1/2} \cap L^\infty$ dato da

$$\langle v \, Du, \varphi \rangle := \langle Du, v\varphi \rangle \, ;$$

infatti

$$|\langle v \, Du, \varphi \rangle| \leq c |u|_{1/2} \left(\|v\|_\infty |\varphi|_{1/2} + \|\varphi\|_\infty |v|_{1/2} \right), \tag{1.6}$$

dove si è utilizzato il fatto che

$$|uv|_{1/2} \leq \|u\|_\infty |v|_{1/2} + \|v\|_\infty |u|_{1/2} \; \forall \, u, v \in W^{1/2} \cap L^\infty(\Omega).$$

Per $x \in \Omega$ e $r < \mathit{dist}\,(x, \partial\Omega)$ indichiamo con $B(x,R)$ la palla di centro x e raggio R in $\mathbb{R}^n$ e con $u_{x,R}$ la media di u su $B(x,R)$. Da

$$\int_{B(x,R)} |u - u_{x,R}|^2 \, dy \leq \frac{1}{R^n} \int_{B(x,R)} dz \int_{B(x,R)} |u(y) - u(z)|^2 \, dy$$

deduciamo che vale la seguente disuguaglianza di Poincaré per le funzioni $u \in W^{1/2}(\Omega)$

$$\int_{B(x,R)} |u - u_{x,R}|^2 \, dy \leq 2^n R \int_{B(x,R)} dz \int_{B(x,R)} \frac{|u(z) - u(y)|^2}{|z - y|^{n+1}} \, dz.$$

Poiché, detto

$$\Sigma = \left\{ (x,y) \in \Omega \times \Omega | \limsup_{r \to 0} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \int_{B(y,r)} \frac{|u(z) - u(w)|^2}{|z - w|^{n+1}} \, dz \, dw \; > \; 0 \right\},$$

abbiamo che $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \setminus \Sigma) = 0$, dalla disuguaglianza di Poincaré otteniamo

Proposizione 2 *Sia $u \in W^{1/2}(\Omega)$; allora $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \setminus \Sigma_u) = 0$, dove*

$$\Sigma_u = \left\{ x \in \Omega | \fint_{B(x,r)} |u(y) - u_{x,r}| \, dy \to 0 \text{ per } r \to 0 \right\}.$$

Ciò poteva anche essere dedotto dall'analogo risultato per le funzioni in $W^{1,2}$, infatti $W^{1/2}$ può essere visto come lo spazio delle tracce di $W^{1,2}$. In particolare abbiamo che per ogni $u \in W^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ esiste una $U \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ tale che $U_{|\mathbb{R}^n \times \{0\}} = u$. Più in generale si ha che se $U \in W^{1,2}(\Omega)$ allora $u := U_{|\partial\Omega}$ appartiene a $W^{1/2}(\partial\Omega)$ e

$$\|u\|_{W^{1/2}(\partial\Omega)} \leq K_1 \|U\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

e viceversa, se $u \in W^{1/2}(\partial\Omega)$ allora esiste una $U \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che $U_{|\partial\Omega} = u$ e

$$\|U\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq K_2 \|u\|_{W^{1/2}(\partial\Omega)},$$

in tal caso diremo che u è la traccia di U, $u := T(U)$.

Definiamo allora lo spazio

$$W^{1/2}(\Omega, S^1) := \{u \in W^{1/2}(\Omega, \mathbb{R}^2) | \; |u(x)| = 1 \text{ per q.o.} x \in \Omega\},$$

e poiché la norma $W^{1/2}$ di una funzione $u \in W^{1/2}(B^n, S^1)$, per quanto appena detto, risulta equivalente alla norma $W^{1,2}$ della sua estensione $U := Ext(u) \in W^{1,2}(B^n \times [0,1], \mathbb{R}^2)$ definita come la funzione armonica che minimizza l'integrale di Dirichlet

$$D(U) := \frac{1}{2} \int_{B^n \times [0,1]} |DU(x,t)|^2 dx\, dt$$

tra le funzioni che coincidono con u su $B^n \times \{0\}$. In tal modo, detta $\varepsilon_{1/2}(u) := D(Ext(u))$, abbiamo che $\varepsilon_{1/2}(u)$ è equivalente alla seminorma $W^{1/2}$, e quindi possiamo lavorare con tale energia; ed inoltre si ha che l'immagine di U sarà contenuta nel disco unitario,

$$U \in W^{1,2}(B^n \times [0,1], \overline{B}^2).$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $n \geq 2$, poniamo $R^\infty_{1/2}(\Omega, S^1)$ l'insieme delle funzioni $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$ regolari tranne che su un insieme $\Sigma(u)$ della forma

$$\Sigma(u) = \bigcup_{i=1}^{r} \Sigma_i, \quad r \in \mathbb{N},$$

dove Σ_i è un sottoinsieme regolare $(n-2)$-dimensionale di Ω. Allora abbiamo che vale il seguente risultato

Teorema 1 *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; allora $R^\infty_{1/2}(\Omega, S^1)$ è denso in $W^{1/2}(\Omega, S^1)$.*

1.2 Correnti

Vogliamo ora introdurre il concetto di corrente. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $0 \leq k \leq n$, indichiamo allora con $\mathcal{D}^k(\Omega)$ lo spazio delle k-forme differenziali a supporto compatto in Ω con l'usuale topologia, caratterizzata da

$$\omega_i := \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega^i_\alpha \, dx^\alpha \to \omega := \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha \, dx^\alpha \, ,$$

se esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che

(i) $spt\, \omega^i_\alpha \subset K \, \forall \alpha \in I(k,n)$ e $\forall i$

(ii) $\lim_{i \to \infty} D^\beta \omega^i_\alpha = D^\beta \omega_\alpha \, \forall \alpha \in I(k,n)$ e per ogni multi-indice β,

dove $I(k,n) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) | \alpha_i \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq n\}$.

Definizione 2 *Una corrente k-dimensionale in Ω è un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}^k(\Omega)$. Lo spazio delle correnti k-dimensionali lo indicheremo con $\mathcal{D}_k(\Omega)$.*

Data una successione $\{T_i\} \in \mathcal{D}_k(\Omega)$, diremo che essa converge debolmente a $T \in \mathcal{D}_k(\Omega)$, $T_k \rightharpoonup T$, se $T_i(\omega) \to T(\omega)\ \forall \omega \in \mathcal{D}^k(\Omega)$. Ad ogni corrente possiamo associare un proprio bordo che è definito nel seguente modo

Definizione 3 *Il bordo di $T \in \mathcal{D}_k(\omega)$, ∂T, è la $(k-1)$-corrente tale che*

$$\partial T(\eta) := T(d\eta) \quad \forall\, \eta \in \mathcal{D}^{k-1}(\Omega);$$

poniamo

$$\partial T = 0 \quad se \ \ T \in \mathcal{D}_0(\Omega)$$

Il supporto di $T \in \mathcal{D}_k(\Omega)$ è definito da

$$spt\, T = \bigcap \left\{ K \subset \Omega | K \text{chiuso in } \Omega, T(\omega) = 0\, \forall \omega \in \mathcal{D}^k(\Omega), spt\, \omega \subset \Omega \setminus K \right\}.$$

Definizione 4 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \Omega$ un insieme aperto e $T \in \mathcal{D}_k(\Omega)$. La massa di T in U è data da*

$$M_U(T) := \sup\{T(\omega) | \omega \in \mathcal{D}^k(\Omega),\ spt\, \omega \subset U, |\omega(x)| \le 1\, \forall\, x \in \Omega\}.$$

Se $U = \Omega$ indicheremo semplicemente $M(T)$ anziché $M_U(T)$, e poniamo

$$\mathcal{M}_k(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}_k(\Omega) | M(T) < \infty\}$$

$$\mathcal{M}_{k,\, loc}(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}_k(\Omega) | M_U(T) < \infty\, \forall\, U \subset\subset \Omega\}.$$

Abbiamo quindi dalla definizione di massa che valgono le seguenti proposizioni

Proposizione 3 (s.c.i. della massa) *Sia $\{T_j\}, T \in \mathcal{D}_k(\Omega)$, se $T_j \rightharpoonup T$ allora per ogni aperto $U \subset \Omega$, $M_U(T) \le \liminf_{j\to\infty} M_U(T_j)$.*

Proposizione 4 (Chiusura-compattezza) *Data una successione $\{T_j\} \in \mathcal{M}_{k,\, loc}(\Omega)$ con $\sup_j M_U(T_j) < \infty\, \forall U \subset\subset \Omega$, allora esiste una sottosuccessione $\{T_{j'}\}$ e $T \in \mathcal{M}_{k,\, loc}(\Omega)$ tale che $T_{j'} \rightharpoonup T$. Inoltre*

$$M(T) \le \liminf_{j' \to \infty} M(T_{j'}) < \infty$$

se le masse di $T_{j'}$ sono equilimitate.

Dati

(i) $\mathcal{M} \subset \Omega$ $\mathcal{H}^k$-misurabile e numerabilmente k-rettificabile,

(ii) $\theta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{H}^k$-misurabile, localmente $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$-sommabile,

(iii) $\xi : \mathcal{M} \to \Lambda_k \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^k$-misurabile con $\|\xi\| = 1\, \mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$-q.o.,

diremo che una corrente $T \in \mathcal{D}_k(\Omega)$ è del tipo $\tau(\mathcal{M}, \theta, \xi)$, $T = \tau(\mathcal{M}, \theta, \xi)$ se

$$T(\omega) = \int_{\mathcal{M}} < \xi, \omega > \theta \, d\mathcal{H}^k$$

ovvero

$$T = \theta \xi \mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}.$$

Definizione 5 *Una corrente $T \in \mathcal{D}_k(\omega)$ si dice rettificabile se e solo se è della forma $T = \tau(\mathcal{M}, \theta, \xi)$ per qualche $\mathcal{M}$, θ, ξ e inoltre $\xi(x)$ è un k-vettore associato al piano tangente $T_x\mathcal{M}$ per $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$-q.o. x. Se inoltre la densità θ è a valori interi diremo che T è una corrente intera rettificabile. La classe delle correnti intere rettificabili sarà indicata con $\mathcal{R}_k(\Omega)$.*

Indicando ora con $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ la classe delle k-catene poliedrali intere in $\mathbb{R}^n$; dove P è una catena poliedrale intera se può essere scritta nella forma $P = \sum_i a_i [\![\Sigma_i]\!]$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ e Σ_i k-simplessi. Vale allora il seguente teorema di approssimazione:

Teorema 2 (Approssimazione di Federer) *Sia T una corrente intera e rettificabile, $T \in \mathcal{R}_k(\mathbb{R}^n)$, con supporto compatto e con $\partial T \in \mathcal{R}_{k-1}(R^n)$. Sia $\varepsilon > 0$, allora esiste una catena poliedrale intera P ed un diffeomorfismo f di classe C^1 di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$M(P - f_\# T) + M(\partial P - \partial f_\# T) \leq \varepsilon,$$

$$sptP \subset \{x | dist(x, sptT) \leq \varepsilon\} \quad Lip\,(f),\, Lip\,(f^{-1}) \leq 1 + \varepsilon$$
$$|f(x) - x| \leq \varepsilon \;\forall x \in \mathbb{R}^n \quad e \quad f(x) = x \;se\; dist(x, sptT) \geq \varepsilon$$

.

Definizione 6 *Data una corrente $T \in \mathcal{D}_k(\Omega)$, diremo che è normale se $M(T) + M(\partial T) < \infty$, la classe di tali correnti sarà indicata con $N_k(\Omega)$.*

Ad ogni k-forma $\varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega)$ possiamo associare la seguente seminorma relativa al compatto $K \subset \Omega$

$$F_K(\varphi) := \max\{\sup_{x \in K} \|\varphi\|, \max_{x \in K} \|d\varphi\|\}.$$

Per una corrente $T \in \mathcal{D}_k(\Omega)$ la norma piatta relativa a K è definita da

$$F_K(T) := \sup\{T(\varphi) \,|\, \varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega),\ F_K(\varphi) \leq 1\}.$$

Lo spazio delle catene piatte è definito come la chiusura di $N_k(\Omega)$ rispetto la norma F_K, ovvero

Definizione 7 *T appartiene a $F_{m,K}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione di m-correnti normali T_j tale che $F_K(T - T_j) \to 0$. Quindi porremo*

$$F_m(\Omega) := \cup\{F_{m,K}(\Omega) \,|\, K \subset \Omega,\ K\,compatto\}.$$

Per quanto riguarda la rettificabilità di una catena abbiamo che vale il seguente criterio di rettificabilità ottenuto da White

Teorema 3 *Sia data una k-catena piatta T di massa finita in $\mathbb{R}^n$. Allora T è rettificabile se e solo se per quasi ogni $(n-k)$-pianio P, parallelo a un piano coordinato, lo slice $T \cap P$ è una 0-catena rettificabile.*

Vogliamo ora a vedere come sono definite e quali sono le principali proprietà delle correnti in $\Omega \times S^1$, in particolare siamo interessati alle correnti associate ad una funzione. A tal proposito sia $(y^1, y^2) \in S^1$ ed indichiamo con

$$\theta := y^1\, dy^2 - y^2\, dy^1$$

la forma angolare su S^1, possiamo allora scrivere ogni forma $\omega \in \mathcal{D}^n(\Omega \times S^1)$ nel seguente modo

$$\omega = \omega_0(x,y)dx + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \omega_i(x,y) \widehat{dx^i} \wedge \theta$$

dove $dx := dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ e ω_0 e ω_i sono funzioni in $C_0^\infty(\Omega \times S^1)$. Se $u \in W^{1/2}(\Omega \times S^1)$ abbiamo che $\omega_i(x, u(x))$ apparterrà a $W^{1/2}$, e quindi, poiché $Du \in W^{-1/2}$ possiamo definire la corrente grafico associata ad u come

$$G_u(\omega) := \int_\Omega \omega_0(x, u(x))dx + \sum_{i=1}^{n} < u^1 D_i u^2 - u^2 D_i u^1, \omega_i(x, u(x)) > .$$

Inoltre possiamo vedere G_u come un funzionale sulla classe delle forme con al più un differenziale verticale; ovvero, se

$$\omega = \omega_0(x,y)dx + \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \omega_{ij}(x,y) \widehat{dx^i} \wedge dy^j$$

definiamo

$$G_u(\omega) := \int_\Omega \omega_0(x,u(x))dx + \sum_{i=1}^n < D_i u^j, \omega_{ij}(x,u(x)) > .$$

Abbiamo che se u_k converge forte ad u in $W^{1/2}$, allora G_{u_k} converge debolmente a G_u.

Si ha inoltre che per una $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$ vale la seguente disuguaglianza

$$|G_u(\omega \wedge \theta)| \leq c|u|_{1/2}(1+|u|_{1/2})(\|\varphi\|_\infty + |\varphi|_{1/2}) \tag{1.7}$$

se $\omega = (-1)^{n-i}\varphi(x)\widehat{dx^i}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Vogliamo allora definire le correnti cartesiane di energia $W^{1/2}$ finita

Definizione 8 *Una corrente $T \in \mathcal{D}_n(\Omega \times S^1)$ appartiene a $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ se esiste una funzione $u_T \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$ e una $(n-1)$-corrente intera rettificabile L_T in Ω tali che T si decomponga come $T = G_{u_T} + L_T \times [S^1]$ e $\partial T \llcorner \Omega \times S^1 = 0$. Diremo inoltre che la corrente $T \in cart_\varphi^{1/2}(\widetilde{B}^n \times S^1)$ se $T \in cart^{1/2}(\widetilde{B}^n \times S^1)$ e $(T - G_\varphi)\llcorner(\widetilde{B}^n \setminus \overline{B^n} \times \mathbb{R}^2) = 0$.*

Osserviamo che ogni $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ si decompone in modo unico, infatti la u_T si può ritrovare testando la T sulle forme del tipo $\omega = \varphi(x)y^j dx$,

$$T(\varphi(x)y^j dx) = \int \varphi(x)u_T^j(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e

$$L_T(\varphi) := T - G_{u_T}(\varphi \wedge \theta).$$

Per una corrente $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$, con $T = G_{u_T} + L_T \times [\![S^1]\!]$, definiamo allora la sua energia come

$$\varepsilon_{1/2}(T) := |u|_{1/2}^2 + \pi M(L_T).$$

Come fatto per le funzioni $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$, possiamo definire un'estensione anche per le $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$.

Definizione 9 *Sia $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$, allora l'estensione $\widetilde{T} := Ext(T)$ è la corrente $\widetilde{T} \in \mathcal{D}_{n+1}(\Omega \times [0,1] \times \mathbb{R}^2)$ definita da*

$$\widetilde{T} := (-1)^{n-1}\left(G_{U_T} + L_T \times [\![\overline{B}^2]\!]\right),$$

dove $U_T := Ext(u_T)$.

Osserviamo infine che essendo

$$\partial(L_T \times [\![\overline{B}^2]\!]) = \partial L_T \times [\![\overline{B}^2]\!] + (-1)^{n-1} L_T \times \partial[\![\overline{B}^2]\!],$$

da $\partial L_T \times [\![\overline{B}^2]\!] = 0$ su $\mathcal{D}^n(\Omega \times S^1)$, abbiamo

$$(-1)^{n-1}\partial(L_T \times [\![\overline{B}^2]\!]) = L_T \times [\![S^1]\!] \ \text{ su } \ \mathcal{D}^n(\Omega \times S^1),$$

e quindi il bordo di $\widetilde{T}$ su $\Omega \times \{0\} \times S^1$ è uguale a T. Possiamo inoltre definire l'energia di $\widetilde{T}$ nel modo seguente

$$D(\widetilde{T}) = E_{1/2}(T) := \frac{1}{2}\int_{\Omega \times [0,1]} |DU_T|^2 dx\, dt + \pi M(L_T),$$

in tal modo abbiamo che $\varepsilon_{1/2}(T)$ è equivalente a $D(\widetilde{T})$, essendo $D(U)$ e $|u|_{1/2}$ equivalenti.

Se indichiamo ora con $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ e $\hat{\pi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le proiezioni ortogonali rispettivamente sul primo e sul secondo fattore, e definiamo la corrente $\mathbb{P}(u) \in \mathcal{D}_{n-2}(B^n)$ ponendo

$$\mathbb{P}(u)(\phi) := (-1)^n \partial G_u(\pi^{\#}\phi \wedge \hat{\pi}^{\#}\theta)$$

dove θ è la 1-forma in S^1 e $\phi \in \mathcal{D}^{n-2}(B^n)$, abbiamo che vale il seguente risultato

Proposizione 5 *Sia $u \in W^{1/2}_{\varphi}(\widetilde{B}^n, S^1)$ e $\{u_k\} \subset R^{\infty}_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^n, S^1)$ una successione che converge forte in $W^{1/2}$ a u, allora*

(i) esiste una corrente intera rettificabile $L \in \mathcal{R}_{n-1}(\widetilde{B}^n)$, con spt $L \subset \overline{B}^n$ e $M(L) < \infty$, tale che $\mathbb{P}(u) = \partial L$, in particolare $\mathbb{P}(u)$ è una catena piatta;

(ii) se $L_{u_k,u}$ indica la $(n-1)$-corrente intera rettificabile di massa minima con supporto contenuto in $\overline{B}^n$ tale che

$$\partial L_{u_k,u} = \mathbb{P}(u) - \mathbb{P}(u_k), \tag{1.8}$$

allora $M(L_{u_k,u}) \to 0$;

(iii) se $n = 2$, esistono dei punti $a_i,\ b_i \in \overline{B}^2$ tali che

$$\mathbb{P}(u) = \sum_{i=1}^{\infty}(\delta_{a_i} - \delta_{b_i}), \quad \sum_{i=1}^{\infty}|a_i - b_i| < \infty.$$

Capitolo 2

Chiusura e compattezza

In questo capitolo vogliamo dimostrare il primo risultato importante di questa tesi, ovvero proveremo la compattezza dello spazio $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ e come conseguenza vedremo che successioni di funzioni regolari equilimitate in $W^{1/2}$ hanno limiti in $cart^{1/2}$. Per provare ciò, vedremo prima un risultato sui sollevamenti delle correnti in tale spazio.

2.1 Sollevamenti

In seguito, dato un aperto limitato $\Omega \in \mathbb{R}^n$, indicheremo con q_0 la mappa costante $q_0 : \Omega \to S^1$, $q_0 := (1, 0)$ e con $i : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega \times S^1$ la mappa $(x, t) \to (x, \cos t, \sin t)$. Data $u \in L^1(\Omega)$, la sua corrente sottografico sarà definita come la $(n + 1)$-corrente in $\mathcal{D}_{n+1}(\Omega \times \mathbb{R})$ data da

$$SG_u(\varphi(x,t)dx \wedge dt) := \int_\Omega \int_0^{u(x)} \varphi(x,t)dt \ , \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R}).$$

In questa sezione vedremo che ogni $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ ha un sollevamento ad una corrente in $\Omega \times \mathbb{R}$, ovvero esiste una funzione $r : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $T = G_{q_0} + (-1)^n i_\# \partial SG_r$. In particolare nel caso 1-dimensionale avremo

Proposizione 6 *Sia $T \in cart^{1/2}((a,b) \times S^1)$, allora esiste una funzione $r := v + w,\ v \in W^{1/2}((a,b)),\ w \in BV((a,b))$, tale che*

$$T - G_{q_0} = -i_\# \partial SG_r, \tag{2.1}$$

ovvero

$$e^{ir} = u \ q.o., \quad e \ \ T(\varphi \wedge \theta) = -\int_a^b r\varphi' \, dx,$$

dove θ è la forma angolare su S^1 e $\varphi \in C_0^\infty((a,b))$.

Dimostrazione: Sia $T = G_u + L \times [\![S^1]\!] \in cart^{1/2}((a,b) \times S^1)$. Poiché, da [2], abbiamo che nel caso 1-dimensionale ogni $u \in W^{1/2}((0,1), S^1)$ è il sollevamento di una $v \in W^{1/2}((0,1), \mathbb{R})$, ovvero

$$u = (\cos v, \sin v), \quad v \in W^{1/2}((0,1), \mathbb{R}),$$

e

$$< v', \varphi > = < u^1 {u^2}' - u^2 {u^1}', \varphi > \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((0,1)),$$

o equivalentemente ,

$$e^{iv} = u, \quad \text{e} \quad \int v\varphi' dt = -G_u(\varphi \wedge \theta).$$

Prendendo $\omega(t) := 2\pi \sum_{i=1}^k n_i \chi_{[x_i,b]}(t)$, siccome L può essere scritta nella forma $L = \sum_{i=1}^k n_i \delta_{x_i}$, abbiamo che

$$e^{i\omega} = (1,0), \quad \text{e} \quad \int \omega\varphi' dt = -2\pi L(\varphi);$$

da cui ponendo $r := v + w$, abbiamo

$$e^{ir} = u, \quad \text{e} \quad \int r\varphi' dt = -T(\varphi \wedge \theta).$$

□

Nel caso $n > 1$, non siamo in grado di provare che ogni corrente in $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ha un sollevamento in $W^{1/2} + BV(\Omega)$. Comunque per il nostro scopo ci basterà vedere che possiamo trovare un sollevamento in $L^1(\Omega)$.In particolare proveremo

Proposizione 7 *Sia $q < n/(n-1)$, per ogni $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ esiste una funzione $r \in L^q(\Omega)$ tale che*

$$T = G_{q_0} + (-1)^n i_\# \partial S G_r,$$

ovvero

$$e^{ir} = u \ q.o. \ , \qquad e \qquad T(\omega \wedge \theta) = (-1)^n \int_\Omega r \, div \, \varphi \, dx$$

per ogni $\omega := \sum_{i=1}^n (-1)^{n-1} \varphi_i(x) \widehat{dx}^i \in \mathcal{D}^{n-1}(\Omega)$ con $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Inoltre

$$\|r - r_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq c\varepsilon_{1/2}(T)$$

dove c è una costante assoluta.

Dimostrazione: Poiché Ω è semplicemente connesso, se consideriamo i gruppi di omologia relativa $H_n(\Omega, \partial\Omega)$ e $H_n(\Omega \times S^1, \partial\Omega \times S^1)$ abbiamo che sono entrambi uguali a $\mathbb{R}$ e la proiezione $\pi_\# : H_n(\Omega \times S^1, \partial\Omega \times S^1) \to H_n(\Omega, \partial\Omega)$ è un isomorfismo. Inoltre abbiamo $\pi_\# T = \pi_\# G_{q_o} = [\![\Omega]\!]$, quindi T e G_{q_0} sono cicli omologhi relativi, ne segue quindi che esiste $\Sigma \in D_{n+1}(\Omega \times S^1)$ tale che

$$T - G_{q_0} = (-1)^n \partial\Sigma \quad \text{su } \mathcal{D}^n(\Omega \times S^1).$$

Sia allora R la distribuzione definita da

$$< R, \varphi >:= \Sigma(\varphi\, dx \wedge \theta), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega);$$

se $\omega := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \varphi(x) \widehat{dx^i}$, con $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, abbiamo

$$\begin{aligned} < R, \operatorname{div}\varphi > &= \Sigma(\operatorname{div}\varphi\, dx \wedge \theta) \\ &= \partial\Sigma(\omega \wedge \theta) \\ &= (-1)^n (T - G_{q_0})(\omega \wedge \theta) \\ &= (-1)^n T(\omega \wedge \theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

quindi, essendo $T := G_u + L \times [\![S^1]\!]$, otteniamo

$$| < R, \operatorname{div}\varphi > | \leq c|u|_{1/2}(1 + |u|_{1/2})(\|\varphi\|_\infty + |\varphi|_{1/2}) + 2\pi M(L)\|\varphi\|_\infty;$$

di conseguenza dal teorema di immersione di Sobolev,

$$| < R, \operatorname{div}\varphi > | \leq \left(c|u|_{1/2}(1 + |u|_{1/2}) + 2\pi M(L)\right) |\varphi|_{1,q'},$$

ottenendo così che DR è una distribuzione in $W^{-1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $R \in L^q(\Omega)$ e

$$\|R - R_\Omega\|_q \leq c|u|_{1/2}(1 + |u|_{1/2}) + 2\pi M(L).$$

Per la caratterizzazione delle funzioni in $W^{1/2}(\Omega)$ rispetto alle loro restrizioni e dal caso 1-dimensionale abbiamo che esistono $g_j \in L^2(\Omega_j, W^{1/2})$ tali che $e^{ig_j} = u_T$ q.o. e $D_j g_j = u^1 D_j u^2 - u^2 D_j u^1$. Ovvero se

$$\omega_j := (-1)^{j-1} \varphi(x) \widehat{dx^j}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

si ha

$$\int g_j D_j \varphi\, dx = -G_u((-1)^{n-j} \varphi(x) \widehat{dx^j} \wedge \theta) = (-1)^n G_u(\omega_j \wedge \theta).$$

Quindi da (2.2) otteniamo

$$(-1)^n \int_\Omega (R-g_j)D_j\varphi dx = (T-G_u)(\omega_j \wedge \theta) = L \times [\![S^1]\!](\omega_j \wedge \theta) = 2\pi L(\omega_j).$$

Poichè $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$, L deve essere una corrente intera rettificabile di massa finita. Detti $\Pi_j^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n | x_j = 0\}$ e $x' \in \Pi_j^\perp$ sia $\Pi_{j,x'}$ la retta ortogonale a $\Pi_j^\perp$ passante per x', abbiamo allora che per *q.o.* $x' \in \Pi_j^\perp$ lo slice di L su $\Pi_{j,x'}$ è una corrente 0-dimensionale intera rettificabile di massa finita, ovvero è somma di masse di Dirac che si concentrano su un numero finito di punti sulla linea $\Pi_{j,x'}$. Quindi la funzione

$$k_j(x) := -\int_{-\infty}^{x^j} d(L \llcorner \Pi_{j,x'})$$

è q.o. a valori interi, e $D_j k_j(x) = -d(L \llcorner \Pi_{j,x'})$,

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_\Omega (R-g_j)D_j\varphi\, dx &= 2\pi L((-1)^{j-1}\varphi(x)\widehat{dx^j}) \\ &= 2\pi \int_{\Pi_j^\perp} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, d(L \llcorner \Pi_{j,x'}) \\ &= 2\pi \int_{\Pi_j^\perp} k_j(x) D_j\varphi(x)\, dx',\end{aligned}$$

ed otteniamo dunque

$$D_j(R - g_j - (-1)^n 2\pi k_j) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n,$$

ovvero $R - g_j - (-1)^n 2\pi k_j$ è indipendente da x^j. Per q.o. x e x_0 in Ω abbastanza vicini, se poniamo

$$z_i := (x_0^1, \ldots, x_0^i, x^{i+1}, \ldots, x^n), \quad \phi_j := g_j - (-1)^n 2\pi k_j$$

in modo che $z_0 = x$ e $z_n = x_0$, abbiamo

$$\begin{aligned} R(z_0) - \phi_1(z_0) &= R(z_1) - \phi_1(z_1) \\ R(z_1) - \phi_2(z_1) &= R(z_2) - \phi_2(z_2) \\ &\vdots \\ R(z_{n-1}) - \phi_n(z_{n-1}) &= R(z_n) - \phi_n(z_n) \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$R(x) - \sum_{j=1}^n \phi_j(z_{j-1}) = R(x_0) - \sum_{j=1}^n \phi_j(z_j),$$

e poichè $e^{i\phi_j} = u_T \ \forall j$,

$$\frac{e^{iR(x)}}{u_T(x)} = \frac{e^{iR(x_0)}}{u_T(x_0)}.$$

Poiché Ω semplicemente connesso, otteniamo allora che esiste una costante $c \in [0, 2\pi]$ tale che posto $r := R - c$ abbiamo $e^{ir} = u_T$; quindi per le stime su R otteniamo che $r \in L^q(\Omega)$ e

$$\|r - r_\Omega\|_{L^q} \le c|u_T|_{1/2}(1 + |u_T|_{1/2}) + 2\pi M(L).$$

Ci resta quindi da provare che

$$T = G_q + (-1)^n i_\# \partial S G_r. \tag{2.3}$$

Per fare ciò è sufficiente vedere che tale uguaglianza vale per sia le forme del tipo $\omega = \varphi(x,\theta)\, dx$ che per quelle del tipo $\omega = (-1)^{i-1}\varphi_i(x)\widehat{dx^i} \wedge \theta$. Verifichiamo annanzi tutto che l'uguaglianza è valida per le forme del tipo $\omega = \varphi(x,\theta)dx, \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times S^1)$. Infatti, posto $\widetilde{\varphi}(x,t) := \varphi \circ i(x,t)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
i_\# \partial S G_r(\varphi(x,\theta)dx) &= i_\#(SG_r)((-1)^n \varphi,_\theta dx \wedge \theta) \\
&= (-1)^n \int_\Omega dx \int_0^{r(x)} \varphi,_t(x,s)ds \\
&= (-1)^n \int_\Omega \widetilde{\varphi}(x, r(x)) - \widetilde{\varphi}(x,0)dx \\
&= (-1)^n \int_\Omega \varphi(x, u_T(x)) - \varphi(x, q_0)dx \\
&= (-1)^n (G_u - G_{q_0})(\omega) \\
&= (-1)^n (T - G_{q_0})(\omega).
\end{aligned}$$

L'uguaglianza vale inoltre per le forme del tipo $\omega = (-1)^{i-1}\varphi_i(x)\widehat{dx^i} \wedge \theta$:

$$\begin{aligned}
(T - G_{q_0})(\omega) &= (-1)^n \partial \Sigma(\omega) \\
&= (-1)^n \Sigma(d\omega) \\
&= (-1)^n \int_\Omega r \operatorname{div} \varphi \, dx \\
&= (-1)^n SG_r(\operatorname{div} \widetilde{\varphi} \, dx \wedge dt) \\
&= (-1)^n i_\# \partial (SG_r)(\omega).
\end{aligned}$$

□

Come conseguenza di tale proposizione otteniamo

Teorema 4 *Sia $q < n/(n-1)$ e $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$; allora esiste una successione di mappe regolari $u_k : \Omega \to S^1$ con $\sup_k \|u_k\|_{L^q} < \infty$ tale che $G_{u_k} \rightharpoonup T$ in $\mathcal{D}_n(\Omega \times S^1)$.*

Dimostrazione:Applicando la proposizione precedente abbiamo che esiste una funzione $r \in L^q(\Omega)$ tale che $T - G_{q_0} = (-1)^n i_\# \partial SG_r$; quindi se $\{r_k\}$ è una successione di funzioni regolari con $r_k \to r$ forte in L^1, deduciamo $SG_{r_k} \rightharpoonup SG_r$, e quindi $i_\# \partial SG_{r_k} \rightharpoonup i_\# \partial SG_r$. Prendendo allora $u_k := e^{ir_k}$, abbiamo $(-1)^n i_\# \partial SG_{r_k} = G_{u_k} - G_{q_0}$ da cui ne segue la tesi.

$\square$

2.2 Chiusura e compattezza

Data $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$ definiamo l'estensione di u

$$U := \mathrm{Ext}(u) \in W^{1,2}(\Omega \times I, \mathbb{R}^2),$$

dove $I := [0,1]$ e U è la funzione armonica che minimizza l'integrale di Dirichlet

$$D(U) := \frac{1}{2} \int_{\Omega \times I} |DU(x,t)|^2 \, dx \, dt$$

tra le funzioni che coincidono con u su $\Omega \times \{0\}$, e poniamo

$$\varepsilon_{1/2}(u) := D(\mathrm{Ext}(u)).$$

Abbiamo perciò

$$D(\mathrm{Ext}(u)) \simeq |u|_{1/2}$$

ed inoltre l'immagine di U è contenuta in $\bar{B}^2$. Se $T = G_u + L \times [S^1]$ è in $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$, sostituiamo $\varepsilon_{1/2}(T)$ con l'equivalente

$$E_{1/2}(T) := \frac{1}{2} \int_{\Omega \times I} |DU| dx \, dt + \pi M(L)$$

in modo che

$$E_{1/2}(T) = \mathcal{D}(\widetilde{T}),$$

dove $\widetilde{T} := G_U + L \times [\![B^2]\!] \in \mathcal{D}_{n+1}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{D}(\widetilde{T})$ è l'integrale di Dirichlet di $\widetilde{T}$ e G_U è la corrente indotta dal grafico di U; tale corrente è intera e rettificabile di massa finita ed agisce su $\mathcal{D}^{n+1}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, però in generale il bordo non ha massa finita; comunque abbiamo che vale la seguente

Proposizione 8 *Sia* $u \in W^{1/2}(\Omega \times S^1)$*;* ∂G_U *è una corrente ben definita con supporto in* $\partial(\Omega \times I) \times \mathbb{R}^2$ *e coincide su* $\mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2) \simeq \mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \{0\} \times \mathbb{R}^2)$ *con* $(-1)^{n+1} G_u$*,*

$$G_u = (-1)^{n+1} \partial G_U \quad su \quad \mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2). \tag{2.4}$$

Inoltre si ha

$$T = (-1)^{n+1} \partial(G_U + L \times [\![B^2]\!]) \quad su\ \mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2),$$

se $T = G_u + L \times [\![S^1]\!]$*,* $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$*,* $L \in \mathcal{D}_{n-1}(\Omega)$ *e* $\partial T = 0$*.*

Dimostrazione: Scegliamo una successione $\{u_k\} \subset W^{1/2}(\Omega \times \mathbb{R}^2)$ di mappe regolari, che convergono forte in $W^{1/2}(\Omega \times \mathbb{R}^2)$ a u, così che le estensioni U_k convergano forte all'estensione U di u in $W^{1/2}(\Omega \times I \times \mathbb{R}^2)$. Quindi $G_{u_k} \rightharpoonup G_u$ su $\mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2)$ e $G_{U_k} \rightharpoonup G_U$ su $\mathcal{D}^{n+1}((\Omega \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2)$; perciò $G_{u_k} = (-1)^{n+1} \partial G_{U_k}$ su $\mathcal{D}^n(\Omega \times \mathbb{R}^2)$, e quindi è verificata la (2.4). L'ultima affermazione segue facilmente dal fatto che $(-1)^{n+1} \partial(G_U + L \times [\![B^2]\!]) = G_u + L \times [\![S^1]\!] + (-1)^{n+1} \partial L \times [\![B^2]\!]$.

□

Proposizione 9 *Sia* $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ *con* $\sup_k E_{1/2}(T_k) < \infty$*; a meno di sottosuccessioni le* T_k *convergono debolmente a una corrente* $T \in \mathcal{D}_n(\Omega \times S^1)$*.*

Dimostrazione: Sia $T_k := G_{u_k} + L_k \times [S^1]$. Consideriamo allora le $(n+1)$-correnti in $\mathcal{D}_{n+1}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ date da $\widetilde{T}_k := G_{U_k} + L_k \times [\![B^2]\!]$, esse soddisfano $\sup_k \mathcal{D}(\widetilde{T}_k) < \infty$, quindi a meno di sottosuccessioni $\widetilde{T}_k \rightharpoonup \widetilde{T} \in \mathcal{D}_{n+1}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$. Da ciò $\partial \widetilde{T}_k \rightharpoonup \partial \widetilde{T}$, e di conseguenza

$$T_k \rightharpoonup T := (-1)^{n+1} \partial \widetilde{T} \text{ su } \mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2),$$

e quindi in particolare su $\mathcal{D}^n(\Omega \times S^1)$.

□

Proposizione 10 *Sia* $T := G_u + S \in \mathcal{D}_n(\Omega \times S^1)$ *tale che* $\partial T = 0$*, e* $u \in W^{1/2}(\Omega \times S^1)$ *con* S *completamente verticale, ovvero* $S(\omega) = 0$ *sulle forme* $\omega \in \mathcal{D}^{n,0}(\Omega \times S^1)$*. Definiamo*

$$L(\varphi) := \frac{1}{2\pi} S(\varphi \wedge \theta).$$

Allora abbiamo $S = L \times [\![S^1]\!]$*, e quindi*

$$T = G_u + L \times [\![S^1]\!].$$

Dimostrazione: Prendiamo una successione di mappe regolari $u_k : \Omega \to \mathbb{R}^2$ che converge fortemente in $W^{1/2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ a u. Allora $G_{u_k} \rightharpoonup G_u$ su $\mathcal{D}^{n,1}(\Omega\times\mathbb{R}^2)$ e quindi

$$\partial G_u = 0 \text{ su } \mathcal{D}^{n,0}(\Omega \times \mathbb{R}^2)$$

poiché $\partial G_{u_k} = 0\ \forall k$. Quindi, indicate con (x, y) le coordinate in $\Omega \times \mathbb{R}^2$ con $x \in \Omega$ e $y \in \mathbb{R}^2$, per ogni $\eta \in \mathcal{D}^{n,0}(\Omega \times \mathbb{R}^2)$

$$S(d_y\eta) = S(d\eta) - S(d_x\eta) = S(d\eta) = -G_u(d\eta) = 0.$$

Essendo ogni forma $\omega \in \mathcal{D}^n(\Omega \times S^1)$ decomponibile come

$$\omega = \overline{\omega} \wedge \theta + d_\theta\alpha, \quad \overline{\omega} \in \mathcal{D}^{n-1}(\Omega), \alpha \in \mathcal{D}^{n,0}(\Omega \times S^1),$$

otteniamo

$$S(\omega) = S(\overline{\omega} \wedge \theta) = 2\pi L(\overline{\omega}) = L \times [\![S^1]\!](\overline{\omega} \wedge \theta) = L \times [\![S^1]\!](\omega),$$

dove l'ultima uguaglianza è data dal fatto che $L \times [\![S^1]\!](d_\theta\alpha) = 0$.

$\square$

Proposizione 11 *Sia $\{T_k\}$ una successione in $cart^{1/2}(\Omega\times S^1)$ tale che $T_k \rightharpoonup T$ e si abbia $\sup(T_k) < \infty$; allora T è della forma $T := G_u + L \times [S^1]$ per qualche $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$ e $L \in \mathcal{D}_{n-1}(\Omega)$ con $M(L) < \infty$, inoltre*

$$E_{1/2}(T) \le \liminf_{k\to\infty} E_{1/2}(T_k)$$

Dimostrazione: Sia $T_k = G_{u_k} + L_k \times [\![S^1]\!]$, a meno di passare a sottossuccessioni, possiamo supporre che $\{u_k\}$ converga debolmente in $W^{1/2}$ e fortemente in L^2 a una funzione $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$. Per come sono definite T e G_u, abbiamo che coincidono su $\mathcal{D}^{n,0}(\Omega\times S^1)$, e perciò l' intera successione $\{u_k\}$ converge a u e T è della forma $G_u + S$ con S corrente completamente verticale, ovvero $S = 0$ su $\mathcal{D}^{n,0}(\Omega\times\mathbb{R}^2)$, quindi per la proposizione precedente abbiamo $T = G_u + L\times[\![S^1]\!]$ per qualche $L \in \mathcal{D}_{n-1}(\Omega)$.

Sia allora $\widetilde{T}_k := G_{U_k} + L_k \times [\![B^2]\!] \in \mathcal{D}_{n+1}(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$; per definizione

$$E_{1/2}(T_k) = \mathcal{D}(\widetilde{T}_k) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times I} |DU_k|^2 dxdz + \pi M(L_k),$$

perciò le $\{\widetilde{T}_k\}$ hanno masse equilimitate in $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Ne segue (passando a sottossuccessioni) che $\widetilde{T}_k$ convergono debolmente a una corrente $\widetilde{T} \in \mathcal{D}_{n+1}(\Omega \times (-1, 1) \times \mathbb{R}^2)$ e per la semicontinuità dell' integrale di Dirichlet

$$\mathcal{D}(\widetilde{T}) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{D}(\widetilde{T}_k).$$

Analogamente alle u_k, le U_k convergono debolmente in $W^{1,2}$ e forte in L^2 a qualche U, quindi $\widetilde{T} = G_U + S$ con S completamente verticale, cioè $S = 0$ su $\mathcal{D}^{n+1,1}(\Omega \times (-1,1) \times \mathbb{R}^2)$ e $\operatorname{spt} S \subset \overline{\Omega} \times \{0\} \times \mathbb{R}^2$; quindi abbiamo

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times I} |DU|^2 dxdz + M(S) = \mathcal{D}(\widetilde{T}) < \infty.$$

D'altro lato abbiamo $T_k = (-1)^{n+1}\partial\widetilde{T}_k$ e siccome $\widetilde{T}_k \rightharpoonup G_U + S$,

$$T := G_u + L \times [\![S^1]\!] = (-1)^{n+1}\partial(G_U + S) \quad \text{su } \mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2),$$

quindi dalla Proposizione 8

$$L \times [\![S^1]\!] = (-1)^{n+1}\partial S \quad \text{su} \quad \mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2),$$

in particolare, provando con $\eta \wedge \theta$, $\eta \in \mathcal{D}^{n-1}(\Omega)$, e osservando che $d\eta \wedge \theta \in \mathcal{D}^{n+1,1}(\Omega \times S^1)$ otteniamo

$$2\pi L(\eta) = (-1)^{n+1}S(d\eta \wedge \theta) + 2S(\eta dy^1 \wedge dy^2) = 2S(\eta dy^1 \wedge dy^2)$$

da cui

$$\pi M(L) \leq M(S),$$

quindi $M(L) < \infty$ ed anche

$$\begin{aligned} E_{1/2}(T) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega\times I} |DU|^2 dxdz + \pi M(L) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega\times I} |DU|^2 dxdz + M(S) = \mathcal{D}(\widetilde{T}) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{D}(\widetilde{T}_k) = \liminf_{k\to\infty} E_{1/2}(T_k). \end{aligned}$$

□

Proposizione 12 *Sia $\{T_k\}$ una successione in $cart^{1/2}((a,b) \times S^1)$ con energie equilimitate, $\sup_k E_{1/2}(T_k) < \infty$, e $T_k \rightharpoonup T$. Allora esiste una funzione $r \in W^{1/2} + BV((a,b))$ tale che*

$$T - G_{q_0} = (-1)^n i_\# \partial SG_r \quad su\ \mathcal{D}^n((a,b) \times S^1).$$

Dimostrazione: Dalla Proposizione 6 abbiamo

$$T_k + G_{q_0} = (-1)^n i_\# \partial SG_{r_k} \quad \text{con} \quad \sup_k \|r_k\|_{W^{1/2}+BV} < \infty.$$

Passando a una sottosuccessione, r_k converge debolmente in $W^{1/2} + BV$ e forte in L^1 a una funzione r, ne segue dunque $SG_{r_k} \rightharpoonup SG_r$, da cui otteniamo la tesi.

$\square$

Siamo ora in grado di provare il seguente risultato di compattezza

Teorema 5 (Compattezza) *Sia* $\{T_k\} \subset cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ *una successione con* $\sup_k \varepsilon_{1/2}(T_k) < \infty$. *Passando a una sottossuccessione,* $\{T_k\}$ *converge debolmente in* $\mathcal{D}_n(\Omega \times S^1)$ *a una corrente* $T \in cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$*; inoltre*

$$\varepsilon_{1/2}(T) \leq c \liminf_{k\to\infty} \varepsilon_{1/2}(T_k),$$

dove c *è una costante assoluta.*

Dimostrazione: Dalle proposizioni provate in precedenza sappiamo che $T = G_u + L \times [S^1]$ con $u \in W^{1/2}(\Omega, S^1)$, $L \in \mathcal{D}_{n-1}(\Omega)$ e $M(L) < \infty$. Rimane quindi da provare che L è una $(n-1)$-corrrente rettificabile. Per tale motivo converrà considerare separatamente il caso 1-dimensionale da quello generale.

Caso $n = 1$. Sia $\Omega = (a, b)$, allora per la Proposizione 12 possiamo trovare una $r \in W^{1/2} + BV((a, b))$ e tale che

$$e^{ir} = u \quad \text{e} \quad \int r\varphi' dt = -T(\varphi \wedge \theta).$$

D'altro lato, essendo $n = 1$ esiste $v \in W^{1/2}((a, b))$ tale che

$$e^{iv} = u \quad \text{e} \quad \int v\varphi' dt = -G_u(\varphi \wedge \theta).$$

Abbiamo allora che la funzione $r - v$ è in $W^{1/2} + BV$ a valori interi i cui salti sono multipli di 2π, in particolare dovrà avere un numero finito di salti, $x_1, \dots, x_m$. Considerando i distinti intervalli in $\Omega \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$, dalla disuguaglianza di Poincaré, ricaviamo che $r - v$ è costante in ognuno di tali intervalli, otteniamo perciò che $L = \sum_{j=1}^m n_j \delta_{x_j}$ con $n_j \in \mathbb{Z}$.

Caso generale. Sia P una retta orientata in $\mathbb{R}^n$, $P^\perp$ il $(n-1)$-piano ortogonale a P passante per l'origine e per ogni $x \in P^\perp$, sia P_x la retta parallela a P e passante per x. Se $T = G_u + L \times [\![S^1]\!]$ è in $cart^{1/2}(\Omega \times S^1)$ e $\widetilde{T} := G_U + L \times [\![B^2]\!]$, allora $\widetilde{T}$ è una corrente intera reffificabile con

$$(-1)^{n+1}\partial\widetilde{T} = T \text{ su } \mathcal{D}^{n,1}(\Omega \times \mathbb{R}^2).$$

Quindi per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. x, $\widetilde{T} \llcorner (P_x \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ è anch'essa una corrente intera rettificabile, ed è data da

$$\widetilde{T} \llcorner (P_x \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) = G_{U_{|P_x\times\mathbb{R}}} + (L \llcorner P_x) \times [\![B^2]\!]$$

con $U_{|P_x\times\mathbb{R}} \in W^{1,2}(\Omega\cap P_x,\mathbb{R}^2)$, e la traccia $T(U_{|P_x\times\mathbb{R}}) = u_{|P_x}$. Inoltre $L\llcorner P_x$ è una corrente intera rettificabile di massa finita, ed infine

$$(-1)^{n+1}\partial(\widetilde{T}\llcorner(P_x\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)) = G_{u_{|P_x}} + (L\llcorner P_x)\times[\![S^1]\!] \ \text{su}\mathcal{D}^{n,1}(\Omega\times\mathbb{R}^2)$$

e ciò dimostra che

$$G_{u_{|P_x}} + (L\llcorner P_x)\times[\![S^1]\!] \in cart^{1/2}((\Omega\cap P_x)\times S^1)$$

per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. $x\in P^\perp$.

Se $\{T_k\}\in cart^{1/2}(\Omega\times S^1)$, $T_k \rightharpoonup T := G_u + L\times[S^1]$ con $u\in W^{1/2}$ e $M(L)<\infty$. Ragionando come sopra, abbiamo che per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. t esiste una sottosuccessione di T_k tale che

$$G_{u_{k|P_x}} + (L_k\llcorner P_x)\times[\![S^1]\!] \rightharpoonup G_{u_{|P_x}} + (L\llcorner P_x)\times[\![S^1]\!].$$

Da quanto visto per il caso 1-dimensionale, essendo P_x delle rette, possiamo conludere che $L\llcorner P_x$ è una corrente intera rettificabile per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. x. Ci sarà sufficiente vedere che L è una catena piatta; infatti, dal criterio di rettificabilità di White, tale condizione assieme a $M(L)<\infty$ e alla rettificabilità di $L\llcorner P_x$ per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. $x\in P^\perp$ e per tutte le direzioni di P dà la rettificabilità della corrente L.

Dalla Proposizione 12 abbiamo $T - G_{q_0} := (-1)^n i_\#\partial SG_r$. Essendo SG_r una catena piatta se $r\in L^1$ ne segue che T è una catena piatta. D'altro lato

$$T = (-1)^{n+1}\partial(G_U + L\times[\![B^2]\!]) \text{ su } \mathcal{D}^{n,1}(\Omega\times\mathbb{R}^2).$$

Essendo G_U una corrente intera rettificabile di massa finita, ∂G_U è una catena piatta, di conseguenza

$$L(\varphi) := \frac{1}{2\pi}(T-G_u)(\varphi\wedge\theta)$$

è anch'essa una catena piatta.

□

Possiamo inoltre vedere che vale l'analogo risultato per successioni di funzioni in $W^{1/2}(\Omega,S^1)$

Teorema 6 *Sia $\{u_k\}\subset W^{1/2}(\Omega,S^1)$, $u_k:\Omega\to S^1$, una successione di mappe regolari con $\sup_k\|u_k\|^2_{W^{1/2}}\le K$. A meno di passare a sottossuccessioni si ha*

$$G_{u_k}\rightharpoonup T := G_{u_T} + L_T\times[\![S^1]\!]$$

dove u_T è il limite debole di $\{u_k\}$ in $W^{1/2}$ e L_T è una $(n-1)$-corrente intera rettificabile in Ω. Inoltre

$$\|u_T\|^2_{W^{1/2}} + M(L_T)\le cK$$

Dimostrazione: Per provare tale risultato è sufficiente applicare il teorema precedente alle correnti G_{u_k}.

$\square$

Capitolo 3

Densità: caso 1-dimensionale

Ora proveremo un risultato di densità per correnti in $cart^{1/2}$, in particolare in questo capitolo vedremo che ogni corrente $T \in cart^{1/2}(B^1 \times S^1)$ è limite di una successione di grafici di funzioni regolari.

In seguito indicheremo

$$B_r^+ := \bar{B}_r^2 \cap \mathcal{C}^2, \quad \partial^+ B_r := \partial B_r^2 \cap \{(x,t) \in \mathcal{C}^2 | t > 0\},$$

$$J_r := \partial B_r^+ \setminus \partial^+ B_r = [-r, r] \times \{0\},$$

dove $B_r^2 = \{(x,t)| x^2 + t^2 < r\}$ e $\mathcal{C}^{n+1} := B^n \times [0,1]$; e $\widetilde{B}^n$ indicherà un aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $B^n \subset\subset \widetilde{B}^n$.

Osservazione 1 *Se indichiamo con* $S_\varepsilon^1 := \{y \in \mathbb{R}^2 |\ dist(y, S^1) \leq \varepsilon\}$ *l'*ε*-intorno di* S^1*, allora esiste un* ε_0 *tale che per* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *la mappa* $\Pi_\varepsilon : S_\varepsilon^1 \to S^1$*, dove* $\Pi_\varepsilon(y)$ *è la proiezione di* y *su* S^1*, è ben definita e con costante di Lipschitz* $L_\varepsilon \to 1^+$ *per* $\varepsilon \to 0$*; inoltre abbiamo che* S_ε^1 *è topolocicamente equivalente a* S^1*.*

Proposizione 13 *Sia* $P \in S^1$*, allora esiste una successione di funzioni lipschitziane* $f_\varepsilon : B^+ \to B^2$ *tali che* $f_{\varepsilon|\partial^+ B} \equiv P$*,* $f_\varepsilon(J) \subset S_\varepsilon^1$*,* $f_{\varepsilon\#}[\![B^+]\!] = [\![B^2]\!]$ *e* $f_{\varepsilon\#}[\![J]\!] = [\![S^1]\!]$*, e*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D(f_\varepsilon, B^+) = M([\![B^2]\!]) = \pi.$$

Dimostrazione: Per ogni $\varepsilon > 0$, modificando la mappa identità su B^2, possiamo definire una funzione Lipschitziana $g_\varepsilon : B^2 \to B^2$ tale che $g_{\varepsilon\#}[B^2] = [\![B^2]\!]$, $A(g_\varepsilon, B^2) \leq \pi + \varepsilon$ e g_ε mandi $\partial^+ B$ costantemente nel polo nord $P_N = (0,1) \in S^1$. In seguito, unendo P_N a P in S_ε^1, possiamo modificare g_ε in modo che $\partial^+ B$ venga mandato costantemente nel punto $P \in S^1$ dato, mentre $g_\varepsilon(\partial B^2) \subset S_\varepsilon^1$, e $g_{\varepsilon\#}[\![\partial B^2]\!] = [\![S^1]\!]$. Sia ora $\psi : B^+ \to \bar{B}^2$

un omeomorfismo bilipschitziano che sia l' identità su $\partial^+ B$; quindi, ponendo $\widetilde{f}_\varepsilon := g_\varepsilon \circ \psi : B^+ \to B^2$, abbiamo che $\widetilde{f}_\varepsilon$ è lipschitziana e soddisfa $\widetilde{f}_{\varepsilon|\partial^+ B} \equiv P$, $\widetilde{f}_\varepsilon(J) \subset S^1_\varepsilon$, $\widetilde{f}_{\varepsilon\#}[\![B^+]\!] = [\![B^2]\!]$ e $\widetilde{f}_{\varepsilon\#}[\![J]\!] = [\![S^1]\!]$, ed inoltre

$$A(\widetilde{f}_\varepsilon, B^+) = A(g_\varepsilon, B^2) \leq \pi + \varepsilon.$$

Applicando ora il teorema di ε-conformalità di Morrey e definiamo un diffeomorfismo $\Psi_\varepsilon : B^+ \to B^+$ che conservi l' orientazione e tale che, detta $f_\varepsilon := \widetilde{f}_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon$, si abbia

$$D(f_\varepsilon, B^+) \leq (1+\varepsilon)A(f_\varepsilon, B^+) = (1+\varepsilon)A(\widetilde{f}_\varepsilon, B^+) = (1+\varepsilon)(\pi+\varepsilon).$$

Infine possiamo definire la Ψ_ε in modo che mappi $\partial^+ B$ su $\partial^+ B$ e J su J; da ciò ne segue la tesi.

$\square$

Da questa proposizione ricaviamo il seguente risultato

Proposizione 14 *Sia U una mappa regolare in $W^{1,2}(\mathcal{C}^2, \mathbb{R}^2)$ con traccia $T(U) \in W^{1/2}(B^1, S^1_\varepsilon)$; allora esiste una successione $\{U_k\}$ di mappe regolari da $\mathcal{C}^2$ in $\mathbb{R}^2$, con tracce $u_k := T(U_k) \in W^{1/2}(B^1, S^1_{2\varepsilon})$ per ogni k, ed una successione di raggi $\delta_k \searrow 0$ tale che $U_k = U$ fuori da $B^+_{\delta_k}$ e $G_{U_k} \rightharpoonup G_U + \delta_0 \times [\![B^2]\!]$ debolmente in $\mathcal{D}_2(\mathcal{C}^2 \times \mathbb{R}^2)$ con*

$$\lim_{k\to\infty} D(U_k, \mathcal{C}^2) = D(U, \mathcal{C}^2) + M([\![B^2]\!])$$

Dimostrazione: Se $P := U(0)$, definiamo $U_{k,r} : B^+_r \to B^2$, per $k \in \mathbb{N}$ e $r \in (0,1)$, nel modo seguente

$$U_{k,r}(z) := \begin{cases} U(z) & \text{se} \quad |z| > r \\ v_r(z) & \text{se} \quad r/2 \leq |z| \leq r \qquad z \in \mathcal{C}^2 \\ f_k(2z/r) & \text{se} \quad |z| < r/2 \end{cases}$$

dove f_k è data dalla proposizione precedente con $P = U(0)$, e

$$v_r(z) := \left(\frac{2}{r}|z| - 1\right) \cdot U\left(r\frac{z}{|z|}\right) + \left(2 - \frac{2}{r}|z|\right) \cdot U(0).$$

Poiché $v_r(z) = U(z)$ per $|z| = r$ e $v_r(z) \equiv P$ per $|z| = r/2$, ne segue che $U_{k,r}$ è lipschitziana; inoltre dalla proposizione precedente e con un cambio di variabili otteniamo

$$D(U_{k,r}, B^+_{r/2}) = D(f_k, B^+) \to M([\![B^2]\!])$$

per $k \to \infty$, quindi ci basta verificare che

$$\liminf_{r \to 0^+} D(v_r, B_r^+ \setminus B_{r/2}^+) = 0, \tag{3.1}$$

prendendo $U_k := U_{k,r_k}$ per un' opportuna successione $r_k \searrow 0$. Abbiamo che vale la seguente stima

$$D(v_r, B_r^+ \setminus B_{r/2}^+) \leq c \left(\|U(z) - U(0)\|^2_{\infty, \partial B_r^+} + r \int_{\partial B_r^+} |D_\tau U|^2 d\mathcal{H}^1 \right).$$

dove c è una costante e τ è la direzione tangente a ∂B_r^+. Dalla continuità di $U(z)$ abbiamo $\|U(z) - U(0)\|^2_{\infty, \partial B_r^+} \to 0$ per $r \to 0^+$; in più dalla formula di coarea, posto $F(r) := \int_{\partial B_r^+} |D_\tau U|^2 d\mathcal{H}^1$, otteniamo

$$\int_0^{r_0} F(r) dr \leq \int_{B_{r_0}^+} |DU|^2 dx < +\infty.$$

Come conseguenza di ciò, $\liminf_{r \to 0^+} rF(r) = 0$, e quindi la (3.1) è verificata.

□

Da questa proposizione possiamo ora dimostrare il seguente teorema di densità

Teorema 7 *Data una corrente $T \in cart^{1/2}(B^1 \times S^1)$, allora esiste una successione $\{u_k\}$ di mappe regolari con $u_k : B^1 \to S^1$ e tali che $G_{u_k} \rightharpoonup T$ debolmente in $cart^{1/2}$ e*

$$\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_{1/2}(u_k, B^1) = \varepsilon_{1/2}(T, B^1 \times S^1).$$

Prima di passare alla dimostrazione del teorema premettiamo innanzitutto il seguente risultato di densità su $W^{1/2}(B^1, S^1)$

Teorema 8 *$C^\infty(B^1, S^1)$ è denso in $W^{1/2}(B^1, S^1)$*

Dimostrazione: Sia $u \in W^{1/2}(B^1, S^1)$ e consideriamo $U \in W^{1,2}(\mathcal{C}^2, \mathbb{R}^2)$ tale che $U = T(u)$. Per $h < \frac{1}{2}$, e per $x \in \mathcal{C}^2$ poniamo

$$U_h(x) := \frac{1}{h^2} \int_{\mathcal{C}'^{\,2}(x,h)} U(z)\, dz,$$

dove $\mathcal{C}'^{\,2}(x, h) := \{z \in \mathbb{R}^2 | z = x + y,\ y \in \mathcal{C}'^{\,2}(h)\}$ e $\mathcal{C}'^{\,2}(h) = [-h/2, h/2]^2$. Otteniamo quindi che $U_h \in C^0 \cap W^{1,2}$ e $U_h \to U$ in $W^{1,2}(\mathcal{C}^2, \mathbb{R}^2)$; sia u_h la restrizione di U_h a B^1, abbiamo dunque $u_h \in C^0 \cap W^{1/2}$ e $u_h \to u$ in $W^{1/2}$. Sia $\varepsilon > 0$, e scegliamo h_0 tale che per $h \leq h_0$ si abbia

$$\int_{\mathcal{C}'^{\,2}(x,h)} |DU|^2 \, dz \leq \varepsilon \,, \quad \forall \, x \in \mathcal{C}^2.$$

Possiamo supporre, a meno di traslazioni, che x sia l'origine di $\mathbb{R}^2$. Chiamiamo $P(h,j)$ l'iperpiano ortogonale a e_j e passante per he_j, dove $e_1, \ e_2$ sono i vettori della base ortonormale stardard di $\mathbb{R}^2$. Considerando $P(h,1)$, sia $h_1 \in [-h/2, h/2]$ tale che

$$\frac{1}{h} \int_{\mathcal{C}'^{\,2}(h) \cap P(h_1,1)} |DU|^2 \, dz \leq 2 \int_{\mathcal{C}'^{\,2}(h)} |DU|^2 \, dz \leq 2\varepsilon. \tag{3.2}$$

Dal teorema di immersione di Sobolev otteniamo perciò

$$\max_{x,z \in \mathcal{C}'^{\,2}(h) \cap P(h_1,1)} |U(x) - U(z)| \leq C\varepsilon^{1/2}; \tag{3.3}$$

preso allora $z_0 \in B^1 \cap P(h_1, 1)$, la disuguaglianza precedente ci dà

$$\max_{x \in \mathcal{C}'^{\,2}(h) \cap P(h_1,1)} |U(x) - y_h| \leq C\varepsilon^{1/2},$$

dove $y_h := U(z_0) \in S^1$. Prendiamo ora $\eta > 0$, che determineremo in seguito, e poniamo

$$A_h := \left\{ h' \in [-h/2, h/2] \,|\, \int_{P(h',2)} |DU|^2 dx \leq h^{-1}\eta\varepsilon \right\}$$

$$B_h := [-h/2, h/2] \setminus A_h.$$

Se $h' \in A_h$, dall'immersione di Sobolev abbiamo

$$\max_{x,z \in \mathcal{C}^2(h) \cap P(h',2)} |U(x) - U(z)| \leq C\eta^{1/2}\varepsilon^{1/2}.$$

Preso quindi $z \in P(h_1, 1) \cap P(h', 2)$, e combinando a disuguaglianza precedente con la (3.3), per $h' \in A_h$ otteniamo

$$\max_{x \in P(h',2)} |U(x) - y_h| \leq C(\eta^{1/2} + 1)\varepsilon^{1/2},$$

e quindi

$$\frac{1}{h^2} \int_{h' \in A_h} dh' \int_{P(h',2)} |U(z) - y_h| d\sigma \leq C(\eta^{1/2} + 1)\varepsilon^{1/2} \tag{3.4}$$

D'altro lato, poiché $\int_{h'\in B_h}\int_{P(h',2)}|DU|^2 \leq \varepsilon$, abbiamo che la misura di B_h è minore o uguale a h/η; quindi essendo $|U(Z)| \leq K$ abbiamo

$$\frac{1}{h^2}\int_{h'\in B_h} dh' \int_{P(h',2)} |U(z) - y_h| d\sigma \leq 2K/\eta$$

Da questa disuguaglianza e dalla (3.4) abbiamo

$$\frac{1}{h^2}\int |U(z) - y_h| dz \leq 2K/\eta + C(\eta^{1/2} + 1)\varepsilon^{1/2}.$$

Scegliamo quindi η e ε in modo che $2K/\eta \leq \theta/2$ e $C(\eta^{1/2} + 1)\varepsilon^{1/2} \leq \theta/2$; otteniamo perciò, per $x_0 \in B^1$

$$|u_h(x_0) - y_h| = |U_h(x_0) - y_h| \leq \theta.$$

Poiché $y_h \in S^1$, $u_h(x_0) \in S^1_\theta$; definendo ora $\widetilde{u}_h = \pi \circ u_h$, dove $\pi : S^1_\theta \to S^1$ è la proiezione, otteniamo chiaramente che $\widetilde{u}_h \in C^\infty(B^1, S^1) \cap W^{1/2}$ e $\widetilde{u}_h \to u$ in $W^{1/2}(B^1, S^1)$.

□

Dimostrazione del teorema 7: Essendo le u_k definite su B^1, come fatto nel teorema 8, possiamo trovare una successione $U_k : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $U_k \to Ext(u)$ in $W^{1,2}(\mathcal{C}^2, \mathbb{R}^2)$ ed inoltre possiamo prendere la successione in modo che esista $t_0 > 0$ tale che $U_k(B^1 \times [0, t_0]) \subset S^1_{\varepsilon_0}$ per ogni k. In particolare avremo che le tracce $u_k := T(U_k) \in W^{1/2}(B^1, S^1_{\varepsilon_0})$ e $u_k \to u$ in $W^{1/2}(B^1, S^1_{\varepsilon_0})$.

Considerando ora i semidischi $x_i + B^+_{r_{k,h}}$ attorno a x_i e contenuti in $\mathcal{C}^2$, applichiamo la proposizione 14 ad ogni U_k e troviamo una successione $\{U_{k,h}\}_h$ da $\mathcal{C}^2$ in $\mathbb{R}^2$, le cui tracce $u_{k,h} := T(U_{k,h}) \in W^{1/2}(B^1, S^1_{\varepsilon_0})$ per ogni h, ed una successione di raggi $r_{k,h} \searrow 0$ per $h \to +\infty$ tale che $U_{k,h} = U_k$ fuori da $x_i + B^+_{r_{k,h}}$,

$$G_{U_{k,h}} \rightharpoonup G_{U_k} + \sum_{i=1}^{i_0} \delta_i \times [\![B^2]\!]$$

debolmente in $\mathcal{D}_2(\mathcal{C}^2 \times \mathbb{R}^2)$ e

$$\lim_{h\to+\infty} D(U_{k,h}, \mathcal{C}^2) = D(U_k, \mathcal{C}^2) + \sum_{i=1}^{i_0} M([\![B^2]\!]).$$

Con un procedimento diagonale troviamo quindi una successione $\{V_k\} \subset C^1(\mathcal{C}^2, \mathbb{R}^2)$, con $v_k := T(V_k) \in W^{1/2}(B^1, S^1_{\varepsilon_0})$ e tale che $G_{V_k} \rightharpoonup \tilde{T}$ debolmente in $\mathcal{D}_2(\mathcal{C}^2 \times \mathbb{R}^2)$ e $D(V_k, \mathcal{C}^2) \to D(\tilde{T})$ per $k \to +\infty$. Ponendo quindi $u_k := \Pi \circ v_k$, otteniamo la tesi.

$\square$

Da questo teorema segue facilmente il seguente

Corollario 1 *Per ogni* $T \in cart_{\varphi}^{1/2}(\widetilde{B}^1 \times S^1)$ *esiste una successione di mappe regolari* $\{u_k\} \subset C_{\varphi}^{\infty}(\widetilde{B}^1, S^1)$ *tale che* $G_{u_k} \rightharpoonup T$ *debolmente in* $cart^{1/2}(\widetilde{B}^1 \times S^1)$ *e* $\varepsilon_{1/2}(u_k, \widetilde{B}^1) \rightarrow \varepsilon_{1/2}(T, \widetilde{B}^1 \times S^1)$.

Dimostrazione: Essendo u regolare su $\widetilde{B}^1 \setminus B^1$, possiamo definire la successione $U_k : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ in modo tale che $(G_{u_k} - G_{\varphi}) \llcorner (\widetilde{B}^1 \setminus B^1) \times \mathbb{R}^2 = 0$ per ogni k. Inoltre poiché in $T = G_{u_T} + \sum_{i=1}^{i_0} \delta_{x_i} \times [\![S^1]\!]$ i punti x_i possono essere presi distanti dal bordo di B^1, possiamo applicare la proposizione 14 prendendo i raggi $r_{k,h}$ sufficientemente piccoli in modo che $U_{k,h}$ coincida con U_k in un intorno di $\partial B^1 \times I$, e da ciò deriva la tesi.

$\square$

Capitolo 4

Densità: caso 2-dimensionale

In questo capitolo vedremo che il risultato di densità per le correnti in $cart^{1/2}$ è valido anche nel caso 2 dimensionale.

4.1 Dipoli

Prima di dimostrare la densità nel caso 2-dimensionale è necessario introdurre i dipoli. Dati due punti, $a_+,\ a_- \in B^2 \times \{0\}$, e sia $L \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}^3)$ la corrente integrazione lungo il segmento che unisce a_- con a_+, orientata in modo che $\partial L = \delta_{a_+} - \delta_{a_-}$ e con $M(L) = l := |a_+ - a_-| \in (0, 1)$, tale corrente costituisce un dipolo. Il nostro sccopo è quindi quello di approssimare un dipolo con mappe regolari.

Sia $0 < \delta < 1$ e $0 < m \ll 1$, poniamo

$$\varphi_\delta^m(y) := \min\{my, m(l-y), \delta\}, \quad 0 \le y \le l;$$

consideriamo la funzione $\phi_\delta^m : (0, l) \times B^+ \to \mathcal{C}^3$ definita nel seguente modo

$$\phi_\delta^m(x_1, x_2, t) := (x_1, \varphi_\delta^m(x_1)x_2, \varphi_\delta^m(x_1)t),$$

e sia

$$\Omega_\delta^m := \phi_\delta^m((0, l) \times B^+).$$

Vale quindi il seguente lemma:

Lemma 1 *Sia $V : (0, l) \times B^+ \to \mathbb{R}^2$ una funzione in $W^{1,2}$, e sia*

$$V_\delta^m(z) := V \circ (\phi_\delta^m)^{-1}(z), \quad z \in \Omega_\delta^m.$$

Allora esiste una costante assoluta $c > 0$ tale che

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_\delta^m} |DV_\delta^m|^2 dz &\leq \int\limits_{(0,l)\times B^+} |D_{(x_2,t)}V|^2 dz + c\delta^2 \int\limits_{(0,l)\times B^+} |D_{x_1}V|^2 dz \\ &+ cm^2 \int\limits_{((0,\delta/m)\cup(l-\delta/m,l))\times B^+} |D_{(x_2,t)}V|^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dimostrazione: Per come è definita V_δ^m abbiamo

$$\int\limits_{\Omega_\delta^m} |DV_\delta^m|^2\, dz = \int\limits_{(0,l)\times B^+} |DV(z)D(\phi_\delta^m)^{-1}(\phi_\delta^m(z))|^2 |\det D\phi_\delta^m(z)| dz.$$

Da un semplice calcolo abbiamo $|\det D\phi_\delta^m(z)| = (\varphi_\delta^m)^2$, inoltre calcolando $DV(z)D(\phi_\delta^m)^{-1}(\phi_\delta^m(z))$ otteniamo la seguente stima che ci dà la tesi:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_\delta^m} |DV_\delta^m|^2\, dz \leq & \int_{(0,l)\times B^+} |D_{(x_2,t)}V|^2\, dx + c \int_{(0,l)\times B^+} |D_{x_1}V|^2 |\varphi_\delta^m|^2\, dx \\ & + c \int_{(0,l)\times B^+} |z|^2 |D_{(x_2,t)}V| |(\varphi_\delta^m)'|^2 dz \\ \leq & \int_{(0,l)\times B^+} |D_{(x_2,t)}V|^2\, dx + c\delta^2 \int_{(0,l)\times B^+} |D_{x_1}V|^2 \\ & + cm^2 \int_{((0,\delta/m)\cup(l-\delta/m,l))\times B^+} |D_{(x_2,t)}V|^2. \end{aligned}$$

□

Sia ora $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, indichiamo allora con $q[\![S^1]\!]$ e $q[\![B^2]\!]$ le correnti integrazione su S^1 e B^2 rispettivamente, con molteplicità $|q|$ e orientazione indotta dal segno di q. Inoltre, riadattando la dimostrazione della proposizione 13 otteniamo la seguente

Proposizione 15 *Per ongi $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $P \in S^1$ e $\varepsilon > 0$, esiste una successione di funzioni lipshitziane $f_\varepsilon^P : B^+ \to B^2$ tali che $f^p_{\varepsilon|\partial^+ B} \equiv P$, $f_\varepsilon^P(J) \subset S^1$, $f^P_{\varepsilon\#}[\![B^+]\!] = q[\![B^2]\!]$, $f^p_{\varepsilon\#}[\![J]\!] = q[\![S^1]\!]$, e*

$$D(f_\varepsilon^P, B^+) \leq |q|\pi + \varepsilon.$$

Inoltre possiamo definire le f_ε^P in modo tale che per ogni $\sigma > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che per ogni $P_1, P_2 \in S^1$ tali che $|P_1 - P_2| < \eta$ allora $\|f_\varepsilon^{P_1} - f_\varepsilon^{P_2}\|_\infty < \sigma$.

Dimostrazione: Per provare questa proposizione è sufficiente considerare la mappa in variabili complesse su B^2 data da

$$z = \rho\, e^{i\theta} \mapsto \rho^{|q|} e^{iq\theta}, \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

e modificandola leggermnete possiamo definire una funzione lipschitziana g_ε^P tale che $g^P_{\varepsilon\#}[B^2] = q\,[B^2]$, $A(g_\varepsilon^P, B^2) \leq |q|\pi + \varepsilon$ e tale che mandi $\partial^+ B$ sul punto dato $P \in S^1$. Procedendo quindi come fatto nella dimostrazione della proposizione 13 proviamo la prima parte. Per quanto riguarda la seconda parte essa deriva dal fatto che g_ε^P possiamo definirle facendo sì che dipendano in modo continuo rispetto al punto P.

$\square$

Proposizione 16 *Sia $U : \widetilde{\mathcal{C}}^3 \to B^2$ una funzione in $W^{1,2}$, che sia regolare all' interno di $\Omega_{\delta_0}^{m_0}$, per qualche m_0, $\delta_0 > 0$, e tale che $u := T(U) \in W_\varphi^{1/2}(\widetilde{B}^2, S^1)$, e sia $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \delta_0$ e $0 < m < m_0$ esiste una mappa $U_\varepsilon : \widetilde{\mathcal{C}}^3 \to B^2$ con traccia $T(U_\varepsilon) \in W_\varphi^{1/2}(B^2, S^1)$ e che sia regolare sulla chiusura di Ω_δ^m, eccetto che sui punti $(l, 0, 0)$ e $0_{\mathbb{R}^3}$ (i punti di bordo del dipolo); inoltre $G_{U_\varepsilon} \rightharpoonup G_U + [\![(0,l)]\!] \times q[\![B^2]\!]$ in $\mathcal{D}_3(\widetilde{\mathcal{C}}^3 \times \mathbb{R}^2)$ per $\varepsilon \to 0$ e*

$$D(U_\varepsilon, \widetilde{\mathcal{C}}^3) \leq D(U, \widetilde{\mathcal{C}}^3) + l \cdot |q|\pi + \varepsilon$$

Dimostrazione: Poiché U è regolare nell'interno di $\Omega_{\delta_0}^{m_0}$, senza perdità di generalità possiamo supporre che l'oscillazione di U sia minore di ε su $\Omega_{\delta_0}^{m_0}$. Prendendo delle palle di raggio r attorno ai punti $a_+ := (l, 0, 0)$ e $a_- := 0_{\mathbb{R}^3}$, possiamo sostituire in tali palle U con le mappe radiali

$$U_r(z) := U\left(a_\pm + r\frac{z - a_\pm}{|z - a_\pm|}\right) \tag{4.2}$$

in modo che

$$D(U, B_r^3(a_\pm) \cap \mathcal{C}^3) = \frac{r}{2} \int\limits_{\partial B_r^3(a_\pm) \cap \mathcal{C}^3} |D_\tau U|^2 d\mathcal{H}^2 = O(r)$$

dove τ è un sistema ortonormale di $\partial B_r^3(a_\pm)$ e $O(r_j) \to 0$ per $r_j \searrow 0$.

Introducendo ora le coordinate cilindriche

$$z = (x_1, x_2, t) = F(\rho, \theta, x_1) := (x_1, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \quad \rho > 0, \quad \theta \in [0, \pi]$$

così che $\rho = \sqrt{x_2^2 + t^2}$; indicheremo in seguito

$$\hat{V}(\rho, \theta, x_1) := V(F(\rho, \theta, x_1)).$$

Essendo U regolare, possiamo scegliere m in modo che

$$\int_{K^m_{a_\pm}} |DU|^2 d\mathcal{H}^2 < \infty \tag{4.3}$$

dove $K^m_{a_\pm}$ è il cono di vertice $a_\pm$ ed angolo $\arctan m$

$$K^m_{a_\pm} := \left\{ z = F(\rho, \theta, y) \in \mathcal{C}^3 : 0 < \rho = m|y - a_\pm| \right\}.$$

Definiamo quindi $W_\varepsilon : (0, l) \times B^+ \to \mathbb{R}^2$ tramite

$$W_\varepsilon(x_1, x_2, t) := f_\varepsilon^{P(x_1)}(x_2, t),$$

dove $f_\varepsilon^{P(x_1)}$ è data dalla proposizione precedente in corrispondenza del punto $P(x_1) := U(x_1, 0, 0)$. Ponendo allora

$$\Phi_\varepsilon(z) := W_\varepsilon \circ (\phi^m_\delta)^{-1}(z), \quad z \in \Omega^m_\delta,$$

dal lemma 1 abbiamo la seguente stima

$$D(\Phi_\varepsilon, \Omega^m_\delta) \leq \int_{(0,\, l)} D(f_\varepsilon^{P(x_1)}, B^+) d\mathcal{H}^1(x_1) + \varepsilon \leq l \cdot (|q|\pi + \varepsilon) + \varepsilon$$

a patto di prendere δ sufficientemente piccolo. Definiamo quindi $V_\varepsilon : \Omega^m_\delta \to \mathbb{R}^2$ nel seguente modo

$$\hat{V}_\varepsilon(\rho, \theta, x_1) := \begin{cases} \hat{\Phi}_\varepsilon(2\rho, \theta, x_1) & \text{se} \quad 0 \leq \rho < \varphi^m_\delta(x_1)/2 \\ \hat{\Psi}^m_\delta(\rho, \theta, x_1) & \text{se} \quad \varphi^m_\delta(x_1)/2 \leq \rho \leq \varphi^m_\delta(x_1), \end{cases}$$

dove $\theta \in [0, \pi]$, $x_1 \in (0,\, l)$ e

$$\hat{\Psi}^m_\delta(\rho, \theta, x_1) := \left(\frac{2\rho}{\varphi^m_\delta(x_1)} - 1 \right) \cdot \hat{U}(\varphi^m_\delta(x_1), \theta, x_1) + \left(2 - \frac{2\rho}{\varphi^m_\delta(x_1)} \right) \cdot \hat{U}(0, \theta, x_1),$$

in modo che $\hat{\Psi}^m_\delta(\varphi^m_\delta(x_1), \theta, x_1) = \hat{U}(\varphi^m_\delta(x_1), \theta, x_1)$ e, poiché $\hat{U}(0, \theta, x_1) = U(x_1, 0, 0) = P(x_1)$, $\hat{\Psi}^m_\delta(\varphi^m_\delta(x_1)/2, \theta, x_1) = \hat{\Phi}_\varepsilon(\varphi^m_\delta(x_1), \theta, x_1)$. Abbiamo perciò

$$D(V_\varepsilon, \{0 \leq \rho < \varphi^{m,i}_\delta/2, \theta \in [0, \pi], x_1 \in (0,\, l)\}) = D(\Phi_\varepsilon, \Omega^m_\delta).$$

Se $\delta/m < x_1 < l - \delta/m$, allora $\varphi^m_\delta(x_1) \equiv \delta$ e poiché abbiamo supposto che l'oscillazione di U fosse minore di ε, abbiamo la seguente stima

$$D(V_\varepsilon, \{\rho \in (\varphi^m_\delta(x_1)/2, \varphi^m_\delta(x_1)), x_1 \in (\delta/m, l - \delta/m), \theta \in [0, \pi]\}) \leq$$
$$\leq 4l\varepsilon^2 + c\delta \int_{(0,\, l) \times \partial B^2_\delta} |DU|^2 d\mathcal{H}^2.$$

Se $l - \delta/m < x_1 < l$, allora $\varphi_\delta^m(x_1) = m(l - x_1)$, ed essendo $m \in (0,1)$ abbiamo

$$D(V_\varepsilon, \{\rho \in (\varphi_\delta^m(x_1)/2, \varphi_\delta^m(x_1)), x_1 \in (l - \delta/m, l), \theta \in [0,\pi]\}) \leq$$
$$\leq c \left(\frac{\delta}{m}\varepsilon^2 + m \int_{K_{a_\pm}^m \cap B^3_{r_{\delta,m}}(a_\pm)} |DU|^2 d\mathcal{H}^2 \right),$$

dove $r_{\delta,m} := \delta\sqrt{1+m^2}/m$; inoltre una stima analoga si ha per $0 < x_1 < \delta/m$. Otteniamo quindi

$$D(V_\varepsilon, \{\varphi_\delta^m(x_1)/2 \leq \rho < \varphi_\delta^m(x_1), \theta \in [0,\pi], x_1 \in (0,\, l)\}) \leq$$
$$c(\frac{\delta}{m}\varepsilon^2 + l\varepsilon^2 + \delta \int\limits_{(0,l)\times\partial B_\delta^+} |DU|^2 d\mathcal{H}^2 + m \int\limits_{K_{a_\pm}^m \cap B^3_{r_{\delta,m}}(a_\pm)} |DU|^2 d\mathcal{H}^2).$$

Ora, detto $\Phi(\rho) := \int_{(0,l)\times\partial B_\rho^+} |DU|^2 d\mathcal{H}^2$, da $\int_0^1 \Phi(\rho) d\rho < \infty$ ricaviamo $\liminf_{\rho\to 0^+} \rho\,\Phi(\rho) = 0$; scegliendo prima m sufficientemente piccolo, ed in seguito $\delta = \delta(V_\varepsilon, \varepsilon, m)$, da (4.3) otteniamo

$$c(\frac{\delta}{m}\varepsilon^2 + l\varepsilon^2 + \delta \int\limits_{(0,l)\times\partial B_\delta^+} |DU|^2 d\mathcal{H}^2 + m \int\limits_{K_{a_\pm}^m \cap B^3_{r_{\delta,m}}(a_\pm)} |DU|^2 d\mathcal{H}^2) \ll \varepsilon,$$

e quindi

$$D(V_\varepsilon, \Omega_\delta^m) \leq l \cdot (|q|\pi + \varepsilon) + 2\varepsilon.$$

Infine ponendo $U_\varepsilon \equiv U$ su $\widetilde{\mathcal{C}}^3 \setminus \Omega_\delta^m$, e $U_\varepsilon := \Pi_\varepsilon \circ V_\varepsilon$ su Ω_δ^m, otteniamo la tesi.

$\square$

4.2 Densità in B^2

Per provare il risultato di densità dobbiamo prima vedere come rimuovere i punti di singolarità omologicamente banali.

Proposizione 17 (Rimozione punti singolarità) *Sia $\varphi \in C^\infty(B^2, S^1)$ e $u \in R^\infty_\varphi(B^2, S^1)$ in $cart^{1/2}(B^2, S^1)$; allora esiste una successione di funzioni $u_k \subset C^\infty(B^2, S^1)$ che converge forte in $W^{1/2}$ a u.*

Dimostrazione: Poiché si tratta di un argomento locale, potremo assumere che u abbia un solo punto di singolarità nell' origine, ossia $u \in C^\infty(B^2 \setminus \{0\}, S^1)$. Per $0 < r < 1$ poniamo

$Q_r := B^3_r \cap \mathcal{C}^3$, $\partial^+ Q_r := \partial B^3_r \cap \{z = (x,t) \in \mathcal{C}^3 | t > 0\}$, $F_r := Q_r \cap (B^2 \times \{0\})$, e sia $U \in W^{1,2}(\mathcal{C}^3, \mathbb{R}^2)$ l' estensione di u. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, sia $0 < R = R(\varepsilon) \ll 1$ tale che

$$D(U, Q_R) \leq \varepsilon.$$

Essendo

$$D(U, Q_R \setminus Q_{R/2}) = \frac{1}{2} \int_{R/2}^{R} dr \int_{\partial^+ Q_r} |DU|^2 \, d\mathcal{H}^2,$$

esiste $r = r_\varepsilon \in [R/2, R]$ tale che

$$D(U, \partial^+ Q_r) := \frac{1}{2} \int_{\partial^+ Q_r} |DU|^2 \, d\mathcal{H}^2 \leq \frac{4}{R} D(U, Q_R \setminus Q_{R/2}) \leq \frac{4\varepsilon}{R}. \qquad (4.4)$$

Al fine di rimuovere la singolarità di u, è sufficiente vedere che

$$\{w \in W^{1/2}(B_r^2, \mathbb{R}^2) \cap C^0(\overline{B}_r^2, S^1) \,|\, w_{|\partial B_r^2} = u_{|\partial B_r^2}\} \neq \emptyset,$$

ovvero $u_{|\partial B_r^2}$ è omotopa a una funzione costante in S^1; quindi basterà verificare che per ogni 1-forma chiusa ω in S^1 abbiamo $d\, u_{|\partial B_r^2}{}^{\#}\omega = 0$. Ciò segue dal fatto che $u \in cart^{1/2}(B^2, S^1)$, infatti

$$\int_{\partial B_r^2} u_{|\partial B_r^2}{}^{\#}\omega = G_{u_{|\partial B_r^2}}(\widehat{\pi}^{\#}\omega) = \partial G_{u_{|B_r^2}}(\widehat{\pi}^{\#}\omega) = G_{u_{|B_r^2}}(\widehat{\pi}^{\#} d\omega) = 0.$$

Come conseguenza abbiamo che esiste un' estensione regolare $u_r : B_r^2 \to S^1$ di $u_{|\partial B_r^2}$ con $W^{1/2}$-energia finita.

Sia ora $V_r : Q_r \to \mathbb{R}^2$ una soluzione del problema di Dirichlet su Q_r con le seguenti condizioni al bordo

$$\begin{cases} V_r = U & \text{su } \partial^+ Q_r \\ V_r = u_r & \text{su } F_r. \end{cases}$$

Sia inoltre $0 < \delta < r$, definiamo quindi $U_r : \mathcal{C}^3 \to \mathbb{R}^2$ come segue

$$U_r(z) := \begin{cases} V_r\left(\frac{r}{\delta} z\right) & \text{se } |z| \leq \delta \\ U\left(r \frac{z}{|z|}\right) & \text{se } \delta \leq |z| \leq r \\ U(z) & \text{se } |z| \geq r \end{cases}$$

cosicché $U_r \in W^{1,2}(\mathcal{C}^3, \mathbb{R}^2)$ è continua e la traccia $T(U_r) \in W^{1/2}(B^2, S^1)$. Abbiamo perciò la seguente stima

$$D(U_r, \mathcal{C}^3) \leq D(U, \mathcal{C}^3) + c\, r D(U, \partial^+ Q_r) + \frac{\delta}{r} D(V_r, Q_r)$$

dove $c > 0$ è una costante assoluta; quindi da (4.4), ed essendo $r < R$,

$$D(U_r, \mathcal{C}^3) \leq D(U, \mathcal{C}^3) + 4\, c\, \varepsilon + \frac{\delta}{r} D(V_r, Q_r) \leq D(U, \mathcal{C}^3) + (4c + 1)\varepsilon,$$

prendendo $\delta = \delta(\varepsilon)$ sufficientemente piccolo. Considerando ora il limite $\varepsilon \to 0$ deduciamo che $U_{r_\varepsilon} \to U$ in $W^{1,2}(\mathcal{C}^3, \mathbb{R}^2)$ e quindi $T(U_{r_\varepsilon}) \to u$ in $W^{1/2}(B^2, S^1)$, con $T(U_{r_\varepsilon}) \in W^{1/2}(B^2, S^1)$ continue. Con un metodo standard, possiamo ora approssimare $T(U_{r_\varepsilon})$ con funzioni regolari ed ottenere così la tesi.

□

Proposizione 18 *Sia $n \geq 2$ e $T \in cart^{1/2}(B^n \times S^1)$, rispettivamente $T \in cart^{1/2}_\varphi(\widetilde{B}^n \times S^1)$; Allora esiste una successione $\{u_k\}$ in $R^\infty_{1/2}(B^n, S^1)$, rispettivamente in $R^\infty_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^n, S^1)$, che converge a u_T in $W^{1/2}$, tale che, se L_{u_k,u_T} è data da (1.8), allora*

$$T_k := G_{u_k} + ((-1)^n L_{u_k,u_T} + \mathbb{L}(T)) \times [\![S^1]\!]$$

appartiane a $cart^{1/2}(B^n \times S^1)$, rispettivamente a $cart^{1/2}_\varphi(\widetilde{B}^n \times S^1)$, le masse $M(\partial((-1)^n L_{u_k,u_T} + \mathbb{L}(T)))$ sono finite per ogni k, $T_k \rightharpoonup T$ e $\varepsilon_{1/2}(T_k) \to \varepsilon_{1/2}(T)$.

Dimostrazione: Possiamo supporre innanzitutto $T \in cart^{1/2}_\varphi$. Dalla decomposizione di $T := G_{u_T} + \mathbb{L} \times [\![S^1]\!]$ e da $\partial T = 0$ su $\mathcal{D}^{n-1}(\widetilde{B}^n \times S^1)$ abbiamo

$$\partial\mathbb{L}(T) = (-1)^{n-1}\mathbb{P}(u_T).$$

Quindi dalla proposizione 5 otteniamo

$$\partial((-1)^n L_{u_k,u_T} + \mathbb{L}(T)) = (-1)^{n-1}\mathbb{P}(u_k),$$

che è una $(n-2)$-corrente intera rettificabile, somma di masse di Dirac nel caso 2-dimensionale; inoltre

$$\partial G_{u_k} = (-1)^n \mathbb{P}(u_k) \times [\![S^1]\!] \quad \text{su} \quad \mathcal{D}^{n-1}(\widetilde{B}^n \times S^1),$$

da cui $T_k \in cart^{2,1}_\varphi(\widetilde{B}^n \times S^1)$, e $T_k \rightharpoonup T$. Quindi scrivendo

$$T_k = G_{u_k} + \mathbb{L}(T_k) \times [\![S^1]\!], \;\; \mathbb{L}(T_k) = (-1)^n L_{u_k,u_T} + \mathbb{L}(T)$$

abbiamo $M(\mathbb{L}(T_k) - \mathbb{L}(T)) = M(L_{u_k,u_T}) \to 0$, e perciò $\varepsilon_{1/2}(T_k) \to \varepsilon_{1/2}(T)$

$\square$

Possiamo ora dimostrare il seguente risultato di densità

Teorema 9 *Sia* $\varphi : \widetilde{B}^2 \to S^1$ *una funzione regolare in* $W^{1/2}$*; per ogni* $T \in cart^{1/2}(B^2 \times S^1)$*, rispettivamente* $T \in cart^{1/2}_{\varphi}(\widetilde{B}^2 \times S^1)$*, esiste una successione* $\{u_k\}$ *di mappe in* $C^\infty(B^2, S^1)$*, rispettivamente in* $C^\infty_\varphi(\widetilde{B}^2, S^1)$*, tale che* $G_{u_k} \rightharpoonup T$ *debolmente in* $cart^{1/2}$ *e*

$$\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_{1/2}(u_k) = \varepsilon_{1/2}(T)$$

Dimostrazione: Possiamo supporre $T \in cart^{1/2}_\varphi(B^2 \times S^1)$, allora T si decompone come

$$T = G_{u_T} + \mathbb{L}(T) \times [\![S^1]\!]$$

con $u_T \in W^{1/2}_\varphi(\widetilde{B}^2, S^1)$ e $\mathbb{L}(T) \in \mathcal{R}_1(\widetilde{B}^2)$, con $\mathrm{spt}\mathbb{L}(T) \subset \bar{B}^2$. Quindi dalla proposizione precedente possiamo supporre

$$T = G_{u_T} + \sum_{q \in \mathbb{Z}} \mathbb{L}_q \times q[\![S^1]\!], \quad \widetilde{T} := Ext(T) = (-1)^{n-1}(G_{U_T} + \sum_{q \in \mathbb{Z}} \mathbb{L}_q \times q[\![S^1]\!]),$$

dove $U_T := Ext(u_T)$, $\mathbb{L}_q$ sono 1-correnti intere rettificabilidi molteplicità 1, con supporti disgiunti contenuti in $\bar{B}^2$, massa del bordo finita, $\sum_q M(\partial \mathbb{L}_q) < \infty$.

Poiché i supporti delle correnti $\mathbb{L}_q$ sono disgiunti, possiamo applicare il teorema di approssimazione di Federer, trovando così per ogni $q \in \mathbb{Z}$ una 1-catena poliedrale P^ε_q il cui supporto è contenuto in un intorno di raggio $c\varepsilon$ del supporto di $\mathbb{L}_q$, e una funzione $U_\varepsilon \in C^\infty(\widetilde{\mathcal{C}}^3, B^2)$, con traccia $u_\varepsilon := T(U_\varepsilon) \in R^\infty_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^2, S^1)$, tale che detta

$$\widetilde{T}_\varepsilon := G_{U_\varepsilon} + \sum_{q \in \mathbb{Z}} P^\varepsilon_q \times q[\![B^2]\!],$$

$\widetilde{T}_\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{T}$ debolmente in $\mathcal{D}_3(\widetilde{\mathcal{C}}^3 \times \mathbb{R}^2)$ e

$$D(U_\varepsilon, \widetilde{\mathcal{C}}^3) + \sum_{q \in \mathbb{Z}} q\pi M(P^\varepsilon_q) \to D(U_T, \widetilde{\mathcal{C}}^3) + \sum_{q \in \mathbb{Z}} q\pi M(\mathbb{L}_q),$$

da cui $D(\widetilde{T}_\varepsilon) \to D(\widetilde{T})$. Inoltre, poiché i supporti delle $\mathbb{L}_q$ erano disgiunti possiamo prendere P^ε_q in modo che per $\varepsilon > 0$ piccolo abbiano anch'esse supporti disgiunti.

Per quanto visto possiamo quindi supporre

$$T := G_{u_T} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} P_q \times q[\![S^1]\!] \tag{4.5}$$

dove P_q sono 1-catene poliedrali con supporti disgiunti e spt$P_q \subset \bar{B}^2$, e $u_T \in R^\infty_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^2, S^1)$ è localmente lipschitziana su $\widetilde{B}^2 \setminus \bigcup_q \text{spt}\partial P_q$. Inoltre, dividendo i segmenti delle catene P_q, si può supporre che ognuna sia un'unione finita di segmenti S_i che si intersecano solo nei punti di bordo.

Se S_i è uno dei segmenti di P_q, e $S_i := [\![(n_i, p_i)]\!]$, con un cambiamento di variabili possiamo assumere $n_i = a_-$ e $p_i = a_+$, ed applicare la proposizione 16 prendendo m_0 e δ_0 piccoli in modo che gli intorni $\Omega^{m_0}_{\delta_0}$ corrispondenti a segmenti distinti siano disgiunti. In tal modo troviamo una successione U_ε tale che le tracce $u_\varepsilon := T(U_\varepsilon) \in R^\infty_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^2, S^1)$ e $G_{u_\varepsilon} \rightharpoonup T$ con $\varepsilon_{1/2}(G_{u_\varepsilon}) \to \varepsilon_{1/2}(T)$; però in tal modo le u_ε sono regolari ovunque eccetto che su un insieme formato dai punti di bordo dei vari segmenti S_i che sono singolarità omologicamente banali che possiamo rimuovere grazie alla proposizione 17

$\square$

Capitolo 5

Caso generale

Vogliamo ora considerare il caso generale e vedere che il risultato di densità visto nei casi 1 e 2-dimensionali è valido anche in dimensione maggiore. Per fare ciò, come fatto nel caso 2-dimensionale, dobbiamo prima provvedere all'approssimazione dei dipoli, che nel caso generale saranno delle concentrazioni $(n-1)$-dimensionali.

5.1 Costruzione del dipolo

Sia $\widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} := \widetilde{B}^n \times I, \quad I = [0,1]$ ed $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$; chiameremo quindi con Δ il $(n-1)$-simplesso in B^n dato dall'inviluppo convesso

$$\Delta := coh(\{0_{\mathbb{R}^n}, le_1, le_2, \ldots, le_{n-1}\}), \quad 0 < l < 1.$$

Indicheremo inoltre con

$$z = (x,t) = (\widetilde{x}, x_n, t), \quad \widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

un generico punto $z \in \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}$. Inoltre, per $\delta > 0$ e $0 < m \ll 1$, poniamo

$$\varphi_\delta^m(y) := \min\{my, \delta\}, \quad y \geq 0,$$

e indichiamo con

$$y(\widetilde{x}) := dist(\widetilde{x}, \partial\Delta)$$

la distanza di $\widetilde{x}$ dal bordo di Δ, e sia

$$\phi_\delta^m(z) := (\widetilde{x}, \varphi_\delta^m(y(\widetilde{x}))x_n, \varphi_\delta^m(y(\widetilde{x}))t)$$

cosicché se

$$\Omega_\delta^m := \phi_\delta^m(\Delta \times B^+), \quad B^+ := \{(x_n, t) \in B^2 | t > 0\},$$

allora Ω_δ^m è un intorno in $\widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}$ del simplesso Δ.

Lemma 2 *Sia $V : \Delta \times B^+ \to \mathbb{R}^2$ una funzione in $W^{1,2}$, e sia*

$$V_\delta^m(z) := V \circ (\phi_\delta^m)^{-1}(z), \quad z \in \Omega_\delta^m.$$

Allora esiste una costante assoluta $c > 0$ tale che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\delta^m} |DV_\delta^m|^2 dz \;\; &\leq \int_{\Delta\times B^+} |D_{(x_n,t)}V|^2 dz + c\delta^2 \int_{\Delta\times B^+} |D_{\widetilde{x}}V|^2 dz \\ &+ \;\; cm^2 \int_{\{\widetilde{x}\in\Delta|y(\widetilde{x})\leq\delta/m\}\times B^+} |D_{(x_n,t)}V|^2. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Dimostrazione: Dalla definizione di V_δ^m abbiamo

$$\int_{\Omega_\delta^m} |DV_\delta^m|^2\, dz = \int_{\Delta\times B^+} |DV(z)D(\phi_\delta^m)^{-1}(\phi_\delta^m(z))|^2 |\det D\phi_\delta^m(z)| dz.$$

Essendo $|\det D\phi_\delta^m(z)| = (\varphi_\delta^m)^2$ e dal calcolo di $DV(z)D(\phi_\delta^m)^{-1}(\phi_\delta^m(z))$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\delta^m} |DV_\delta^m|^2\, dz \leq & \int_{\Delta\times B^+} |D_{(x_n,t)}V|^2\, dx + c\int_{\Delta\times B^+} |D_{\widetilde{x}}V|^2|\varphi_\delta^m|^2\, dx \\ & +c\int_{\Delta\times B^+} |z|^2|D_{(x_n,t)}V||(\varphi_\delta^m)'|^2 dz \\ \leq & \int_{\Delta\times B^+} |D_{(x_n,t)}V|^2\, dx + c\delta^2 \int_{\Delta\times B^+} |D_{\widetilde{x}}V|^2 \\ & +cm^2 \int_{\{\widetilde{x}\in\Delta|y(\widetilde{x})\leq\delta/m\}\times B^+} |D_{(x_n,t)}V|^2.\end{aligned}$$

□

Quindi, vogliamo trovare innnanzi tutto una successione di funzioni che approssimi il dipolo Δ, e per fare ciò è sufficiente provare la seguente generalizzazione del risultato visto nel caso 2-dimensionale.

Proposizione 19 *Sia $U : \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} \to \mathbb{R}^2$ una funzione in $W^{1,2}$ regolare all'interno di $\Omega_{\delta_0}^{m_0}$, per qualche m_0, $\delta_0 > 0$, e tale che la sua traccia $u := T(U) \in W_\varphi^{1/2}(\widetilde{B}^n, S^1)$. Allora dato $q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, per ogni $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \delta_0$ e $0 < m < m_0$ esiste una funzione $U_\varepsilon : \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} \to \mathbb{R}^2$ con traccia $T(U_\varepsilon) \in W_\varphi^{1/2}(B^n, S^1)$ tale che U_ε è regolare su tutto $\overline{\Omega}_\delta^m$, tranne che sul bordo di Δ. Inoltre $G_{U_\varepsilon} \rightharpoonup G_U + [\![\Delta]\!] \times q[\![B^2]\!]$ debolmente in $\mathcal{D}_{n+1}(\widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} \times \mathbb{R}^2)$ per $\varepsilon \to 0$ e*

$$D(U_\varepsilon, \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}) \leq D(U, \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}) + \mathcal{H}^{n-1}(\Delta)\cdot|q|\pi + \varepsilon \qquad (5.2)$$

Dimostrazione: Introduciamo le coordinate cilindriche

$$z = (\widetilde{x}, x_n, t) = F(\rho, \theta, \widetilde{x}) := (\widetilde{x}, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \quad \rho > 0, \ \theta \in [0, \pi],$$

in modo che $\rho = \sqrt{{x_n}^2 + t^2}$; ed indicheremo $\widehat{W}(\rho, \theta, \widetilde{x}) := W(F(\rho, \theta, \widetilde{x}))$ una funzione in coordinate cilindriche.

Sia $\psi : B^2 \to B^2$ un omeorfismo bilipschitziano che mappi il simplesso Δ sul $(n-1)$-disco D di diametro l

$$D := \{x = (\widetilde{x}, x_n) \in B^n : |x| \leq l/2, \ x_n = 0\},$$

con costante di Lipschitz $Lip\ \psi$, $Lip\ \psi^{-1} \leq K$, dove $K = K(n)$ dipende dalla distanza di Δ da ∂B^n. Inoltre, sia $V : \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$V(z) := U \circ \Psi^{-1}(z), \quad \Psi(z) = \Psi(x, t) = (\psi(x), t).$$

Infine detti

$$\begin{aligned} W_\rho &:= \{z \in \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} | dist(z, \partial D) < \rho\} \\ \partial^+ W_\rho &:= \{z \in \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} | dist(z, \partial D) = \rho\}, \end{aligned}$$

fissiamo $0 < R < l/2$ e sia $p : W_R \to \partial D$ la proiezione, in modo che per ogni $z \in W_R$

$$p(z) \in \partial D \quad \text{e} \quad |z - p(z)| = dist(z, \partial D).$$

Applicando la formula di coarea, otteniamo

$$\int_{W_R} |DV|^2 dz = \int_0^R d\rho \int_{\partial^+ W_\rho} |DV|^2 d\mathcal{H}^n < +\infty$$

e quindi

$$\liminf_{\rho \to 0} \rho \int_{\partial^+ W_\rho} |DV|^2 d\mathcal{H}^n = 0.$$

Possiamo perciò scegliere $r > 0$ abbastanza piccolo e sostituire su W_r V con la mappa

$$V_r(z) := V\left(p(z) + r\frac{z - p(z)}{|z - p(z)|}\right), \tag{5.3}$$

così che

$$D(V_r, W_r) \leq c(n) \cdot r \int_{\partial^+ W_r} |DV|^2 d\mathcal{H}^n = O(r),$$

con $O(r_j) \to 0$ per una successione $r_j \to 0$. Poniamo

$$\widetilde{y}(\widetilde{x}) := dist(\widetilde{x}, \partial D),$$

$$\widetilde{\phi}_\delta^m(z) := (\widetilde{x}, \varphi_\delta^m(\widetilde{y}(\widetilde{x}))x_n, \varphi_\delta^m(\widetilde{y}(\widetilde{x}))t),$$
$$\widetilde{\Omega}_\delta^m := \widetilde{\phi}_\delta^m(D \times B^+)$$

ed infine

$$\begin{aligned} K_\delta^m := \{z \in \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} \quad | \quad & 0 < dist(z, \partial D) < r_{\delta,m}, \\ & 0 < dist(\widetilde{x}, \partial D) < \delta/m, \sqrt{{x_n}^2 + t^2} < m \cdot dist(\widetilde{x}, \partial D)\} \end{aligned}$$

dove $r_{\delta,m} := \delta\sqrt{1+m^2}/m$, in modo che se $r_{\delta,m} < r$ allora da (5.3) otteniamo che su K_δ^m V non dipende dalla distanza di z da ∂D.

Possiamo ora supporre che siano verificate le seguenti condizioni:

(i) V mandi K_δ^m in un insieme di diametro ε;

(ii) V mandi $\widetilde{\Omega}_\delta^m$ in un insieme di diametro ε.

Se tali condizioni non sono soddisfatte, consideriamo una suddivisione baricentrica $\{\Delta_i\}_i$ del simplesso Δ in simplessi più piccoli di lato $l/2$; e senza perdita di generalità, a meno di muovere leggermente i centri delle facce dei simplessi, possiamo supporre che V abbia energia finita sul bordo dei simplessi Δ_i per ogni i. Applichiamo perciò la costruzione precedentemente fatta per Δ ad ogni Δ_i, dove ora K è un estremo superiore per gli omeomorfismi di B^n che mappano Δ_i su D_i, gli $(n-1)$-dischi di diametro $l/2$.

Se V non soddisfa le condizioni (i) e (ii) sugli insiemi $K_{\delta,i}^m$ e $\widetilde{\Omega}_{\delta,i}^m$ corrispondenti a D_i, ripetiamo il procedimento precedente prendendo ora una suddivisione di Δ_i. Per ipotesi abbiamo che V regolare su Ω_δ^m, per m, δ sufficientemente piccoli, e possiamo inoltre supporre che V non dipenda dalla distanza di z da ∂D_i su $K_{\delta,i}^m$; allora abbiamo che le condizioni (i) e (ii) devono essere soddisfatte dopo un numero finito di suddivisioni del simplesso Δ in simplessi Δ_i, ed in seguito per semplicità ometteremo gli indici i relativi a tali simplessi Δ_i.

Sia ora $W_\varepsilon : D \times B^+ \to \mathbb{R}^2$ data da

$$W_\varepsilon(\widetilde{x}, x_n, t) := f_\varepsilon^{P(\widetilde{x})}(x_n, t)$$

dove $f_\varepsilon^{P(\widetilde{x})}$ è data dallla Proposizione 15 in corrispondenza del punto $P(\widetilde{x}) := U(\widetilde{x}, 0, 0)$. Ponendo

$$\Phi_\varepsilon(z) := W_\varepsilon \circ (\widetilde{\phi}_\delta^m)^{-1}(z), \quad z \in \widetilde{\Omega}_\delta^m,$$

dal Lemma 2 otteniamo quindi la seguente stima

$$D(\Phi_\varepsilon, \widetilde{\Omega}_\delta^m) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\Delta) \cdot D(f_\varepsilon^{P(\widetilde{x})}, B^+) + \frac{\varepsilon}{2K^2\mu}$$

se prendiamo $\delta = \delta(W_\varepsilon, m, \varepsilon, K, \mu)$ sufficientemente piccolo; dove μ è il numero di simplessi Δ_i nella suddivisione di Δ. Definiamo $V_\varepsilon : \widetilde{\Omega}^m_\delta \to \mathbb{R}^2$ tramite

$$\widehat{V}_\varepsilon(\rho, \theta, \widetilde{x}) := \begin{cases} \widehat{\Phi}_\varepsilon(2\rho, \theta, \widetilde{y}) & \text{se} \quad 0 \leq \rho < \varphi^m_\delta(\widetilde{y})/2 \\ \widehat{\Psi}^m_\delta(\rho, \theta, \widetilde{y}) & \text{se} \quad \varphi^m_\delta(\widetilde{y})/2 \leq \rho < \varphi^m_\delta(\widetilde{y}) \end{cases}$$

dove $\theta \in [0, \pi]$, $\widetilde{x} \in int(\Delta)$, $\widetilde{y} = \widetilde{y}(\widetilde{x}) := dist(\widetilde{x}, \partial D)$ e

$$\widehat{\Psi}(\rho, \theta, \widetilde{y}) := \left(\frac{2\rho}{\varphi^m_\delta(\widetilde{y})} - 1 \right) \cdot \widehat{V}(\varphi^m_\delta(\widetilde{y}), \theta, \widetilde{y}) + \left(2 - \frac{2\rho}{\varphi^m_\delta(\widetilde{y})} \right) \cdot P(\widetilde{x}).$$

Estendiamo inoltre $V_\varepsilon \equiv V$ fuori da $\widetilde{\Omega}^m_\delta$. Possiamo quindi stimare l'energia di V_ε ottenendo

$$D(V_\varepsilon, \{0 \leq \rho \leq \varphi^m_\delta/2, \widetilde{x} \in \Delta, \theta \in [0, \pi]\}) = D(\Phi_\varepsilon, \widetilde{\Omega}^m_\delta)$$

$$D(V_\varepsilon, \{\varphi^m_\delta/2 \leq \rho \leq \varphi^m_\delta, \theta \in [0, \theta], \widetilde{x} \in \Delta\}) \ll \varepsilon,$$

dove la seconda relazione è ottenuta dalle condizioni (i) e (ii) e dalla (5.3) con stime analoghe a quelle viste per il caso 2-dimensionale. Otteniamo perciò

$$D(V_\varepsilon, \widetilde{\Omega}^m_\delta) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\Delta) \cdot (|q|\pi + 4\varepsilon^2) + \frac{\varepsilon}{2K^2\mu}. \tag{5.4}$$

Quindi ponendo $U_\varepsilon := V_\varepsilon \circ \Psi(z)$, e ripetendo il ragionamento appena fatto ad ognuno dei simplessi Δ_i, dalla stima (5.4) e dall'ipotesi sulle costanti di Lipschitz di Ψ abbiamo

$$D(U_\varepsilon, \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}) \leq D(U, \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}) + \mathcal{H}^{n-1}(\Delta) \cdot (|q|\pi + 4K^2\varepsilon^2) + \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi la tesi segue per ε piccolo.

$\square$

Teorema 10 *Sia $\varphi : \widetilde{B}^n \to S^1$ una funzione regolare in $W^{1/2}$; per ogni $T \in cart^{1/2}(B^n \times S^1)$, rispettivamente $T \in cart^{1/2}_\varphi(\widetilde{B}^n \times S^1)$, esiste una successione $\{u_k\}$ di mappe in $C^\infty(B^n, S^1)$, rispettivamente in $C^\infty_\varphi(\widetilde{B}^n, S^1)$, tale che $G_{u_k} \rightharpoonup T$ debolmente in $cart^{1/2}$ e*

$$\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_{1/2}(u_k) = \varepsilon_{1/2}(T)$$

Dimostrazione: Possiamo supporre, per semplicità, $T \in cart^{1/2}_\varphi(\widetilde{B}^n, S^1)$ (il caso $T \in cart^{1/2}(B^n, S^1)$ è del tutto analogo), allora T può essere scomposta come segue

$$T = G_{u_T} + \mathbb{L}(T) \times [\![S^1]\!]$$

con $u_T \in W^{1/2}_\varphi(\widetilde{B}^n, S^1)$ e $\mathbb{L}(T) \in \mathcal{R}_{n-1}(\widetilde{B}^n)$, con $\mathrm{spt}\mathbb{L}(T) \subset \overline{B}^n$; applicando quindi la Proposizione 18, abbiamo

$$T = G_{u_T} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} \mathbb{L}_q \times q[\![S^1]\!], \quad \widetilde{T} := Ext(T) = (-1)^{n-1}(G_{U_T} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} \mathbb{L}_q \times q[\![B^2]\!]),$$

dove $U_T := Ext(u_T)$, $\mathbb{L}_q$ sono $(n-1)$-correnti intere rettificabili con molteplicità 1, con supporti disgiunti contenuti in $\overline{B}^n$ e con massa del bordo finita, $\sum_q M(\partial \mathbb{L}_q) < \infty$. Usando allora il teorema di approsssimazione di Federer, per ogni $q \in \mathbb{Z}$ troviamo una $(n-1)$-catena poliedrale P^ε_q il cui supporto è contenuto in un intorno di raggio $c\varepsilon$ del supporto della corrente $\mathbb{L}_q$ ed una funzione $U_\varepsilon \in C^\infty(\widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}, B^2)$ con traccia $u_\varepsilon := T(U_\varepsilon) \in R^\infty_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^n, S^1)$, tale che detta

$$\widetilde{T}_\varepsilon := G_{U_\varepsilon} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} P^\varepsilon_q \times q[\![B^2]\!],$$

allora $\widetilde{T}_\varepsilon \rightharpoonup \widetilde{T}$ debolmente in $\mathcal{D}_{n+1}(\widetilde{\mathcal{C}}^{n+1} \times \mathbb{R}^2)$ e

$$D(U_\varepsilon, \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}) + \sum_{q\in\mathbb{Z}} q\pi M(P^\varepsilon_q) \to D(U_T, \widetilde{\mathcal{C}}^{n+1}) + \sum_{q\in\mathbb{Z}} q\pi M(\mathbb{L}_q),$$

da cui $D(\widetilde{T}_\varepsilon) \to D(\widetilde{T})$. Inoltre, poiché i supporti delle $\mathbb{L}_q$ erano disgiunti possiamo prendere P^ε_q in modo che per $\varepsilon > 0$ piccolo abbiano anch'esse supporti disgiunti.

Per tale motivo possiamo allora supporre

$$T := G_{u_T} + \sum_{q\in\mathbb{Z}} P_q \times q[\![S^1]\!], \tag{5.5}$$

dove P_q sono $(n-1)$-catene poliedrali di molteplicità 1 e con supporti disgiunti contenuti in $\overline{B}^n$ e $u_T \in R^\infty_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^n, S^1)$ è localmente lipschitziana su $\widetilde{B}^n \setminus \bigcup_q \mathrm{spt}\ \partial P_q$. Inoltre si può supporre che ogni P_q sia unione di un numero finito di $(n-1)$-simplessi Δ che si intersecano solo sui punti di bordo.

Approssimeremo allora i dipoli $\Delta \times q[S^1]$ per mezzo della proposizione precedente. Infatti, prendendo m_0 e δ_0 sufficientemenete piccoli potremo assumere che intorni $\Omega^{m_0}_{\delta_0}$ relativi a simplessi Δ distinti siano a due a due disgiunti, e quindi approssimare separatamente ognuno di tali dipoli.

Possiamo allora, tramite ad un procedimento diagonale, trovare una successione $\{U_\varepsilon\}$ tale che $u_\varepsilon := T(U_\varepsilon) \in R^\infty_{1/2,\varphi}(\widetilde{B}^n, S^1)$ e i grafici G_{u_ε} convergono debolmente a T con $\varepsilon_{1/2}(G_{u_\varepsilon}) \to \varepsilon_{1/2}(T)$. Le funzioni u_ε date da tale successione non sono però regolari ovunque, infatti la proposizione precedente ci assicurava la regolarità tranne che sul bordo del dipolo Δ, e quindi le u_ε sono regolari tranne che sull'insieme Σ_ε dato dal $(n-2)$-scheletro dato dall'unione delle $(n-1)$-catene poliedrali P_q. Ci resta quindi da rimuovere tale insieme Σ e per fare ciò è sufficiente provare il seguente risultato

Proposizione 20 *Nelle ipotesi precedenti, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo esiste una successione di funzioni regolari $\{u^{(\varepsilon)}_m\} \subset C^\infty_\varphi(\widetilde{B}^n, S^1_\varepsilon)$ che converge ad u_ε forte in $W^{1/2}$ per $m \to +\infty$*

Dimostrazione: Sia U_ε l'estensione di u_ε a $\widetilde{B}^n \times (-1,1)$ tale che $T(U_\varepsilon) = u_\varepsilon$. Dato $m \in \mathbb{N}$ e $a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in [1/4m, 3/4m]^{n+1}$ indicheremo con $\mathcal{L}_m$ la griglia

$$\mathcal{L}_m := \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcup_{j=0}^{m} P(a_i + j/m, i),$$

dove $P(\lambda, i)$ è l'iperpiano passante per λe_i ed ortogonale a e_i ed $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$; sia quindi $\mathcal{L}^{(n+1)}_m$ la famiglia degli $(n+1)$-cubi generati dalla griglia $\mathcal{L}_m$ che intersecano $B^n \times \{0\}$, e sia $\mathcal{L}^{(k+1)}_m$ la famiglia delle $(k+1)$-facce Q degli $(n+1)$-cubi appartenenti a $\mathcal{L}^{(n+1)}_m$. Inoltre sia $\mathcal{F}^{(k)}_m$ la famiglia delle k-facce F ottenute intersecando le facce di $\mathcal{L}^{(k+1)}_m$ con $\widetilde{B}^n \times \{0\}$

$$F = Q \cap (\widetilde{B}^n \times \{0\}); \tag{5.6}$$

infine sia

$$G_m := \widetilde{B}^n \times (-10/m, 10/m).$$

Possiamo scegliere $a = a(m, U_\varepsilon)$ in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

(i) per ogni $k = 1, \ldots, n-1$ la restrizione di U_ε ad ogni $(k+1)$-faccia $Q \in \mathcal{L}^{(k+1)}_m$ è una funzione in $W^{1,2}(Q, \mathbb{R}^2)$;

(ii) esiste una costante assoluta $c > 0$ tale che

$$D(U_\varepsilon, \cup \mathcal{L}^{(k+1)}_m) \leq c m^{n-k} D(U_\varepsilon, G_m) \quad \forall\ k = 1, \ldots, n-1 \tag{5.7}$$

.

Inoltre, essendo Σ_ε il $(n-2)$-scheletro dato dalla triangolazione di P_q, con un argomento di slicing possiamo richiedere che per m sufficientemente grande valgano anche

(iii) Σ_ε non interseca le 1-facce $\mathcal{F}_m^{(1)}$;

(iv) data una 2-faccia $F \in \mathcal{F}_m^{(2)}$, allora essa interseca Σ_ε in al più un punto interno p_F, e tale punto non appartiene al $(n-3)$-scheletro della triangolazione di P_q;

(v) la restrizione $u_{\varepsilon|F}$ di u_ε ad ogni 2-faccia F è continua, tranne al più nel punto p_F, in tal caso, se $p_F \in \mathrm{spt} P_q$, abbiamo

$$\partial G_{u_{\varepsilon|F}} \llcorner F \times S^1 = \delta_{p_F} \times q[\![S^1]\!]. \tag{5.8}$$

Osserviamo che la seconda parte dell'ultima condizione segue dal fatto che u_ε ristretta a F si comporta in modo analogo al problema del dipolo nel caso 2-dimensionale; di conseguenza ragionando come fatto in tale caso abbiamo che

$$\{w \in W^{1/2}(F, \mathbb{R}^2) \cap C^0(F, S^1) | w_{|\partial F} = u_{\varepsilon|\partial F}\} \neq \emptyset \tag{5.9}$$

risulta verificata per ogni 2-faccia F.

Per rimuovere la singolarità di u_ε su Σ_ε ragioneremo per induzione. Come primo passo porremo $U_m^{(\varepsilon)} \equiv U_\varepsilon$ su $\cup \mathcal{L}_m^{(2)}$ e su ogni $Q \in \mathcal{L}_m^{(k+1)}$ che non interseca $\widetilde{B}^n \times \{0\}$. Per $k = 2, \ldots, n$, al k-esimo passo definiremo $U_m^{(\varepsilon)}$ su ogni $Q \in \mathcal{L}_m^{(k+1)}$ partendo dalla restrizione $U_{m|\partial Q}^{(\varepsilon)}$ di $U_m^{(\varepsilon)}$. Per fare ciò, se $F \in \mathcal{F}_m^{(k)}$ è data da (5.6), è sufficiente richiedere che la traccia $\varphi_F := T(U_{m|\partial Q}^{(\varepsilon)})$ di $U_{m|\partial Q}^{(\varepsilon)}$ sul bordo di F abbia un'estensione continua $\Phi_F \in W^{1/2}(F, S^1)$, ed osserviamo che al secondo passso tale condizione è data dalla (5.9), dobbiamo quindi estendere tale condizione al caso $k \geq 3$, e ciò ci sarà sufficiente. Infatti, trovata l'estensione continua Φ_F, possiamo definire la funzione $v_Q : Q \to \mathbb{R}^2$ definita da $v_Q(z) = v_Q^\pm(z)$ se $z \in Q^\pm := \{z = (x,t) \in Q | \pm t \geq 0\}$, dove $v_Q^\pm$ è soluzione del problema di Dirichlet su $Q^\pm$ con le seguenti condizioni al bordo

$$\begin{cases} v_Q^\pm = U_m^{(\varepsilon)} & \text{su} \quad \partial Q^\pm \cap \{(x,t) | \pm t > 0\} \\ v_Q^\pm = \Phi_F & \text{su} \quad F \end{cases}$$

Una volta definita v_Q, supponendo che il centro di Q sia, a meno di traslazioni, l'origine $0_{\mathbb{R}^{n+1}}$, definiamo $U_m^{(\varepsilon)}$ su Q ponendo, per $0 < \delta \ll 1/2m$,

$$U_m^{(\varepsilon)}(z) := \begin{cases} v_Q\left(\frac{z}{2m\delta}\right) & \text{se} \quad \|z\| \leq \delta \\ U_m^{(\varepsilon)}\left(\frac{z}{2m\|z\|}\right) & \text{se} \quad \delta \leq \|z\| \leq \frac{1}{2m} \end{cases} \quad z \in Q$$

dove $\|z\| := \sup |z_i|$ se $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$. In tal modo otteniamo la seguente disuguaglianza

$$D(U_m^{(\varepsilon)}, Q) \leq \frac{c}{m} D(U_\varepsilon, \partial Q) \tag{5.10}$$

ed abbiamo che $U_m^{(\varepsilon)}$ è continua su Q e la sua traccia $T(U_m^{(\varepsilon)}) \in W^{1/2}(F, S^1)$. Ripetendo questo ragionamento per ogni $k = 2, \ldots, n$ dalla disuguaglianza precedente otteniamo

$$D(U_m^{(\varepsilon)}, \cup\mathcal{L}_m^{(n+1)}) \leq C(n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{m^{n-k}} D(U_\varepsilon, \mathcal{L}_m^{(k+1)})$$

e quindi dalla condizione (ii) si ha

$$D(U_m^{(\varepsilon)}, \cup\mathcal{L}_m^{(n+1)}) \leq cD(U_\varepsilon, G_m),$$

e poiché $|G_m| \to 0$ per $m \to +\infty$ abbiamo $D(U_m^{(\varepsilon)}, \cup\mathcal{L}_m^{(n+1)}) \to 0$. Ponendo allora $U_m^{(\varepsilon)} \equiv U_\varepsilon$ su $\mathcal{C}^{n+1} \setminus \cup\mathcal{L}_m^{(n+1)}$, otteniamo $U_m^{(\varepsilon)} \to U_\varepsilon$ e quindi $u_m^{(\varepsilon)} := T(U_m^{(\varepsilon)}) \to u_\varepsilon$ in $W^{1/2}$. Inoltre, poiché le tracce $u_m^{(\varepsilon)} \in W^{1/2}$ sono continue, tramite un procedimento standard le possiamo approssimare con funzioni regolari e quindi la tesi.

□

Bibliografia

[1] Adams. *Sobolev spaces*, Academic Press, New York 1975.

[2] Bourgain, Brezis, Mironescu. *On the structure of the Sobolev space $H^{1/2}$ with values into the circle*, C.R. Acad. Sci. Paris 331 (2000).

[3] Bourgain, Brezis, Mironescu. *Lifting in Sobolev spaces*, J. Anal. Math 80 (2000).

[4] Bourgain, Brezis, Mironescu. *$H^{1/2}$ maps with values into the circle: minimal connections, lifting, and the Ginzburg Landau equation*, Publ. Math. Ist. HES 99 (2004).

[5] Federer. *Real flat chains, cochains and variational problems*, Indiana Univ. Math. J. 24 (1974).

[6] Giaquinta, Modica. *On sequences of maps with equibounded energies*, Calc. Variat. 12 (2001).

[7] Giaquinta, Modica, Souček. *On sequences of maps into S^1 with equibounded $W^{1/2}$ energies*, Selecta Math. 10 (2004).

[8] Giaquinta, Modica, Souček. *Cartesian currents in the calculus of variations,I,II*, Springer, Berlin 1998.

[9] White. *Rectificability of flat chains*, Ann. Math. 150 (1999).

[10] Bethuel, Zheng. *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces*, Journal of functional analysis 80 (1988).

[11] Bethuel. *The approximation problem for Sobolev maps between manifolds*, Acta Math. 167 (1992)

[12] Bethuel. *Approximation in the trace spaces defined between manifolds*, Nonlinear Analysis 24 (1995)

[13] Schoen, Uhlenbeck. *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps*, Journal of differential geometry 18 (1983)

[14] Federer. *Geometric measure theory*, Grundleheren math. Wissen 153 Springer, Berlin (1969)

[15] Demengel. *Une caracterisation des applications de* $W^{1,p}(B^n, S^1)$ *qui peuvent etre approchees par des fonctions regulaeres*, C.R. Acad. Sci. Paris 310 (1990)

[16] Corbon. *Application harmoniques a valours dans une cercle*, C.R. Acad. Sci. Paris 314 (1992)