

Università degli Studi di Pisa  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica

# **Dinamica Olomorfa nei Punti di Cremer**

19 maggio 2005

Autore: Francesca Mori    Relatore: Marco Abate



# Introduzione

L'argomento della tesi è lo studio della dinamica olomorfa in una variabile complessa.

Nella dinamica olomorfa si studiano le orbite dei punti di un aperto  $U$  della sfera di Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  sotto l'iterazione di una funzione olomorfa definita su  $U$ .

In particolare, in questa tesi ci occupiamo della dinamica di una funzione olomorfa nell'intorno di un punto fisso, che possiamo supporre essere il punto 0.

Data una funzione olomorfa con un punto fisso in 0, essa si può scrivere come  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ . Il numero  $\lambda$ , che corrisponde alla derivata di  $f$  in 0, si chiama il *moltiplicatore* e gioca un ruolo importante per lo studio della dinamica nell'intorno di 0 (§2.1.2).

Utilizzando il moltiplicatore, il punto fisso può essere classificato come segue:

1. *superattrattivo* se  $\lambda = 0$ ;
2. *attrattivo* se  $0 < |\lambda| < 1$ ;
3. *repulsivo* se  $|\lambda| > 1$ ;
4. *indifferente razionale* se  $|\lambda| = 1$  e  $\lambda$  è una radice di 1;
5. *indifferente irrazionale* se  $|\lambda| = 1$  e  $\lambda$  non è una radice di 1.

Nel Capitolo 2 vengono introdotte queste definizioni e vengono presentati i risultati noti.

Nei casi 1,2,3,4 la dinamica in un intorno di 0 è nota (§2.2.1 e §2.2.2). Nel caso 5 ci sono alcune questioni ancora aperte (§2.2.3).

In alcuni casi si può dimostrare che la funzione, in un intorno del punto fisso, è coniugata ad una rotazione di angolo  $\lambda$ . In questo caso si dice che la  $f$  è *linearizzabile*. Ad esempio nei casi 2 e 3 una tale linearizzazione è sempre possibile, nel caso 5 è possibile solo per certi valori di  $\lambda$ , cioè quelli in cui  $\lambda$  soddisfa una particolare condizione algebrica.

I punti fissi nell'intorno dei quali una tale linearizzazione è possibile sono detti *punti di Siegel*, gli altri sono detti *punti di Cremer*.

I punti di Cremer sono quelli su cui si concentra il nostro studio. Infatti la dinamica in un intorno di questi punto non è ancora completamente nota.

Nel Capitolo 4 presentiamo la dimostrazione della seguente congettura sui punti di Cremer. La dimostrazione è tratta da [PM1].

**CONGETTURA DI DULAC-MOUSSU (§4.6):** *Ogni germe olomorfo non linearizzabile  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ ,  $|\lambda| = 1$ , ha un'orbita  $(f^n(z))_{n \in \mathbb{Z}} = \mathcal{O}(z)$ ,  $z \neq 0$ , che si accumula nell'origine, cioè  $0 \in \overline{\mathcal{O}(z)}$ .*

Per dimostrare questa congettura si fa innanzitutto una costruzione, che chiamiamo la *costruzione fondamentale*(§4.2). Dato un compatto  $f$ -invariante  $K$ , si associa ad  $f$  un diffeomorfismo analitico del cerchio  $g$ , che ha delle analogie con la dinamica di  $f$  in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  e in  $\partial K$ . Molte proprietà di  $f$ , come la linearizzabilità o alcune caratteristiche della dinamica nell'intorno del punto fisso, si trasportano a  $g$ .

Ci si preoccupa poi di trovare un tale compatto  $f$ -invariante (§4.1). Lo si costruisce dapprima nel caso in cui il punto fisso sia indifferente razionale (§4.3.2), poi nel caso in cui sia indifferente irrazionale e la  $f$  sia linearizzabile (§4.3.8), poi nel caso generale come limite dei compatti trovati in questi due casi (§4.4).

La dimostrazione della congettura di Dulac-Moussu si articola in due parti, prima si dimostra nel caso in cui si abbia un certo controllo sulla topologia di  $K$  (§4.6.1), e poi nel caso generale (§4.6.3). Utilizzando la costruzione fondamentale, si riesce a dimostrare che nel caso non linearizzabile molti punti di  $\partial K$  si accumulano all'origine. C'è da dire che nel primo caso si dimostra un teorema più forte che nel caso generale.

La teoria sviluppata ci permette poi di introdurre degli oggetti matematici, chiamati porcospini, che sono i compatti invarianti del caso indifferente irrazionale non linearizzabile (§4.7.1). I porcospini hanno proprietà topologiche molto particolari.



# Capitolo 1

## Prerequisiti generali

### 1.1 Strutture conformi sulle superficie di Riemann

Una superficie di Riemann è una varietà analitica complessa connessa a base numerabile di dimensione complessa 1.

Due tali superficie  $S$  e  $S'$  sono *biolomorfe* se c'è un omeomorfismo da  $S$  in  $S'$  che sia olomorfo e con inversa olomorfa.

**Definizione 1.1.1.** Una metrica riemanniana  $ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$  è detta *conforme* se  $g_{11} = g_{22}$  e  $g_{12} = 0$ ; quindi se la matrice  $[g_{ij}]$ , valutata in ogni punto  $z$ , è un multiplo della matrice identità.

Possiamo allora enunciare il seguente:

**Teorema 1.1.1 (Hopf-Rinow).** *Sia  $S$  una superficie di Riemann, con una metrica riemanniana  $ds$ . Allora sono equivalenti le tre affermazioni:*

1. *Ogni successione di Cauchy rispetto alla metrica converge;*
2. *Ogni palla chiusa  $N_r(z_0, \rho_S) = \{z \in S \mid \rho_S(z, z_0) \leq r\}$  è un sottoinsieme compatto di  $S$ ;*

*Inoltre, ognuna di queste due condizioni implica che:*

3. ogni coppia di punti di  $S$  può essere collegata da una geodetica minimale.

La dimostrazione di questo teorema si può trovare su [Ab].

Ci sono solo tre superficie di Riemann semplicemente connesse, a meno di biolomorfismi, come specificato nel teorema che segue:

**Teorema 1.1.2 (di uniformizzazione).** *Una superficie di Riemann  $S$  semplicemente connessa è biolomorfa a:*

1. Il piano  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi;
2. Il disco aperto unitario  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ ;
3. La sfera di Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ;

*Inoltre, due tali biolomorfismi che coincidono in un punto, e che in quel punto abbiano derivata 1, sono uguali.*

La dimostrazione del teorema è abbastanza complicata e non la riporteremo qui. La si può trovare su [Ah]. Studiamo adesso più da vicino i tre tipi di superficie:

### 1.1.1 Il disco unitario $D$

**Teorema 1.1.3 (Lemma di Schwarz).** *Se  $f : D \rightarrow D$  è olomorfa con  $f(0) = 0$ , allora la derivata nell'origine soddisfa  $|f'(0)| \leq 1$ . Nel caso in cui si abbia l'uguaglianza, allora  $f$  è una rotazione attorno all'origine, cioè  $f(z) = \lambda z$  per qualche costante  $\lambda = f'(0)$  sul cerchio unitario. In particolare,  $f$  è un biolomorfismo di  $D$  in sé.*

*Se invece  $|f'(0)| < 1$ , allora  $|f(z)| < |z|$  per ogni  $z \neq 0$  e  $f$  non è un biolomorfismo di  $D$  in sé.*

*Dimostrazione.* Notiamo innanzitutto che la funzione quoziente  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$  è ben definita e olomorfa in tutto il disco (perché  $\frac{f(z)}{z}$  in 0 è la derivata di  $f$ ). Siccome  $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$  se  $|z| = r < 1$ , per il principio del massimo modulo si ha che  $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$  per tutti i punti  $z$  del disco  $|z| \leq r$ . Passando al limite per  $r \rightarrow 1$ , si ottiene che  $|g(z)| \leq 1$



per tutti i punti  $z$  del disco. Ancora per il principio del massimo modulo, vediamo che il caso in cui  $|g(z)| = 1$ , con  $z$  in  $D$ , può verificarsi solo se la funzione  $g(z)$  è costante di modulo 1. Se escludiamo questo caso in cui  $\frac{f(z)}{z} = c$  costante, cioè il caso in cui la  $f$  è una rotazione, allora  $|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| < 1$  per tutti gli  $z \neq 0$  e allo stesso modo  $|g(0)| = |f'(0)| < 1$ . Inoltre la composizione di due tali mappe deve verificare ancora  $|f_1(f_2(z))| < |z|$  e quindi non può essere l'identità in  $D$ . Di conseguenza non può essere un biolomorfismo di  $D$ .  $\square$

*Osservazione 1.1.1.* Con un ragionamento analogo a quello della dimostrazione precedente, se  $f : D_r \rightarrow D_s$  è olomorfa con  $D_r$  il disco di raggio  $r$  e  $D_s$  il disco di raggio  $s$ , e  $f(0) = 0$ , allora si ha che  $|f'(0)| \leq \frac{s}{r}$ .

Se invece non abbiamo la condizione  $f(0) = 0$  sulla  $f$ , possiamo fare un ragionamento analogo e otteniamo che  $|f'(0)| \leq \frac{2s}{r}$  se  $f(D_r) \subset D_s$  perché la differenza  $f(z) - f(0)$  ha valori in  $D_{2s}$ .

Come corollario di questa osservazione abbiamo il seguente:

**Teorema 1.1.4 (Liouville).** *Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa limitata. Allora è costante.*

*Osservazione 1.1.2.* Prima di citare il prossimo teorema è necessaria una precisazione. Consideriamo lo spazio  $\mathcal{C}^0(X, Y)$ , dove  $X$  è compatto. Possiamo utilizzare su questo spazio la topologia della convergenza uniforme, cioè la topologia indotta dalla distanza  $\delta$  definita, per  $f, g \in \mathcal{C}^0(X, Y)$ , da:

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Nel caso in cui  $X$  non sia compatto, invece, possiamo utilizzare la topologia della convergenza uniforme sui compatti, che è equivalente alla topologia compatta-aperta, definita come segue: una base degli aperti è data da

$$N(A, K) = \{g \in \mathcal{C}^0(X, Y) \mid g(K) \subset A\}$$

al variare di  $A \subset Y$  aperto e  $K \subset X$  compatto.

In tutta la nostra trattazione, quando parleremo di convergenza di funzioni intenderemo sempre questo tipo di convergenza, eccetto che quando sarà espressamente indicato il contrario.

Adesso possiamo enunciare il:

**Teorema 1.1.5 (di Weierstraß).** *Se una successione di funzioni olomorfe definite sui complessi a valori complessi converge uniformemente sui compatti, allora il limite è olomorfo e la successione delle derivate converge uniformemente sui compatti alla derivata del limite.*

Ci sono delle mappe di inclusione fra i tre tipi di superficie  $D \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Dalla discussione sopra, segue che i tre modelli di superficie sono distinti. Infatti,  $\widehat{\mathbb{C}}$  non può essere biolomorfa a nessuna delle altre due superficie, perché è l'unica ad essere compatta. Invece  $\mathbb{C}$  non può essere biolomorfa a  $D$  per il teorema di Liouville. Infatti un eventuale biolomorfismo  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow D$  dovrebbe essere costante.

Spesso può essere conveniente usare, al posto del disco, il semi-piano superiore del piano complesso, cioè l'insieme:

$$H = \{w \in \mathbb{C} | w = u + iv, v > 0\}$$

**Lemma 1.1.6.** *Il disco  $D$  è biolomorfo al semipiano  $H$  attraverso la mappa  $w = i\frac{1+z}{1-z}$ , con inversa  $z = \frac{w+i}{w-i}$*

*Dimostrazione.* Si ha che  $|z|^2 < 1$  se e solo se  $|i - w|^2 = u^2 + (1 - 2v + v^2)$  è meno di  $|i + w|^2 = u^2 + (1 + 2v + v^2)$  o, in altre parole, se e solo se  $0 < v$ . L'inversa si trova con un calcolo.  $\square$

**Lemma 1.1.7.** *Dato un punto  $z_0$  di  $D$ , esiste un automorfismo  $f$  di  $D$  che manda  $z_0$  in 0. Inoltre,  $f$  è univocamente determinata a meno di composizione con una rotazione che fissa l'origine.*

*Dimostrazione.* Dati due punti  $w_1, w_2$  del semipiano superiore  $H$ , è facile vedere che c'è un automorfismo della forma  $w \rightarrow a + bw$  che manda  $w_1$  in  $w_2$ . Qui i coefficienti

$a$  e  $b$  sono numeri reali, con  $b > 0$ . Siccome  $H$  è biolomorfo a  $D$ , ne segue che esiste un automorfismo che manda un punto fissato in 0.

Per dimostrare l'unicità, prendiamo due automorfismi  $f_1, f_2$  che mandano  $z_0$  in 0, la composizione  $g = f_1 \circ f_2^{-1}$  è ancora un automorfismo, e  $g$  fissa l'origine. Per il lemma di Schwarz,  $g$  è una rotazione. Allora  $f_1 = g \circ f_2$  e il teorema è dimostrato.  $\square$

Una conseguenza del lemma di Schwarz, che è spesso utile nelle applicazioni, è il seguente corollario:

**Corollario 1.1.8.** *Una mappa  $f : D \rightarrow D$  che abbia due punti fissi è l'identità.*

*Dimostrazione.* Segue dal Lemma 1.1.3 e dal Lemma 1.1.7: portiamo con un automorfismo di  $D$  uno dei due punti fissi in 0, l'altro punto fisso andrà in un qualche  $z' \neq 0$ , ed a questo punto siamo nelle ipotesi del lemma di Schwarz. Allora, per  $f$  non può valere  $|f(z)| < |z|$  per ogni  $z \neq 0$ , perché non vale per il punto fisso  $z'$ . Quindi  $f$  deve essere una rotazione attorno all'origine, che, avendo più di un punto fisso, è l'identità.  $\square$

**Teorema 1.1.9.** *Il gruppo  $G(H)$  di tutti i biolomorfismi del semipiano superiore  $H$  in sé, può essere identificato col gruppo di tutte le trasformazioni lineari fratte  $w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}$  con coefficienti reali e determinante  $ad - bc > 0$*

Se normalizziamo in modo che  $ad - bc = 1$  allora i coefficienti sono definiti a meno di cambiamento di segno. Quindi  $G(H)$  è isomorfo a  $PSL(2, \mathbb{R})$ , il gruppo di tutte le matrici reali  $2 \times 2$  con determinante  $+1$  modulo l'insieme  $\{\pm I\}$ .

Omettiamo la dimostrazione del teorema 1.1.9, che è comunque molto semplice.

### La metrica di Poincaré nel semipiano $H$

Nel semipiano  $H$  (e quindi, attraverso una trasformazione conforme, anche in  $D$ ) è possibile mettere una e, a meno di moltiplicazione per una costante, una sola metrica riemanniana che sia invariante per ogni automorfismo di  $H$ . Si può vedere che la suddetta metrica è  $ds = \frac{|dw|}{v}$  per  $w = u + iv \in H$ .

Si può dimostrare che la metrica di Poincaré è l'unica metrica conforme su  $H$  che sia completa, con curvatura gaussiana costante (uguale a  $-1$ ). La corrispondente espressione per  $D$  è:

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \quad \text{per } z = x + iy \in D.$$

Quindi c'è una metrica riemanniana privilegiata  $ds$  su  $D$  o  $H$ . Più in generale, se  $S$  è una superficie di Riemann biolomorfa a  $D$ , allora c'è una metrica corrispondente  $ds$  su  $S$ . Possiamo allora definire la *distanza di Poincaré*  $\varrho(z_1, z_2) = \varrho_S(z_1, z_2)$  fra due punti di  $S$  come l'estremo inferiore, fra tutte le curve  $c$  che uniscono  $z_1$  e  $z_2$ , della lunghezza di  $c$ , dove la lunghezza è definita come  $l(c) = \int_c ds$ . Sappiamo dalla teoria standard delle superficie di Riemann che l'estremo inferiore è in realtà un minimo.

Un'altra proprietà importante della metrica di Poincaré, che è un'applicazione immediata del Lemma 1.1.3:

**Teorema 1.1.10 (di Pick).** *Se  $f : S \rightarrow T$  è olomorfa tra superficie di Riemann, entrambe biolomorfe a  $D$ , allora  $\varrho_T(f(z_1), f(z_2)) \leq \varrho_S(z_1, z_2)$ . Inoltre, se vale l'uguaglianza per qualche  $z_1 \neq z_2$  in  $S$ , allora  $f$  è un biolomorfismo fra  $S$  e  $T$ .*

Un'altra proprietà della metrica di Poincaré è la seguente:

**Teorema 1.1.11.** *Il disco  $D$  con la metrica di Poincaré è completo.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $D$  verifica la seguente proprietà: una curva che congiunge un punto  $z_0$  con un punto di  $\partial D$  ha lunghezza di Poincaré infinita. Dati due punti di  $D$ , possiamo innanzitutto scegliere un automorfismo conforme che sposta il primo punto nell'origine, e il secondo punto in un qualche  $\xi$  sull'asse reale positivo. Per una curva  $c$  fra 0 e  $\xi$  si ha:

$$\int_c ds = \int_c \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \geq \int_c \frac{2|dx|}{1-x^2} \geq \int_{[0, \xi]} \frac{2dx}{1-x^2} = \log \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

L'uguaglianza vale se e solo se  $c$  è il segmento di retta  $[0, \xi]$ . Per ogni  $z \in D$ , ne segue che la distanza di Poincaré  $\varrho = \varrho_D(0, z)$  è uguale a  $\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$  e che il segmento

di retta da 0 a  $z$  è l'unica geodetica minimale nella distanza di Poincaré. È evidente che  $\rho \rightarrow \infty$  se  $|z| \rightarrow 1$ . La dimostrazione della proprietà 2 del Teorema 1.1.1 segue da ciò, quindi  $D$  è completo.  $\square$

### 1.1.2 La sfera di Riemann

Dato l'insieme  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi del piano, prendiamo un punto astratto  $\infty$ , e lo aggiungiamo al piano complesso. Abbiamo quindi  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

La struttura conforme su questa varietà può essere descritta come segue: le carte sono due, una è il piano  $\mathbb{C}$  con la coordinata usuale  $z$ , l'altra è l'insieme  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  con la coordinata  $\zeta = \frac{1}{z}$ .

La nostra varietà  $\widehat{\mathbb{C}}$  è diffeomorfa a  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , la sfera unitaria in  $\mathbb{R}^3$ . Può anche essere visto come il proiettivo  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Possiamo allora dotarlo di una *metrica sferica*  $\sigma$  che è una metrica che sottolinea che il punto all'infinito ha distanza finita dagli altri punti. Questa metrica si costruisce a partire dalla proiezione stereografica dalla sfera unitaria in  $\mathbb{R}^3$  al piano complesso. La sfera unitaria ha una metrica standard, che possiamo trasportare attraverso la proiezione nel piano complesso. Quello che otteniamo è la distanza  $\sigma(z_1, z_2)$  associata alla metrica riemanniana

$$ds = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}$$

Questa metrica ha curvatura gaussiana costante  $+1$ . Notiamo che per questa metrica la mappa  $z \mapsto \frac{1}{z}$  è un'isometria.

Il seguente teorema ci mostra perché le funzioni razionali assumano un ruolo importante nello studio della dinamica delle funzioni olomorfe di  $\widehat{\mathbb{C}}$ :

**Teorema 1.1.12.** *Una funzione  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  è olomorfa se e solo se è una funzione razionale,  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  con  $p(z), q(z)$  due polinomi.*

Possiamo assumere che i due polinomi siano *coprime*, cioè che non abbiano radici comuni.

Chiamiamo  $\mathcal{R}(\widehat{\mathbb{C}})$  l'insieme delle funzioni razionali definite sulla sfera di Riemann. Il grado  $\delta(f)$  di  $f = \frac{p}{q}$  è per definizione il massimo dei gradi di  $p$  e  $q$ . Il grado dipende in modo continuo da  $f$ , cioè:

**Proposizione 1.1.13.** *Sia  $f$  una funzione razionale,  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , e sia  $\delta \in \mathbb{N}$  il suo grado. Allora esiste un intorno  $U(f)$  di  $f$  in  $\mathcal{R}(\widehat{\mathbb{C}})$  tale che se  $f' \in U(f)$  allora  $f'$  ha grado  $\delta$ . Ne segue che  $\delta : \mathcal{R}(\widehat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{N}$  è continua, dove in  $\mathbb{N}$  consideriamo la topologia discreta.*

*Dimostrazione.* Siccome la funzione max fra due funzioni continue è continua, possiamo considerare solo le funzioni polinomiali  $p(z)$ . Questo risultato per un polinomio è un noto problema di algebra.  $\square$

Le funzioni razionali possono assumere anche il valore  $\infty$ , non essendo questo un valore particolare in  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Definizione 1.1.2.** Sia  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  una funzione razionale. Consideriamo l'equazione  $f(z) = c$ . Essa è equivalente all'equazione  $p(z) - cq(z) = 0$ . Se  $\widehat{z}$  è un punto che verifica l'equazione, sappiamo dall'algebra elementare che  $(z - \widehat{z})^k | p(z) - cq(z)$  con  $k \geq 1$  un intero positivo. L'intero  $k$  è chiamato la *molteplicità* della soluzione  $\widehat{z}$ .

**Teorema 1.1.14.** *Sia  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una funzione razionale, con  $d = \delta(f)$  il grado di  $f$ . Scegliamo una costante  $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Allora l'equazione  $f(z) = c$  ha esattamente  $d$  soluzioni in  $\widehat{\mathbb{C}}$ , contate con la loro molteplicità.*

Nel prossimo teorema descriveremo il gruppo  $G(\widehat{\mathbb{C}})$  di tutti i biolomorfismi di  $\widehat{\mathbb{C}}$  in sé. Un automorfismo  $g \in G(\widehat{\mathbb{C}})$  si chiama un'*involutione* se la composizione  $g \circ g$  è la mappa identità di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Prima una definizione preliminare:

**Definizione 1.1.3.** Sappiamo che  $\zeta$  è un punto fisso per una mappa olomorfa  $g$  se e solo se  $g(z) - z$  si annulla in  $\zeta$ . Diciamo che una funzione razionale  $g$  ha in  $\zeta$  un *punto fisso di molteplicità  $k$*  se e solo se  $g(z) - z = 0$  ha una soluzione di molteplicità  $k$  in  $\zeta$ .

Si vede facilmente che un punto  $\zeta$  è fisso di molteplicità  $k \geq 2$  se e solo se  $g'(\zeta) = 1$ .

**Teorema 1.1.15.** *Ogni biolomorfismo  $g$  di  $\widehat{\mathbb{C}}$  in sé può essere espresso come una funzione razionale*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

dove i coefficienti sono numeri complessi con  $\det(ad - bc) \neq 0$ . Ogni automorfismo di  $\widehat{\mathbb{C}}$  diverso dall'identità ha due punti fissi oppure un punto fisso di molteplicità 2 in  $\widehat{\mathbb{C}}$ . In generale, due elementi diversi dall'identità di  $G(\widehat{\mathbb{C}})$  commutano se e solo se hanno esattamente gli stessi punti fissi. L'unica eccezione è data dalle coppie di involuzioni che commutano.

Se normalizziamo  $g(z)$  in modo che  $ad - bc = 1$ , allora i coefficienti sono definiti a meno di cambiamento simultaneo di segno. Il gruppo  $G(\widehat{\mathbb{C}})$  può essere identificato col gruppo  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  che consiste di tutte le matrici  $2 \times 2$  complesse di  $\det 1$  modulo il sottogruppo  $\{\pm I\}$ .

*Osservazione 1.1.3.* Il gruppo  $G(\mathbb{C})$  di tutti i biolomorfismi del piano complesso in sé può essere identificato con il sottogruppo di  $G(\widehat{\mathbb{C}})$  che consiste di tutti gli automorfismi  $g$  che fissano il punto  $\infty$ , perché ogni automorfismo di  $\mathbb{C}$  si estende in modo unico ad un automorfismo conforme di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Ne segue che  $G(\mathbb{C})$  consiste di tutte le trasformazioni affini

$$g(z) = \lambda z + c$$

con coefficienti complessi  $\lambda \neq 0$  e  $c$ .

Un teorema che ci sarà utile nel Capitolo 4 è il seguente:

**Teorema 1.1.16 (principio di riflessione di Schwarz).** *Siano  $H, G \subset \widehat{\mathbb{C}}$  due domini e siano  $H^*, G^*$  le rispettive riflessioni rispetto ai cerchi  $C, B \subset \widehat{\mathbb{C}}$ . Supponiamo che  $H \cap C = \emptyset$ ,  $G \cap B = \emptyset$ . Se  $f$  è una mappa olomorfa  $f : H \rightarrow G$  tale che*

$$f(z) \rightarrow B \text{ per } z \rightarrow C, z \in H$$

*allora  $f$  può essere estesa ad una mappa olomorfa definita sulla parte interna di  $H \cup H^* \cup (C \cap \partial H)$ .*

La dimostrazione di questo teorema si può trovare su [Po].

## 1.2 Il rivestimento universale di una superficie di Riemann

In questo paragrafo accenneremo alla teoria dei rivestimenti universali di una varietà. Per una trattazione più dettagliata si veda ad esempio [Ma].

Se  $S$  è una superficie di Riemann arbitraria, allora il rivestimento universale  $\tilde{S}$  è una superficie semplicemente connessa, con una mappa olomorfa di proiezione canonica  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ . Per il Teorema 1.1.2, questo rivestimento universale deve essere biolomorfo ad uno dei tre modelli dati. Quindi si ha:

**Lemma 1.2.1.** *Ogni superficie di Riemann  $S$  è biolomorfa ad un quoziente della forma  $\tilde{S}/\Gamma$ , dove  $\tilde{S}$  è una superficie semplicemente connessa isomorfa a  $D$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\hat{\mathbb{C}}$ . Qui  $\Gamma$  è un gruppo discreto di biolomorfismi di  $\tilde{S}$  in sé, tale che ogni elemento di  $\Gamma$  che non sia l'identità agisce senza punti fissi in  $\tilde{S}$ .*

Il gruppo discreto  $\Gamma \subset G(\tilde{S})$  non è altro che il gruppo fondamentale  $\pi_1(S)$ . Gli elementi di  $\Gamma$  possono essere caratterizzati come le mappe  $\gamma : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  che rendono commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{S} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{=} & S \end{array}$$

Viceversa, se abbiamo un gruppo dato  $\Gamma$  di biolomorfismi di una superficie semplicemente connessa  $\tilde{S}$  in sé, che sia discreto come sottogruppo di  $G(\tilde{S})$  e tale che ogni elemento diverso dall'identità agisca senza punti fissi, allora  $S = \tilde{S}/\Gamma$  è una superficie tale che  $\tilde{S}$  sia il suo rivestimento universale  $\tilde{S} \xrightarrow{\pi} \tilde{S}/\Gamma$ . Analizziamo adesso le tre possibilità per  $\tilde{S}$ :

**Caso sferico:** Come dimostrato nel Teorema 1.1.15, ogni biolomorfismo della sfera di Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  in sé ha almeno un punto fisso. Quindi, se  $S \cong \hat{\mathbb{C}}/\Gamma$  è una superficie di Riemann con rivestimento universale  $\tilde{S} \cong \hat{\mathbb{C}}$ , allora il gruppo  $\Gamma \subset G(\hat{\mathbb{C}})$  deve essere banale. Quindi  $S$  è isomorfa a  $\hat{\mathbb{C}}$



**Caso euclideo:** Per l'Osservazione 1.1.3, il gruppo  $G(\mathbb{C})$  consiste di tutte le trasformazioni affini  $z \mapsto \lambda z + c$  con  $\lambda \neq 0$ . Ogni tale trasformazione con  $\lambda \neq 1$  ha un punto fisso. Quindi  $\Gamma$  deve essere un gruppo discreto di trasformazioni della forma  $z \mapsto z + c$ . Ci sono tre casi:

1. Se  $\Gamma$  è banale, allora  $S \cong \mathbb{C}$ ;
2. Se  $\Gamma$  ha un solo generatore, allora  $S$  è isomorfa ad un cilindro  $S \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , e a sua volta il cilindro è isomorfo al piano puntato attraverso la mappa esponenziale;
3. Se  $\Gamma$  ha due generatori, allora il quoziente  $\mathbb{C}/\Gamma$  è isomorfo ad un toro.

**Caso iperbolico:** Negli altri casi, il ricoprimento universale deve essere biolomorfo al disco unitario. Queste superficie di Riemann sono dette *iperboliche*.

**Esempi:** Tutte le superficie di Riemann con gruppo fondamentale non abeliano sono iperboliche. Tutte le superficie di genere almeno due sono iperboliche. Se  $a_1, a_2, a_3$  sono tre punti distinti di  $\widehat{\mathbb{C}}$ , allora il complementare  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\} = \Sigma_3$  è una superficie iperbolica, perché ha gruppo fondamentale non abeliano.

Ogni superficie di Riemann iperbolica  $S$  possiede un'unica metrica di Poincaré, che è completa con curvatura gaussiana  $-1$ . Per costruire questa metrica, notiamo che la metrica di Poincaré su  $\widetilde{S}$  è invariante sotto l'azione di  $\Gamma$ . Quindi c'è una e una sola metrica su  $S$  tale che la proiezione  $\widetilde{S} \cong D \rightarrow S$  sia un'isometria locale. C'è allora una distanza di Poincaré associata  $\varrho(z, z') = \varrho_S(z, z')$  che è uguale alla lunghezza della più corta geodetica che unisce  $z$  e  $z'$ . Abbiamo:

**Teorema 1.2.2 (Pick).** *Se  $f : S \rightarrow T$  è una mappa olomorfa fra superficie iperboliche, allora*

$$\varrho_T(f(z), f(z')) \leq \varrho_S(z, z').$$

*Inoltre, se vale l'uguaglianza per qualche  $z \neq z'$ , allora  $f$  è un'isometria locale, cioè,  $f$  preserva l'elemento di distanza infinitesimale  $ds$ , e quindi preserva la distanza fra punti vicini.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa sul fatto che una curva  $c$  in una varietà  $S$  ha la stessa lunghezza della curva  $\tilde{c}$  ottenuta sollevando  $c$  nel rivestimento universale  $\tilde{S}$  di  $S$ . Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{T} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

Consideriamo una curva  $c$  che collega due punti  $z$  e  $z'$ . Si ha che:

$$l_S(c) = l_{\tilde{S}}(\tilde{c}) \geq l_{\tilde{T}}(\tilde{f} \circ \tilde{c}) = l_T(f \circ c) \geq \varrho(f(z), f(z')),$$

dove la seconda disuguaglianza deriva dal Teorema 1.1.10.

Passando all'inf al primo membro di questa disuguaglianza otteniamo la tesi.  $\square$

Come corollario abbiamo il seguente:

**Teorema 1.2.3 (Picard).** *Ogni funzione olomorfa da  $\mathbb{C}$  in  $\hat{\mathbb{C}}$  che omette tre valori differenti deve essere costante. Più in generale, se la superficie di Riemann  $S$  ammette una mappa olomorfa non costante nella superficie  $\Sigma_3$ , allora  $S$  deve essere iperbolica.*

*Dimostrazione.* Alla mappa  $f : S \rightarrow \Sigma_3$  corrisponde una mappa tra i rivestimenti universali delle due superficie, che sono rispettivamente  $\tilde{S}$  e  $\tilde{\Sigma}_3 \cong D$ . Per il teorema 1.1.4, ne segue che  $\tilde{S} \cong D$ .  $\square$

Sia  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  un aperto connesso che omette almeno tre punti, e quindi è iperbolico. Il seguente lemma è utile per comparare la distanza di Poincaré fra due punti di  $U$  con la distanza sferica fra i due stessi punti in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Sia  $N_r(z, \varrho_U)$  la palla chiusa di centro  $z \in U$  di raggio fisso  $r$  rispetto alla metrica di Poincaré  $\varrho_U$ .

**Lemma 1.2.4.** *Se  $\{z_j\}$  converge ad un punto del bordo  $\partial U$  nella metrica sferica, il diametro sferico dell'intorno  $N_r(z_j, \varrho_U)$  tende a 0.*

*Dimostrazione.* Consideriamo dapprima il caso in cui  $U = \Sigma_3 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ . Scegliamo un punto base  $z_0$  in  $U = \Sigma_3$ . Per ogni  $r > 0$  fissato, la palla  $N_r(z_j, \varrho_U)$  è

l'immagine sotto la proiezione di una corrispondente palla nel rivestimento universale e quindi è compatta e connessa. Ora, se  $\{z_j\}$  tende ad uno dei tre punti del bordo, ad esempio  $a_1$ , di  $U$ , esso deve definitivamente lasciare ogni sottoinsieme compatto di  $U$ , quindi la distanza  $\varrho_U(z_j, z_0)$  deve tendere ad  $\infty$ . Per  $r$  fissato, segue che  $N_r(z_j, \varrho_U)$  deve definitivamente essere disgiunto da ogni compatto dato di  $\Sigma_3$ . Allora, siccome  $N_r(z_j, \varrho_U)$  è connesso, questo insieme deve tendere tutto ad  $a_1$  nella metrica sferica.

Consideriamo adesso un insieme iperbolico arbitrario  $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ . Supponiamo che la successione  $\{z_j\}$  converga ad un punto del bordo  $a_1$ . Scelti altri due punti del bordo  $a_2$  e  $a_3$  consideriamo la mappa di inclusione da  $U$  a  $\Sigma_3 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ . Applicando la disuguaglianza di Pick del lemma 1.2.2, abbiamo  $N_r(z_j, \varrho_U) \subset N_r(z_j, \varrho_{\Sigma_3})$ , e ne segue che questo intero intorno converge al punto di bordo  $a_1$  per  $j \rightarrow \infty$ .  $\square$

Usando la metrica di Poincaré, possiamo dare alcune definizioni e teoremi importanti nella dinamica delle funzioni olomorfe, in particolare per la definizione dell'insieme di Julia.

**Definizione 1.2.1.** Una successione di mappe  $f_n : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  su una superficie di Riemann  $S$  si dice che converge *uniformemente sui compatti* alla funzione limite  $g : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  se per ogni sottoinsieme compatto  $K \subset S$  la successione  $\{f_n|_K\}$  delle mappe  $f_n$  ristrette a  $K$  converge uniformemente a  $g|_K$ . Usiamo la metrica sferica  $\sigma(z_1, z_2)$  nello spazio di arrivo  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Questa definizione è equivalente a quella dell'Osservazione 1.1.2.

**Definizione 1.2.2.** Siano  $S$  ed  $S'$  superficie di Riemann. Una famiglia  $\mathcal{F}$  di mappe olomorfe  $f_\alpha : S \rightarrow S'$  è *normale* se ogni successione infinita di mappe di  $\mathcal{F}$  contiene una sottosuccessione che:

1. converge uniformemente sui compatti di  $S$  ad un limite;  
oppure
2. diverge uniformemente sui compatti di  $S$ , cioè le immagini successive di un sottoinsieme compatto di  $S$  sono definitivamente disgiunte da ogni compatto dato di  $S$ .

Notiamo che la funzione limite  $g$ , se esiste, deve essere essa stessa olomorfa, per il teorema di Weierstraß. Non è detto però che essa debba appartenere alla famiglia data.

Vale il seguente:

**Lemma 1.2.5.** *La normalità di una successione di funzioni olomorfe  $\{f_\alpha\}$  con  $f_\alpha : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , dove  $S$  è superficie di Riemann, è una proprietà locale: se ogni punto di  $S$  ha un intorno  $U$  tale che l'insieme  $\{f_\alpha|_U\}$  è normale, allora  $\{f_\alpha\}$  è normale.*

*Dimostrazione.* Scegliamo una base numerabile  $\{U_\beta\}$  di aperti di  $S$ , e consideriamo  $\{f_\alpha|_{U_1}\}$ . Questa successione è normale e quindi c'è una sottosuccessione  $\{f_{\alpha(p)}\}$  che converge uniformemente sui compatti di  $U_1$  a un limite  $g_1$ , oppure che diverge uniformemente sui compatti di  $U_1$  alla funzione  $g_1 = \infty$ . Allora la successione  $f_{\alpha(p)}|_{U_2}$  è normale, e quindi c'è una sottosuccessione  $f_{\alpha(p(q))}$  che converge ancora sui compatti di  $U_2$  ad un limite  $g_2$ , che coincide con  $g_1$  in  $U_1 \cap U_2$ , oppure che diverge uniformemente sui compatti di  $U_2$  alla funzione  $g_2 = \infty$ , che coincide con  $g_1$  in  $U_1 \cap U_2$ . Continuiamo induttivamente questo ragionamento, notando che al passo  $i$ -esimo la funzione limite  $g_i$  coincide con  $g_1$  nell'intersezione  $U_i \cap U_1$ , con  $g_2$  nell'intersezione  $U_i \cap U_2$ , ..., con  $g_{i-1}$  nell'intersezione  $U_i \cap U_{i-1}$ . A questo punto consideriamo la successione costruita prendendo il primo elemento della prima successione, il secondo elemento della seconda sottosuccessione, e così via. Otteniamo una successione che converge a  $g$  sui compatti di ogni aperto della base della topologia di  $S$ , oppure che diverge a  $g$  su ogni aperto della e quindi che converge sui compatti di  $S$ . Il lemma è dimostrato.  $\square$

*Osservazione 1.2.1.* Questa proprietà è valida anche nel caso che, anziché la sfera di Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ , si consideri una superficie di Riemann arbitraria  $S'$ . La dimostrazione è quasi uguale, con la differenza che bisogna porre un po' più di attenzione nel trattare il caso in cui le sottosuccessioni considerate divergono uniformemente sui compatti dell'aperto di definizione.

**Teorema 1.2.6 (Montel).** *Sia  $S$  una superficie di Riemann. Se una famiglia  $\mathcal{F}$  di mappe olomorfe da  $S$  alla sfera di Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  ha valori in un sottoinsieme aperto*

iperbolico  $U$  di  $\widehat{\mathbb{C}}$ , o equivalentemente se omette almeno tre valori di  $\widehat{\mathbb{C}}$ , allora questa famiglia  $\mathcal{F}$  è normale.

Più esplicitamente, ogni successione in  $\mathcal{F}$  di mappe olomorfe  $f_n : S \rightarrow U$  contiene una sottosuccessione che converge, uniformemente sui compatti di  $S$ , ad una mappa olomorfa  $g : S \rightarrow \overline{U}$ . Qui è essenziale che  $g$  possa avere valori nella chiusura di  $U$ . Ad ogni modo, la dimostrazione ci dirà che  $g(S)$  è contenuta in  $U$ , oppure è un singolo punto appartenente al bordo di  $U$ .

*Dimostrazione.* Notiamo innanzitutto che la superficie  $S$  deve essere iperbolica, a meno che le nostre mappe non siano tutte costanti. Quindi  $S$  ha una metrica di Poincaré. Prendiamo un sottoinsieme denso numerabile di punti  $z_j \in S$ , con  $j \geq 1$ . Data una successione di mappe olomorfe  $f_n : S \rightarrow U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , possiamo innanzitutto scegliere una sottosuccessione  $\{f_{n(p)}\}$  delle  $f_n$  tale che le immagini  $f_{n(p)}(z_1)$  convergano ad un limite nella chiusura di  $U$ . Poi scegliamo una sotto-sottosuccessione  $\{f_{n(p(q))}\}$  tale che anche  $f_{n(p(q))}(z_2)$  converga ad un limite, e continuiamo induttivamente. Con una procedura diagonale, poi, prendendo il primo elemento della prima successione, il secondo elemento della seconda sottosuccessione, e così via, costruiamo una sottosuccessione infinita di mappe  $\{g_m\} \subset \{f_n\}$  tale che  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(z_j) \in \overline{U}$  esista per ogni  $z_j$ .

**Caso 1:** Supponiamo che ognuno di questi punti limite in  $\overline{U}$  appartenga all'insieme  $U$ . Prendendo un insieme compatto  $K \subset S$  e un  $\varepsilon > 0$ , possiamo scegliere un numero finito di  $z_j$  tali che ogni punto  $z \in K$  abbia una distanza di Poincaré  $\varrho_S(z, z_j) < \frac{\varepsilon}{3}$  da uno di questi  $z_j$ . Allora possiamo scegliere  $m_0$  tale che  $\varrho_U(g_m(z_j), g_n(z_j)) < \frac{\varepsilon}{3}$  per ognuno di questi  $z_j$ , quando  $m, n > m_0$ . Per ogni  $z \in K$  segue allora, usando il Lemma 1.2.2, che  $\varrho_U(g_m(z), g_n(z)) < \varepsilon$  se  $m, n > m_0$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \varrho_U(g_m(z), g_n(z)) &\leq \varrho_U(g_m(z), g_m(z_j)) + \varrho_U(g_m(z_j), g_n(z_j)) + \varrho_U(g_n(z_j), g_n(z)) \\ &\leq \varrho_S(z, z_j) + \frac{\varepsilon}{3} + \varrho_S(z_j, z) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi  $\{g_m(z)\}$  è una successione di Cauchy uniforme in  $K$ . Ne segue che la successione di funzioni  $\{g_m\}$  converge ad un limite, e questa convergenza è uniforme sui compatti di  $S$ .

**Caso 2:** Supponiamo invece che  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(z_j)$  sia un punto  $a_0 \in \partial U$  per qualche  $z_j$ . Allora segue dal Lemma 1.2.4 che  $g_m(z_i)$  converge ad  $a_0$  per ogni  $i$ . Per ragioni di continuità,  $g_m(z)$  converge ad  $a_0$  per ogni  $z \in S$ ; inoltre questa convergenza è uniforme sui compatti di  $S$  per il Lemma 1.2.4.  $\square$

## 1.3 Topologie sugli spazi compatti

### 1.3.1 La topologia di Hausdorff

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Cominciamo con alcune definizioni:

**Definizione 1.3.1.** Se  $A \subset X$  e  $\varepsilon > 0$  denotiamo con  $V_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$  l' $\varepsilon$ -intorno di  $A$ .

La *distanza di Hausdorff* fra due insiemi  $K_1$  e  $K_2$  è definita come:

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid K_1 \subset V_\varepsilon(K_2) \wedge K_2 \subset V_\varepsilon(K_1)\}.$$

È facile vedere che  $d$  è una distanza sullo spazio  $\mathcal{K}(X)$  dei sottoinsiemi compatti di  $X$ .

**Proposizione 1.3.1.** Se  $X$  è compatto, lo spazio  $\mathcal{K}(X)$  dotato della topologia definita dalla distanza di Hausdorff è uno spazio compatto.

La dimostrazione si può trovare su [HY] o [MZ]

**Definizione 1.3.2.** Una  $\varepsilon$ -catena in uno spazio metrico è un insieme ordinato di palle di raggio minore di  $\varepsilon$ ,  $\{P_i\}_{1 \leq i \leq k}$ , con  $k$  un intero positivo, tali che  $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ . Si dice che una  $\varepsilon$ -catena unisce due punti  $z$  e  $z'$  di uno spazio metrico se  $z \in P_0$  e  $z' \in P_k$ .

**Proposizione 1.3.2.** *Un insieme  $K \subset X$  è connesso se e soltanto se preso un  $\varepsilon > 0$  esiste una  $\varepsilon$ -catena in  $K$  che unisce due arbitrari punti di  $K$ .*

La dimostrazione si può trovare su [Ne]

Indichiamo con  $\mathcal{K}_c(X)$  lo spazio dei *continui* (compatti, connessi e non vuoti) di  $X$ .

Una conseguenza di questo criterio è il seguente corollario:

**Corollario 1.3.3.** *Sia  $X$  compatto. Lo spazio  $\mathcal{K}_c(X)$  è un sottoinsieme chiuso di  $\mathcal{K}(X)$ .*

*Dimostrazione.* Prendiamo una successione di elementi  $\{K_i\}$  di  $\mathcal{K}_c(X)$  che tende a  $K$  nella topologia di Hausdorff. Questo significa che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } i > n \Rightarrow d_H(K_i, K) < \varepsilon$$

cioè  $\inf\{\delta > 0 \mid K_i \subset V_\delta(K) \text{ e } K \subset V_\delta(K_i)\} < \varepsilon$ .

Da questo vediamo che una successione di insiemi non vuoti non può tendere ad un insieme vuoto; infatti per ogni  $\varepsilon$  si ha  $V_\varepsilon(\emptyset) = \emptyset$  e quindi non succede mai che  $V_\varepsilon(\emptyset) \supset P_i$ . Di conseguenza  $d_H(K, \emptyset) = +\infty$  per ogni  $K$ .

Per quanto riguarda la connessione, per connettere due punti  $k_1$  e  $k_2$  di  $K$  con una  $\varepsilon$ -catena, è sufficiente scegliere un elemento della successione che dista da  $K$  meno di  $\varepsilon$  nella distanza di Hausdorff, ad esempio  $K_i$ . Esistono due punti  $k'_1, k'_2 \in K_i$  tali che  $d(k_1, k'_1) < \varepsilon$  e  $d(k_2, k'_2) < \varepsilon$ . A questo punto connettiamo  $k'_1$  e  $k'_2$  con una  $\varepsilon$ -catena  $\{P'_i\}$ . La  $\varepsilon$ -catena che connette  $k_1$  e  $k_2$  è data da  $\{P'_1, P_1, \dots, P_k, P'_k\}$ , con  $P'_1$  la palla di centro  $k'_1$  e raggio  $\varepsilon$ ,  $P'_k$  la palla di centro  $k'_2$  e raggio  $\varepsilon$ . Quindi  $K$  è connesso.  $\square$

*Osservazione 1.3.1.* Fissato un compatto  $K \subset X$ , lo spazio degli insiemi compatti di  $X$  contenenti  $K$  è chiuso in  $\mathcal{K}(X)$ .

Ora, supponiamo che  $X, Y$  siano spazi metrici compatti e  $f \in \mathcal{C}^0(X, Y)$  cioè  $f : X \rightarrow Y$  continua. Allora  $f$  è uniformemente continua per compattezza di  $X$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x, x' \in X, d(x, x') \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$$

e  $\delta$  dipende solamente da  $\varepsilon$ . Denotiamo con  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  il *modulo di continuità* di  $f$ , cioè il massimo  $\delta$  per cui la relazione sopra è valida.

Sia  $f_* : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$  definita da  $f_*(K) = f(K)$ .

**Lemma 1.3.4.** *La mappa  $f_*$  è uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità di  $f$ .*

*Dimostrazione.* sia  $\omega(\varepsilon)$  il modulo di continuità di  $f$ . Allora

$$\forall \varepsilon > 0, d(x_1, x_2) \leq \omega(\varepsilon) \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$$

Se  $d_H(K_1, K_2) \leq \omega(\varepsilon)$ , allora  $K_1 \subset V_{\omega(\varepsilon)}(K_2)$  e  $K_2 \subset V_{\omega(\varepsilon)}(K_1)$ . Nel primo caso si ha che per ogni  $x_1 \in K_1$  esiste  $x_2 \in K_2$  tale che  $d(x_1, x_2) \leq \omega(\varepsilon)$ . Quindi  $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$  e  $f(K_1) \subset V_\varepsilon(f(K_2))$ . Per lo stesso motivo si ha che  $K_2 \subset V_\delta(K_1)$  e quindi  $f(K_2) \subset V_\varepsilon(f(K_1))$ . Dunque  $d_H(K_1, K_2) \leq \omega(\varepsilon) \Rightarrow d_H(f(K_1), f(K_2)) \leq \varepsilon$ . Allora  $f_*$  è uniformemente continua.

Per dimostrare il viceversa, basta notare che  $x_1, x_2 \in X$  sono due compatti, e la distanza di Hausdorff ristretta ai punti di  $X$  coincide con  $d$ . Di conseguenza il modulo di continuità per  $f_*$  va bene come modulo di continuità anche per  $f$ .  $\square$

Consideriamo adesso lo spazio  $\mathcal{C}^0(X, Y)$  con la topologia della convergenza uniforme. Osserviamo che se  $x \in K$ , allora  $\{f(x)\} \subset V_{\delta(f,g)}(g(K))$ , e quindi per  $K \in \mathcal{K}(X)$  si ha  $f(K) \subset V_{\delta(f,g)}(g(K))$  e  $d_H(f(K), g(K)) \leq \delta(f, g)$ .

**Lemma 1.3.5.** *La mappa*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0(X, Y) \times \mathcal{K}(X) &\longrightarrow \mathcal{K}(Y) \\ (f, K) &\longmapsto f(K) \end{aligned}$$

*è continua.*

*Dimostrazione.* Siano  $f_1, f_2, K_1, K_2$  tali che  $\delta(f_1, f_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  e  $d_H(K_1, K_2) \leq \omega(\frac{\varepsilon}{2})$ , dove  $\omega$  è il modulo di continuità di  $f_2$ . Allora si ha:

$$d_H(f_1(K_1), f_2(K_2)) \leq d_H(f_1(K_1), f_2(K_1)) + d_H(f_2(K_1), f_2(K_2)) \leq \delta(f_1, f_2) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$



### 1.3.2 La topologia del kernel di Caratheodory

Per una trattazione completa di questo argomento rimandiamo a [Po].

**Definizione 1.3.3.** Data una successione  $s = \{U_i\}_{i \geq 0}$  di insiemi aperti  $U_i \in \widehat{\mathbb{C}}$ , il *kernel* di  $s$  è definito come:

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \exists i_0 > 0 \text{ per cui } z \in \bigcap_{i \geq i_0} U_i\}$$

**Definizione 1.3.4.** Sia  $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  un numero dato e siano  $G_n$  dei domini semplicemente connessi che verificano  $w_0 \in G_n \subset \widehat{\mathbb{C}}$ . Diciamo che:

$$G_n \rightarrow G \text{ per } n \rightarrow \infty \text{ rispetto a } w_0$$

nel senso della *convergenza del kernel* se:

1.  $G = \{w_0\}$ , oppure  $G$  è un dominio semplicemente connesso diverso da  $\widehat{\mathbb{C}}$  con  $w_0 \in G$  tale che per ogni  $w \in G$  esista un intorno  $U_w$  di  $w$  e un  $\bar{n} > 0$  con  $U_w \in G_n$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ ;
2. Se  $w \in \partial G$  allora esiste  $w_n \in \partial G_n$  tale che  $w_n \rightarrow w$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Si vede facilmente che se una successione di domini tende a  $G$  nella convergenza del kernel allora anche ogni sua sottosuccessione tende a  $G$ . Si ha che:

**Proposizione 1.3.6.** *Il limite  $G$  è unico.*

La convergenza del kernel dipende dalla scelta del punto iniziale  $w_0$ .

Esempio: Sia

$$G_n = \widehat{\mathbb{C}} \setminus (-\infty, -1/n] \setminus [1/n, +\infty),$$

allora, per  $n \rightarrow \infty$ , si ha:

$$G_n \rightarrow \begin{cases} \{\Im(w) > 0\} & \text{se } w_0 = i, \\ \{0\} & \text{se } w_0 = 0, \\ \{\Im(w) < 0\} & \text{se } w_0 = -i. \end{cases}$$

**Esempio:** Una successione crescente di domini converge alla sua unione, a meno che essa non sia  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Esempio:** Sia  $(G_n)$  una successione decrescente di domini e sia  $H$  la parte interna del suo kernel. Se  $w_0 \in H$  allora  $G_n$  converge rispetto a  $w_0$  alla componente connessa di  $H$  che contiene  $w_0$ .

La convergenza del kernel ha questa importante proprietà:

**Teorema 1.3.7 (del kernel di Caratheodory).** *Consideriamo un biolomorfismo  $f_n$  che manda il disco  $D$  in  $G_n$  con  $f(0) = w_0$  e  $f'(0) > 0$ . Se  $G = \{w_0\}$ , allora sia  $f(z) = w_0$ , altrimenti sia  $f$  un biolomorfismo fra  $D$  e  $G$  con  $f(0) = w_0$  e  $f'(0) > 0$ . Allora, per  $n \rightarrow \infty$ , si ha:*

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente sui compatti di } D \Leftrightarrow G_n \rightarrow G \text{ rispetto a } w_0.$$

Consideriamo adesso lo spazio  $\mathcal{K}_\infty$  di tutti i sottoinsiemi compatti connessi non vuoti di  $\widehat{\mathbb{C}}$  che non contengono il punto all'infinito. Chiamiamo  $\Omega_K$  il complementare in  $\widehat{\mathbb{C}}$  dell'insieme  $K \in \mathcal{K}_\infty$ . Denotiamo con  $\mathcal{I}$  l'insieme di tutti gli  $\Omega_K$ , cioè l'insieme di tutti gli intorni semplicemente connessi di  $\infty$ , con la topologia che induce la convergenza del kernel rispetto a  $\infty$ .

**Definizione 1.3.5.** Consideriamo la funzione  $\phi : \mathcal{K}_\infty \rightarrow \mathcal{I}$  definita da  $\phi(K) = \Omega_K$ . La funzione  $\phi$  induce una topologia su  $\mathcal{K}_\infty$ , cioè la topologia meno fine che rende  $\phi$  continua. Chiameremo questa topologia la *topologia di Caratheodory*.

## 1.4 La teoria di Caratheodory

Sia  $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$  un insieme semplicemente connesso, che consideriamo dotato della metrica indotta dalla metrica sferica di  $\widehat{\mathbb{C}}$ , tale che il punto all'infinito appartiene al complementare  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ . Allora c'è un biolomorfismo fra  $U$  e il disco unitario:

$$\psi : D \rightarrow U.$$

In certi casi  $\psi$  si estende ad un omeomorfismo dal disco chiuso  $\overline{D}$  nella chiusura di  $U$ . Questo, però, non è vero in generale, dato che il bordo  $\partial U$  può anche essere un oggetto molto complicato. Ad esempio consideriamo come  $U$  i domini della Figura 1.1. La figura (a) mostra un oggetto il cui bordo è biolomorfo ad  $S^1$ , in figura (b) ad un solo punto di  $\partial U$  corrisponde un insieme di Cantor di punti di  $S^1$ . Nelle figure (c) e (d), invece, ad un intervallo di punti di  $\partial U$  corrisponde un solo punto di  $S^1$ .

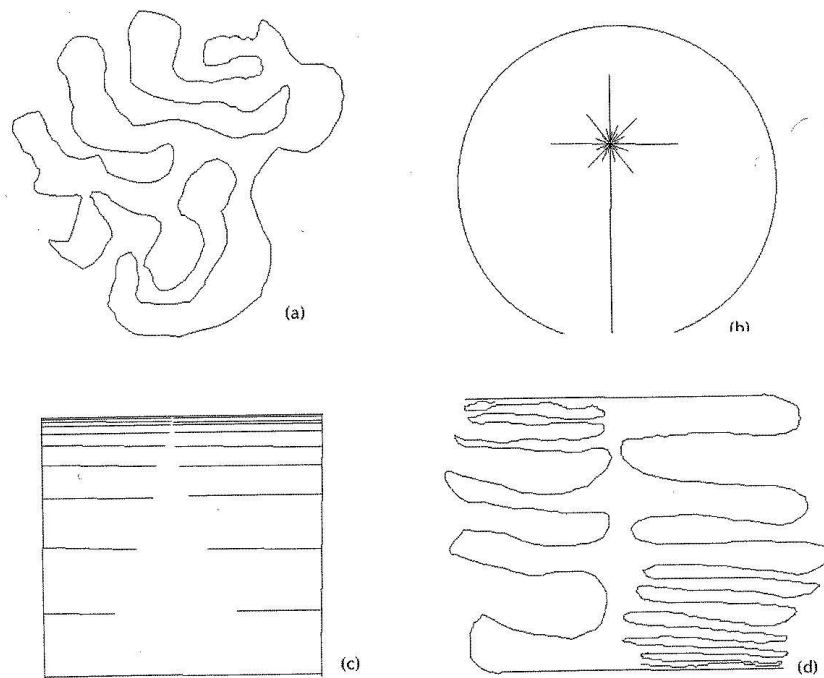


Figura 1.1: Alcune regioni semplicemente connesse di  $\mathbb{C}$  e i loro bordi.

Caratheodory, nel 1913, costruì una teoria che serve per capire le relazioni fra  $\partial U$  e  $\partial D$ .

In questo paragrafo presenteremo la teoria di Caratheodory, non daremo però tutte le dimostrazioni degli enunciati. Per una trattazione completa dell'argomento rimandiamo a [Mi].

### 1.4.1 Alcuni lemmi preliminari

La costruzione delle fini primarie di un insieme, che presenteremo nel prossimo paragrafo, è puramente topologica. Tuttavia, alcuni teoremi che sono citati nel paragrafo 1.4.2 necessitano, per essere dimostrati, di ipotesi di regolarità. Citiamo quindi i risultati preliminari che sono necessari per tali dimostrazioni.

Sia  $I = (0, \delta)$  un intervallo aperto di numeri reali, e sia  $I^2 \subset \mathbb{C}$  il quadrato aperto:

$$I^2 = \{z = x + iy | x, y \in I\}.$$

Supponiamo di aver definito una metrica conforme su  $I^2$  della forma  $\varrho(z) |dz|$  con  $\varrho : I^2 \rightarrow (0, \infty)$  una funzione continua strettamente positiva a valori reali. Non poniamo alcuna ipotesi sulla limitatezza di  $\varrho$ .

Per definizione, l'area di  $I^2$  è uguale a

$$\mathcal{A} = \int \int_{I^2} \varrho(x + iy)^2 dx dy$$

mentre la lunghezza del segmento orizzontale  $y = c$ , con  $c$  una costante, è uguale a

$$L(y) = \int_I \varrho(x + iy) dx.$$

**Lemma 1.4.1 (disuguaglianza lunghezza-area).** *Se  $\mathcal{A}$  è finita, allora  $L(y)$  è finita per Lebesgue q.o.  $y \in I$ , e il valore  $L(y)^2$  soddisfa:*

$$\frac{1}{\delta} \int_I L(y)^2 dy \leq \mathcal{A}$$

con  $\delta = l(I)$ .

*Dimostrazione.* Utilizziamo la disuguaglianza di Schwartz nella forma:

$$\left( \int_I f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_I f(x)^2 dx \right) \left( \int_I g(x)^2 dx \right)$$

con  $f, g \in L^2(I)$ .

Prendendo  $f(x) = 1$  e  $g(x) = \varrho(x + iy)$  otteniamo:

$$L(y)^2 \leq \delta \int_I \varrho(x + iy)^2 dx.$$

Integrando in  $y$  e dividendo per  $\delta$  otteniamo la disuguaglianza cercata. Se  $\mathcal{A}$  è finita, segue allora che per q.o. scelta di  $y$  la lunghezza  $L(y)$  è finita.  $\square$

Due corollari immediati sono i seguenti:

**Corollario 1.4.2.** *L'insieme  $S = \{y \in I \mid L(y) \leq \sqrt{2\mathcal{A}}\}$  ha misura di Lebesgue  $l(S) > \frac{l(I)}{2}$ .*

*Dimostrazione.* Infatti:

$$\delta\mathcal{A} \geq \int_I L(y)^2 dy > \int_{I \setminus S} (\sqrt{2\mathcal{A}})^2 dy + \int_S 0 = 2\mathcal{A}l(I \setminus S)$$

da qui segue la tesi, dato che  $\delta = l(I)$ . Allora

$$\frac{l(I)}{2} > l(I \setminus S) = l(I) - l(S).$$

□

**Corollario 1.4.3.** *Data un'isometria  $\phi : I^2 \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ , dove si considera su  $U$  la metrica indotta dalla metrica sferica, q.o. segmento orizzontale  $y = c$  in  $I^2$ , con  $c$  una costante, viene mandato in una curva di lunghezza sferica finita, e inoltre l'insieme  $S = \{c \in I \mid \phi(y = c) \text{ ha lunghezza sferica} < \sqrt{2\mathcal{A}}\}$  ha misura maggiore di  $\frac{1}{2}$ , dove  $\mathcal{A}$  è l'area di  $U$ .*

*Dimostrazione.* Immediata. □

Un simile enunciato vale per i segmenti  $x = c$ , con  $c$  una costante.

Citiamo adesso un risultato di analisi che ci servirà per dimostrare il Teorema 1.4.5.

**Teorema 1.4.4 (Fatou-Riesz).** *Supponiamo che  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  sia limitata e olomorfa su tutto  $D$ . Il limite radiale:*

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$$

*esiste per q.o.  $\theta$ , inoltre, se è uguale a 0 per ogni  $\theta \in E \subset [0, 2\pi]$ , dove  $E$  è un insieme di misura positiva, allora  $f$  è la funzione nulla.*

Consideriamo ancora  $\psi : D \rightarrow U$  un biolomorfismo.

**Teorema 1.4.5 (Riesz).** *Per Lebesgue q.o. punto  $e^{i\theta}$  di  $\partial D$  la linea radiale  $r \mapsto re^{i\theta}$  è mandata da  $\psi$  in una in una curva di lunghezza sferica finita di  $U$ . In particolare si ha che il limite:*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \psi(re^{i\theta}) \in \partial U$$

*esiste per Lebesgue q.o.  $\theta$ . Inoltre, fissato un punto  $u_0 \in \partial U$ , allora l'insieme dei  $\theta$  per cui questo limite radiale è uguale a  $u_0$  ha misura di Lebesgue 0.*

Chiameremo questo limite radiale il *punto fine* della curva  $\psi$ . Diremo che q.o. curva immagine  $r \mapsto \psi(re^{i\theta})$  in  $U$  *finisce* in qualche punto  $u_0 \in \partial U$ , e che quasi sempre valori differenti di  $\theta$  corrispondono a punti fine distinti.

*Dimostrazione.* La prima affermazione del teorema segue dal Corollario 1.4.3. Infatti sia  $H^-$  il semipiano sinistro, cioè l'insieme  $H^- = \{x + iy \in \mathbb{C} | x < 0\}$ . Mandiamo  $H^-$  in  $D \setminus \{0\}$  attraverso la mappa esponenziale  $\exp : x + iy \mapsto e^x e^{iy}$ . Allora il quadrato

$$Q = \{x + iy \in H^- | -2\pi < x < 0, 0 < y < 2\pi\}$$

viene mandato da  $\psi \circ \exp$  in un intorno del bordo in  $U$ . Per il corollario 1.4.3 si ha che per q.o.  $c \in \mathbb{R}$  il segmento orizzontale  $y = c$  in  $Q$  viene mandato da  $\psi \circ \exp$  in una curva di lunghezza sferica finita. Su  $H^-$  la mappa esponenziale si comporta allo stesso modo per  $y$  nell'intervallo  $2k\pi < y < 2k + 1\pi$  al variare di  $k$ . Quindi anche per  $H^-$  vale che per q.o.  $c$  il segmento  $y = c$  viene mandato da  $\psi \circ \exp$  in un punto di lunghezza sferica finita.

Passiamo alla seconda affermazione. Se  $U = \psi(D)$  è un insieme limitato di  $\mathbb{C}$ , allora, per il Teorema 1.4.4 solo un insieme di direzioni  $e^{i\theta}$  di misura 0 può avere come limite radiale un certo  $u_0$ . Dobbiamo allora ridurci al caso di una  $\psi$  limitata, avendo l'ipotesi che  $\psi$  è iniettiva.

Supponiamo dapprima che  $\psi(D) = U$  ometta un intero intorno di un punto  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Allora consideriamo una trasformazione lineare fratta  $t$  che manda  $z_0$  in  $\infty$ . Il teorema è vero per  $\psi$  se e solo se è vero per  $t \circ \psi = \psi'$ . Quindi, senza perdere di generalità possiamo supporre che  $\psi$  sia limitata. In generale,  $\psi(D)$  deve omettere almeno due

valori che, a meno composizione con un opportuno biolomorfismo di  $\widehat{\mathbb{C}}$ , possiamo supporre che siano 0 e  $\infty$ . Allora  $\sqrt{\psi}$  è definita come funzione, ed omette un intero insieme aperto di punti. Siccome il teorema è valido per  $\psi$  se e solo se è valido per  $\sqrt{\psi}$ , ci siamo ridotti al caso precedente.  $\square$

**Lemma 1.4.6.** *Se due differenti curve  $c : r \mapsto \psi(re^{i\theta_1})$  e  $d : r \mapsto \psi(re^{i\theta_2})$  hanno un estremo nello stesso punto  $u_0 \in \partial U$ , allora questo punto disconnette il bordo di  $U$ .*

*Dimostrazione.* Le curve  $c$  e  $d$ , insieme ai loro estremi, formano una curva di Jordan  $\Gamma$ , che disconnette la sfera  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Gli angoli  $\theta_1, \theta_2$  sconnettono il cerchio  $\partial D \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  in due intervalli  $I, J$  connessi. In particolare, per ragioni di continuità, per q.o.  $\theta \in I$  la curva  $r \mapsto \psi(re^{i\theta})$  finisce in un punto del bordo che appartiene ad una delle due componenti connesse di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ , per q.o.  $\theta \in J$  la curva  $r \mapsto \psi(re^{i\theta})$  finisce in un punto del bordo che appartiene all'altra componente connessa di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ . La curva  $\Gamma$  interseca  $\partial U$  nel solo punto  $u_0$ . Quindi  $u_0$  sconnette  $\partial U$ .  $\square$

## 1.4.2 Le fini primarie

Introduciamo una costruzione che dipende soltanto dalla topologia della coppia  $(\overline{U}, \partial U)$  e non dalla loro struttura olomorfa.

Assumiamo ancora che  $U$  sia un insieme aperto semplicemente connesso di  $\widehat{\mathbb{C}}$  e che  $\partial U$  abbia almeno due elementi.

**Definizione 1.4.1.** Un *arco trasverso* per la coppia  $(\overline{U}, \partial U)$  è un sottoinsieme  $A \subset U$  omeomorfo all'intervallo  $(0, 1)$ , tale che la chiusura di  $A$  è omeomorfa ad un intervallo chiuso con  $\overline{A} \cap \partial U$  composto solo dai due estremi.

**Lemma 1.4.7.** *Ogni arco trasverso  $A$  divide  $U$  in due componenti connesse.*

**Definizione 1.4.2.** Ognuna delle due componenti connesse  $N_1 \subset U$  e  $N_2 \subset U$  di  $U \setminus A$  viene detta un *intorno tagliato*.

Una *catena fondamentale*  $\mathcal{N} = \{N_j\}$  in  $U$  è una successione

$$N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \cdots$$

di intorni tagliati  $N_j \subset U$  tale che le chiusure  $\overline{A_j}$  dei corrispondenti archi trasversi  $A_j = U \cap \partial N_j$  sono disgiunte, e tale che il diametro di  $\overline{A_j}$  tende a 0, nella metrica sferica, per  $j \rightarrow \infty$ .

Due catene fondamentali  $\{N_j\}$  e  $\{N'_k\}$  sono equivalenti se, per ogni  $j$ , esiste un  $k$  tale che  $N_j \supset N'_k$  e se, viceversa, per ogni  $k$  esiste un  $j$  tale che  $N'_k \supset N_j$ . Una classe di equivalenza  $\mathcal{E}$  di catene fondamentali è detta una *fine primaria* per la coppia  $(\overline{U}, \partial U)$ .

Da notare che nella definizione di catena fondamentale è richiesto soltanto che il diametro di  $A_j$  diventi piccolo per  $j \rightarrow \infty$ . In generale il diametro di  $N_j$  può rimanere lontano da 0. Ad esempio, considerando la Figura 1.1, nelle figure (c) e (d) ci sono alcune successioni di intorni tagliati in cui il diametro degli intorni tagliati rimane sempre lontano da 0.

**Definizione 1.4.3.** L'intersezione delle chiusure  $\overline{N_j} \subset \overline{U}$  è chiamata l'*impressione* della catena fondamentale  $\{N_j\}$  (o della corrispondente fine  $\mathcal{E}$ ).

L'impressione di una fine primaria è detta di *primo tipo* se è formata da un unico punto, altrimenti è detta di *secondo tipo*. Per esempio, se consideriamo la Figura 1.1, nelle figure (a) e (b) tutte le fini primarie sono di primo tipo, mentre nelle figure (c) e (d) l'impressione di una fine primaria può consistere in un insieme non banale, in questo caso l'impressione è di secondo tipo.

**Lemma 1.4.8.** Per ogni catena fondamentale  $\{N_j\}$ , l'intersezione degli insiemi aperti  $\{N_j\}$  è vuota. Invece, l'impressione  $\bigcap_j \overline{N_j}$  è un sottoinsieme compatto connesso non vuoto di  $\partial U$ .

*Osservazione 1.4.1.* L'impressione può consistere di un'unico punto  $z_0 \in \partial U$ , in questo caso diciamo che  $\mathcal{E}$  converge al punto  $z_0$  e che  $\mathcal{E}$  è di *primo tipo*. Se invece l'impressione è un compatto connesso non banale, la fine primaria è detta di *secondo tipo*.

Notiamo anche che due fini primarie distinte possono avere la stessa impressione.

Diciamo che due catene fondamentali sono definitivamente disgiunte se esistono  $l, m$  tali che  $N_j \cap N'_k = \emptyset$  quando  $j > l, k > m$ .



**Lemma 1.4.9.** *Siano  $\{N_j\}$  e  $\{N'_k\}$  due catene fondamentali in  $U$ . Allora vale una e una sola delle seguenti affermazioni:*

1.  $\{N_j\}$  e  $\{N'_k\}$  sono equivalenti;
2.  $\{N_j\}$  e  $\{N'_k\}$  sono definitivamente disgiunte.

Passiamo adesso a trattare l'argomento da un punto di vista olomorfo.

Sia  $\psi : D \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  un biolomorfismo.

**Lemma 1.4.10.** *Dato un punto  $e^{i\theta}$  sul cerchio  $\partial D$ , esiste una catena fondamentale  $\{N_j\}$  in  $D$  che converge a  $e^{i\theta}$  e che viene mandata da  $\psi$  in una catena fondamentale  $\{\psi(N_j)\}$  in  $U$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo costruire una catena  $N_1 \supset N_2 \supset \dots$  in  $D$  che converge a  $e^{i\theta}$  tale che gli archi trasversi associati  $A_j$  vengono mandati in archi trasversi di  $U$  che hanno chiusure disgiunte, e il cui diametro tende a 0. Come nella dimostrazione del Teorema 1.4.5 usiamo la mappa esponenziale  $\exp : H^- \rightarrow D \setminus \{0\}$ , con  $H^-$  il semipiano sinistro. Costruiamo allora degli intorni tagliati  $N'_j$  in  $H^-$  che convergono al punto di bordo  $i\theta$  e li mandiamo successivamente in  $D$  attraverso  $\exp$ .

Sceghieremo come  $N_j$  un rettangolo aperto:

$$N'_j = \{x + iy \in H^- \mid -\varepsilon < x < 0, c_1 < y < c_2\}$$

in  $H^-$ , con  $c_1 < \theta < c_2$ . Il corrispondente arco trasverso  $A'_j \subset H^-$  sarà l'unione di tre dei quattro lati del rettangolo e avrà come estremi i punti  $ic_1$  e  $ic_2$  in  $\partial H^-$ .

Costruiamo gli  $N'_j$  induttivamente: Scegliamo  $N'_1$  come un rettangolo a piacere, che soddisfi quanto detto sopra. Dati allora  $N'_1, \dots, N'_{j-1}$ , innanzitutto sia  $\delta < \frac{1}{j}$  abbastanza piccolo affinché il quadrato  $S_\delta$  definito da:

$$S_\delta = \{x + iy \in H^- \mid -2\delta \leq x < 0, \theta - \delta \leq y \leq \theta + \delta\}$$

sia contenuto in  $N'_{j-1}$ . Mandiamo  $S_\delta$  in  $U$  attraverso  $\psi \circ \exp$ , e sia  $\mathcal{A}_\delta$  l'area sferica di  $\psi \circ \exp(S_\delta)$ . Si ha che  $\mathcal{A}_\delta \rightarrow 0$  per  $\delta \rightarrow 0$ .

Usando il Corollario 1.4.3 possiamo trovare delle costanti  $c_1$  e  $c_2$  tali che  $\theta - \delta < c_1 < \theta < c_2 < \theta + \delta$  e tali che i due segmenti orizzontali  $y = c_1$  e  $y = c_2$  in  $S_\delta$  vengano mandati in curve di lunghezza al più  $\sqrt{2\mathcal{A}_\delta}$  in  $U \subset \mathbb{C}$ . Questo significa che l'immagine di questi segmenti in  $U$  finisce in un punto ben definito di  $\partial U$  per  $x \rightarrow 0$ .

Scegliamo inoltre le due costanti in modo che questi punti siano tutti distinti uno dall'altro, e anche in modo che siano distinti dagli estremi degli archi trasversi  $\psi \circ \exp(A_h)$  con  $h < j$ . Questo è possibile grazie al Teorema 1.4.5.

Infine scegliamo un segmento verticale  $x = -\varepsilon$  in  $S_\delta$  che venga mandato anch'esso in una curva di lunghezza minore o uguale a  $\sqrt{2\mathcal{A}_\delta}$  in  $U$ . Definiamo allora  $N'_j$  come:

$$N'_j = \{x + iy \in H^- \mid -\varepsilon < x < 0, c_1 < y < c_2\}.$$

Abbiamo costruito una catena  $N'_1 \supset N'_2 \supset \dots$  in  $H^-$ . Applicando la mappa  $\exp$  otteniamo una catena fondamentale

$$N_1 \supset N_2 \supset \dots$$

con  $N_j = \exp(N'_j) \subset D$ . Questa catena verifica le proprietà richieste.  $\square$

Per il biolomorfismo inverso vale il seguente:

**Corollario 1.4.11 (Koebe).** *Una curva  $c : [0, 1) \rightarrow U$  che finisce in un punto ben definito di  $\partial U$  viene mandata da  $\psi^{-1}$  in una curva in  $D$  che finisce in un punto ben definito di  $\partial D$ . Inoltre due curve che finiscono in due punti distinti di  $\partial U$  vengono mandate da  $\psi^{-1}$  in due curve che finiscono in due punti distinti di  $\partial D$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $e^{i\theta} \in \partial D$  un punto di accumulazione della curva  $t \mapsto 1$ . Scegliamo una catena fondamentale  $\{N_j\}$  che converge ad  $e^{i\theta}$  come nel Lemma 1.4.10, tale che l'immagine attraverso  $\psi$  sia una catena fondamentale  $\{\psi(N_j)\}$  in  $U$ . Dimostriamo che, fissato  $j_0$ ,  $\psi^{-1}(c(t)) \in N_{j_0}$  per ogni  $t$  abbastanza vicino a 1. Se così non fosse, potremmo trovare una successione  $\{t_j\}$  convergente a 1 tale che  $\psi^{-1}(c(t_j)) \notin N_{j_0}$ . Siccome  $e^{i\theta}$  è un punto di accumulazione della curva  $\psi^{-1} \circ c$  in  $D$ , questo implica che la curva incontra infinite volte gli archi trasversi  $A_{j_0}$  e  $A_{j_0+1}$ . Quindi la curva

immagine  $c(t)$  deve incontrare infinite volte sia  $\psi(A_{j_0})$  che  $\psi(A_{j_0+1})$ . Siccome la distanza  $d(\psi(A_{j_0}), \psi(A_{j_0+1}))$  è positiva, questo significa  $c(t)$  ha lunghezza infinita, e quindi non può convergere per  $t \rightarrow 1$ .

Supponiamo che due curve  $c : [0, 1) \rightarrow U$  e  $d : [0, 1) \rightarrow U$  finiscano in due punti distinti di  $\partial U$  e che invece le immagini inverse  $\psi^{-1}(c)$  e  $\psi^{-1}(d)$  finiscano nello stesso punto. Allora scegliamo  $\{N_j\}$  come sopra. Ogni arco trasverso  $A_j$  con  $j$  abbastanza grande incontra sia  $\psi^{-1}(c)$  che  $\psi^{-1}(d)$ . Quindi l'arco trasverso immagine  $\psi(a_j)$  incontra  $c$  e  $d$ . Se  $j \rightarrow \infty$  il diametro di  $A_j$  tende a 0, mentre i punti di intersezione fra  $\psi(A_j)$  e le due curve tendono a due punti distinti. Questo è impossibile.  $\square$

**Corollario 1.4.12.** *Ogni catena fondamentale  $\{N'_k\}$  in  $U$  viene mandata da  $\psi^{-1} : U \rightarrow D$  in una catena fondamentale  $\{\psi^{-1}(N'_k)\}$  in  $D$ .*

**Definizione 1.4.4.** La *compattificazione di Caratheodory*  $\widehat{U}$  di  $U$  è l'unione disgiunta di  $U$  e dell'insieme di tutte le fini primarie di  $U$ , con la seguente topologia: per ogni intorno tagliato  $N \subset U$ , sia  $\widetilde{N} \subset \widehat{U}$  l'unione di  $N$  e dell'insieme di tutte le fini primarie  $\mathcal{E}$  che sono rappresentate da una catena fondamentale  $\{N_j\}$  con  $N_j \subset N$  per ogni  $j$ . Questi intorni  $\widetilde{N}$ , insieme ai sottoinsiemi aperti di  $U$ , formano una base per la topologia richiesta.

*Osservazione 1.4.2.* Sia  $U$  un aperto semplicemente connesso di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Sia  $f : U \rightarrow U$  una funzione olomorfa. Allora  $f$  induce un'azione sull'insieme delle fini primarie di  $U$ . Questa azione è ben definita perché due catene fondamentali equivalenti vengono mandate in due catene fondamentali equivalenti.

**Teorema 1.4.13.** *La compactificazione di Caratheodory  $\widehat{D}$  del disco aperto è omeomorfa al disco chiuso  $\overline{D}$ . Inoltre, ogni biolomorfismo  $\psi : D \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  si estende in modo unico ad un omeomorfismo da  $\overline{D}$  (o  $\widehat{D}$ ) in  $\widehat{U}$ .*

*Dimostrazione.* Segue da quanto detto finora.  $\square$

### 1.4.3 Connessione locale

**Definizione 1.4.5.** Uno spazio di Hausdorff  $X$  è detto *localmente connesso* se ogni punto  $x \in X$  ha intorni connessi arbitrariamente piccoli (non necessariamente aperti).

**Lemma 1.4.14.** *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1.  $X$  è localmente connesso;
2. Ogni  $x \in X$  ha intorni aperti connessi arbitrariamente piccoli;
3. Ogni sottoinsieme aperto di  $X$  è unione di sottoinsiemi aperti connessi.

*Se  $X$  è metrico compatto è equivalente anche:*

4.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x, y \ d(x, y) < \delta \Rightarrow x, y \in A \subset X$  con  $A$  connesso di diametro  $< \varepsilon$ .

**Teorema 1.4.15 (Caratheodory).** *Un biolomorfismo  $\psi : D \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  si estende ad una mappa continua da  $\bar{D}$  in  $\bar{U}$  se e solo se il bordo  $\partial U$  è localmente connesso, o, equivalentemente, se il complementare  $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$  è localmente connesso.*

**Teorema 1.4.16.** *Se  $\partial U$  è una curva di Jordan, allora un biolomorfismo  $\psi : D \rightarrow U$  si estende ad un biolomorfismo da  $\bar{D}$  in  $\bar{U}$ .*

# Capitolo 2

## Dinamica delle funzioni olomorfe di una variabile complessa

### 2.1 L'insieme di Julia

#### 2.1.1 Dinamica sulla sfera di Riemann

**Definizione 2.1.1.** Sia  $S$  una superficie di Riemann. Sia  $f : S \rightarrow S$  una mappa olomorfa non costante, e sia  $f^n : S \rightarrow S$  l'iterata  $n$ -esima. Fissato un punto  $z_0 \in S$ , abbiamo la seguente dicotomia: se esiste un intorno  $U$  di  $z_0$  tale che la successione delle iterate  $\{f^n\}$  ristretta a  $U$  sia una famiglia normale, allora diciamo che  $z_0$  è un punto *regolare*, e in tal caso  $z_0$  appartiene all'*insieme di Fatou*  $F(f)$  di  $f$ . Altrimenti, se tale intorno non esiste, diciamo che  $z_0$  appartiene all'*insieme di Julia*  $J(f)$  di  $f$ .

Quindi, per definizione, l'insieme di Fatou è aperto, mentre l'insieme di Julia è chiuso.

**Definizione 2.1.2.** Chiamiamo *componente di Fatou* una componente connessa dell'insieme di Fatou.

**Esempio:** Consideriamo ad esempio la mappa quadratica  $s : z \mapsto z^2$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Il disco aperto  $D$  è contenuto nell'insieme di Fatou di  $S$ , perché le iterate successive in

ogni suo sottoinsieme compatto convergono uniformemente alla funzione  $z \mapsto 0$ . Per lo stesso motivo,  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$  è contenuto nell'insieme di Fatou, perché la successione delle iterate converge alla funzione  $z \mapsto \infty$  in ogni insieme compatto del complementare. D'altra parte, se  $z_0$  è nel cerchio unitario, allora in ogni intorno di  $z_0$  le iterate  $f^n$  non possono avere limite, perché un eventuale limite dovrebbe essere discontinuo. Quindi  $J(S)$  è uguale esattamente al cerchio unitario.

Gli insiemi di Julia delimitati da una curva liscia, come questo, sono alquanto rari; di solito gli insiemi di Julia sono molto più irregolari.

**Esempio:** Senza entrare in particolari, accenniamo alle uniche possibilità in cui l'insieme di Julia è una varietà liscia:

1. Come abbiamo già visto, il cerchio  $S^1$  appare come insieme di Julia della mappa  $f_n : z \mapsto z^n$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq -1, 0, 1$ . Allo stesso modo, l'insieme  $\mathbb{R} \cup \infty$  può apparire come insieme di Julia. Infatti, esiste un automorfismo conforme  $\phi$  di  $\widehat{\mathbb{C}}$  che manda il cerchio  $S^1$  in  $\mathbb{R} \cup \infty$ . La mappa  $\phi \circ f_n \circ \phi^{-1}$ , allora, per ogni  $n$ , ha  $\mathbb{R} \cup \infty$  come insieme di Julia.
2. L'intervallo può apparire come insieme di Julia. Ad esempio, la mappa  $z \mapsto z^2 - 2$  ha come insieme di Julia l'intervallo chiuso  $I = [-2, 2]$ .
3. Tutto  $\widehat{\mathbb{C}}$  può anch'esso apparire come insieme di Julia. Ad esempio, la mappa

$$f_a(w) = \frac{(w^2 - a)^2}{4w(w - 1)(w - a)},$$

con  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , ha tutto  $\widehat{\mathbb{C}}$  come insieme di Julia.

**Definizione 2.1.3.** La *grande orbita* di un punto  $z$  sotto l'iterazione di  $f : S \rightarrow S$  è l'insieme  $GO(z, f)$  di tutti i punti  $z' \in S$  le cui orbite intersecano definitivamente l'orbita di  $z$ . Quindi  $z$  e  $z'$  hanno la stessa grande orbita se e solo se per qualche  $m, n \geq 0$  si ha  $f^m(z) = f^n(z')$ .

**Definizione 2.1.4.** Un insieme  $A \subset S$  si dice che è *completamente invariante* per  $f$  se per ogni  $z \in A$  tutta la grande orbita  $GO(z, f)$  è contenuta in  $A$ . In altri termini, se  $f^{-1}(A) = A = f(A)$ .

**Lemma 2.1.1.** *L'insieme di Julia  $J(f)$  di una mappa olomorfa  $f : S \rightarrow S$  è completamente invariante per  $f$ .*

*Dimostrazione.* È equivalente dimostrare che l'insieme di Fatou  $F(f)$  è completamente invariante. Una mappa olomorfa non costante è aperta. Detto questo, supponiamo che  $z \in F$ , allora c'è un intorno di  $z$ , chiamiamolo  $N$ , in cui la successione delle  $f^n$  è una famiglia normale. In questo caso, la successione delle  $f^{n+1}$  è normale nell'aperto  $f(N)$ , che è un intorno di  $f(z)$ . Viceversa, sia  $f(z) \in F$ , allora esiste un intorno di  $f(z)$ , chiamiamolo  $N'$ , in cui la successione delle  $f^{n+1}$  è una famiglia normale. Allora,  $f^{-1}(N')$  è un intorno di  $z$  e la successione delle iterate  $\{f, f^2, \dots\}$  è normale, perché per la normalità di una successione non è importante il primo elemento.  $\square$

Abbiamo anche:

**Lemma 2.1.2.** *Per ogni  $n > 0$ , l'insieme di Julia  $J(f^n)$  dell' $n$ -esima iterata coincide con l'insieme di Julia  $J(f)$ .*

*Dimostrazione.* Ancora è sufficiente dimostrare che  $F(f) = F(f^n)$ . Fissiamo un  $n$ . Sia  $z \in F(f)$ , ciò significa che la successione delle iterate  $\{f, f^2, \dots\}$  è normale. Ma allora anche la successione delle iterate  $\{f^n, f^{2n}, \dots\}$ , essendo un suo sottoinsieme, è normale.

Viceversa, sia  $z \in F(f^n)$ , ciò significa che la successione delle iterate  $\{f^n, f^{2n}, \dots\}$  è normale. Dobbiamo dimostrare che anche la successione delle iterate  $\{f, f^2, \dots\}$  è normale. Sia  $S = \{f^i\}$ , con  $i \in I \subset \mathbb{N}$  una sottosuccessione. Se in  $I$  c'è un numero infinito di multipli di  $n$ , abbiamo finito. Altrimenti consideriamo le classi di congruenza di  $1 \pmod n, 2 \pmod n, \dots$ , finché non troviamo un  $k < n$  tale che ci sono un numero infinito di  $i \in I$  tali che  $i \equiv k \pmod n$ . Consideriamo allora  $H$  l'insieme di questi  $i$ . La successione  $\{f^{n-k} \circ f^i\}$  con  $i \in H$  ha una sottosuccessione

che converge, perché sottosuccessione di  $\{f^n, f^{2n}, \dots\}$ , allora anche  $\{f^i\}$  con  $i \in H$  ha una sottosuccessione che converge.  $\square$

## 2.1.2 I punti periodici e l'insieme di Julia

Consideriamo un'orbita periodica, o ciclo:

$$z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_{n-1} \mapsto z_n = z_0.$$

Se i punti  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sono tutti distinti, allora l'intero  $n$  è chiamato il *periodo*. Se la nostra superficie di Riemann  $S$  è  $\mathbb{C}$  (o un aperto di  $\mathbb{C}$ ), allora la derivata

$$\lambda = (f^n)'(z_j) = f'(z_1)f'(z_2) \cdots f'(z_n)$$

è uguale in ogni punto dell'orbita ed è un numero complesso che chiamiamo il *moltiplicatore* dell'orbita.

Nel caso di una superficie di Riemann qualsiasi, non è possibile definire le singole derivate a causa del fatto che gli spazi tangenti sono diversi e non identificabili fra di loro in modo canonico. Se però consideriamo  $f^n$ , in questo caso la funzione ha un punto fisso in ognuno degli  $z_i$  e il moltiplicatore coincide con il differenziale nel punto.

**Definizione 2.1.5.** Sia data un'orbita periodica, in una superficie di Riemann  $S$ , rispetto ad una funzione olomorfa  $f$ . Sia  $\lambda$  il suo moltiplicatore. Allora l'orbita è:

1. *super-attrattiva* se  $\lambda = 0$ ;
2. *attrattiva* se  $0 < \lambda < 1$ ;
3. *repulsiva* se  $|\lambda| > 1$ ;
4. *indifferente razionale* se  $|\lambda| = 1$  e  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$  con  $|\xi| \in \mathbb{Q}$ ;
5. *indifferente irrazionale* se  $|\lambda| = 1$  e  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$  con  $|\xi| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

possiamo unire la 1 e la 2 nella definizione di *orbita attrattiva*, la 4 e la 5 nella definizione di *orbita indifferente*.



**Lemma 2.1.3.** *Sia  $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \cdots \mapsto z_{n-1} \mapsto z_n = z_0$  un'orbita di periodo  $n$ .*

*Se l'orbita è attrattiva, c'è un intorno  $U$  del punto fisso di  $f^n$  in cui la successione delle iterate  $\{f^{nm}\}$  ristretta a  $U$  converge al punto fisso.*

*Viceversa, se l'orbita è repulsiva, allora c'è un intorno del punto fisso di  $f^n$  da cui le orbite 'scappano', cioè un punto in quest'intorno deve uscire dall'intorno stesso sotto iterazione di  $f$ .*

*Dimostrazione.* Sia l'orbita  $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \cdots \mapsto z_{n-1} \mapsto z_n = z_0$  attrattiva, allora  $|\lambda| < 1$  e quindi c'è un numero reale  $\alpha$ , tale che  $|\lambda| < \alpha < 1$  e un disco  $D$  centrato nel punto fisso  $Z_0$  di  $f^n$  tale che, in  $D$ ,  $|f^n(z) - Z_0| = |f^n(z) - f^n(Z_0)| < \alpha |z - Z_0|$ . Iterando,  $|f^{mn}(z) - f^{mn}(Z_0)| < \alpha^m |z - Z_0|$  e  $\alpha^m \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow \infty$ .

Se invece l'orbita è repulsiva, la tesi segue dal ragionamento fatto per  $f$  considerando  $f^{-1}$ . □

**Definizione 2.1.6.** Nel caso di un'orbita attrattiva, chiamiamo *bacino di attrazione* dell'orbita l'aperto  $\Omega$  di tutti i punti  $z$  di  $S$  per cui le iterate successive  $f^n(z), f^{2n}(z), \dots$ , convergono a qualche punto dell'orbita periodica.

**Teorema 2.1.4.** *Ogni orbita periodica attrattiva è contenuta nell'insieme di Fatou. L'intero bacino di attrazione  $\Omega$  dell'orbita è contenuto nell'insieme di Fatou. Invece il bordo  $\partial\Omega$  del bacino di attrazione è contenuto nell'insieme di Julia, e ogni orbita periodica repulsiva è contenuta nell'insieme di Julia.*

*Dimostrazione.* Possiamo ridurci al caso di un punto fisso  $f(z_0) = z_0$ , per il Lemma 2.1.2. Se  $z_0$  è attrattivo, sappiamo che le iterate successive di  $f$ , ristrette ad un piccolo intorno di  $z_0$ , convergono uniformemente alla funzione costante  $z_0$ . La stessa cosa è vera per un sottoinsieme compatto del bacino  $\Omega$ . D'altra parte, nell'intorno di un punto di bordo di questo bacino, una successione di iterate non può convergere ad alcun limite continuo.

Se  $z$  è repulsivo, nessuna sottosuccessione delle iterate può convergere uniformemente vicino a  $z_0$ , perché la derivata  $\frac{df^n}{dz}$  in  $z_0$  ha valore  $\lambda^n$ , che diverge all'infinito se  $n \rightarrow \infty$ . □

Il caso di punti fissi indifferenti è molto più complicato da classificare. Questa classificazione verrà discussa a pag.48 e sarà cruciale anche nello svolgimento della parte principale della tesi trattata nel capitolo 4.

**Definizione 2.1.7.** Un punto periodico di periodo  $k$  è chiamato *parabolico* se il suo moltiplicatore  $\lambda$  è una radice  $n$ -esima dell'unità, e  $f^{kn}$  non è la mappa identità.

Dimostreremo successivamente che ogni punto parabolico appartiene all'insieme di Julia, che, come specificato nel prossimo lemma, non è vuoto, a meno che non ci troviamo in un caso banale.

**Lemma 2.1.5.** *Se  $f$  è una mappa razionale di grado  $d \geq 2$ , allora l'insieme di Julia è non vuoto.*

*Dimostrazione.* Se  $J(f)$  fosse vuoto, allora per il lemma 1.2.5 ci sarebbe una successione di iterate  $f^{n(j)}$  che converge sui compatti di tutto  $\widehat{\mathbb{C}}$  ad un limite olomorfo  $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Per la Proposizione 1.1.13, vediamo che definitivamente il grado di  $g$  deve essere uguale al grado di  $f^{n(j)}$ . Ma il grado di  $f^n$  è uguale a  $d^n$ , che diverge ad  $\infty$  per  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 2.1.3 Cenni della dinamica sulle superficie di Riemann iperboliche

Il caso iperbolico è molto semplice da studiare, perché le possibilità dei comportamenti delle iterate di una funzione  $f : S \rightarrow S$ , con  $S$  una superficie iperbolica, sono piuttosto limitate. Cominciamo con un teorema sul disco  $D$  che verrà anche utilizzato in seguito. Si può trovare la dimostrazione su [Ab].

**Teorema 2.1.6.** *Sia  $f : D \rightarrow D$  una mappa olomorfa. Allora possono succedere soltanto le seguenti due cose:*

1.  $f$  è una rotazione attorno ad un punto fisso  $z_0 \in D$ ;

2. le iterate successive  $f^n$  convergono, uniformemente sui compatti di  $D$ , ad una funzione costante  $c_0 \in \overline{D}$ .

Inoltre, se  $f$  è definita e olomorfa in un intorno di  $\overline{D}$  e se ci troviamo nel caso 2, il punto  $c_0$  è un punto fisso di  $f$ . Esso può appartenere al bordo.

Quello che ci servirà nel Capitolo 4 è una forma più debole del teorema di Wolff-Denjoy:

**Teorema 2.1.7.** *Sia  $\Omega$  un dominio semplicemente connesso, relativamente compatto in  $\mathbb{C}$ . Sia  $f$  un diffeomorfismo olomorfo definito in un intorno di  $\overline{\Omega}$ , tale che  $f(\Omega) = \Omega$ . Sia  $z_1 \in \Omega$  e sia  $z_0 \in \partial\Omega$  un punto di accumulazione di  $(f^n(z_1))_{n \geq 0}$ . Allora  $z_0$  è un punto fisso di  $f$  e  $f^n \rightarrow z_0$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Questo teorema segue facilmente dal Teorema 2.1.6 perché  $\Omega$  è biolomorfo a  $D$ . □

Un risultato simile si può citare per una superficie iperbolica arbitraria:

**Teorema 2.1.8.** *Se  $S$  è una superficie di Riemann iperbolica, allora per ogni mappa olomorfa  $f : S \mapsto S$  l'insieme di Julia è vuoto. Inoltre si verifica una e una sola delle seguenti possibilità:*

1. Ogni orbita converge ad un unico punto fisso attrattivo  $f(z_0) = z_0$ ;
2. Ogni orbita diverge ad  $\infty$  rispetto alla metrica di Poincaré su  $S$ ;
3.  $f$  è un automorfismo di ordine finito;
4.  $S$  è biolomorfa a un disco  $D$ , a un disco puntato  $D/\{0\}$ , o ad un anello  $A_r = \{z \mid 1 < |z| < r\}$  e  $f$  corrisponde ad una rotazione irrazionale  $z \mapsto e^{2\pi it} z$  con  $t \notin \mathbb{Q}$ .

La dimostrazione di questo teorema è elementare ma piuttosto lunga. Rimandiamo a [Mi].

## 2.2 Teoria locale dei punti periodici

### 2.2.1 I punti fissi attrattivi e repulsivi

Consideriamo una funzione

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$$

che è definita e olomorfa in un intorno dell'origine, con un punto fisso in  $z = 0$  di moltiplicatore  $\lambda$ .

**Teorema 2.2.1 (linearizzazione di Kœnigs).** *Se il moltiplicatore  $\lambda$  soddisfa  $|\lambda| \neq 0, 1$ , allora esiste un cambio di coordinate olomorfo  $w = \phi(z)$ , con  $\phi(0) = 0$ , tale che  $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$  è la mappa lineare  $w \mapsto \lambda w$  per ogni  $w$  in qualche intorno dell'origine. Inoltre,  $\phi$  è unico a meno di moltiplicazione per una costante diversa da zero.*

*Dimostrazione. Unicità:* Se  $\phi, \psi$  sono due tali mappe, allora la composizione

$$\psi \circ \phi^{-1} = b_1 w + b_2 w^2 + \dots$$

deve commutare con la mappa  $g : w \mapsto \lambda w$ . Infatti se  $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = g = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$  allora:

$$g \circ \psi \circ \phi^{-1} = \psi \circ f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ f \circ \phi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1} \circ g.$$

Confrontando i coefficienti delle due serie di potenze risultanti, scopriamo che  $\lambda b_n = b_n \lambda^n$  per ogni  $n$ . Siccome  $\lambda$  non è né 0, né una radice dell'unità, ne segue che  $b_2 = b_3 = \dots = 0$ . Quindi  $\psi \circ \phi^{-1}(w) = b_1 w$ , cioè  $\psi(z) = b_1 \phi(z)$ .

**Esistenza:** ( $0 < |\lambda| < 1$ ): Scegliamo una costante  $c < 1$  tale che  $c^2 < |\lambda| < c$ , e scegliamo un intorno  $D_r$  dell'origine tale che  $|f(z)| \leq c|z|$  per  $z \in D_r$ . Quindi per ogni punto di partenza  $z_0 \in D_r$ , l'orbita  $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$  converge all'origine sotto iterazione di  $f$ , e  $|z_n| \leq r c^n$ . Si ha, per lo sviluppo in serie di Taylor:

$$|f(z) - \lambda z| \leq k |z|^2$$

per qualche costante  $k$  e per ogni  $z \in D_r$ , quindi:

$$|z_{n+1} - \lambda z_n| \leq k |z_n|^2.$$

Ne segue che i numeri  $w_n = \frac{z_n}{\lambda^n}$  soddisfano

$$|w_{n+1} - w_n| \leq k' \left( \frac{c^2}{|\lambda|} \right)^n$$

con  $k' = \frac{kr^2}{|\lambda|}$ . Queste differenze convergono uniformemente a 0, quindi le funzioni olomorfe  $z_0 \mapsto w_n(z_0)$  convergono, uniformemente in  $D_r$ , ad un limite olomorfo  $\phi(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\lambda^n}$ . L'identità richiesta  $\phi(f(z_0)) = \lambda \phi(z_0)$  segue da ciò. Infatti  $\phi(f(z_0)) = \phi(z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\lambda^{n-1}} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\lambda^n} = \lambda \phi(z_0)$ .

Siccome le  $w_n$  convergono uniformemente a  $\phi$ , anche le derivate  $w'_n$  convergono ad un limite, e questo limite è uguale a  $\phi'$ . Siccome  $w'_n(0) = 1$ , allora  $\phi'(0) = 1$ , e quindi  $\phi$  è un biolomorfismo locale.

**Esistenza** ( $|\lambda| > 1$ ): Siccome  $\lambda \neq 0$ , la mappa inversa  $f^{-1}$  è localmente ben definita e olomorfa, con l'origine come punto fisso attrattivo con moltiplicatore  $\lambda^{-1}$ . Possiamo allora ricondurci al caso precedente.  $\square$

Riscriviamo il Teorema 2.2.1 in una forma più globale:

**Corollario 2.2.2.** *Supponiamo che  $f : S \rightarrow S$  sia una mappa olomorfa da una superficie di Riemann in se stessa con un punto fisso attrattivo di moltiplicatore  $\lambda \neq 0$  in un punto  $\hat{z}$ . Sia  $\Omega \subset S$  il bacino di attrazione di  $\hat{z}$ . Allora  $c'$  è una mappa olomorfa  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  che rende commutativo il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \Omega \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

e tale che  $\phi$  porti un intorno di  $\hat{z}$  biolomorficamente in un intorno di 0. Inoltre  $\phi$  è unica a meno di moltiplicazione per una costante.

*Dimostrazione.* Dato  $z_0 \in \Omega$  definisco la  $\phi$  come segue: sia  $U$  un intorno aperto per cui esiste una linearizzazione, come dimostrato nel Teorema 2.2.1. Indichiamo con  $z_i = f^i(z_0)$  i punti dell'orbita di  $z_0$ . Siccome  $z_0$  è nel bacino di attrazione, esiste un minimo  $n = n(z_0)$  tale che  $z_n$  sia in  $U$ . Allora definisco

$$\phi(z_0) = \frac{\phi(z_n)}{\lambda^n}.$$

Bisogna dimostrare che la  $\phi$  verifica l'identità:

$$\phi(f(z_0)) = \lambda\phi(z_0).$$

Il primo membro è uguale a  $\phi(z_1)$ , il secondo è uguale a  $\frac{\lambda\phi(z_n)}{\lambda^n}$ . Ma il procedimento per trovare  $\phi(z_1)$  è lo stesso di quello per trovare  $\phi(z_0)$ , quindi si ha  $\phi(z_1) = \frac{\phi(z_n)}{\lambda^{n-1}}$ , e l'uguaglianza è dimostrata.

La funzione  $n(z)$  è localmente costante, infatti, dato  $\hat{n}$  i punti  $z$  con  $n(z) = \hat{n}$  corrispondono all'insieme  $V_{\hat{n}} = \phi^{-\hat{n}}(U) \setminus \phi^{-\hat{n}+1}(U)$ . Quindi in ognuna di queste componenti la  $\phi$  è olomorfa. Nei punti del bordo di  $V_{\hat{n}}$  la continuità e la derivabilità sono vere per l'uguaglianza  $\phi(f(z_0)) = \lambda\phi(z_0)$ . Quindi la  $\phi$  è olomorfa.

Il fatto che  $\phi$  porta un intorno di  $\hat{z}$  in un intorno di 0 segue dal fatto che è un'estensione della  $\phi$  del Teorema 2.2.1. L'ultima affermazione, invece, si dimostra esattamente allo stesso modo di quella del Teorema 2.2.1.  $\square$

Nel caso di un punto fisso repulsivo abbiamo:

**Corollario 2.2.3.** *Se  $\hat{z}$  è un punto fisso repulsivo, allora c'è una mappa olomorfa  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow S$  che rende commutativo il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & S \\ \uparrow \psi & & \uparrow \psi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \end{array}$$

e tale che  $\psi$  mandi un intorno di 0 biolomorficamente in un intorno di  $\hat{z}$ . Inoltre  $\psi$  è unica, a meno di rimpiazzarla con  $w \mapsto \psi(cw)$  per qualche costante  $c \neq 0$ .

*Dimostrazione.* Dato  $w \in \mathbb{C}$ , definiamo una  $\psi$  che estenda la  $\phi^{-1}$  del Teorema 2.2.1. Sia  $V$  l'intorno di 0 su cui è definita  $\phi^{-1}$  dato dal Teorema 2.2.1. Esiste un minimo  $n$  per cui  $\frac{w}{\lambda^n}$  è nell'intorno di 0. Definisco allora

$$\psi(w) = f^n \left( \phi^{-1} \left( \frac{w}{\lambda^n} \right) \right).$$

Bisogna dimostrare che

$$f(\psi(w)) = \psi(\lambda w).$$

Il primo membro è uguale a  $f^{n+1} \left( \phi^{-1} \left( \frac{w}{\lambda^n} \right) \right)$ . Per calcolare  $\psi(\lambda w)$  il procedimento è uguale a quello per calcolare  $\psi(w)$ . Otteniamo quindi  $\psi(\lambda w) = f^{n+1} \left( \phi^{-1} \left( \frac{\lambda w}{\lambda^{n+1}} \right) \right)$ .

La dimostrazione del fatto che  $\psi$  è olomorfa è analoga alla dimostrazione del fatto che  $\phi$  è olomorfa nel Corollario 2.2.2.

Anche in questo caso, il fatto che  $\psi$  porta un intorno di 0 in un intorno di  $\widehat{z}$  segue dal fatto che  $\psi$  estende  $\phi^{-1}$ , e l'unicità segue dallo stesso ragionamento del Teorema 2.2.1 applicato a  $f^{-1}$ .  $\square$

Consideriamo adesso il caso superattrattivo  $\lambda = 0$ : nel teorema che segue enunciamo che, in un intorno di un punto fisso critico per  $f$ ,  $f$  è coniugata con una mappa della forma

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^n$$

con  $n \neq 1$ .

**Teorema 2.2.4 (Böttcher).** *Supponiamo che:*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

*con  $n \geq 2$ ,  $a_n \neq 0$ . Allora esiste un cambio di coordinate locale olomorfo  $w = \phi(z)$  che coniuga  $f$  alla mappa  $w \mapsto w^n$  in un intorno di  $\phi(0) = 0$ . Inoltre,  $\phi$  è unica a meno di moltiplicazione per una radice  $(n-1)$ -esima dell'unità.*

Non riportiamo la dimostrazione di questo teorema. La si può trovare su [Mi].

## 2.2.2 I cicli indifferenti razionali: il fiore di Leau-Fatou

Nel caso di una  $f$  con un punto fisso indifferente in 0 possiamo scrivere:

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$$

e il moltiplicatore  $\lambda$  può essere scritto come  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$ . Chiamiamo  $\xi$  l'*angolo di rotazione* di  $f$ , perché corrisponde all'angolo di rotazione di  $f$  nello spazio tangente al punto fisso.

**Teorema 2.2.5.** *Sia  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una funzione razionale. Se  $\deg(f) \geq 2$  allora ogni ciclo indifferente razionale di  $f$  appartiene a  $J(f)$ .*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $\zeta$  sta in un ciclo indifferente razionale di lunghezza  $m$  se  $f^m$  fissa  $\zeta$  e  $(f^m)'(\zeta)$  è una radice dell'unità. Supponiamo dapprima che  $\zeta$  sia un punto fisso di  $f$ . Possiamo supporre  $\zeta = 0$ , quindi:

$$f(z) = az + bz^r + \dots$$

$b \neq 0$ ,  $r \geq 2$ ,  $a^k = 1$  per qualche  $k > 0$ . Scriviamo  $g = f^k$ :

$$g(z) = z + cz^p + \dots$$

con  $p \geq 2$ ,  $c \neq 0$  ( $g$  non può essere l'identità, a meno che  $\deg(g) = 1$ ). Per induzione:

$$g^n = z + ncz^p + \dots$$

e  $(g^n)^{(p)}(0) \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Quindi  $g^n$  non può essere normale in un intorno dell'origine, altrimenti avremmo una funzione limite  $\varphi$  con  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi^{(p)}(0) = \infty$ .

Se invece  $\zeta$  è un punto di un ciclo indifferente razionale di lunghezza  $m$ , applichiamo lo stesso ragionamento a  $\zeta$  come punto fisso di  $f^m$  e troviamo che  $\zeta \in J(f^m) = J(f)$ .  $\square$

Notiamo che, se  $\deg(f) = 1$ , allora ogni ciclo indifferente è in  $F(f)$ . La dinamica nell'intorno di un punto fisso indifferente razionale è più complicata di quella nell'intorno di un punto fisso attrattivo o repulsivo, in quanto non abbiamo un coniugio con



una mappa lineare (altrimenti la  $f$  sarebbe di ordine finito). La discussione che segue cercherà di far luce sulla dinamica di  $f$  nell'intorno di un punto fisso o di un'orbita indifferente razionale.

Consideriamo ancora una funzione della forma

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 + \dots$$

che sia definita e olomorfa in un intorno dell'origine, con  $\lambda^q = 1$ . Il punto fisso 0 è un punto parabolico per  $f$ , considerando che  $f^q \neq id$ .

Consideriamo per adesso il caso  $\lambda = 1$ . Scriviamo la nostra mappa nella forma:

$$f(z) = z + az^{n+1} + \mathcal{O}(z^{n+2})$$

con  $a \neq 0$ . L'intero  $n + 1 \geq 2$  è chiamato la *molteplicità* del punto fisso. Scegliamo un intorno  $N$  dell'origine tale che  $f : N \rightarrow N'$ , con  $N'$  un intorno dell'origine, sia un diffeomorfismo.

**Definizione 2.2.1.** Un insieme aperto connesso  $U$ , con chiusura compatta  $\bar{U} \subset N \cap N'$ , si chiama un *petalo attrattivo* all'origine se:

$$f(\bar{U}) \subset U \cup \{0\} \text{ e } \bigcap_{k \geq 0} f^k(\bar{U}) = \{0\}.$$

Allo stesso modo,  $U' \subset N \cap N'$  è un *petalo repulsivo* per  $f$  se  $U'$  è un petalo attrattivo per  $f^{-1}$ .

**Definizione 2.2.2.** Diciamo che un vettore  $\vec{v} \in \mathbb{C}$  punta in una direzione attrattiva al punto fisso 0 di  $f$  se il prodotto  $av^n$  è reale e negativo. Allo stesso modo,  $v$  è una direzione repulsiva se  $av^n$  è reale positivo. Si vede che questa è una buona definizione, perché se  $\vec{v}$  punta in una direzione attrattiva, sostituendo a  $\vec{v}$  un vettore  $\vec{v}' = b\vec{v}$ , con  $b$  un numero reale, il vettore  $\vec{v}'$  punta ancora in una direzione attrattiva. La stessa cosa vale per una direzione repulsiva. Le direzioni attrattive sono quelle in cui, trascurando i termini di grado superiore più alto, il vettore da  $v$  ad  $f(v) \approx v(1 + av^n)$  punta verso l'origine. Chiaramente, per poter trascurare i termini di grado più alto, dobbiamo scegliere  $v$  con modulo piccolo a sufficienza.

Ci sono  $n$  direzioni attrattive equidistanti, separate da  $n$  direzioni repulsive equidistanti. Infatti, troviamo ad esempio tutti i  $v$  di modulo 1 che puntano in una direzione attrattiva. Sono quelli per cui vale  $av^n = -|a|$ , e quindi  $v^n = -\frac{|a|}{a} = -\frac{\bar{a}}{|a|}$ . Questa equazione ha  $n$  soluzioni per  $v$ . Viceversa, i  $v$  di modulo 1 che puntano in una direzione repulsiva sono quelli per cui vale  $av^n = |a|$ , e quindi  $v^n = \frac{|a|}{a} = \frac{\bar{a}}{|a|}$ , che ha ancora  $n$  soluzioni per  $v$ .

**Teorema 2.2.6 (del Fiore di Leau-Fatou).** *Se l'origine è un punto fisso di molteplicità  $n + 1 \geq 2$ , allora esistono  $n$  petali attrattivi disgiunti  $U_i$ , e  $n$  petali repulsivi disgiunti  $U'_i$ , tali che l'unione di questi  $2n$  petali, insieme all'origine, sia un intorno  $N_0$  dell'origine. Questi petali si alternano l'uno all'altro in modo che  $U_i$  interseca  $U'_i$  e  $U'_{i-1}$ .*

Se  $U_i$  è un petalo attrattivo, allora si vede bene che la successione delle iterate  $\{f^k|_{\bar{U}_i}\}$  converge uniformemente a 0. Se invece  $U'_i$  è un petalo repulsivo, allora l'orbita  $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$  che inizia in  $U'_i$ , deve lasciare  $U'_i$ , e anzi l'unione  $U'_1 \cup \dots \cup U'_n$ . Ciò non toglie che possa ritornarci dopo alcune iterazioni.

*Dimostrazione.* Facciamo una sostituzione  $w = \frac{b}{z^n}$ , con inversa  $z = \sqrt[n]{\frac{b}{w}}$ , dove  $b = -\frac{1}{na}$ . Il settore nella variabile  $z$  fra due direzioni repulsive, in questo modo, viene trasformato in tutto il piano nella variabile  $w$ , tagliato lungo l'asse reale negativo. Scriviamo la nostra funzione nella forma:

$$z \mapsto f(z) = z(1 + az^n + o(|z^n|)) \text{ con } |z| \rightarrow 0$$

Sostituiamo  $z = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{w}\right)}$ , la trasformazione diventa:

$$\begin{aligned} w \mapsto w' &= \frac{b}{f(z)^n} = \frac{b}{z^n} (1 + az^n + o(|z^n|))^{-n} = w(1 + naz^n + o(|z^{n+}|))^{-1} = \\ &= w(1 - naz^n + o(|z^n|)) \end{aligned}$$

Ma  $z^n = \frac{b}{w}$  e  $nab = -1$ , e quindi  $w' = w(1 + w^{-1} + o(w^{-1})) = w + 1 + o(1)$  per  $w \rightarrow \infty$  (In queste stime abbiamo usato la formula di Taylor).

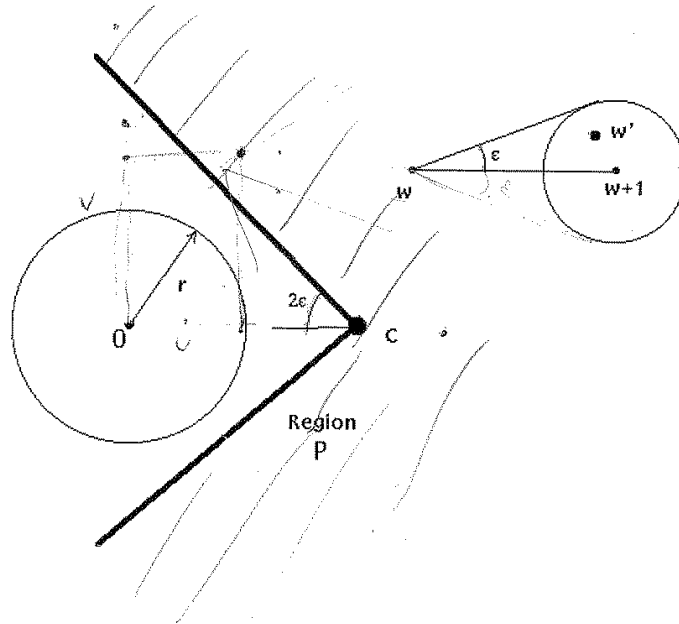


Figura 2.1:

Allora, dato un numero piccolo, che scriviamo come  $\varepsilon' = \sin \varepsilon > 0$ , possiamo scegliere un  $r$  tale che

$$|w' - w - 1| < \sin \varepsilon$$

se  $|w| > r$ . Ne segue che la pendenza  $p$  del vettore da  $w$  a  $w'$  soddisfa  $|p| < \tan \varepsilon$ , se  $|w| > r$ . Ora possiamo costruire un petalo attrattivo all'infinito nella variabile  $w$ .

Sia  $P$  la regione di tutti i  $u + iv$  e con  $u > \frac{c-|v|}{\tan 2\varepsilon}$  con  $c$  una costante reale positiva abbastanza grande perché tutti i punti  $w \in P$  soddisfino  $|w| > r$ . Allora, per un ragionamento di ampiezze di angoli come spiegato in Figura 2.1, si ha che la chiusura  $\bar{P}$  è mandata in  $P$  attraverso la nostra trasformazione, e che ogni orbita inversa che parte da  $\bar{P}$  deve lasciare  $\bar{P}$ . Trasformando di nuovo dalla variabile  $w$  alla variabile  $z$ , otteniamo la tesi.  $\square$

**Definizione 2.2.3.** Diciamo che il petalo attrattivo  $P$  è *compreso fra* (o *delimitato*

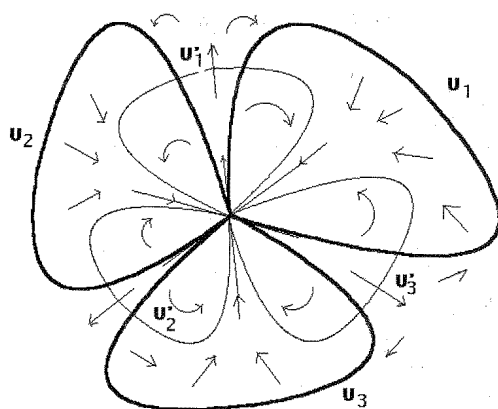


Figura 2.2: Un fiore di Leau Fatou con tre petali attrattivi  $U_i$  e tre petali repulsivi  $U'_i$

da) due direzioni repulsive, che sono quelle che abbiamo usato nella dimostrazione del Teorema 2.2.6 per costruire il petalo  $P$ .

Dato un petalo attrattivo  $P$  compreso fra due direzioni repulsive, esso contiene una direzione attrattiva. Chiamiamo questa direzione la direzione attrattiva *relativa* al petalo attrattivo  $P$ .

Ecco tre conseguenze immediate di questo teorema:

**Corollario 2.2.7.** *Non ci sono altre orbite periodiche, eccetto il punto fisso  $0$ , che siano completamente contenute in  $N_0$ .*

Supponiamo adesso che  $f$  sia una funzione razionale globalmente definita. Assumiamo ancora che  $0$  sia un punto fisso con  $\lambda = 1$ . Ogni petalo attrattivo  $U_i$  determina un bacino di attrazione parabolico  $\Omega_i$ , formato da tutti gli  $z_0$  per cui l'orbita  $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$  entra definitivamente nel petalo attrattivo  $U_i$ , e quindi converge al punto fisso  $0$ . Chiaramente questi bacini  $\Omega_i$  sono insiemi aperti disgiunti.

**Corollario 2.2.8.** *Se escludiamo un'orbita che definitivamente è uguale al punto fisso, allora un'orbita  $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots$  converge sotto iterazione di  $f$  al punto fisso  $0$  se e*

solo se è definitivamente contenuta in uno dei petali attrattivi  $U_i$ , ovvero se appartiene al bacino  $\Omega_i$  associato.

**Corollario 2.2.9.** *Ogni bacino parabolico  $\Omega_i$  è contenuto nell'insieme di Fatou  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$  ma ogni punto del bordo del bacino  $\partial\Omega_i$  appartiene all'insieme di Julia  $J(f)$ . Ne segue che ogni petalo repulsivo  $U'_i$  deve intersecare  $J(f)$ .*

*Dimostrazione.* Abbiamo già dimostrato che  $0 \in J(f)$ . Quindi anche ogni punto della grande orbita di 0  $GO(0)$  è nell'insieme di Julia. Se  $z_1 \in \partial\Omega_i$  non è nella grande orbita di 0, allora per il Corollario 2.2.8 possiamo estrarre dall'orbita di  $z_1$  una sottosuccessione che rimane sempre lontana da 0. Siccome la successione delle iterate converge a 0 nell'insieme  $\Omega_i$ , allora  $\{f^k\}$  non può essere normale in un intorno del punto  $z_1$ . Da ciò segue la tesi.  $\square$

Supponiamo adesso che il moltiplicatore  $\lambda$  sia una radice  $q$ -esima dell'unità,  $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$  con  $\frac{p}{q}$  una frazione ridotta ai minimi termini. Applichiamo la discussione che abbiamo appena fatto alla  $q$ -esima iterata  $f^q$ .

**Lemma 2.2.10.** *Se il moltiplicatore  $\lambda$  al punto fisso  $f(z_0) = z_0$  è una radice primitiva  $q$ -esima dell'unità, allora il numero dei petali attrattivi intorno a  $z_0$  deve essere un multiplo di  $q$ . In altre parole, la molteplicità  $n + 1$  di  $z_0$  come punto fisso di  $f^q$  deve essere congruente a 1 mod  $q$ .*

*Dimostrazione.* Possiamo ancora supporre che  $z_0 = 0$ .

Dimostriamo che la moltiplicazione per  $\lambda$  manda una direzione attrattiva in una direzione attrattiva, cioè permuta le direzioni attrattive. Consideriamo il vettore da  $\lambda v$  a  $f(\lambda v)$ . Dobbiamo dimostrare che questo vettore punta verso l'origine. Si ha che

$$f(\lambda v) = \lambda v(\lambda + a\lambda^n v^n).$$

Se  $q|n$  allora  $\lambda^n = 1$  e  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$  e  $\lambda v$  è una direzione attrattiva. Allora dobbiamo dimostrare che  $q|n$ . Osserviamo che  $f \circ f^q = f^q \circ f$  e:

$$f(z) = \lambda z + az^{n+1} + \mathcal{O}(z^{n+2})$$

$$f^q(z) = z + qaz^{n+1} + \mathcal{O}(z^{n+2}).$$

Quindi:

$$f^q \circ f = \lambda z + az^{n+1} + qa\lambda^{n+1}z^{n+1} + \mathcal{O}(z^{n+2})$$

$$f \circ f^q = \lambda z + \lambda qaz^{n+1} + az^{n+1} + \mathcal{O}(z^{n+2}).$$

Uguagliando i secondi membri otteniamo che  $\lambda^{n+1} = \lambda$ , cioè  $\lambda^n = 1$  e quindi  $q|n$ . Inoltre il numero dei petali attrattivi di  $f^q$  deve essere multiplo di  $q$ .  $\square$

Descriviamo la dinamica nell'intorno di un punto fisso parabolico in modo ancora più accurato; il prossimo teorema verrà utilizzato nel capitolo 4.

Consideriamo una mappa olomorfa definita nell'intorno di un punto fisso di moltiplicatore  $\lambda = 1$ . Sia  $U$  uno degli  $n$  petali attrattivi o uno degli  $n$  petali repulsivi, come descritto nel Teorema 2.2.6. Formiamo uno spazio di identificazione  $U/f$  quotiando  $U$  con la relazione di equivalenza che identifica  $z$  a  $f(z)$  se  $z$  e  $f(z)$  appartengono entrambe ad  $U$ . (Quindi  $z$  è identificato a  $f(z)$  per tutti gli  $z \in U$  nel caso attrattivo,  $z$  è identificato a  $f(z)$  per tutti gli  $z \in U \cap f^{-1}(U)$  nel caso repulsivo).

**Teorema 2.2.11 (linearizzazione parabolica o coordinate di Fatou).** *La varietà quoziente  $U/f$  è biolomorfa al cilindro infinito  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Quindi c'è uno e, a meno di composizione con una traslazione, solo un embedding iniettivo  $\alpha$  da  $U$  in  $\mathbb{C}$ , suo rivestimento universale, che soddisfi l'equazione funzionale di Abel:*

$$\alpha(f(z)) = 1 + \alpha(z)$$

*per ogni  $z \in U \cap f^{-1}(U)$ . Con una buona scelta di  $U$ , l'immagine  $\alpha(U) \subset \mathbb{C}$  contiene un semipiano destro  $\{w \mid \Re(w) > c\}$  nel caso di un petalo attrattivo, un semipiano sinistro nel caso di un petalo repulsivo.*

la dimostrazione di questo lemma può essere trovata su [Mi].

### 2.2.3 Punti di Cremer e dischi di Siegel

Ancora una volta consideriamo delle mappe olomorfe della forma:

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$$

definite in un intorno dell'origine. Consideriamo adesso il caso in cui  $|\lambda| = 1$  e  $\lambda$  non è una radice dell'unità, cioè il caso in cui il punto fisso  $0$  è indifferente irrazionale. In questo caso il moltiplicatore può essere scritto come  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$  con  $\xi$  reale irrazionale. Il moltiplicatore  $\lambda$  viene detto anche *numero di rotazione* della funzione olomorfa  $f$  e indicato con  $\rho(f)$ , perché nel caso in cui la  $f$  sia linearizzabile allora è coniugata ad una rotazione di angolo  $\lambda$ .

Ci domandiamo adesso se nel caso irrazionale esista o meno un cambio locale di coordinate  $z = h(w)$  che coniuga  $f$  alla rotazione irrazionale  $w \mapsto \lambda w$  tale che

$$f(h(w)) = h(\lambda w)$$

vicino all'origine. Se questa linearizzazione è possibile allora per qualche  $\varepsilon$  un disco della forma  $|w| < \varepsilon$  nella variabile  $w$  corrisponde, attraverso  $h$ , a un insieme aperto  $U$  nella variabile  $z$ , il quale viene mandato biolomorficamente in sé dalla  $f$ . Questo intorno  $U$ , chiaramente, non può contenere altri punti periodici eccetto che il punto  $0$ . Inoltre  $U$  è contenuto nell'insieme di Fatou  $F(f)$ , perché la successione delle iterate ristrette a  $U$  è una successione di mappe coniugate con delle rotazioni di angolo  $n\xi$ , e quindi è una successione normale.

Dopo un dibattito che si è svolto nei primi decenni del 1900, in cui ci si chiedeva se questa linearizzazione fosse o meno possibile, fu dimostrato che ci sono alcuni  $\lambda$  per cui lo è, altri per cui non lo è. Impostiamo dapprima una trattazione qualitativa dei risultati su questo argomento, addentrandoci successivamente in una trattazione più dettagliata, anche se non dimostreremo tutti gli enunciati, dato che la dimostrazione è in alcuni casi molto complicata.

Fra i più importanti teoremi ci fu quello di Cremer e, successivamente, quello di Siegel:

**Definizione 2.2.4.** Diciamo che una proprietà, definita per i numeri  $\lambda \in S^1$ , vale per un *generico*  $\lambda$  se l'insieme dei  $\lambda$  per cui è vera contiene un'intersezione numerabile di insiemi aperti densi, cioè se il suo complementare in  $S^1$  è un insieme magro. Come dimostrato da Baire, una tale intersezione è un insieme denso e non numerabile.

**Teorema 2.2.12 (di non linearizzazione di Cremer (1927)).** *Per un generico  $\lambda$  del cerchio unitario è vera le seguente affermazione: se  $z_0$  è un punto fisso di moltiplicatore  $\lambda$  di una funzione razionale arbitraria di grado almeno due, allora  $z_0$  è il limite di una successione infinita di punti periodici. Quindi non può esserci un cambio di coordinate che rende la  $f$  lineare in un qualche intorno di  $z_0$ .*

D'altra parte, ci sono anche dei valori di  $\lambda$  per cui questa linearizzazione è possibile, come dimostrato nel seguente:

**Teorema 2.2.13 (di linearizzazione di Siegel (1942)).** *Per Lebesgue quasi ogni  $\lambda \in S^1$  un germe di funzione olomorfa con un punto fisso di moltiplicatore  $\lambda$  può essere linearizzato con un cambio olomorfo di coordinate.*

*Osservazione 2.2.1.* Questo contrasto fra il considerare un parametro generico o uno che appartiene ad un insieme il cui complementare ha misura nulla può sembrare strano, ma è molto frequente nello studio della dinamica delle funzioni olomorfe.

**Definizione 2.2.5.** Diciamo che un punto fisso indifferente irrazionale è un *punto di Siegel* o un *punto di Cremer*, rispettivamente se esiste un intorno in cui una linearizzazione è possibile o meno.

Un *dominio di Siegel* (risp. *disco di Siegel*) è un dominio (un disco)  $\Omega$  tale che  $f|_{\Omega}$  è linearizzabile.

Passiamo adesso ad una trattazione più precisa. Tutti i dettagli che mancano possono essere trovati su [Mi].

**Lemma 2.2.14.** *Un punto fisso indifferente irrazionale di una funzione razionale è un punto di Cremer se e solo se appartiene all'insieme di Julia  $J(f)$ , è un punto*



di Siegel se e solo se appartiene all'insieme di Fatou  $F(f)$ . Nel caso di un punto di Siegel  $z_0$ , l'intera componente connessa  $U$  dell'insieme di Fatou che contiene  $z_0$  è biolomorfa al disco aperto unitario. La mappa  $f : U \rightarrow U$  è coniugata alla rotazione irrazionale  $w \mapsto \lambda w$  del disco unitario.

Per definizione, una tale componente  $U$  è chiamata un *disco di Siegel*.

*Dimostrazione.* Sia  $z_0$  un punto di Siegel. Allora esiste un intorno di  $z_0$  in cui la  $f$  è coniugata ad una rotazione. Quindi le iterate di  $f$  formano una famiglia normale.

Viceversa, se  $z_0$  è nell'insieme di Fatou, consideriamo l'intera componente connessa  $U$  dell'insieme di Fatou. Si ha  $f : U \rightarrow U$ ,  $U$  è una superficie iperbolica e quindi possiamo applicare ad  $U$  il Teorema 2.1.8. Ne segue che  $U$  è biolomorfo al disco  $D$  e che  $f : U \rightarrow U$  è coniugata ad una rotazione. Quindi  $z_0$  è un punto di Siegel.  $\square$

Introduciamo una definizione che ci servirà nel Capitolo 4:

**Definizione 2.2.6.** Un punto fisso  $z_0 \in S$  è *stabile* se esistono  $U, V$  intorni di  $z_0$  tali che tutti i punti di  $V$  vanno in  $U$  sotto iterazione di  $f$ .

**Proposizione 2.2.15.** Se il moltiplicatore  $\lambda$  verifica  $0 < |\lambda| \leq 1$ , alloran sono fatti equivalenti:

1. Il punto fisso  $z_0$  è stabile;
2. Il punto fisso  $z_0$  è regolare;
3. C'è un intorno del punto fisso  $z_0$  in cui la  $f$  è linearizzabile.

*Dimostrazione.* ( $2 \Rightarrow 1$ ) Se  $z_0$  è un punto regolare allora è nell'insieme di Fatou di  $f$ . Quindi la successione delle iterate  $\{f^n\}$  è una famiglia normale, cioè è un insieme relativamente compatto rispetto alla topologia compatta aperta.

Fisso una palla  $V$  intorno a  $z_0$  in  $\mathbb{C}$  tale che  $\bar{V}$  sia compatta. Per ogni  $n$  scelgo un aperto limitato  $U_n$  tale che  $f^n(\bar{V}) \subset U_n$ . Allora l'insieme  $A_n = \{f \text{ olomorfe} \mid f(\bar{V}) \subset U_n\}$  è un intorno aperto di  $f^n$ . Allora  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un ricoprimento aperto della

famiglia normale e possiamo estrarre un sottoricoprimento finito  $\{A_{n_j}\}_{0 \leq j \leq N} = \{f$  olomorfe  $| f(\overline{V} \subset U_{n_j})\}_{0 \leq j \leq N}$ .

Allora l'insieme  $U = \bigcap_j U_{n_j}$  è un aperto. Il punto  $z_0$  è stabile perché per ogni  $n$  si ha  $f^n(\overline{V}) \subset U$  e la prima implicazione è dimostrata.

(1  $\Rightarrow$  3) Il caso  $0 < |\lambda| < 1$  segue dalla discussione sui punti attrattivi. Consideriamo allora il caso  $|\lambda| = 1$ .

Poniamo:

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^j(z)}{\lambda^j}.$$

Si ha che  $\varphi'_k(0) = 1$  e

$$\varphi_k \circ f = \lambda \varphi_k + \frac{\lambda}{k} \left( \frac{f^k}{\lambda^k} - id \right).$$

Il fatto che il punto fisso 0 sia stabile implica che ci sono due intorni aperti di 0, che sono limitati e che verificano  $V \subset U$ , tali che  $f^k(V) \subset U$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Siccome  $|\lambda| = 1$ , allora la famiglia di funzioni  $\{\varphi_k\}$  è uniformemente limitata in  $V$  e, per il Teorema 1.2.6, è una famiglia normale ed ammette quindi una sottosuccessione convergente. Ma, passando al limite nella disuguaglianza sopra, si ottiene che il limite delle  $\varphi_k$  è un coniugio fra  $f$  e la rotazione  $z \rightarrow \lambda z$ . Quindi  $f$  è linearizzabile.

(3  $\Rightarrow$  2) Ovvio. □

I teoremi di Cremer e di Siegel possono essere enunciati in modo più preciso; ci sono inoltre altri risultati, alcuni dei quali molto recenti. Introduciamo allora, per poter presentare questi risultati, varie classi di numeri irrazionali, come illustrato in Figura 2.3.

**Definizione 2.2.7.** Fissato un numero reale  $\kappa \geq 2$ , diciamo che un numero irrazionale  $\xi$  soddisfa una *condizione diofantea* di ordine  $\kappa$  se esiste  $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$  tale che

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^\kappa}$$

per ogni numero razionale  $\frac{p}{q}$ . Scriviamo  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$  come sopra. Siccome

$$|\lambda^q - 1| = |e^{2\pi i(q\xi - p)} - 1| \sim 2\pi q \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$$

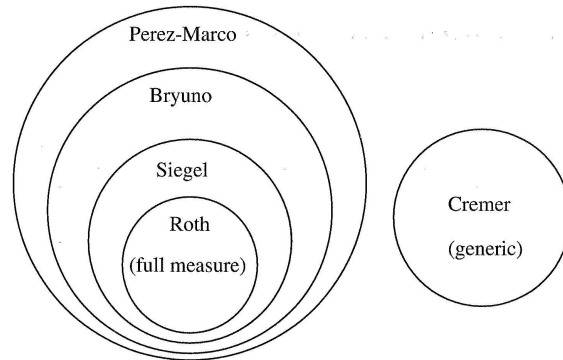


Figura 2.3:

per  $(q\xi - p) \rightarrow 0$ , è equivalente richiedere che

$$|\lambda^q - 1| > \frac{\varepsilon'}{q^{\kappa-1}}$$

per qualche  $\varepsilon' > 0$  che dipende da  $\lambda$  e per tutti gli interi positivi  $q$ .

Sia  $D_\kappa \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  l'insieme di tutti i numeri  $\xi$  che soddisfano questa condizione. Notiamo che  $D_\kappa \subset D_\eta$  se  $\kappa < \eta$ . Definiamo l'insieme  $Si$  dei *numeri di Siegel* come  $Si = \bigcup_\kappa D_\kappa$ .

In pratica i numeri di Siegel sono quelli che si approssimano 'male' con numeri razionali.

**Teorema 2.2.16 (Siegel).** *Se l'angolo di rotazione  $\xi$  è un numero di Siegel allora un germe olomorfo con moltiplicatore  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$  è localmente linearizzabile.*

Le dimostrazioni si possono trovare in [Si], [SM] o [Ca].

Utilizziamo il seguente teorema classico di Liouville:

**Teorema 2.2.17.** *Ogni numero algebrico di grado  $d$  su  $\mathbb{Q}$  è nella classe  $D_d$ . Quindi ogni numero irrazionale fuori dalla classe  $Si$  deve essere trascendente.*

I numeri del complementare di  $Si$  sono chiamati *numeri di Liouville*.

Dal Teorema 2.2.17 si vede anche che i numeri di Siegel sono densi in  $\mathbb{R}$ . Infatti tutti i numeri algebrici sono numeri di Siegel, e i numeri algebrici sono densi in  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 2.2.8.** Definiamo i *numeri di Roth* come l'intersezione

$$Ro = \bigcap_{\kappa > 2} D_{\kappa}.$$

Roth provò nel 1955 che tutti i numeri algebrici sono in  $Ro$ . È vero anche che quasi tutti i numeri reali appartengono a  $Ro$ . Quindi, se  $\xi$  è un numero algebrico irrazionale arbitrario, allora una mappa razionale di grado almeno due che ha un punto fisso di moltiplicatore  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$  deve avere un disco di Siegel. Inoltre, se  $\xi$  è un numero reale e la mappa  $f$  ha un punto fisso di moltiplicatore  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$ , con probabilità 1 la funzione  $f$  ha un disco di Siegel nel punto fisso.

Analizziamo in modo più preciso come un numero irrazionale  $\xi \in (0, 1)$  possa essere approssimato da razionali. Consideriamo l'espansione in frazione continua:

$$\xi = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

dove gli  $a_i$  sono interi positivi univocamente definiti. I numeri razionali

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots \frac{1}{a_{n-1}}}}}$$

sono chiamati i *convergenti* di  $\xi$ . I denominatori  $q_n$  ci serviranno per la nostra classificazione. I  $q_n$  crescono almeno esponenzialmente per  $n \rightarrow \infty$ . Infatti

$$q_{n+1} > q_n > \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{n-2} > 1$$

per  $n > 2$ .

Si ha che  $\frac{p_n}{q_n}$  è la migliore approssimazione di  $\xi$  con denominatore al più  $q_n$ . Infatti, ponendo  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$ , si ha:

**Fatto 1.**  $|\lambda^k - 1| > |\lambda^{q_n} - 1|$  per  $k = 1 \dots q_{n-1}$

Il Fatto 1 ci dice che  $|e^{2\pi i \xi k} - 1| > |e^{2\pi i \xi q_n} - 1|$ . Se fosse  $\xi = \frac{p_n}{q_n}$  si avrebbe che  $e^{2\pi i \xi q_n} - 1 = 0$ , quindi questo fatto significa che dividere l'intervallo  $(0, 1)$  in  $q_n$  pezzettini è "meglio" che dividerlo in  $q_i$  pezzettini, con  $i < n$ , cioè che i  $q_n$  crescono con  $n$ .

**Fatto 2.** *Esistono costanti  $0 < c_1 < c_2 < \infty$  tali che*

$$\frac{c_1}{q_{n+1}} \leq |\lambda^{q_n} - 1| \leq \frac{c_2}{q_{n+1}}$$

Il Fatto 2 ci dice che l'“errore” nell'approssimazione è più piccolo di  $\frac{1}{q_{n+1}}$ . Da questo si vede anche che i  $q_n$  vanno esponenzialmente.

Usando questi due fatti, possiamo riscrivere le condizioni di Roth e Siegel, e enunciare altre due:

**Ro:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} = 1,$$

**Si:**

$$\sup \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < \infty.$$

La seguente è detta la *condizione di Bryuno*:

**Br:**

$$\sum_n \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty.$$

La seguente invece è la *condizione di Perez-Marco*:

**PM:**

$$\sum_n \frac{\log(\log q_{n+1})}{q_n} < \infty.$$

Si vede facilmente che **Ro**  $\Rightarrow$  **Si**  $\Rightarrow$  **Br**  $\Rightarrow$  **PM**. Utilizzando queste condizioni si può riformulare il teorema di Siegel in una forma più forte:

**Teorema 2.2.18 (Bryuno (1972)).** *Se il numero  $\xi$  soddisfa la condizione **Br**, allora ogni germe olomorfo della forma*

$$f(z) = e^{2\pi i \xi} z + a_2 z^2 + \dots$$

*si può linearizzare con un cambio di coordinate locale olomorfo.*

Inoltre, questa condizione è la migliore possibile:

**Teorema 2.2.19 (Yoccoz (1987)).** *Se  $\sum \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} = \infty$ , allora la mappa quadratica:*

$$f(z) = e^{2\pi i \xi} z + z^2$$

*ha la proprietà che ogni intorno dell'origine contiene infinite orbite periodiche. Quindi l'origine è un punto di Cremer.*

In pratica, questo teorema ci dice che il punto fisso può essere approssimato con “orbite piccole”. Il seguente teorema ci dice per quali moltiplicatori questa approssimazione esiste sempre:

**Teorema 2.2.20 (Perez-Marco (1990)).** *Se  $\xi$  soddisfa la condizione **PM**, allora ogni germe non linearizzabile con moltiplicatore  $\lambda = e^{2\pi i \xi}$  contiene infinite orbite periodiche in ogni intorno del punto fisso. Viceversa, se  $\sum_n \frac{\log(\log(q_{n+1}))}{q_n} = \infty$  allora esiste un germe non linearizzabile di moltiplicatore  $\lambda$  che in un intorno del punto fisso non ha altre orbite periodiche che il punto fisso stesso.*

## Capitolo 3

# Dinamica dei diffeomorfismi analitici del cerchio $S^1$

In questo breve capitolo sarà illustrata la dinamica delle applicazioni dal cerchio in sé, prima senza porre condizioni sulla derivabilità di esse, concentrandoci successivamente sulle mappe differenziabili. I risultati qui ottenuti verranno poi confrontati, nel capitolo 4, con quelli già citati sulle mappe olomorfe. In seguito affronteremo delle applicazioni di questa teoria.

Non riporteremo le dimostrazioni dei risultati sui diffeomorfismi del cerchio, e rimandiamo a [MS] e [KH] per una trattazione più completa.

### 3.1 Il cerchio e i suoi automorfismi

Consideriamo il cerchio  $S^1$  come lo spazio quoziente  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Sia  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la proiezione nel quoziente.

Studieremo adesso la dinamica degli omeomorfismi  $g : S^1 \rightarrow S^1$ .

Gli omeomorfismi più semplici sono le rotazioni, e cercheremo di dire quando un omeomorfismo (e, successivamente, un diffeomorfismo) è coniugato ad una rotazione.

*Osservazione 3.1.1.* Se una rotazione  $g$  ha un'orbita periodica di periodo  $n$ , allora

ogni altro punto è periodico di periodo  $n$ . Se, invece,  $g$  non ha orbite periodiche, allora l'orbita di qualsiasi punto è densa nel cerchio.

Diamo una definizione che ci servirà nel capitolo 4:

**Definizione 3.1.1.** Sia  $g : S^1 \rightarrow S^1$  un omeomorfismo. Sia  $A \subset S^1$  un sottoinsieme di  $S^1$  totalmente invariante per  $g$ . Diciamo che  $g$  è *vagante* sull'insieme  $A$  se  $g|_A : A \rightarrow A$  non ha punti fissi.

### 3.1.1 Il numero di rotazione

Data  $g : S^1 \rightarrow S^1$ , la proiezione nel quoziente  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  ci dà un omeomorfismo *sollevato*  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè un omeomorfismo che verifica

$$g \circ \pi = \pi \circ G.$$

Una tale  $G$  è unica a meno di addizione di una costante intera.

**Definizione 3.1.2.** Il *numero di rotazione* della mappa  $G$  è definito come il numero reale:

$$\text{Rot}(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(t_0) - t_0}{n}$$

per una costante  $t_0$ .

**Proposizione 3.1.1.** *Il numero di rotazione  $G$  è indipendente da  $t_0$ , ed è ben definito a meno di addizione di un intero.*

**Definizione 3.1.3.** Possiamo allora definire il numero di rotazione di  $g$  come  $\text{rot}(g) = \pi(\text{Rot}(G))$ , cioè la classe di  $\text{Rot}(G) \pmod{1}$  in  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Il numero di rotazione ha le seguenti proprietà:

**Proposizione 3.1.2.** *Sia  $h : S^1 \rightarrow S^1$  un omeomorfismo che preserva l'orientazione. Allora  $\text{rot}(h^{-1} \circ g \circ h) = \text{rot}(g)$ .*



**Proposizione 3.1.3.** *Sia  $g$  un omeomorfismo che preserva l'orientazione. Allora  $\text{rot}(g) \in \mathbb{Q}$  se e solo se  $g$  ha punti periodici. Inoltre  $g$  ha punti periodici di periodo  $q$  se e solo se il suo numero di rotazione ha denominatore  $q$ . I punti periodici di una tale mappa hanno tutti lo stesso periodo.*

Adesso un risultato sulla continuità del numero di rotazione:

**Proposizione 3.1.4.** *La mappa  $g \mapsto \text{rot}(g)$  è continua per la topologia  $\mathcal{C}^0$ .*

Segue dalla definizione che il numero di rotazione è monotono, cioè  $G_1 > G_2 \Rightarrow \text{Rot}(G_1) > \text{Rot}(G_2)$ . In particolare:

**Proposizione 3.1.5.** *Consideriamo una famiglia parametrizzata di mappe sollevate della forma  $G_\alpha(t) = G_0(t) + \alpha$ . Allora il numero di rotazione  $\text{Rot}(G_\alpha)$  cresce in modo continuo con  $\alpha$ , incrementando di  $+1$  quando  $\alpha$  incrementa di  $+1$ .*

### 3.1.2 La classificazione di Poincaré nel caso razionale

**Proposizione 3.1.6.** *Sia  $g : S^1 \rightarrow S^1$  un omeomorfismo che preserva l'orientazione, con numero di rotazione  $\frac{p}{q}$  e  $p, q$  primi fra loro. Sia  $x_0 \in S^1$  tale che  $g^q(x_0) = x_0$  un punto periodico. Allora l'ordinamento dell'orbita  $\{x_0, g(x_0), \dots, g^{q-1}(x_0)\}$  su  $S^1$  è lo stesso di quello di  $\{0, e^{2\pi i \frac{p}{q}}, e^{2\pi i \frac{2p}{q}}, \dots, e^{2\pi i \frac{(q-1)p}{q}}\}$  in  $S^1$ . In particolare l'orbita periodica divide  $S^1$  in intervalli che vengono permutati da  $g$ .*

**Definizione 3.1.4.** Una  $\frac{p}{q}$ -rotazione è una rotazione di angolo  $2\pi \frac{p}{q}$ .

Una permutazione di intervalli di  $S^1$  indotta da  $g$  come nella Proposizione 3.1.6 è una  $\frac{p}{q}$ -permutazione, e l'orbita del punto  $x_0$  è una  $\frac{p}{q}$ -orbita periodica.

Il seguente risultato di Poincaré ci chiarisce definitivamente la dinamica di un omeomorfismo  $g$  con numero di rotazione razionale:

**Teorema 3.1.7 (Poincaré).** *Sia  $g : S^1 \rightarrow S^1$  un omeomorfismo che preserva l'orientazione, con numero di rotazione razionale  $\text{rot}(g) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Allora ogni orbita non periodica di  $g$  tende asintoticamente a un'orbita periodica.*

### 3.1.3 La classificazione di Poincaré nel caso irrazionale

Ricordiamo la definizione di funzione transitiva:

**Definizione 3.1.5.** Dato uno spazio topologico  $X$  e una mappa  $g : X \rightarrow X$ , la mappa  $g$  è detta *topologicamente transitiva* se esiste un punto  $x \in X$  la cui orbita sia densa in  $X$ .

Per quanto riguarda il caso di un omeomorfismo  $g$  con numero di rotazione irrazionale, abbiamo la seconda parte del teorema di Poincaré:

**Teorema 3.1.8 (Poincaré).** *Sia  $g : S^1 \rightarrow S^1$  un omeomorfismo che preserva l'orientazione, con numero di rotazione irrazionale  $\alpha = \text{rot}(g) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Allora:*

1. *se  $g$  è transitiva, allora  $g$  è coniugata con la rotazione  $r_\alpha : x \mapsto \alpha x$ ;*
2. *se  $g$  non è transitiva, allora  $g$  è semiconiugata alla rotazione  $r_\alpha : x \mapsto \alpha x$ , cioè esiste  $h : S^1 \mapsto S^1$  tale che  $h \circ f = r_\alpha \circ h$ . In questo caso  $h$  è una mappa continua, suriettiva e monotona.*

### 3.1.4 La teoria topologica di Denjoy

**Definizione 3.1.6.** Una funzione  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  è a *variazione limitata* se la sua variazione

$$\text{Var}(g) = \sup \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x'_k)|$$

è finita. Il sup è calcolato su tutte le collezioni finite  $\{x_k, x'_k\}$  con  $k = 1 \dots n$  tali che  $x_k, x'_k$  sono estremi di un intervallo aperto  $I_k$  e  $I_k \cap I_j = \emptyset$  per  $k \neq j$ .

*Osservazione 3.1.2.* Ogni funzione lipschitziana e, di conseguenza, ogni funzione differenziabile, è a variazione limitata.

**Teorema 3.1.9 (Denjoy).** *Un diffeomorfismo  $\mathcal{C}^1$ ,  $g : S^1 \rightarrow S^1$ , con numero di rotazione irrazionale  $\text{rot}(g) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e derivata a variazione limitata, è transitivo e, quindi, topologicamente coniugato ad una rotazione.*

*Osservazione 3.1.3.* Segue da questo teorema che un diffeomorfismo  $\mathcal{C}^2$  con numero di rotazione irrazionale è topologicamente coniugato ad una rotazione.

Ci siamo per adesso occupati di coniugi di tipo topologico, senza cioè richiedere alcuna regolarità sulla funzione di coniugio. Le cose si complicano nel caso che si richieda un coniugio differenziabile (rispettivamente analitico), tale cioè che la funzione  $h$  attraverso cui facciamo il coniugio sia differenziabile (rispettivamente analitica). Anche in questo caso, come nel caso di una funzione olomorfa su  $\widehat{\mathbb{C}}$ , l'approssimazione del numero di rotazione tramite numeri razionali gioca un ruolo chiave.

**Teorema 3.1.10 (Arnold (1961)).** *Dati  $\kappa, r > 1$ , esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che se  $\alpha$  soddisfa una condizione diofantea di ordine  $\kappa$ , la funzione  $u$  è analitica sull'anello  $\mathcal{A}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{r} < |z| < r\}$  con  $u(z) < \varepsilon$  su  $\mathcal{A}_r$ , e  $g(z) = e^{2\pi i \alpha} + u(z)$  manda il cerchio  $S^1$  in sé e ha numero di rotazione  $\alpha$  su  $S^1$ , allora  $g$  è analiticamente coniugata alla rotazione del cerchio di angolo  $\alpha$ .*

Questo teorema ha una natura locale. È stato generalizzato da Hermann nel 1979, e migliorato da Yoccoz nel 1984 (vedi [He], [Yo]).

Prima di enunciare il prossimo teorema diamo una definizione:

**Definizione 3.1.7.** Sia data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $f$  è  $\mathcal{C}^{k-\delta}$ , con  $k \geq 1$  un intero e  $\delta \in (0, 1)$ , se  $f$  è  $\mathcal{C}^{k-1}$  e la sua  $k-1$ -esima derivata soddisfa una condizione di Hölder:

$$\frac{|D^{k-1}(f(x)) - D^{k-1}(f(y))|}{|x - y|^{1-\delta}} < c$$

con  $c$  una costante.

**Teorema 3.1.11 (Hermann-Yoccoz).** *Sia  $g$  un diffeomorfismo del cerchio che sia  $\mathcal{C}^k$ , con  $k \geq 3$ . Supponiamo che il numero di rotazione  $\alpha$  di  $g$  soddisfi la condizione diofantea:*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{K}{q^{2+\beta}}$$

per ogni  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , dove  $K$  e  $\beta$  sono costanti positive. Allora, se  $k > 2\beta + 1$ , esiste un diffeomorfismo  $\mathcal{C}^1$ , lo chiamiamo  $h$ , che coniuga  $g$  e la rotazione  $r_\alpha$ . Inoltre,  $h$  è  $\mathcal{C}^{k-1-\beta-\varepsilon}$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . In particolare, se  $g$  è  $\mathcal{C}^\infty$ , allora  $h$  è  $\mathcal{C}^\infty$ .

## 3.2 Applicazioni alla dinamica delle funzioni olomorfe

Torniamo adesso a studiare l'insieme di Fatou di una funzione olomorfa.

### 3.2.1 Gli anelli di Hermann

Sia  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una funzione olomorfa.

**Definizione 3.2.1.** Una componente  $U$  dell'insieme di Fatou  $F(f)$  è chiamata un *anello di Hermann* se è biolomorfa ad un anello  $A_r = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} | 1 < z < r\}$  e se  $f$ , o una sua iterata, è coniugata su questo anello ad una rotazione irrazionale.

A volte i dischi di Siegel e gli anelli di Hermann vengono riuniti sotto il nome di *domini di rotazione*.

Ci sono almeno due metodi per costruire anelli di Hermann: il primo, che fu utilizzato da Hermann, verrà presentato qui di seguito.

Introduciamo innanzitutto il concetto di prodotto di Blaschke:

Sia  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ , con  $a \neq 1$ , una costante. Allora si dimostra facilmente con un calcolo che esiste una e una sola trasformazione lineare fratta  $z \mapsto \beta_a(z)$  che manda il cerchio  $\partial D$  in sé, fissando il punto  $z = 1$ , e che manda il punto  $a$  in  $\beta_a(a) = 0$ . Si ha, per esempio, che  $\beta_0(z) = z$  e  $\beta_\infty(z) = \frac{1}{z}$ .

In generale si ha

$$\beta_a(z) = \frac{1 - \bar{a}}{1 - a} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

se  $a \neq \infty$ . Se  $|a| < 1$  allora  $\beta_a$  preserva l'orientazione su  $\partial D$  e manda il disco unitario in sé. Se invece  $|a| > 1$  allora  $\beta_a$  inverte l'orientazione su  $\partial D$  e manda  $D$  in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}$ .

**Definizione 3.2.2.** Un *prodotto di Blaschke* è una funzione razionale di grado  $d$  della forma:

$$f(z) = e^{2\pi it} \beta_{a_1}(z) \dots \beta_{a_d}(z)$$

per qualche costante  $e^{2\pi it} \in \partial D$  e  $a_1, \dots, a_d \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \partial D$

Notiamo che  $a_i \bar{a}_j \neq 1$ , se così non fosse, infatti, si ha che  $\beta_{a_i}(z)\beta_{a_j}(z) = 1$ , e il grado sarebbe minore di  $d$ . L'espressione di  $f(z)$  come prodotto di Blaschke è unica, infatti  $f(1) = e^{2\pi it}$  e  $f^{-1}(0) = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$ .

**Lemma 3.2.1.** *Una mappa razionale  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  di grado  $d$  manda il cerchio unitario in se stesso se e solo se può essere scritta come un prodotto di Blaschke:*

$$f(z) = e^{2\pi it} \beta_{a_1}(z) \dots \beta_{a_d}(z).$$

*Dimostrazione.* Sia  $f$  una mappa che si può scrivere come un prodotto di Blaschke. Siccome ogni fattore  $\beta_{a_i}$  manda il cerchio unitario in sé, anche il loro prodotto manda il cerchio unitario in sé, Allora la  $f$ , che è un prodotto di  $\beta_{a_i}$  e di un elemento di  $\partial D$ , manda il cerchio unitario in sé.

Viceversa, dobbiamo dimostrare che se  $f$  manda il cerchio unitario in sé allora si può scrivere come un prodotto di Blaschke. Per induzione: se il grado di  $f$  è 1, l'abbiamo già detto. Supponiamo allora di aver dimostrato il teorema per ogni mappa di grado  $d - 1$  e dimostriamolo per una mappa di grado  $d$ . Consideriamo l'equazione  $f(z) = 0$  e scegliamo una soluzione di questa equazione:  $a$ . Consideriamo allora la mappa  $g(z) = \frac{f(z)}{\beta_a(z)}$ . Questa mappa ha grado  $d - 1$  e quindi si può scrivere come prodotto di Blaschke. Allora  $f(z) = g(z)\beta_a(z)$  si può scrivere come prodotto di Blaschke.  $\square$

**Teorema 3.2.2.** *Sia  $\rho$  un numero di rotazione,  $d$  un numero naturale dispari maggiore o uguale a 3. Allora possiamo scegliere un prodotto di Blaschke  $f$  di grado  $d$  che manda  $\partial D$  in sé e tale che  $f|_{\partial D}$  sia un diffeomorfismo con numero di rotazione  $\rho$ . Se  $\rho$  verifica una condizione diofantea, allora  $f$  ha anelli di Hermann.*

Per la dimostrazione rimandiamo a [Mi].



# Capitolo 4

## Corrispondenza fra mappe olomorfe e diffeomorfismi analitici del cerchio

### 4.1 Il teorema fondamentale

Il fine principale di questo capitolo sarà quello di dimostrare il seguente teorema, e di dare alcune applicazioni.

**Definizione 4.1.1.** Con *dominio di Jordan* o *intorno di Jordan* intenderemo un aperto connesso (rispettivamente un intorno) il cui bordo sia una curva di Jordan.

**Teorema 4.1.1.** Sia  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ ,  $|\lambda| = 1$ , un diffeomorfismo olomorfo locale. Sia  $U \subset \mathbb{C}$  un intorno di Jordan del punto fisso indifferente 0 tale che  $f$  e  $f^{-1}$  siano definite e iniettive in un intorno della chiusura di  $U$ . Allora esiste un insieme  $K$  tale che:

1.  $K$  è compatto, connesso e pieno (cioè  $\mathbb{C} \setminus K$  è connesso);
2.  $0 \in K \subset \bar{U}$ ;
3.  $K \cap \partial U \neq \emptyset$ ;
4.  $K$  è completamente  $f$ -invariante.

In più, se  $f$  non è di ordine finito,  $f$  è linearizzabile in 0 se e solo se  $0 \in \overset{\circ}{K}$ . È possibile scegliere  $K$  in modo che sia massimale rispetto all'inclusione.

Chiamiamo un *Compatto di Siegel* un insieme compatto  $K$  che soddisfa 1,...,4 perché può essere visto come un dominio di Siegel degenerare. Quando il punto fisso indifferente è irrazionale e  $K$  non è contenuto nella chiusura di un dominio di linearizzazione, allora  $K$  è chiamato un *Porcospino*.

## 4.2 La costruzione fondamentale

Sia  $\widehat{\mathbb{C}}$  la sfera di Riemann. Diamo alcune definizioni:

**Definizione 4.2.1.** Sia  $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$  un sottoinsieme compatto connesso della sfera di Riemann che non contiene il punto all'infinito,  $\Omega_K$  la componente connessa del suo complementare che contiene il punto all'infinito. Chiamiamo il *riempimento* di  $K$ , e lo indichiamo con  $\widetilde{K}$ , l'insieme  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega_K$ .

Notiamo che l'insieme  $\Omega_K$  è semplicemente connesso, e quindi biolomorfo al disco.

**Definizione 4.2.2.** Sia  $(f, U, K)$  una tripla che verifica queste proprietà:  $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$  è un insieme compatto connesso che non contiene il punto all'infinito;  $f$  è un diffeomorfismo olomorfo tale che  $f$  e  $f^{-1}$  sono definite e iniettive in un intorno  $U$  di  $K$ , e che  $K$  sia completamente  $f$ -invariante. Inoltre  $f(U \cap \Omega_K)$  è un intorno di  $\partial\Omega_K$  in  $\overline{\Omega}_K$ .

Allora  $(f, U, K)$  è detta una tripla *accettabile*.

Sia  $(f, U, K)$  accettabile. Possiamo allora considerare l'insieme delle fini primarie di  $\Omega_K$ . Associamo ad  $f$  un diffeomorfismo analitico del cerchio che corrisponde all'azione indotta da  $f$  sulle fini primarie di  $\Omega_K$ , come indicato in seguito:

Consideriamo un biolomorfismo  $h : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{D} \rightarrow \Omega_K$ . Normalizziamo  $h$  in modo che  $h(\infty) = \infty$  e  $h$  sia tangente all'identità a  $\infty$  (la normalizzazione non è importante di per sé ma determina  $h$  in modo unico). La mappa  $g = h^{-1} \circ f \circ h$  è un diffeomorfismo olomorfo definito nell'anello  $h^{-1}(U)$ , che ha  $S^1$  come una componente del bordo.



Il diffeomorfismo  $g$  manda questo anello in un altro avente anch'esso  $S^1$  come una componente del bordo. Questo deriva dal fatto che  $f(U \cap \Omega_K)$  è un intorno di  $\partial\Omega_K$  in  $\overline{\Omega}_K$ . Per il Teorema 1.4.15, il diffeomorfismo  $g$  si estende in modo continuo al cerchio unitario  $S^1$ . Per il Teorema 1.1.16,  $g$  si estende a  $S^1$  in modo analitico. Denoteremo questa estensione ancora con  $g$ . Questa estensione è un diffeomorfismo olomorfo in un intorno di  $S^1$  tale che  $g(S^1) = S^1$ . Quindi  $g|_{S^1}$  è un diffeomorfismo analitico del cerchio. La costruzione che abbiamo esposto verrà chiamata in seguito la *costruzione fondamentale* (Vedi Figura 4.1).

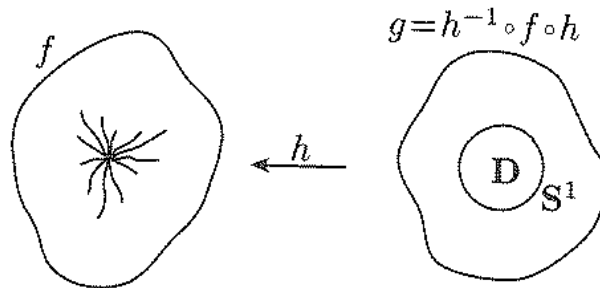


Figura 4.1: La costruzione fondamentale

Possiamo notare che il diffeomorfismo  $g$  corrisponde all'azione indotta da  $f$  sull'insieme delle fini primarie di  $\Omega_K$ ; questa azione è analitica rispetto alla struttura analitica che viene dall'identificazione dell'insieme delle fini primarie con  $S^1$  attraverso la rappresentazione conforme  $h$ .

#### 4.2.1 Continuità della costruzione fondamentale

Consideriamo lo spazio  $\mathcal{K}_\infty$  definito nel Paragrafo 1.3.2.

**Lemma 4.2.1.** *Sia  $((K_i, U_i, f_i)_{i \geq 0})$  una successione di triple accettabili, con  $K_i \in \mathcal{K}_\infty$  per ogni  $i$  e tali che la successione  $(K_i)_{i \geq 0}$  converga a  $K \in \mathcal{K}_\infty$  nella topologia del kernel.*

Assumiamo che esista un aperto  $U$  contenuto nel kernel di  $\{U_i\}_{i \geq 0}$ , che  $U$  sia un intorno di  $K$  e che la successione  $(f_i)_{i \geq 0}$  (risp.  $(f_i^{-1})_{i \geq 0}$ ) converga uniformemente sui compatti di  $U$  ad un diffeomorfismo olomorfo  $f$  (risp.  $f^{-1}$ ) tale che la tripla  $(f, U, K)$  sia accettabile. Sia  $(g_i)_{i \geq 0}$  la successione dei diffeomorfismi analitici del cerchio ottenuti dalla costruzione fondamentale applicata a  $f_i$  e  $K_i$ ,  $g$  quella applicata a  $f$  e  $K$ .

Allora  $(g_i)_{i \geq 0}$  converge uniformemente a  $g$  in un intorno di  $S^1$ .

*Dimostrazione.* Siccome l'aperto  $U$  è contenuto nell'intersezione degli  $(U_i)_{i \geq i_0}$  i diffeomorfismi analitici del cerchio della successione  $(g_i)_{i \geq i_0}$  sono definiti, per  $i \geq i_1$ , in un intorno anulare fisso  $A$  di  $S^1$ , perché la costruzione è valida per ogni  $f_i$  applicata all'aperto  $U$ . Senza perdere di generalità possiamo supporre che  $i_0 = i_1$ .

Possiamo assumere che  $A$  sia simmetrico rispetto ad  $S^1$ . Sia  $C$  in  $A$  omotopo e esterno a  $S^1$ , e  $C'$  il suo riflesso rispetto a  $S^1$ . Le mappe  $(h_i)_{i \geq i_0}$  convergono uniformemente a  $h$  in  $C$  per il Teorema 1.3.7, così come le  $(h_i^{-1})_{i \geq i_1}$  a  $h^{-1}$  (per qualche  $i_1 \geq i_0$ ) su un intorno compatto di  $f(h(C))$ . Le  $(f_i)_{i \geq 0}$  convergono invece per ipotesi. Ne segue che  $(g_i)_{i \geq i_1}$ ,  $g_i = h_i^{-1} \circ f_i \circ h_i$  converge uniformemente in  $C$  a  $g = h^{-1} \circ f \circ h$ . Per riflessione rispetto a  $S^1$ , lo stesso è vero in  $C'$ . Per il principio del massimo delle funzioni olomorfe, la successione  $(g_i)_{i \geq i_1}$  converge uniformemente a  $g$  nell'anello compreso fra  $C$  e  $C'$ .  $\square$

## 4.3 Dinamica di una funzione olomorfa vicino a un punto fisso indifferente

### 4.3.1 Studio locale nel caso razionale

In questo paragrafo adatteremo la teoria esposta in 2.2.2 per i nostri propositi.

Sia  $\alpha = \frac{p}{q}$ , con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $(p, q) = 1$ . Allora il numero complesso  $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$  è una radice dell'unità. Consideriamo una funzione olomorfa, che non sia di ordine finito,  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  della forma:  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ .

Sia  $Q$  un petalo attrattivo per  $f$ , come nella Definizione 2.2.1. Sia  $d$  la direzione attrattiva relativa a  $Q$ , e  $v, w$  le due direzioni repulsive che delimitano  $Q$ .

Un *petalo locale*  $P \subset Q$  è un dominio di Jordan compreso fra la direzione attrattiva relativa a  $Q$  e una delle due direzioni repulsive che delimitano  $Q$ , che sia invariante per  $f^q$ , e tale che la dinamica di  $f$  ristretta a  $P$  sia “rotatoria” (vedi Figura 4.2). Un petalo locale  $P$  è detto *positivo* se  $f|_P$  ha un’orientazione positiva, *negativo* altrimenti.

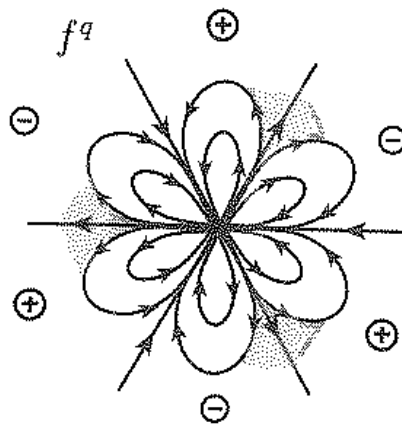


Figura 4.2:

Un petalo attrattivo è formato da due petali locali adiacenti, uno positivo ed uno negativo, più la regione localmente attrattiva compresa fra di loro (vedi Figura 4.2).

Introduciamo adesso il concetto in modo rigoroso:

**Definizione 4.3.1.** Coniughiamo  $f|_Q$  alla traslazione del semipiano destro  $H = \{x + iy \in \mathbb{C} | x > 0\}$ , come nel Teorema 2.2.11, attraverso una mappa di coniugio  $h : Q \rightarrow H$ . Allora la direzione attrattiva corrisponde alla semiretta  $y = 0$ . Denotiamo con  $H' = \{x + iy \in H | y > 0\}$  e con  $H'' = \{x + iy \in H | y < 0\}$ . Un *petalo locale positivo* è un insieme della forma  $h^{-1}(H')$ , mentre un *petalo locale negativo* è un insieme della forma  $h^{-1}(H'')$ .

**Proposizione 4.3.1.** *Sia  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  della forma:  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ , con  $\lambda$  una radice dell'unità. Allora esiste  $m \geq 1$ , e un fiore locale  $F$  formato da  $2m$  cicli locali di  $q$  petali locali. Si ha che  $2mq = n$ , con lo stesso  $n$  del Lemma 2.2.10.*

*Dimostrazione.* Segue chiaramente dal Teorema 2.2.6. □

**Definizione 4.3.2.** Sia  $l$  un germe di arco che ha 0 come estremo. Il germe di arco definito da  $l$  è  $f$ -invariante se  $f(l)$  rappresenta lo stesso germe di arco.

**Definizione 4.3.3.** Un bouquet  $f$ -invariante di germi di archi  $f$ -invarianti è una famiglia di archi analitici che finiscono in 0 e ricoprono un petalo attrattivo, cioè due petali adiacenti e la regione localmente attrattiva fra di loro (vedi Figura 4.3).

**Definizione 4.3.4.** Una *cuspidine attrattiva* (risp. repulsiva) è un piccolo intorno in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F$  di 0 in cui ogni orbita è attratta a 0 (risp. respinta da 0).

**Lemma 4.3.2.** *Sia  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  della forma:  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ , con  $\lambda$  una radice dell'unità. Esistono  $nq$  bouquet  $f^q$ -invarianti che formano il fiore di Fatou di  $f$  a 0. Per ogni bouquet esiste un arco analitico  $\gamma$  che sia trasverso a tutti gli archi analitici che formano il bouquet e che taglia ognuno di essi una sola volta. Quindi abbiamo una parametrizzazione iniettiva degli archi  $f$ -invarianti che formano il bouquet. (Vedi Figura 4.3)*



Figura 4.3:

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un petalo attrattivo per  $f$ . Allora per il Teorema 2.2.11,  $f|_P$  è coniugata, attraverso un embedding iniettivo  $\alpha$ , ad una traslazione  $x \rightarrow x + 1$  in  $\mathbb{C}$ . Consideriamo allora le rette orizzontali  $y = \text{costante}$  in  $\mathbb{C}$ . L'insieme  $B = \{\alpha^{-1}(r) \cap P \mid r : y = c, c \in \mathbb{R}\}$  ricopre il petalo attrattivo  $P$  ed è un bouquet  $f^q$ -invariante.

Per la parametrizzazione, scegliamo in  $\mathbb{C}$  una retta verticale  $s : x = \text{costante}$ . Essa interseca tutte le rette  $y = \text{costante}$  una e una sola volta, l'arco analitico  $\gamma$  è dato allora da  $\alpha^{-1}(s)$ .

Possiamo allora scegliere  $nq$  bouquet, uno per ogni petalo attrattivo, che formino il fiore di Fatou a 0.  $\square$

### 4.3.2 Studio semi-locale nel caso razionale

Consideriamo un germe di funzione ologomorfa  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ ,  $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ ,  $p, q \geq 1$ ,  $(p, q) = 1$ , definito in un intorno di 0. In questo paragrafo intenderemo sempre la funzione  $f$  dotata di queste proprietà. Se il germe di  $f$  a 0 non è di ordine finito, esiste un fiore locale composto di  $2n$  cicli locali, ognuno di  $q$  petali,  $\mathcal{C} = (P_i)_{1 \leq i \leq q}$  tale che  $0 \in \overline{P_i}$ ,  $f^q(P_i) = P_i$  e  $f^q|_{P_i}$  è iniettiva. Ogni petalo  $P_i$  è un dominio di Jordan. Un'estensione del ciclo  $\mathcal{C}$  è un ciclo  $\widehat{\mathcal{C}} = (\widehat{P}_i)_{1 \leq i \leq q}$  tale che  $P_i \subset \widehat{P}_i$ ,  $\widehat{P}_i$  è un dominio di Jordan,  $0 \in \overline{\widehat{P}_i}$ ,  $\widehat{P}_i$  è contenuto nel dominio di definizione di  $f^q$ ,  $f^q(\widehat{P}_i) = P_i$  e  $f^q|_{\widehat{P}_i}$  è iniettiva.

**Teorema 4.3.3.** *Sia  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ ,  $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 1$ ,  $(p, q) = 1$ , un germe di funzione ologomorfa definita su di un intorno di Jordan  $U \subset \widehat{\mathcal{C}}$  di 0, che non sia di ordine finito. Assumiamo che  $f$  e  $f^{-1}$  siano definite e iniettive in un intorno della chiusura di  $U$ . Se  $\mathcal{C} = (P_i)_{1 \leq i \leq q}$  è un ciclo locale di petali a 0, allora esiste un'estensione di  $\mathcal{C}$  contenuta in  $U$ ,  $\widehat{\mathcal{C}} = (\widehat{P}_i)_{1 \leq i \leq q}$ , che ha un petalo  $P = \widehat{P}_i$  la cui chiusura interseca il bordo di  $U$ . In più, esiste un tale  $P$  col bordo che sia un arco di Jordan contenente 0, che è analitico eccetto che a 0.*

L'insieme  $P$  è chiamato un *petalo principale* del ciclo  $\mathcal{C}$  di  $f$  relativo ad  $U$ . Il ciclo di petali  $\widehat{\mathcal{C}}$  è chiamato un *ciclo massimale* di  $f$  relativo ad  $U$ .

Se  $f$  è di ordine finito, c'è un teorema simile:

**Teorema 4.3.4.** *Sia  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$  un germe di funzione ologomorfa definito in un intorno di Jordan  $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$  di  $0$ , di ordine finito, cioè  $f^q = id$  come germe in  $0$  per un minimo  $q \geq 1$ . Allora la componente connessa  $V$  di  $0$  dell'insieme  $\{z \in U \mid f^i(z) \in U \forall 0 \leq i \leq q-1\}$  è semplicemente connessa e composta dal punto fisso  $0$  e da orbite periodiche di periodo esattamente  $q$ , e se  $U \neq \widehat{\mathbb{C}}$ , per ogni  $z \in \partial V$  esiste  $0 \leq i \leq q-1$  tale che  $f^i(z) \in \partial U$ . In particolare,  $\partial U \cap \partial V \neq \emptyset$ .*

*Dimostrazione.* Siccome la  $f$  è analitica, si ha che  $f^q(z) = z$  per ogni  $z \in U$ . Quindi l'insieme  $V$  è un aperto, perché intersezione finita di aperti, composto da punti periodici di periodo (non necessariamente minimale)  $q$ . Siccome  $U$  è un dominio di Jordan, il principio del massimo relativo ad  $U$  mostra la semplice connettività di  $V$ . Infatti, siccome  $U$  è biolomorfo a  $D$ , supporre che  $V$  non sia semplicemente connesso, significa che  $V$  sconnette  $U$  in almeno due componenti connesse, e almeno una di esse, chiamiamola  $B$ , verifica  $\partial B \cap \partial U = \emptyset$ . Allora, dato un numero  $i$ , si ha che  $f^i(V) \subset U$  e, per il principio del massimo modulo, si ha che  $f^i(B) \subset U$ . Allora  $B \subset V$ , mentre avevamo supposto che  $B$  fosse nel complementare di  $V$ . Allora  $V$  è biolomorfo al disco.

Supponiamo che esista  $z \in \partial V$  tale che per ogni  $0 \leq i \leq q-1$ ,  $f^i(z)$  non appartenga a  $\partial U$ . Allora per ogni  $0 \leq i \leq q-1$  si ha che  $f^i(z) \in \overset{\circ}{U}$  perché non può uscire da  $\bar{U}$  per continuità. Ma allora anche i punti vicini a  $z$  verificano questa proprietà e quindi sono in  $V$ . Questo contraddice che  $z \in \partial V$ .

Per dimostrare che  $q$  è il periodo minimo di ogni punto di  $V \setminus \{0\}$  ragioniamo per induzione: se  $q = 1$  non c'è niente da dimostrare. Supponiamo allora  $q \geq 2$ . Sia  $F = \{z \in V \mid f^k(z) = z \text{ per qualche } 1 \leq k < q\}$ .  $F$  è composto da punti isolati di  $V$ , altrimenti  $f^k = id$  è valida in qualche insieme aperto di  $V$  e allora  $F = V$ , mentre  $q$  è minimale. Proviamo che  $F = \{0\}$ . Se così non fosse, sia  $z_0 \in F$ ,  $z_0 \neq 0$ . Esiste un'iterata di  $f$ ,  $f^k$ ,  $k < q$  per cui  $0, z_0$  sono punti fissi. Ma, per il Corollario 1.1.8, una funzione del disco con due punti fissi è l'identità. Questo completa la dimostrazione.  $\square$

Per la dimostrazione del Teorema 4.3.3 sono necessari alcuni lemmi:

**Definizione 4.3.5.** Sia  $f$  una funzione olomorfa,  $f : U \rightarrow U$  con  $U$  un sottoinsieme  $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ . Un insieme (intervallo, aperto, chiuso...) fondamentale per la dinamica di  $f$  in  $U$  è un insieme  $R \subset U$  che interseca ogni orbita esattamente in un punto.

**Lemma 4.3.5.** Sia  $g$  un omeomorfismo di  $I = [0, 1]$  che è reale analitico in un intorno  $V$  di  $[0, 1]$  in  $\mathbb{C}$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ , e tale che ogni punto in  $(0, 1]$  converge ad 1 sotto iterazione di  $g$ . Allora esiste una famiglia continua (nella topologia di Hausdorff) di domini di Jordan  $(U_t)_{0 < t \leq 1}$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$  tali che:

1.  $U_t$  contiene  $(0, 1)$ ,  $U_0 = [0, 1]$ ,  $U_t \rightarrow U_0$  per  $t \rightarrow 0$  nella topologia di Hausdorff;
2. il bordo di  $U_t$  è composto da: 0, 1, un arco analitico  $\gamma$  nel semipiano superiore, e la sua riflessione rispetto all'asse reale;
3. l'estensione analitica di  $g$  è definita in un intorno della chiusura di  $U_t$  e  $g|_{U_t}$  è un omeomorfismo di  $U_t$ .

*Dimostrazione.* Sia  $I = [a, g(a))$  un intervallo fondamentale per la dinamica di  $g$  in  $(0, 1)$ . Consideriamo una piccola trasversale  $l$  alla retta reale in  $a$  e la sua immagine  $g(l)$ . Siccome il punto 1 è attrattivo, ci sarà un bacino di attrazione. Stessa cosa per il punto 0 rispetto a  $f^{-1}$ . Usiamo un arco  $J$  nel semipiano superiore  $H$  di  $\mathbb{C}$  i cui estremi coincidono con i due estremi delle curve  $l$  e  $g(l)$  in tale semipiano. Consideriamo anche il suo riflesso  $J'$  rispetto all'asse reale. Se scegliamo  $J$  abbastanza vicino all'asse reale, l'arco  $K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(J)$  è ben definito, sta nel semipiano superiore e ha come estremi 0, 1. Basterà infatti controllare un numero finito di passaggi, finché non si arrivi al bacino di attrazione dei due punti. Anche l'arco  $K' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(J')$ , che è simmetrico a  $K$  per il Teorema 1.1.16, risulta ben definito. Insieme ai punti 0, 1, gli archi  $K$  e  $K'$  delimitano un dominio di Jordan invariante che ha le proprietà richieste dal lemma. Prendendo una famiglia continua di archi  $J_t$  che verificano  $d_H(I, J(t)) < t$ , con la stessa costruzione otteniamo una famiglia continua di domini che verificano le proprietà richieste.  $\square$

*Osservazione 4.3.1.* Chiaramente questo lemma è applicabile anche nel caso più generale in cui  $J \subset \mathbb{C}$  è un insieme omeomorfo a  $(0, 1)$ ,  $g : J \rightarrow J$  è un omeomorfismo e  $g$  non ha punti fissi. Infatti le iterate di ogni punto devono convergere tutte allo stesso estremo per continuità. Per esempio il lemma vale nel caso in cui l'insieme è costituito da un arco di  $S^1$  e l'azione di  $g$  su questa componente è vagante.

**Definizione 4.3.6.** Sia  $g$  un diffeomorfismo analitico di  $S^1$  con numero di rotazione  $\varrho(g) = \frac{p}{q}$ ,  $q \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) = 1$ . Un fiore anulare di Fatou  $F$  relativo a  $g$  è un insieme compatto connesso  $g$ -invariante, con  $S^1 \subset F$ , e tale che la parte interna di  $F$  sia composta di domini di Jordan limitati da due archi analitici che hanno come estremi due punti fissi consecutivi di  $g^q|_{S^1}$ , ognuno contenente una componente di  $S^1 \setminus \text{Fix}(g^q|_{S^1})$  e ognuno invariante sotto l'azione di  $g^q$ .

**Lemma 4.3.6.** *Sia  $g$  un diffeomorfismo analitico non linearizzabile del cerchio  $S^1$  con un numero di rotazione  $\varrho(g) = \frac{p}{q}$ ,  $q \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) = 1$ . Allora esiste un fiore di Fatou anulare  $F$  relativo a  $g$ . In più c'è una famiglia continua e strettamente monotona di questi fiori anulari di Fatou,  $(F_t)_{0 < t \leq 1}$  tale che  $F_{\frac{1}{2}} = F$  e  $F_t \rightarrow F_0 = S^1$  per  $t \rightarrow 0$  nella topologia di Hausdorff. Per strettamente monotona intendiamo che la chiusura di  $F_t$  meno i due punti estremi delle due componenti analitiche del bordo è contenuta nella parte interna di  $F_{t'}$  per  $t < t'$ .*

*Dimostrazione.* Il diffeomorfismo  $g|_{S^1}$  è analitico e non linearizzabile; allora  $\text{Fix}(g^q)$  è un insieme finito del cerchio (se così non fosse avrebbe un punto di accumulazione, e siccome  $g$  è analitica, si avrebbe  $g^q = id$  su tutto  $S^1$ , contro l'ipotesi che  $g$  non abbia ordine finito). Le componenti di  $S^1 \setminus \text{Fix}(g^q)$ , sono permutate da  $g$  come una  $\frac{p}{q}$ -rotazione. Per ogni ciclo scegliamo una componente e consideriamo  $g^q$ . La dinamica di  $g^q$  su questa componente è vagante. Usando il Lemma 4.3.5 costruiamo un dominio di Jordan  $U$  limitato da due archi analitici con le specifiche proprietà. Allora trasportando questo dominio tramite  $g$  otteniamo i domini di Jordan corrispondenti alle altre componenti del ciclo. Con lo stesso procedimento, anziché costruire un dominio di Jordan relativo a una componente, possiamo costruire una famiglia continua



$\{U_t\}$  di domini di Jordan con le proprietà date dal Lemma 4.3.5 e tale che  $U_{\frac{1}{2}} = U$ . Trasportiamo poi questa famiglia tramite  $g$  e otteniamo la famiglia di domini di Jordan relativa alle altre componenti del ciclo. La proprietà  $F_t \rightarrow F_0 = S^1$  per  $t \rightarrow 0$  deriva dalla stima alla fine della dimostrazione del Lemma 4.3.5.  $\square$

**Lemma 4.3.7.** *Sia  $g$  un diffeomorfismo analitico del cerchio con numero di rotazione razionale  $\frac{p}{q}$ ,  $q \geq 1$ ,  $(p, q) = 1$ , ottenuto dalla costruzione fondamentale da una coppia  $(f, K)$ . Sia  $\gamma$  un arco analitico esterno a  $S^1$  che limita lateralmente un petalo di un fiore anulare di Fatou  $F$  di  $g$  dato dal lemma 4.3.6. L'immagine di  $\gamma$  attraverso la rappresentazione conforme  $h$  è un arco trasverso di  $\Omega_K$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F_1$  un fiore anulare di Fatou che contiene strettamente  $F$  (esiste per il Lemma 4.3.6). Allora  $\gamma$  è nella parte interna di  $F_1$ . Sia  $U$  il dominio di Jordan che è la componente della parte interna di  $F_1$  che contiene  $\gamma$  e consideriamo  $V = h(U)$ . Il dominio  $V$  è semplicemente connesso e  $f^q$  lascia  $V$  invariato. Se  $z_1 \in h(\gamma)$  allora  $(f^{qn}(z_1))_{n \geq 1}$  si accumula ad un qualche punto  $z_0 \in \partial V$ , perché  $f|_{h(\gamma)}$  non ha punti fissi e non è l'identità. Usando il Teorema 2.1.6, si ha che la successione  $(f^{qn})_{n \geq 0}$  converge uniformemente a  $z_0$  in  $V$ . Siccome  $f^q(h(\gamma)) = h(\gamma)$  (perché  $h^{-1} \circ f^q \circ h(\gamma) = g^q(\gamma) = \gamma$ , quindi  $f^q \circ h(\gamma) = h(\gamma)$ ), un estremo di  $h(\gamma)$  è a  $z_0$ . Inoltre,  $z_0 \in \partial\Omega_K$ . La stessa argomentazione per  $f^{-q}$  mostra che anche l'altro estremo di  $h(\gamma)$  tocca  $\partial\Omega_K$  in un qualche punto  $z_2$ , quindi  $h(\gamma)$  è un arco trasverso di  $\Omega_K$ . L'arco inoltre non può essere dentro  $K$  per come è fatta la rappresentazione conforme.  $\square$

*Osservazione 4.3.2.* Gli estremi dell'arco  $h(\gamma)$  sono punti periodici di  $f$ , in specifico punti fissi di  $f^q$ . Infatti gli estremi di  $\gamma$  sono punti fissi di  $g^q$  e la  $h$  manda punti fissi di  $f^q$  in punti fissi di  $g^q$ .

**Definizione 4.3.7.** Sia  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$  un germe di funzione olomorfa definito in un intorno di Jordan  $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$  di 0, tale che  $f$  e  $f^{-1}$  siano definite e iniettive in un intorno  $V$  della chiusura di  $U$ . Senza perdere di generalità posso supporre che anche  $V$  sia un intorno di Jordan. Sia  $K$  un sottoinsieme di  $U$  con le seguenti proprietà:

1.  $V$  è un intorno di  $K$ ;

2.  $K$  è compatto e connesso;
3.  $K$  è totalmente invariante per  $f$ ;
4. L'azione indotta da  $f|_{\Omega_K} : \Omega_K \rightarrow \Omega_K$  sull'insieme delle fini primarie di  $\Omega_K$  ha numero di rotazione razionale.

Allora  $K$  è detto un *fiore di Fatou generalizzato*.

Se  $K$  è un fiore di Fatou generalizzato, facciamo corrispondere ad  $f$  un diffeomorfismo analitico del cerchio come nella Costruzione fondamentale. Allora possiamo costruire un fiore anulare di Fatou. L'immagine del bordo di questo fiore anulare attraverso la rappresentazione conforme  $h$  è allora formata da archi trasversi di  $\Omega_K$ .

**Definizione 4.3.8.** Sia  $K$  un fiore di Fatou generalizzato per  $f$ . Se  $K$  è contenuto in un fiore di Fatou associato ad un punto fisso parabolico  $z_0$ , chiamiamo  $K$  un *continuo di Fatou*.

*Osservazione 4.3.3.* Un continuo di Fatou ha un intorno con nessun altro punto periodico eccetto che il punto fisso parabolico, quindi tutti gli  $h(\gamma)$  hanno un unico estremo  $z_0$ . Viceversa, se  $K$  ha un intorno con nessun altro punto periodico eccetto che il punto fisso  $z_0$ , allora  $K$  è un continuo di Fatou.

In questo caso  $z_0$  è il punto di fine comune di tutti gli archi trasversi  $h(\gamma)$  con  $\gamma$  che varia fra i bordi esterni del fiore anulare di Fatou  $F$ . Viceversa, se tutti gli  $h(\gamma)$  hanno un unico estremo  $z_0$  allora  $K$  è un continuo di Fatou.

Voglio dimostrare che lo spazio dei continui di Fatou è chiuso nello spazio dei fiori di Fatou generalizzati. Consideriamo una successione di continui di Fatou  $\{K_i\}_{i \geq 0}$  che converge nella topologia di Hausdorff ad un fiore di Fatou generalizzato  $K$ . L'insieme  $V$  è un intorno di Jordan di  $K$ , ed è biolomorfo al disco. Quindi la funzione  $f^q$  non può avere due punti fissi, a meno che non sia l'identità. Quindi l'intorno  $V$  di  $K$  non ha nessun altro punto periodico eccetto che il punto fisso  $z_0$ , e quindi  $K$  è un continuo di Fatou.

Questa osservazione sarà usata nella dimostrazione seguente.

*Dimostrazione.* (Teorema 4.3.3) Per lo studio locale che abbiamo fatto in precedenza (§4.3.1), otteniamo l'esistenza di una famiglia locale, continua e monotona di fiori di Fatou parametrizzati da un intervallo, e generati dal fascio di germi di archi come descritto nel Lemma 4.3.2. Allora questa famiglia converge all'unione nella topologia di Caratheodory. Sia  $t \in (-\infty, t_0)$  il parametro reale della famiglia locale di fiori di Fatou. Sia  $t_0$  massimale. Proviamo che c'è un fiore di Fatou relativo al parametro  $t_0$  e che questo fiore non può essere relativamente compatto in  $U$ . Per assurdo supponiamo che non ci sia un fiore di Fatou relativo al parametro  $t_0$ , oppure che ci sia ed esso sia relativamente compatto. Se  $K$  è il riempimento della chiusura dell'unione degli  $F_t$  per  $t < t_0$ ,  $K$  è relativamente compatto in  $U$  e  $f$  induce un'azione con numero di rotazione  $\frac{p}{q}$  sulle fini primarie della componente illimitata del suo complementare (segue dalla continuità del Lemma 4.2.1).

Per l'Osservazione 4.3.3,  $K$  è un continuo di Fatou. Quindi è contenuto in un fiore di Fatou. Se c'è un fiore di Fatou  $F$  relativo al parametro  $t_0$ , esso è relativamente compatto. Allora c'è un fiore di Fatou  $F'$  che lo contiene. Il parametro del fiore di Fatou  $F'$  è  $t_1 > t_0$ .

Usando il Lemma 4.3.2 vediamo che tutti i  $t < t_1$  generano un fiore di Fatou. Contro la massimalità di  $t_0$ .  $\square$

### 4.3.3 Studio semi-locale nel caso irrazionale

**Definizione 4.3.9.** Sia  $U$  un aperto. Una successione di compatti  $\{K_n\}_{n \geq 1}$  con  $K_n \in U$  per ogni  $n$  si dice *esaustiva* se si ha che  $K_n \subset K_{n+1}^\circ$  e  $\bigcup_{n \geq 1} K_n = U$ .

**Teorema 4.3.8.** Sia  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ ,  $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\alpha \in D.C.$ , olomorfa e sia  $U$  un intorno di Jordan di 0 tale che  $f$  e  $f^{-1}$  siano definite e iniettive in un intorno della chiusura di  $U$ . Allora la chiusura del dominio di linearizzazione massimo  $\overline{\mathcal{S}(f)}$  di  $f$  tocca il bordo di  $U$ :  $\overline{\mathcal{S}(f)} \cap \partial U \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.* Per il teorema di Siegel,  $\mathcal{S}(f) \neq \emptyset$ . Per assurdo supponiamo che  $\mathcal{S}(f)$  sia relativamente compatto in  $U$ . Sia  $K = \widehat{\overline{\mathcal{S}(f)}}$  la chiusura del dominio di

linearizzazione di  $f$ . Applichiamo a  $K$  e a  $f$  la costruzione fondamentale. Sia  $h : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \rightarrow \Omega_K$  la rappresentazione conforme normalizzata e  $g$  il diffeomorfismo analitico del cerchio che corrisponde all'azione di  $f$  sulle fini primarie di  $\partial K$ .

Sia  $\{K_n\}$  una successione esaustiva di dischi chiusi invarianti in  $\mathcal{S}(f)$ . Allora  $\{K_n\}$  converge a  $\overline{\mathcal{S}(f)}$  nella topologia del kernel. Applichiamo la costruzione fondamentale alle triple accettabili  $\{(f, U, K_n)\}$ . Osserviamo che i diffeomorfismi del cerchio  $(g_n)$  che otteniamo, siccome sono linearizzabili, hanno numero di rotazione  $\varrho(g_n) = \alpha$ .

Per continuità della costruzione fondamentale (Lemma 4.2.1) la successione  $(g_n)$  converge a  $g$  uniformemente in  $S^1$ . Così abbiamo provato che

$$\varrho(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(g_n) = \alpha \in D.C.$$

Ora, il teorema di linearizzazione per i diffeomorfismi analitici del cerchio implica che  $g$  è linearizzabile. Quindi esiste un anello invariante per  $g$  che circonda  $S^1$ . Trasportiamo questo anello invariante tramite  $h$ , ottenendo un dominio  $D$  su cui la  $f$  è linearizzabile, e  $D \not\subset K$ . Quindi il dominio di linearizzazione di  $f$  è più grande di  $K$ , e questo è un assurdo.  $\square$

*Osservazione 4.3.4.* La conclusione del Teorema 4.3.8 vale anche per  $\alpha \in Br$ , perché abbiamo usato soltanto la proprietà di linearizzabilità.

## 4.4 Dimostrazione del teorema fondamentale

In questa sezione dimostreremo il Teorema 4.1.1.

*Dimostrazione.* (Teorema 4.1.1) Osserviamo innanzitutto che l'ultima affermazione deriva dalla teoria generale dei punti fissi indifferenti. Se  $0 \in \overset{\circ}{K}$  allora  $0$  è stabile. Infatti se nella definizione di stabilità (Definizione 2.2.6) prendo come  $U$  e  $V$  l'insieme  $\overset{\circ}{K}$ , questo verifica le ipotesi, quindi la  $f$  è linearizzabile in  $0$ . Viceversa, se la  $f$  è linearizzabile in  $0$ , un  $V$  che verifichi le ipotesi di stabilità deve essere contenuto in  $K$  e quindi  $0 \in \overset{\circ}{K}$ .

Fissiamo un intorno di Jordan  $U$  di  $0$ . Sia  $\mathcal{F}_U$  l'insieme di tutte le funzioni continue  $f$  in  $\bar{U}$  che soddisfano le ipotesi del Teorema 4.1.1. Dotiamo lo spazio  $\mathcal{F}_U$  della topologia della convergenza uniforme su  $\bar{U}$ . Osserviamo che se  $f \in \mathcal{F}_U$  allora  $f^{-1} \in \mathcal{F}_U$  e  $f \mapsto f^{-1}$  è continua.

**Proposizione 4.4.1.** *Il sottoinsieme degli elementi di  $\mathcal{F}_U$  che soddisfano le conclusioni del Teorema 4.1.1 è chiuso.*

*Dimostrazione.* Prendiamo una successione  $(f_n)_{n \geq 0}$  in  $\mathcal{F}_U$  che soddisfa le conclusioni del Teorema 4.1.1 e che converge verso  $f \in \mathcal{F}_U$ . Più precisamente, per ogni  $f_n$  c'è insieme compatto connesso pieno  $f_n$ -invariante  $0 \in K_n \subset \bar{U}$  tale che  $K_n \cap \partial U \neq \emptyset$ . Usando la compattezza di  $\mathcal{K}_c(\bar{U})$  estraiamo una sottosuccessione convergente  $K_{n_k} \rightarrow K \in \mathcal{K}_c(\bar{U})$ . L'insieme  $K$  è compatto, connesso, pieno e non vuoto. Le proprietà 2. e 3. valgono per  $K$ . Usando il Lemma 1.3.5 otteniamo l'invarianza totale di  $K$  per  $f$ . Infatti data una successione  $\{K_n\}$  che converge a  $K$ , si ha che  $f(K_n)$  converge ad  $f(K)$ . Ma siccome  $f(K_n) = K_n$  per ogni  $n$ , si ha che  $f(K) = K$ . Lo stesso ragionamento è valido anche per  $f^{-1}(K)$ . Allora l'insieme  $K$  soddisfa le ipotesi del Teorema 4.1.1 per  $f$  e  $U$ .  $\square$

Quindi è sufficiente dimostrare il Teorema 4.1.1 per un insieme denso di funzioni di  $\mathcal{F}_U$ .

**Lemma 4.4.2.** *Sia  $E \subset \mathbb{R}$  un insieme denso. L'insieme delle funzioni  $f \in \mathcal{F}_U$  tale che  $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + O(z^2)$  con  $\alpha \in E$  è denso in  $\mathcal{F}_U$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{F}_U$ . Basta considerare  $f_n(z) = e^{2\pi i \theta_n} f(z)$  con  $\theta_n + \varrho(f) \in E$  e  $\theta_n$  abbastanza piccolo. Allora  $f_n \in \mathcal{F}_U$  e  $f_n \rightarrow f$ .  $\square$

Sappiamo già che i numeri razionali o i numeri irrazionali che soddisfano una condizione diofantea sono densi in  $\mathbb{R}$ .

Allora abbiamo due dimostrazioni distinte del Teorema 4.1.1.

La prima dimostrazione considera come insieme denso l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali. Con il Teorema 4.3.3 si trova l'insieme  $K$  per le funzioni olomorfe  $f(z) =$

$e^{2\pi i\alpha}z + O(z^2)$  con  $\alpha$  razionale. Chiamiamo  $\mathcal{F}_r$  l'insieme delle funzioni olomorfe di questa forma. Abbiamo allora che  $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_U$ . Per il Lemma 4.4.2,  $\mathcal{F}_r$  è denso. Siccome, per la Proposizione 4.4.1,  $\mathcal{F}_U$  è chiuso, allora anche  $\overline{\mathcal{F}_r} \subset \mathcal{F}_U$ . Ma siccome  $\mathcal{F}_r$  è denso, allora la sua chiusura è data da tutte le funzioni olomorfe  $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + O(z^2)$ , e il teorema è dimostrato. Questa dimostrazione è lunga ma completamente elementare.

La seconda dimostrazione si basa sul medesimo argomento, con l'unica differenza che al posto del Teorema 4.3.3 si utilizza il Teorema 4.3.8. Questa seconda dimostrazione non è elementare perché utilizza i risultati dei teoremi di linearizzazione di Siegel (Teorema 2.2.16) e di linearizzazione di Hermann (Teorema 3.1.11)  $\square$

## 4.5 Proprietà della costruzione fondamentale

Innanzitutto riscriviamo la costruzione fondamentale in una forma adatta alle applicazioni. Utilizzeremo il seguente teorema, la cui dimostrazione si può trovare su [Ab]:

**Teorema 4.5.1 ( $\frac{1}{4}$  di Koebe).** *Sia  $f : D \rightarrow D$  una funzione olomorfa con  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  che sia iniettiva in  $D$ . Allora  $f(D) \supset D_{\frac{1}{4}}$ , cioè  $f(D)$  contiene il disco aperto di centro 0 e raggio  $\frac{1}{4}$ .*

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $f \in \mathcal{S}(\alpha) = \{f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid f \text{ olomorfa, } f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + O(z^2) \text{ iniettiva su } D\}$ . Per il Teorema 4.5.1, per  $0 < r < \frac{1}{4}$  la mappa  $f$  soddisfa le ipotesi del Teorema 4.1.1 con  $U = D_r$ . Infatti nell'intorno  $D_{\frac{1}{4}}$  di  $D_r$  le funzioni  $f$  e  $f^{-1}$  sono definite e iniettive. In seguito fissiamo un tale  $r$ . Sia  $K_r$  un compatto di Siegel dato dal Teorema 4.1.1 associato a  $U = D_r$ , cioè:

1.  $K_r$  è compatto, connesso e pieno;
2.  $0 \in K_r \subset \overline{D_r}$ ;
3.  $K_r \cap \partial D_r \neq \emptyset$ ;
4.  $f(K_r) = f^{-1}(K_r) = K_r$ .

Se la funzione  $h_{K_r} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus K_r$  è una rappresentazione conforme che soddisfa  $h_{K_r}(\infty) = \infty$ , allora si può considerare il diffeomorfismo analitico del cerchio  $g_{K_r}$  come nella costruzione fondamentale.

**Definizione 4.5.1.** Sia  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una funzione olomorfa. Sia  $A$  un sottoinsieme completamente invariante di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Si dice che la dinamica di  $f$  in  $A$  è *minimale* se l'orbita di ogni punto di  $A$  è densa, ovvero se  $A$  non ha sottoinsiemi chiusi propri invarianti.

**Definizione 4.5.2.** Sia  $K$  un compatto di  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Un punto  $z \in \partial K$  è detto *accessibile* se esiste una curva in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  che ha un estremo in  $z$ .

Nei lemmi che seguono dimostreremo un'importante proprietà del diffeomorfismo  $g$  associato ad una funzione olomorfa  $f \in \mathcal{S}(\alpha)$ , cioè che, sotto particolari condizioni sul compatto  $K$  considerato, si ha che  $\alpha = \varrho(g)$ . Questa proprietà è vera per ogni compatto che soddisfi le conclusioni del Teorema 4.1.1, ma il caso generale è abbastanza complicato da dimostrare, e non è necessario per i nostri scopi. Ci limiteremo quindi al caso dei compatti invarianti che abbiamo costruito esplicitamente nel dimostrare il Teorema 4.1.1.

**Lemma 4.5.2.** *Se  $\alpha \in \mathbb{Q}$  o  $\alpha \in D.C.$  allora dato  $r$  esiste un compatto di Siegel  $K_r$  tale che  $\varrho(g_{K_r}) = \alpha$ .*

*Dimostrazione.* Cominciamo con  $\alpha \in D.C.$

Sia  $\mathcal{S}(f)$  il dominio di linearizzazione di  $f$ . Questo dominio è biolomorfo a  $D_1$ , il disco di centro 0 e raggio 1. Sia  $h : \mathcal{S}(f) \rightarrow D_1$  il biolomorfismo normalizzato. Se  $D_r$  è il disco di centro 0 e raggio  $r$ , consideriamo l'insieme  $\mathcal{S}_r(f) = h^{-1}(D_r)$ .

Sia  $K_r$  il compatto invariante che risulta dal Teorema 4.1.1 con  $U = D_r$ , cioè  $K_r = \overline{\mathcal{S}_r(f)}$  (vedi Teorema 4.3.8). Si ha che  $\mathcal{S}(f) \not\subseteq D_r$  per il Teorema 4.3.8. Infatti, dato  $D$  che soddisfi le ipotesi del Teorema 4.1.1,  $\overline{\mathcal{S}(f)}$  tocca  $\partial D$ . Allora preso  $D_{r'}$  con  $r' > r$ ,  $\mathcal{S}(f)$  non è relativamente compatto in  $D_{r'}$  e quindi non può essere incluso in  $D_r$ . (In questo caso è facile dimostrare l'unicità di  $K$  dato dal Teorema 4.1.1: un altro

$K$  deve essere intersecato da tutte le circonferenze invarianti che formano  $K_r$ , questo dimostra che  $K = K_r$  perché la dinamica di  $f$  in ognuna di queste circonferenze è minimale e  $K$  è chiuso).

Esistono allora curve di Jordan analitiche reali invarianti esterne al disco chiuso invariante  $K_r$ . Queste curve sono sempre più vicine a  $\partial K_r$ . La funzione  $f$  agisce su queste curve con numero di rotazione  $\alpha = \varrho(f)$ . Attraverso la rappresentazione conforme  $h$  queste curve corrispondono a curve invarianti esterne a  $S^1$ . Usando la riflessione rispetto a  $S^1$ , otteniamo che c'è un intorno anulare di  $S^1$  formato da curve invarianti per  $g_{K_r}$ . Quindi  $g_{K_r}$  è linearizzabile per come è fatta la dinamica nell'intorno di  $S^1$  e  $\varrho(g_{K_r}) = \varrho(f)$  perché  $g_{K_r}$  agisce con numero di rotazione  $\varrho(f)$  sulle curve  $g_{K_r}$ -invarianti che circondano  $S^1$ .

Passiamo adesso a  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , con  $\alpha = \frac{p}{q}$ .

Sia  $K_r$  un sottofiore invariante del fiore di Fatou dato dal Teorema 4.1.1 con  $U = D_r$ . Possiamo supporre che il bordo di ogni componente connessa del suo interno sia una curva di Jordan, analitica eccetto che in 0, come scritto nel Teorema 4.3.3.

Il punto 0 è accessibile da  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_r$  da ognuna delle  $nq$  cuspidi repulsive (repulsive per  $f^q$ ) fra gli  $nq$  bouquet ( $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $n > 1$ ). Dentro ognuna delle  $nq$  cuspidi repulsive consideriamo una curva  $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq nq}$  con un estremo in 0. Allora, per il Corollario 1.4.11,  $h_{K_r}^{-1}(\gamma_i)$  è un arco che tocca  $S^1$  (Vedi Figura 4.4).

Siccome possiamo scegliere  $\gamma_i$  che sia  $f^q$ -invariante come germe di arco con un estremo in 0, gli archi  $h_{K_r}^{-1}(\gamma_i)$  sono  $g^q$ -invarianti. I punti in cui toccano  $S^1$  sono punti fissi di  $g^q$  in  $S^1$ . In più, l'azione di  $f$  su un  $q$ -ciclo di archi  $\gamma_i$  è la stessa dell'azione di  $g_{K_r}$  sugli estremi di  $h_{K_r}^{-1}(\gamma_i)$ . Siccome  $f$  induce una  $(\frac{p}{q})$ -permutazione, questo mostra che  $g_{K_r}$  ha una  $(\frac{p}{q})$ -orbita periodica. Quindi  $\varrho(g_{K_r}) = \frac{p}{q} = \varrho(f)$ .  $\square$

Togliamo l'ipotesi del numero di rotazione.

**Lemma 4.5.3.** *Esiste un compatto di Siegel  $K_r$  tale che  $\varrho(g_{K_r}) = \varrho(f)$ .*

*Dimostrazione.* Il compatto di Siegel dato dal Teorema 4.1.1 è ottenuto come riempimento del limite di compatti di Siegel di germi di funzioni con numero di rotazione razionale (o irrazionale che soddisfi una condizione diofantea).



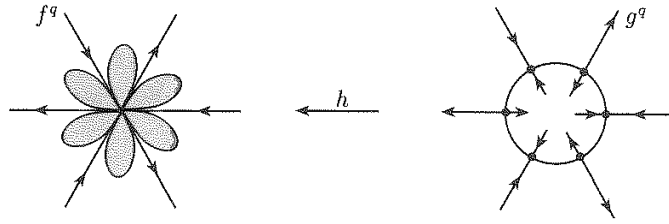


Figura 4.4:

Dimostriamo il lemma per un compatto che si possa scrivere in questo modo:

$$K_r = \widehat{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} K_r^{(n)} \right)}, \quad f_n \in \mathcal{S}(\alpha_n), \quad \alpha_n \in \mathbb{Q}.$$

Per la proprietà di continuità della costruzione fondamentale (Lemma 4.2.1), abbiamo  $g_{K_r} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{K_r^{(n)}}$  uniformemente in  $S^1$ . Per il Lemma 4.5.2 sappiamo che  $\varrho(f_n) = \varrho(g_{K_r^{(n)}})$  e per continuità del numero di rotazione  $\varrho(g_{K_r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(g_{K_r^{(n)}}) = \varrho(f)$ .  $\square$

Come detto in precedenza, vale il seguente risultato più forte:

**Lemma 4.5.4.** *Per ogni compatto di Siegel  $K_r$  abbiamo  $\varrho(g_{K_r}) = \varrho(f)$ .*

Per la dimostrazione di questo lemma rimandiamo a [PM].

## 4.6 Dinamica nei punti di Cremer

Quella che segue è una congettura che serve nello studio dei punti singolari dei campi di vettori olomorfi nei domini di Siegel, ed è interessante anche di per sé perché esprime alcune proprietà della dinamica intorno ai punti di Cremer:

**CONGETTURA DI DULAC-MOUSSU:** *Ogni germe olomorfo non linearizzabile  $f(z) = \lambda z + O(z^2)$ ,  $|\lambda| = 1$ , ha un'orbita  $(f^n(z))_{n \in \mathbb{Z}} = \mathcal{O}(z)$ ,  $z \neq 0$ , che si accumula nell'origine, cioè  $0 \in \overline{\mathcal{O}(z)}$ .*

In questo e nei prossimi paragrafi dimostreremo la congettura di Dulac-Moussu.

Nel caso razionale ( $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ) è semplice dimostrare che una tale orbita esiste. Segue infatti dallo studio sui punti indifferenti razionali (§2.2.2).

Consideriamo allora il caso irrazionale non linearizzabile. Sia  $f$  un germe olomorfo e  $K$  un compatto di Siegel dato dal Teorema 4.1.1 con  $U$  una piccola palla attorno al punto fisso 0. La non-linearizzabilità di  $f$  è equivalente al fatto che  $0 \in \partial K$ . La costruzione fondamentale ci dice che i punti del bordo di  $K$  “corrispondono” ai punti di  $S^1$  attraverso la rappresentazione conforme  $h$  (la corrispondenza esiste solo per i punti accessibili di  $\partial K$ ).

La dinamica di  $f$  fuori di  $K$ , in un intorno di  $\partial K$ , corrisponde alla dinamica di un diffeomorfismo analitico del cerchio  $g$ , con  $\varrho(g) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Siccome il numero di rotazione è irrazionale, il diffeomorfismo  $g$  è minimale in  $S^1$ . Questo non è vero in  $\partial K$  perché, ad esempio,  $0 \in \partial K$  è un punto fisso. Ma possiamo porci la domanda se questa proprietà vale per molti punti di  $\partial K$ . Se esiste un punto in  $\partial K$  che ha un’orbita densa, essa si accumula in  $0 \in \partial K$  e la congettura di Dulac-Moussu è dimostrata.

Nei prossimi due paragrafi troveremo un punto in  $\partial K$  con orbita densa prima nel caso in cui si abbia un certo controllo sulla topologia di  $\partial K$ , poi nel caso generale.

### 4.6.1 Dinamica topologica

Nelle proposizioni che seguono sottintenderemo sempre che  $\alpha$  sia in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e che la  $f$  sia non-linearizzabile

**Proposizione 4.6.1.** *L’orbita positiva (o negativa) dell’impressione di una fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  tramite  $f$  si accumula in un sottoinsieme compatto connesso di ogni altra impressione di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $e$  ed  $e'$  due fini primarie definite rispettivamente dalle successioni di archi trasversi  $(\gamma_i)_{i \geq 0}$  e  $(\gamma'_i)_{i \geq 0}$  di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ . Siano  $\{D_i\}_{i \geq 0}$  e  $\{D'_i\}_{i \geq 0}$  le successioni decrescenti di domini definiti da questi archi trasversi, e  $I(e) = \bigcap_{i \geq 0} \overline{D}_i$  e  $I(e') = \bigcap_{i \geq 0} \overline{D}'_i$  le impressioni.

Sia  $g$  il diffeomorfismo analitico del cerchio dato dalla costruzione fondamentale.

Allora  $\varrho(g) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e quindi, per il Teorema 3.1.9,  $g$  è topologicamente coniugata ad una rotazione irrazionale.

Ora, consideriamo le due catene fondamentali  $\{h^{-1}(D_i)\}_{i \geq 0}$  e  $\{h^{-1}(D'_i)\}_{i \geq 0}$ , dove  $h$  è la rappresentazione conforme  $h : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ . Siccome la funzione  $g$  è coniugata ad una rotazione irrazionale, è valido il seguente fatto: Per ogni  $i \geq 0$  esistono  $n_i \geq 0$  e  $m_i \geq 0$  tali che  $g^{n_i}(h^{-1}(D_{m_i})) \subset h^{-1}(D'_i)$ .

Di conseguenza è vero anche che per ogni  $i \geq 0$  esiste  $n_i \geq 0$  e  $m_i \geq 0$  tali che  $f^{n_i}(D_{m_i}) \subset D'_i$ , e quindi  $f^{n_i}(\overline{D_{m_i}}) \subset \overline{D'_i}$ .

D'altra parte  $f^{n_i}(I(e)) \subset f^{n_i}(\overline{D_{m_i}})$ . Quindi  $(f^{n_i}(I(e)))_{i \geq 0}$  si deve accumulare in qualche sottocontinuo di  $I(e') = \bigcap_{i \geq 0} \overline{D'_i}$ .  $\square$

**Definizione 4.6.1.** *L'insieme principale  $\Pi(e)$  di una fine primaria  $e$  è il sottocontinuo di  $I(e)$  contenente tutti i punti di accumulazione delle successioni di archi trasversi  $\gamma_i$  definenti  $e$ . I punti di  $\Pi(e)$  sono detti punti principali.*

La dimostrazione precedente ci da anche che  $f^{n_i}(\gamma_{m_i}) \subset D'_i$ . Tenendo conto di questo, si ha:

**Proposizione 4.6.2.** *L'orbita positiva (o negativa) di un punto principale di una fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  si accumula in un sottocontinuo di ogni impressione di una fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ .*

Ogni punto  $z$  accessibile è un punto principale, basterà infatti considerare degli archi  $(\gamma_i)_{i \geq 0}$  che abbiano un estremo in  $z$ .

Allora abbiamo:

**Proposizione 4.6.3.** *L'orbita positiva o negativa di un punto accessibile di  $\partial K$  da  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  si accumula in un sottocontinuo di ogni impressione di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ .*

**Corollario 4.6.4.** *Supponiamo che  $0 \in \partial K$  sia esattamente uguale all'impressione di una fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ . Allora l'orbita positiva (o negativa) tramite  $f$  di ogni punto principale si accumula a 0.*

I punti accessibili sono densi in  $\partial K$  per il Teorema 1.4.4.

Quindi, nel caso in cui  $0 \in \partial K$  (cioè quando  $f$  non è linearizzabile) è esattamente uguale all'impressione di una fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ , molti punti hanno un'orbita che si accumula a 0, e la congettura di Dulac-Moussu è dimostrata.

Ci sono inoltre alcune condizioni equivalenti all'ipotesi del Corollario 4.6.4; infatti, nella situazione non linearizzabile, vale il seguente risultato (vedi [PM2]):

**Proposizione 4.6.5.** *Se  $f$  è non linearizzabile, allora l'impressione di ogni fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  contiene il punto fisso 0.*

Tenuto conto di questo risultato, si ha che 0 è l'impressione di una fine primaria se e solo se esistono fini primarie con un'impressione di primo tipo.

Quindi l'ipotesi del Corollario 4.6.4 si verifica se e solo se ci sono delle fini primarie di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  con un'impressione di primo tipo.

È vero inoltre che il fatto che 0 sia l'impressione di una fine primaria è equivalente al fatto che 0 sia accessibile dall'esterno di  $K$  (la dimostrazione è in [PM2]). Quindi abbiamo:

**Teorema 4.6.6.** *Se  $f$  è non-linearizzabile queste tre condizioni sono equivalenti:*

1.  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  ha una fine primaria con impressione ridotta ad un unico punto (di primo tipo).
2. Il punto 0 è accessibile da  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ .
3. Il punto 0 è l'impressione di una fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ .

*Se una di queste tre condizioni è verificata, l'orbita positiva (o negativa) di ogni punto principale si accumula a 0 sotto iterazione di  $f$ .*

*Osservazione 4.6.1.* In realtà non sappiamo se esista o meno una  $f$  che non verifica le ipotesi del Corollario 4.6.4. Si può formulare la seguente congettura:

**CONGETTURA:** Esiste una fine primaria  $e$  di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  tale che il punto fisso 0 è l'impressione di  $e$ .

### 4.6.2 La misura armonica

Per maggiori dettagli su questo argomento si veda [Po].

**Definizione 4.6.2.** Sia  $A \subset S^1$  un insieme misurabile secondo Lebesgue. La *misura armonica* di  $A$  relativa ad un punto  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$  è definita come:

$$\omega(z, A) = \omega(z, A, \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}) = \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{1 - \left|\frac{1}{z}\right|^2}{\left|\zeta - \frac{1}{z}\right|^2} |d\zeta|,$$

cioè come l'integrale di Poisson della funzione caratteristica di  $A$ .

Si vede che la funzione  $\omega$  è una funzione armonica che soddisfa  $0 \leq \omega(z, A) \leq 1$  per  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ .

Nel paragrafo seguente saremo interessati alla misura armonica rispetto al punto  $z = \infty$ , cioè:

$$\omega(\infty, A) = \frac{1}{2\pi} \int_A |d\zeta| = \frac{\lambda(A)}{2\pi},$$

dove  $\lambda$  è la misura di Lebesgue. Si vede quindi che la misura armonica rispetto a  $\infty$  è una misura di probabilità su  $S^1$ .

Sia adesso  $G$  un dominio semplicemente connesso con bordo localmente connesso e sia  $f$  un biolomorfismo da  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$  in  $G$ . Allora  $f$  è continua in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ . Se  $A$  è un boreliano di  $\partial G$  allora  $f^{-1}(A)$  è un boreliano di  $S^1$  e quindi è misurabile. Definiamo la *misura armonica* di  $A$  rispetto a  $z \in G$  come

$$\omega(z, A, G) = \omega(f^{-1}(z), f^{-1}(A), D).$$

Si ha che questa definizione non dipende dalla scelta della funzione  $f$ .

### 4.6.3 Il caso generale

Consideriamo la situazione per  $f$  non-linearizzabile,  $\varrho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $K$  un compatto connesso invariante relativo al punto fisso 0 ottenuto dal Teorema 4.1.1, e denotiamo con  $\mu_K$  la misura armonica all'infinito di  $K$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Il seguente teorema dimostra la congettura di Dulac-Moussu nel caso generale:

**Teorema 4.6.7.** *Per  $\mu_K$ -quasi ogni punto  $z \in K$  abbiamo  $\partial K = \overline{\mathcal{O}(z)} = \overline{(f^n(z))}_{n \in \mathbb{Z}}$ . In particolare, quando  $f$  non è linearizzabile,  $0 \in \overline{\mathcal{O}(z)}$  per  $\mu_K$ -q.o.  $z \in K$ .*

Ci serve il:

**Lemma 4.6.8.** *La mappa  $f|_K$  è  $\mu_K$ -ergodica, cioè se  $E \subset K$  è un boreliano e  $f^{-1}(E) = E$ , allora  $\mu_K(E) = 0$  o  $\mu_K(E) = 1$ .*

Per la dimostrazione è necessario questo teorema:

**Teorema 4.6.9 (Hermann-Katok).** [He][KH] *Sia  $g : S^1 \rightarrow S^1$  un diffeomorfismo del cerchio che sia  $C^2$  con numero di rotazione irrazionale. Allora  $g$  è Lebesgue-ergodica.*

*Dimostrazione.* (Lemma 4.6.8) Sia  $E \subset K$   $f$ -invariante,  $f^{-1}(E) = E$ . Allora  $E' = E \cap \partial K$  è anch'esso  $f$ -invariante perché  $\partial K$  lo è, e  $\mu_K(E') = \mu_K(E)$  perché  $\mu_K$  è concentrata sul bordo. Ora,  $F = h_*^{-1}(E) \subset S^1$  è invariante per  $g$  (perché  $E'$  lo è per  $f$ ) e  $\lambda(F) = \mu_K(E') = \mu_K(E)$ . Il lemma segue allora dal teorema precedente.  $\square$

*Dimostrazione.* (Teorema 4.6.7) Sia  $(U_n)_{n \geq 0}$  una base numerabile per la topologia di  $\partial K$ . Sia  $n \geq 0$  e  $E_n = \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} f^h(U_n)$ . Abbiamo che  $f^{-1}(E_n) = E_n$  perché  $\mathcal{O}(f^{-1}(z)) = \mathcal{O}(z) = f^{-1}(\mathcal{O}(z))$ . Abbiamo anche che  $\mu_K(U_n) > 0$  perché  $U_n$  è aperto e  $\text{supp}(\mu_K) = \partial K$ . Quindi abbiamo  $\mu_K(E_n) > 0$  perché  $E_n \supset U_n$ . Abbiamo  $\mu_K(E_n) = 1$  perché  $f$  è  $\mu_K$ -ergodica. Allora  $E = \bigcap_{n \geq 0} E_n$  è un insieme tale che  $\mu_K(E) = 1$ . Quindi per  $\mu_K$ -q.o. punto  $z \in K$  si ha che  $\overline{\mathcal{O}(z)} = \partial K$ . Siccome per  $f$  non linearizzabile  $0 \in \partial K = \text{supp} \mu_K$ , per  $\mu_K$ -q.o.  $z \in K$  si ha  $0 \in \overline{\mathcal{O}(z)}$   $\square$

Lo studio fatto in questo paragrafo è in un certo senso più “debole” di quello fatto nel paragrafo precedente, in quanto il Teorema 4.6.7 non caratterizza quali punti hanno un’orbita densa e quali no. Osserviamo che ci sono sempre molti punti in un compatto di Siegel che non hanno un’orbita densa. Infatti applicando il Teorema 4.1.1 a due intorni  $U_1 \subset U_2$  con  $U_1$  relativamente compatto in  $U_2$ , otteniamo due compatti di Siegel strettamente distinti  $K_1 \subset K_2$ . L’orbita di ogni punto in  $K_1$  non può essere

densa in  $K_2$  perché è interamente contenuta in  $K_1$  che è completamente invariante. Abbiamo quindi  $\mu_{K_2}(K_1) = 0$ , cioè  $K_1$  è “nascosto” dall'esterno di  $K_2$ . Questo si vede bene quando  $f$  è linearizzabile e  $K_1, K_2$  sono sottoinsiemi compatti del dominio di linearizzazione.

In generale, possiamo formulare i seguenti problemi:

**PROBLEMA:** Sia  $z \in K$  un punto accessibile da  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  e  $z \neq 0$ . Allora è vero che l'orbita di  $z$  è densa in  $K$ ?

**PROBLEMA:** Classificare topologicamente i punti di  $K$  che hanno un'orbita densa.

#### 4.6.4 Il lemma della chiocciola

Il seguente lemma viene usato nello studio dei punti di Cremer, per esempio nella classificazione delle componenti di Fatou di una mappa:

**Lemma della chiocciola:** *Sia  $f$  una funzione razionale e  $z_0 \in \mathbb{C}$  un punto fisso di  $f$  che sta sul bordo di una componente di Fatou  $\Omega$  di  $f$ . Supponiamo che  $z_0$  sia accessibile da  $\Omega$  tramite un arco  $\gamma$   $f$ -invariante. Allora  $f'(z_0) = 1$ .*

È possibile dimostrare il teorema in una forma più forte:

**Teorema 4.6.10 (Lemma della chiocciola).** *Sia  $f$  un germe oloomorfo con un punto fisso indifferente in 0. Sia  $K$  un compatto connesso invariante contenente 0 e tale che  $f$  sia iniettiva in un intorno di  $K$ . Supponiamo che esista un arco  $\gamma$  in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  che abbia come estremo  $0 \in K$  e che sia  $f$ -invariante. Allora  $\varrho(f) \in \mathbb{Z}$ , cioè  $f'(0) = 1$ .*

Otteniamo il lemma classico con  $K = \{0\}$ . L'iniettività locale si ottiene perché in un punto di Cremer la derivata non è 0 e quindi per il teorema del Dini c'è un intorno in cui la  $f$  è iniettiva.

*Dimostrazione.* Supponiamo  $K \neq \{0\}$ . Per la costruzione fondamentale otteniamo un biolomorfismo  $g$  di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$  in sé che si estende ad un diffeomorfismo analitico del

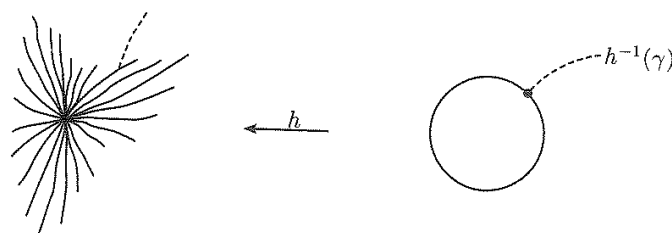


Figura 4.5:

cerchio. Ora,  $h^{-1}(\gamma)$  è un arco che ha un estremo in  $S^1$  per il Teorema 1.4.11 (Vedi Figura 4.5). L'arco  $\gamma$  è  $f$ -invariante quindi  $h^{-1}(\gamma)$  è  $g$ -invariante e il punto estremo in  $S^1$  è un punto fisso di  $g$ . Per le proprietà generali degli omeomorfismi di cerchi, ne segue che  $\varrho(g) \in \mathbb{Z}$ , quindi anche  $\varrho(f) \in \mathbb{Z}$  e  $f'(0) = e^{2\pi i \varrho(f)} = 1$ .

Supponiamo adesso che  $K = \{0\}$ . Siccome  $f$  ha un numero finito di punti fissi in un intorno di 0, allora possiamo scegliere un intorno  $U$  tale che in  $\bar{U}$  il punto 0 sia l'unico punto fisso. Allora  $f|_{\gamma \cap U}$  è repulsiva o attrattiva. Supponiamo che  $f|_{\gamma'}$  sia repulsiva, a meno di considerare  $f^{-1}$ . Allora applicando il Teorema 4.1.1 ad  $U$  troviamo un compatto  $K' \subset \bar{U}$  tale che  $\bar{\gamma}' \cap K' = \{0\}$ . Infatti  $f|_{\gamma'}$  è repulsiva, e quindi non può essere invariante a meno che anche l'altro estremo non sia un punto fisso. Ma questo non può capitare per come abbiamo scelto  $U$ . Siamo allora nella situazione precedente.  $\square$

## 4.7 Approfondimenti

### 4.7.1 Compatti di Siegel, compatti di Hermann e Porcospini

Il Teorema 4.1.1 ci dà l'esistenza di compatti di Siegel associati ad un punto fisso indifferente. Per i diffeomorfismi analitici del cerchio possiamo fare uno studio locale in un intorno del cerchio per le funzioni che hanno numeri di rotazione razionali o irrazionali che soddisfano una condizione diofantea. Con dimostrazioni simili a quelle



fin qui esposte possiamo ottenere l'esistenza di compatti di Hermann, che chiamiamo così perché li possiamo pensare come anelli di Hermann degeneri, associati ad un diffeomorfismo analitico del cerchio.

L'enunciato preciso è espresso nel:

**Teorema 4.7.1 (Compatti di Hermann).** *Sia  $g$  un diffeomorfismo analitico del cerchio  $S^1$  tale che  $g$  e  $g^{-1}$  siano iniettive nella chiusura di un intorno anulare di Jordan  $U$  del cerchio. Allora esiste un insieme  $K$  tale che:*

1.  $K$  è compatto connesso e anulare (cioè  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  ha due componenti connesse);
2.  $S^1 \subset K \subset \overline{U}$ ;
3.  $K \cap \partial U \neq \emptyset$ ;
4.  $g(K) = K$ ,  $g^{-1}(K) = K$ .

*In più, se  $g$  non è di ordine finito allora è linearizzabile se e solo se  $S^1 \subset \overset{\circ}{K}$ .*

Adesso enunciamo un teorema più generale.

**Definizione 4.7.1.** Un *continuo separatore* è un insieme compatto connesso tale che il suo complementare in  $\widehat{\mathbb{C}}$  abbia almeno due componenti connesse.

Un anello di Jordan è un insieme biolomorfo all'anello  $A = \{z = re^{2\pi i\theta} | 1 < r < 2\}$  e tale che il bordo sia formato da due curve di Jordan.

Consideriamo allora il caso in cui  $g$  è una funzione olomorfa definita e iniettiva nell'intorno di un continuo separatore  $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$  e  $g$  lascia invariato  $K$ . Consideriamo allora l'insieme  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ , che ha almeno due componenti connesse. Sia  $S$  la componente connessa a cui appartiene il punto all'infinito. Si ha che  $g$  induce un'azione sull'insieme delle fini primarie di  $S$ . Infatti, coniughiamo la mappa  $g$ , attraverso una rappresentazione conforme  $h : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ , ad una mappa  $g'$  definita e iniettiva in un intorno anulare di  $S^1$ . L'azione indotta da  $g$  sull'insieme delle fini primarie di  $S$  corrisponde alla mappa  $g'$ .

In questo modo possiamo ridurre il problema al caso di un cerchio invariante per un diffeomorfismo analitico, e quindi per  $g$  valgono conclusioni simili a quelle del Teorema 4.7.1, come indicato nel seguente:

**Teorema 4.7.2 (Compatti generalizzati).** *Sia  $A$  un anello di Jordan aperto. Esso ha due componenti di bordo  $\gamma$  e  $\delta$ . Sia  $U$  un anello di Jordan che sia un intorno di una delle due componenti di bordo di  $A$ , ad esempio  $\gamma$ , tale che  $f(U)$  sia un intorno di  $\gamma$ . Siano  $f$  e  $f^{-1}$  definite e iniettive in  $U$  e a valori in  $A$ . Sia  $\widehat{A}$  la compattificazione di  $A$  con l'aggiunta delle sue fini primarie. Allora la mappa  $f$  ha una estensione continua  $\widehat{f}$  da  $\overline{U} \subset \widehat{A}$  a valori in  $\widehat{A}$ . Sotto queste ipotesi esiste un insieme  $K \subset \widehat{A}$  tale che:*

1.  $K$  è compatto, connesso e  $\widehat{A} \setminus K$  ha una componente connessa;
2.  $C \subset K \subset \overline{U}$  dove  $C$  è l'insieme compatto in  $\widehat{A}$  corrispondente alla componente delle prime fini invariante per  $f$ ;
3.  $K \cap (\partial U \setminus C) \neq \emptyset$ ;
4.  $f(K) = K$ ,  $f^{-1}(K) = K$ .

In più, se  $f$  non è di ordine finito, allora è linearizzabile se e solo se  $C \subset \overset{\circ}{K}$ .

Per indagare sulla topologia dei compatti di Siegel, il numero di rotazione è di fondamentale importanza.

**Definizione 4.7.2 (Porcospini).** Un *porcospino* di una mappa olomorfa  $f$  che soddisfi le ipotesi del Teorema 4.1.1 è un compatto  $f$ -invariante  $K$  ottenuto dal Teorema 4.1.1 quando  $\varrho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e  $f$  non è linearizzabile o ha un dominio di linearizzazione relativamente compatto in  $U$ .

Allo stesso modo un *porcospino* di una mappa  $f$  che soddisfi le ipotesi del Teorema 4.7.2 è un compatto  $\widehat{f}$ -invariante  $K$  ottenuto dal Teorema 4.7.1 quando  $\varrho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  e  $f$  non è linearizzabile o ha un dominio di linearizzazione relativamente compatto in  $U$ .

I porcospini con dominio di linearizzazione si chiamano *porcospini linearizzabili*.

Usando la costruzione fondamentale si può dimostrare che un porcospino non può essere localmente connesso.

Il seguente teorema è dimostrato su [PM2]:

**Teorema 4.7.3.** *Sia  $K$  un porcospino ottenuto dal Teorema 4.1.1 da un germe olomorfo non-linearizzabile  $f$  con numero di rotazione irrazionale. Allora:*

1.  $K$  è compatto, connesso e pieno;
2.  $0 \in K$  e  $\{0\} \neq K$ ;
3.  $K$  non è localmente connesso in alcun punto diverso da  $0$ ;
4. l'impressione di ogni fine primaria di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  contiene  $0$ ;
5. Per ogni arco trasverso  $\gamma$  di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  il dominio limitato definito da  $\gamma$  si accumula a  $0$ ;
6. Eccetto un insieme di misura  $0$ , ogni punto di  $\partial K$  è nell'impressione di una fine primaria di secondo tipo;
7.  $K \setminus \{0\}$  ha un insieme non numerabile di componenti;

Ci sono delle questioni aperte sui porcospini come ad esempio la seguente:

**CONGETTURA:** *Per un porcospino dato dal Teorema 4.7.2,  $C$  è sempre accessibile dall'esterno di  $K$ .*

*Graduazione dei porcospini:* Nel Teorema 4.7.2, possiamo considerare una successione monotona rispetto all'inclusione e continua  $(U_r)_{0 < r \leq 1}$  di intorni aperti della componente dell'insieme delle fini primarie fissata da  $f$ , che formi una base di intorni di questa componente. Applicando il Teorema 4.7.2 ad ogni aperto  $U_r$  e denotando con  $K_r$  l'insieme compatto massimale dato da questo teorema per  $U_r$ , otteniamo una successione monotona di insiemi compatti connessi  $(K_r)_{0 < r \leq 1}$ . In questo modo otteniamo una "approssimazione" dell'insieme compatto  $K_1$  attraverso una successione

monotona di compatti. Come abbiamo già visto, per  $r < 1$ ,  $K_r$  è di misura 0 per la misura armonica di  $K_1$ . Questo fa capire la complessità dei porcospini.

# Bibliografia

- [Ab] Marco Abate, **Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds**. Mediterranean Press, Cosenza, (1987).
- [Ah] L. V. Ahlfors, **Conformal invariants: Topics in geometric function theory**. McGraw-Hill, New York-Düsseldorf-Johannesburg (1973).
- [Ca] L. Carleson, **Complex dynamics**. Lecture notes UCLA (1990).
- [He] M. Hermann, *Sur la conjugation différentiable des difféomorphismes du cercle à les rotations*. Pub I.H.E.S. 49 (1979), 5-233.
- [HY] J.G. Hocking e G.S. Young, **Topology**, seconda edizione. Dover, New York (1988).
- [KH] Anatole Katok, Boris Hasselblatt. **Introduction to the modern theory of dynamical systems**. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [Ma] W. Massey, **Algebraic topology, an introduction**. New York: Harcourt, Brace & World (1967).
- [MS] Wellington de Melo e Sebastian van Strien, **One-dimensional dynamics**. Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [MZ] D. Montgomery e L. Zippin, **Topological transformation groups**. Krieger, Huntington, NY (1974).

- [Ne] M.H.A. Newman, **Elements of the topology of plane sets of points**. Cambridge Univ. Press, (1964).
- [PM1] Ricardo Perez-Marco, *Fixed point and circle map*. Acta Math. 179 (1997), 243-294.
- [PM2] *Topology of Julia sets and Hedgehogs*. Preprint, Universite' de Paris-Sud (1994), pag. 94-98.
- [Po] Ch. Pommerenke, **Boundary behaviour of conformal maps**. Grundlehren Math. Wiss., 299. Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [Si] C.L. Siegel, *Iteration of analytic functions*. Ann. of Math. 43 (1942), pag. 607-612.
- [SM] C.L. Siegel and J. Moser, **Lectures on celestial mechanics**. Springer-Verlag, Berlin (1971).
- [Yo] J.-C. Yoccoz, *Conjugation différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*. Ann. Sci. E.N.S. Paris (4) 17 (1984), pag. 333-359.