

Università degli Studi di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2003-2004

Tesi di Laurea

SULL'USO DEI PROCESSI STOCASTICI DI LÉVY
NEI MODELLI PER I TASSI D'INTERESSE

RELATORE:
Prof. Maurizio Pratelli

CORRELATORE:
Prof. Giorgio Letta

CANDIDATO:
Michele Leonardo Bianchi
matricola n° 236160

Indice

Introduzione	5
1 Nozioni sui processi stocastici	9
1.1 Generalità	9
1.2 Processi opzionali	10
1.3 Il processo di Poisson	11
1.4 Il moto Browniano	13
1.5 L'integrazione stocastica secondo Itô	13
1.5.1 Formula di Itô	19
1.6 Processi di Lévy	22
1.6.1 Decomposizione di un processo di Lévy	29
1.7 Misure aleatorie	30
1.7.1 Compensatori e proiezioni prevedibili	30
1.7.2 Generalità sulle misure aleatorie	30
1.7.3 Misure aleatorie a valori interi	33
1.7.4 Misura di Poisson	34
1.7.5 L'integrazione stocastica rispetto ad una misura aleatoria	35
2 Preliminari di Finanza Matematica	39
2.1 Derivati	41
2.2 Arbitraggio	41
2.3 Hedging	42
2.4 Pricing	44
2.5 Completezza e Assenza di Arbitraggio	46
3 Modelli per i tassi d'interesse	47
3.1 Modelli basati sullo <i>Short Rate</i>	48
3.2 Modellizzazione di Heath-Jarrow-Morton	50
4 La tecnica del cambio del numerario	55
4.1 Misura forward	56
4.2 Calcolo del prezzo di un'opzione call europea	57
5 Modelli per i tassi d'interesse con processi di Lévy	61
5.1 Introduzione al metodo	62
5.2 Condizione di integrabilità	62
5.3 Condizioni sulla volatilità	63

5.4	Funzione Generatrice dei momenti di un processo di Lévy	64
5.5	Dinamica del <i>Forward Rate</i> e dello <i>Short Rate</i>	66
5.6	Calcolo del numerario	66
5.7	Condizioni sulla Funzione Caratteristica	67
5.8	Lo Short Rate è un Processo di Markov	68
5.9	Volatilità stazionaria	70
5.10	Confronto con il modello gaussiano	73
5.11	Moto Iperbolico di Lévy	74
5.12	Calcolo del prezzo di un'opzione	75
Bibliografia		77

Introduzione

Non si può pensare di analizzare e comprendere i modelli per tassi d'interesse, senza avere conoscenze di base sui processi stocastici e sull'integrazione stocastica. La necessità di risolvere problemi nel campo economico, in particolare la valutazione di contratti dipendenti dai tassi d'interesse, ha portato, e porta, alla ricerca di modelli che riescano a rappresentare, sempre con migliore approssimazione, i dati reali.

Prima di passare allo studio dei modelli della struttura a termine basati su processi di Lévy, sarà indispensabile dare alcune definizioni sui processi stocastici, approfondire i processi di Lévy e analizzare particolari esempi (processi di Poisson e moto Browniano). Per studiare la dinamica dei prezzi degli attivi e dei derivati, è necessario passare attraverso il calcolo di Itô e dare le principali nozioni di integrazione stocastica. Definiamo le misure aleatorie e diamo accenni sulla teoria dell'integrazione rispetto a queste ultime. Per analizzare le connessioni che intrecciano tra queste misure e i processi di Lévy, concentriamo la nostra attenzione su una particolare classe di misure aleatorie, la classe delle misure aleatorie a valori interi.

Il primo capitolo contiene molte definizioni e risultati, non tutti dimostrati, e in esso si studia la teoria dei processi stocastici sulla quale si sviluppano i capitoli successivi.

Studi empirici effettuati da Eberlein e Keller (1995) sui modelli relativi ai prezzi degli attivi finanziari hanno dimostrato che sostituendo al moto Browniano un appropriato processo di Lévy, si ottiene una migliore approssimazione dei dati reali.

I modelli classici, basati sul moto Browniano, vengono sostituiti da modelli basati su processi di Lévy, proprio perché questi ultimi danno una rappresentazione più realistica del movimento dei prezzi: brusche variazioni dei prezzi, causate da inaspettati crolli dell'economia, da cambiamenti politici o da calamità naturali, possono essere meglio rappresentate da processi *con salti*. Per questi processi, in particolare quindi per i processi di Lévy, non basterà l'integrazione stocastica secondo Itô, ma dovremo considerare anche l'integrazione rispetto alle misure aleatorie. Considereremo infatti misure aleatorie intere associate ai salti di un processo di Lévy. Sfruttando inoltre il fatto che i salti di un processo di Lévy sono concentrati su tempi d'arresto totalmente inaccessibili, basterà definire misure aleatorie concentrate su tempi d'arresto totalmente inaccessibili.

Nel secondo capitolo si introducono la terminologia e i principali risultati di Finanza Matematica, la definizione di portafoglio e di numerario, di completezza e di assenza di opportunità di arbitraggio. Si definisce che cosa è una misura martingala equivalente e si dimostra che l'assenza di opportunità di arbitraggio è equivalente all'esistenza di una tale misura e che la sua unicità implica la completezza.

Si definiscono il pricing e l'hedging, cioè si esamina quale sia un prezzo *ragionev-*

ole per i derivati, si analizzano le formule che ne danno un prezzo e le strategie che servono per replicarli. Nel caso in cui il mercato è completo, il prezzo del derivato X è unicamente determinato dall'ipotesi di assenza di arbitraggio. Nel caso in cui il mercato è incompleto, l'ipotesi di assenza di arbitraggio non è sufficiente a determinare un prezzo unico per il derivato.

Si hanno molte misure martingala possibili e tutte possono essere usate per trovare un prezzo per i derivati, pur mantenendo l'assenza di opportunità di arbitraggio. Quale tra queste misure scegliere? La misura martingala in questo caso è scelta dal mercato stesso.

Il prezzo di un derivato è determinato da due fattori:

1. richiediamo che i prezzi dei derivati siano tali da non introdurre opportunità di arbitraggio nel mercato;
2. in un mercato incompleto il prezzo è determinato dal mercato stesso. Molteplici fattori, come ad esempio la domanda e l'offerta di uno specifico derivato, regolano il mercato e portano alla scelta di una particolare misura martingala.

Dopo aver definito i bond, si passa al calcolo esplicito del loro prezzo e alle definizioni dei processi *forward rate* e lo *short rate*. Si inizia l'analisi vera e propria dei modelli classici per i tassi d'interesse, analizzando in particolare quello basato sullo *short rate* e il modello di Heath-Jarrow-Morton, entrambi modelli gaussiani: nel primo caso, se consideriamo il modello in cui il processo *short rate* è del tipo Ho-Lee, del tipo Vasiček oppure del tipo Hull-White, nel caso Vasiček generalizzato, abbiamo che il processo *short rate* è gaussiano; nel secondo caso, se consideriamo una struttura della volatilità deterministica, abbiamo che il processo *forward rate* è gaussiano. L'importanza di tali modelli è data dal fatto che soddisfano buone proprietà matematiche, che permettono, ad esempio, di ottenere formule esplicite per il calcolo del prezzo di un'opzione call europea.

Sfortunatamente nei modelli gaussiani, si possono ottenere tassi d'interesse negativi con probabilità positiva. Da un punto di vista finanziario, tassi d'interesse negativi introducono sul mercato opportunità di arbitraggio. Alcuni autori hanno proposto modelli in cui i tassi d'interesse sono sempre positivi, tra questi ricordiamo il modello di Cox-Ingersoll-Ross, per un'opportuna scelta dei parametri, e quello di Dothan: quest'ultimo dall'idea di tassi d'interesse sempre positivi, ha sviluppato un modello, chiamato modello lognormale poiché i tassi d'interesse sono rappresentati da variabili aleatorie lognormali, che pur mantenendo la positività voluta, dà alcuni risultati privi di senso, come ad esempio prezzi di particolari derivati uguali a $-\infty$.

Se consideriamo modelli basati sullo *short rate*, vediamo che da un punto di vista economico non è ragionevole assumere che ci sia una sola variabile esplicativa che governi l'intero mercato. Con tali modelli è possibile ottenere formule analitiche per i prezzi dei bond e dei derivati, tuttavia non si riesce a dare una buona rappresentazione dell'andamento reale dei prezzi. Se la dinamica dello *short rate* si avvicina maggiormente a quella reale, i calcoli si complicano notevolmente. Diventa quindi necessario introdurre modelli in cui vengono prese in considerazione più variabili esplicative. Partendo da questa idea, Heath-Jarrow-Morton hanno sviluppato un modello in cui la variabile è l'intera curva del *forward rate*, quindi considerano una variabile infinito dimensionale.

Passiamo quindi al calcolo, nel caso gaussiano, del prezzo di un particolare derivato, una opzione call europea, attraverso un cambiamento di misura: cambiando opportunamente il numerario, si sfrutta una particolare tecnica, chiamata tecnica del cambio del numerario, che agevola il calcolo del prezzo per molti tipi di derivati. Nell'ultimo capitolo presentiamo un modello che partendo dal processo dei prezzi di un bond nel caso gaussiano, ricava un processo dei prezzi basato sui processi di Lévy. Consideriamo una particolare sottoclasse, quella in cui lo *short rate* è un processo di Markov. Con ipotesi aggiuntive riguardanti la funzione caratteristica, dimostriamo che il processo short rate è di Markov se e solo se la volatilità ammette una decomposizione moltiplicativa. Inoltre, usando questa decomposizione, si ha che se la volatilità è stazionaria, allora il processo short rate ha una struttura della volatilità del tipo Vasiček o Ho-Lee. Infine vediamo come calcolare il prezzo di una opzione call europea in questo modello basato sui processi di Lévy: sfruttiamo il fatto che anche in questo caso la misura martingala è unica (Raible, 1998) e che quindi il prezzo è unicamente determinato dall'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio.

Capitolo 1

Nozioni sui processi stocastici

1.1 Generalità

Iniziamo con l'introdurre alcuni concetti base.

Definizione 1.1. Dato uno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{F}, P) , una famiglia $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} si chiama una **filtrazione** su (Ω, \mathcal{F}, P) se è crescente, cioè tale che si abbia $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ per ogni coppia s, t di elementi di \mathbb{R}_+ con $s \leq t$. In tal caso, il sistema $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ si chiama uno spazio probabilizzato **filtrato**.

Definizione 1.2. Dato uno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{F}, P) , si dice che esso è **completo** (o che la misura P è completa) se, per ogni elemento A di \mathcal{F} , con $P(A) = 0$, tutti i sottoinsiemi di A appartengono a \mathcal{F} .

Definizione 1.3. Si dice che uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ verifica le **ipotesi abituali** se possiede le proprietà seguenti:

- La misura P è completa.
- La filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ è **continua a destra**, nel senso che, per ogni t , si ha $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$.
- \mathcal{F}_0 contiene la classe degli insiemi di misura nulla secondo P .

Definizione 1.4. Un **processo stocastico** è una famiglia $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ di variabili aleatorie da (Ω, \mathcal{F}, P) in (E, \mathcal{E}) .

Come spazio E considereremo \mathbb{R}^d , con $d \in \mathbb{N}^*$. Fissato $\omega \in \Omega$, la funzione $t \rightarrow X_t(\omega)$ è chiamata la **traiettoria** del processo X associata a ω . Un processo può anche essere considerato come una funzione da $\Omega \times \mathbb{R}_+$ in E

$$(\omega, t) \rightarrow X_t(\omega)$$

Definizione 1.5. Dati due processi stocastici $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sullo stesso spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) in (E, \mathcal{E}) , diciamo che uno è una **modificazione** dell'altro se per ogni $t \in \mathbb{R}_+$ si ha l'uguaglianza

$$X_t = Y_t \quad \text{P-q.c.}$$

Definizione 1.6. Sia uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ che soddisfa le ipotesi abituali. Una famiglia $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ di variabili aleatorie integrabili e adattate è una **martingala** se per ogni $s \leq t$ vale l'uguaglianza

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

1.2 Processi opzionali

Definizione 1.7. Un processo X è chiamato **càdlàg** se tutte le sue traiettorie sono continue a destra con limite sinistro.

Un processo X è chiamato **càd** (risp. **càg**) se tutte le sue traiettorie sono continue a destra (risp. a sinistra).

Diciamo che un processo X è **adattato** alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ se X_t è \mathcal{F}_t -misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}_+$. La σ -algebra **opzionale** (risp. **prevedibile**) è la σ -algebra \mathcal{O} (risp. \mathcal{P}) su $\Omega \times \mathbb{R}_+$ generata da tutti i processi adattati càdlàg (risp. càg), considerati come funzioni su $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Un processo è detto **opzionale** (risp. **prevedibile**) se è \mathcal{O} -misurabile (risp. \mathcal{P} -misurabile).

Definizione 1.8. Una variabile aleatoria $T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ è un **tempo d'arresto** se per ogni elemento t di \mathbb{R}_+ , l'evento $\{T \leq t\}$ appartiene a \mathcal{F}_t .

Se T è un tempo d'arresto, indichiamo con \mathcal{F}_T la σ -algebra di tutti gli insiemi $A \in \mathcal{F}$ tali che $A \cap \{T \leq t\}$ appartiene a \mathcal{F}_t per ogni $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

L'ipotesi che la filtrazione sia continua a destra permette di formulare la definizione di tempo d'arresto in un modo leggermente diverso, come mostra il teorema seguente.

Teorema 1.9. Affinché un'applicazione T di Ω in $\overline{\mathbb{R}_+}$ sia un tempo d'arresto, è necessario che, per ogni numero reale t maggiore di zero, si abbia $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. Questa condizione è anche sufficiente se la filtrazione è continua a destra.

Dimostrazione. La prima affermazione discende dall'uguaglianza

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{T \leq t - \frac{1}{n}\}.$$

La seconda affermazione discende dall'uguaglianza

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{T < t + \frac{1}{n}\}.$$

□

Si può dare una rappresentazione alternativa della σ -algebra opzionale. Dati due tempi d'arresto S e T definiamo i seguenti insiemi aleatori, gli **intervalli stocastici**, come

$$\begin{aligned} [S, T] &= \{(\omega, t) : t \in \mathbb{R}_+, S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\} \\ [S, T[&= \{(\omega, t) : t \in \mathbb{R}_+, S(\omega) \leq t < T(\omega)\} \\]S, T] &= \{(\omega, t) : t \in \mathbb{R}_+, S(\omega) < t \leq T(\omega)\} \\]S, T[&= \{(\omega, t) : t \in \mathbb{R}_+, S(\omega) < t < T(\omega)\} \end{aligned}$$

Invece di $[T, T]$ scriviamo solo $[T]$. $[T]$ è la restrizione del grafico della funzione $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ all'insieme $\Omega \times \mathbb{R}_+$.

Il processo $I_{[0, T[}$ è càdlàg ed è adattato se e solo se T è un tempo di arresto. Dalla definizione di \mathcal{O} si ha che $[0, T[\in \mathcal{O}$ per ogni tempo tempo d'arresto T .

Proposizione 1.10. *Se S, T sono due tempi d'arresto e se Y è una variabile aleatoria \mathcal{F}_S -misurabile i processi $YI_{[S, T]}, YI_{[S, T[}, YI_{]S, T]}, YI_{]S, T[}$ sono opzionali.*

Dimostrazione. Basta provare il risultato quando $Y = I_A$, con $A \in \mathcal{F}_S$. Prendiamo ad esempio $X = I_A I_{]S, T[}$. Allora X è limite puntuale di $X^n = I_A I_{]S^n, T^n[}$, con $S^n = S + \frac{1}{n}$ e $T^n = T + \frac{1}{n}$. X^n è càdlàg per costruzione, $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S^n}$ e $A \cap \{S^n \leq T^n\} \in \mathcal{F}_{T^n}$, X^n è adattato, quindi è opzionale, X è opzionale. Analoga dimostrazione per gli altri tipi di intervalli stocastici. \square

Proposizione 1.11. *Ogni processo X che è càg e adattato è opzionale.*

Dimostrazione. Definiamo per $n \in \mathbb{N}^*$ il processo X^n

$$X^n = \sum_{k \in \mathbb{N}} X_{\frac{k}{2^n}} I_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$$

Dalla proposizione precedente si ha che X^n è opzionale. Poichè X è càg, la successione (X^n) converge puntualmente a X , quindi X è opzionale \square

Come conseguenza di questo Teorema, si ha che $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$.

Sia $X_- = (X_{t-})_{t \in \mathbb{R}_+}$ dove $X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s$ è il limite sinistro in t . Se X è un processo càdlàg adattato, è ovvio che X_- è adattato e per definizione è càg e dal teorema precedente segue che

Corollario 1.12. *Se X è un processo càdlàg adattato, i due processi X_- e ΔX sono opzionali, con $\Delta X = X - X_-$*

Definizione 1.13. *Se X è un processo e se T è una funzione $T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definiamo il **processo arrestato al tempo T** come*

$$X_t^T = X_{t \wedge T}.$$

Definizione 1.14. *Un processo adattato, càdlàg X è una **martingala locale** se esiste una successione crescente di tempi d'arresto (T_n) , che soddisfa $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ q.c., tale che $X_{t \wedge T_n}$ sia una martingala uniformemente integrabile per ogni n . Tale successione di tempi d'arresto è chiamata una **successione fondamentale**.*

1.3 Il processo di Poisson

Sia dato quindi uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ che soddisfi le ipotesi abituali e sia $(T_n)_{n \geq 0}$ una successione strettamente crescente di variabili aleatorie positive. Prendiamo $T_0 = 0$ q.c. e sia $I_{\{t \geq T_n\}}$ la funzione indicatrice così definita

$$I_{\{t \geq T_n\}} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq T_n(\omega) \\ 0 & \text{se } t < T_n(\omega) \end{cases}$$

Definizione 1.15. Il processo $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definito da

$$N_t = \sum_{n \geq 1} I_{\{t \geq T_n\}}$$

con valori in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ è chiamato il **processo di conteggio associato alla successione** $(T_n)_{n \geq 1}$.

Chiamiamo $T = \sup_n T_n$ il **tempo di esplosione di N** , si ha

$$[T_n, \infty) = \{N \geq n\} = \{(t, \omega) : N_t(\omega) \geq n\}$$

e quindi

$$[T_n, T_{n+1}) = \{N = n\}, \quad \text{e} \quad [T, \infty) = \{N = \infty\}.$$

Se $T = \infty$ q.c., allora N è un processo di conteggio *senza esplosioni*. Notiamo inoltre che abbiamo la seguente uguaglianza

$$N_t - N_s = \sum_{n \geq 1} I_{\{s < T_n \leq t\}}$$

dove gli incrementi $N_t - N_s$ contano il numero di variabili aleatorie T_n che cadono nell'intervallo $(s, t]$.

Per come è stato definito, il processo di conteggio non è necessariamente adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Ricordiamo che un processo stocastico X è detto *adattato* alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ se X_t è \mathcal{F}_t -misurabile per ogni t .

Teorema 1.16. Un processo di conteggio N è adattato se e solo se le variabili aleatorie associate $(T_n)_{n \geq 1}$ sono tempi d'arresto.

Dimostrazione. Se i $(T_n)_{n \geq 0}$ sono tempi d'arresto (con $T_0 = 0$ q.c.), allora gli eventi

$$\{N_t = n\} = \{\omega : T_n(\omega) \leq t \leq T_{n+1}(\omega)\} \in \mathcal{F}_t,$$

per ogni n , $N_t \in \mathcal{F}_t$ e quindi N è adattato. Se N è adattato, allora $\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \in \mathcal{F}_t$, per ogni t e di conseguenza T_n è un tempo d'arresto. \square

Definizione 1.17. Un processo di conteggio N adattato senza esplosioni è un **Processo di Poisson** se

- per ogni s, t , con $0 \leq s < t < \infty$, $N_t - N_s$ è indipendente da \mathcal{F}_s
- per ogni s, t, u, v , con $0 \leq s < t < \infty$, $0 \leq u < v < \infty$ e $t - s = v - u$, allora la legge di $N_t - N_s$ è la stessa di $N_v - N_u$.

Un processo di Poisson ha quindi incrementi indipendenti dal passato e stazionari.

Teorema 1.18.¹ Sia N un processo di Poisson. Allora

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, per qualche $\lambda \geq 0$. N_t ha quindi la legge di Poisson di parametro λt .

¹Per la dimostrazione si veda [11, pag. 14]

1.4 Il moto Browniano

Definizione 1.19. Un processo adattato $(X_t)_{t \geq 0}$ a valori reali è chiamato un moto Browniano se:

- per $0 \leq s < t < \infty$, $X_t - X_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ (incrementi indipendenti dal passato);
- per $0 < s < t < \infty$, $X_t - X_s$ e $X_{t-s} - X_0$ hanno la stessa legge di probabilità (incrementi stazionari);
- le traiettorie sono continue, cioè la funzione $s \rightarrow X_s(\omega)$ è continua P-q.c..

La legge del processo appena definito, si ricava dalle stesse definizioni e si ha il seguente risultato, dovuto a Paul Lévy.

Teorema 1.20. Se $(X_t)_{t \geq 0}$ è un moto Browniano, allora $X_t - X_0$ è una variabile aleatoria normale con media rt e varianza $\sigma^2 t$, dove r e σ sono costanti reali.

Un moto Browniano è **standard** se

$$X_0 = 0 \text{ P-q.c.} \quad E[X_t] = 0 \quad E[X_t^2] = t$$

e in questo caso la densità di X_t è

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

rispetto alla misura di Lebesgue.

Una delle più importanti proprietà del moto Browniano è che le sue traiettorie non sono differenziabili (q.c.) in nessun punto. Infatti vale il seguente risultato:

Teorema 1.21. Su uno spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{F}, P) sia X un moto Browniano. Allora l'insieme costituito dagli elementi ω di Ω per i quali la traiettoria $X(\omega)$ ammette in qualche punto di \mathbb{R}_+ derivata destra inferiore e derivata destra superiore entrambe finite è contenuto in un evento trascurabile (analogo per le derivate sinistre).

Non c'è t in \mathbb{R}_+ tale che $\frac{dX_t}{dt}$ esista, quindi non è possibile definire un integrale del tipo

$$\int f(s) dX_s = \int f(s) \frac{dX_s}{ds} ds.$$

1.5 L'integrazione stocastica secondo Itô

Supponiamo che $(W_t)_{t \geq 0}$ sia un moto Browniano standard definito su uno spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Iniziamo a costruire l'integrale stocastico per il seguente insieme di processi

Definizione 1.22. Sia T un numero reale finito strettamente positivo, $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ è chiamato un **processo semplice** se può essere scritto come

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^p \phi_i(\omega) I_{[t_{i-1}, t_i]}(t)$$

dove $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ e ϕ_i è $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -misurabile e limitata.

Per definizione di $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$, l'integrale stocastico di un processo semplice H è il processo continuo $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ definito per $t \in]t_k, t_{k+1}]$ come

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k})$$

Notiamo che $(I(H)_t)$ può essere scritto nella forma

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t})$$

che prova la continuità di $t \rightarrow I(H)_t$. Scriviamo quindi $\int_0^t H_s dW_s$ per $I(H)_t$.

Teorema (Disuguaglianza di Doob). *Se $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ è una martingala, allora*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right) \leq 4\mathbb{E}[|M_T|^2].$$

Teorema 1.23. *Se $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo semplice*

$$- \left(\int_0^t H_s dW_s \right)_{0 \leq t \leq T} \text{ è una } \mathcal{F}_t\text{-martingala,}$$

Inoltre valgono le seguenti uguaglianze:

$$- \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right], \quad (\text{Isometria di It\^o})$$

$$- \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].$$

Dimostrazione. Per provare questi risultati useremo processi con tempi discreti. Invece di provare che $\int_0^t H_s dW_s$ è una martingala, verificheremo che per ogni $t > s$ si ha

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t H_u dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s H_u dW_u.$$

Se includiamo s e t nella suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ e se chiamiamo $M_n = \int_0^{t_n} H_s dW_s$ e $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$ per $0 \leq n \leq p$, vogliamo quindi mostrare che M_n è una \mathcal{G}_n -martingala. Per provare ciò, notiamo che

$$M_n = \int_0^{t_n} H_s dW_s = \sum_{i=1}^n \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

con ϕ_i \mathcal{G}_{i-1} -misurabile. Si ha che $X_n = W_{t_n}$ è una \mathcal{G}_n -martingala, in quanto $(W_t)_{t \geq 0}$ è un moto Browniano e quindi segue facilmente che M_n è una martingala.

La seconda asserzione segue dal fatto che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(X_i - X_{i-1}) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Quindi se $i < j$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1}) | \mathcal{G}_{j-1}]] \\ &= \mathbb{E}[\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1}) \mathbb{E}[X_j - X_{j-1}] | \mathcal{G}_{j-1}] \end{aligned}$$

ed essendo X_j una martingala, $\mathbb{E}[X_j - X_{j-1}] | \mathcal{G}_{j-1} = 0$, quindi $\mathbb{E}[\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})] = 0$. Analogamente per $i > j$. Se invece $i = j$ allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi_i^2 (X_i - X_{i-1})^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi_i^2 (X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1}]] \\ &= \mathbb{E}[\phi_i^2 \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1}]], \end{aligned}$$

e quindi risulta

$$\mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1}] = \mathbb{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] = t_i - t_{i-1}. \quad (1.2)$$

Dalla (1.1) e dalla (1.2) concludiamo che

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \phi_i (X_i - X_{i-1}) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \phi_i^2 (t_i - t_{i-1}) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right].$$

La continuità di $t \rightarrow \int_0^t H_s dW_s$ è chiara dalla definizione. La terza asserzione è una conseguenza della disuguaglianza di Doob applicata alla martingala $(\int_0^t H_s dW_s)_{t \geq 0}$. \square

Se $t \leq T$ e se $A \in \mathcal{F}_t$, allora $s \rightarrow I_A I_{\{t < s\}} H_s$ è ancora un processo semplice e dalla definizione di integrale si ha che

$$\int_0^T I_A H_s I_{\{t < s\}} dW_s = I_A \int_t^T H_s dW_s. \quad (1.3)$$

Ora che abbiamo definito l'integrale stocastico per processi semplici, vogliamo estendere l'insieme di processi integrabili alla classe \mathcal{H} dei processi adattati

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processi adattati a } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{E} \left[\int_0^T H_s^2 ds \right] < +\infty \right\}.$$

Ogni processo $H \in \mathcal{H}$ può essere approssimato da una successione di processi semplici H_n , così che l'integrale stocastico $I(H)_t$ può essere definito come il limite di $I(H_n)_t$.

Teorema 1.24. *Consideriamo $(W_t)_{t \geq 0}$ un \mathcal{F}_t moto Browniano. Allora esiste un'unica applicazione lineare J da \mathcal{H} allo spazio delle \mathcal{F}_t -martingale definite su $[0, T]$, tale che:*

- se $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo semplice, \mathbb{P} q.c. per ogni $0 \leq t \leq T$, $J(H)_t = I(H)_t$;
- se $t \leq T$, $\mathbb{E}[J(H)_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$,
- vale la seguente uguaglianza

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right]. \quad (1.4)$$

Questa applicazione lineare è unica nel seguente senso: se J e J' soddisfano le proprietà precedenti allora

$$J(H)_t = J'(H)_t \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad \text{P-q.c.}$$

Scriviamo per $H \in \mathcal{H}$, $\int_0^t H_s dW_s = J(H)_t$

Dimostrazione. Usiamo il fatto che se $(H_s)_{s \leq T}$ è in \mathcal{H} , allora esiste una successione $(H_s^n)_{s \leq T}$ di processi semplici tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right] = 0,$$

(Karatzas-Shreve 1988). Se $H \in \mathcal{H}$ e $(H^n)_{n \geq 0}$ è una successione di processi semplici che converge a H , nel senso prima spiegato, si ha

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} |I(H^{n+p})_t - I(H^n)_t|^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s^{n+p} - H_s^n|^2 ds \right]. \quad (1.5)$$

Esiste allora una sottosuccessione $H^{\phi(n)}$ tale che

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} |I(H^{\phi(n+1)})_t - I(H^{\phi(n)})_t|^2 \right] \leq \frac{1}{2^n}.$$

quindi la serie il cui termine generale è $I(H^{\phi(n+1)}) - I(H^{\phi(n)})$ è q.c. uniformemente convergente. Di conseguenza $I(H^{\phi(n)})_t$ convergerà ad una funzione continua la quale sarà, per definizione, la funzione $t \rightarrow J(H)_t$. Prendendo il limite nella (1.5), otteniamo che

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq T} |J(H)_t - I(H^n)_t|^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right] \quad (1.6)$$

il che implica che $(J(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ non dipende dalla successione approssimante. Dall'altro canto $(J(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ è una martingala, in quanto vale l'uguaglianza

$$\mathbb{E}[I(H^n)_t | \mathcal{F}_s] = I(H^n)_t$$

Per ogni t , $\lim_{n \rightarrow \infty} I(H^n)_t = J(H)_t$ in $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, poichè la speranza condizionale è continua in $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, quindi concludiamo. Da (1.6) e dal fatto che $\mathbb{E}[I(H^n)_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^T |H_s^n|^2 ds]$ segue che vale l'isometria di Itô, cioè $\mathbb{E}[J(H)_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^T |H_s|^2 ds]$. La terza asserzione si dimostra in maniera analoga.

L'unicità dell'estensione viene dal fatto che l'insieme dei processi semplici è denso in \mathcal{H} . \square

Scriviamo per definizione che

$$\int_t^T H_s dW_s = \int_0^T H_s dW_s - \int_0^t H_s dW_s.$$

Proposizione 1.25. *Se $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ appartiene a \mathcal{H} e se S è un tempo d'arresto rispetto a \mathcal{F}_t allora si ha il seguente risultato:*

$$\int_0^S H_s dW_s = \int_0^T I_{\{s \leq S\}} H_s dW_s \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Notiamo che la (1.3) è ancora vera se $H \in \mathcal{H}$. Questo è giustificato dal fatto che i processi semplici sono densi in \mathcal{H} e dalla (1.6). Consideriamo tempi d'arresto della forma $S = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i I_{A_i}$, dove $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ e gli A_i sono disgiunti e \mathcal{F}_t -misurabili, quindi proviamo l'asserzione in questo caso. Abbiamo che

$$\int_0^T I_{\{s > S\}} H_s dW_s = \int_0^T \left(\sum_{1 \leq i \leq n} I_{A_i} I_{\{s > t_i\}} \right) H_s dW_s,$$

dove il processo $I_{A_i} I_{\{s > t_i\}} H_s$, per come è definito, è adattato, quindi appartiene a \mathcal{H} . Segue che

$$\begin{aligned} \int_0^T I_{\{s > S\}} H_s dW_s &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^T I_{A_i} I_{\{s > t_i\}} H_s dW_s \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} I_{A_i} \int_{t_i}^T H_s dW_s = \int_S^T H_s dW_s \end{aligned}$$

e quindi $\int_0^T I_{\{s \leq S\}} H_s dW_s = \int_0^S H_s dW_s$. Per provare il risultato per un arbitrario tempo d'arresto, ricordiamo che ogni tempo d'arresto può essere approssimato con una successione crescente di tempi d'arresto della forma appena analizzata. Sia

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq 2^n} \frac{(k+1)T}{2^n} I_{\{\frac{kT}{2^n} \leq S < \frac{(k+1)T}{2^n}\}}.$$

che, per come è stato definito, converge q.c. a S . Per la continuità della funzione $t \rightarrow \int_0^t H_s dW_s$, possiamo affermare che, $\int_0^{S_n} H_s dW_s$ converge q.c. a $\int_0^S H_s dW_s$. Inoltre si ha che

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^T I_{\{s \leq S\}} H_s dW_s - \int_0^T I_{\{s \leq S_n\}} H_s dW_s \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T I_{\{S < s \leq S_n\}} H_s^2 ds \right].$$

L'ultimo termine va a 0 per il teorema di convergenza dominata, quindi possiamo trovare una sottosuccessione tale che $\int_0^T I_{\{s \leq S_{n_k}\}} H_s dW_s$ converge a $\int_0^T I_{\{s \leq S\}} H_s dW_s$ q.c.. Questo completa la dimostrazione. \square

Nella pratica vengono utilizzati processi che soddisfano ipotesi più deboli di integrabilità, quindi definiamo la classe

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processi adattati a } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \int_0^T H_s^2 ds < +\infty \right\}$$

Abbiamo quindi un'estensione dell'integrale stocastico da \mathcal{H} a $\tilde{\mathcal{H}}$.

Teorema 1.26. *Esiste un'unica applicazione lineare \tilde{J} da $\tilde{\mathcal{H}}$ nello spazio vettoriale dei processi continui definiti su $[0, T]$, tali che*

- se $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo semplice allora $\tilde{J}(H)_t = I(H)_t \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad \mathbb{P}$ -q.c. (Proprietà di estensione);
- se $(H^n)_{n \geq 0}$ è una successione di processi in $\tilde{\mathcal{H}}$ tale che $\int_0^T (H_s^n)^2 ds$ converge a 0 in probabilità allora $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H^n)_t|$ converge a 0 in probabilità (Proprietà di continuità).

Quindi scriviamo $\int_0^t H_s dW_s$ per $\tilde{J}(H)_t$.

Dimostrazione. E' facile dedurre dalle proprietà di estensione e di continuità che se $H \in \mathcal{H}$ allora $\tilde{J}(H)_t = J(H)_t, \forall t \leq T$ P-q.c..

Sia $H \in \tilde{\mathcal{H}}$, definiamo $T_n = \inf\{0 \leq s \leq T, \int_0^s H_u^2 du \geq n\}$ ($+\infty$ se questo insieme è vuoto), e $H_s^n = H_s I_{\{s \leq T_n\}}$.

Bisogna dimostrare che T_n è un tempo d'arresto. Essendo $\{T_n \leq t\} = \{\int_0^t H_u^2 du \geq n\}$, dobbiamo dimostrare che $\int_0^t H_u^2 du$ è \mathcal{F}_t -misurabile. Questo risultato è vero se H è un processo semplice e quindi è vero anche se $H \in \mathcal{H}$, infine, se $H \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\int_0^t H_u^2 du$ è \mathcal{F}_t -misurabile poichè è il limite di $\int_0^t (H_u \wedge K)^2 du$ q.c. come K tende a infinito. Allora vediamo che i processi H_s^n sono adattati e limitati, quindi appartengono a \mathcal{H} . Si ha che

$$\int_0^t H_s^n dW_s = \int_0^t I_{\{s \leq T_n\}} H_s^{n+1} dW_s$$

e la relazione (1.7) implica che

$$\int_0^t H_s^n dW_s = \int_0^{t \wedge T_n} H_s^{n+1} dW_s$$

Quindi, sull'insieme $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$, per ogni $t \leq T$, vale l'uguaglianza $J(H^n)_t = J(H^{n+1})_t$. Essendo $\bigcup_{n \geq 0} \{\int_0^T H_u^2 du < n\} = \{\int_0^T H_u^2 du < \infty\}$, possiamo definire q.c. un processo $\tilde{J}(H)_t$: sull'insieme $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$,

$$\tilde{J}(H)_t = J(H^n)_t, \quad \forall t \leq T.$$

Il processo $t \rightarrow \tilde{J}(H)_t$ è q.c. continuo, per definizione. La proprietà di estensione è soddisfatta per costruzione. Per provare la proprietà di continuità, consideriamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(I_{\{\int_0^T H_u^2 du < \frac{1}{N}\}} \sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon\right). \end{aligned}$$

Se chiamiamo $S_N = \inf\{s \geq T, \int_0^s H_u^2 du \leq \frac{1}{N}\}$ ($+\infty$ se l'insieme è vuoto), allora sull'insieme $\{\int_0^s H_u^2 du < \frac{1}{N}\}$, segue da (1.7) che, per ogni $t \leq T$, valgono le seguenti uguaglianze

$$\int_0^t H_s dW_s = \tilde{J}(H)_t = J(H^1)_t = \int_0^t H_s^1 I_{\{s \leq S_N\}} dW_s = \int_0^t H_s I_{\{s \leq S_N\}} dW_s$$

quindi applicando la (1.4) al processo $s \rightarrow H_s I_{\{s \leq S_N\}}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N}\right) \\ &\quad + \frac{4}{\epsilon^2} \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 I_{\{s \leq S_N\}} ds\right] \\ &= \mathbb{P}\left(\int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N}\right) + \frac{4}{N\epsilon^2} \end{aligned}$$

Se $\int_0^T (H_s^n)^2 ds$ converge a 0 in probabilità, allora $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t|$ converge a 0 in probabilità.

Per provare la linearità di \tilde{J} , consideriamo due processi appartenenti a $\tilde{\mathcal{H}}$, H e K e due successioni H_t^n e K_t^n definite come all'inizio della dimostrazione, tali che $\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds$ e $\int_0^T (K_s^n - K_s)^2 ds$ convergono a 0 in probabilità. Per continuità di \tilde{J} possiamo prendere il limite nell'equazione $J(\lambda H^n + \mu K^n)_t = \lambda J(H^n)_t + \mu J(K^n)_t$ per provare la continuità di \tilde{J} .

Infine, il fatto che se $H \in \tilde{\mathcal{H}}$ allora $\int_0^T (H_t - H_t^n) dt$ converge a 0 in probabilità e la proprietà di continuità, dimostrano l'unicità dell'estensione. \square

In questo caso si ha che $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$ non è necessariamente una martingala. La condizione $E(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$ implica che il processo $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$ è una martingala, ma tale condizione non è necessaria.

1.5.1 Formula di Itô

Definiamo ora una classe di processi per cui è applicabile la formula di Itô

Definizione 1.27. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ uno spazio probabilizzato filtrato e $(W_t)_{t \geq 0}$ un \mathcal{F}_t -moto Browniano. $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un **processo di Itô** se può essere scritto come

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad \forall t \leq T \text{ P-q.c.}$$

dove

- X_0 è \mathcal{F}_0 -misurabile.
- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ e $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ sono processi adattati a \mathcal{F}_t .
- $\int_0^t |H_s|^2 ds < \infty$ e $\int_0^t |K_s| ds < \infty$ P-q.c.

Prima di introdurre la formula di Itô, dobbiamo dare alcune definizioni.

Definizione 1.28. Denotiamo con \mathcal{H}^2 la classe di tutte le martingale quadrato integrabili, cioè di tutte le martingale X per cui vale $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} E[X_t^2] < \infty$. Inoltre $X \in \mathcal{H}_{loc}^2$ se e solo se esiste una successione crescente di tempi d'arresto (T_n) , che dipende da X , tale che $\lim_n T_n = \infty$ q.c., e il processo $X^{T_n} \in \mathcal{H}^2$, dove $X_t^{T_n} = X_{t \wedge T_n}$.

Definizione 1.29. Denotiamo con \mathcal{V}^+ (risp. \mathcal{V}) l'insieme di tutti i processi càdlàg adattati a valori reali con $A_0 = 0$ e le cui traiettorie $t \rightarrow A_t(\omega)$ sono non decrescenti (risp. hanno variazione finita su ogni intervallo finito $[0, t]$).

\mathcal{A}^+ è l'insieme di tutti gli $A \in \mathcal{V}^+$ che sono integrabili: $E[A_\infty] < \infty$. \mathcal{A} è l'insieme di tutti gli $A \in \mathcal{V}$ che hanno variazione integrabile: $E[Var(A)_\infty] < \infty$. Inoltre $A \in \mathcal{A}_{loc}^+$ se e solo se esiste una successione crescente di tempi d'arresto (T_n) , che dipende da A , tale che $\lim_n T_n = \infty$ q.c., e il processo $A^{T_n} \in \mathcal{A}^+$, dove $A_t^{T_n} = A_{t \wedge T_n}$.

Teorema 1.30.² Per ogni coppia (M, N) , con $M, N \in \mathcal{H}_{loc}^2$ esiste un processo prevedibile $\langle M, N \rangle \in \mathcal{V}$, chiamato **covarianza quadratica prevedibile**, unico

²Per la dimostrazione si veda [7, pag. 38]

a meno di insiemi trascurabili, tale che $MN - \langle M, N \rangle$ sia una martingala locale. Abbiamo che

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M + N, M + N \rangle - \langle M - N, M - N \rangle)$$

e se $M, N \in \mathcal{H}^2$ allora $\langle M, N \rangle \in \mathcal{A}$ e $MN - \langle M, N \rangle$ è una martingala uniformemente integrabile. Inoltre il processo $\langle M, M \rangle \in \mathcal{A}^+$.

Definizione 1.31. Due martingale locali M e N sono chiamate **ortogonali** se il loro prodotto MN è una martingala locale. Una martingala locale X è una **martingala locale puramente discontinua** se $X_0 = 0$ e se è ortogonale a tutte le martingale locali continue.

Teorema 1.32. Sia $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processo di Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

e sia f una funzione due volte differenziabile con continuità, allora

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

dove si ha

$$\langle X, X \rangle_s = \int_0^s H_s^2 ds,$$

e

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

Nel caso in cui $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ sia una funzione che è due volte differenziabile rispetto a x e una rispetto a t , se le derivate parziali sono continue rispetto a (t, x) , ad esempio $f \in C^{1,2}$, allora

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Dimostrazione. Utilizziamo lo sviluppo di Taylor di f di una funzione in più variabili

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(t_0, X_{t_0}) + (t - t_0) f_t(t_0, X_{t_0}) + (X_t - X_{t_0}) f_x(t_0, X_{t_0}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 f_{tt}(t_0, X_{t_0}) + \frac{1}{2} (X_t - X_{t_0})^2 f_{xx}(t_0, X_{t_0}) \\ &\quad + (t - t_0)(X_t - X_{t_0}) f_{tx}(t_0, X_{t_0}) + \dots \end{aligned}$$

che può essere scritta nella forma

$$df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2} f_{tt} (dt)^2 + f_{tx} dt dX + \frac{1}{2} f_{xx} (dX)^2 + \dots$$

e sostituendo $dX = K_t dt + H_t dW_t$, otteniamo

$$\begin{aligned} df &= f_t dt + f_x (K_t dt + H_t dW_t) + \frac{1}{2} f_{tt} (dt)^2 \\ &\quad + f_{tx} dt (K_t dt + H_t dW_t) + \frac{1}{2} f_{xx} (K_t dt + H_t dW_t)^2 + \dots \end{aligned}$$

Si ha che $d\langle W, W \rangle_t = dt$, mentre $d\langle W, t \rangle_t$ e $d\langle t, t \rangle_t$ hanno termini di grado più alto, per cui sviluppando il quadrato, si ricava l'uguaglianza

$$(K_t dt + H_t dW_t)^2 = H_t^2 dt + \text{termini di grado più alto}$$

da cui

$$df = (f_t + K_t f_x + \frac{1}{2} f_{xx} H_t^2) dt + H_t f_x dW_t.$$

□

Questa formula vale solo per i particolari processi definiti prima. Si possono dimostrare formule analoghe, anche per processi più complessi. Indichiamo con \mathcal{L} l'insieme delle martingale locali con $M_0 = 0$.

Definizione 1.33. Una semimartingala è un processo X della forma $X = X_0 + M + A$ con X_0 a valori finiti e \mathcal{F}_0 -misurabile, $M \in \mathcal{L}$ e $A \in \mathcal{V}$.

Teorema 1.34.³ Sia $X = (X^1, \dots, X^d)$ una semimartingala d -dimensionale e f di classe C^2 su \mathbb{R}^d . Allora $f(X)$ è una semimartingala e abbiamo:

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(x_0) &+ \sum_{i \leq d} D_i f(X_-) \cdot X^i + \frac{1}{2} \sum_{i, j \leq d} D_{ij} f(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle \\ &+ \sum_{s \leq t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i \leq d} D_i f(X_{s-}) \Delta X_s^i \right]. \end{aligned}$$

dove con X^c indichiamo la parte di X che è una martingala continua.

Corollario 1.35. Siano X_t e Y_t due processi di Itô, $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$ e $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$. Allora

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

dove abbiamo posto

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$$

Dimostrazione. Dalla formula di Itô

$$\begin{aligned} (X_t + Y_t)^2 &= (X_0 + Y_0)^2 \\ &+ 2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) \\ &+ \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds \\ X_t^2 &= X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds \\ Y_t^2 &= Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s'^2 ds \end{aligned}$$

³Per la dimostrazione si veda [7, pag. 57].

Sostituendo alla prima equazione i valori della seconda e della terza equazione, si ottiene l'uguaglianza

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds.$$

□

1.6 Processi di Lévy

I processi di Lévy, che includono i processi di Poisson e il moto Browniano come caso particolare, sono stati la prima classe di processi stocastici ad essere studiati in spirito moderno e inoltre forniscono anche esempi di semimartingale.

Definizione 1.36. *Sia dato uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ che soddisfa le ipotesi abituali. Un processo adattato $X = (X_t)_{0 \leq t < \infty}$ con $X_0 = 0$ q.c., è un processo di Lévy se*

- per $0 \leq s < t < \infty$, $X_t - X_s$ è indipendente da \mathcal{F}_s (incrementi indipendenti dal passato)
- per $0 \leq s < t < \infty$, $X_t - X_s$ ha la stessa legge di X_{t-s} (incrementi stazionari)
- $\lim_{t \rightarrow s} X_t = X_s$, dove il limite è preso in probabilità (continuità in probabilità).

Definizione 1.37. *Una misura μ di Borel finita è **infinitamente divisibile** se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una misura di Borel μ_n tale che vale l'uguaglianza*

$$\mu = \mu_n * \dots * \mu_n \quad (n \text{ fattori})$$

dove con $*$ intendiamo il prodotto di convoluzione. Per l'unicità della trasformata di Fourier ciò è equivalente a

$$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_n)^n.$$

Si può dimostrare che se X è un processo di Lévy allora per ogni $t > 0$ X_t ha una legge infinitamente divisibile.

Vogliamo ora dimostrare che un processo di Lévy può essere in pratica visto come un processo càdlàg adattato. Prima di vedere ciò consideriamo il seguente lemma

Lemma 1.38. *Sia x_n una successione di numeri reali tali che e^{iux_n} converge quando $n \rightarrow \infty$, per quasi tutti gli $u \in \mathbb{R}$. Allora x_n converge ad un limite finito.*

Teorema 1.39. *Sia X un processo di Lévy. Esiste un'unica modificazione Y di X che è càdlàg e che è anche un processo di Lévy.*

Dimostrazione. Sia $M_t^u = \frac{e^{iuX_t}}{\mathbb{E}[e^{iuX_t}]}$. Per ogni fissato $u \in \mathbb{Q}$, il processo $(M_t^u)_{0 \leq t < \infty}$ è una martingala a valori complessi, relativa a (\mathcal{F}_t) . È facile vedere che M^u ha una versione con traiettorie càdlàg, per ogni u . Sia Λ^u l'insieme di misura nulla tale che per $\omega \notin \Lambda^u$, allora $t \rightarrow M_t^u(\omega)$ è continuo a destra con limite sinistro. Sia $\Lambda = \bigcup_{u \in \mathbb{Q}} \Lambda^u$. Allora $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$.

Dimostriamo che le traiettorie di X q.c. non possono esplodere. Per ogni $u \in \mathbb{R}$, $(M_t^u)_{0 \leq t < \infty}$ è una martingala e quindi per quasi ogni ω , le funzioni $t \rightarrow M_t^u(\omega)$ e $t \rightarrow e^{iuX_t(\omega)}$, con $t \in \mathbb{Q}$, sono restrizioni a \mathbb{Q}_+ di funzioni càdlàg. Sia

$$\Lambda = \{(\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R} : e^{iuX_t(\omega)}, t \in \mathbb{Q}_+, \text{ è la restrizione di una funzione càdlàg}\}.$$

Si dimostra che Λ è un insieme misurabile e inoltre abbiamo visto che $\int I_\Lambda(\omega, u) dP(d\omega) = 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}$. Dal teorema di Fubini

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} I_\Lambda(\omega, u) u dP(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int I_\Lambda(\omega, u) P(d\omega) u d = 0$$

quindi concludiamo che per quasi ogni ω la funzione $t \rightarrow e^{iuX_t(\omega)}$, $t \in \mathbb{Q}_+$ è la restrizione di una funzione càdlàg per quasi tutti gli $u \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi concludere che la funzione $t \rightarrow X_t(\omega)$, $t \in \mathbb{Q}_+$, è la restrizione di una funzione càdlàg per ogni ω , grazie al Lemma precedente.

Scegliamo $\omega \notin \Lambda$ e supponiamo che $s \rightarrow X_s(\omega)$ abbia due o più punti di accumulazione distinti, chiamiamoli x e y , quando s cresce (risp. decresce) a t . Scegliamo un $u \in \mathbb{Q}$ tale che $u(x - y) \neq 2\pi m$, per tutti gli interi m . Questo contraddice l'ipotesi che $\omega \notin \Lambda$, quindi $s \rightarrow X_s(\omega)$ può avere solo un punto di accumulazione.

Poniamo $Y_t = \lim_{s \in \mathbb{Q}_+, s \downarrow t} X_s$ su $\Omega \setminus \Lambda$ e $Y_t = 0$ su Λ , per ogni t . Poichè \mathcal{F}_t contiene tutti gli insiemi P-trascurabili di \mathcal{F} e $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ è continua a destra, si ha che $Y_t \in \mathcal{F}_t$. Poichè X è continuo in probabilità, $P(Y_t \neq X_t) = 0$, quindi Y è una modificazione di X . E' chiaro che Y è un processo di Lévy. \square

Si ha inoltre che la filtrazione generata da un processo di Lévy soddisfa le ipotesi abituali, infatti vale il seguente

Teorema 1.40. *Sia X un processo di Lévy e sia $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^0 \vee \mathcal{N}$, dove $(\mathcal{F}_t^0)_{0 \leq t < \infty}$ è la filtrazione naturale di X e \mathcal{N} sono gli insiemi P-trascurabili di \mathcal{F} . Allora $(\mathcal{G}_t^0)_{0 \leq t < \infty}$ è continua a destra.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{G}_{t+} = \mathcal{G}_t$, dove $\mathcal{G}_{t+} = \bigcap_{u>t} \mathcal{G}_u$. Notiamo che la filtrazione \mathcal{G} è crescente, quindi è sufficiente provare che $\mathcal{G}_t = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{G}_{t+\frac{1}{n}}$. Dobbiamo dimostrare che se prendiamo $s_1, \dots, s_n \leq t$, per (u_1, \dots, u_n) valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i(u_1 X_{s_1} + \dots + u_n X_{s_n})} | \mathcal{G}_t] &= \mathbb{E}[e^{i(u_1 X_{s_1} + \dots + u_n X_{s_n})} | \mathcal{G}_{t+}] \\ &= e^{i(u_1 X_{s_1} + \dots + u_n X_{s_n})}. \end{aligned}$$

Per $v_1, \dots, v_n > t$ e (u_1, \dots, u_n) , diamo la dimostrazione per $n = 2$. Definiamo $f_t(u) := \mathbb{E}[e^{iuX_t}]$. Siano $z > v > t$ e supponiamo dati u_1 e u_2 . Abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i(u_1 X_v + u_2 X_z)} | \mathcal{G}_{t+}] &= \lim_{w \downarrow t} \mathbb{E}[e^{i(u_1 X_v + u_2 X_z)} | \mathcal{G}_w] \\ &= \lim_{w \downarrow t} \mathbb{E}\left[e^{iu_1 X_v} \frac{e^{iu_2 X_z}}{f_z(u_2)} \middle| \mathcal{G}_w\right] \\ &= \lim_{w \downarrow t} \mathbb{E}\left[e^{iu_1 X_v} \frac{e^{iu_2 X_z}}{f_z(u_2)} f_z(u_2) \middle| \mathcal{G}_w\right] \\ &= \lim_{w \downarrow t} \mathbb{E}\left[e^{iu_1 X_v} \frac{e^{iu_2 X_v}}{f_v(u_2)} f_z(u_2) \middle| \mathcal{G}_w\right], \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $M_v^{u_2} = \frac{e^{iu_1 X_v}}{f_v(u_2)}$ è una martingala. Dai termini sopra si ottiene

$$= \lim_{w \downarrow t} \mathbb{E}[e^{i(u_1+u_2)X_w} f_{z-v}(u_2) | \mathcal{G}_w]$$

da cui sfruttando la proprietà di martingala

$$\begin{aligned} &= \lim_{w \downarrow t} e^{i(u_1+u_2)X_w} f_{v-w}(u_1+u_2) f_{z-v}(u_2) \\ &= e^{i(u_1+u_2)X_t} f_{v-t}(u_1+u_2) f_{z-v}(u_2) \\ &\quad \vdots \\ &= \mathbb{E}[e^{i(u_1 X_v + u_2 X_z)} | \mathcal{G}_t]. \end{aligned}$$

Segue che $\mathbb{E}[e^{i \sum_j u_j X_j} | \mathcal{G}_{t+}] = \mathbb{E}[e^{i \sum_j u_j X_j} | \mathcal{G}_t]$ per tutti gli (s_1, \dots, s_n) e gli (u_1, \dots, u_n) , quindi $\mathbb{E}[Z | \mathcal{G}_{t+}] = \mathbb{E}[Z | \mathcal{G}_t]$ per ogni $Z \in \bigvee_{s \geq 0} \mathcal{F}_s^0$. Quindi $\mathcal{G}_{t+} = \mathcal{G}_t$. \square

Un processo di Lévy ha traiettorie càdlàg e quindi le discontinuità che si possono avere sono solo i salti. Sia $X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s$ il limite sinistro in t e definiamo il **processo dei salti**

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-}.$$

Se $\sup_t |\Delta X_t| \leq C < \infty$ q.c., dove C è una costante, allora diciamo che X ha **salti limitati**.

Teorema 1.41. *Sia X un processo di Lévy con salti limitati. Allora per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|X_t|^n] < \infty$.*

Dimostrazione. Sia C un limite, non aleatorio, per i salti di X . Definiamo i tempi d'arresto

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{t : |X_t| \geq C\} \\ &\quad \vdots \\ T_{n+1} &= \inf\{t > T_n : |X_t - X_{T_n}| \geq C\}. \end{aligned}$$

Poichè le traiettorie sono continui a destra, i tempi d'arresto $(T_n)_{n \leq 1}$ formano una successione crescente. Si ha per ipotesi che $|\Delta X_T| \leq C$, quindi $\sup_s |X_s^{T_n}| \leq 2nC$. Dal Teorema precedente si ha che $T_n - T_{n-1}$ è indipendente da $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$ e quindi la legge di $T_n - T_{n-1}$ è la stessa di T_1 , da cui si ottiene l'uguaglianza

$$\mathbb{E}[e^{-T_n}] = (\mathbb{E}[e^{-T_1}])^n = \alpha^n,$$

per qualche α , con $0 \leq \alpha < 1$. Inoltre

$$\mathbb{P}\{|X_t| > 2nC\} \leq \mathbb{P}\{T_n < t\} \leq \frac{\mathbb{E}[e^{-T_n}]}{e^{-t}} \leq e^t \alpha^n,$$

che implica che X_t ha momento esponenziale e quindi momenti di tutti gli ordini. \square

Concentriamo la nostra attenzione sui salti di un processo di Lévy. Ricordiamo che la σ -algebra boreliana di \mathbb{R} ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$) è la σ -algebra su \mathbb{R} generata dalla classe di tutti gli intervalli di \mathbb{R} . I suoi elementi si chiamano gli **insiemi boreliani** di \mathbb{R} .

Sia Λ un insieme Boreliano limitato di \mathbb{R} , tale che $0 \notin \bar{\Lambda}$, dove con $\bar{\Lambda}$ indichiamo la chiusura di Λ .

Dato un processo di Lévy X , definiamo le variabili aleatorie

$$\begin{aligned} T_\Lambda^1 &= \inf\{t > 0 : \Delta X_t \in \Lambda\} \\ &\vdots \\ T_\Lambda^{n+1} &= \inf\{t > T_\Lambda^n : \Delta X_t \in \Lambda\} \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che queste variabili aleatorie sono tempi d'arresto. Supponiamo che Λ sia aperto. Poichè X è càdlàg e $0 \notin \bar{\Lambda}$ si ha che $\{\Delta X_s \in \Lambda\} \in \mathcal{F}_s$, inoltre

$$\{T_\Lambda^n < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [T_\Lambda^{n-1}, t)} \{\Delta X_s \in \Lambda\}$$

e segue che $\{T_\Lambda^n < t\} \in \mathcal{F}_t$ quindi T_Λ^n è un tempo d'arresto. Le traiettorie sono càdlàg e $0 \notin \bar{\Lambda}$, quindi si ha che $T_\Lambda^1 > 0$ q.c. e $\lim_{n \rightarrow \infty} T_\Lambda^n = \infty$ q.c. Definiamo

$$N_t^\Lambda = \sum_{0 < s \leq t} I_\Lambda(\Delta X_s) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{T_\Lambda^n \leq t\}}$$

e osserviamo che N^Λ è un processo di conteggio senza esplosioni. Si ha che per $0 \leq s < t < \infty$,

$$N_t^\Lambda - N_s^\Lambda \in \sigma\{X_u - X_v; s \leq v < u \leq t\},$$

e quindi $N_t^\Lambda - N_s^\Lambda$ è indipendente da \mathcal{F}_s , più precisamnete N^Λ è a incrementi indipendenti. Notiamo che $N_t^\Lambda - N_s^\Lambda$ è anche il numero di salti che $Z_u = X_{s+u} - X_s$ ha in Λ , $0 \leq u \leq t - s$. Dalla stazionarietà della legge di X , concludiamo che $N_t^\Lambda - N_s^\Lambda$ ha la stessa legge di N_{t-s}^Λ . N^Λ è un processo di conteggio con incrementi stazionari e indipendenti: N^Λ è un processo di Poisson. Sia $F(\Lambda) = \mathbb{E}[N_1^\Lambda]$ il parametro del processo di Poisson N_1^Λ .

Definizione 1.42. *Un tempo T è prevedibile se esiste una successione (T_n) di tempi d'arresto, tale che $T_n < T$ q.c. sull'insieme $\{T > 0\}$ e $\lim_n T_n = T$ q.c.. Un tempo d'arresto T è detto **totalmente inaccessibile** se $\mathbb{P}(T = S < \infty) = 0$ per ogni tempo prevedibile S .*

Definizione 1.43. *Un processo càdlàg X è detto **quasi-continuo a sinistra** se $\Delta X_T = 0$ q.c. sull'insieme $\{T < \infty\}$, per ogni tempo prevedibile T .*

Proposizione 1.44. ⁴ *Sia X un processo adattato càdlàg. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

- X è quasi-continuo a sinistra;
- esiste una successione di tempi totalmente inaccessibili che esaurisce i salti di X .
- per ogni successione crescente (T_n) di tempi d'arresto con limite T , abbiamo che $\lim_n X_{T_n} = X_T$ q.c. sull'insieme $\{T < \infty\}$.

⁴Per la dimostrazione si veda [7, pag. 22]

E' noto che i processi di Lévy sono quasi-continui a sinistra e per la Proposizione precedente, abbiamo che i salti di un processo di Lévy sono concentrati su tempi d'arresto totalmente inaccessibili.

Teorema 1.45. *La funzione $\Lambda \rightarrow N_t^\Lambda(\omega)$ definisce una misura σ -finita su $\mathbb{R} \setminus 0$ per ogni (t, ω) fissato. La funzione $F(\Lambda) = \mathbb{E}[N_1^\Lambda]$ definisce una misura σ -finita su $\mathbb{R} \setminus 0$.*

Dimostrazione. La funzione $\Lambda \rightarrow N_t^\Lambda(\omega)$ è semplicemente una misura di conteggio: $\mu(\Lambda) = \{\text{numero di } s \leq t : \Delta X_s(\omega) \in \Lambda\}$. E' quindi chiaro che F definisce una misura. \square

Definizione 1.46. *La misura F definita da*

$$F(\Lambda) = \mathbb{E}[N_1^\Lambda] = \mathbb{E}\left[\sum_{0 < s \leq 1} I_\Lambda(\Delta X_s)\right]$$

*è chiamata la **misura di Lévy** del processo di Lévy X . Una misura $N_t(\omega, dx)$, come quella del teorema precedente, è chiamata **misura aleatoria**.*

Poichè $N_t^\Lambda(\omega, dx)$ è una misura di conteggio, vale il seguente risultato

Teorema 1.47. *Sia $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0 \notin \bar{\Lambda}$, f boreliana e finita su Λ . Allora vale l'equazione*

$$\int_\Lambda f(x) N_t^\Lambda(\omega, dx) = \sum_{0 < s \leq t} f(\Delta X_s) I_\Lambda(\Delta X_s)$$

Come abbiamo dimostrato, N_t^Λ ha incrementi indipendenti e stazionari, si ha si conseguenza

Corollario 1.48. *Nelle ipotesi del teorema precedente, il processo definito da*

$$\int_\Lambda f(x) N_t^\Lambda(\cdot, dx)$$

è un processo di Lévy.

Per un dato insieme Λ definiamo il **processo associato ai salti**

$$J_t^\Lambda = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I_\Lambda(\Delta X_s).$$

Dal teorema precedente e dal suo corollario si conclude che

$$J_t^\Lambda = \int_\Lambda x N_t(\cdot, dx),$$

e J_t^Λ è un processo di Lévy e $J_t^\Lambda < \infty$ q.c. per ogni $t \geq 0$.

Teorema 1.49. *Dato Λ , $0 \notin \bar{\Lambda}$, il processo $X_t - J_t^\Lambda$ è un processo di Lévy.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare solo l'indipendenza e la stazionarietà degli incrementi, in quanto la continuità in probabilità è verificata banalmente. Si ha

$$X_t - J_t^\Lambda - (X_s - J_s^\Lambda) = X_t - X_s - \sum_{s < u \leq t} \Delta X_u I_\Lambda(\Delta X_u)$$

che è chiaramente $\sigma\{X_v - X_u; s \leq u < v \leq t\}$ -misurabile e per la stazionarietà degli incrementi di X ha la stessa legge di $X_{t-s} - J_{t-s}^\Lambda$. \square

Consideriamo ora il processo

$$Y_t^a = X_t - \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I_{|\Delta X_s| \geq a},$$

per qualche costante $a > 0$. Per come è definito, Y_t^a ha i salti limitati da a e quindi ha momenti finiti di tutti gli ordini. Se scegliamo $a = 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= X_t - J_t^{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)} \\ &= X_t - \int_{|x| \geq 1} x N_t(\cdot, dx). \end{aligned}$$

Passiamo ora ad un altro risultato che dà un'interpretazione della misura di Lévy

Teorema 1.50. ⁵ Prendiamo Λ boreliano con $0 \notin \bar{\Lambda}$, sia F la misura di Lévy di X e $f I_\Lambda \in L^2(dF)$. Allora

$$\mathbb{E} \left[\int_\Lambda f(x) N_t(\cdot, dx) \right] = t \int_\Lambda f(x) F(dx)$$

e inoltre

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_\Lambda f(x) N_t(\cdot, dx) - t \int_\Lambda f(x) F(dx) \right)^2 \right] = t \int_\Lambda f(x)^2 F(dx).$$

Corollario 1.51. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla in un intorno di 0. Allora

$$\mathbb{E} \left[\sum_{0 < s \leq t} f(\Delta X_s) \right] = t \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(dx)$$

Dimostrazione. Basta combinare i risultati dei Teoremi (1.47) e (1.50). \square

Teorema 1.52. Siano Λ_1, Λ_2 due insiemi boreliani disgiunti tali che $0 \notin \bar{\Lambda}_1$ e $0 \notin \bar{\Lambda}_2$. Allora i due processi

$$\begin{aligned} J_t^1 &= \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I_{\Lambda_1}(\Delta X_s) \\ J_t^2 &= \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I_{\Lambda_2}(\Delta X_s) \end{aligned}$$

sono processi di Lévy indipendenti.

⁵Per la dimostrazione si veda [11, pag. 28]

Dimostrazione. Per le considerazioni precedenti, i processi J^1 e J^2 sopra definiti sono processi di Lévy. Dobbiamo dimostrare che sono indipendenti. Siano dati $u, v \in \mathbb{R}$ e

$$C_t^u = \frac{e^{iuJ_t^1}}{\mathbb{E}[e^{iuJ_t^1}]} - 1$$

$$D_t^v = \frac{e^{ivJ_t^2}}{\mathbb{E}[e^{ivJ_t^2}]} - 1.$$

Allora C^u e D^v sono martingale con $\mathbb{E}[C_t^u] = \mathbb{E}[D_t^v] = 0$. Sia $\pi_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ una partizione di $[0, t]$ con $\lim_n mesh(\pi_n) = 0$, dove la misura della partizione π_n è definita nel modo seguente:

$$mesh(\pi_n) = \max_{j=1, \dots, n} (t_j - t_{j-1}).$$

Allora valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_t^u D_t^v] &= \mathbb{E}\left[\sum_k (C_{t_{k+1}}^u - C_{t_k}^u) \sum_l (D_{t_{l+1}}^v - D_{t_l}^v)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_k (C_{t_{k+1}}^u - C_{t_k}^u) (D_{t_{k+1}}^v - D_{t_k}^v)\right]. \end{aligned}$$

Poichè C^u e D^v hanno traiettorie con variazione finita sui compatti, segue che quando $mesh(\pi_n)$ tende a 0 si ha

$$\mathbb{E}[C_t^u D_t^v] = \mathbb{E}\left[\sum_{0 < s \leq t} \Delta C_s^u \Delta D_s^v\right].$$

La speranza sopra è uguale a zero poichè C^u e D^v hanno salti in tempi diversi, in quanto Λ^1 e Λ^2 hanno intersezione vuota. Concludiamo che $\mathbb{E}[C_t^u D_t^v] = 0$ e quindi

$$\mathbb{E}[e^{iuJ_t^1} e^{ivJ_t^2}] = \mathbb{E}[e^{iuJ_t^1}] \mathbb{E}[e^{ivJ_t^2}],$$

che implica, a causa dell'indipendenza e della stazionarietà degli incrementi:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[e^{i(u_1 J_{t_1}^1 + u_2 (J_{t_2}^1 - J_{t_1}^1) + \dots + u_n (J_{t_n}^1 - J_{t_{n-1}}^1))} e^{i(v_1 J_{t_1}^2 + v_2 (J_{t_2}^2 - J_{t_1}^2) + \dots + v_n (J_{t_n}^2 - J_{t_{n-1}}^2))}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{iu_1 J_{t_1}^1 + i \sum_{j=2}^n u_j (J_{t_j}^1 - J_{t_{j-1}}^1)}\right] \mathbb{E}\left[e^{iv_1 J_{t_1}^2 + i \sum_{j=2}^n v_j (J_{t_j}^2 - J_{t_{j-1}}^2)}\right] \end{aligned}$$

che è sufficiente per dimostrare l'indipendenza. \square

Teorema 1.53. *Sia X un processo di Lévy con salti limitati da a : $\sup_s |\Delta X_s| \leq a$ q.c.. Sia $Z_t = X_t - \mathbb{E}[X_t]$. Allora Z è una martingala e $Z_t = Z_t^c + Z_t^d$ dove Z^c è una martingala con traiettorie continue, Z^d è la martingala*

$$Z^d = \int_{\{|x| \leq a\}} x(N_t(\cdot, dx) - tF(dx))$$

e inoltre Z^c e Z^d sono processi di Lévy indipendenti.

Dimostrazione. Per costruzione, Z ha media nulla e incrementi indipendenti, quindi è una martingala e un processo di Lévy. Per un dato insieme Λ definiamo

$$\begin{aligned} M_t^\Lambda &= \int_\Lambda x N_t(\cdot, dx) - t \int_\Lambda x F(dx) \\ &= \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I_\Lambda(\Delta X_s) - t \int_\Lambda x F(dx). \end{aligned}$$

Prendiamo $a = 1$ e sia $\Lambda_k = \{\frac{1}{k+1} < |x| < \frac{1}{k}\}$. Allora per il teorema precedente i M^{Λ_k} sono a due a due processi di Lévy indipendenti e martingale. Poniamo $M^n = \sum_{k=1}^n M^{\Lambda_k}$. Come nel Teorema precedente si dimostra che le martingale $Z - M^n$ e M^n sono indipendenti. Inoltre si ha che $\text{Var}(Z_t) = \text{Var}(Z_t - M_t^n) + \text{Var}(M_t^n)$ da cui si ha che $\text{Var}(M_t^n) \leq \text{Var}(Z_t) < \infty$ per tutti gli n . Deduciamo che M_t^n converge a una martingala Z_t^d in L^2 quando $n \rightarrow \infty$ e $Z_t - M_t^n$ converge a Z_t^c . Usando il fatto che $E[\sup_s |Z_s|] \leq 4E[Z_\infty^2] < \infty$, possiamo trovare una sottosuccessione che converge q.c., uniformemente in t sui compatti, che permette di concludere che Z^c ha traiettorie continue. L'indipendenza di Z^d e Z^c segue dall'indipendenza di M^n e $Z - M^n$. \square

Il teorema appena dimostrato può essere interpretato come una decomposizione per processi di Lévy con salti limitati: tali processi possono essere visti come somma di una martingala continua e una martingala in cui appare un processo di Poisson compensato. Non è difficile dimostare che $E[e^{iuZ_t^c}] = e^{-t\sigma^2 \frac{u^2}{2}}$, che implica che Z^c deve essere un moto Browniano.

1.6.1 Decomposizione di un processo di Lévy

Se consideriamo un processo di Lévy qualsiasi abbiamo che vale il seguente

Teorema 1.54. ⁶ *Sia X un processo di Lévy. Allora X ha la seguente decomposizione*

$$\begin{aligned} X_t &= B_t + \int_{\{|x| < 1\}} x(N_t(\cdot, dx) - tF(dx)) \\ &\quad + tE[X_1 - \int_{\{|x| \geq 1\}} xN_1(\cdot, dx)] + \int_{\{|x| \geq 1\}} xN_t(\cdot, dx) \\ &= B_t + \int_{\{|x| < 1\}} x(N_t(\cdot, dx) - tF(dx)) + \alpha t + \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| \geq 1\}} \end{aligned}$$

dove B è un moto Browniano. Per ogni insieme Λ , $0 \in \bar{\Lambda}$, $N_t^\Lambda = \int_\Lambda N_t(\cdot, dx)$ è un processo di Poisson indipendente da B ; N_t^Λ è indipendente da N_t^Γ se Λ e Γ sono disgiunti; N_t^Λ ha come parametro $F(\Lambda)$. Inoltre $F(dx)$ è una misura su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $\int x^2 \wedge 1 F(dx) < \infty$.

Dal teorema precedente ricaviamo la **formula di Lévy-Khintchine** per la trasformata di Fourier di un processo di Lévy.

⁶Per la dimostrazione si veda [7].

Teorema 1.55. *Sia X un processo di Lévy con misura di Lévy F , allora*

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = e^{-t\psi(u)},$$

dove

$$\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2}u^2 - i\alpha u + \int_{\{|x|\geq 1\}} (1 - e^{iux})F(dx) + \int_{\{|x|<1\}} (1 - e^{iux} + iux)F(dx).$$

Dati F , σ e α il processo di Lévy è unico.

1.7 Misure aleatorie

1.7.1 Compensatori e proiezioni prevedibili

Teorema 1.56. ⁷ *Sia X un processo $\mathcal{F} \otimes \mathcal{R}_+$ -misurabile a valore in $\overline{\mathbb{R}}$, allora esiste un processo a valori in $(-\infty, \infty]$, chiamato la **proiezione prevedibile** di X e indicato con pX , unicamente determinato a meno di insiemi trascurabili e che soddisfa le seguenti condizioni:*

- è prevedibile;
- $({}^pX)_T = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{T-}]$ su $\{T < \infty\}$ per tutti i tempi prevedibili T .

Corollario 1.57. *Se X è una martingala locale, allora ${}^pX = X_-$ e ${}^p(\Delta X) = 0$.*

Teorema 1.58. ⁸ *Sia $A \in \mathcal{A}_{loc}^+$. Esiste un processo prevedibile nella classe \mathcal{A}_{loc}^+ , chiamato il **compensatore prevedibile** di A e indicato con A^p , unicamente determinato a meno di insiemi trascurabili e che soddisfa le seguenti condizioni:*

- $A - A^p$ è una martingala locale;
- $\mathbb{E}[A_T^p] = \mathbb{E}[A_T]$ per tutti i tempi d'arresto T ;
- $\mathbb{E}[(H \cdot A^p)_\infty] = \mathbb{E}[(H \cdot A)_\infty]$ per tutti i processi H prevedibili, non negativi.

Proposizione 1.59. *Se $A \in \mathcal{A}_{loc}$, si ha che ${}^p(\Delta A) = \Delta(A^p)$*

Dimostrazione. Basta usare il fatto che $A - A^p$ è una martingala locale e il Corollario (1.57). □

1.7.2 Generalità sulle misure aleatorie

Prima di introdurre le misure aleatorie, dobbiamo ricordare la seguente definizione:

Definizione 1.60. *Un **nucleo di transizione** $\alpha(a, db)$ di uno spazio misurabile (A, \mathcal{A}) in un altro spazio misurabile (B, \mathcal{B}) è una famiglia di misure positive $(\alpha(a, \cdot) : a \in A)$ su (B, \mathcal{B}) , tali che $\alpha(\cdot, C)$ è \mathcal{A} -misurabile per ogni $C \in \mathcal{B}$*

⁷Per la dimostrazione si veda [7, pag. 23].

⁸Per la dimostrazione si veda [7, pag. 32].

Sia uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+})$ che soddisfi le ipotesi abituali e (E, \mathcal{E}) uno **spazio di Blackwell**. Non definiamo tali spazi in tutta la loro generalità, ma le sole due proprietà che useremo sono:

1. La σ -algebra \mathcal{E} è separabile, cioè generata da un'algebra numerabile.
2. Sono verificate queste due proprietà equivalenti
 - Sia (G, \mathcal{G}) uno spazio misurabile. Se m è una misura finita su $(G \times E, \mathcal{G} \otimes \mathcal{E})$, posto $\hat{m}(A) = m(A \times E)$, allora esiste un nucleo di transizione $\alpha(g, dx)$ da (G, \mathcal{G}) in (E, \mathcal{E}) tale che $m(B) = \int \hat{m}(dg) \int \alpha(g, dx) I_B(g, x)$ per tutti i $B \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{E}$, scriveremo anche $m(dg, dx) = \hat{m}(dg) \alpha(g, dx)$ (proprietà di disintegrazione).
 - Dato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e \mathcal{F}' una sotto- σ -algebra di \mathcal{F} qualsiasi, ogni variabile aleatoria Z su Ω a valori in (E, \mathcal{E}) ha una distribuzione condizionale regolare rispetto a \mathcal{F}' , si può cioè scrivere

$$\mathbb{E}[h(Z)|\mathcal{F}'](\omega) = \int_E h(z) \alpha(\omega, dz)$$

dove α è un nucleo di transizione da (Ω, \mathcal{F}') su E, \mathcal{E}

Definizione 1.61. Una **misura aleatoria** su $\mathbb{R} \times E$ è una famiglia $\mu = (\mu(\omega; dt, dx) : \omega \in \Omega)$ di misure non negative su $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E})$ che soddisfano $\mu(\omega; \{0\} \times E) = 0$.

Siano $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}$ e $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$. Una funzione W su $\tilde{\Omega}$ che è $\tilde{\mathcal{O}}$ -misurabile (risp. $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile) è chiamata **opzionale** (risp. **prevedibile**).

Sia μ una misura aleatoria e W una funzione opzionale su $\tilde{\Omega}$. Si ha che $(t, x) \rightarrow W(\omega, t, x)$ è $(\mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E})$ -misurabile per ogni $\omega \in \Omega$ e possiamo definire il processo integrale $W * \mu_t(\omega)$ (oppure $(W * \mu)_t(\omega)$) come

$$\begin{cases} \int_{[0,t] \times E} W(\omega, s, x) \mu(\omega; ds, dx) & \text{se } \int_{[0,t] \times E} |W(\omega, s, x)| \mu(\omega; ds, dx) \text{ è finito,} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Una misura aleatoria μ è chiamata **opzionale** (risp. **prevedibile**) se il processo $W * \mu$ è opzionale (risp. prevedibile) per ogni funzione W opzionale (risp. prevedibile).
- Una misura opzionale μ è chiamata **integrabile** se la variabile aleatoria $1 * \mu_\infty = \mu(\cdot, \mathbb{R}_+ \times E)$ è integrabile (o equivalentemente $1 * \mu \in \mathcal{A}^+$).
- Una misura aleatoria opzionale μ è **$\tilde{\mathcal{P}}$ - σ -finita** se esiste una funzione prevedibile V su $\tilde{\Omega}$ strettamente positiva tale che la variabile aleatoria $V * \mu_\infty$ è integrabile (o equivalentemente $V * \mu \in \mathcal{A}^+$); questa proprietà è equivalente all'esistenza di una partizione $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile A_n di $\tilde{\Omega}$ tale che ogni $(I_{A_n} * \mu)_\infty$ sia integrabile.

Teorema 1.62.⁹ Sia μ una misura aleatoria opzionale $\tilde{\mathcal{P}}$ - σ -finita. Allora esiste una misura aleatoria, chiamata il **compensatore prevedibile di μ** e che denotiamo con μ^p , che è unica a meno di insiemi \mathbb{P} -trascurabili e che è caratterizzata dall'essere una misura aleatoria prevedibile che soddisfa una delle due seguenti proprietà equivalenti:

⁹Per una dimostrazione completa si veda [7, pag. 66].

- a) $E[(W * \mu_\infty^p)] = E[(W * \mu_\infty)]$ per ogni funzione W su $\tilde{\Omega}$ non negativa e $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile Ω ;
- b) per ogni funzione W su $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile e $(|W| * \mu)$ localmente integrabile, allora $W * \mu^p$ è il compensatore prevedibile di $W * \mu$.

Inoltre esiste un processo crescente prevedibile $A \in \mathcal{A}^+$ e un nucleo di transizione $K(\omega, t; dx)$ da $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ su (E, \mathcal{E}) tali che

$$\mu^p(\omega; dt, dx) = dA_t(\omega)K(\omega, t; dx)$$

Dimostrazione. Mettiamoci in una situazione particolarmente semplice supponendo che $dPd\mu$ sia finita. Prendiamo W limitato: l'implicazione b) \Rightarrow a) è banale. Per provare a) \Rightarrow b) notiamo che se T è un tempo d'arresto, si ha che va l'uguaglianza

$$(WI_{[0,T]} * \mu)_t = (W * \mu)_{t \wedge T},$$

quindi

$$E[(W * \mu)_T] = E[(W * \mu^p)_T].$$

Allora il processo

$$N_t = (W * \mu)_t - (W * \mu^p)_t$$

è tale che $E[N_T] = 0$, quindi è una martingala per ogni tempo d'arresto T .

Per provare l'*unicità*, prendiamo un'algebra \mathcal{A} numerabile che genera \mathcal{E} e sia $G \in \mathcal{A}$. Siano ν' e ν'' due compensatori prevedibili: il processo crescente $\nu'(\omega; [0, t] \times G)$ è il compensatore prevedibile di $\mu(\omega; [0, t] \times G)$ e ne segue che $\nu'(\omega; [0, t] \times G)$ e $\nu''(\omega; [0, t] \times G)$ sono due processi indistinguibili. Si può allora determinare un insieme trascurabile Λ tale che se $\omega \notin \Lambda$

$$\nu'(\omega; [0, t] \times G) = \nu''(\omega; [0, t] \times G) \quad \forall t \geq 0, \quad G \in \mathcal{A}$$

quindi le due misure $\nu'(\omega; \cdot)$ e $\nu''(\omega; \cdot)$ sono indistinguibili.

Vediamo ora l'*esistenza* assumendo l'ipotesi semplificatrice che $E[(1 * \mu)_\infty] < \infty$. La funzione definita sulle W $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabili e limitate

$$W \rightarrow E[(W * \mu)_\infty]$$

è una forma lineare positiva che passa al limite sulle successioni monotone ed è pertanto associata ad una misura m finita su $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{P}})$ che per le Proprietà degli spazi di Blackwell, si può disintegrare nella forma $m(d\omega, dt, dx) = \hat{m}(d\omega, dt)K(\omega, t; dx)$, essendo \hat{m} una misura positiva definita su $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ in questo modo

$$\hat{m}(d\omega, dt) = dP(\omega)dA_t(\omega)$$

con $A_t \in \mathcal{A}^+$ e tale che

$$\hat{m}(B) = E[(I_B * \mu)_\infty] = m(B \times E).$$

Quindi concludiamo. □

1.7.3 Misure aleatorie a valori interi

Definizione 1.63. Una *misura aleatoria a valori interi* è una misura aleatoria che soddisfa

- $\mu(\omega; \{t\} \times E) \leq 1$;
- per ogni $A \in (\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{E})$, $\mu(\cdot, A)$ ha valori in $\overline{\mathbb{N}}$;
- μ è opzionale e $\tilde{\mathcal{P}}$ - σ -finita.

Definizione 1.64. Un insieme aleatorio A è *sottile* se è della forma $A = \cup [T_n]$, dove (T_n) è una successione di tempi d'arresto; se la successione (T_n) soddisfa $[T_n] \cap [T_m] = \emptyset$ per tutti gli $n \neq m$, la successione è *esaustiva* per A .

Teorema 1.65. Se μ è una misura aleatoria a valori interi, allora esiste un insieme sottile D e un processo opzionale β a valori in E , tale che

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{s \geq 0} I_D(\omega, s) \varepsilon_{(s, \beta_s(\omega))}(dt, dx), \quad (1.8)$$

dove ε_a è la misura di Dirac nel punto a . Per ogni funzione opzionale non negativa W , se (T_n) è una successione di tempi di arresto esaustiva per l'insieme sottile D , abbiamo che

$$W * \mu_t = \begin{cases} \sum_{(n)} W(T_n, \beta_{T_n}) I_{\{T_n \leq t\}} \\ \sum_{0 < s \leq t} W(s, \beta_s) I_D(s). \end{cases}$$

Dimostrazione. Se poniamo $D = \{(\omega, t) : \mu(\omega; \{t\} \times E) = 1\}$, la definizione di misura aleatoria a valori interi, implica che μ deve avere la forma (1.8), per qualche processo β a valori in E . Bisogna quindi solo dimostrare che D è un insieme sottile e che il processo β è opzionale.

Sfruttiamo il fatto che μ è $\tilde{\mathcal{P}}$ - σ -finita. Consideriamo quindi una funzione prevedibile V $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile, strettamente positiva e tale che $(V * \mu)_t(\omega) \in \mathcal{A}^+$. Sia allora

$$A_t(\omega) = (V * \mu)_t(\omega) = \iint_{[0, t] \times E} V(\omega; s, x) \mu(\omega; ds, dx)$$

da cui si ha

$$\Delta A_t(\omega) = \int_E V(\omega; t, x) \mu(\omega; \{t\}, dx),$$

e $(\omega, s) \in D$ se e solo se $\Delta A_s(\omega) \neq 0$. Ricordando che l'insieme $\{\Delta A \neq 0\}$, con A càdlàg e adattato, è sottile, abbiamo che $D = \cup [T_n]$, con (T_n) successione di tempi d'arresto. Possiamo scegliere una successione (T_n) che sia esaustiva per D . Per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathcal{E}$, la variabile $I_C(\beta_{T_n}) I_{\{T_n \leq t\}} = I_{[T_n] \times C} * \mu_t$ deve essere \mathcal{F}_t -misurabile, poichè μ è opzionale. Deduciamo che β_{T_n} è \mathcal{F}_t -misurabile e quindi potremmo scegliere β come un arbitrario punto fissato a , che non appartiene a D , per ottenere un processo β opzionale. \square

Notiamo che vale anche il viceversa, cioè se una misura μ è definita come in (1.8), con D un insieme sottile e β un processo opzionale a valori in E , allora μ è un misura aleatoria a valori interi. Un caso *tipico* è la misura dei salti di un processo adattato X càdlàg.

Proposizione 1.66. *Sia X un processo adattato càdlàg a valori in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora*

$$\mu^X(\omega; dt, dx) = \sum_s I_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}(dt, dx)$$

definisce una misura aleatoria a valori interi su $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nella rappresentazione del Teorema precedente abbiamo $D = \{\Delta X \neq 0\}$ e $\beta = \Delta X$.

Dimostrazione. Per il risultato del teorema precedente, l'unica cosa che rimane da dimostrare è che μ^X è $\tilde{\mathcal{P}}$ - σ -finita. Definiamo il tempo d'arresto $S(n, p)$ ponendo $S(n, 0) = 0$ e

$$S(n, p+1) = \inf(t > S(n, p) : |X_t - X_{S(n, p)}| > 2^{-n-1}),$$

e poniamo

$$\begin{aligned} A(n, p) &= [0, S(n, p)] \times \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| > 2^{-n}\} \\ A(0, 0) &= \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \{0\} \end{aligned}$$

e poniamo

$$V = I_{A(0,0)} + \sum_{n,p \in \mathbb{N}^*} I_{A(n,p)} 2^{-n-p}.$$

Si ha che $I_{A(0)} * \mu_\infty^X = 0$ e poichè in $[0, S(n, p)]$ ci sono al più p salti di ampiezza superiore a 2^{-n} si ottiene $I_{A(n,p)} * \mu_\infty^X \leq p$ da cui $\mathbb{E}[(I_{A(n,p)} * \mu^X)_\infty] < \infty$. Per costruzione V è $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile e strettamente positiva, poichè $S(n, p) \uparrow \infty$ come $p \uparrow \infty$. Quindi $V * \mu_\infty^X \leq \sum_{n,p \in \mathbb{N}^*} p 2^{-n-p}$ e quindi il risultato. \square

1.7.4 Misura di Poisson

Definizione 1.67. *Una misura di Poisson estesa su $\mathbb{R}_+ \times E$, relativa alla filtrazione usuale, è un misura aleatoria a valori interi μ tale che*

- la misura positiva m su $\mathbb{R}_+ \times E$ definita da $m(A) = \mathbb{E}[\mu(A)]$ è σ -finita;
- per ogni $s \in \mathbb{R}_+$ e ogni $A \in \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E}$ tale che $A \subset (s, \infty) \times E$ e che $m(A) < \infty$, la variabile $\mu(\cdot, A)$ è indipendente dalla σ -algebra \mathcal{F}_s

La misura m è chiamata la **misura dell'intensità** di μ . Inoltre se m soddisfa $m(\{t\} \times E) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}_+$, allora μ è chiamata **misura di Poisson**; se m ha la forma $m(dt, dx) = dt \times F(dx)$, allora F è una misura positiva σ -finita su (E, \mathcal{E}) , allora μ è chiamata una **misura di Poisson omogenea**.

Proposizione 1.68. *Sia μ una misura di Poisson estesa su $\mathbb{R}_+ \times E$, relativa alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, con misura dell'intensità m . Allora il suo compensatore è $\mu^p(\omega, \cdot) = m(\cdot)$.*

Dimostrazione. Definiamo $\mu^p(\omega, \cdot) = m(\cdot)$, che è una misura “aleatoria” prevedibile, poichè deterministica. Consideriamo che W è $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile su Ω possiamo quindi ridurci a dimostrare per $W = I_A I_{B \times (s,t] \times C}$, dove $0 \leq s < t$, $B \in \mathcal{F}_s$, $C \in \mathcal{E}$ e $A \in \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E}$ soddisfa $m(A) < \infty$. Per ipotesi, le variabili I_B e $\mu(\cdot, A \cap ((s, t] \times C))$ sono indipendenti e integrabili, quindi

$$\mathbb{E}[W * \mu_\infty] = W(I_B \mu(A \cap ((s, t] \times C))) = P(B)m(A \cap ((s, t] \times C)) = \mathbb{E}[W * \mu_\infty^p]$$

che conclude la dimostrazione. \square

La misura $N_t(\omega, dx)$ associata ad un processo di Lévy X , definita in precedenza, coincide con la misura di Poisson μ^X la cui intensità è $m(dt, dx) = dt \times F(dx)$.

1.7.5 L'integrazione stocastica rispetto ad una misura aleatoria

Sia μ una misura aleatoria a valori interi e sia ν il suo compensatore prevedibile. Se $|W| * \mu$ è (localmente) integrabile, è ovvio definire $W * (\mu - \nu) = W * \mu - W * \nu$, che una (locale) martingala a variazione localmente integrabile. Si può definire un integrale che non implica l'esistenza di $W * \mu$ e $W * \nu$.

Sia μ una misura opzionale $\tilde{\mathcal{P}}$ - σ -finita e sia W una funzione prevedibile non negativa su $\tilde{\Omega}$. Si ha quindi che il processo $A = (WI_{[T]}) * \mu$ è prevedibile, poichè $[T] \in \mathcal{P}$ se T è prevedibile. Ricordiamo che se $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$, ${}^p(\Delta A) = \Delta(A^p)$. Si ha inoltre che $A^p = (WI_{[T]}) * \mu^p$ quindi dal teorema sulla proiezione prevedibile, per ogni tempo prevedibile T

$$\int_E \mu^p(\{T\} \times dx) W(T, x) = \mathbb{E} \left[\int_E \mu(\{T\} \times dx) W(T, x) \middle| \mathcal{F}_{T-} \right] \quad (1.9)$$

dove con $W(T, x)$ indichiamo $W(\omega, T(\omega), x)$.

Lemma 1.69. *Se T è un tempo d'arresto prevedibile e W è una funzione prevedibile $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile e positiva, vale la formula*

$$\int_E W(\omega, \{T\}, x) \nu(\omega, \{T\} \times dx) = \mathbb{E}[W(T, \beta_T) I_D(T) | \mathcal{F}_{T-}] \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Notiamo che

$$(W(T, \beta_T) I_D(T)) I_{\{T \leq t\}}$$

coincide con

$$((WI_{[T]}) * \mu)_t$$

il cui compensatore prevedibile è $((WI_{[T]}) * \mu^p)_t$. Posto $\nu = \mu^p$ si ha che il compensatore prevedibile è della forma

$$((WI_{[T]}) * \nu)_t = \left(\int_E W(\omega, T, x) \nu(\omega, \{T\} \times x) \right) I_{\{T \leq t\}}$$

dalla (1.9) otteniamo la (1.10). \square

Ne segue che:

- μ è concentrata su tempi d'arresto totalmente inaccessibili se e solo se $\nu(\omega, \{T\} \times E) \equiv 0$

Per ogni funzione misurabile W su Ω definiamo il processo

$$\hat{W}_t(\omega) = \begin{cases} \int_E W(\omega, t, x) \nu(\omega; \{t\} \times dx) & \text{se } \int_E |W(\omega, t, x)| \nu(\omega; \{t\} \times dx) < \infty, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lemma 1.70. *Se W è $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile, allora \hat{W} è prevedibile ed è una versione della proiezione prevedibile del processo $(\omega, t) \rightarrow W(\omega, t, \beta_t(\omega))I_D(\omega, t)$. In particolare, per tutti i tempi d'arresto prevedibili T si ha*

$$\hat{W}_t = \mathbb{E}[W(T, \beta_T)I_D(T) | \mathcal{F}_{T-}] \quad \text{su } \{T < \infty\}.$$

Dimostrazione. Possiamo considerare la variabile aleatoria W decomposta in $W = W^+ - W^-$ e quindi considerare senza ledere la generalità, $W \geq 0$ e prendiamo $D = \bigcup [T_n]$, con i T_n prevedibili. Allora $\hat{W}_{T_n} = Y_{T_n}^n$ dove $Y^n = (I_{[T_n]}W) * \nu$ è prevedibile. Quindi \hat{W}_{T_n} è \mathcal{F}_{T_n-} -misurabile e $\hat{W} = \sum_n \hat{W}_{T_n} I_{[T_n]}$ è prevedibile, in quanto $I_{[T_n]}$ è prevedibile. Il secondo risultato si ha dalla (1.10). \square

Nelle considerazioni che seguono, assumiamo l'esistenza dell'integrale stocastico per martingale localmente di quadrato integrabile e per martingale di variazione localmente integrabile, definiti come in [7, cap. I].

Definizione 1.71. *Date due semimartingale X e Y , definiamo il processo, chiamato covarianza quadratica di X e Y*

$$[X, Y] = XY - X_0Y_0 - X_- \cdot Y - Y_- \cdot X.$$

Supponiamo che μ sia concentrata su tempi d'arresto totalmente inaccessibili, allora $W * (\mu - \nu)$ è una martingala somma compensata di salti totalmente inaccessibili e si ha, posto $W * (\mu - \nu)_t$ che

$$\begin{aligned} [M]_t &= (W^2 * \mu)_t \\ \langle M \rangle_t &= (W^2 * \nu)_t \end{aligned}$$

L'integrale si può allora estendere come martingala di quadrato integrabile (localmente) se $W^2 * \mu$, o equivalentemente, $W^2 * \nu$ è (localmente) integrabile. Più in generale se $(W^2 \wedge |W|) * \nu$ è localmente integrabile, si può definire

$$W * (\mu - \nu) = (W I_{\{|W| \leq 1\}}) * (\mu - \nu) + (W I_{\{|W| > 1\}}) * (\mu - \nu)$$

dove il primo termine è una martingala localmente di quadrato integrabile e il secondo una martingala a variazione localmente integrabile.

Supponiamo ora che $D = \bigcup_n [T_n]$, dove i T_n sono prevedibili o totalmente inaccessibili. Sia W $\tilde{\mathcal{P}}$ -misurabile tale che $\mathbb{E}[|W| * \mu] < \infty$ e $\mathbb{E}[|W|^2 * \mu] < \infty$ e consideriamo $M_t = (W * (\mu - \nu))_t$. Il processo

$$\hat{W}_t = \int_E W(\omega, \{t\}, x) I_D(t) \nu(\omega, \{t\} \times dx)$$

è nullo fuori di D , si ha che $\hat{W}_{T_n} = 0$ se T_n è totalmente inaccessibile e se T_n è prevedibile si ha

$$\hat{W}_{T_n} I_{\{T_n < \infty\}} = E[W(T, \beta_T) I_{\{T_n < \infty\}} | \mathcal{F}_{T^-}].$$

In ogni caso si ha $\Delta M_{T_n} = (W - \hat{W})_{T_n}$ e quindi

$$\begin{aligned} [M]_t &= (W - \hat{W})^2 * \mu_t \\ \langle M \rangle_t &= (W - \hat{W})^2 * \nu_t \end{aligned}$$

e allora si può estendere l'integrale stocastico se $(W - \hat{W})^2 * \nu$ è localmente integrabile.

Capitolo 2

Preliminari di Finanza Matematica

Sia dato su uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty})$ un numero finito di processi stocastici S_0, \dots, S_k . Il nostro mercato finanziario sarà formato da $k + 1$ *attivi finanziari*, dove con $S_i(t)$ indichiamo il prezzo di un'unità di attivo i al tempo t . Gli attivi trattati saranno azioni (*stocks*), bonds, opzioni o altri derivati.

Definizione 2.1. *Ogni attivo nel modello, il cui prezzo è strettamente positivo, può essere preso come numerario. Tutti gli altri attivi saranno espressi in unità di questo numerario.*

Prendiamo come numerario S_0 e assumiamo quindi che $S_0(t) > 0$ P-q.c. per ogni $t > 0$ e che $S_0 = 1$. Per convenienza si sceglie in molti casi, ma non in tutti, l'attivo *privo di rischio*, con la seguente P -dinamica

$$\begin{cases} dS_0(t) &= r(t)S_0(t)dt \\ S_0(0) &= 1 \end{cases}$$

dove r è un processo stocastico adattato.

Definizione 2.2. - *Un portafoglio è un vettore di processi prevedibili e limitati*

$$\theta(t) = [\theta^0(t), \dots, \theta^k(t)]$$

- *Il valore del portafoglio θ al tempo t è definito come*

$$V_\theta(t) = \sum_{i=0}^k \theta^i(t) S_i(t)$$

- *Un portafoglio θ è autofinanziato se vale la seguente*

$$dV_\theta(t) = \sum_{i=0}^k \theta^i(t) dS_i(t)$$

Si ha quindi che $\theta^i(t)$ è il numero di attivi del tipo i nel nostro portafoglio al tempo t . La condizione di autofinanziamento è una formalizzazione dell'idea intuitiva che non viene aggiunta né tolta alcuna quantità di denaro dal nostro portafoglio e che la nostra strategia è finanziata solo dagli attivi già presenti nel nostro portafoglio. Tutti i valori sono dati in termini del numerario.

Definizione 2.3. - Il vettore $Z(t) = [Z_0(t), \dots, Z_k(t)]$ dei processi dei prezzi è attualizzato(scontato) se

$$Z(t) = \frac{S(t)}{S_0(t)}.$$

- Il valore del portafoglio θ attualizzato(scontato) è definito come

$$\tilde{V}_\theta(t) = \frac{V_\theta(t)}{S_0(t)}$$

Come è naturale aspettarsi, la condizione di autofinanziamento non dipende dalla scelta del numerario. Dalla formula di Itô si ha che

Lemma 2.4. Un portafoglio è autofinanziato se e solo se vale la seguente relazione

$$d\tilde{V}_\theta(t) = \sum_1^k \theta^i(t) dZ_i(t)$$

Dimostrazione. Basta applicare la formula di Itô e ricordare la definizione di autofinanziamento

$$dV_\theta(t) = \theta^0(t) dS_0(t) + \sum_1^k \theta^i(t) dS_i(t)$$

e si ha

$$\begin{aligned} d\left(\frac{V_\theta(t)}{S_0(t)}\right) &= \frac{dV_\theta(t)}{S_0(t)} - \frac{V_\theta(t) dS_0(t)}{S_0^2(t)} \\ &= \frac{\theta^0(t) dS_0(t) + \sum_1^k \theta^i(t) dS_i(t)}{S_0(t)} - \frac{(\theta^0(t) S_0(t) + \sum_1^k \theta^i(t) S_i(t)) dS_0(t)}{S_0^2(t)} \\ &= \sum_1^k \theta^i(t) \left(\frac{dS_i(t)}{S_0(t)} - \frac{S_i(t) dS_0(t)}{S_0^2(t)} \right) \\ &= \sum_1^k \theta^i(t) d\left(\frac{S_i(t)}{S_0(t)}\right) \\ &= \sum_1^k \theta^i(t) dZ_i(t) \end{aligned}$$

Il viceversa è analogo. □

2.1 Derivati

Alla base dello studio della teoria dell'arbitraggio, ci sono i derivati finanziari, che sono attivi definiti in termini degli attivi sottostanti S_0, \dots, S_k . Esempi tipici sono le opzioni. La formalizzazione matematica di un derivato è la seguente:

Definizione 2.5. *Un T-contratto è una variabile aleatoria $X \in L^0(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ (quindi una arbitraria variabile aleatoria \mathcal{F}_T -misurabile).*

Usiamo la notazione $L^0_+(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ per indicare l'insieme degli elementi non negativi di $L^0(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ e con $L^0_{++}(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ l'insieme degli elementi di $L^0_+(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ con $\mathbb{P}(X > 0) > 0$.

L'interpretazione di questa definizione è che il possessore di questo contratto riceve al tempo T una quantità di denaro X . Spesso faremo uso di variabili aleatorie X integrabili.

Vediamo ora un esempio classico, una *opzione call europea* su S con prezzo strike K e scadenza al tempo T . Questo T-contratto è definito da

$$X = (S(T) - K)^+$$

che dà il diritto, ma non l'obbligo, a chi lo possiede, di comprare l'attivo S , al tempo T al prezzo K .

I due principali problemi sono

- Qual'è un prezzo *ragionevole* per il contratto X ? (pricing)
- Ammettiamo che abbiamo venduto il contratto X e abbiamo promesso di pagare X al tempo T . Come ci cauteliamo dal rischio finanziario? (hedging)

2.2 Arbitraggio

Iniziamo a studiare il problema partendo da un particolare portafoglio autofinanziato

Definizione 2.6. *Un portafoglio di arbitraggio è un portafoglio autofinanziato θ tale che il corrispondente valore di portafoglio ha le seguenti proprietà*

- $V_\theta(0) = 0$
- $V_\theta(T) \in L^0_{++}(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

*Se per ogni $T \in \mathbb{R}_+$ non esistono portafogli di arbitraggio, allora il modello è **privo di opportunità di arbitraggio**.*

Assumiamo che non ci siano opportunità di arbitraggio nel nostro mercato. In un mercato in cui esistono opportunità di arbitraggio, per la definizione sopra, si guadagna senza alcun investimento iniziale. Nei mercati reali è possibile che ci siano opportunità di arbitraggio veramente sfruttate, ma i mercati si muovono in modo da eliminare rapidamente tali opportunità di arbitraggio. Non è quindi restrittivo supporre che nel nostro modello non siano presenti opportunità di arbitraggio.

Vogliamo quindi scoprire quando un modello è privo di opportunità di arbitraggio. Definiamo una particolare misura di probabilità:

Definizione 2.7. Diciamo che una misura di probabilità è una **misura martingala** se

$$- Q \sim P$$

- Il processo dei prezzi attualizzato Z è una Q -martingala locale.

L'insieme delle misure martingala è denotato con \mathcal{P} . Se il processo dei prezzi attualizzato Z è una Q -martingala, diciamo che Q è una **misura martingala forte**.

Definizione 2.8. Consideriamo una data misura martingala Q e un portafoglio autofinanziato θ . θ è chiamato Q -ammissibile se $\tilde{V}_\theta(t)$ è una Q -martingala.

Per definizione, Z è una Q -martingala e quindi il processo \tilde{V} è l'integrale stocastico di θ rispetto a Z : ogni portafoglio autofinanziato sufficientemente intergrabile è ammissibile.

Proposizione 2.9. Assumiamo che esista una misura martingala Q . Allora il modello è privo di opportunità di arbitraggio nel senso che non esiste nessun portafoglio di arbitraggio Q -ammissibile.

Dimostrazione. Assumiamo che θ sia un portafoglio di arbitraggio con $V(T) \in L_{++}^0(\mathcal{F}_T, P)$. Abbiamo quindi che $\tilde{V}(T) \in L_{++}^0(\mathcal{F}_T, Q)$ e di conseguenza

$$V(0) = \tilde{V}(0) = E^Q[\tilde{V}(T)] > 0$$

che contraddice la condizione di arbitraggio $V(0) = 0$. □

Abbiamo visto che l'esistenza di una misura martingala implica l'assenza di arbitraggio, viene quindi da domandarsi se vale anche l'inverso. Per modelli discreti, quando Ω è uno spazio finito, Harrison e Pliska, attraverso un teorema di separazione di insiemi convessi, hanno dimostrato che l'inverso vale.

Per Ω infinito, il problema è più complicato. Un'analisi approfondita di questo problema è stata sviluppata da Delbaen-Schachermayer e la nozione di non arbitraggio è stata sostituita da quella di *no free lunch with vanishing risk*. Considerando l'approccio di Delbaen-Schachermayer, possiamo quindi affermare, anche se solo in maniera informale, che l'assenza di arbitraggio è equivalente all'esistenza di una misura martingala equivalente.

2.3 Hedging

Assumiamo che il nostro modello sia privo di opportunità di arbitraggio, o equivalentemente che esista una misura martingala equivalente. Vogliamo replicare un contratto con un portafoglio di attivi S_0, \dots, S_k .

Definizione 2.10. Un T -contratto X è **replicabile** se esiste un portafoglio autofinanziato θ tale che il corrispondente valore del portafoglio ha la proprietà che

$$V_\theta(T) = X, \quad P\text{-q.c.}$$

Un mercato è detto **completo** se ogni contratto è replicabile

In realtà non si avrà quasi mai a che fare con un mercato completo. Tipicamente si dimostra che in un dato mercato un numero ragionevolmente grande di contratti può essere replicato.

Il portafoglio θ sarà quindi chiamato **portafoglio replicante** e da un punto di vista finanziario, il contratto X e il portafoglio replicante, sono indistinguibili. Il problema sarà ora stabilire quali contratti possono essere replicati.

Proposizione 2.11. *Sia fissata una misura martingala e assumiamo che il contratto attualizzato $\frac{X}{S_0(T)}$, sia integrabile. Se la Q -martingala M , definita da*

$$M(t) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (2.1)$$

ammette una rappresentazione della forma

$$M(t) = x + \sum_{i=1}^k \int_0^t \theta^i(s) dZ_i(s), \quad (2.2)$$

dove $\theta^1, \dots, \theta^k$ sono localmente limitati e prevedibili, allora X è replicabile.

Dimostrazione. Consideriamo i processi attualizzati e usando il Lemma (2.4), cerchiamo un processo $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^k)$ tale che

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\theta(T) &= \frac{X}{S_0(T)}, \quad P\text{-q.c.} \\ d\tilde{V}_\theta(t) &= \sum_{i=1}^k \theta^i(t) dZ_i(t) \end{aligned}$$

dove il valore attualizzato del portafoglio è dato da

$$\tilde{V}_\theta(t) = \theta^0(t) \cdot 1 + \sum_{i=1}^k \theta^i(t) Z_i(t). \quad (2.3)$$

Dobbiamo dimostrare che $M = \tilde{V}$, dove M è definito in (2.1). Definiamo quindi $(\theta^1, \dots, \theta^k)$ dalla (2.2) e θ^0 è

$$\theta^0 = M(t) - \sum_{i=1}^k \theta^i(t) Z_i(t).$$

Dalla (2.3), abbiamo che $M = \tilde{V}$ e da (2.2) si ha che valgono le uguaglianze

$$d\tilde{V} = dM = \sum_{i=1}^k \theta^i(t) dZ_i(t)$$

che dimostra che il portafoglio è autofinanziato. Abbiamo quindi le uguaglianze

$$\tilde{V}_\theta(T) = M(T) = \mathbb{E}^Q \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_T \right] = \frac{X}{S_0(T)},$$

che dimostrano che X è replicato da θ . □

Il processo dei prezzi attualizzato è una martingala quindi, modulo alcune considerazioni sull'integrabilità, la completezza è equivalente all'esistenza di una rappresentazione per martingale.

Abbiamo inoltre anche un altro risultato, dovuto a Harrison-Pliska

Teorema 2.12. *Se la misura martingala è unica, allora il mercato è completo, nel senso che ogni contratto X tale che*

$$\frac{X}{S_0(T)} \in L^1(\mathbb{Q}, \mathcal{F}_T)$$

è replicabile.

Dai precedenti risultati si ha che un modello è privo di opportunità di arbitraggio se esiste una misura martingala equivalente ed è completo se tale misura è unica.

2.4 Pricing

Passiamo ora alla ricerca di un prezzo ragionevole $\Pi(t, X)$ per un fissato T -contratto X . Assumiamo che $\mathcal{P} \neq \emptyset$, esiste quindi una misura martingala equivalente. Sono possibili due diversi approcci

- Il prezzo del derivato deve essere cercato in modo che sia *consistente* con i prezzi degli attivi sottostanti. Più precisamente cerchiamo un prezzo $\Pi(t, X)$ in modo tale che il mercato esteso $\Pi(t, X), S_0, S_1, \dots, S_k$ sia privo di opportunità di arbitraggio.
- Se il contratto è replicabile, con portafoglio replicante θ , allora il solo prezzo ragionevole è dato da $\Pi(t, X) = V_\theta(t)$.

Il primo approccio prevede l'esistenza di una misura martingala forte \mathbb{Q} per il mercato esteso $\Pi(t, X), S_0, S_1, \dots, S_k$. Applicando la definizione di misura martingala forte, otteniamo che

$$\frac{\Pi(t, X)}{S_0(t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Pi(T, X)}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

da cui si ricava la formula del prezzo

$$\Pi(t, X) = S_0(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (2.4)$$

dove \mathbb{Q} è la misura martingala del mercato S_0, S_1, \dots, S_k . Notiamo che una diversa scelta di \mathbb{Q} da un processo dei prezzi differente.

Nel secondo approccio assumiamo che X possa essere replicato, il prezzo deve essere dato dalla formula

$$\Pi(t, X) = V_\theta(t). \quad (2.5)$$

Vogliamo vedere che cosa accade quando X può essere replicato con due diversi portafogli e come la formula sopra è collegata alla (2.4).

Definendo $\Pi(t, X)$ con la (2.5) vediamo che

$$\frac{\Pi(t, X)}{S_0(t)} = \tilde{V}(t)$$

e assumendo sufficienti ipotesi di integrabilità, \tilde{V} è una Q -martingala, quindi anche $\frac{\Pi(t, X)}{S_0(t)}$ è una Q -martingala. Otteniamo quindi la (2.4) anche in questo caso e per contratti replicabili, abbiamo in particolare che vale

$$V_\theta(t) = S_0(t)E^Q\left[\frac{X}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

per ogni portafoglio replicante θ e ogni misura martingala Q . Riassumendo abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 2.13. - *Se assumiamo l'esistenza di una misura martingala forte per il mercato $\Pi(t, X), S_0, S_1, \dots, S_k$, allora il prezzo di X è dato dalla formula*

$$\Pi(t, X) = S_0(t)E^Q\left[\frac{X}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

dove Q è una misura martingala forte per S_0, S_1, \dots, S_k .

- *Differenti scelte di Q in generale daranno differenti processi dei prezzi, ma se X è replicabile, qualsiasi scelta per Q produrrà lo stesso processo dei prezzi.*
- *Per contratti replicabili il processo dei prezzi è definito dalla formula*

$$\Pi(t, X) = V_\theta(t),$$

dove θ è il portafoglio replicante. *Differenti scelte di portafogli replicanti, produrranno lo stesso processo dei prezzi.*

In un mercato completo il prezzo di un derivato sarà unicamente determinato dalla richiesta di assenza di arbitraggio. In particolare il prezzo non dipende dalle scelte fatte dagli agenti di mercato.

In un mercato incompleto la richiesta di non arbitraggio non è sufficiente a determinare un prezzo unico per i derivati. Si hanno molte misure martingala possibili e tutte possono essere usate trovare un prezzo per i derivati in modo consistente con il mercato. Quale scegliere? La misura martingala in questo caso è scelta dal mercato stesso.

Il prezzo di un derivato è determinato da due fattori:

1. Richiediamo che i prezzi dei derivati siano tali da non introdurre opportunità di arbitraggio nel mercato. Questa richiesta porta alla formula (2.4), dove è usata la stessa Q per tutti i derivati.
2. In un mercato incompleto il prezzo è determinato dalla domanda e dall'offerta sul mercato. Molteplici fattori regolano il mercato e portano alla scelta di una misura martingala.

2.5 Completezza e Assenza di Arbitraggio

Un modello è privo di opportunità di arbitraggio se esiste una misura martingala ed è completo se tale misura è unica. Assumiamo che i processi dei prezzi degli attivi siano guidati da R fonti aleatorie. Fonti aleatorie possono essere ad esempio R processi di Wiener indipendenti, processi di conteggio come i processi di Poisson, oppure i salti della traiettoria di un processo.

La completezza e l'assenza di arbitraggio, lavorano in direzioni opposte, nel senso che se aggiungiamo al modello un nuovo attivo, senza modificare R , avremo una potenziale opportunità di arbitraggio, quindi per avere un mercato privo di opportunità di arbitraggio, il numero K degli attivi, escluso l'attivo scelto come numerario, deve essere più piccolo rispetto al numero di fonti aleatorie R .

Viceversa, ogni nuovo attivo aggiunto al modello dà maggiori possibilità di replicare un dato contratto, per cui la completezza richiede che il numero di attivi K sia più grande rispetto al numero di fonti aleatorie R .

Si ha quindi un teorema, di cui non diamo una precisa formulazione e dimostrazione, ma che è molto utile. Nei casi concreti, esistono precise formulazioni e dimostrazioni del seguente risultato che chiameremo *Meta-Teorema*.

Meta-Teorema. *Sia K il numero di attivi nel modello, escluso l'attivo scelto come numerario, e sia R il numero di fonti aleatorie. Abbiamo le seguenti relazioni:*

1. *Il modello è privo di opportunità di arbitraggio se e solo se $K \leq R$.*
2. *Il modello è completo se e solo se $K \geq R$.*
3. *Il modello è completo e privo di opportunità di arbitraggio se e solo se $K = R$.*

Prendiamo ad esempio il modello di Black-Scholes, con un solo attivo S e con l'attivo privo di rischio, quindi $K = 1$. L'unica fonte aleatoria è il processo di Wiener nella dinamica del processo S , per cui $R = 1$. Abbiamo allora che questo modello, è completo e privo di opportunità di arbitraggio.

Capitolo 3

Modelli per i tassi d'interesse

Definizione 3.1. *Uno zero coupon bond con data di maturità T , chiamato anche T -bond, è un contratto che garantisce, a chi lo possiede, di ricevere la somma 1 (ad esempio 1Euro) al tempo T . Il prezzo al tempo t di un T -bond è $P(t, T)$.*

Assumiamo che

- esista $T^* > 0$ tale che $\forall T$, con $T \in [0, T^*]$, sul mercato sia trattato uno zero coupon bond con data di maturità T .
- per ogni T fissato, il processo $P(t, T)$, con $0 \leq t \leq T$, sia un processo opzionale con $P(t, t) = 1, \forall t$.
- per ogni t fissato, $P(t, T)$ sia differenziabile con continuità P -q.c. nella variabile T .

Per ogni $t \in [0, T^*]$, introduciamo il **forward rate** $f(t, T)$ con maturità T , al tempo t e lo **short rate** $r(t)$ come le variabili aleatorie \mathcal{F}_t -misurabili

$$f(t, T) := -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T), \quad \text{e} \quad r(t) := f(t, t). \quad (3.1)$$

Assumiamo che i processi definiti seguano le seguenti dinamiche

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t), \quad (3.2)$$

$$dP(t, T) = P(t, T)m(t, T)dt + P(t, T)v(t, T)dW(t), \quad (3.3)$$

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \quad (3.4)$$

dove W è un vettore di Wiener d -dimensionale.

Enunciamo il seguente risultato:

Proposizione 3.2. ¹ *Se $f(t, T)$ soddisfa la (3.4) allora $P(t, T)$ soddisfa*

$$dP(t, T) = P(t, T) \left\{ r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2 \right\} dt + P(t, T) S(t, T) dW(t)$$

dove

$$\begin{cases} A(t, T) &= -\int_t^T \alpha(t, s) ds, \\ S(t, T) &= -\int_t^T \sigma(t, s) ds. \end{cases} \quad (3.5)$$

¹Per la dimostrazione si veda [3, pag. 70].

Definiamo quindi il processo, chiamato **fattore di accumulazione** o **attivo privo di rischio** (*risk free asset*),

$$B(t) := \exp \int_0^t r(s) ds, \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt, \\ B(0) = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Il processo $B(t)$ è un'idealizzazione di un portafoglio che consiste nell'investire costantemente in titoli che stanno per scadere.

Definizione 3.3. *Un modello matematico che determina, almeno teoricamente, il processo stocastico*

$$P(t, T), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \forall T \in [0, T^*]$$

*viene chiamato **modello struttura a termine dei tassi d'interesse** (term structure model).*

Teorema fondamentale dell'Asset Pricing. *Un modello struttura a termine dei tassi d'interesse sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è privo di arbitraggi se e solo se esiste una misura di probabilità $\tilde{\mathbb{P}}$ su Ω equivalente a \mathbb{P} , tale che per ogni $T \in (0, T^*]$ il processo*

$$\frac{P(t, T)}{B(t)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

*è una $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala. Tale misura è chiamata **misura martingala neutrale verso il rischio**.*

Proposizione 3.4. *Consideriamo un T -contratto X e assumiamo che \mathbb{Q} sia una misura neutrale verso il rischio. Allora il processo dei prezzi $\Pi(t, X)$ è dato da*

$$\Pi(t, X) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[X \exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.8)$$

In particolare il prezzo per un T -bond è dato da

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (3.9)$$

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione (2.13) con $B = S_0$ □

3.1 Modelli basati sullo *Short Rate*

Partiamo con una breve analisi di una sottoclasse limitata della più ampia famiglia del mercato dei bond. Consideriamo come unica variabile del mercato lo short rate $r(t)$. Si può immediatamente obiettare che non è realistico considerare un modello del complesso mercato dei bond con una unica variabile esplicativa. Analiziamo più da vicino questo modello, in primo luogo, perché è il più antico e dà un'idea di come poi si sia sviluppata la teoria sullo studio dei tassi d'interesse, in secondo luogo, perché gode di buone proprietà matematiche.

Consideriamo la dinamica dello short rate rispetto ad una probabilità oggettiva P

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\tilde{W}(t)$$

dove \tilde{W} è un processo di Wiener rispetto a P . Consideriamo il modello rispetto ad una probabilità oggettiva P e assumiamo che esista il processo B come nella (3.6) e sia il solo processo dato sul mercato.

E' naturale chiedersi se i prezzi dei bond sono unicamente determinati dalla dinamica di r rispetto a P , più la richiesta di assenza di arbitraggio. La risposta è no, in quanto il mercato non è completo, questa mancanza di completezza è data dal fatto che la misura martingala non è unica. Infatti se consideriamo il processo dei prezzi attualizzato, abbiamo che

$$Z_0(t) = \frac{B(t)}{B(t)} \equiv 1,$$

da cui segue che ogni misura $Q \sim P$ è una misura martingala equivalente e più precisamente ogni $Q \sim P$ genera un mercato privo di opportunità di arbitraggio in cui i prezzi dei bond sono dati dalla (3.9). Consideriamo il Meta-Teorema in questo caso: $K = 0$ e $R = 1$, il modello è privo di opportunità di arbitraggio, ma incompleto. A differenza del modello di Black-Scholes in cui S era il prezzo di un attivo, lo short rate r non è il prezzo di un attivo. Come possiamo risolvere il problema? Consideriamo j bonds di riferimento, corrispondenti a j maturità differenti, in modo che il mercato generato sia privo di opportunità di arbitraggio e consideriamo i prezzi di tutti gli altri bonds rispetto a questi j bond di riferimento.

Il punto di partenza di questo approccio è quindi la dinamica dello short rate rispetto a una fissata probabilità martingala Q . Assumiamo quindi che sia Q una misura martingala fissata e che lo short rate abbia la seguente Q -dinamica

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

dove W è un processo di Wiener rispetto a Q . Per definizione lo short rate è un processo di Markov, il che implica che il problema del pricing e dell'hedging può essere risolto attraverso PDE (equazioni differenziali parziali). Si possono quindi ottenere formule analitiche per i prezzi dei bond e dei derivati su bond.

Teorema 3.5. *Consideriamo un T -contratto fissato della forma $X = \Phi(r(T))$. Allora il processo del prezzo è dato da $\Pi(t, X) = F(t, r(t))$, dove F è una soluzione di*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, r) + \mu(t, r) \frac{\partial F}{\partial r}(t, r) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(t, r) - rF(t, r) = 0, \\ F^T(T, r) = \Phi(r) \end{cases} \quad (3.10)$$

In particolare, i prezzi dei bond sono dati da $P(t, T) = F^T(t, r(t))$ dove

$$\begin{cases} \frac{\partial F^T}{\partial t} + \mu \frac{\partial F^T}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F^T}{\partial r^2} - rF^T = 0, \\ F^T(T, r) = 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Dimostrazione. Il risultato segue dalla (3.8) e dalla Kolmogorov backward equation². □

²Per maggiori dettagli si veda [12, pag. 180], [3, pag. 81] e [8, Cap. 5].

Esistono diversi modelli per il processo short rate, come ad esempio:

1. Vasiček

$$dr(t) = (b - ar)dt + \sigma dW, \quad (3.12)$$

2. Cox-Ingersoll-Ross

$$dr(t) = (b - ar)dt + \sigma\sqrt{r}dW, \quad (3.13)$$

3. Ho-Lee

$$dr(t) = \Phi(t)dt + \sigma dW, \quad (3.14)$$

4. Hull-White (Vasiček generalizzato)

$$dr(t) = (\Phi(t) - a(t)r)dt + \sigma(t)dW, \quad (3.15)$$

Se vogliamo implementare questo modello nel mercato reale, il secondo passo è la stima dei parametri. Consideriamo ad esempio il modello (3.12), dobbiamo quindi stimare i parametri a , b e σ in modo tale che i prezzi iniziali dei bond, calcolati attraverso le PDE, coincidano con i prezzi del mercato.

3.2 Modellizzazione di Heath-Jarrow-Morton

Da un punto di vista economico non è ragionevole assumere che ci sia una sola variabile esplicativa che governi l'intero mercato, inoltre se la dinamica dello short rate si avvicina maggiormente a quella reale, la stima dei parametri può diventare molto difficile. Diventa quindi necessario introdurre modelli in cui si prendono in considerazione più di una variabile esplicativa. Partendo da questa idea, Heath-Jarrow-Morton hanno sviluppato una famiglia di modelli nei quali la variabile è l'intera curva del forward rate e quindi una variabile infinito dimensionale.

Per ogni fissato $T \leq T^*$ la dinamica del forward rate sotto la probabilità oggettiva \mathbb{P} è data da

$$df(t) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t), \quad (3.16)$$

dove W è un d -dimensionale moto Browniano rispetto alla probabilità oggettiva \mathbb{P} e $\alpha(t, T)$ e $\sigma(t, T)$ sono rispettivamente \mathbb{R} e \mathbb{R}^d processi adattati. Per ogni maturità T fissata, le condizioni iniziali $f(0, T)$ dell'equazione differenziale stocastica (3.16) sono determinate dal forward rate $f^*(0, T)$ osservato sul mercato, quindi si ha che

$$f(0, T) = f^*(0, T)$$

Osserviamo che abbiamo definito un sistema stocastico infinito dimensionale e che per costruzione abbiamo che i prezzi iniziali dei bond coincidono con i prezzi del mercato, il problema della stima dei parametri è completamente evitato. Si ha inoltre che

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T)$$

integrando entrambe le equazioni si ottiene che

$$\begin{aligned}\int_t^T f(t, u)du &= - \int_t^T \frac{\partial}{\partial u} \log P(t, u)du \\ &= - \log P(t, u) \Big|_{u=t}^{u=T} \\ &= - \log P(t, T),\end{aligned}$$

così si ricava

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u)du \right\} \quad (3.17)$$

quindi conoscere la famiglia $\{f(t, T); T > 0\}$ del forward rate o conoscere la famiglia $\{P(t, T); T > 0\}$ dei prezzi dei bond, risulta essere equivalente. Il primo passo sarà quindi indagare quando il mercato indotto da (3.16) è privo di opportunità di arbitraggio. Dobbiamo trovare una misura equivalente tale che il processo $\frac{P(t, T)}{B(t)}$ sia una martingala per ogni $0 \leq T \leq T^*$.

Proposizione 3.6. *Assumiamo che la famiglia di forward rate sia quella data in (3.16). Allora esiste una misura martingala equivalente se e solo se esiste un processo adattato $\theta(t)$, tale che $\forall T > 0$ e $\forall t \leq T$, si abbia l'uguaglianza*

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)ds - \sigma(t, T)\theta(t) \quad (3.18)$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione (3.2) sappiamo che la dinamica dei prezzi di un bond è della forma

$$dP(t, T) = P(t, T) \left\{ r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2 \right\} dt + P(t, T)S(t, T)dW(t)$$

dove

$$\begin{cases} A(t, T) &= - \int_t^T \alpha(t, s)ds, \\ S(t, T) &= - \int_t^T \sigma(t, s)ds. \end{cases} \quad (3.19)$$

Dal Teorema di Girsanov³ esiste un processo adattato $\{\theta(t); t \leq t \leq T^*\}$ tale che si abbia

$$\begin{aligned}\tilde{W}(t) &= - \int_0^t \theta(u)du + W(t) \\ Z(t) &= \exp \left\{ \int_0^t \theta(u)dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u)du \right\} \\ Q(A) &= \int_A Z(T^*)dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_{T^*}\end{aligned}$$

dove rispetto alla probabilità Q con densità $Z(T)$ relativa a P , il processo $(\tilde{W}(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ sopra definito è un moto Browniano. Segue quindi che la dinamica secondo Q , misura equivalente a P , è data da

$$\begin{aligned}dP(t, T) &= P(t, T) \left\{ r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2 + S(t, T)\theta(t) \right\} dt \\ &\quad + P(t, T)S(t, T)d\tilde{W}(t)\end{aligned} \quad (3.20)$$

³Per maggiori dettagli si veda [8, pag. 66].

Si ha che \mathbb{Q} è una misura martingala se e solo se

$$A(t, T) + \frac{1}{2} \|S(t, T)\|^2 + S(t, T)\theta(t) = 0$$

$\forall T > 0$ e $\forall t \leq T$. Considerando la (3.19) e derivando rispetto a T otteniamo la (3.18). \square

Se guardiamo più attentamente la (3.18) abbiamo che

$$\alpha(t, T) = \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T) \int_0^T \sigma_i(t, s) ds - \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T) \theta_i(t)$$

e per ogni tempo t abbiamo un sistema di dimensione infinita per la determinazione del vettore d -dimensionale $\theta(t)$. Il sistema è ampiamente sovradeterminato, per cui non possiamo scegliere liberamente $\alpha(\cdot, T)$ e $\sigma(\cdot, T)$ se desideriamo un mercato privo di opportunità di arbitraggio. Sfruttiamo la seguente tecnica: specifichiamo la volatilità $\sigma(t, T)$ per tutte le maturità, fissiamo d maturità di riferimento T_1, \dots, T_d e per queste calcoliamo il termine $\alpha(t, T_1), \dots, \alpha(t, T_d)$. Risolvendo il sistema lineare

$$\alpha(t, T_j) = \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T_j) \int_0^T \sigma_i(t, s) ds - \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T_j) \theta_i(t)$$

otteniamo il vettore $\theta(t)$. Nel caso in cui la matrice $\{\sigma_i(t, T_j)\}_{i,j}$ sia invertibile, il vettore $\theta(t)$ sarà unicamente determinato. Avremo quindi che i prezzi di tutti gli altri bonds saranno determinati dalla struttura dei prezzi dei bonds di riferimento e dalla richiesta di assenza di arbitraggio.

Prendiamo ora in considerazione la famiglia $\{f(t, T); t > 0\}$ direttamente rispetto ad una misura martingala \mathbb{Q} .

Nel modello basato sullo short rate, dalla dinamica dello short rate rispetto ad una misura martingala \mathbb{Q} , possiamo facilmente ricavare che

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

In questo caso la situazione è diversa in quanto la variabile esplicativa è il forward rate.

Proposizione 3.7. *Assumiamo che \mathbb{Q} sia la misura martingala del mercato dei bond e che la dinamica del forward rate rispetto a \mathbb{Q} sia data da*

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t)$$

dove W è un processo di Wiener rispetto a \mathbb{Q} . Allora si ha:

1. $\forall T > 0$ e $\forall t \leq T$ vale l'uguaglianza \mathbb{Q} -q.c.

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_0^T \sigma(t, s) ds.$$

2. La dinamica dei prezzi dei bond rispetto a \mathbb{Q} è data da

$$dP(t, T) = P(t, T)r(t)dt + P(t, T)S(t, T)dW(t), \quad (3.21)$$

dove $S(t, T)$ è data dalla (3.19)

Dimostrazione. Lavoriamo direttamente sotto una probabilità martingala equivalente, questo significa in termini della proposizione precedente che $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$, quindi il processo $\theta(t)$ è zero, e il risultato segue dalla Proposizione (3.6) \square

Nella pratica il modello HJM può essere schematizzato nel seguente modo.

1. Scegliere la struttura della volatilità $\sigma(t, T)$.
2. I parametri $\alpha(t, T)$ sono unicamente determinati come

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_0^T \sigma(t, s) ds.$$

3. Osservare la struttura del forward rate al tempo $t = 0$

$$\{f^*(0, T); T > 0\}.$$

4. Integrare in modo da ottenere il forward rate

$$f(t, T) = f^*(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s).$$

5. Calcolare il prezzo dei bond attraverso la formula

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u) du \right\}.$$

6. Si possono quindi calcolare i prezzi degli altri derivati.

Nel caso in cui, fissato T , $S(t, T)$ è deterministica, abbiamo che la soluzione della equazione differenziale stocastica (3.21) è

$$P(t, T) = P(0, T) \exp \left(\int_0^t r(s) ds + \int_0^t S(s, T) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t (S(s, T))^2 ds \right)$$

e poichè $S(t, T)$ è deterministica e $W(t)$ è un moto Browniano, si ha l'uguaglianza

$$\mathbb{E} \left[\exp \int_0^t S(s, T) dW(s) \right] = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t (S(s, T))^2 ds \right)$$

da cui possiamo scrivere

$$P(t, T) = P(0, T) \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right) \cdot \frac{\exp \left(\int_0^t S(s, T) dW(s) \right)}{\mathbb{E} \left[\exp \int_0^t S(s, T) dW(s) \right]}.$$

Questo risultato sarà utile nel Capitolo 5.

Capitolo 4

La tecnica del cambio del numerario

In molte situazioni concrete il numero di calcoli per la determinazione di un prezzo privo di possibilità di arbitraggio, può essere notevolmente ridotto con un semplice cambio di numerario.

Assumiamo che \mathbb{Q} sia una fissata misura martingala neutrale verso il rischio e $S_0(t)$ un processo strettamente positivo con la proprietà che il processo $\frac{S_0(t)}{B(t)}$ è una \mathbb{Q} -martingala. Cerchiamo ora una misura \mathbb{Q}^* con la proprietà che, per ogni processo dei prezzi, $\Pi(t)$ il processo $\frac{\Pi(t)}{S_0(t)}$ è una \mathbb{Q}^* -martingala.

Per dare un'idea di come deve essere \mathbb{Q}^* , consideriamo ad un tempo fissato T un T -contratto X . Assumendo che siano soddisfatte tutte le proprietà necessarie per l'integrabilità di X , possiamo dire che il prezzo privo di opportunità di arbitraggio di X al tempo $t = 0$ è dato da

$$\Pi(0, X) = E^{\mathbb{Q}} \left[\frac{X}{B(T)} \right]. \quad (4.1)$$

Assumiamo che la misura \mathbb{Q}^* esista, con la derivata di Radon-Nikodym

$$L(t) = \frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} \quad \text{su } \mathcal{F}_t$$

Poichè abbiamo assunto che il processo $\frac{\Pi(t, X)}{S_0(t)}$ sia una \mathbb{Q}^* -martingala, abbiamo che valgono le uguaglianze

$$\frac{\Pi(0, X)}{S_0(0)} = E^{\mathbb{Q}^*} \left[\frac{\Pi(T, X)}{S_0(T)} \right] = E^{\mathbb{Q}^*} \left[\frac{X}{S_0(T)} \right] = E^{\mathbb{Q}} \left[L(T) \frac{X}{S_0(T)} \right]$$

Quindi si ottiene la relazione

$$\Pi(0, X) = E^{\mathbb{Q}} \left[L(T) \frac{X \cdot S_0(0)}{S_0(T)} \right] \quad (4.2)$$

e confrontando (4.1) e (4.2) la candidata naturale per il cambiamento di misura è

$$L(t) = \frac{S_0(t)}{S_0(0) \cdot B(t)}$$

e poichè $L(0) = 1$ abbiamo che \mathbb{Q}^* è una misura di probabilità.

Proposizione 4.1. *Definiamo Q^* come sopra. Assumiamo che $\Pi(t)$ è un processo tale che $\frac{\Pi(t)}{B(t)}$ è una Q -martingala. Allora il processo $\frac{\Pi(t)}{S_0(t)}$ è una Q^* -martingala.*

Dimostrazione. Usiamo la formula di Bayes e otteniamo le uguaglianze

$$\begin{aligned} E^{Q^*} \left[\frac{\Pi(t)}{S_0(t)} \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \frac{E^Q \left[L(t) \frac{\Pi(t)}{S_0(t)} \middle| \mathcal{F}_s \right]}{L(s)} = \frac{E^Q \left[\frac{\Pi(t)}{B(t)S_0(0)} \middle| \mathcal{F}_s \right]}{L(s)} \\ &= \frac{\Pi(s)}{B(s)S_0(0)L(s)} = \frac{\Pi(s)}{S_0(s)} \end{aligned}$$

□

Proposizione 4.2. *Definiamo Q^* come sopra e consideriamo un T -contratto X tale che $\frac{X}{B(T)} \in L^1(Q)$. Allora il processo dei prezzi $\Pi(t, X)$ è dato da*

$$\Pi(t, X) = S_0(t) E^{Q^*} \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Questa formula è particolarmente utile quando X è della forma $X = S_0(T) \cdot Y$ in quanto possiamo ottenere la semplice espressione

$$\Pi(t, X) = S_0(t) E^{Q^*} [Y | \mathcal{F}_t].$$

4.1 Misura forward

Passiamo ad analizzare il caso in cui come numerario venga scelto il prezzo di un bond con data di maturità T , particolarmente utile nel calcolo di derivati su tassi d'interesse.

Prendiamo in considerazione un mercato di bond con una fissata misura martingala Q . Per un fissato tempo di maturità T scegliamo $P(t, T)$ come numerario.

Definizione 4.3. *La misura T -forward Q^T è definita come*

$$dQ^T = L^T(t) dQ$$

su \mathcal{F}_t per $0 \leq t \leq T$ dove

$$L^T(t) = \frac{P(t, T)}{B(t)P(0, T)}.$$

Osservando che $P(T, T) = 1$ otteniamo dalla Proposizione (4.2) il seguente risultato

Proposizione 4.4. *Definiamo Q^T come sopra e consideriamo un T -contratto X tale che $\frac{X}{B(T)} \in L^1(Q)$. Allora il processo dei prezzi $\Pi(t, X)$ è dato da*

$$\Pi(t, X) = P(t, T) E^{Q^T} [X | \mathcal{F}_t]. \quad (4.3)$$

Notiamo che il prezzo $P(t, T)$ non deve essere calcolato, ma può essere direttamente osservato sul mercato.

Viene allora naturale chiedersi quando \mathbb{Q} e \mathbb{Q}^T coincidono. L'uguaglianza si ha quando $L^T(T) = 1$, \mathbb{Q} -q.c.. Si ha dalla (3.9) e dalla (3.6), che definisce il processo $B(t)$, che vale l'uguaglianza

$$1 = \frac{P(T, T)}{B(T)P(0, T)} = \frac{e^{-\int_0^T r(s)ds}}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r(s)ds}\right]}$$

cioè se e solo se r è deterministica.

Inoltre vale le seguente proprietà di martingala per il forward rate

Proposizione 4.5. *Assumiamo che per ogni $T > 0$ abbiamo che $\frac{r(T)}{B(T)} \in L^1(\mathbb{Q})$. Allora, per ogni T fissato, il processo $f(t, T)$ è una \mathbb{Q}^T -martingala per $0 \leq t \leq T$ e in particolare abbiamo che*

$$f(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[r(T)|\mathcal{F}_t]$$

Dimostrazione. Usando la (4.3) e la (3.8) con $X = r(T)$, abbiamo che

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[r(T) \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \Pi(t, X) = P(t, T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[r(T)|\mathcal{F}_t].$$

Usando la (3.9) e la definizione di forward rate (3.1) si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[r(T)|\mathcal{F}_t] &= \frac{1}{P(t, T)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[r(T) \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= -\frac{1}{P(t, T)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial}{\partial T} \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= -\frac{1}{P(t, T)}\frac{\partial}{\partial T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= -\frac{P_T(t, T)}{P(t, T)} = f(t, T) \end{aligned}$$

□

In generale questa proprietà non vale rispetto alla probabilità oggettiva \mathbb{P} o rispetto a quella martingala \mathbb{Q} .

4.2 Calcolo del prezzo di un'opzione call europea

Vogliamo ora calcolare il prezzo di una call europea. Sia dato un mercato e assumiamo che esista una misura martingala \mathbb{Q} . Consideriamo un tempo fissato T^* con $T \leq T^*$ e un'opzione europea su un T^* -bond con maturità T e prezzo strike K , quindi consideriamo X della forma

$$X = (P(T, T^*) - K)^+$$

per semplificare le notazioni, restringiamo il calcolo del prezzo $\Pi(t, X)$ al tempo $t = 0$. L'opzione può essere scritta nella forma

$$X = [P(T, T^*) - K] I_{\{P(T, T^*) \geq K\}}$$

e otteniamo che

$$\begin{aligned} \Pi(0, X) &= \mathbb{E}^Q [B^{-1}(T) [P(T, T^*) - K] I_{\{P(T, T^*) \geq K\}}] \\ &= \mathbb{E}^Q [B^{-1}(T) P(T, T^*) I_{\{P(T, T^*) \geq K\}}] \\ &\quad - K \mathbb{E}^Q [B^{-1}(T) I_{\{P(T, T^*) \geq K\}}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per il primo termine prendiamo come numerario $P(t, T^*)$ e per il secondo $P(t, T)$, quindi utilizziamo la misura T^* -forward e T -forward, ottenendo quindi

$$\Pi(0, X) = P(0, T^*) \mathbb{Q}^{T^*}(P(T, T^*) \geq K) - KP(0, T) \mathbb{Q}^T(P(T, T^*) \geq K). \quad (4.5)$$

Assumiamo che la filtrazione sia generata da un processo di Wiener rispetto a \mathbb{Q} d -dimensionale indicato con $\tilde{W}(t)$. Dalla (3.21) si ha che le dinamiche dei processi $P(t, T)$ e $P(t, T^*)$ sono

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= P(t, T)r(t)dt + P(t, T)S(t, T)d\tilde{W}(t) \\ dP(t, T^*) &= P(t, T^*)r(t)dt + P(t, T^*)S(t, T^*)d\tilde{W}(t) \end{aligned}$$

dove i coefficienti delle volatilità sono deterministici. Definiamo il processo

$$\tilde{Z}(t, T) = \frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$$

La dinamica rispetto a \mathbb{Q} di $\tilde{Z}(t, T)$ si ottiene applicando la seguente formula d'integrazione per parti, al quoziente $\frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$, dove con X e Y , indichiamo semimartingale sufficientemente regolari per i nostri scopi

$$dX(t)Y(t) = dX(t)Y(t) + X(t)dY(t) + d\langle X, Y \rangle(t) \quad (4.6)$$

Per alleggerire la notazione scriviamo S per $S(t, T)$ e S^* per $S(t, T^*)$, otteniamo che

$$d\tilde{Z}(t, T) = \tilde{Z}(t, T) \left\{ S(S - S^*)dt - (S - S^*)d\tilde{W}(t) \right\}$$

Quindi si ha che

$$\mathbb{Q}^T(P(T, T^*) \geq K) = \mathbb{Q}^T \left(\frac{P(T, T^*)}{P(T, T)} \geq K \right) = \mathbb{Q}^T(\tilde{Z}(T, T) \geq K)$$

Per come è stato costruito il processo $\tilde{Z}(t, T)$, si ottiene una \mathbb{Q}^T -martingala con dinamica rispetto a \mathbb{Q}^T

$$d\tilde{Z}(t, T) = -\tilde{Z}(t, T)(S(t, T) - S(t, T^*))dW^T(t),$$

dove $W^T(t)$ è un moto Browniano rispetto a \mathbb{Q}^T . Diventa quindi cruciale l'assunzione che la volatilità sia deterministica e quindi non cambia al variare della misura. Si ottiene che

$$\tilde{Z}(t, T) = \frac{P(0, T^*)}{P(0, T)} \exp \left\{ - \int_0^T (S - S^*)dW^T(t) - \frac{1}{2} \int_0^T (S - S^*)^2 dt \right\}$$

L'integrale stocastico nell'esponentiale è ancora gaussiano con media zero e varianza

$$\Sigma^2(T) = \int_0^T (S(t, T) - S(t, T^*))^2 dt$$

Per dimostrare ciò, si usa l'ipotesi di volatilità deterministica. Tale volatilità si può approssimare con funzioni semplici e per le funzioni semplici è banale dimostrare la nostra tesi. Si generalizza approssimando con funzioni semplici e si ottiene che $\int_0^T (S - S^*)dW^T(t)$ è una variabile aleatoria normale con

$$Var\left(\int_0^T (S - S^*)dW^T(t)\right) = \int_0^T (S(t, T) - S(t, T^*))^2 dt$$

Così abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^T(P(T, T^*) \geq K) &= \mathbb{Q}^T(\tilde{Z}(T, T) \geq K) \\ &= \mathbb{Q}^T\left(-\int_0^T (S - S^*)dW^T(T) - \frac{1}{2}\int_0^T (S - S^*)^2 dT > \log \frac{KP(0, T)}{P(0, T^*)}\right) \\ &= \mathbb{Q}^T\left(-\int_0^T (S - S^*)dW^T(T) > \left[\log \frac{KP(0, T)}{P(0, T^*)} + \frac{1}{2}\int_0^T (S - S^*)^2 dT\right]\right) \\ &= \mathbb{Q}^T\left(\int_0^T (S - S^*)dW^T(T) < \left[\log \frac{P(0, T^*)}{KP(0, T)} - \frac{1}{2}\int_0^T (S - S^*)^2 dT\right]\right) \\ &= \Phi(d_2) \end{aligned}$$

dove indichiamo con

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{P(0, T)}{KP(0, T^*)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2(T)}{\sqrt{\Sigma^2(T)}}$$

e con Φ la funzione di ripartizione della variabile aleatoria normale standard.

Allo stesso modo, per il primo termine si ha

$$Z^*(t, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, T^*)}$$

la cui dinamica rispetto a \mathbb{Q} è,

$$dZ^* = Z^*(t, T) \left\{ S^*(S^* - S)dt - (S^* - S)d\tilde{W}(t) \right\}$$

Si ha quindi che valgono le seguenti uguaglianze

$$\mathbb{Q}^{T^*}(P(T, T^*) \geq K) = \mathbb{Q}^{T^*}\left(\frac{1}{P(T, T^*)} \leq \frac{1}{K}\right) = \mathbb{Q}^{T^*}(Z^*(T, T) \leq \frac{1}{K}).$$

Considerando che $Z^*(t, T)$ è una martingala rispetto a \mathbb{Q}^{T^*} si ha che

$$dZ^*(t, T) = Z^*(t, T)(S(t, T) - S(t, T^*))dW^*(t)$$

dove $W^*(t)$ è un moto Browniano rispetto a \mathbb{Q}^{T^*} , abbiamo che

$$Z^*(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, T^*)} \exp\left\{\int_0^T (S - S^*)dW^*(t) - \frac{1}{2}\int_0^T (S - S^*)^2 dt\right\}.$$

Abbiamo nuovamente che l'integrale stocastico nell'esponenziale è gaussiano con media zero e varianza $\Sigma^2(T)$. Usando questo fatto, segue che

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Q}^{T^*}(P(T, T^*) \geq K) &= \mathbb{Q}^{T^*}\left(Z^*(T, T) \leq \frac{1}{K}\right) \\
 &= \mathbb{Q}^{T^*}\left(\int_0^T (S - S^*)dW^*(T) - \frac{1}{2} \int_0^T (S - S^*)^2 dT < \log \frac{P(0, T^*)}{KP(0, T)}\right) \\
 &= \mathbb{Q}^{T^*}\left(\int_0^T (S - S^*)dW^*(T) < \left[\log \frac{P(0, T^*)}{KP(0, T)} + \frac{1}{2} \int_0^T (S - S^*)^2 dT\right]\right) \\
 &= \Phi(d_1)
 \end{aligned}$$

con

$$d_1 = d_2 + \sqrt{\Sigma^2(T)}.$$

Si ricava quindi che il prezzo di un'opzione call europea è

$$C(0, T, T^*; K) = P(0, T^*)\Phi(d_1) - KP(0, T)\Phi(d_2) \quad (4.7)$$

dove i parametri sono quelli definiti sopra.

Capitolo 5

Modelli per i tassi d'interesse con processi di Lévy

I modelli per i tassi d'interesse sono importanti per la risoluzione di molti problemi in economia, in particolare per la valutazione di prezzi di contratti dipendenti da tassi d'interesse. Come abbiamo già visto, rispetto ad una misura neutrale verso il rischio, la dinamica dei prezzi di un T -bond con maturità T , con $T \in [0, T^*]$ soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica

$$dP(t, T) = P(t, T)(r(t)dt + \sigma(t, T)dW_t), \quad (5.1)$$

dove W è un moto Browniano standard, sempre uguale per ogni maturità. Studi empirici effettuati da Eberlein e Keller (1995) hanno dimostrato che sostituendo al moto Browniano W un appropriato processo di Lévy L , si ottiene una migliore approssimazione dei dati reali.

Il nostro scopo è la valutazione dei prezzi di contratti e siamo interessati a modelli in cui tali prezzi, una volta attualizzati, siano martingale. Invece di sostituire W nella equazione differenziale stocastica (5.1), prendiamo la sua soluzione

$$P(t, T) = P(0, T) \cdot \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \frac{\exp\left(\int_0^t \sigma(s, T)dW_s\right)}{\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t \sigma(s, T)dW_s\right)\right]}$$

Se σ è deterministica, allora $\int_0^t \sigma(s, T)dW_s$ ha incrementi indipendenti, per cui il quoziente nella parte destra dell'uguaglianza, è una martingala. Sostituiamo a W_t , il processo di Lévy L_t e vediamo cosa accade. Otteniamo l'equazione

$$P(t, T) = P(0, T) \cdot \beta(t) \frac{\exp\left(\int_0^t \sigma(s, T)dL_s\right)}{\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t \sigma(s, T)dL_s\right)\right]} \quad (5.2)$$

dove con $\beta(t)$ indichiamo il valore del numerario al tempo t . Assumiamo che i prezzi iniziali del bond siano deterministici, positivi e che la funzione $T \rightarrow P(0, T)$ sia due volte differenziabile con continuità sull'intervallo $[0, T^*]$. Sia inoltre

$$P(T, T) = 1 \quad \forall T \in [0, T^*] \quad (5.3)$$

e da questa condizione ricaveremo in seguito la forma esplicita del processo $\beta(t)$.

5.1 Introduzione al metodo

Come già abbiamo visto, ci sono connessioni tra i salti di un processo di Lévy e la misura di Lévy. Introduciamo la misura aleatoria a valori interi dei salti associati a L

$$\mu^L(\omega; dt, dx) = \sum_s I_{\{\Delta L_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta L_s(\omega))}(dt, dx)$$

dove $\Delta L_s = L_s - L_{s-}$ e ε_a è la misura di Dirac in a . Notiamo che la somma a destra è ben definita grazie alle proprietà delle traiettorie càdlàg. Si ha che μ^L è una misura di Poisson e il suo compensatore è

$$\nu^L(dt, dx) = dt F_s(dx).$$

Per ogni $B \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, $\mu^L(\cdot, B)$ ha una legge di Poisson con media $\nu(B)$.

Nei paragrafi successivi considereremo un processo di Lévy $L = (L^1, \dots, L^d)$ sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T^*}, \mathbb{P})$, dove prenderemo la più piccola filtrazione continua a destra a cui L è adattato, e considereremo la legge di L_t con la seguente funzione caratteristica

$$\mathbb{E}[e^{i\langle u, L_t \rangle}] = \exp \int_0^t \left(i\langle u, b_s \rangle - \frac{1}{2} \langle u, c_s u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, x \rangle} - 1 - i\langle u, x \rangle) F_s(dx) \right) ds,$$

dove $b_s \in \mathbb{R}^d$, c_s è una matrice simmetrica $d \times d$ non negativa e F_s è una misura su \mathbb{R}^d che integra $(|x|^2 \wedge 1)$ e soddisfa $F_s(\{0\}) = 0$. Prendendo in considerazione l'analisi svolta del Capitolo 1, un processo di Lévy ha quindi la seguente decomposizione canonica

$$\begin{aligned} L_t = & \int_0^t b_s ds + L_t^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x I_{\{|x| \leq 1\}} (\mu^L(\cdot; du, dx) - du F_s(dx)) \\ & + \sum_{s \leq t} \Delta L_s I_{|\Delta L_s| \geq 1} \end{aligned}$$

dove con L^c denotiamo la parte di L che è una martingala continua della forma $L_t^c = \int_0^t \sqrt{c_s} dW_s$ e $\Delta L_s = L_s - L_{s-}$ denota il salto al tempo s .

Prenderemo in considerazione processi di Lévy la cui funzione generatrice infinitamente divisibile ha momenti di tutti gli ordini. In particolare nel caso in cui $\mathbb{E}[\exp\langle u, L_t \rangle] < \infty$ per $t \in [0, T^*]$ e $u \in [-(1 + \epsilon)M, (1 + \epsilon)M]^d$, allora si ha la seguente decomposizione

$$L_t = \int_0^t b_s ds + L_t^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x (\mu^L(\cdot; du, dx) - du F_s(dx)) \quad (5.4)$$

dove con L^c denotiamo la parte di L che è una martingala continua della forma $L_t^c = \int_0^t \sqrt{c_s} dW_s$, la parte dei grandi salti, cioè dei salti maggiori di 1, viene assorbita dagli altri termini.

5.2 Condizione di integrabilità

Per garantire l'esistenza e la limitatezza della speranza presente nel denominatore della (5.2), imponiamo una condizione di integrabilità sulla misura di Lévy F :

Ipotesi 5.1. *Esistono costanti $M, \epsilon > 0$ tali che*

$$\int_{\{|x|>1\}} \exp(vx)F(dx) < \infty \quad \forall |v| \leq (1 + \epsilon)M \quad (5.5)$$

Il processo L è definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e consideriamo come filtrazione quella canonica $(\mathcal{F}_u)_{u \in [0, T^*]}$ associata a L . Senza ledere la generalità possiamo considerare per ogni processo di Lévy, direttamente la sua modificazione càdlàg. La filtrazione canonica di ogni processo di Lévy è *continua a destra*.

Assumiamo che le dinamiche dei prezzi dei titoli considerati, siano descritte da processi càdlàg adattati alla filtrazione $(\mathcal{F}_u)_{u \in [0, T^*]}$ e inoltre che per ogni tempo $T \in [0, T^*]$ c'è un processo adattato càdlàg $(P(t, T))_{0 \leq t \leq T}$, che indica il prezzo del bond con maturità T .

Attraverso il teorema di convergenza monotona si dimostra

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)F(dx) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(x)F_s(dx)ds$$

dove si ha

$$F(dx) = \int_0^t F_s(dx)ds$$

e dall'ipotesi precedente si ricava la seguente condizione equivalente: esistono costanti $M, \epsilon > 0$ tali che per ogni $u \in [-(1 + \epsilon)M, (1 + \epsilon)M]$

$$\int_0^{T^*} \int_{\{|x|>1\}} \exp\langle u, x \rangle F_s(dx)ds < \infty. \quad (5.6)$$

5.3 Condizioni sulla volatilità

Assumiamo che la volatilità $\sigma(s, T)$ sia deterministica, definita sul triangolo $\Delta := \{(s, T) : 0 \leq s \leq T \leq T^*\}$, due volte differenziabile con continuità in entrambe le variabili, limitata da una costante M ,

$$\sigma(s, T) \leq M \quad \forall (s, T) \in \Delta, \quad (5.7)$$

dove M è la costante da (5.5). Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} \sigma(s, T) &> 0 & \forall (s, T) \in \Delta \\ \sigma(T, T) &= 0 & \forall T \in [0, T^*]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le ipotesi sono ragionevoli, in quanto ci si aspetta una volatilità limitata e uguale a 0 al tempo di maturità del bond, cioè quando il suo valore è conosciuto.

Lemma 5.2. *Sia $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ deterministica, differenziabile con continuità. Allora vale la seguente uguaglianza per quasi ogni $\omega \in \Omega$:*

$$\int_0^t \sigma(s)dL_s = \sigma(t)L_t - \int_0^t L_s \sigma'(s)ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.9)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di covarianza quadratica si ottiene l'equazione $[L, \sigma] := L\sigma - L_0\sigma(0) - \int L_-d\sigma - \int \sigma_-dL$, dove L è un processo di Lévy. Si ha che $[L, \sigma] \equiv 0$, poichè σ è continua. Definiamo l'insieme $I = \{s : L_s(\omega) \neq L_{s-}(\omega)\}$ e notiamo che per ogni ω fissato, essendo L un processo càdlàg adattato, l'insieme I è un insieme al più numerabile, di misura nulla secondo Lebesgue. \square

5.4 Funzione Generatrice dei momenti di un processo di Lévy

Nel modello che consideriamo, vogliamo che i prezzi dei bond espressi in unità di numerario, siano martingale. Se la speranza presente nel denominatore della (5.2) è finita, ricordando che l'esponente $X_t = \int_0^t \sigma(s, T) dL_s$ è un processo con incrementi indipendenti, si ha per ogni T fissato che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(X_t) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\exp(X_t - X_s) \exp(X_s) | \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\exp(X_t)]}{\mathbb{E}[\exp(X_s)]} \exp(X_s) \end{aligned}$$

La condizione (5.5) garantisce la finitezza della (5.2) e della speranza dell'equazione precedente.

Lemma 5.3. ¹ *La condizione (5.6) è verificata se e solo se esistono costanti $M, \epsilon > 0$ tali che $\mathbb{E}[\exp\langle u, L_t \rangle] < \infty$ per $t \in [0, T^*]$ e $u \in [-(1 + \epsilon)M, (1 + \epsilon)M]^d$.*

Il Lemma precedente implica l'esistenza dei momenti di tutti gli ordini, infatti se poniamo

$$\mathbb{E}[e^{uX}] = G(u)$$

abbiamo che

$$G^n(u) = \mathbb{E}[X^n e^{uX}] \quad G^n(0) = \mathbb{E}[X^n].$$

Definiamo ora la funzione θ come il logaritmo della funzione generatrice dei momenti di L_1 , quindi come

$$\theta(v) = \log \mathbb{E}[\exp(vL_1)]. \quad (5.10)$$

e il Lemma precedente dimostra che la condizione (5.5) implica che la funzione generatrice dei momenti $v \rightarrow \mathbb{E}[\exp(vL_1)]$ esiste almeno sull'intervallo $[-(1 + \epsilon)M, (1 + \epsilon)M]$. Lukacs(1970) dimostra che θ è differenziabile con continuità (in quanto analitica) e ha la seguente rappresentazione:

$$\theta(z) = bz + \frac{c}{2}z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zx} - 1 - zx)F(dx), \quad (5.11)$$

valida per $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) \in [-(1 + \epsilon)M, (1 + \epsilon)M]$.

Proposizione 5.4. *Sia L un processo di Lévy che soddisfa la condizione (5.5). Se $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione a valori complessi, continua a sinistra con limite destro, tale che $|\text{Re}(f)| \leq M$, allora vale l'uguaglianza*

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^t f(s) L_s \right) \right] = \exp \left(\int_0^t \theta(f(s)) ds \right) \quad (5.12)$$

dove gli integrali sono intesi componente per componente.

¹Per la dimostrazione si veda [4, pag. 6].

Dimostrazione. Sia $0 = t_0 < \dots < t_{N+1} = t$ una partizione dell'intervallo $[0, t]$, dall'indipendenza e dalla stazionarietà degli incrementi di L , si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{k=0}^N f(t_k)(L_{t_{k+1}} - L_{t_k}) \right) \right] &= \prod_{k=0}^N \mathbb{E} \left[\exp (f(t_k)(L_{t_{k+1}} - L_{t_k})) \right] \\ &= \prod_{k=0}^N \exp(\theta(f(t_k))(t_{k+1} - t_k)) \\ &= \exp \left(\sum_{k=0}^N \theta(f(t_k))(t_{k+1} - t_k) \right). \end{aligned}$$

Quando *mesh* della partizione va a zero, si ha che

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{k=0}^N \theta(f(t_k))(t_{k+1} - t_k) \right) &\rightarrow \exp \left(\int_0^t \theta(f(s))ds \right) \\ \exp \left(\sum_{k=0}^N f(t_k)(L_{t_{k+1}} - L_{t_k}) \right) &\rightarrow \exp \left(\int_0^t f(s)dL_s \right) \quad \text{in misura.} \end{aligned}$$

Le trasformazioni continue conservano la convergenza in misura, inoltre la successione approssimante nella seconda equazione è limitata in $L^{1+\epsilon}$, quindi per il criterio di La Vallée-Poussin è uniformemente integrabile. La convergenza in misura, implica l'integrabilità del limite così come la convergenza in L^1 . \square

Un'immediata conseguenza si ha prendendo $f(s) = \sigma(s, T)$ per un fissato $T \in [0, T^*]$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^t \sigma(s, T)L_s \right) \right] = \exp \left(\int_0^t \theta(\sigma(s, T))ds \right) \quad (5.13)$$

Corollario 5.5. Sia $f(s) = iu\sigma(s, T)$ per un fissato $T \in [0, T^*]$ e $u \in \mathbb{R}$, allora la funzione caratteristica della variabile aleatoria $X_t = \int_0^t \sigma(s, T)dL_s$ è

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(iuX_t)] &= \exp \left(iub \int_0^t \sigma(s, T)ds - \frac{u^2}{2}c \int_0^t \sigma(s, T)^2ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{iu\sigma(s, T)x} - 1 - iu\sigma(s, T)x)F(dx)ds \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dimostrazione. Basta usare la (5.12) con $f(s) = iu\sigma(s, T)$ e la (5.11). \square

Osserviamo il modello dal punto di vista dei processi stocastici e utilizzando la decomposizione (5.4), si ha che il processo $X_t = \int_0^t \sigma(s, T)dL_s$ ha la seguente rappresentazione canonica

$$X_t = \sqrt{c} \int_0^t \sigma(s, T)dW_s + \{\sigma(s, T)x\} * (\mu^L - \nu^L) + b \int_0^t \sigma(s, T)ds$$

dove si ha

$$b := \int_0^t b_s ds \quad c := \int_0^t c_s ds.$$

5.5 Dinamica del *Forward Rate* e dello *Short Rate*

Analizziamo più da vicino il forward rate e lo short rate ricordando la definizione (3.1)

$$f(t, T) := -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T), \quad \text{e} \quad r(t) := f(t, t).$$

Proposizione 5.6. *Per ogni $0 \leq T \leq T^*$, il processo forward rate $f(\cdot, T)$ esiste e ha la forma*

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \theta'(\sigma(s, T)) \sigma_2(s, T) ds - \int_0^t \sigma_2(s, T) dL_s \quad (5.15)$$

con $t \in [0, T]$, dove $f(0, s) := -\frac{\partial}{\partial s} \log P(0, s)$ è determinata dai prezzi iniziali dei bond e dove σ_2 è la derivata parziale di σ rispetto alla seconda variabile, cioè

$$\sigma_2(s, T) := -\frac{\partial}{\partial T} \sigma(s, T).$$

Dimostrazione. Ricordando l'equazione (5.13) possiamo scrivere il logaritmo del prezzo del bond come

$$\log P(t, T) = \log P(0, T) + \log \beta(t) - \int_0^t \theta(\sigma(s, T)) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dL_s. \quad (5.16)$$

Questa espressione è differenziabile con continuità rispetto a T , risultato evidente per i primi tre addendi della somma. Per calcolare la derivata del quarto termine ricordiamo le condizioni imposte su $P(t, T)$ e $\sigma(s, T)$ e la (5.9). Possiamo quindi considerare la seguente rappresentazione

$$\int_0^t \sigma(s, T) dL_s = \sigma(t, T) L_t - \int_0^t L_s \sigma_1(s, T) ds$$

la cui derivata è facilmente calcolabile e si ottiene quindi la (5.15). \square

5.6 Calcolo del numerario

Vogliamo ora determinare la forma del numerario

Proposizione 5.7. *Nelle ipotesi del nostro modello, il numerario $\beta(t)$ è dato da*

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

Dimostrazione. Utilizziamo la condizione (5.3), $P(t, t) = 1$, che implica

$$\beta(t) = \frac{1}{P(0, t)} \exp\left(\int_0^t \theta(\sigma(s, t)) ds - \int_0^t \sigma(s, t) dL_s\right). \quad (5.17)$$

Dall'altra parte si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^t r(s)ds &= \int_0^t f(0, s)ds + \int_0^t \int_0^s \theta'(\sigma(v, s))\sigma_2(v, s)dvds \\ &\quad - \int_0^t \int_0^s \sigma_2(v, s)dL_v ds \\ &= -\log P(0, t) + \int_0^t \theta(\sigma(t, s))ds - \int_0^t \sigma(s, t)dL_s, \end{aligned} \quad (5.18)$$

dove gli integrali doppi sono stati trasformati usando il teorema di Fubini. Concludiamo usando le condizioni $P(0, 0) = 1$ e $\sigma(t, t) = 0$ e osservando che (5.18) è il logaritmo di (5.17). \square

5.7 Condizioni sulla Funzione Caratteristica

Consideriamo ora una particolare classe di processi di Lévy. Prima però ricordiamo alcune proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} , della funzione f , tenendo conto che la funzione caratteristica non è altro che una trasformata di Fourier. Si ha che vale il seguente teorema:

Teorema 5.8. ² *La trasformata di Fourier è un operatore lineare e continuo da $L^1(\mathbb{R}^d)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, con norma uguale a 1. Inoltre per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la funzione \hat{f} è uniformemente continua su \mathbb{R}^d .*

Proposizione 5.9. *Sia L un processo di Lévy e siano $C, \gamma, \eta > 0$ costanti reali tali che vale*

$$|\mathbb{E}[\exp(iuL_1)]| \leq C \cdot \exp(-\gamma|u|^\eta) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (5.19)$$

Supponiamo $t \in]0, \infty[$ e prendiamo $f, g : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue che non siano l'una multiplo scalare dell'altra.

Allora la densità congiunta di $X + Y$, con $X := \int_0^t f(s)dL_s$ e $Y := \int_0^t g(s)dL_s$ è continua rispetto alla misura di Lebesgue λ^2 su \mathbb{R}^2 .

Dimostrazione. Dal teorema precedente si ricava che una densità di probabilità è continua su \mathbb{R}^d rispetto alla misura di Lebesgue λ^d se la sua funzione caratteristica è integrabile su \mathbb{R}^d . Quindi basta provare l'integrabilità della funzione caratteristica $\phi(u, v)$ di $X + Y$.

Sia $\chi(u)$ la funzione generatrice di L_1 , cioè $\exp(\chi(u)) = \mathbb{E}[\exp(iuL_1)]$. Abbiamo che la funzione caratteristica

$$\phi(u, v) \equiv \mathbb{E}[\exp(iuX + ivY)] = \exp\left(\int_0^t \chi(uf(s) + vg(s))ds\right). \quad (5.20)$$

Usando la condizione (5.19) abbiamo che

$$|\phi(u, v)| = \exp\left(\int_0^t \operatorname{Re} \chi(uf(s) + vg(s))ds\right) \leq C^t \exp\left(-\gamma \int_0^t |uf(s) + vg(s)|ds\right).$$

²Per la dimostrazione si veda [1, pag. 6].

Poichè $uf(s) + vg(s)$ è il prodotto scalare tra $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, possiamo, per tutti i vettori $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, portare fuori dall'integrale la norma euclidea di $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, lasciando il vettore normato $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$

$$\int_0^t |uf(s) + vg(s)|^\eta ds = \left| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right|^\eta \cdot \int_0^t \left| \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix} \right|^\eta ds.$$

L'integrale sulla destra è una funzione continua del vettore $\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$, quindi ha un minimo m sul disco unitario in \mathbb{R}^2 . La condizione che le funzioni f e g non sono l'una multiplo scalare dell'altra è equivalente alla seguente: non esiste una linea retta che passa per l'origine e alla quale tutti i punti $\begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix}, s \in [0, t]$, appartengono. Ovviamente si ha che $m \geq 0$. Possiamo però escludere il valore $m = 0$, il quale implicherebbe che l'integrando è nullo $\forall s$: questo è impossibile perché altrimenti tutti i punti $\begin{pmatrix} f(s) \\ g(s) \end{pmatrix}$ apparirebbero ad una retta che passa per l'origine. Si ha quindi $m > 0$ da cui segue

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\phi(u, v)| d\lambda^2(u, v) \leq C^t \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\gamma m \left| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right|^\eta\right) d\lambda^2(u, v) < \infty.$$

□

5.8 Lo Short Rate è un Processo di Markov

Il processo short rate è implicitamente definito dai prezzi del bond. Ponendo $T = t$ nella (5.15), si ha che $r(t)$ dipende dalla scelta della struttura della volatilità σ . Prendiamo quindi in considerazione quali strutture della volatilità rendono il processo $r(t)$, un processo di Markov.

Lemma 5.10. *Sia L un processo di Lévy che soddisfi le condizioni di integrabilità (5.5) ed esistano costanti $C, \gamma, \eta > 0$ che soddisfino la (5.19).*

Allora lo short rate $r(t)$ è un processo di Markov se e solo se la derivata parziale $\sigma_2(s, T)$ della volatilità σ , soddisfa la seguente condizione: per ogni T, U fissati tali che $0 < T < U \leq T^$, la funzione $\sigma_2(\cdot, U)$ è un multiplo scalare della funzione $\sigma_2(\cdot, T)$ su $[0, T]$, cioè c'è una costante reale ξ (che può dipendere da T e U) tale che*

$$\sigma_2(s, U) = \xi \sigma_2(s, T) \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Dimostrazione. Dobbiamo esaminare il processo $r(t)$ della forma

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \theta'(\sigma(s, t)) \sigma_2(s, t) ds - \int_0^t \sigma_2(s, t) dL_s \quad t \in [0, T^*].$$

Poichè $f(0, \cdot), \theta(\cdot)$ e $\sigma(\cdot, \cdot)$ sono funzioni deterministiche, $r(t)$ è un processo di Markov se e solo se il processo $Z \equiv (Z(T))_{T \in [0, T^*]}$ è di Markov, dove

$$Z(T) := \int_0^T \sigma_2(s, t) dL_s. \quad (5.21)$$

Per definizione, Z è un processo di Markov se e solo se $\forall T, U \in \mathbb{R}$ con $0 < T < U \leq T^*$ vale la seguente uguaglianza

$$P[Z(U) \in B | \mathcal{F}_T] = P[Z(U) \in B | Z(T)] \quad \forall B \in \mathcal{B}^1.$$

Dimostriamo la *necessità*. Assumiamo quindi che $r(t)$ sia un processo di Markov, quindi per le considerazioni precedenti, il processo Z definito nella (5.21) è markoviano. Questo implica che

$$E[Z(U)|\mathcal{F}_T] = E[Z(U)|Z(T)]. \quad (5.22)$$

Usando la (5.21) e l'uguaglianza precedente otteniamo

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s | \mathcal{F}_T\right] + E\left[\int_T^U \sigma_2(s, t)dL_s | \mathcal{F}_T\right] \\ &= E\left[\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s | Z(T)\right] + E\left[\int_T^U \sigma_2(s, t)dL_s | Z(T)\right] \end{aligned}$$

Poichè l'integrando $\sigma_2(\cdot, U)$ è deterministico e poichè L è un processo con incrementi indipendenti, $\int_T^U \sigma_2(s, t)dL_s$ è indipendente dall' σ -algebra \mathcal{F}_T e in particolare da $Z(T)$. Questo implica che si può sostituire alla speranza condizionale, la speranza, in entrambe i secondi addendi dell'equazione precedente. Inoltre si ha che $\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s$ è misurabile rispetto a \mathcal{F}_T , quindi la condizione (5.22) è equivalente a

$$\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s = E\left[\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s \middle| \int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s\right].$$

Questo significa che l'integrale $\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s$ può essere espresso come una funzione G applicata all'integrale $\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s$. Quindi la legge congiunta di queste due variabili aleatorie è concentrata sull'insieme di misura nulla $\{(x, G(x)) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ quindi non può essere continua rispetto a λ^2 .

Se $\sigma_2(\cdot, T) \not\equiv 0$, si ha allora dalla Proposizione (5.9) che $\sigma_2(\cdot, U)$, ristretta $[0, T]$, è un multiplo scalare di $\sigma_2(\cdot, T)$.

Se, dall'altro canto, $\sigma_2(\cdot, T) \equiv 0$, allora $\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s = G(\int_0^T \sigma_2(s, t)dL_s) = G(0)$ è una funzione deterministica e si ottiene che $\sigma_2(\cdot, U) \equiv 0$ su $[0, T]$.

Dimostriamo la *sufficienza*. Per le considerazioni preliminari, dobbiamo dimostrare che il processo Z definito in (5.21) è markoviano.

Supponiamo che T e U soddisfino $0 < T < U \leq T^*$. Allora vale l'uguaglianza

$$Z(U) = \int_0^T \sigma_2(s, U)dL_s + \int_T^U \sigma_2(s, U)dL_s.$$

Per ipotesi, abbiamo che il primo termine del lato destro dell'equazione diventa

$$\int_0^T \xi \sigma_2(s, T)dL_s = \xi Z(T)$$

per qualche costante ξ , quindi è \mathcal{F}_T -misurabile. Il secondo termine è indipendente da \mathcal{F}_T e da questi due fatti si ottiene, usando semplici proprietà della speranza condizionale, la seguente uguaglianza

$$P[Z(U) \in B | \mathcal{F}_T] = P[Z(U) \in B | \xi \cdot Z(T)] \quad \forall B \in \mathcal{B}^1$$

Ricordando inoltre che $\sigma(\xi \cdot Z(T)) \subset \sigma(Z(T)) \subset \mathcal{F}_T$, si ha

$$\mathbb{P}[Z(U) \in B | \mathcal{F}_T] = \mathbb{P}[Z(U) \in B | Z(T)] \quad \forall B \in \mathcal{B}^1.$$

□

Teorema 5.11. *Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni del Lemma precedente e che $\sigma_2(\cdot, T) \not\equiv 0$, $\forall T \in [0, T^*]$. Allora lo short rate $r(t)$ è un processo di Markov se e solo se la derivata parziale ha la seguente rappresentazione*

$$\sigma_2(t, T) = \tau(t) \cdot \zeta(T) \quad \forall (t, T) \in \Delta,$$

dove $\tau : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\zeta : [0, T^*] \rightarrow]0, \infty[$ sono funzioni differenziabili con continuità.

Dimostrazione. Assumiamo che $r(t)$ sia markoviano, il Lemma precedente implica che per ogni $0 < T < U \leq T^*$, la restrizione di $\sigma_2(\cdot, U)$ a $[0, T]$ è un multiplo scalare di $\sigma_2(\cdot, T)$. Se c'è un T tale che $\sigma_2(t, T) \neq 0$ allora si ha che

$$\sigma_2(t, S) \neq 0 \quad \forall S \in [t, T^*]$$

Questo perché, dalle ipotesi (5.8), σ_2 è una funzione continua e non esiste $T \in [0, T^*]$ tale che la funzione $t \rightarrow \sigma_2(t, T)$ sia identicamente zero.

In particolare, abbiamo che $\sigma_2(t, T^*) \neq 0$ se $\sigma_2(t, T) \neq 0$ per qualche T . Quindi la costante ξ del Lemma precedente, esiste ed è diversa da zero. Questo significa che

$$\sigma_2(t, T) = \frac{\sigma_2(t, T^*)}{\xi} \quad \text{su } [0, T],$$

da cui segue che per $(t, T) \in \Delta$ si ha

$$\begin{aligned} \tau(t) &:= \sigma_2(t, T^*) \\ \zeta(T) &:= \frac{\sigma_2(s, T)}{\sigma_2(s, T^*)}, \end{aligned}$$

per ogni $s \in [0, T^*]$ che soddisfa $\sigma_2(s, T) \neq 0$ e quindi $\sigma_2(s, T^*) \neq 0$. Per ipotesi, per ogni $T \in [0, T^*]$ almeno una tale s esiste e per le considerazioni fatte sopra, la definizione di ζ non dipende dalla scelta di s .

La derivabilità delle funzioni τ e ζ viene dalla differenziabilità di σ_2 . □

5.9 Volatilità stazionaria

Prendiamo ora in considerazione la classe delle volatilità stazionarie, ipotesi ragionevole se vogliamo lavorare con volatilità deterministiche.

Definizione 5.12. *Una volatilità $\sigma(t, T)$ è **stazionaria** se esiste una funzione $\tilde{\sigma} : [0, T^*] \rightarrow [0, \infty[$ due volte differenziabile con continuità tale che $\sigma(t, T) = \tilde{\sigma}(T - t)$ per ogni $(t, T) \in \Delta$.*

Vogliamo quindi dimostrare che lo short rate è markoviano se e solo se la struttura della volatilità è del tipo Vasiček o Ho-Lee. L'analogo risultato nel caso gaussiano è stato dimostrato da Carverhill(1994).

Teorema 5.13. *Supponiamo soddisfatte le ipotesi del Lemma (5.10). Se $r(t)$ è un processo di Markov e se la struttura della volatilità è stazionaria, allora $\sigma(t, T)$ ha una delle seguenti forme:*

$$\begin{aligned}\sigma(t, T) &= \frac{\hat{\sigma}}{a} \cdot (1 - e^{-a(T-t)}) && \text{(Vasiček)} \\ \sigma(t, T) &= \hat{\sigma} \cdot (T - t) && \text{(Ho-Lee)},\end{aligned}\tag{5.23}$$

con costanti reali $\hat{\sigma} > 0$ e $a \neq 0$

Dimostrazione. Per ipotesi $\sigma(t, T)$ è stazionaria, la derivata parziale $\sigma_2(t, T)$ è data da

$$\frac{\partial}{\partial T} \sigma(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \tilde{\sigma}(T - t) = \tilde{\sigma}'(T - t)\tag{5.24}$$

che è ancora stazionaria.

Se $\sigma_2(t, T) \equiv 0$, allora dalla ipotesi (5.8), $\sigma(s, s) = 0, \forall s \in [0, T^*]$ e quindi $\sigma \equiv 0$, ma per la stessa (5.8) non possiamo avere $\sigma \equiv 0$.

Consideriamo quindi $\sigma_2(t, T) \not\equiv 0$ e dimostriamo che $\sigma_2(t, T) \neq 0, \forall (t, T) \in \Delta$. Usiamo il fatto che se lo short rate è markoviano (come nel teorema precedente) si ha che $\sigma_2(t, T) \neq 0$ implica $\sigma_2(t, S) \neq 0, \forall S \in [t, T^*]$. In particolare se $(t, T) \in \Delta$ soddisfa $\sigma_2(t, T) \neq 0$, allora questo implica $\sigma_2(t, t) \neq 0$. Dalla stazionarietà di $\sigma_2(t, T)$, si ha che $\sigma_2(s, s) \neq 0, \forall s \in [0, T^*]$ e quindi $\sigma_2(s, T) \neq 0, \forall s \in \Delta$.

La funzione continua σ_2 non ha zeri sull'insieme connesso Δ , sarà quindi strettamente positiva o strettamente negativa, ma il caso $\sigma_2 < 0$ è precluso dall'ipotesi (5.8), per cui abbiamo $\sigma_2 > 0$.

La condizione $\sigma_2 > 0$ implica in particolare $\sigma_2 \not\equiv 0, \forall T \in [0, T^*]$, per cui siamo nelle ipotesi del teorema precedente, esiste quindi la decomposizione

$$\sigma_2(t, T) = \tau(t)\zeta(T),$$

con $\zeta > 0$ e τ funzioni derivabili. La condizione $\sigma_2 > 0$ implica inoltre $\tau > 0$. Differenziando rispetto a t e T si ottiene usando la (5.24)

$$\tau'(t)\zeta(T) = -\tilde{\sigma}(T - t) = -\tau(t)\zeta'(T),$$

da cui

$$(\log \tau(t))' = \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = -\frac{\zeta'(T)}{\zeta(T)} = (\log \zeta(T))' \quad \forall (t, T) \in \Delta.$$

Poichè t e T sono variabili aleatorie indipendenti, denotando il loro valore comune con a , otteniamo

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \exp(at + C_1) \\ \zeta(T) &= \exp(-aT + C_2)\end{aligned}$$

con C_1 e C_2 sono costanti reali e si ottiene

$$\sigma_2(t, T) = \tau(t)\zeta(T) = e^{C_1+C_2} \cdot e^{-a(T-t)}.\tag{5.25}$$

Definiamo $\hat{\sigma} = e^{C_1+C_2}$. Integrando la (5.25) rispetto a T e usando la condizione (5.8) $\sigma(s, s) = 0, s \in [0, T^*]$, si ha la rappresentazione desiderata. \square

L'inverso del Teorema appena dimostrato, si ottiene facilmente dal Lemma (5.10). Abbiamo quindi dimostrato l'equivalenza tra lo short rate markoviano e la struttura della volatilità Vasiček o Ho-Lee.

Vediamo ora come possiamo scrivere la dinamica dello short rate, alla luce dei risultati dimostrati

Proposizione 5.14. *Sia L un processo di Lévy che soddisfi le ipotesi del Lemma (5.10). Supponiamo che $r(t)$ sia un processo di Markov e che non esista nessun $T \in [0, T^*]$ tale che la funzione $\sigma_2(\cdot, T) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sia identicamente zero. Allora $r(t)$ soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica*

$$\begin{aligned} dr(t) = & \left[\frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \theta'(0) \sigma_2(t, t) + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\theta(\sigma(s, t))) ds \right] dt \\ & - \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (\theta(\sigma(s, t))) ds + f(0, t) - r(t) \right] dt - \sigma_2(t, t) dL_t, \end{aligned} \quad (5.26)$$

dove la funzione differenziabile ζ è quella ottenuta dalla decomposizione $\sigma_2(t, T) = \tau(t)\zeta(T)$. Se inoltre la volatilità σ ha una struttura stazionaria, abbiamo che

$$\begin{aligned} dr(t) = & [f_2(0, t) + \theta'(\sigma(0, t))\sigma_2(0, t)] dt \\ & - \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} [\theta(\sigma(0, t))] ds + f(0, t) - r(t) dt - \sigma_2(t, t) dL_t. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Dimostrazione. Consideriamo la rappresentazione (5.15) con $T=t$:

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \theta(\sigma(s, t)) ds - \int_0^t \sigma_2(s, t) dL_s, \quad (5.28)$$

chiaramente i primi due termini della somma sono differenziabili rispetto a t . Ricordiamo le condizioni (5.5) e la (5.8), le quali garantiscono la differenziabilità della funzione $t \rightarrow P(0, t)$ e della volatilità σ e inoltre teniamo conto del fatto che θ è analitica. Per il terzo termine usiamo la decomposizione $\sigma_2(t, T) = \tau(t)\zeta(T)$, da cui deriva

$$\int_0^t \sigma_2(s, T) dL_s = \int_0^t \tau(s) dL_s \zeta(t).$$

Consideriamo le due semimartingale

$$\begin{aligned} X_t &= \int_0^t \tau(s) dL_s \\ Y_t &= \zeta(t) \end{aligned}$$

dove Y ha traiettorie continue di variazione limitata, con $\langle X, Y \rangle_t = 0$. Abbiamo quindi dalla (4.6) che vale l'uguaglianza $d(XY) = XdY + YdX$. Possiamo allora scrivere dalla (5.28)

$$\int_0^t \sigma_2(s, t) dL_s = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \theta(\sigma(s, t)) ds + f(0, t) - r(t), \quad (5.29)$$

da cui derivando si ottiene

$$\begin{aligned} d\left(\int_0^t \tau(s)dL_s \zeta(t)\right) &= \zeta(t)d\left(\int_0^t \tau(s)dL_s\right) + \zeta'(t) \int_0^t \tau(s)dL_s \\ &= \sigma_2(t, t)dL_t + \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} \int_0^t \tau(s)\zeta(t)dL_s \\ &= \sigma_2(t, t)dL_t + \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \theta(\sigma(s, t)) ds + f(0, t) - r(t) \right) \end{aligned}$$

da cui si ottiene la (5.26).

Nel caso in cui σ sia stazionaria ponendo $\sigma_2(t, T) = -\sigma_1(t, T)$, gli integrali possono essere calcolati esplicitamente e si ottiene facilmente la (5.27). \square

In particolare usando nella (5.27) una struttura della volatilità del tipo Vasiček, otteniamo l'uguaglianza

$$\begin{aligned} dr(t) &= a \left[\frac{f_2(0, t)}{a} + \theta' \left(\frac{\hat{\sigma}}{a} (1 - e^{-at}) \right) \frac{\hat{\sigma}}{a} e^{-at} + \theta \left(\frac{\hat{\sigma}}{a} (1 - e^{-at}) \right) \right. \\ &\quad \left. + f(0, t) - r(t) \right] dt - \hat{\sigma} dL_t. \end{aligned}$$

Questo significa che il processo short rate, soddisfa un'equazione della forma

$$dr(t) = a(\rho(t) - r(t)) - \hat{\sigma} dL_t$$

e nel caso in cui il processo di Lévy L sia un moto Browniano, la struttura dello short rate diventa del tipo Vasiček generalizzato.

5.10 Confronto con il modello gaussiano

Consideriamo la dinamica del forward rate della (5.15)

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \theta'(\sigma(s, T)) \sigma_2(s, T) ds - \int_0^t \sigma_2(s, T) dL_s$$

e supponiamo che lo short rate sia un processo di Markov. Usando la fattorizzazione $\sigma_2(s, T) = \tau(s)\zeta(T)$ è facile dimostrare che il forward rate è una funzione deterministica dello short rate $r(t)$, infatti prendendo

$$\sigma_2(s, T) = \tau(s)\zeta(T) \cdot \frac{\zeta(t)}{\zeta(t)} = \sigma_2(s, t) \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)}$$

da cui si ricava

$$\int_0^t \sigma_2(s, T) dL_s = \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \int_0^t \sigma_2(s, t) dL_s$$

e ricordando la (5.29)

$$\int_0^t \sigma_2(s, t) dL_s = \int_0^t \theta'(\sigma(s, t)) \sigma_2(s, t) ds + f(0, t) - r(t)$$

si ottiene

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t (\theta'(\sigma(s, T)) - \theta'(\sigma(s, t))) \sigma_2(s, T) ds \\ + \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} (r(t) - f(0, t)).$$

Nel caso σ stazionaria ponendo $\sigma_2(t, T) = -\sigma_1(t, T)$, gli integrali possono essere calcolati esplicitamente usando $\sigma_2(s, T) = \sigma_2(s, t) \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)}$ e si ottiene

$$f(t, T) = f(0, T) + \theta(\sigma(0, T)) - \theta(\sigma(t, T)) - \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \theta(\sigma(0, t)) \\ + \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} (r(t) - f(0, t)).$$

Prendendo gli stessi valori per lo short rate e la stesse condizioni iniziali per il forward rate, ricordando che la funzione generatrice $\theta_{Gauss}(u) = \frac{u^2}{2}$, si ha la differenza tra il forward rate del modello di Lévy e tra quello del caso gaussiano

$$f_{Lévy}(t, T) - f_{Gauss}(t, T) = \left(\theta(\sigma(0, T)) - \frac{\sigma(0, T)^2}{2} \right) - \left(\theta(\sigma(t, T)) - \frac{\sigma(t, T)^2}{2} \right) \\ - \frac{\zeta(T)}{\zeta(t)} \left(\theta(\sigma(0, T)) - \frac{\sigma(0, T)^2}{2} \right).$$

5.11 Moto Iperbolico di Lévy

Vediamo ora un caso in cui vale la condizione (5.19). Un *moto iperbolico di Lévy* è caratterizzato da una variabile L_1 avente una legge iperbolica la cui densità rispetto alla misura di Lebesgue è

$$hyp_{\alpha, \beta, \delta, \mu}(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta \cdot (x - \mu)\right)$$

dove con K_1 indichiamo una funzione di *Bessel* del terzo tipo di indice 1, cioè una soluzione $K_1(z)$ dell'equazione

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + 1)w = 0$$

I parametri α, β, δ e μ soddisfano le relazioni

$$|\beta| < \alpha \\ \delta > 0$$

La funzione caratteristica di questa legge può essere facilmente calcolata e otteniamo, con $u \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{\alpha, \beta, \delta, \mu}(u) = e^{iu\mu} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \cdot \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}}$$

Usando lo sviluppo asintotico di K_1 , con $|\arg(z)| < \frac{3\pi}{2}$,

$$K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{3}{8z} - \frac{15}{128z^2} - \dots \right)$$

si ha che la condizione (5.19) è verificata quindi le strutture della volatilità Vasicek o Ho-Lee sono le sole strutture stazionarie che rendono il processo short rate, un processo di Markov.

La funzione generatrice dei momenti è

$$M_{\alpha,\beta,\delta,\mu}(u) = e^{u\mu} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \cdot \frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2})}{\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2}} \quad (|\beta + u| < \alpha),$$

si ha inoltre che poichè la funzione generatrice dei momenti esiste per ogni u tale che $|u| < \alpha - |\beta|$, la condizione (5.7) diventa

$$\sup\{|\sigma(t, T)| : 0 \leq t \leq T \leq T^*\} < \alpha - |\beta|.$$

5.12 Calcolo del prezzo di un'opzione

Nel modello che è stato analizzato, Raible(1998) ha dimostrato che la misura martingala è unica, questo significa che i prezzi dei contratti su tassi d'interesse sono unicamente determinati. Abbiamo quindi la stessa situazione del modello di Black-Scholes, dove i prezzi delle opzioni sono unicamente determinati dal prezzo dell'azione sottostante.

Al tempo 0 il prezzo di un'opzione europea call su un bond con maturità T^* , data di esercizio T e prezzo strike K , è dato da

$$C(0, T, T^*, K) := E \left[\frac{1}{\beta(t)} (P(T, T^*) - K)^+ \right]. \quad (5.30)$$

Nel caso gaussiano tale prezzo può essere calcolato con un cambio di numerario, come nel Capitolo 4 e ottenere la (4.7)

$$C(0, T, T^*; K) = P(0, T^*)\Phi(d_1) - KP(0, T)\Phi(d_2)$$

dove con Φ indichiamo la densità della legge normale standard e

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\log\left(\frac{P(0, T)}{KP(0, T^*)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma^2(T)}{\sqrt{\Sigma^2(T)}} \\ d_1 &= d_2 + \sqrt{\Sigma^2(T)} \\ \Sigma^2(T) &= \int_0^T (S(t, T) - S(t, T^*))^2 dt \end{aligned}$$

Se nel nostro modello prendiamo come processo di Lévy, un moto iperbolico di Lévy ed è ancora possibile valutare numericamente la (5.30), infatti ricordando l'ipotesi (5.3), $P(T, T) = 1$ che implica

$$\frac{1}{\beta(T)} = P(0, T) \exp \left(- \int_0^T \theta(\sigma(s, T)) ds + \int_0^T \sigma(s, T) dL_s \right).$$

La speranza in (5.30) può essere scritta come

$$\begin{aligned} E \left[\left(P(0, T^*) \exp \left(- \int_0^T \theta(\sigma(s, T^*)) ds + \int_0^T \sigma(s, T^*) dL_s \right) \right. \right. \\ \left. \left. - K \cdot P(0, T) \exp \left(- \int_0^T \theta(\sigma(s, T)) ds + \int_0^T \sigma(s, T) dL_s \right) \right)^+ \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Le sole variabili aleatorie che compaiono, sono i due integrali stocastici $X := \int_0^T \sigma(s, T^*) dL_s$ e $Y := \int_0^T \sigma(s, T) dL_s$, mentre gli altri termini sono deterministici e possono essere calcolati facilmente.

Per il calcolo della speranza (5.31), dobbiamo conoscere la densità congiunta delle variabili aleatorie X e Y .

Dalla (5.20) si ha che la corrispondente funzione caratteristica è

$$E[\exp(iuX + ivY)] = \exp \left(\int_0^T (\chi(u\sigma(s, T^*) + v\sigma(s, T)) ds) \right),$$

dove definiamo $\chi(u) = \log E[\exp(iuL_1)]$.

Usiamo ora il fatto che ogni moto iperbolico di Lévy soddisfa le condizioni del Proposizione (5.9). Consideriamo che la volatilità abbia una struttura Vasiček, per $T < T^*$ le funzioni $\sigma(\cdot, T)$ e $\sigma(\cdot, T^*)$ sono continue, l'una è multiplo scalare dell'altra. La Proposizione (5.9) implica che la densità congiunta delle due variabili aleatorie definite sopra è continua rispetto a λ^2 . La legge congiunta di X e Y ha quindi una densità rispetto alla misura di Lebesgue $\rho(x, y)$ data da

$$\rho(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left(\int_0^t \chi(u\sigma(s, T^*) + v\sigma(s, T)) ds \right) e^{-iux - ivy} d\lambda^2(u, v).$$

Conoscendo la densità, possiamo quindi calcolare la speranza.

Bibliografia

- [1] P.Acquistapace: *Appunti del corso di analisi funzionale*
- [2] N.H.Bingham e R.Kiesel: *Risk-Neutral Valuation*. Springer, 1998.
- [3] T.Björk: Interest Rate Theory. *Financial Mathematics*, ed. W.Runggaldier, Lecture Notes in Mathematics, No. 1656, 53-122. Springer, 1997.
- [4] E.Eberlein e W.Kluge: *Exact pricing formulae for caps and swaptions in a Lévy term structure model*, 2005.
- [5] E.Eberlein e W.Kluge: *Valuation of floating range notes in Lévy term structure models*, 2004.
- [6] E.Eberlain e S.Raible: Term Structure Models driven by general Lévy processes. *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 1 (January 1999), 31-53.
- [7] J.Jacod e A.N.Shiryaev: *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 1987.
- [8] D.Lamberton e B.Lapeyre: *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall, 1996.
- [9] G.Letta: *Probabilità Elementare*. Zanichelli, 1993.
- [10] F.Özkan: *Lévy Processes in Credit Risk and Market Models*, 2002.
- [11] P.Protter: *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [12] S.Shreve: *Stochastic Calculus and Finance*, 1997.