

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN SCIENZE FISICHE

Anno Accademico 2004-2005

Tesi di Laurea Specialistica

**Analisi lineare della stabilità
idrodinamica dell'esplosione di
una Supernova Ia**

CANDIDATO

Daiana Di Nino

RELATORE

Prof. Steven Shore

Indice

Introduzione	5
1 Le Supernovae	8
1.1 Importanza delle Supernovae	8
1.2 Classificazione delle Supernovae	12
1.3 Vincoli osservativi per i modelli delle Supernovae di tipo Ia . .	15
1.4 Formazione delle Supernovae di tipo Ia	18
1.4.1 Innescio delle reazioni termonucleari	19
1.5 Modelli per le Supernovae di tipo Ia	21
1.5.1 Modello con detonazione	23
1.5.2 Modello con deflagrazione	27
1.5.3 Modello a detonazione ritardata	29
2 Equazioni del moto per i fluidi	32
2.1 Termodinamica di un fluido ed equazione di stato	32
2.2 Funzione di distribuzione	35
2.3 Metodo dei momenti	36
2.4 Le equazioni dei fluidi	38
2.4.1 Pressione	39
2.4.2 Equazione di continuità	41
2.4.3 Equazione del moto	42
2.4.4 Equazione dell'energia	44
2.5 La velocità del suono	45
2.6 Superfici di discontinuità	48
2.7 Onde d'urto	52
3 Teoria delle combustioni	58
3.1 Dinamica delle combustioni	58
3.2 Cinetica delle reazioni	65
3.3 Deflagrazione	70
3.4 Detonazione	74

4	Modello di base per le Supernovae di tipo Ia	80
4.1	Fase di pre-supernova	80
4.2	Fase di deflagrazione laminare	85
4.2.1	Instabilità di Landau-Darrieus	88
4.2.2	Instabilità di Rayleigh-Taylor	93
4.3	Fase di combustione turbolenta	96
4.4	Fase di detonazione	97
4.4.1	Soluzione per $z < 0$	101
4.4.2	Soluzione per $z > 0$	102
4.4.3	Condizioni al bordo	104
5	Conclusioni e futuri sviluppi	110
A	Supernovae di tipo Ia come indicatori di distanza	115
B	Fondamenti dell'analisi della stabilità di un flusso	118
	Ringraziamenti	122
	Bibliografia	124

Introduzione

In questa tesi studiamo la stabilità lineare del fronte d'onda di combustione per un modello analitico di esplosione di una Supernova di tipo Ia.

Le Supernovae rappresentano degli oggetti estremamente interessanti dal punto di vista astrofisico, perchè, oltre ad essere dei naturali laboratori di idrodinamica, vengono utilizzate come candele standard per misurare grandi distanze, e, di conseguenza, per porre limiti sui parametri cosmologici. Esse altresì giocano un ruolo fondamentale nella nucleosintesi degli elementi pesanti. È quindi molto importante una precisa comprensione della fisica dell'esplosione della Supernova. Tale comprensione è, però, ancora lungi dall'essere completa e, in particolare, risulta necessario indagare meglio il ruolo che le instabilità idrodinamiche hanno nel delineare la struttura dell'esplosione.

Generalmente si ritiene che una Supernova di tipo Ia sia generata dall'esplosione di una nana bianca (cioè una stella ad altissima densità costituita essenzialmente da carbonio, ossigeno ed elettroni degeneri) che accresce massa da una compagna. L'energia acquisita in seguito all'accrescimento è maggiore delle perdite (dovute principalmente all'emissione di neutrini) e la stella aumenta quindi la sua temperatura centrale fino all'innesco della fusione del carbonio, che avviene in un regime esplosivo. Poichè inizialmente il trasporto del calore è dovuto a fenomeni diffusivi, si sviluppa un fronte d'onda di combustione che si propaga a velocità subsonica in un regime di deflagrazione. Negli stadi avanzati dell'esplosione, quando la densità è scesa in seguito all'espansione della struttura stellare, subentra un regime di detonazione, nel quale il riscaldamento della materia è legato alla propagazione di un'onda d'urto.

Queste fasi esplosive sono un fenomeno estremamente complesso, determinato dall'interazione di differenti meccanismi fisici (reazioni termonucleari, perdite di neutrini e raggi gamma, propagazione di onde d'urto e instabilità

idrodinamiche). Pertanto spesso si ricorre a una loro modellizzazione tramite l'impiego di simulazioni numeriche. Un approccio di questo genere presenta però il rischio potenziale che i risultati della simulazione siano fortemente condizionati da effetti numerici, specialmente per il fatto che l'intervallo dinamico delle scale fisiche in gioco (da 10^{-5} a 10^7 m) non è attualmente risolubile nella sua completezza.

In questa tesi discutiamo quindi un naturale complemento per le simulazioni numeriche, ovvero un modello analitico per seguire le fasi lineari dell'esplosione di una Supernova. In particolare, identifichiamo, tramite un'analisi basata sui tempi scala e su una stima delle grandezze fisiche in gioco, i principali parametri del problema (come il numero di Mach del fronte di combustione e lo spessore caratteristico della zona di combustione) e studiamo la stabilità lineare del fronte d'onda tramite uno sviluppo in modi normali.

Dai risultati che abbiamo ottenuto studiando la relazione di dispersione, prevediamo un tempo caratteristico per lo sviluppo dell'instabilità del fronte d'onda approssimativamente proporzionale alla lunghezza d'onda della perturbazione. Questo implica l'esistenza di significative instabilità a scale più piccole della risoluzione numerica delle attuali simulazioni che descrivono l'esplosione globale della Supernova. Queste instabilità, di difficile trattazione nelle analisi su grande scala, possono avere importanti conseguenze nell'evoluzione del fronte d'onda che si ripercuotono sulle proprietà dei prodotti finali della nucleosintesi esplosiva (in particolare abbondanza e velocità di espansione).

Nel primo capitolo della tesi presentiamo un quadro generale sulla fisica delle Supernovae e discutiamo le motivazioni per lo studio intrapreso.

Poichè, in prima approssimazione, le stelle possono essere considerate composte da gas omogeneo e fortemente collisionale, nel secondo capitolo deriviamo schematicamente, tramite un approccio basato sulla meccanica statistica, i principali risultati di fluido-dinamica in assenza di campo magnetico per fluidi ideali irrotazionali.

Nel terzo capitolo proseguiamo quindi nell'esposizione degli strumenti fisici necessari per trattare il nostro modello analitico di esplosione di una Supernova. In particolare ci concentriamo sulla discussione dei possibili meccanismi

di combustione, deflagrazione e detonazione, evidenziandone le analogie e le differenze.

Questi risultati vengono infine applicati nel quarto capitolo allo studio delle fasi esplosive dell'evoluzione stellare. Per ottenere un modello analiticamente risolubile schematizziamo in una dimensione il fronte di combustione dell'esplosione come una discontinuità seguita da una zona di reazione in cui avvengono le reazioni nucleari. In regime di deflagrazione assumiamo inoltre che lo spessore di questa zona di reazione sia nullo. Prima e dopo la zona di combustione il fluido è considerato ad una sola componente. Dopo aver ottenuto una soluzione stazionaria per questo modello, procediamo allo studio della stabilità lineare del fronte d'onda tramite uno sviluppo in modi normali che conduce ad una relazione di dispersione dalla quale possiamo ottenere i tempi caratteristici per lo sviluppo di instabilità del fronte d'onda. Notiamo in particolare che l'ampiezza caratteristica di una piccola perturbazione del fronte cresce tanto più velocemente quanto minore è la sua lunghezza d'onda.

Concludiamo quindi discutendo le conseguenze dei risultati ottenuti rispetto alle proprietà a grande scala dell'esplosione.

Capitolo 1

Le Supernovae

1.1 Importanza delle Supernovae

“Why study Supernovae? First, one’s attention is captured by anything new and unusual, and a point of light in the sky is a novelty to draw curiosity. Further study shows that these events are usually at immense distances and hence of gigantic power and one’s imagination is fired with the awesome spectacle of stellar catastrophe.”

Con le precedenti parole J. Craig Wheeler [78] introduce l’affascinante argomento delle *Supernovae*, giustificando perchè l’umanità è da sempre attratta da questo fenomeno (vedi figura 1.1). Con il termine *Supernovae* si intende il momento dell’esplosione di una stella che dura pochi secondi ed è uno dei più potenti eventi esplosivi prodotti in Natura. Infatti, è in grado di emettere un’energia pari a circa $10^{51} \div 10^{53}$ ergs, ovvero più energia di quanta il Sole ne liberi durante tutto il corso della sua vita (miliardi di anni).

La maggior parte dell’energia prodotta durante questa esplosione si trasforma in energia cinetica e termica della materia in espansione, essenzialmente un plasma di nuclei ed elettroni; a questi va aggiunto un significativo flusso di fotoni e neutrini. Quando la somma dell’energia cinetica e dell’energia termica diventa maggiore dell’energia potenziale gravitazionale, la materia della stella non è più legata e continuerà ad espandersi nello spazio interstellare.

È quindi naturale associare ad un evento di Supernova la “morte” di una stella, sebbene, in realtà, l’evoluzione della stella che ha originato l’esplosione prosegue sotto altre forme. Infatti, il nucleo della stella progenitrice può diventare, a seguito dell’esplosione, una stella di neutroni o un buco nero (a seconda della massa iniziale). Inoltre, durante l’esplosione, viene

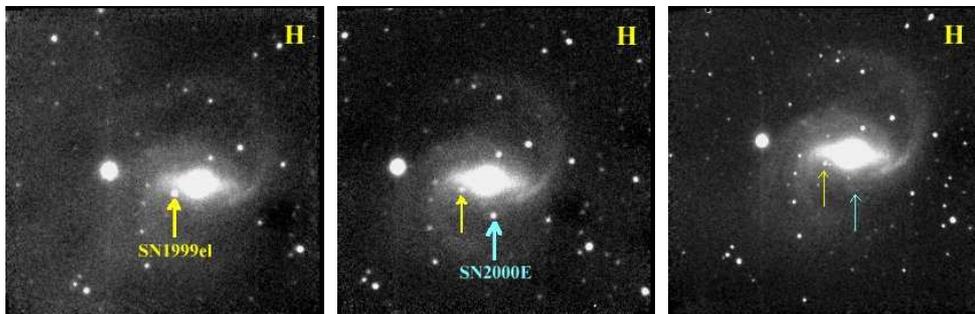


Figura 1.1: La Supernova di tipo II SN1999el (freccia di sinistra) fu scoperta il 21 ottobre 1999 da L. Cao e collaboratori presso l'osservatorio astronomico di Beijing (IAUCirc. No 7288), immagine a sinistra. Il 26 gennaio 2000, presso l'osservatorio di Teramo e Campo Imperatore, durante le osservazioni di monitoraggio di questa Supernova, G. Valentini e i suoi collaboratori hanno scoperto una Supernova di tipo Ia (freccia di destra), la SN2000E (IAU-Circ. No 7351), immagine centrale. L'ultima immagine sulla destra è dell'8 giugno 2000. Le immagini (tratte dal sito web dell'Osservatorio di Campo Imperatore; www.te.astro.it) sono state effettuate nella banda H con un tempo di esposizione totale di 300 secondi.

rilasciata nello spazio interstellare una grande quantità di materia ad una velocità così elevata che si creano delle onde d'urto. Queste onde d'urto sono in grado di perturbare il gas interstellare, inizialmente in quiete, tramite onde di compressione e rarefazione e, quindi, possono indurre la formazione di nuove stelle. Inoltre, la materia espulsa dà origine ad una nube gassosa (vedi figura 1.2), attorno alla stella di neutroni, detta Residuo di Supernova (abbreviato con SNR, dall'inglese Supernova Remnant).

Non tutte le stelle, però, riescono a dare origine ad una Supernova. Infatti, la teoria dell'evoluzione stellare (per la quale rimandiamo alla letteratura specialistica, tra gli altri [15] e, più recente, [4]) associa questi fenomeni a stelle con massa originaria superiore a circa 10 masse solari ($1 M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{33}$ g) oppure a sistemi di due o più stelle. Nel primo caso il meccanismo che conduce all'esplosione è il collasso gravitazionale del nucleo della stella (costituito essenzialmente da nichel e ferro). Nel secondo caso, la situazione è completamente differente (vedi sezione 1.4), e l'esplosione è dovuta ad una catena di reazioni nucleari che hanno luogo nel nucleo di una stella di materia degenera. La Supernova creatasi in questo caso viene detta *termonucleare*.



Figura 1.2: Immagine (tratta dall'ESO Press Release 17/99; www.eso.org) della Crab Nebula nella costellazione del Toro. Si pensa che questa nebulosa sia il Residuo di una Supernova di tipo Ia [68] esplosa nel 1054, riportata negli annali delle osservazioni cinesi. Questa immagine è stata ottenuta il 10 novembre 1999 con lo strumento FORS2, installato all'interno del telescopio ESO. È composta dalla sovrapposizione di tre immagini prese con tre diversi filtri ottici (B, R e S_II). Il colore blu dell'immagine corrisponde alla radiazione di sincrotrone degli elettroni; mentre i "filamenti rosso/arancione" sono le strutture che hanno origine dalle instabilità del fronte di combustione che studieremo in questa tesi.

Lo studio delle Supernovae riveste una notevole importanza per vari fattori. Innanzitutto, le Supernovae contribuiscono in maniera determinante alla produzione di elementi chimici pesanti (cioè quelli con numero atomico superiore a 56). Infatti, il ferro è l'elemento più stabile in Natura, ovvero quello con la maggior energia di legame per nucleone. Quindi è impossibile riuscire a produrre elementi più pesanti del ferro (^{56}Fe) con reazioni di fusione nucleare esotermiche (come quelle che avvengono comunemente nelle stelle). Nella fase di Supernova, invece, l'energia liberata è così alta da creare anche nuclei con numero atomico maggiore di 56. Tale processo viene definito *nucleosintesi esplosiva*.

Le reazioni nucleari che avvengono durante l'esplosione forniscono l'energia per l'espansione, ma non sono direttamente responsabili della produzione dei fotoni che osserviamo. La fonte energetica per la luminosità proviene dal lento decadimento radioattivo del nichel (^{56}Ni , la cui vita media è di circa 15 giorni) in cobalto (^{56}Co , la cui vita media è di qualche mese) e, successivamente, in ferro (^{56}Fe). La luminosità raggiunge infatti il suo massimo circa 15 giorni dopo l'esplosione e poi diminuisce finché tutto il cobalto è decaduto.

La luminosità delle Supernovae (in media $M_V \approx M_B = -19.5$ per le SN Ia¹ [64]) è così elevata che esse possono essere osservate anche a grandi distanze. Di conseguenza, possono essere usate come indicatori per distanze per le quali gli altri mezzi utilizzati sono inservibili. Affinchè ciò sia possibile è, però, necessario che le supernovae presentino caratteristiche molto simili tra di loro. Le osservazioni mostrano che è possibile raggruppare le Supernovae in due classi principali (come vedremo nella prossima sezione) e che, in effetti, è possibile utilizzare alcune Supernovae come “candele standard”. Questa applicazione riveste un'importanza particolare per la determinazione dei parametri cosmologici, tra cui la costante di Hubble. Per una discussione approfondita si rimanda agli articoli della collaborazione *The Supernova Cosmology Project* (vedi [62] e referenze incluse).

Un ulteriore motivo dell'importanza delle Supernovae (di tipo II) è che esse producono, al momento dell'esplosione, un flusso di neutrini particolarmente intenso. La rivelazione di questi neutrini fornisce non solo utili informazioni sulle condizioni fisiche del luogo dell'esplosione, bensì anche sulla fisica stessa del neutrino.

¹La magnitudine assoluta M_V (nel visuale) o M_B (nel blu) è indipendente dalla distanza ed è una misura della luminosità della stella (vedi appendice A).

I modelli standard dell'esplosione di Supernovae prevedono, inoltre, che esse siano sorgenti di onde gravitazionali di intensità tale da poter essere rivelate con gli strumenti di nuova generazione attualmente in costruzione se l'evento esplosivo avviene in galassie vicine. Ulteriori informazioni si possono ricavare dalla rivelazione dei raggi cosmici che sono prodotti o accelerati nei pressi delle Supernovae oppure dalla rivelazione di fotoni X o γ che vengono emessi dagli elementi radioattivi prodotti durante l'esplosione. Infine, è da notare che le Supernovae non hanno mostrato alcuna indicazione di emissione infrarossa o radio, almeno finché gli elementi non si ricombinano in molecole nella nube di materiale espulso (ovvero circa un anno dopo l'esplosione).

Infine, le Supernovae, essendo esplosioni ad altissima energia, rappresentano un laboratorio naturale di idrodinamica, che ci permette lo studio di condizioni fisiche irrealizzabili sulla Terra. Purtroppo, però, (1) non è possibile controllare tali eventi come si farebbe in un laboratorio, (2) i dati che riceviamo sono limitati a proiezioni lungo la linea di vista e quindi dobbiamo affidarci ad assunzioni riguardo alla simmetria del problema, (3) non si può prevedere né il luogo, né l'istante in cui esse avvengono e questo ci impedisce di acquisire le "condizioni iniziali" dell'evento. Tutto questo complica notevolmente lo studio del fenomeno, che si avvale anche dell'uso di simulazioni numeriche.

1.2 Classificazione delle Supernovae

La classificazione delle Supernovae si basa su dati osservativi fotometrici (dai quali si ricava la cosiddetta *curva di luce*) e spettroscopici. La curva di luce di una Supernova è un grafico dell'andamento temporale della sua luminosità in una banda fissata, misurata in termini di magnitudine (vedi appendice A). Generalmente vengono utilizzate la banda visuale V e la banda blu B del sistema di Morgan e Johnson². I dati spettroscopici, invece, consentono di identificare gli elementi chimici presenti nel materiale espulso e, tramite l'effetto Doppler, forniscono anche la velocità, lungo la linea di vista, con cui questo materiale viene espulso.

Il criterio principale per la classificazione delle Supernovae è l'osservazione dei loro spettri nei giorni prossimi a quello di massima luminosità. Se sono presenti le righe dell'idrogeno, la Supernova viene detta *di tipo II* (SN II); nel

²Il filtro nella banda V , larga 90 nm, è centrato sulla lunghezza d'onda di 550 nm, mentre il filtro B ha una larghezza di banda pari a 100 nm ed è centrato sulla lunghezza d'onda di 440 nm.

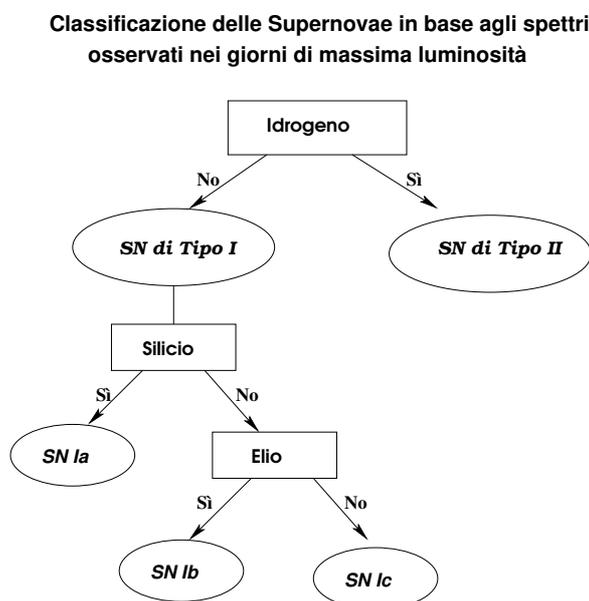


Figura 1.3: *Classificazione delle Supernovae in base ai dati spettroscopici misurati nei giorni di massima luminosità.*

caso contrario, la Supernova è detta *di tipo I* (SN I). Le SN I si suddividono ulteriormente in SN Ia se presentano la riga del Si II (a 6355 \AA) e SN Ib o SN Ic se questa riga non appare (vedi figura 1.3).

Dall'analisi delle curve di luce le Supernovae di tipo I risultano molto omogenee (vedi figura 1.4) e, proprio grazie a questa proprietà, vengono usate come indicatori di distanza (vedi appendice A). Esse, infatti, mostrano un massimo piuttosto stretto della magnitudine apparente con valori che sembrano differire solo per una costante e questo suggerisce che i valori della magnitudine assoluta siano invece gli stessi (vedi appendice A). Inoltre le curve di luce presentano in alcune bande (B, U) un andamento post-massimo di tipo lineare (decrescente) a due pendenze (vedi i due grafici in alto della figura 1.4). Inoltre i tempi caratteristici di questo decadimento sono molto simili per differenti Supernovae (vedi sezione 1.3). Tenendo presente che la magnitudine costituisce un'espressione logaritmica del flusso energetico (cioè della luminosità), tale tipo di decadimento è, in realtà, di tipo esponenziale a due indici. Le Supernovae di tipo II, invece, nonostante possano essere suddivise in sottoclassi in base all'andamento post-massimo delle curve di luce, sono, però, considerate molto eterogenee ed è, quindi, piuttosto difficile definire dei criteri univoci per classificarle. Si può, comunque, dire che le SN

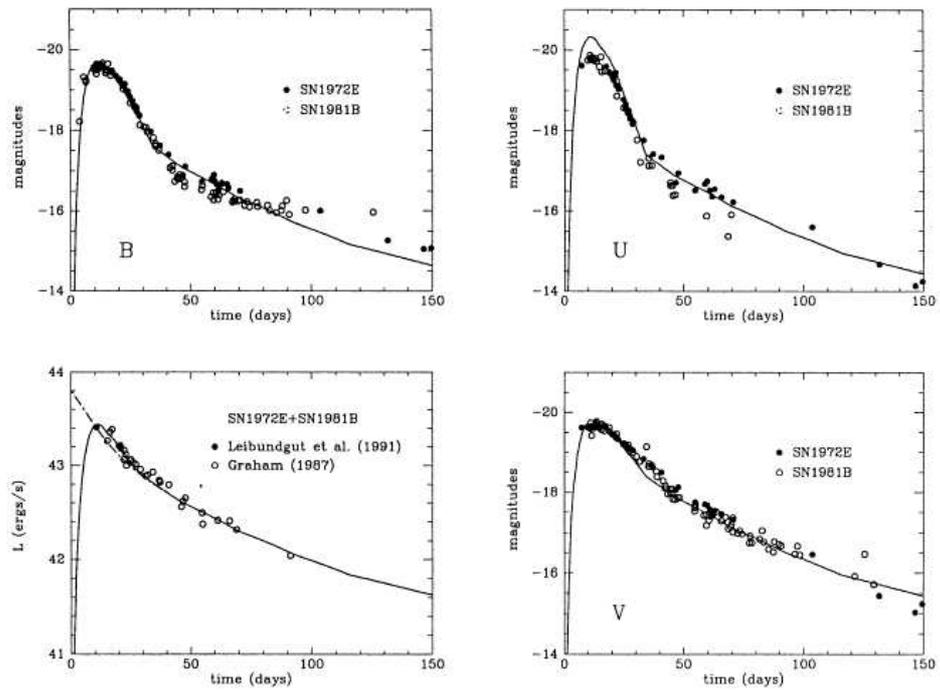


Figura 1.4: Confronto tra curve di luce osservate e teoriche per alcune SN Ia in differenti bande (dall'alto a sinistra in senso orario: B, U, V, bolometrica). In particolare si può notare il tipico decadimento a due pendenze delle curve di luce. La figura è tratta da [38].

1.3 Vincoli osservativi per i modelli delle Supernovae di tipo Ia 15

II mostrano in genere, nel visuale, un massimo esteso della durata di circa 80 giorni e questo significa che l'esplosione dura più a lungo nelle Supernovae di tipo II rispetto a quanto dura in quelle di tipo I. Inoltre, le SN II rilasciano una minore quantità di energia, ma emettono più materia (avente, naturalmente, una minore velocità di espansione) e questo può voler dire esse sono il frutto dell'esplosione di stelle più massicce (vedi anche [4]).

La varietà nella classificazione delle Supernovae rispecchia differenti tipi di progenitori. Oltre ai dati spettroscopici e a quelli fotometrici, un'ulteriore indicazione su quali potrebbero essere questi progenitori viene fornita dal sito in cui vengono osservate. Infatti le Supernovae di tipo Ia sono osservate sia in galassie ellittiche che in galassie a spirale (presenti in tutto il disco), mentre le Supernovae di tipo Ib/c e di tipo II si trovano solo in galassie a spirale e tendono a concentrarsi nelle regioni dove è attiva la formazione stellare. Tenendo presente che nelle galassie ellittiche non c'è formazione stellare in corso, possiamo dedurre che le Supernovae di tipo II e di tipo Ib/c discendono da stelle a rapida evoluzione (ovvero stelle con massa originaria di almeno $10 M_{\odot}$) che esplodono a seguito del collasso gravitazionale del nucleo, mentre i progenitori delle Supernovae di tipo Ia hanno tempi evolutivi di amplissimo spettro, da pochi milioni a diversi miliardi di anni e questo indica che possono essere Supernovae termonucleari (vedi sezione 1.4).

L'idea che stelle massicce ad evoluzione rapida fossero alla base delle Supernovae di tipo II ha trovato brillante conferma a seguito dell'esplosione nota come SN 1987A [83]. L'identificazione dei progenitori delle Supernovae di tipo I, d'altra parte, non ha ancora raggiunto una soluzione universalmente accettata. Questo significa che per le SN di tipo II abbiamo a disposizione molte più informazioni e, in particolare, abbiamo un criterio per prevedere il luogo dell'evento esplosivo: basta individuare le regioni di formazione stellare dove si trovano le stelle più massicce.

1.3 Vincoli osservativi per i modelli delle Supernovae di tipo Ia

Come abbiamo già accennato nella sezione 1.2, le proprietà spettrali, le magnitudini assolute e la forma delle curve di luce delle Supernovae Ia sono straordinariamente molto simili. Inoltre, mentre in generale l'energia totale emessa da una Supernova può variare tra 10^{51} e 10^{53} erg, i dati osservativi hanno fornito per le Supernovae di tipo Ia valori di tale energia compresi sem-

pre in un più stretto intervallo: $1 \div 1.5 \cdot 10^{51}$ erg [79]. Siccome le osservazioni rappresentano dei forti vincoli per i modelli, in questa sezione esamineremo più in dettaglio questi dati.

I tipici spettri ottici [36] delle Supernovae Ia al massimo della loro luminosità contengono le righe del Si, Ca, Mg, S e O sia neutri che ionizzati una volta. Questo fatto indica che gli strati più esterni della nube di materia espulsa sono composti soprattutto da elementi di massa intermedia (aventi, cioè, numero atomico inferiore a 56). Le righe corrispondenti a diversi elementi hanno anche differenti velocità di espansione (dai 5000 km/s ai 20000 km/s [36]), il che suggerisce che i prodotti dell'esplosione abbiano una struttura stratificata. Passate circa due settimane dal massimo, grazie al fatto che con l'espansione della struttura stellare diminuisce anche l'opacità della stessa, diventano rilevabili anche gli elementi presenti nelle regioni più interne della nube che si è formata. Infatti, a questo stadio gli spettri non sono più dominati dalle righe dei nuclei di massa intermedia, bensì dalle righe permesse del Fe II³. Nella fase nebulare corrispondente alla coda della curva di luce (cioè circa un mese dopo il massimo) cominciano a dominare gli spettri le righe di emissione proibite del Fe II, Fe III e Co III. Dall'analisi dell'intensità relativa delle righe del Co III e del Fe III si può notare una progressiva diminuzione dell'abbondanza del cobalto, il che dimostra che la coda delle curve di luce è generata dal decadimento radioattivo del ⁵⁶Co in ⁵⁶Fe.

Fotometricamente [68], le Sn Ia raggiungono la luminosità massima $M_V \approx M_B \sim -19.5$ in un periodo di circa 15 giorni, ma questo è difficile da stabilire con precisione perchè non è facile individuare la locazione del progenitore delle SN Ia prima dell'esplosione stessa. Dopo il massimo si verifica un primo rapido declino di circa tre magnitudini in un periodo di circa un mese. In seguito la coda della curva di luce mostra un decadimento lineare più lento di circa una magnitudine al mese che dura qualche centinaio di giorni, finchè la stella esplosa non è più visibile. L'andamento delle curve di luce dopo il massimo è, per le SN Ia, sorprendentemente simile (vedi figura 1.4). È bene sottolineare che le curve di luce mostrano la magnitudine apparente della stella in una specifica banda in funzione del tempo, ma non danno modo di conoscere la correzione bolometrica, nè la dipendenza dal tempo di questa correzione. Solamente nel caso in cui essa sia una costante, allora si può dire che la curva di luce mostri la vera dipendenza della luminosità della Supernova. Un argomento in favore dell'ipotesi che la correzione bolometrica sia

³Con la numerazione dopo il simbolo chimico si intende che l'elemento è neutro (I), ionizzato una volta (II) e così via.

1.3 Vincoli osservativi per i modelli delle Supernovae di tipo Ia 17

una costante è che, a partire da circa il secondo mese dopo il massimo, lo spettro ottico delle Supernovae non mostra cambiamenti apprezzabili. Particolarmente importante è anche il fatto che i due elementi più abbondanti nell'Universo, ovvero l'idrogeno e l'elio, siano quasi del tutto assenti negli spettri delle SN Ia. Questo significa che tali elementi non sono presenti in quantità apprezzabili.

Nonostante tutte queste similitudini, con il miglioramento delle tecniche di osservazione, i dati più recenti ottenuti dalle Supernovae di tipo Ia hanno messo in luce anche alcune piccole differenze spettroscopiche e fotometriche, quali variazioni nell'intensità delle righe, nelle velocità di espansione degli elementi espulsi, nel colore, nella magnitudine assoluta al massimo o nella forma delle curve di luce [13]. Queste differenze nelle proprietà delle SN Ia appaiono, però, strettamente correlate, infatti, se si ordinano le SN Ia rispetto alla potenza dell'esplosione si nota che gli eventi più deboli sono anche quelli meno luminosi, con un decadimento della curva di luce più rapido e velocità di espansione inferiori rispetto agli eventi più energetici.

Un'altra evidenza osservativa [13] è che le proprietà delle Supernovae Ia sembrano correlate con le caratteristiche della popolazione stellare delle galassie in cui questi eventi si verificano. Infatti, le Supernovae Ia rivelate in galassie *early-type*⁴ mostrano, in media, velocità di espansione più basse, un più rapido decadimento della curva di luce e hanno una luminosità di circa $0.2 \div 0.3$ magnitudini inferiore rispetto alle Supernovae Ia di galassie *late-type*. Inoltre, la frequenza osservata delle Supernovae Ia nelle galassie *late-type* è circa doppia, a parità di luminosità, rispetto a quella osservata nelle *early-type*. Infine, le Supernovae Ia delle regioni più esterne delle galassie a spirale appaiono molto simili a quelle delle galassie ellittiche (e sono meno luminose), mentre le Supernovae Ia delle regioni più interne delle galassie a spirale mostrano una più ampia varietà della potenza dell'esplosione.

Riassumendo, un buon modello per l'esplosione delle Supernovae deve possedere le seguenti caratteristiche minime:

1. L'energia totale emessa a seguito dell'esplosione deve essere di circa $1 \div 1.5 \cdot 10^{51}$ erg [79].

⁴La classificazione delle galassie a spirale in *early-type* e *late-type* si riferisce allo schema di Hubble per la classificazione delle galassie e questa terminologia non è correlata con l'età della galassia stessa. Per ulteriori approfondimenti si può vedere l'introduzione di [8].

2. La composizione e la velocità della materia espulsa devono essere in accordo con gli spettri e le curve di luce osservate. In generale, l'esplosione deve produrre abbastanza ^{56}Ni per giustificare le curve di luce e deve creare, negli strati più superficiali, una notevole quantità di elementi di massa intermedia con un'alta velocità ($5000\div 20000$ km/s [36]).
3. Il meccanismo esplosivo deve essere robusto rispetto a piccole variazioni dei parametri, questo perchè, empiricamente, le Supernovae Ia sono eventi tra loro omogenei.
4. Sebbene il modello di base deve fornire risultati omogenei, deve anche possedere almeno un parametro libero, per poter spiegare la dipendenza dalla potenza dell'esplosione delle piccole differenze osservate tra i vari eventi.
5. Questo o questi parametri liberi devono dipendere dalle proprietà dei progenitori delle Supernovae per spiegare le differenze osservate nelle caratteristiche delle esplosioni in termini delle diverse proprietà della popolazione stellare delle galassie ospiti.

Infine, sottolineiamo che avere buoni argomenti in favore di un particolare scenario esplosivo non significa automaticamente che tale scenario sia quello corretto. Inoltre, è necessario comprendere tutti i dettagli della fisica dell'esplosione prima di poter optare per un modello. Per esempio il fatto stesso che l'aumento dei dati a nostra disposizione indichi che esista una certa diversità tra le Supernovae Ia, sembra contraddire l'ipotesi di una singola classe di progenitori o di un singolo meccanismo esplosivo.

1.4 Formazione delle Supernovae di tipo Ia

I vincoli osservativi riassunti nella precedente sezione suggeriscono che il modello più plausibile per le Supernovae di tipo Ia sia quello in cui esse risultano il frutto dell'esplosione termonucleare di un sistema binario costituito da una nana bianca di carbonio ed ossigeno come stella primaria e da una compagna a più lenta evoluzione come stella secondaria. Le differenze osservate possono essere così attribuite alla natura e al percorso evolutivo della nana bianca prima dell'esplosione e/o alla fisica delle combustioni termonucleari durante l'esplosione stessa. Comunque, non è da escludere la possibilità che qualche Supernova Ia abbia un'origine diversa, per esempio

sia il risultato del collasso di una nana bianca di O-Ne-Mg (o di He) causato sempre dall'accrescimento di massa.

Le nane bianche, stelle molto dense e compatte, composte da nuclei di carbonio ed ossigeno e da elettroni *degeneri*, sono il prodotto evolutivo finale di stelle la cui massa iniziale è inferiore a circa $8 M_{\odot}$. La loro massa è, però, molto inferiore a questo limite, in quanto (1) durante alcune fasi evolutive, una stella è soggetta a significative perdite di massa; (2) esiste un limite teorico alla massa di una stella costituita da elettroni degeneri, detto *limite di Chandrasekhar* che in questo caso è pari a $1.4 M_{\odot}$ [18], valore oltre il quale la struttura stellare diventa instabile. Infatti, il nucleo di una nana bianca si trova in equilibrio idrostatico perchè la gravità è bilanciata dalla pressione degli elettroni degeneri, ovvero elettroni che occupano tutti i possibili stati quantistici al di sotto del livello di Fermi [49], e tale pressione non dipende dalla temperatura.

Una nana bianca isolata è, quindi, stabile ed inerte, perchè la sua temperatura non è più sufficiente per sostenere delle reazioni nucleari. Essa continua ad irradiare la propria energia, raffreddandosi progressivamente. Le osservazioni, però, mostrano che molte nane bianche non sono isolate, bensì appartengono a gruppi di due o più stelle che orbitano attorno ad un comune centro di massa. Se la distanza tra la nana bianca e la compagna non è troppo elevata, può succedere che la stella secondaria, durante una fase di espansione, ceda parte della propria massa alla nana bianca.

1.4.1 Innesco delle reazioni termonucleari

Ad ogni incremento di massa, anche piccolo, corrisponde una sostanziale contrazione della stella e la materia al centro di essa viene compressa. Questa contrazione gravitazionale rilascia energia che favorisce l'aumento di temperatura, ma tale aumento è anche ostacolato dalle perdite di neutrini (vedi anche sezione 4.1). Infatti, man mano che la stella accresce massa, la sua densità centrale aumenta e, con l'aumentare della densità, aumenta anche l'emissione di neutrini per decadimento del plasma. Contemporaneamente, però, la schermatura degli elettroni diventa più efficiente nell'abbassare la barriera Coulombiana degli ioni di carbonio presenti nel nucleo e questo favorisce l'innesco della fusione nucleare del carbonio (vedi anche sezione 3.2). La produzione di energia nucleare aumenta sempre più e, quando diventa maggiore delle perdite per emissione di neutrini, si può dire che l'esplosione sta iniziando.

In una stella ordinaria (con materia non degenere) l'energia prodotta dalle reazioni nucleari dà luogo ad un'espansione termica, che fa diminuire la temperatura finchè non viene nuovamente ristabilito l'equilibrio tra la forza di gravità e la forza dovuta alla pressione idrostatica. A questo punto le reazioni cessano. In una nana bianca, invece, l'iniziale aumento di temperatura non varia la pressione degli elettroni degeneri e, quindi, non porta ad una espansione. Le reazioni termonucleari, così, non subiscono rallentamenti, ma anzi vengono sempre più incrementate dall'aumento di temperatura provocato dalla produzione di energia.

Inizialmente le reazioni nucleari procedono lentamente in un regime convettivo stabile ed è, quindi, possibile utilizzare la teoria della *mixing-length* [15] per confrontare i tempi scala della convezione con quelli della combustione. Ne segue che, nel successivo migliaio di anni [36], il nucleo è soggetto ad un riscaldamento convettivo con tempi scala τ_{conv} sempre più piccoli. Simultaneamente anche i tempi scala delle combustioni termonucleari τ_R diminuiscono, ma più velocemente, grazie all'incessante aumento della temperatura del nucleo. Durante questa fase l'evoluzione della temperatura nel nucleo è affetta anche da alcuni processi convettivi detti *URCA* [59], ovvero una convezione guidata dal continuo alternarsi di processi di cattura elettronica e di decadimenti β , che conduce all'emissione di neutrini ed anti-neutrini. Nonostante questa perdita di energia i neutrini URCA non riescono ad abbassare la temperatura globale del nucleo ed il loro unico effetto è quello di ridurre i moti convettivi [72].

Quando la fusione del carbonio procede così velocemente che le perdite di energia diventano trascurabili, la temperatura T aumenta di circa 10^8 K per ogni 10^5 erg/g liberati [82]. A circa $7 \cdot 10^8$ K, τ_{conv} e τ_R diventano confrontabili, il che significa che la materia brucia alla stessa velocità con cui circola [58]. Per studiare correttamente questa situazione, la teoria della *mixing-length* si è dimostrata inadeguata e, quindi, va sostituita con una descrizione che consenta un'evoluzione non-adiabatica delle "bolle convettive" (cioè che permetta un aumento di entropia, durante la salita delle bolle). È possibile, quindi che, in questa fase, bolle di materiale già combusto (più caldo e quindi meno denso) si allontanino dal centro della stella. Le bolle che si muovono più rapidamente hanno una velocità di circa 100 km/s e riescono a percorrere alcune centinaia di chilometri (circa 300 km) prima che la temperatura abbia raggiunto circa $2 \cdot 10^9$ K [32]. La distanza percorsa dipende dalle dimensioni iniziali della bolla e dall'iniziale differenza di temperatura tra la bolla e l'ambiente circostante. A circa $2 \cdot 10^9$ K, τ_R diventa molto mi-

nore di τ_{conv} , così che si può dire che il carbonio bruci in loco. Tutto questo suggerisce che l'innesco delle reazioni nucleari possa avvenire in diversi punti (disconnessi) lontani dal centro, entro un raggio di circa 300 km.

L'energia prodotta attraverso le reazioni nucleari fa aumentare la temperatura della stella, ma soltanto quando la temperatura è divenuta sufficientemente alta da eliminare la degenerazione della materia la stella comincia ad espandersi. A questo stadio, però, l'espansione non è in grado di spegnere le reazioni nucleari, le quali, quindi, continuano a bruciare materia attraverso una catena di reazioni termonucleari che inizia con la fusione dei nuclei di carbonio e ossigeno e termina con la creazione di nuclei di nichel e ferro. L'esplosione che ha, così, origine dura solo pochi secondi, ma riesce ad rilasciare un'energia pari a $\simeq 10^{51}$ ergs, sotto forma di energia cinetica della materia espulsa, dei fotoni e dei neutrini.

1.5 Modelli per le Supernovae di tipo Ia

Sviluppare un modello per l'esplosione delle Supernovae, come abbiamo visto, significa studiare la distruzione termonucleare di una nana bianca. Il problema può essere affrontato da un punto di vista idrodinamico. Infatti, la materia di cui è composta una nana bianca può essere descritta come un plasma completamente ionizzato, con vari gradi di degenerazione elettronica, che si può approssimare con un fluido. Ne segue che le equazioni che governano il problema (vedi capitolo 2), oltre all'equazione di stato, sono le equazioni idrodinamiche che esprimono la conservazione della massa, dell'impulso e dell'energia.

Purtroppo, però, come abbiamo visto nella precedente sezione, l'evoluzione di una nana bianca dopo il raggiungimento della massa critica è ancora da chiarire perchè esistono molte incertezze sulle condizioni iniziali (ad esempio sul profilo di temperatura all'inizio delle fusioni nucleari), nonchè sulla fisica delle combustioni termonucleari in ambiente degenere, oltre al fatto che non è ancora chiaro dove avviene l'innesco delle reazioni termonucleari. Infatti, a seguito di un'esplosione di Supernova si può creare una stella di neutroni, ma questo è impossibile se l'esplosione ha inizio al centro della stella, perchè tutta la materia verrebbe espulsa. Sembra, dunque, plausibile che l'innesco delle reazioni avvenga lontano dalle zone centrali non solo perchè, in questo modo, si lascia la possibilità di un'implosione di queste regioni, ma anche perchè, rispetto alla situazione di innesco nel centro, si ha più materia che

può bruciare a basse densità e, così, si può produrre una maggiore quantità di elementi di massa intermedia. Nonostante questo, la maggior parte dei modelli realizzati fino ad ora sono stati sviluppati, spesso per comodità computazionale, innescando le reazioni al centro della stella.

Una volta avvenuto l'innescò, siccome la velocità delle reazioni nucleari dipende fortemente dalla temperatura, le combustioni nucleari durante l'esplosione procedono quasi istantaneamente rispetto al moto del gas stellare. Esse, quindi, avvengono principalmente in uno strato estremamente sottile (dell'ordine di $10^{-5} \div 10^{-3}$ cm [12]) della struttura stellare, chiamato *fiamma termonucleare*, che si può propagare verso l'esterno ([49], [22]) in un regime *subsonico* (*deflagrazione*) o *supersonico* (*detonazione*). Come sarà illustrato più dettagliatamente nel capitolo 3, nel regime subsonico la propagazione della fiamma è dovuta a processi di conduzione termica, mentre nel regime supersonico è un'onda d'urto che comprime inizialmente la materia, causando la combustione. Siccome, per definizione, un'onda di deflagrazione si propaga a velocità subsonica, contemporaneamente delle onde sonore si possono propagare anche nel gas dei reagenti, accelerando, dunque, le regioni più esterne della stella ed espandendole prima che esse vengano bruciate. Questo distingue nettamente una deflagrazione da una detonazione, perchè, in quest'ultimo caso il gas dei reagenti non può pre-espandersi.

Come vedremo nel capitolo 4, entrambi i modi di combustione sono idrodinamicamente instabili rispetto a perturbazioni spaziali (anche se le cause e i tempi caratteristici delle instabilità sono nettamente diversi) il che si riflette in un aumento della superficie della fiamma termonucleare e, quindi, in un incremento delle reazioni nucleari. Di conseguenza, nello sviluppo dei modelli di Supernovae termonucleari, la scelta del regime della combustione è di fondamentale importanza perchè essa si ripercuote sia sulla composizione chimica finale della materia, sia sulla quantità di energia rilasciata durante l'esplosione. Nonostante i successi dei recenti modelli numerici per le Supernovae Ia ([30], [31]), non è ancora chiaro quale sia il meccanismo più adeguato: deflagrazione, detonazione, oppure una transizione dall'uno all'altro regime. Questo è dovuto principalmente al fatto che l'intero intervallo delle scale di lunghezza rilevanti per questo problema non possono essere risolte con una singola simulazione, poichè dovrebbe coprire più di 12 ordini di grandezza: dal raggio di una nana bianca (10^9 cm [46]) allo spessore della fiamma termonucleare ($10^{-5} \div 10^{-3}$ cm [12]). Ne segue che in ogni simulazione numerica di una Supernova termonucleare, la griglia usata è troppo grossolana per determinare in modo autoconsistente lo specifico regime idrodinamico di

combustione, che deve quindi essere imposto a priori come input. Di conseguenza, per evitare il più possibile assunzioni artificiali sulla dinamica della fiamma e per poter comprendere meglio quale sia il regime di combustione più adeguato, è decisivo studiare dettagliatamente le proprietà locali sia delle deflagrazioni che delle detonazioni.

Per questo motivo, nei prossimi paragrafi, discuteremo fenomenologicamente le proprietà dei modelli di Supernova che si basano su differenti modi di combustione, mentre nei capitoli 3 e 4 affronteremo un'analisi più quantitativa.

1.5.1 Modello con detonazione

I primi modelli di Supernova (di tipo I e di tipo II) furono sviluppati ipotizzando che l'esplosione avvenisse solo attraverso un meccanismo di detonazione. Essi, però, vennero molto presto abbandonati perchè fornivano risultati in contraddizione con le osservazioni. Nonostante questo, è utile analizzarne le caratteristiche sia per motivi "storici" che, soprattutto, per comprendere meglio le ragioni di questo iniziale fallimento.

La prima simulazione idrodinamica di una Supernova di tipo Ia si deve ad Arnett [2], che, alla fine degli anni '60, ha considerato una nana bianca costituita da un nucleo di carbonio e ossigeno, in ambiente elettronicamente degenere, circondato da un sottile strato di elio. Man mano che la stella accresce massa (da una compagna) l'elio viene bruciato e la massa del nucleo aumenta. Naturalmente, all'aumentare della massa del nucleo, aumenta anche la densità media, mentre, come abbiamo già detto, l'aumento della temperatura viene, in parte, ostacolato dalle perdite di neutrini. Un ulteriore effetto dell'emissione di neutrini è quello di rendere la materia sempre più degenere. Ne segue che la materia del nucleo di una nana bianca può essere ben rappresentata da una configurazione completamente degenere.

Quando viene raggiunta una temperatura di circa $6.6 \cdot 10^8$ K [36] si innescano le reazioni nucleari di fusione del carbonio. Il calore prodotto dalle reazioni fa aumentare la temperatura, ma non la pressione, finchè la materia resta completamente degenere. Comunque, man mano che la temperatura aumenta, la degenerazione viene parzialmente eliminata, così che la pressione possa aumentare. Se questo aumento di pressione, dovuto alla combustione termonucleare, è sufficientemente alto (deve aumentare di un fattore circa

100, vedi sezione 4.4), si origina un'onda di detonazione che si muove supersonicamente e quindi non permette al gas di espandersi prima di venire bruciato.

Un'onda di detonazione piana e stazionaria può essere schematizzata, secondo il modello di Zeldovich-Neumann-Doering ([26], vedi anche sezione 3.4), come un'onda d'urto che comprime la materia senza cambiarne la composizione, seguita da una regione dove avvengono le reazioni nucleari. Utilizzando questa schematizzazione, la propagazione della detonazione risulta indipendente dall'effettiva cinetica delle reazioni, la quale influenza solo la struttura interna della zona di reazione e, in particolare, la distribuzione spaziale delle concentrazioni. Infatti, la velocità della detonazione dipende solo dalla quantità totale di energia rilasciata ed è quindi più facile da valutare rispetto alla velocità di una deflagrazione (vedi capitolo 3). Una buona stima per la velocità della detonazione è quella detta *di Chapman-Jouguet* ([26], [48], vedi anche sezione 3.1), corrispondente alla velocità del suono relativa al gas dei prodotti (che è dell'ordine di 10^9 cm/s [2], [31]).

I risultati della simulazione di Arnett, eseguita considerando la reazione di fusione del carbonio ($^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{24}\text{Mg}$ che rilascia un'energia per unità di massa pari a $5.7 \cdot 10^{17}$ erg/g [2]) e assumendo che la detonazione si propaghi alla velocità di Chapman-Jouguet, hanno mostrato che:

- (1) È possibile che si sviluppi un'onda di detonazione anche in ambiente degenere, sebbene sia necessario raggiungere una temperatura molto alta (dell'ordine di 10^{10} K) nelle zone centrali della stella.
- (2) L'energia totale emessa è in accordo con i dati osservativi, cioè vale circa $1.5 \cdot 10^{51}$ erg.
- (3) A causa dell'aumento dei processi di cattura elettronica con l'aumento della densità ρ (vedi anche [4]), nelle zone più interne (con $\rho > 10^9$ g/cm³) il tempo caratteristico per la cattura elettronica da parte dei nuclei di ^{56}Ni è minore del tempo di espansione del nucleo e, quindi, nelle regioni centrali si ha abbondanza di elementi del gruppo del ferro. Invece, nelle zone più esterne, dove l'espansione procede più rapidamente della cattura elettronica i nuclei di ^{56}Ni decadono prima in ^{56}Co e poi in ^{56}Fe riproducendo bene le curve di luce osservate.

Di conseguenza, sebbene questo modello abbia avuto successo nel descrivere un'esplosione, che ben riproduce le curve di luce, d'altra parte ha come

risultato una eccessiva produzione di elementi del gruppo del ferro rispetto alle abbondanze osservate [27] nei resti di Supernova, che mostrano una quantità significativa anche di elementi di massa intermedia. Per questo motivo, il modello di Arnett è stato successivamente ripreso e rielaborato nel corso degli anni (per esempio [40], [43], [41], [67] e [29]), grazie ad una sempre maggiore comprensione delle caratteristiche della detonazione e delle reazioni nucleari. Ad esempio, più recentemente, Khokhlov [43] ha analizzato la struttura interna dell'onda di detonazione (unidimensionale, piana e stazionaria) che si sviluppa in un nucleo di carbonio e ossigeno, elettronicamente degenere, mostrando che:

- (1) La transizione dalla composizione chimica iniziale a quella finale avviene in tre fasi: (i) combustione del carbonio; (ii) combustione dell'ossigeno, in uno stato di quasi-equilibrio statistico (NSQE), con conseguente formazione di nuclei di elementi di massa intermedia; (iii) combustione del silicio con conseguente produzione di nuclei del gruppo del ferro, in uno stato di completo equilibrio nucleare statistico (NSE), definito come lo stato in cui ogni reazione procede allo stesso ritmo della sua inversa.
- (2) I tempi caratteristici delle tre fasi sono tali che $\tau_i \ll \tau_{ii} \ll \tau_{iii}$.
- (3) Mentre le prime due fasi della detonazione sono sempre esotermiche, la terza fase è esotermica solo per densità inferiori a 10^7 g/cm³. Si può dimostrare che, per densità più alte si verifica un particolare meccanismo di detonazione che viene detto *patologico* ([43], [67]).

Dal punto (2) segue che la sintesi di elementi di massa intermedia è possibile solo se, in una qualche regione della nana bianca in esplosione, il tempo necessario per instaurare un regime di NSE è sufficientemente grande, cioè l'abbondanza di tali elementi dipende da quanto dura la fase (ii) di combustione dell'ossigeno in NSQE. Purtroppo, con un meccanismo di sola detonazione il tempo τ_{ii} è troppo piccolo (dell'ordine di 10^{-10} s [43]) per produrre le abbondanze osservate di elementi di massa intermedia.

Alla luce di questi risultati, Gamezo et al. [29] hanno provato a studiare il problema dell'esplosione delle Supernovae, cercando di capire se una detonazione bidimensionale con struttura cellulare [26] potesse influire sulla composizione finale. La struttura cellulare di una detonazione si origina a causa dell'instabilità del fronte. In una detonazione con struttura cellulare (vedi figura 1.5), l'onda d'urto principale consiste in un'alternarsi di onde d'urto forti e deboli che si incontrano in un cosiddetto *punto triplo*. Le traiettorie di

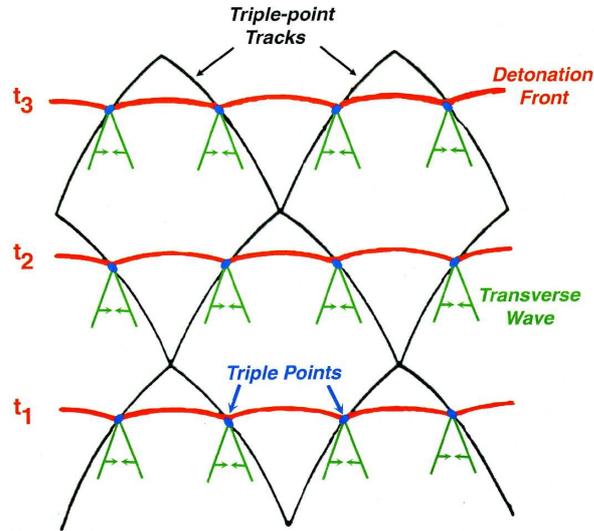


Figura 1.5: Schema della struttura cellulare di un'onda di detonazione. Il fronte di detonazione si muove verso l'alto ($t_1 < t_2 < t_3$). La figura è tratta da [75].

questi punti tripli definiscono i contorni delle “cellule”, che si propagano nel tempo formando una figura quasi-stazionaria, caratterizzata dal fatto che la dimensione media delle cellule rimane costante.

In questo caso la lunghezza caratteristica della zona di reazione è uguale alla lunghezza di una cellula, che è in genere maggiore della corrispondente lunghezza della zona di reazione tipica delle detonazioni unidimensionali piane e stazionarie [51]. Le dimensioni della cellula sono determinate dalla cinetica delle reazioni nucleari. Quindi, è chiaro che esse variano a seconda della fase della combustione che si considera in quanto, come abbiamo visto, i tempi caratteristici delle tre fasi sono nettamente diversi. L'analisi di Gamezo et al. ha mostrato che la lunghezza caratteristica della zona di reazione aumenta di un fattore circa 1.3 nel caso di detonazione con struttura cellulare. Conseguentemente aumenta anche il tempo τ_{ii} , ma questo aumento risulta comunque insufficiente per permettere una significativa formazione di elementi di massa intermedia. Di conseguenza anche un meccanismo di detonazione cellulare non riesce a spiegare le abbondanze osservate nei resti di Supernovae.

1.5.2 Modello con deflagrazione

Se la pressione generata dal calore prodotto dalla combustione termoneucleare non è troppo elevata, il gradiente di temperatura all'interfaccia tra i reagenti e i prodotti della reazione diminuisce finché non viene raggiunto un equilibrio tra la produzione di energia e la diffusione del calore (dovuta principalmente alle collisioni tra elettroni e ioni). Il risultante fronte di combustione si può, quindi, considerare un'onda di deflagrazione a pressione quasi costante (vedi sezione 3.3). Esso consiste di una zona di diffusione, che riscalda i reagenti fino alla temperatura critica di fusione del carbonio (pari a $6.6 \cdot 10^8$ K [36]), seguita da una regione di reazione, dove avvengono le combustioni nucleari e si genera l'energia. Nella sezione 3.3 vedremo che è possibile trovare un'unica velocità laminare della fiamma (S_l), la quale dipende dai dettagli dell'interazione tra la combustione e la diffusione all'interno della fiamma.

Nello studio delle deflagrazioni a scale ben più grandi dello spessore della fiamma, la struttura interna della stessa può essere trascurata e la fiamma può essere vista come una discontinuità di densità che si propaga isobaricamente con velocità normale alla superficie pari a S_l . Questa approssimazione di "fiamma sottile" ha permesso di eseguire un'analisi lineare della stabilità del fronte rispetto a perturbazioni spaziali, la quale ha mostrato che l'onda di deflagrazione non si propaga a partire dal centro della stella come un fronte perfettamente sferico, come fu inizialmente proposto in vari modelli ([58], [82], [44]), ma, al contrario, il fronte viene fortemente deformato. Questo risultato (vedi sezione 4.2.1), trovato per la prima volta da Darrieus (nel 1938) e poi riproposto da Landau (nel 1944), mostra che la fiamma è instabile a tutte le lunghezze d'onda, da cui il nome *instabilità di Landau-Darrieus*.

Altre importanti instabilità idrodinamiche cui il fronte può essere soggetto sono anche, ad esempio, l'instabilità di Rayleigh-Taylor e quella di Kelvin-Helmholtz (vedi anche [24], [17] e sezione 4.2.2). Piccole perturbazioni della superficie del fronte, soggette all'instabilità di Rayleigh-Taylor, crescono fino a formare delle bolle (a forma di "funghi") che viaggiano verso l'esterno della stella, mentre il fluido più denso va in direzione opposta, dando così origine ad un flusso con velocità differenziale. Quest'ultimo è, quindi, soggetto all'instabilità di Kelvin-Helmholtz che conduce, tramite la formazione di vortici, ad una struttura più complessa e turbolenta. Infine, la turbolenza aumenta la superficie della fiamma e, quindi, favorisce le combustioni nucleari e la produzione di energia, portando ad un notevole aumento della velocità locale della fiamma. Questo aumento di velocità della fiamma è fondamentale

perchè se essa procedesse sempre con la velocità laminare (dell'ordine di 10^4 cm/s, vedi sezione 4.2) la materia stellare non riuscirebbe a guadagnare una velocità superiore alla velocità di fuga (dell'ordine di 10^9 cm/s, vedi sezione 4.1).

Di conseguenza, per dare una descrizione adeguata del problema, un modello di esplosione basato solo sul regime di deflagrazione, dovrebbe fornire anche le risposte alle seguenti domande:

- (1) Come varia la velocità della fiamma a seguito dello sviluppo della turbolenza?
- (2) L'energia rilasciata a seguito della propagazione della sola deflagrazione è maggiore dell'energia gravitazionale della nana bianca?
- (3) La composizione finale dei prodotti e la loro velocità è in accordo con le osservazioni?

I primi modelli (per esempio [58], [39]) di esplosione di Supernovae attraverso una deflagrazione sono stati sviluppati in una dimensione e, sebbene gli autori abbiano usato differenti modellizzazioni della turbolenza, tutti questi studi sono in accordo nell'affermare che se la velocità della fiamma raggiunge un valore di circa il 30% della velocità del suono, gli spettri e le curve di luce delle Supernovae Ia vengono ben riprodotti. Questi modelli, però, essendo unidimensionali, sono inadeguati per descrivere con successo l'esplosione perchè trascurano l'aspetto multidimensionale delle instabilità e della turbolenza. Per questo le simulazioni più recenti (per esempio [46], [56], [63], [30]) sono state sviluppate in tre dimensioni. Purtroppo, sebbene le abbondanze degli elementi prodotti rispecchiano le osservazioni, l'energia totale emessa ($0.6 \div 1 \cdot 10^{51}$ erg [31]) è invece inferiore a quella osservata. Inoltre, questi modelli mostrano la presenza di materiale non combusto e elementi di massa intermedia ad ogni distanza dal centro. Invece, le analisi degli spettri delle Supernovae Ia rivelano la presenza di carbonio e ossigeno solo ad alte velocità ($2 \div 3 \cdot 10^4$ km/s [47], [53]), cioè solo negli strati più esterni della nebulosa restante dopo l'esplosione. Per quanto riguarda gli elementi di massa intermedia, le osservazioni hanno mostrato delle velocità che pur essendo più basse di quelle del C e O, sono comunque abbastanza elevate (circa 10^4 km/s per il Si [27]) da escludere la presenza di questi elementi vicino al centro della nana bianca.

Riassumendo, il modello di Supernova con sola deflagrazione prevede solo una combustione parziale della nana bianca perchè negli strati più esterni

rimane troppo carbonio ed ossigeno incombusto e, sebbene la produzione di elementi di massa intermedia sia in accordo con i dati osservativi, la deflagrazione produce un'eccessiva quantità di elementi del gruppo del ferro, perchè la materia bruciata rimane così a lungo ad alte temperature e densità da incorrere più facilmente in processi di neutronizzazione. Inoltre il modello a sola deflagrazione emette meno energia di quella osservata e produce elementi di massa intermedia che hanno una velocità di espansione minore rispetto a quella che si ottiene con una detonazione e tali velocità sono contenute solo in un piccolo intervallo di valori ($10000 \div 14000$ km/s [58]), mentre le osservazioni rivelano che le velocità tipiche della materia espulsa variano da 5000 km/s a 20000 km/s [36].

In conclusione un modello di sola deflagrazione per l'esplosione di Supernovae di tipo Ia risulta incompleto. La soluzione più naturale a questo problema, per rendere i modelli più consistenti con le osservazioni, è quella di assumere che la turbolenza permetta una transizione dal regime di deflagrazione a quello di detonazione.

1.5.3 Modello a detonazione ritardata

Abbiamo visto nei precedenti paragrafi che un modello di sola deflagrazione porta ad avere delle velocità di espansione troppo ridotte, mentre un modello a sola detonazione non è in grado di produrre una sufficiente quantità di elementi di massa intermedia. Quest'ultima affermazione, però, non significa che in regime di detonazione sia del tutto impossibile produrre elementi quali Si, S, Ca... Infatti, come abbiamo riportato nel paragrafo 1.5.1, la quantità prodotta di elementi di massa intermedia dipende da quanto tempo impiega la materia a raggiungere uno stato di equilibrio nucleare statistico. Questo tempo di rilassamento dipende dalla temperatura, la quale, a sua volta, dipende dalla quantità di energia prodotta durante le fasi precedenti di combustione del carbonio e dell'ossigeno, che, in ultimo, dipende dalla densità. Il tempo di rilassamento (τ_{ii}) è dell'ordine di 10^{-10} s per densità di circa $2 \cdot 10^9$ g/cm³ e dell'ordine di 10^{-4} s [43] per densità di circa $3 \cdot 10^7$ g/cm³. Quindi è chiaro che nel caso di detonazione a basse densità ci si può aspettare una significativa produzione di elementi di massa intermedia.

In esperimenti terrestri di combustione è stato osservato [80] che spesso le deflagrazioni che incorrono in un regime turbolento possono subire una transizione spontanea verso un regime di detonazione. A partire da questo risultato, è stato suggerito [44] che una tale transizione potesse accadere an-

che durante l'esplosione di una nana bianca. Infatti, in questo modo, sarebbe possibile espandere la stella attraverso una fase iniziale di combustione lenta (deflagrazione), fino a raggiungere una densità inferiore a $3 \cdot 10^7$ g/cm³ e poi potrebbe originarsi un'onda di detonazione in grado di bruciare tutta la materia stellare, riproducendo le abbondanze osservate degli elementi. Di conseguenza, un modello a detonazione ritardata non è in contraddizione nè con il modello di detonazione, nè con quello di deflagrazione, anzi cerca di combinare le migliori caratteristiche dei due regimi di combustione. Il punto cruciale per verificare la validità del modello a detonazione ritardata è, appunto, quello di vedere se esso è in grado di fornire un buon criterio per stabilire quando avviene la transizione al regime di detonazione.

Alla base di questo criterio per la transizione risiede il fatto che una detonazione si può sviluppare in una certa regione se le dimensioni di tale regione sono abbastanza grandi che la maggior parte dell'energia prodotta dalle reazioni non viene persa per diffusione. In questo modo, infatti, l'aumento di pressione dovuto all'energia rilasciata dà origine ad un'onda d'urto all'interno della regione considerata, che precede la detonazione (vedi sezione 3.4). In assenza di questa condizione, l'energia prodotta dalle reazioni viene facilmente dispersa da onde sonore e la detonazione non si può sviluppare. La turbolenza può contribuire alla transizione perchè ingrandisce la zona di reazione.

Attualmente, però, questo meccanismo di transizione non è ancora chiaro perchè è necessario valutare in tre dimensioni tutti gli effetti dell'interazione della turbolenza con la combustione. In ogni caso, in letteratura (vedi per esempio [6], [11], [31]) sembra esserci accordo sui risultati ottenuti inizialmente da Khokhlov [44]. Egli, infatti, ha effettuato le prime simulazioni di Supernovae Ia con un meccanismo a detonazione ritardata utilizzando la densità di transizione ρ_{tr} come parametro libero, concludendo che se $\rho_{tr} \sim 3 \cdot 10^7$ g/cm³ allora:

1. l'energia rilasciata durante l'esplosione è di circa $1 \div 1.5 \cdot 10^{51}$ erg, come nel caso di un modello a sola detonazione, e quindi in accordo con le osservazioni;
2. la composizione chimica finale, che differisce profondamente sia da quella ottenuta con i modelli a sola deflagrazione che da quelli a sola detonazione, riproduce le abbondanze osservate e anche la distribuzione di velocità degli elementi prodotti è in accordo con i dati osservativi;

3. non viene lasciato carbonio incombusto perchè lo strato più esterno della nana bianca produce, in questo caso, solo elementi di massa intermedia.

Da quanto detto in precedenza, sembra che il modello a detonazione ritardata sia il più adeguato per spiegare le esplosioni di Supernovae di tipo Ia, non solo perchè i risultati appaiono in buon accordo con le osservazioni, ma anche perchè la densità di transizione ρ_{tr} può rappresentare il parametro che spieghi le differenze osservate nell'intensità dell'esplosione. Purtroppo, però, la robustezza del modello a detonazione ritardata non è ancora stata provata, perchè esso dipende dalle instabilità che occorrono durante il regime di deflagrazione e che conducono ad un regime turbolento. Inoltre è necessario anche considerare le instabilità che si possono verificare durante la fase di detonazione perchè anch'esse concorrono a determinare la composizione chimica finale del gas espulso. Per questo, in questa tesi, assumendo per l'esplosione un modello a detonazione ritardata, analizzeremo più in dettaglio la stabilità del fronte di combustione.

Capitolo 2

Equazioni del moto per i fluidi

In questo capitolo deriviamo schematicamente, tramite un approccio basato sulla meccanica statistica, i principali risultati di fluido-dinamica in assenza di campo magnetico per fluidi ideali (ovvero omogenei e continui) e irrotazionali. La nostra trattazione ripercorre i lavori di Courant e Friedrichs [22] e Landau e Lifshitz [48, 49]. I risultati qui derivati verranno nel seguito applicati allo studio delle fasi esplosive dell'evoluzione stellare. Infatti in prima approssimazione, le stelle possono essere considerate composte da gas omogeneo e fortemente collisionale, cioè da particelle identiche il cui cammino libero medio è molto minore del raggio stellare. Apparentemente la nostra schematizzazione potrebbe sembrare non valida in quelle regioni in cui, durante un'esplosione di Supernova, la materia stellare subisce processi di combustione nucleare in quanto qui coesistono almeno due specie nucleari differenti. In realtà, però, questa zona di combustione ha delle dimensioni trascurabili rispetto alle scale in esame (essenzialmente il raggio di una nana bianca). Pertanto modelleremo separatamente la zona dei reagenti e dei prodotti come un fluido ad una componente, mentre la zona di reazione sarà considerata una superficie di discontinuità. Le reazioni nucleari saranno inserite nel modello tramite opportune condizioni al contorno per raccordare le soluzioni nelle due zone.

2.1 Termodinamica di un fluido ed equazione di stato

In questa sezione ricorderemo brevemente i fondamentali concetti di termodinamica e meccanica statistica che verranno applicati nel seguito allo studio dei fluidi. Lo scopo di questa sezione non è una derivazione esaustiva, per la quale si rimanda alla letteratura specialistica (tra gli altri [49]),

bensi quello di stabilire una notazione convenzionale e fornire le basi per la discussione successiva.

Prima di trattare i fluidi tramite il formalismo termodinamico è importante assicurarsi che si possano definire delle grandezze macroscopiche, come la temperatura, l'entropia e la pressione. È proprio per questo che i fluidi vengono qui considerati mezzi continui, intendendo con ciò che ogni piccolo elemento di volume del fluido (cioè un volume molto inferiore a quello del corpo in esame, ma molto superiore alle distanze tra le molecole) è sempre sufficientemente grande da contenere un numero di particelle dell'ordine del numero di Avogadro. Dato che le grandezze termodinamiche hanno significato solamente per sistemi in equilibrio termodinamico, noi ci occuperemo solo di fluidi che abbiano già raggiunto tale stato, ovvero fluidi altamente collisionali. L'effetto degli urti è, infatti, quello di condurre il sistema all'equilibrio.

Per descrivere completamente un fluido in moto è necessario conoscere la distribuzione della velocità media delle particelle che compongono il fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z; t)$ e lo stato termodinamico del fluido stesso. Quest'ultimo è noto se si conosce la pressione P del fluido, la sua densità ρ e la sua temperatura T ; quindi lo stato di un fluido in moto è completamente determinato se si conoscono sei quantità in tutto, le tre componenti della velocità \mathbf{v} e le tre grandezze termodinamiche. Serviranno, di conseguenza, altrettante equazioni; una prima equazione è l'equazione di stato del fluido che ci fornisce una relazione tra P , ρ e T , le altre equazioni, invece, si ricavano a partire dalla cosiddetta *funzione di distribuzione* (vedi sezione 2.2).

La materia presente all'interno di una nana bianca (precursore delle Supernovae di tipo Ia, come abbiamo visto nel precedente capitolo) è costituita da ioni di carbonio e ossigeno che si possono considerare un gas perfetto e da elettroni degeneri (che possiamo considerare relativistici). Ricordiamo quindi l'equazione di stato per un gas perfetto:

$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T, \quad (2.1)$$

dove μ , espresso in g/mol, è il peso molecolare medio (cioè il peso in grammi di una mole di materia) e $\mathcal{R} = C_P - C_V = 8.31 \cdot 10^7$ erg K⁻¹ mol⁻¹ è la costante universale dei gas. C_P e C_V sono le capacità termiche molari (cioè espresse in erg K⁻¹ mol⁻¹) rispettivamente a pressione e a volume costante.

Se un gas perfetto subisce una trasformazione adiabatica, in cui cambia lo stato termodinamico del gas stesso, ma non avvengono scambi di calore con l'esterno, allora si ha anche che:

$$P = K\rho^\gamma, \quad (2.2)$$

dove K è una costante moltiplicativa e $\gamma = C_P/C_V \geq 1$. Per un gas di ioni, come quello di nostro interesse si ha $\gamma = 5/3$, mentre per un gas di elettroni degeneri e ultrarelativistici si ha $\gamma = 4/3$. In quest'ultimo caso, però, γ non è più un rapporto tra capacità termiche. Con l'introduzione del coefficiente γ , l'equazione (2.1) può essere riscritta nella seguente forma:

$$P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} C_P \frac{\rho}{\mu} T. \quad (2.3)$$

Ricordiamo che il valore delle capacità termiche molari dipende esclusivamente dai gradi di libertà della materia. Nel seguito (vedi sezione 3.2) tratteremo le reazioni nucleari che trasformano un gas perfetto di ioni di carbonio (tre gradi di libertà) in un gas perfetto di ioni di magnesio (avente ancora tre gradi di libertà). Quindi, a differenza delle combustioni chimiche terrestri, potremo considerare costanti sia le capacità termiche che il coefficiente γ . Sarà, però importante tener conto della variazione di μ che si verifica seguito delle reazioni, perchè la specie nucleare non è più la stessa.

Infine ricordiamo brevemente la definizione di alcune grandezze termodinamiche che torneranno molto utili nel seguito. L'energia interna di un gas è definita da:

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 + C_V T = \epsilon_0 + \frac{\mu}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}, \quad (2.4)$$

dove ϵ_0 è una costante determinata dal valore dell'energia interna alla temperatura dello zero assoluto. Notiamo che, con questa definizione ϵ è misurata in erg/mol, ma è spesso più conveniente usare un'energia interna per unità di massa (in erg/g):

$$E \equiv \frac{\epsilon}{\mu} = \frac{\epsilon_0}{\mu} + \frac{C_V T}{\mu} = E_0 + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}. \quad (2.5)$$

Analogamente l'entalpia (misurata in erg/mol) è definita da:

$$h \equiv h_0 + C_P T = h_0 + \frac{\gamma \mu}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}, \quad (2.6)$$

dove h_0 è l'entalpia allo zero assoluto. Noi, nel seguito, faremo uso dell'entalpia per unità di massa (in erg/g) che è data da:

$$H \equiv \frac{h}{\mu} = \frac{h_0}{\mu} + \frac{C_P T}{\mu} = H_0 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = E + \frac{P}{\rho}. \quad (2.7)$$

2.2 Funzione di distribuzione

La funzione di distribuzione di un fluido è una funzione che fornisce la probabilità di ogni singola particella di avere una determinata posizione \mathbf{x} e velocità \mathbf{U} ad ogni tempo e che tiene conto del fatto che il moto delle particelle che costituiscono il fluido può essere governato da forze dovute sia alla presenza di un campo esterno sia dall'interazione tra la materia stessa. Per introdurre la funzione di distribuzione f assumiamo che (\mathbf{x}, \mathbf{U}) sia un punto nello spazio delle fasi di una singola particella (si tratta, dunque, di uno spazio a sei dimensioni), allora, se dN è il numero di particelle che al tempo t si trovano nell'elemento di volume $d\mathbf{x}$, con velocità compresa tra \mathbf{U} e $\mathbf{U} + d\mathbf{U}$, la funzione di distribuzione è data da:

$$dN = f(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{x} d\mathbf{U}. \quad (2.8)$$

Di conseguenza, integrando, si ha subito che la funzione di distribuzione è caratterizzata dalla seguente proprietà:

$$N = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{x} d\mathbf{U}, \quad (2.9)$$

dove l'integrale viene eseguito in un volume dello spazio delle fasi di singola particella e N è il numero totale delle particelle contenute in questo volume al tempo t . Dalla definizione stessa si vede che f è una probabilità, quindi deve essere una funzione integrabile, normalizzabile e non negativa.

La funzione di distribuzione, dunque, ci fornisce molte informazioni sullo stato del fluido, ma, per poter seguire anche nel tempo il comportamento del fluido, è necessario avere a disposizione un'equazione che descriva l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione. In tutta generalità, l'equazione per l'evoluzione temporale della funzione di distribuzione si ottiene semplicemente a partire dalla derivata totale rispetto al tempo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dot{U}_j \frac{\partial f}{\partial U_j} = \left(\frac{df}{dt} \right)_c, \quad (2.10)$$

con la convenzione di somma sugli indici ripetuti. L'equazione (2.10) viene detta *equazione di Boltzmann* e contiene il termine collisionale $(df/dt)_c$, il

quale serve per tener conto degli effetti dovuti agli urti tra le particelle e rende quest'equazione non-lineare.

Nel caso di sistemi in equilibrio, e quindi nel nostro caso, il termine collisionale si annulla, semplificando notevolmente la nostra equazione. Questo non significa affatto che non vi siano più collisioni (perchè è proprio grazie ad esse che si raggiunge l'equilibrio), ma semplicemente, se si considera un particolare volumetto dello spazio delle fasi di un sistema in equilibrio, l'effetto degli urti sarà solo quello di ridistribuire le particelle mantenendo invariato il numero totale di particelle contenute nel volumetto (ovvero tante ne escono quante ne entrano).

In questo caso particolare, l'equazione di Boltzmann (2.10) diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dot{U}_j \frac{\partial f}{\partial U_j} = 0, \quad (2.11)$$

che viene detta *equazione di Vlasov*. Notiamo che, siccome le stelle sono costituite da gas fortemente collisionale [18], nella nostra analisi non è troppo restrittivo ridurci sempre all'equazione di Vlasov.

2.3 Metodo dei momenti

Avendo ottenuto una funzione di distribuzione e un'equazione che ne descrive la sua evoluzione (l'equazione di Vlasov) dobbiamo cercare di estrarne delle informazioni sulle grandezze che caratterizzano il fluido in esame. Il metodo dei momenti è appunto un'utile tecnica matematica che ci permetterà di raggiungere questo scopo.

Prima di descrivere in dettaglio questo metodo, ricordiamo la definizione di *momenti di ordine n* ($\mathcal{M}^{(n)}$) di una assegnata funzione di distribuzione $F(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t)$:

- *nello spazio delle velocità*

$$\mathcal{M}_U^{(n)}(\mathbf{x}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}^n F(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{U}; \quad (2.12)$$

- *nello spazio delle posizioni*

$$\mathcal{M}_x^{(n)}(\mathbf{U}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}^n F(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

dove, nello scrivere $\mathcal{M}_i^{(n)}$, indichiamo con (n) l'ordine considerato e con i lo spazio in cui si opera.

Ritornando alla funzione di distribuzione f , si vede subito, dalla definizione (2.9), che il momento di ordine zero nello spazio delle velocità è proprio la densità numerica delle particelle:

$$n(\mathbf{x}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{U}. \quad (2.14)$$

Il numero totale di particelle N presenti al tempo t si ricava integrando l'equazione (2.14) sullo spazio delle posizioni:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathbf{x}; t) d\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

In generale, però risulta molto più comodo utilizzare la densità di massa ρ . Anche questa grandezza può essere vista come un momento di ordine zero della funzione di distribuzione, a meno di una costante moltiplicativa che è proprio la massa di una singola particella m (ricordiamo che abbiamo supposto che le particelle fossero tutte identiche, quindi con ugual massa):

$$\rho(\mathbf{x}; t) = m \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{U}. \quad (2.16)$$

Infine definiamo *media* di una generica quantità $A(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t)$ pesata tramite la funzione di distribuzione f , la seguente grandezza¹:

$$\bar{A}(\mathbf{x}; t) \equiv \frac{\int m A(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) f(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{U}}{\int m f(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{U}} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}; t)} \int m A(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) f(\mathbf{x}, \mathbf{U}; t) d\mathbf{U}. \quad (2.17)$$

Quest'ultima definizione è utile perchè il punto di partenza del metodo dei momenti è proprio quello di derivare delle equazioni differenziali che descrivano l'evoluzione di \bar{A} . Queste equazioni si ottengono facilmente dall'identità

$$\int m A \left(\frac{\partial f}{\partial t} + U_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dot{U}_j \frac{\partial f}{\partial U_j} \right) d\mathbf{U} = 0 \quad (2.18)$$

che è un'immediata conseguenza dell'equazione di Vlasov.

Analizziamone termine per termine, ricordando che le medie vanno effettuate da $-\infty$ a $+\infty$:

¹D'ora in avanti, se gli estremi degli integrali non verranno specificati, si intenderà che vengono eseguiti da $-\infty$ a $+\infty$.

- Per il primo addendo si ottiene:

$$\int m A \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{U} = \int m \left(\frac{\partial f A}{\partial t} - f \frac{\partial A}{\partial t} \right) d\mathbf{U} = \frac{\partial \overline{\rho A}}{\partial t} - \overline{\rho \frac{\partial A}{\partial t}}, \quad (2.19)$$

in quanto, in questo caso, le operazioni di derivazione e di integrazione commutano perchè \mathbf{U} è indipendente da t .

- Il secondo addendo diventa:

$$\int m A U_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{U} = \int m \left(\frac{\partial f A U_j}{\partial x_j} - f \frac{\partial A U_j}{\partial x_j} \right) d\mathbf{U} = \frac{\partial \overline{\rho A U_j}}{\partial x_j} - \overline{\rho \frac{\partial A U_j}{\partial x_j}}, \quad (2.20)$$

dove, nuovamente, le operazioni di derivazione e di integrazione commutano perchè \mathbf{U} è indipendente da \mathbf{x} .

- Infine per l'ultimo addendo si ha:

$$\int m A \dot{U}_j \frac{\partial f}{\partial U_j} d\mathbf{U} = \dot{U}_j \int m \left(\frac{\partial f A}{\partial U_j} - f \frac{\partial A}{\partial U_j} \right) d\mathbf{U} = -\overline{\rho \dot{U}_j \frac{\partial A}{\partial U_j}} \quad (2.21)$$

che si trova ricordando che velocità e accelerazioni sono variabili indipendenti e che f è una funzione integrabile e normalizzabile per cui $f \rightarrow 0$ per $|\mathbf{U}| \rightarrow \infty$ (cioè particelle con velocità infinita non sono permesse).

Riunendo tutti i termini nell'equazione (2.18) si ottiene la seguente fondamentale identità:

$$\frac{\partial \overline{\rho A}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho A U_j}}{\partial x_j} = \overline{\rho \dot{U}_j \frac{\partial A}{\partial U_j}} + \overline{\rho \frac{\partial A}{\partial t}} + \overline{\rho \frac{\partial A U_j}{\partial x_j}}. \quad (2.22)$$

2.4 Le equazioni dei fluidi

Grazie al metodo dei momenti, è, dunque, molto semplice ricavare le restanti cinque equazioni che ci servono per caratterizzare completamente un fluido. Infatti, basta applicare la definizione stessa di momento all'equazione (2.18):

- Calcolando il momento di ordine zero ($A = 1$) e tenendo presente che $\overline{\frac{\partial U_j}{\partial x_j}} = 0$ si ottiene:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \overline{\rho \frac{\partial U_j}{\partial x_j}} = 0, \quad (2.23)$$

detta *equazione di continuità*.

- Calcolando il primo momento ($A = U_i$) e tenendo presente che $\overline{\partial U_i U_j / \partial x_j} = 0$ e $\overline{\partial U_i / \partial t} = 0$ si ottiene l'equazione del moto:

$$\frac{\partial \rho \overline{U_i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{U_i U_j}}{\partial x_j} = F_i, \quad (2.24)$$

dove con F_i si intende la densità di forza totale agente sul fluido, cioè $F_i = \int m \dot{U}_j \delta_{ij} f d\mathbf{U} = \rho \dot{U}_i$; in generale la forza totale è dovuta alla presenza di eventuali campi esterni e all'interazione tra le particelle.

- Infine, calcolando il secondo momento ($A = U_i U_i = U^2$) e tenendo presente che $\overline{\partial U_i^2 U_j / \partial x_j} = 0$ e $\overline{\partial U_i^2 / \partial t} = 0$ si ottiene:

$$\frac{\partial \rho \overline{U_i U_i}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{U_i U_i U_j}}{\partial x_j} = \rho \dot{U}_j \frac{\partial \overline{U_i U_i}}{\partial U_j} = 2\rho \dot{U}_j \overline{U_i} \delta_{ij}. \quad (2.25)$$

2.4.1 Pressione

Per comprendere meglio il significato delle equazioni appena ricavate, è conveniente riscrivere la velocità \mathbf{U} di una particella in termini di due addendi:

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad U_i = v_i + u_i, \quad (2.26)$$

dove

$$\mathbf{v} \equiv \overline{\mathbf{U}} = \frac{1}{\rho} \int m \mathbf{U} f d\mathbf{U} \quad (2.27)$$

è la velocità *ordinata*, propria del moto d'insieme di tutto il fluido; mentre

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{U} - \mathbf{v} \quad (2.28)$$

è la velocità della singola particella nel sistema di riferimento in cui il fluido è fermo (noto come sistema Lagrangiano). La velocità \mathbf{u} viene detta *casuale* perchè gode della proprietà di avere media nulla ($\overline{\mathbf{u}} = 0$) e questa è una proprietà macroscopica, nel senso che vale indipendentemente dalla funzione di distribuzione f .

Con queste definizioni, la media di ogni componente della velocità risulta:

$$\overline{U_i} = \overline{v_i + u_i} = v_i, \quad (2.29)$$

ed analogamente,

$$\overline{U_i U_j} = \overline{(v_i + u_i)(v_j + u_j)} = v_i v_j + \overline{u_i u_j}. \quad (2.30)$$

Il tensore $\rho \overline{U_i U_j} = \rho v_i v_j + \rho \overline{u_i u_j}$ viene spesso chiamato *tensore degli sforzi di Reynolds* (o *stress tensor*) e contiene sia il termine dovuto al moto macroscopico che quello dovuto al moto microscopico.

In particolare, si definisce tensore della pressione P_{ij} il momento trasportato dal moto microscopico, ovvero:

$$P_{ij} = \rho \overline{u_i u_j}. \quad (2.31)$$

Inoltre, è conveniente separare la traccia del tensore della pressione per evidenziare meglio che il momento trasportato da una particella a causa del suo moto microscopico consiste di una parte isotropa $P\delta_{ij}$ e una parte anisotropa π_{ij} :

$$P_{ij} = P\delta_{ij} - \pi_{ij}. \quad (2.32)$$

Con π_{ij} indichiamo il *tensore degli sforzi viscosi*, simmetrico e a traccia nulla, proporzionale alla viscosità del fluido, mentre P è la pressione scalare (o, semplicemente, pressione), definita da:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \rho \overline{\mathbf{u}^2}. \quad (2.33)$$

Nel seguito ci occuperemo solamente di fluidi non viscosi, per cui porremo $\pi_{ij} = 0$.

Ricordiamo che la media fin qui applicata è definita nell'equazione (2.17) attraverso una funzione di distribuzione che descrive il flusso nel suo complesso e quindi i risultati ottenuti sono formalmente corretti. Nel caso in cui il flusso sia in parte turbolento possiamo pensare che la funzione di distribuzione sia costituita di due parti $f = f_0 + f_t$, dove f_0 è la funzione di distribuzione di un fluido laminare (è una Maxwelliana nelle velocità), mentre $f_t \equiv f - f_0$ descrive la parte di moto turbolento. In questo caso si può riscrivere la velocità come:

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{u}, \quad (2.34)$$

dove $\delta\mathbf{v}$ e $\delta\mathbf{u}$ sono tali che $\langle \delta\mathbf{v} \rangle_0 = 0$ e $\langle \delta\mathbf{u} \rangle_t = 0$, avendo indicato con $\langle A \rangle_0$ la media pesata con la funzione f_0 e con $\langle A \rangle_t$ la media pesata con la funzione f_t . Analogamente a quanto fatto in precedenza si ha ancora che $\overline{U_i} = \langle \langle U_i \rangle_0 \rangle_t = v_i$ e quindi l'equazione di continuità (2.23) per un flusso laminare e per un flusso turbolento rimane la stessa. Invece, quando calcoliamo il secondo momento abbiamo:

$$\overline{U_i U_j} = \langle \langle U_i U_j \rangle_0 \rangle_t = v_i v_j + \langle \delta v_i \delta v_j \rangle_0 + \langle \delta u_i \delta u_j \rangle_t. \quad (2.35)$$

Da questo termine si capisce che la pressione di un flusso turbolento è maggiore di quella di un flusso laminare. Nel seguito, comunque, medieremo sempre solo rispetto alla funzione di distribuzione completa f del fluido e sottintenderemo che essa descriva anche la parte turbolenta.

2.4.2 Equazione di continuità

Con le precedenti osservazioni è chiaro che l'equazione di continuità (2.23) può essere riscritta più semplicemente in termini della sola velocità relativa al moto ordinato, ovvero:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.36)$$

Ora è facile dimostrare che l'equazione di continuità è una diretta conseguenza della *conservazione locale della massa*. Infatti, consideriamo un volume V_0 fisso nello spazio e sia S la superficie che lo delimita e \mathbf{v} la velocità del fluido, allora la massa del fluido racchiusa in V_0 è $\int_{V_0} \rho d\mathbf{x}$. Invece, la massa che passa nell'unità di tempo attraverso un elemento unitario della superficie S è $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$, dove \mathbf{n} è un vettore unitario, avente direzione lungo la normale all'elemento di superficie dS e verso uscente dalla superficie stessa ($\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} > 0$, se la massa fuoriesce da V_0).

Quindi la massa totale del fluido uscente dall'intero volume V_0 nell'unità di tempo è:

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho d\mathbf{x}, \quad (2.37)$$

dove nell'ultimo membro compare il segno meno perchè stiamo considerando il flusso di massa *uscente*.

Per il teorema della divergenza, l'integrale di superficie diventa:

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad (2.38)$$

così, dall'equazione (2.37) si ottiene:

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (2.39)$$

Infine, siccome quest'ultima equazione deve valere per un qualunque volume V_0 , si riottiene proprio l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.40)$$

In particolare se la densità è costante, ovvero se il fluido è incomprimibile, l'equazione di continuità si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.41)$$

Quando il fluido è incomprimibile, la fluido-dinamica risulta notevolmente semplificata, quindi vogliamo specificare sotto quali condizioni quest'assunzione è ragionevole. Quando un gas è compresso in una regione limitata (locale), l'eccesso di pressione creato genera delle onde sonore (vedi sezione 2.5) che agiscono sulla materia in modo tale da ricondurla ad una distribuzione uniforme. Di conseguenza, solo oggetti che si muovono a velocità paragonabili o superiori a quella del suono sono in grado di produrre delle compressioni apprezzabili. Invece, quando un oggetto si muove più lentamente della velocità del suono, il gas può dissipare la compressione ad una velocità maggiore di quella dell'oggetto stesso. Un gas può, quindi, essere visto come un fluido incomprimibile fintanto che tutti i moti interni hanno velocità molto inferiori a quella del suono, così che le piccole variazioni di pressione indotte da questi moti interni possono essere considerate trascurabili.

2.4.3 Equazione del moto

L'equazione del moto (2.24) può essere interpretata più facilmente se si utilizzano i risultati (2.30), (2.31), (2.33) e si considera² $\pi_{ij} = 0$, infatti essa diventa:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + P \delta_{ij}) = F_i \quad (2.42)$$

oppure

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = F_i. \quad (2.43)$$

Infine, grazie all'equazione di continuità (2.36), l'equazione del moto, detta anche *equazione di Eulero*, assume la seguente semplice forma:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{F_i}{\rho}. \quad (2.44)$$

Ricordiamo che F_i è la densità della forza totale agente sul fluido. Possiamo riscrivere questa grandezza evidenziando che la forza totale può essere sia conservativa (e quindi esprimibile tramite un potenziale Φ), sia non conservativa:

$$F_i = -\rho \partial \Phi / \partial x_i + \rho a_i \quad (2.45)$$

dove il vettore \mathbf{a} indica appunto l'accelerazione dovuta a forze non conservative.

²Questo significa trascurare gli effetti della viscosità, assunzione che verrà giustificata nella sezione 4.2 per il caso delle Supernovae.

Quest'equazione è legata alla *conservazione dell'impulso*. Infatti, consideriamo un volume V_0 fisso nello spazio e supponiamo che non vi siano campi esterni, allora la forza totale agente su questo volume è $-\int_S P \mathbf{n} dS$, dove il segno meno è dovuto alla convenzione di considerare positiva la forza esercitata dal fluido e negativa quella agente sul fluido stesso.

Utilizzando, nuovamente, il teorema della divergenza, si ottiene:

$$-\int_S P \mathbf{n} dS = -\int_{V_0} \nabla P d\mathbf{x}, \quad (2.46)$$

dalla quale si osserva che su un generico elemento unitario di volume del fluido agisce una forza pari a $-\nabla P$. Quindi possiamo scrivere:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P. \quad (2.47)$$

Se ora ammettiamo la presenza di campi esterni, ritroviamo l'equazione del moto nella sua forma usuale:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi + \mathbf{a}. \quad (2.48)$$

Per quanto riguarda le strutture stellari, esse sono sistemi autogravitanti, ovvero le particelle che compongono la materia stellare creano esse stesse il campo gravitazionale cui sono sottoposte. Il potenziale per l'autogravitazione si ottiene risolvendo l'equazione di Poisson autoconsistente:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.49)$$

dove $G = 6.67 \cdot 10^{-8}$ dyne cm² g⁻² è la costante gravitazionale Newtoniana.

Ricordiamo, infine, che alle equazioni del moto bisogna sempre aggiungere le condizioni al contorno, che devono essere soddisfatte sulle superfici che confinano il fluido. Per un fluido ideale, la condizione al contorno è semplicemente che il fluido non possa penetrare una superficie solida, ovvero la componente della velocità del fluido normale alla superficie deve essere pari alla velocità della superficie stessa. Nel caso, invece, in cui vi siano due fluidi immiscibili a contatto, la condizione diventa che la pressione e le componenti della velocità normale alla superficie di separazione siano le stesse per entrambi i fluidi ed uguali all'eventuale velocità della superficie stessa (in sezione 2.6 sono riportati maggiori dettagli).

2.4.4 Equazione dell'energia

Seguendo lo stesso ragionamento dei paragrafi precedenti, possiamo riscrivere l'equazione (2.25) nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} (\mathbf{v}^2 + \overline{\mathbf{u}^2}) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\rho}{2} \overline{(v_i + u_i)^2 (v_j + u_j)} \right] = -\rho v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \rho v_j a_j. \quad (2.50)$$

Esplicitando la media presente nel secondo termine, si ha:

$$\overline{(v_i + u_i)^2 (v_j + u_j)} = \mathbf{v}^2 v_j + 2v_i \overline{u_i u_j} + v_j \overline{\mathbf{u}^2} + \overline{u_j \mathbf{u}^2}. \quad (2.51)$$

A questo punto risulta necessaria la definizione a livello microscopico sia dell'energia interna per unità di massa:

$$E = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}^2} \quad (2.52)$$

che del flusso di calore per conduzione termica (nella direzione j):

$$K_j = \frac{1}{2} \rho \overline{u_j \mathbf{u}^2}, \quad (2.53)$$

così, ricordando anche la definizione di pressione (2.31), si ottiene l'equazione della conservazione dell'energia totale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_j \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} + E \right) \right] = \rho v_j a_j - \rho v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial K_j}{\partial x_j}. \quad (2.54)$$

Un'altra forma dell'equazione per l'energia si può ottenere sostituendo nella (2.54) l'equazione di continuità (2.36) e l'equazione del moto (2.44):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v_j \frac{\partial E}{\partial x_j} - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial K_j}{\partial x_j}. \quad (2.55)$$

La conduzione termica è un fenomeno dovuto all'eventuale variazione di temperatura attraverso il fluido (può avvenire anche in un fluido in quiete), per la quale le molecole trasferiscono calore da punti in cui la temperatura è maggiore a punti in cui è minore. Nel caso di piccoli gradienti di temperatura, si può espandere questo flusso di calore in serie di potenze del gradiente della temperatura, mantenendo solo il primo termine di tale espansione. Il termine di ordine zero è evidentemente nullo, in quanto il flusso di calore deve essere nullo quando $\nabla T = 0$. Così si ha:

$$\mathbf{K} = -\kappa \nabla T, \quad (2.56)$$

con κ che rappresenta il coefficiente di *conducibilità termica* ed è, in generale, una funzione della temperatura e della pressione.

Infine, in molti problemi di astrofisica (come il caso dell'esplosione delle Supernovae), l'equazione della conservazione dell'energia deve tener conto anche del rilascio energetico dovuto alle reazioni nucleari e delle eventuali perdite di energia. Quindi, la forma più completa per l'equazione dell'energia è:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla E - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{K} + \dot{q} - \Lambda, \quad (2.57)$$

dove $\dot{q} = \dot{q}(T, P, \rho)$ è l'energia generata per unità di massa e di tempo e $\Lambda = \Lambda(T, P, \rho)$ indica tutte le possibili perdite di energia per unità di massa e di tempo. In particolare, nelle Supernovae, le perdite di energia sono dovute essenzialmente a processi radiativi e all'emissione di neutrini (che comunque sono significative solo nelle prime fasi dell'esplosione), mentre processi dissipativi, come la viscosità, risultano trascurabili (vedi sezioni 4.1 e 4.2).

2.5 La velocità del suono

In questa sezione introdurremo il concetto di *onda sonora* e le conseguenze che la propagazione di onde sonore può avere in un fluido (per maggiori dettagli rimandiamo alla letteratura specialistica, in particolare [48]). Consideriamo un fluido comprimibile (per esempio un gas) in quiete e in assenza di forze esterne, con pressione \bar{P} e densità $\bar{\rho}$ uniformi e costanti. Si definisce onda sonora l'oscillazione del fluido provocata da una piccola perturbazione in un qualsiasi punto del fluido stesso. L'effetto di un'onda sonora è quello di creare alternativamente una leggera compressione e rarefazione del gas.

Dato che, per definizione, l'ampiezza della perturbazione è piccola, possiamo supporre che siano piccole anche le variazioni di pressione δP e di densità $\delta \rho$ e di velocità $\delta \mathbf{v}$ indotte dal passaggio dell'onda sonora, cioè $\delta P \ll \bar{P}$ e $\delta \rho \ll \bar{\rho}$ (il fatto che $\delta \mathbf{v}$ sia piccolo verrà giustificato a posteriori). Dato che, come ogni altro moto in un fluido ideale anche la propagazione di un'onda sonora è adiabatica, possiamo legare la variazione della pressione δP alla variazione della densità $\delta \rho$ tramite la seguente relazione:

$$\delta P = \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} \right)_S \delta \rho, \quad (2.58)$$

dove il suffisso S indica che la derivata va eseguita a entropia costante. Inoltre, scrivendo $P = \bar{P} + \delta P$ e $\rho = \bar{\rho} + \delta \rho$, l'equazione di continuità (2.40) e

l'equazione del moto (2.48), trascurando i termini del secondo ordine nelle quantità perturbate, diventano rispettivamente:

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \bar{\rho}\nabla(\delta\mathbf{v}) = 0. \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla(\delta P) = 0. \quad (2.60)$$

Infine, sostituendo l'equazione (2.58) nella (2.59) si ottiene:

$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} \right)_S \nabla(\delta\mathbf{v}) = 0. \quad (2.61)$$

Le equazioni (2.60) e (2.61) caratterizzano completamente un'onda sonora. Infatti, introducendo un potenziale per la velocità tale che $\delta\mathbf{v} = \nabla\phi$, dalla (2.60) si ha:

$$\delta P = -\bar{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (2.62)$$

che sostituita nella (2.61) fornisce:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} \right)_S \nabla^2\phi = 0. \quad (2.63)$$

L'equazione (2.63) è un'equazione di D'Alambert, che, come noto, descrive un'onda che si propaga con velocità pari a:

$$c_s \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} \right)_S}, \quad (2.64)$$

che viene detta appunto *velocità del suono*. Sottolineiamo che questa velocità è da intendersi rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il gas; inoltre dalla sua definizione si vede che dipende dalle grandezze termodinamiche che caratterizzano il gas, quindi in generale la velocità del suono sarà diversa da punto a punto del gas. Nel seguito, quando parleremo di velocità del suono intenderemo sempre riferirci a condizioni locali.

La velocità del suono c_s non va confusa con la velocità $\delta\mathbf{v}$ che acquistano le particelle di fluido al passaggio dell'onda sonora. Infatti, consideriamo quella che viene definita un'onda sonora piana, cioè tale che il potenziale della velocità ϕ dipende da una sola coordinata (per esempio z), allora la soluzione dell'equazione (2.63) è della forma:

$$\phi = f_1(z - c_s t) + f_2(z + c_s t), \quad (2.65)$$

dove f_1 e f_2 sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti. Ne segue che $\delta v_z = \partial\phi/\partial z = df_1/dz + df_2/dz$ e, dall'equazione (2.62), $\delta P = c_s \bar{\rho}(df_1/dz + df_2/dz)$, quindi:

$$\delta v_z = \frac{\delta P}{c_s \bar{\rho}} \quad (2.66)$$

oppure, con l'equazione (2.58), $v_z = c_s \cdot \delta\rho/\bar{\rho}$. Da quest'ultima affermazione si nota che $v_z \ll c_s$ perchè per definizione di onda sonora $\delta\rho \ll \bar{\rho}$ e questo giustifica a posteriori l'approssimazione fatta per ricavare le equazioni (2.59) e (2.60).

L'equazione (2.64) fornisce la velocità del suono in termini della comprimibilità adiabatica del fluido $(\partial\bar{P}/\partial\bar{\rho})_S$. Ricordando che $(\partial\bar{P}/\partial\bar{\rho})_S = \gamma(\partial\bar{P}/\partial\bar{\rho})_T$ (vedi [49]), si può definire la velocità del suono anche in termini della comprimibilità isoterma:

$$c_s = \sqrt{\gamma \left(\frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\rho}} \right)_T}. \quad (2.67)$$

Da quest'ultima espressione, ricordando anche l'equazione di stato (2.1) è immediato calcolare la velocità del suono per un gas perfetto:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu} \mathcal{R}T} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}. \quad (2.68)$$

Infine definiamo una quantità adimensionale, detta *numero di Mach* che esprime il rapporto tra la velocità del fluido e quella del suono:

$$M \equiv \frac{|\mathbf{v}|}{c_s}. \quad (2.69)$$

Fin'ora abbiamo considerato un fluido inizialmente in quiete. Quando un fluido è inizialmente in moto con una velocità \mathbf{v} , si dice che esso è *subsonico* se $|\mathbf{v}| < c_s$ (o $M < 1$) e *supersonico* se $|\mathbf{v}| > c_s$ (o $M > 1$). Vedremo ora che questa distinzione è fondamentale. Infatti, abbiamo detto che se un gas viene leggermente perturbato in un suo punto A allora l'effetto della perturbazione si propaga attraverso il gas con la velocità del suono relativamente al gas stesso. Se prendiamo un sistema di riferimento fisso esterno al fluido (che indichiamo con S_{rif}), per trovare la velocità di propagazione della perturbazione dobbiamo considerare (i) che la perturbazione si muove nella direzione del gas stesso con la velocità del gas \mathbf{v} rispetto al sistema fissato e (ii) che la perturbazione si muove rispetto al gas in ogni direzione

(individuata dal versore \mathbf{n}) con la velocità del suono. Quindi, la velocità di propagazione dell'onda sonora rispetto a S_{rif} è data da $\mathbf{v}_{rif} = \mathbf{v} + c_s \mathbf{n}$. È chiaro, dunque, che questa velocità non è univoca, ma dipende dalla direzione considerata. Per illustrare meglio questa affermazione consideriamo un flusso uniforme e rappresentiamo (vedi figura 2.1) il vettore \mathbf{v} (con origine nel punto A e fine nel punto B) e tracciamo la circonferenza di raggio c_s e centro B . Tutti i possibili valori della velocità \mathbf{v}_{rif} sono quindi dati dai moduli di tutti i vettori che congiungono il punto A con i punti della circonferenza. Si nota subito che se la velocità del flusso è subsonica (figura 2.1(a)), il vettore \mathbf{v}_{rif} può essere orientato in qualsiasi direzione dello spazio. Questo significa che gli effetti di una perturbazione in un punto di un flusso subsonico raggiungono tutti i punti del fluido. Invece, se il flusso è supersonico (figura 2.1(b)) la direzione di \mathbf{v}_{rif} può giacere solo in una ben determinata regione dello spazio delimitata da una superficie, detta *superficie di Mach*, che per un flusso uniforme è un cono di vertice A e apertura 2φ , con $\sin \varphi = c_s/|\mathbf{v}|$. Ne segue che se un flusso supersonico viene perturbato in un suo punto, gli effetti della perturbazione non influenzano tutto il fluido e questo sarà di particolare importanza nello studio delle detonazioni (sezione 3.4).

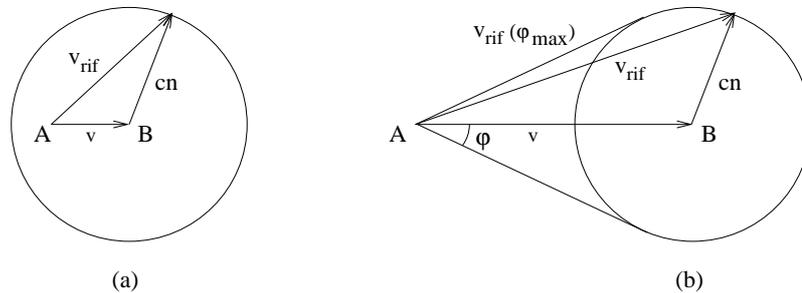


Figura 2.1: Metodo per valutare, rispetto ad un sistema fissato, la velocità di propagazione $\mathbf{v} + c_s \mathbf{n}$ di una perturbazione creata nel punto O di un flusso uniforme subsonico (a) e supersonico (b).

2.6 Superfici di discontinuità

Nelle precedenti sezioni abbiamo considerato solo flussi in cui tutte le quantità termodinamiche variavano in modo continuo. Nel seguito (affrontando lo studio delle combustioni in un gas), però, dovremo analizzare anche flussi in cui queste quantità presentano *superfici di discontinuità*. In generale, per flussi non stazionari, queste superfici di discontinuità non rimangono fisse nel tempo.

Le particelle del fluido, durante il loro moto, possono attraversare tali superfici, ma devono essere soddisfatte delle opportune condizioni al contorno. Lo scopo di questa sezione è proprio quello di determinare queste condizioni, partendo dalle equazioni del moto che abbiamo ricavato nelle sezioni precedenti. Vedremo che, per flussi stazionari, ci sono tre quantità che si conservano indipendentemente l'una dall'altra: il flusso della massa, il flusso dell'impulso, il flusso dell'energia.

Per formulare queste condizioni, consideriamo un flusso stazionario e utilizziamo un sistema di coordinate fisso rispetto a un elemento della superficie di discontinuità (che indichiamo con Σ), con l'asse z diretto come la normale alla superficie (vedi figura 2.2). È chiaro che, per ritornare ad un sistema di coordinate fisso nello spazio, basta sostituire, nelle formule seguenti, a \mathbf{v} (velocità del fluido rispetto alla superficie) la differenza tra la velocità del fluido rispetto al sistema fisso \mathbf{v}_S e la velocità \mathbf{v}_Σ della superficie stessa (sempre rispetto al sistema fisso):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_S - \mathbf{v}_\Sigma. \quad (2.70)$$

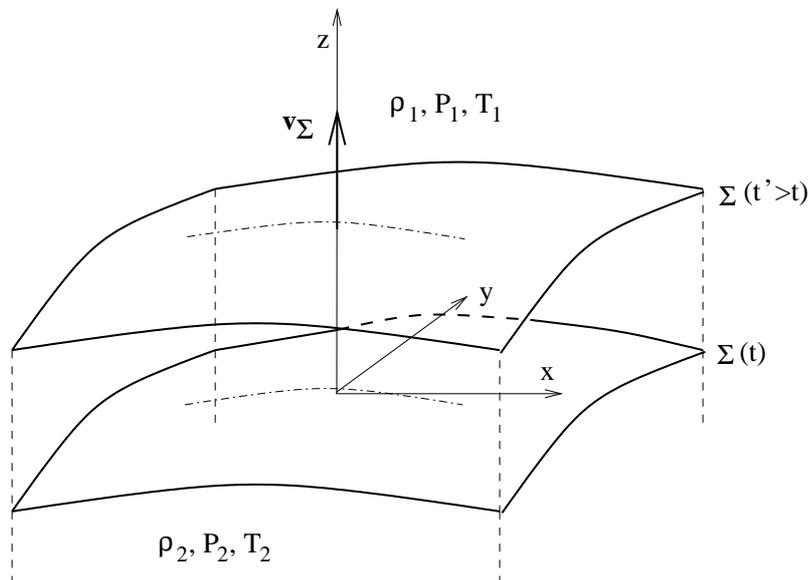


Figura 2.2: Rappresentazione schematica di una generica superficie di discontinuità Σ con un sistema di riferimento solidale con essa avente l'asse z localmente normale.

Dall'equazione (2.36), è immediatamente chiaro che il flusso della massa deve essere continuo attraverso la superficie Σ , ovvero la massa del fluido che penetra da un lato della superficie di discontinuità verso l'altro deve essere uguale alla massa che penetra nella direzione opposta. Quindi si deve avere:

$$\rho_1 v_{1z} = \rho_2 v_{2z}, \quad (2.71)$$

dove i pedici 1 e 2 indicano i due lati della superficie. Per riscrivere in forma più compatta le condizioni, introduciamo la seguente notazione:

$$[\rho v_z]_\Sigma \equiv \rho_2 v_{2z} - \rho_1 v_{1z} = 0. \quad (2.72)$$

Inoltre, l'equazione (2.42), in assenza di forze esterne, esprime il fatto che anche il flusso dell'impulso deve essere continuo, ovvero le forze esercitate dal fluido su ogni lato della superficie di discontinuità devono essere uguali. Il flusso dell'impulso per unità di superficie (nella i -esima componente) è $Pn_i + \rho v_i v_j n_j$, con \mathbf{n} vettore normale alla superficie (dunque lungo z). Di conseguenza la continuità della componente z del flusso dell'impulso, porta a:

$$[P + \rho v_z^2]_\Sigma = 0, \quad (2.73)$$

mentre la continuità lungo x e y fornisce:

$$[\rho v_x v_z]_\Sigma = 0 \quad \text{e} \quad [\rho v_y v_z] = 0. \quad (2.74)$$

Infine, dall'equazione (2.54) si vede che, in assenza di forze esterne, di produzione e di perdite di energia e trascurando la conduzione termica, anche il flusso dell'energia deve essere continuo attraverso la superficie di discontinuità, cioè:

$$\left[\rho v_z \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + E \right) \right]_\Sigma = 0, \quad (2.75)$$

che, per la condizione (2.72), si riduce a:

$$\left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + E \right]_\Sigma = 0 \quad \text{oppure} \quad \left[\frac{1}{2} v^2 + H \right]_\Sigma = 0, \quad (2.76)$$

dove si è fatto uso della definizione di entalpia. Le equazioni (2.72), (2.76), (2.73) e (2.74) sono dette *condizioni di Rankine-Hugoniot* e formano un sistema completo di condizioni al bordo per la superficie di discontinuità Σ .

Da questo sistema di equazioni si può vedere immediatamente che è possibile realizzare due tipi di discontinuità:

- *Discontinuità tangenziale*

In questo primo caso si ha una superficie di discontinuità, attraverso la quale non fluisce massa, cioè $\rho_1 v_{1z} = \rho_2 v_{2z} = 0$. Poichè ρ_1 e ρ_2 non sono nulle, allora segue che $v_{1z} = v_{2z} = 0$. In questo modo le condizioni (2.76) e (2.74) sono soddisfatte e la condizione (2.73) implica $P_1 = P_2$.

- *Onda d'urto o shock*

In questo secondo caso, il flusso della massa attraverso la superficie di discontinuità non è nullo, quindi v_{1z} e v_{2z} non sono nulli. Di conseguenza, le condizioni (2.72) e (2.74) danno $[v_x]_\Sigma = 0$ e $[v_y]_\Sigma = 0$, cioè la velocità tangenziale è continua alla superficie di discontinuità. La velocità normale, la pressione, la densità e le altre grandezze termodinamiche, invece, sono discontinue. Queste discontinuità sono correlate dalle condizioni (2.37), (2.76) e (2.73).

In generale, se descriviamo la superficie di discontinuità tramite una funzione $F(\mathbf{x}, t) = 0$ allora le condizioni di Rankine-Hugoniot assumono la seguente forma:

$$\left[\rho \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial t} \right) \right]_\Sigma = 0 \quad (2.77)$$

$$[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}]_\Sigma = 0 \quad (2.78)$$

$$\left[P + \rho \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 \right]_\Sigma = 0 \quad (2.79)$$

$$\left[E + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 \right]_\Sigma = 0 \quad (2.80)$$

dove $\hat{\mathbf{n}} = \nabla F / |\nabla F|$ è il versore unitario normale alla superficie di discontinuità e $N = |\nabla F|$. Inoltre, per risolvere il problema della dinamica dei fluidi in presenza di una discontinuità, è necessario aggiungere alle leggi di conservazione un'equazione che descriva l'evoluzione della superficie di discontinuità e che in particolare determini l'andamento della velocità della superficie stessa (o analogamente la velocità di uno dei fluidi rispetto a tale superficie=). In generale, se la superficie di discontinuità ha uno spessore, esso influenzerebbe questa velocità, ma nel modello di discontinuità con spessore trascurabile, la velocità può essere considerata una costante e quindi

deve essere assegnata come parametro esterno al problema. In questo caso l'equazione di evoluzione è semplicemente:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial t} = \mathbf{U}_{disc}, \quad (2.81)$$

dove \mathbf{U}_{disc} è la velocità di propagazione della discontinuità stessa.

Infine, notiamo che quando la discontinuità è accompagnata da fenomeni di produzione o perdita di energia (come nel caso dei fronti di combustione), non è più possibile considerare nullo lo spessore della discontinuità stessa. In questo caso, sempre in assenza di forze esterne, è chiaro che il membro di destra dell'equazione (2.75) è diverso da zero, infatti si ha:

$$\left[\rho v_z \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + E \right) \right]_{\Sigma} = \int_{l_{\Sigma}} \rho(\dot{q} - \Lambda) dz - \int_{l_{\Sigma}} K_z dz, \quad (2.82)$$

dove l_{Σ} indica lo spessore della discontinuità. L'analisi dettagliata di questi tipi di discontinuità verrà esposta nella sezione 3.1.

2.7 Onde d'urto

In questa sezione descriveremo brevemente le proprietà che caratterizzano le onde d'urto, rimandando a [48] per maggiori dettagli. In particolare tratteremo solo il caso di onde d'urto perpendicolari alla direzione del moto globale del fluido (shock normale); la generalizzazione per shock obliqui è, comunque, immediata.

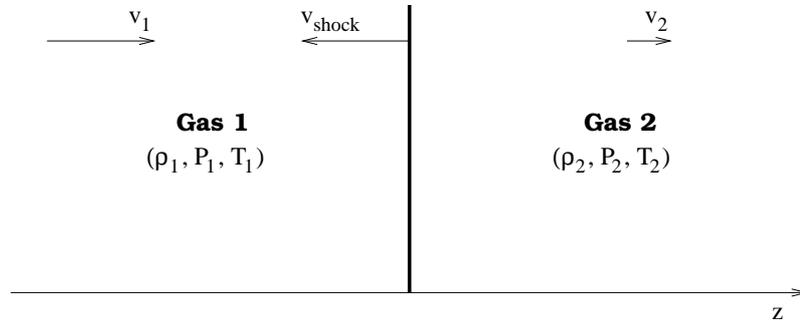


Figura 2.3: Rappresentazione schematica di uno shock.

Abbiamo visto nella sezione precedente che, in questo tipo di discontinuità, la componente tangenziale della velocità del gas è continua, quindi, senza perdita di generalità, nel seguito la supporremo nulla e considereremo un sistema di coordinate solidale con la superficie di discontinuità. Inoltre, con riferimento alla figura 2.3, chiameremo gas 1 e gas 2 i fluidi separati dall'onda d'urto che si propaga da 2 a 1. Dette v_1 e v_2 le velocità rispetto allo shock lungo z rispettivamente dei gas 1 e 2 (che, per comodità, prendiamo positive), le condizioni di Rankine-Hugoniot diventano:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \quad (2.83)$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (2.84)$$

$$H_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = H_2 + \frac{1}{2}v_2^2, \quad (2.85)$$

dove j (> 0) è la densità del flusso di massa. Come le altre grandezze termodinamiche, anche l'entropia è discontinua in corrispondenza di un'onda d'urto. Dalla legge dell'aumento di entropia, segue che l'entropia di un gas può solo aumentare se il gas viene messo in moto, ovvero deve verificarsi $S_2 > S_1$. Questo significa, in particolare, che il passaggio di un'onda d'urto è un processo irreversibile.

Le sole relazioni di Rankine-Hugoniot ci permettono di caratterizzare le onde d'urto, nel senso che ci permettono di determinare come viene modificato lo stato termodinamico del gas a seguito del passaggio dello shock. Infatti, le condizioni (2.83) e (2.84) ci forniscono la seguente relazione tra la differenza di pressione e di densità che si verifica con l'onda d'urto:

$$j^2 = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2 - \rho_1} \rho_1 \rho_2 = (P_2 - P_1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1} = \text{costante}. \quad (2.86)$$

Questa equazione suggerisce che, siccome $j^2 > 0$, allora sono possibili solo due situazioni o $P_2 > P_1$ e $\rho_2 > \rho_1$ o $P_2 < P_1$ e $\rho_2 < \rho_1$. In realtà, però, solamente il primo caso può avvenire perchè nel secondo caso si avrebbe una diminuzione di entropia (vedi [48]). L'equazione (2.86) descrive nel piano $P_2 - (1/\rho_2)$ (vedi figura 2.4) una retta detta *linea di Rayleigh-Michelson* con pendenza pari a $-j^2 = -v_1^2 \rho_1^2$, che rappresenta quindi tutti i possibili stati finali del gas dopo il passaggio dell'onda d'urto.

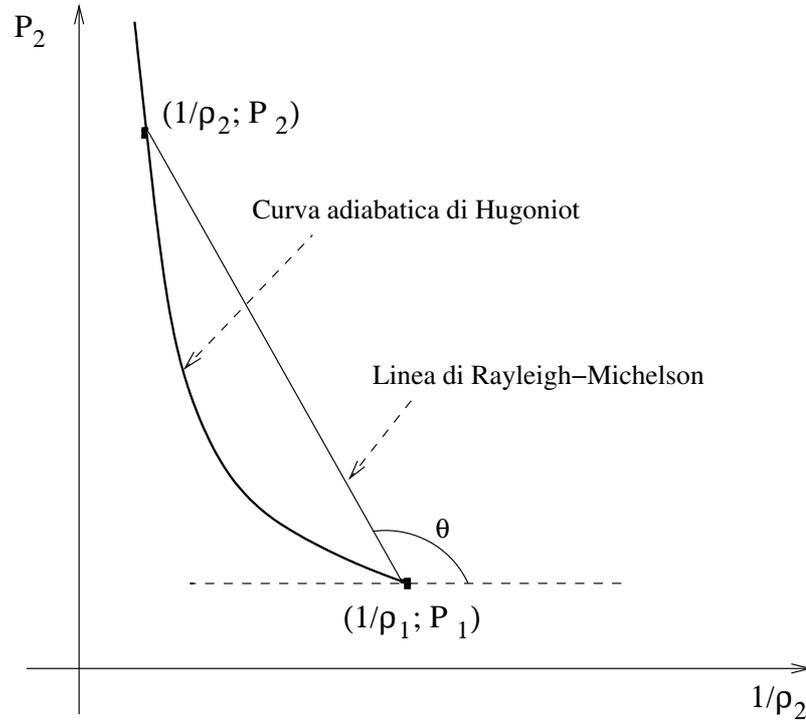


Figura 2.4: *Curva adiabatca di Hugoniot*. Per definizione le onde d'urto che corrispondono ai punti vicino a $(1/\rho_1, P_1)$ si dicono deboli mentre quelle rappresentate dai punti lontani da $(1/\rho_1, P_1)$ si dicono forti. L'inclinazione θ della linea di Rayleigh-Michelson è tale che $\tan \theta = -j^2$.

Inoltre, sostituendo l'equazione (2.86) nella condizione (2.85) si ottiene:

$$H_2 - H_1 + \frac{1}{2}(P_1 - P_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = 0, \quad (2.87)$$

dalla quale, ricordando l'equazione (2.7) per la definizione di entalpia si ha:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2}(P_1 - P_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = 0, \quad (2.88)$$

dove si è posto $H_{01} = H_{02}$ supponendo che il peso molecolare del gas non cambi a seguito del passaggio dell'onda d'urto. Con l'equazione (2.88), assegnati i valori dello stato termodinamico iniziale del gas ρ_1 e P_1 , si ricava la relazione $P_2 = P_2(1/\rho_2)$, detta *curva adiabatca dell'onda d'urto* o *curva adiabatca di Hugoniot* (rappresentata in figura 2.4). Di conseguenza anche ogni punto della curva adiabatca di Hugoniot è un possibile stato termodinamico finale del gas. Quindi, a seguito di uno shock, un gas passa dallo stato

termodinamico $(1/\rho_1, P_1)$ allo stato termodinamico $(1/\rho_2, P_2)$ individuato dall'intersezione della curva adiabatica di Hugoniot con la linea di Rayleigh-Michelson. Ne segue che per un ben determinato stato termodinamico del gas 1, lo stato termodinamico del gas 2 è definito da un unico parametro. Per esempio, se è nota la pressione P_2 dello stato finale, dalla curva adiabatica di Hugoniot si può ricavare ρ_2 , dalle condizioni di Rankine-Hugoniot si ricavano anche j , v_1 e v_2 e dall'equazione di stato si trova T_2 . Bisogna, infine, sottolineare che l'evoluzione dello stato termodinamico del gas durante in passaggio dell'onda d'urto non segue nè la linea, nè la curva di Hugoniot, ma una curva molto più complessa (vedi per esempio [80]).

Consideriamo, ora, onde d'urto deboli, cioè quelle di intensità minima. In questo caso anche le discontinuità nelle varie grandezze termodinamiche sono molto piccole. In particolare, in prima approssimazione l'entropia può essere considerata costante (vedi [48]). Ne segue che, in questa stessa approssimazione, l'equazione (2.86) si può riscrivere come

$$j^2 = - \left(\frac{\partial P}{\partial(1/\rho)} \right)_S = \rho^2 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S, \quad (2.89)$$

dove la derivata è, quindi, da intendersi ad entropia costante. Anche le velocità v_1 e v_2 , in questo caso, si possono considerare uguali, cioè:

$$v_1 \simeq v_2 = v = \frac{j}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S} = c_s. \quad (2.90)$$

Questo risultato è particolarmente interessante perchè significa che la velocità minima con cui si può propagare un'onda d'urto è proprio la velocità del suono.

Infine, tornando a considerare le onde d'urto di qualsiasi intensità, dal grafico della curva adiabatica di Hugoniot si può notare che, siccome la linea di Rayleigh-Michelson ha un'inclinazione sempre maggiore (in modulo) di quella della tangente all'adiabatica nel punto $(1/\rho_1, P_1)$ e l'inclinazione della tangente è esattamente la derivata $\partial P/\partial(1/\rho)|_{\rho=\rho_1}$, allora si ha $j^2 > \rho^2(\partial P/\partial \rho|_{\rho=\rho_1})$. Da questa disegualianza si ottiene:

$$v_1^2 = \frac{j^2}{\rho^2} > \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \Big|_{\rho=\rho_1} = c_{s1}^2, \quad (2.91)$$

dove c_{s1}^2 è la velocità del suono corrispondente al punto $(1/\rho_1, P_1)$, ovvero la velocità di propagazione dell'onda d'urto rispetto al gas dei reagenti è

sempre supersonica ($v_1 > c_{s1}$). Al contrario, per il gas dei prodotti la velocità dello shock è sempre subsonica ($v_2 < c_{s2}$), in quanto l'inclinazione della linea di Rayleigh-Michelson è sempre minore (in modulo) dell'inclinazione della tangente all'adiabatica nel punto $(1/\rho_2, P_2)$. Infine, ricordando che $v_1\rho_1 = v_2\rho_2 = j$ e $\rho_2 > \rho_1$, si ha anche $v_1 > v_2$.

Riassumendo, abbiamo fin'ora dimostrato che, per un'onda d'urto di qualsiasi intensità valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} S_2 > S_1, & \quad P_2 > P_1, & \quad \rho_2 > \rho_1, \\ v_1 > c_{s1}, & \quad v_2 < c_{s2} \quad \text{e} \quad v_1 > v_2 \end{aligned}$$

quindi, quando un gas viene investito da un'onda d'urto, viene compresso, con conseguente aumento sia della pressione che della densità. Per quanto riguarda la temperatura, si può dimostrare (tramite l'equazione (2.95)) che, per un gas perfetto, anch'essa aumenta a seguito del passaggio dello shock, cioè si ha $T_2 > T_1$. Inoltre, dato che l'onda d'urto si muove ad una velocità supersonica nel gas che la precede, allora la presenza dello shock non ha alcun effetto sullo stato termodinamico del gas di fronte ad essa, che, dunque, rimane invariato finchè non viene direttamente investito dall'onda (vedi sezione 2.5).

Infine, concludiamo questa sezione mostrando come varia lo stato termodinamico di un gas perfetto politropico quando in esso si propaga un'onda d'urto. Secondo quanto mostrato in precedenza, lo stato termodinamico del gas dopo il passaggio dall'onda d'urto è completamente determinato se si conosce lo stato termodinamico iniziale e un altro parametro. Prendendo come parametro il numero di Mach (definito in sezione 2.5) del gas 1 (M_1), le condizioni di Rankine-Hugoniot (2.83), (2.84) e (2.85), implicano che:

$$M_2^2 = \frac{v_2^2}{c_{s2}^2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}, \quad (2.92)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}, \quad (2.93)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}, \quad (2.94)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2 + (\gamma - 1)M_1^2][2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}, \quad (2.95)$$

$$c_{s2}^2 = \frac{c_{s1}^2}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} [2 + (\gamma - 1)M_1^2][2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma]. \quad (2.96)$$

Queste relazioni, però, sono valide solo se con il passaggio dell'onda d'urto non viene modificato nè il valore dell'indice γ (cioè i gradi di libertà del gas restano invariati), nè quello del peso molecolare medio (cioè la composizione chimica del gas non viene alterata). Le proprietà delle onde d'urto riportate in questa sezione ci saranno utili per descrivere il fronte di un'onda di detonazione (sezione 3.4). Nel modello che adotteremo lo shock si potrà considerare inerte dal punto di vista chimico e quindi l'uso delle equazioni (2.92)÷(2.96) sarà corretto.

Capitolo 3

Teoria delle combustioni

In questo capitolo proseguiamo nell'esposizione degli strumenti fisici che ci serviranno nel seguito per trattare il nostro modello analitico di esplosione di una Supernova. In particolare ci concentriamo sulla trattazione dei possibili meccanismi di combustione, deflagrazione e detonazione, evidenziandone le analogie e le differenze. Il formalismo della combustione è stato inizialmente sviluppato [85] per studiare reazioni chimiche, ma è applicabile anche alle reazioni nucleari, di cui qui ricordiamo i loro fondamenti. Dato che questi meccanismi combustivi influenzano lo stato idrodinamico del fluido in cui avvengono, sarà necessario studiarne la stabilità. Qui descriviamo quindi il metodo dello sviluppo lineare in modi normali che applicheremo nel prossimo capitolo.

3.1 Dinamica delle combustioni

In questa sezione descriveremo cosa succede quando in un gas vengono innescate delle reazioni. In particolare, nelle Supernovae, le reazioni che si verificano sono fusioni nucleari, altamente esotermiche. Come tutte le combustioni, anche quelle nucleari non sono solo un fenomeno chimico, ma anche un fenomeno dinamico, la cui natura viene determinata risolvendo contemporaneamente le equazioni che descrivono sia la cinetica delle reazioni che la dinamica del gas.

In generale la velocità di una reazione nucleare (detta *reaction rate*) aumenta (esponenzialmente) con la temperatura (vedi sezione 3.2). Quindi, quando la temperatura è sufficientemente alta, le reazioni procedono molto rapidamente. Nelle stelle, le combustioni nucleari avvengono in un regime idrodinamicamente stabile perchè i processi di diffusione del calore (come

la convezione o l'irraggiamento) sono molto efficienti, nel senso che il tempo scala nucleare è più grande di quello del trasporto del calore. Inoltre, il gas stellare può essere considerato un gas perfetto, quindi, ogni aumento della temperatura provoca un'espansione della struttura, con conseguente raffreddamento. In questo modo la temperatura centrale della stella rimane pressochè costante (o meglio aumenta molto lentamente nel tempo), impedendo l'originarsi di un'esplosione. La situazione è ben diversa in una nana bianca che accresce massa da una compagna. Infatti in questo caso la materia è degenera e, ad ogni aumento di temperatura, non corrisponde un aumento di pressione, così l'aumento della temperatura indotto dall'accrescimento non viene ostacolato più dall'espansione della struttura stellare. Come vedremo nella sezione 4.1, in una nana bianca che accresce massa si può raggiungere una situazione in cui i tempi di diffusione del calore diventano molto più grandi dei tempi di reazione nucleare e quindi ha inizio il processo esplosivo.

Se supponiamo che le reazioni nucleari avvengano istantaneamente¹, allora possiamo pensare al processo di combustione come una discontinuità, analoga, per esempio, ad un'onda d'urto, in quanto nel primo caso il gas incorre in un'immediata transizione di composizione, mentre nel secondo caso si ha un passaggio istantaneo da un gas incompressibile ad uno compresso. In effetti, la trattazione dei processi di combustione è molto simile a quella delle onde d'urto. Pertanto nell'analisi qui proposta possiamo sfruttare i risultati noti in letteratura (e.g., vedi [48], [80] e [22]). Non bisogna, però, dimenticare che esistono anche importanti differenze, infatti, a differenza del caso degli shock, nei processi di combustione:

- la composizione del gas cambia e questo significa che è diversa anche l'energia interna dei due gas (o analogamente l'entalpia);
- viene liberata dell'energia a seguito delle reazioni, la quale viene trasformata in parte in energia cinetica e in parte in energia interna del gas.

Una discontinuità dovuta ad una combustione deve essere comunque dominata dalle leggi di conservazione della massa, dell'energia e dell'impulso, ovvero devono essere soddisfatte le condizioni di Rankine-Hugoniot (2.83)÷(2.85). In particolare, resta ancora valida l'equazione (2.86) per la densità del flusso di massa, dove ora il suffisso 1 si riferisce al gas dei reagenti e il suffisso 2 al gas dei prodotti. Nel caso delle combustioni, la grandezza $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

¹Questa ipotesi è ragionevole se lo spessore della zona di combustione è molto più piccolo delle dimensioni tipiche del problema.

rappresenta semplicemente la quantità di massa di gas che reagisce per unità di tempo e di superficie. L'equazione (2.86) implica anche che sono possibili due differenti processi di combustione: uno in cui sia la pressione che la densità aumentano (detto *detonazione*) e uno in cui sia la pressione che la densità diminuiscono (detto *deflagrazione*)². Da queste definizioni segue subito un'altra significativa differenza tra detonazioni e deflagrazioni che deriva dall'equazione (2.84) della conservazione dell'impulso:

$$\frac{P_2 - P_1}{v_2 - v_1} = -j = -\rho_1 v_1. \quad (3.1)$$

Infatti, se poniamo $v_1 > 0$, allora per una detonazione (in cui la pressione aumenta) $v_1 > v_2$, mentre per una deflagrazione (in cui la pressione diminuisce) $v_1 < v_2$. In altre parole, un fronte di detonazione vede il gas dei prodotti avvicinarsi, mentre un fronte di deflagrazione lo vede allontanarsi.

Un'altra conseguenza delle sole condizioni di Rankine-Hugoniot è l'equazione (2.87) che ora diventa

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} (P_1 - P_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = q, \quad (3.2)$$

dove $q \equiv H_{01} - H_{02}$ è il calore (per unità di massa) rilasciato dalle reazioni. La curva (vedi figura 3.1) che rappresenta P_2 in funzione di $1/\rho_2$ data da questa equazione è chiamata *curva adiabatica della combustione* e, a differenza di quella dell'onda d'urto, non passa per il punto $(1/\rho_1, P_1)$. Questo si deve al fatto che, nel caso di una combustione a differenza del caso degli shock, c'è una produzione di energia. Oppure, equivalentemente, si può notare che le costanti H_{01} e H_{02} (che, come abbiamo visto nella sezione 2.1 dipendono dal peso molecolare medio) non sono più uguali, perchè la specie chimica del gas cambia.

Un'altra caratteristica della curva adiabatica di combustione è che essa giace sempre al di sopra della curva adiabatica dello shock, perchè durante la combustione si raggiunge una temperatura più elevata rispetto a quella data da un'onda d'urto e quindi anche la pressione è maggiore, a parità di volume specifico. Inoltre, parte della curva (tra i punti A e B) è stata omessa perchè non ha alcun significato fisico; in questo tratto di curva, caratterizzato da

²Ricordiamo che nel caso delle onde d'urto la pressione e la densità potevano solo aumentare perchè in caso contrario l'entropia diminuirebbe.

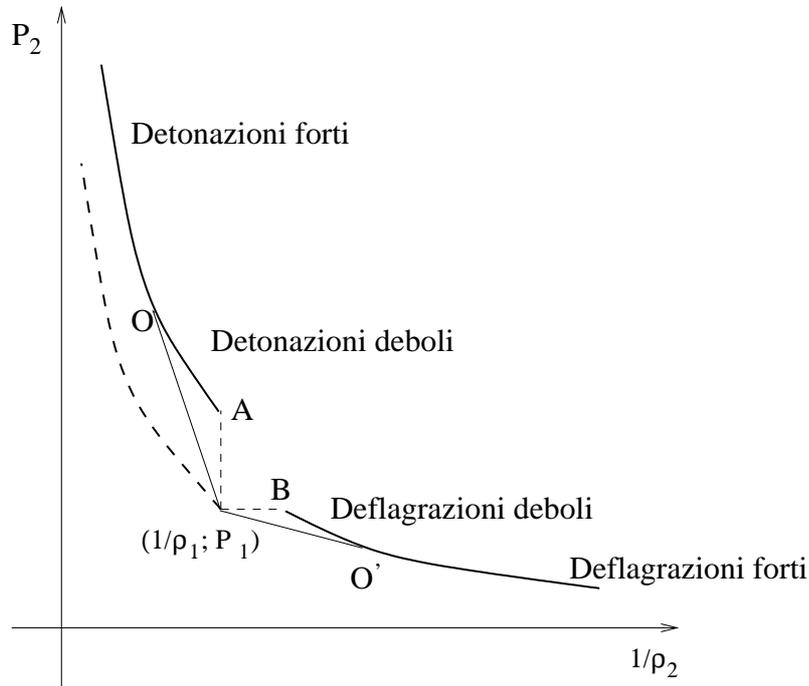


Figura 3.1: *Rappresentazione della curva adiabatca di combustione (linea continua) e della curva adiabatca dello shock (linea a tratti), per le stesse condizioni iniziali $(1/\rho_1, P_1)$. I punti O e O' corrispondono rispettivamente alla detonazione e alla deflagrazione di Chapman-Jouguet.*

$P_2 > P_1$ e $\rho_2 < \rho_1$, si ha che j assume valori immaginari, vedi equazione (2.86). Quindi la curva adiabatca di combustione consiste di due rami separati, in accordo con il fatto che le condizioni di Rankine-Hugoniot prevedono l'esistenza di due processi distinti. Dunque, i punti che giacciono sul ramo superiore della curva adiabatca di combustione corrispondono agli stati finali delle detonazioni e quelli che giacciono sul ramo inferiore sono gli stati finali delle deflagrazioni.

L'equazione (2.86) è valida anche nel caso delle combustioni, allora graficamente il valore di j^2 è ancora legato alla pendenza della linea di Rayleigh-Michelson che congiunge i punti $(1/\rho_1, P_1)$ e $(1/\rho_2, P_2)$. Quindi, lo stato finale di un gas sottoposto a combustione è ancora individuato dall'intersezione della linea di Rayleigh-Michelson (equazione (2.86)) con la curva di combustione (equazione (3.2)). Per esempio, consideriamo le seguenti combustioni:

- combustione in cui la densità rimane costante. Dal grafico si vede che questo processo (corrispondente al punto A) implica un aumento di

pressione; si tratta dunque di una *detonazione a densità costante*. Dalla relazione (2.86) si ha che, in questo caso, la velocità v_1 del fronte rispetto al gas dei reagenti è infinita. Questo significa che una detonazione a densità costante deve essere vista come un caso limite di detonazione.

- combustione in cui la pressione rimane costante. Dal grafico si vede che questo processo (corrispondente al punto B) implica una diminuzione della densità; si tratta dunque di una *deflagrazione a pressione costante*. Dalla relazione (2.86) si ha che, in questo caso, la velocità v_1 del fronte rispetto al gas dei reagenti è nulla e quindi che una deflagrazione a pressione costante deve essere vista come un caso limite di deflagrazione.

Consideriamo ora il ramo delle detonazioni sulla curva adiabatca delle combustioni per un gas nello stato iniziale $(1/\rho_1, P_1)$. Affinchè la linea di Rayleigh-Michelson intersechi il ramo delle detonazioni, la pendenza di tale retta (in modulo) deve essere *maggiore* della pendenza della retta tangente alla curva. Ne segue che il punto O , determinato dall'intersezione della curva adiabatca con la retta tangente, divide il ramo delle detonazioni in due parti: le detonazioni corrispondenti ai punti che giacciono nella parte superiore di questo ramo si dicono detonazioni forti, mentre quelle corrispondenti ai punti che giacciono nella parte inferiore di questo ramo si dicono detonazioni deboli. Infine, le detonazioni corrispondenti al punto O vengono dette *detonazioni di Chapman-Jouguet*.

Analogamente, se si considera il ramo delle deflagrazioni sulla curva adiabatca delle combustioni, affinché linea di Rayleigh-Michelson intersechi il ramo delle deflagrazioni, la pendenza di tale retta (in modulo) deve essere *minore* della pendenza della retta tangente alla curva. Ne segue che il punto O' , analogo al punto O , divide il ramo delle deflagrazioni in due parti: nella parte superiore di questo ramo si hanno le deflagrazioni deboli, mentre nella parte inferiore, le deflagrazioni forti. Infine, le deflagrazioni corrispondenti al punto O' vengono dette *deflagrazioni di Chapman-Jouguet*.

Come nel caso delle onde d'urto (vedi sezione 2.7), dal grafico della curva adiabatca di combustione è possibile ricavare la relazione tra la velocità di propagazione del fronte e la velocità del suono. Con riferimento alla figura 3.2, per ricavare la relazione esistente tra la velocità v_1 di propagazione del fronte rispetto al gas dei reagenti e la velocità del suono c_{s1} , basta confrontare la pendenza della linea di Rayleigh-Michelson per ogni stato finale del gas

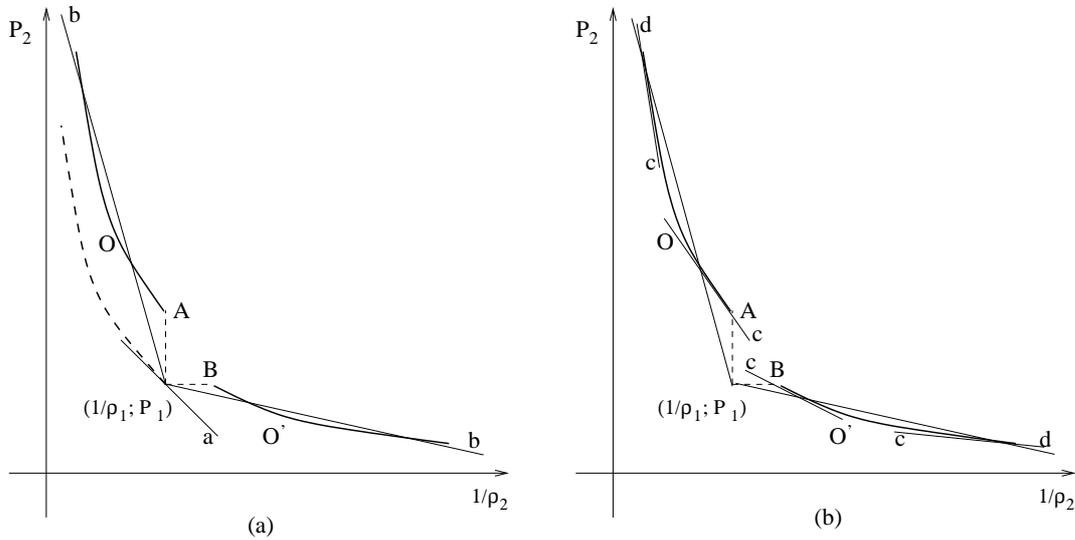


Figura 3.2: *Rappresentazione della curva adiabatica di combustione per la condizione iniziale $(1/\rho_1, P_1)$. I punti O e O' corrispondono rispettivamente alla detonazione e alla deflagrazione di Chapman-Jouguet. Il grafico (a) mostra come ricavare le relazioni tra v_1 e c_{s1} , mentre il grafico (b) quelle tra v_2 e c_{s2} .*

$(1/\rho_2, P_2)$ [rette b] con la pendenza della retta tangente alla curva adiabatrica dello shock [retta a], per la quale vale $v_1 = c_{s1}$. Analogamente, per ricavare la relazione esistente tra la velocità v_2 di propagazione del fronte rispetto al gas dei prodotti e la velocità del suono c_{s2} , basta confrontare la pendenza linea di Rayleigh-Michelson [rette b] con la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(1/\rho_2, P_2)$ [rette c], per le quali vale $v_2 = c_{s2}$. Ne segue che:

per i punti sopra a O (detonazioni forti)	$v_1 > c_{s1}$,	$v_2 < c_{s2}$;
per i punti tra O e A (detonazioni deboli)	$v_1 > c_{s1}$,	$v_2 > c_{s2}$;
per i punti tra B e O (deflagrazioni deboli)	$v_1 < c_{s1}$,	$v_2 < c_{s2}$;
per i punti sotto O (deflagrazioni forti)	$v_1 < c_{s1}$,	$v_2 > c_{s2}$.

Questi risultati, però, elencano semplicemente i vari tipi di combustione matematicamente compatibili con le leggi di conservazione di Rankine-Hugoniot, il che non significa che essi siano effettivamente possibili in Natura. Infatti, nella realtà le deflagrazioni forti non si possono verificare perchè sono altamente instabili [48] e le detonazioni deboli avvengono molto raramente [22].

Dalla definizione dei punti O e O' si ha che per le combustioni di Chapman-Jouguet vale:

$$\frac{\partial P_2}{\partial(1/\rho_2)}\Big|_{CJ} = -\rho_2^2 \frac{\partial P_2}{\partial \rho_2}\Big|_{CJ} = (P_2 - P_1) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Differenziando anche l'equazione (3.2) della curva adiabatca di combustione e ricordando che $dH = TdS + (1/\rho)dP$ (vedi [49]) si ottiene:

$$T_2 dS_2 + \frac{1}{\rho_2} dP_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) dP_2 - \frac{P_2 - P_1}{\rho_2^2} d\rho_2 \right]. \quad (3.4)$$

Sostituendo l'equazione (3.3) nella (3.4) si trova che

$$dS_2|_{CJ} = 0, \quad (3.5)$$

cioè nei processi di combustione di Chapman-Jouguet, se lo stato termodinamico del gas dei reagenti è fissato, l'entropia del gas dei prodotti non cambia. Inoltre, per queste combustioni si ha anche:

$$v_2^2 = \frac{j^2}{\rho_2^2} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_2^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1} = \frac{\partial P_2}{\partial \rho_2}\Big|_{S_2} = c_{s2}^2, \quad (3.6)$$

da cui $v_2 = c_{s2}$, ovvero, in questi casi la velocità del fronte di combustione rispetto al gas dei prodotti è pari proprio alla velocità del suono.

Un'altra importante caratteristica dei processi di combustione di Chapman-Jouguet deriva dalla relazione:

$$v_1^2 = \frac{j^2}{\rho_1^2} = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1}. \quad (3.7)$$

Differenziando questa equazione lungo la curva adiabatca di combustione, mantenendo P_1 e ρ_1 fissati e ricordando che, in questo caso, vale l'equazione (3.3), si ottiene:

$$dv_1^2|_{CJ} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1} \frac{1}{\rho_1^2} \left[\frac{\partial P_2}{\partial \rho_2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho_2^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^{-1} \right] \Big|_{CJ} d\rho_2 = 0. \quad (3.8)$$

ovvero, per i processi di combustione di Chapman-Jouguet, la velocità del fronte di combustione rispetto al gas dei reagenti rimane costante.

Riassumendo, i processi di Chapman-Jouguet sono gli unici processi di combustione tali per cui l'entropia S_2 e la velocità v_1 sono stazionarie. Infine, dal grafico 3.1, si deduce immediatamente che per le detonazioni la velocità minima del fronte è proprio quella che corrisponde ad una detonazione di Chapman-Jouguet, viceversa, le deflagrazioni di Chapman-Jouguet sono quelle che si propagano più velocemente. Le velocità di Chapman-Jouguet sono facilmente ricavate imponendo che la linea di Rayleigh-Michelson (equazione (2.86)) e la curva di combustione (equazione (3.2)) si intersechino in un solo punto. Si ha quindi:

$$v_{CJ}^2 = c_{s1}^2 + (\gamma^2 - 1) q \pm \sqrt{(\gamma^2 - 1) q [(\gamma^2 - 1) q + 2 c_{s1}^2]}, \quad (3.9)$$

dove, naturalmente, la soluzione con il segno “più” corrisponde alla velocità di Chapman-Jouguet per la detonazione, mentre quella con il segno “meno” corrisponde alla velocità di Chapman-Jouguet per la deflagrazione.

Fino ad ora abbiamo sviluppato la teoria della dinamica delle combustioni supponendo che il fronte d'onda avesse uno spessore piccolo rispetto alle dimensioni caratteristiche del problema e così abbiamo trascurato i fenomeni fisici che avvengono all'interno di questo sottile strato. Anche se, in molte applicazioni, questa assunzione è giustificata, nelle sezioni 3.3 e 3.4 ci occuperemo della descrizione più dettagliata di ciò che avviene all'interno della zona di transizione (detta *onda di deflagrazione* o *onda di detonazione* a seconda di quale regime viene sostenuto dalle combustioni) che separa la regione di gas contenente i prodotti della combustione (dove si può considerare che non avvengano più reazioni) dalla regione di gas incombusto.

3.2 Cinetica delle reazioni

Lo scopo di questa sezione è descrivere la cinetica delle reazioni nucleari che danno origine alle Supernovae di tipo Ia. Come abbiamo più volte ripetuto le Supernovae Ia sono il frutto dell'esplosione di nane bianche di carbonio ed ossigeno. È chiaro, dunque, che le reazioni nucleari si innescano quando la temperatura è sufficientemente alta da permettere la fusione del carbonio o dell'ossigeno.

Per le condizioni ambientali presenti al centro della nana bianca (materia elettronicamente degenera e densità pari a $\sim 3 \cdot 10^9$ g/cm³), la temperatura di fusione del carbonio e dell'ossigeno sono rispettivamente di $6.6 \cdot 10^8$ K e di

$4 \cdot 10^9$ K [4]. Quindi, le prime reazioni che avvengono sono quelle di fusione del carbonio, ovvero:



Inoltre, come abbiamo già accennato nella sezione 1.5.1, si possono distinguere tre fasi per le reazioni termonucleari che avvengono durante l'esplosione: (1) la combustione del ^{12}C , con conseguente produzione di ^{24}Mg ; (2) la fusione dell' ^{16}O che produce soprattutto ^{28}Si ed elementi di massa intermedia e, infine, (3) la combustione del silicio dalla quale si ottengono gli elementi del gruppo del ferro. L'intera catena di reazioni nucleari che avviene durante l'esplosione è costituita da migliaia di reazioni, alle quali concorrono centinaia di specie nucleari, ma la maggior parte dell'energia ($\simeq 50 \div 70\%$) viene rilasciata proprio durante la fase della combustione del carbonio [44]. Per questo motivo, in questa tesi, che ha lo scopo di fornire l'ordine di grandezza dei tempi scala legati ai più importanti fenomeni fisici che avvengono durante l'esplosione di una nana bianca, considereremo solo la reazione nucleare descritta dalla (3.10) e supporremo che la nana bianca sia inizialmente composta solo da carbonio.

I parametri che determinano l'accoppiamento della cinetica delle reazioni con la dinamica dei gas sono l'incremento dell'energia e la variazione dell'abbondanza di nuclei del carbonio presenti nel gas. Per valutare questi parametri consideriamo due specie nucleari, 0 e 1, con rispettive densità numeriche n_0 e n_1 (in cm^{-3}). La probabilità per unità di volume e di tempo che due nuclei interagiscano è pari a:

$$P_{01} = \frac{n_0 n_1}{1 + \delta_{01}} \langle \sigma v \rangle_{01} \quad \text{cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.11)$$

dove δ_{01} è il simbolo di Kronecker e $\langle \sigma v \rangle_{01}$ è il prodotto della sezione d'urto per la velocità mediato tramite la distribuzione di Maxwell-Boltzmann per le velocità. L'andamento di $\langle \sigma v \rangle_{01}$ (che va valutato tenendo presente il potenziale Coulombiano dei nuclei di carbonio) è funzione della temperatura e si può dimostrare (vedi per esempio [4]) che segue una legge del tipo:

$$\langle \sigma v \rangle_{01} (T) = AT^b \exp(-E_A \cdot T^d), \quad (3.12)$$

dove E_A viene detta *energia di attivazione* della reazione.

Applicando l'equazione (3.11) alla reazione (3.10) si ottiene:

$$\frac{dn_C}{dt} \equiv \frac{\partial n_C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla n_C = -n_C^2 \langle \sigma v \rangle_C, \quad (3.13)$$

dove il segno “-” sta ad indicare che il carbonio viene consumato. In generale, però, si preferiscono quantità adimensionali, così, al posto della densità numerica del carbonio n_C , si usa la sua cosiddetta *abbondanza frazionaria in massa* (Y_C), ovvero il rapporto tra la densità dei nuclei di carbonio e la densità totale ($Y_C = \rho_C/\rho$). Dato che $n_C = N_A \rho Y_C / \mu_C$, dove $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ è il numero di Avogadro e $\mu_C = 12$ è il peso molecolare del carbonio. Con questa definizione, l’equazione (3.13) diventa:

$$\frac{dY_C}{dt} = -Y_C^2 \frac{\rho}{\mu_C} N_A \langle \sigma v \rangle_C, \quad (3.14)$$

e la quantità $N_A \langle \sigma v \rangle_C$ viene detta *rate della reazione* (in $\text{cm}^3 \text{mol}^{-1} \text{s}^{-1}$). In realtà, la forma più completa per l’equazione che descrive la variazione nel tempo di Y_C deve tener conto anche della diffusione della materia. In generale, quindi, si ha:

$$\frac{dY_C}{dt} + \nabla \cdot (Y_C \mathbf{D}_C) = -Y_C^2 \frac{\rho}{\mu_C} N_A \langle \sigma v \rangle_C, \quad (3.15)$$

dove \mathbf{D}_C è la velocità di diffusione dei nuclei di carbonio, ma, come vedremo nella sezione 4.2, tale diffusività è del tutto trascurabile.

Per stimare il valore di $N_A \langle \sigma v \rangle_C$ abbiamo eseguito un fit attraverso la legge (3.12) dei dati di Caughlan e Fowler [16], i quali hanno fornito il rate della reazione per un intervallo di temperature che va da $1.1 \cdot 10^8$ K a 10^{10} K. Dalla nostra analisi segue che, per le basse temperature ($T < 10^9$ K), vedi figura 3.3, l’andamento del rate della reazione è ben descritto dalla seguente espressione, con $T_9 \equiv T/10^9$:

$$N_A \langle \sigma v \rangle_C = 4.27 \cdot 10^{26} \cdot T_9^{-2.5} \exp(-85.3 \cdot T_9^{-1/3}), \quad (3.16)$$

da cui $E_A = 85.3 \cdot 10^9 \text{ K} = 7.35 \text{ MeV}$. Invece, per le alte temperature ($T > 0.5 \cdot 10^9$ K), vedi figura 3.4, il miglior fit è dato da:

$$N_A \langle \sigma v \rangle_C = 4.27 \cdot 10^{26} \cdot T_9^{-5.5} \exp(-87.2 \cdot T_9^{-0.41}). \quad (3.17)$$

Purtroppo, però, Caughlan e Fowler hanno ricavato i loro dati con un plasma di soli nuclei di carbonio, invece, il plasma presente all’interno di una nana bianca è costituito anche da elettroni. Alle elevate temperature e densità tipiche delle regioni centrali delle nane bianche trascurare l’azione degli elettroni che circondano i nuclei di carbonio, può condurre a significativi errori

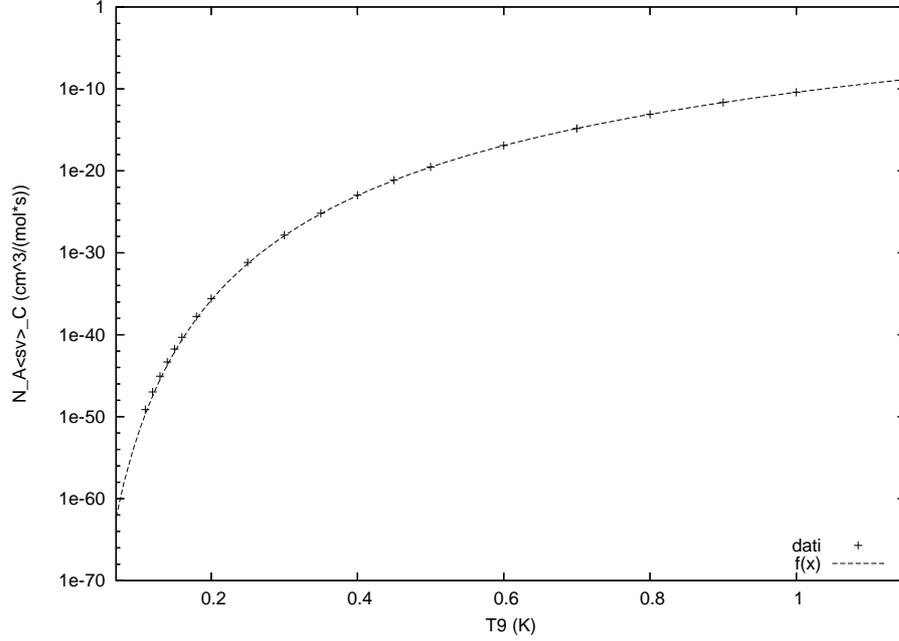


Figura 3.3: Andamento di $N_A \langle \sigma v \rangle_C$ in funzione della temperatura ($T_9 = T/10^9$) per temperature comprese tra $0.11 \cdot 10^9$ K e 10^9 K. Dati tratti da [16].

nella valutazione del rate della reazione. Infatti, l'effetto degli elettroni è quello di favorire l'interazione dei nuclei perchè, grazie alla loro carica negativa, contribuiscono ad abbassare la barriera Coulombiana dei nuclei stessi. Notiamo che ogni nucleo di carbonio è ionizzato sei volte perchè il potenziale di sesta ionizzazione per il carbonio vale $7.8 \cdot 10^{-10}$ erg = $5.65 \cdot 10^6$ K [81], che è sempre inferiore alla temperatura centrale della nana bianca. Per tener conto di questo fenomeno che dipende dalla densità e dalla temperatura del plasma, si deve moltiplicare il rate della reazione per il cosiddetto *fattore di schermatura* S_e , che è un numero adimensionale. Per determinare l'andamento del fattore di schermatura abbiamo adottato l'espressione analitica di Alastuey e Jancovici [1]:

$$S_e = \exp \left[3.76 \cdot 10^6 \Gamma + 100 \Gamma^{1/4} - 0.5 \ln \Gamma - 9.9 - 9.1 \cdot 10^9 \Gamma^3 T^{2/3} \right], \quad (3.18)$$

dove $\Gamma \equiv \rho^{1/3}/T$ (in $\text{g}^{1/3} \text{cm}^{-1} \text{K}^{-1}$). Questa espressione è valida per un gas elettronicamente degenere a densità comprese tra 10^7 e 10^9 g/cm^3 . Di conseguenza l'equazione (3.14)

$$\frac{dY_C}{dt} = -Y_C^2 \frac{\rho}{\mu_C} S_e N_A \langle \sigma v \rangle_C. \quad (3.19)$$

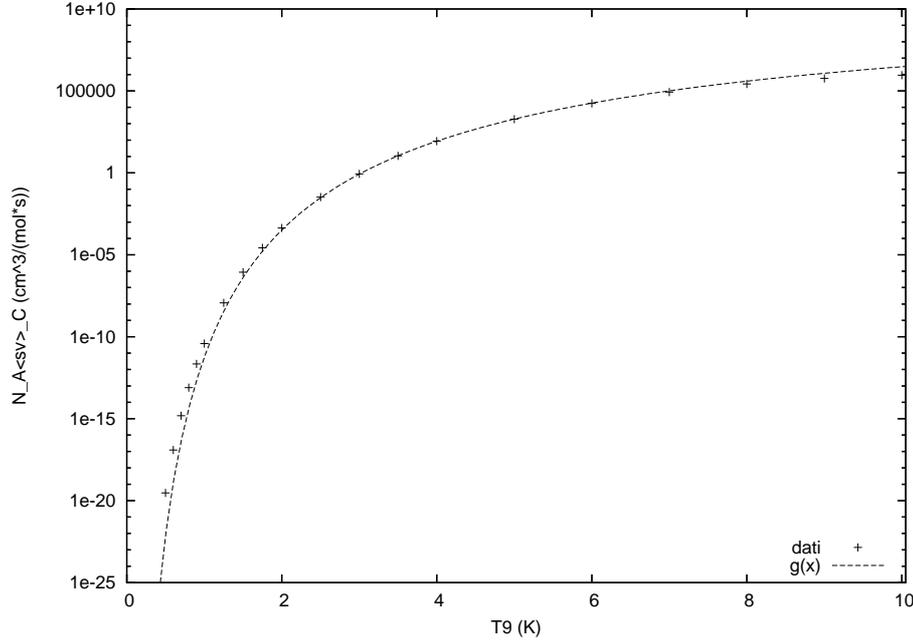


Figura 3.4: *Andamento di $N_A \langle \sigma v \rangle_C$ in funzione della temperatura ($T_9 = T/10^9$) per temperature comprese tra $0.5 \cdot 10^9$ K e 10^{10} K. Dati tratti da [16].*

La reazione nucleare (3.10) è altamente esotermica, infatti per ogni reazione viene prodotta un'energia $Q = 13.9$ MeV = $2.2 \cdot 10^{-5}$ erg [16]; oppure, equivalentemente, l'energia generata per grammo di materia è $q = Q N_A / (2 \cdot \mu_C) = 5.7 \cdot 10^{17}$ erg/g. Ne segue che, l'energia rilasciata per unità di massa e di tempo è:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = -q \frac{dY_C}{dt} = q \frac{Y_C^2}{\mu_C} \rho S_e N_A \langle \sigma v \rangle_C, \quad (3.20)$$

dove, per l'ultima uguaglianza si è fatto uso dell'equazione (3.19). Alla luce di questi risultati è possibile stimare il tempo caratteristico per le reazioni nucleari:

$$\tau_R = \frac{q}{\dot{q}} = \frac{\mu_C}{Y_C^2 \rho S_e N_A \langle \sigma v \rangle_C}. \quad (3.21)$$

Come vedremo nelle seguenti sezioni la stima di questo tempo scala nucleare è fondamentale per analizzare la struttura del fronte di combustione, sia esso una deflagrazione o una detonazione.

3.3 Deflagrazione

In questa e nella prossima sezione analizzeremo più in dettaglio la struttura delle deflagrazioni e delle detonazioni perchè alla base della distinzione tra questi due meccanismi di combustione non vi è solo la teoria matematica descritta in precedenza (sezione 3.1), ma anche il meccanismo fisico del trasporto di calore. Infatti, come già accennato nella sezione 1.5, se il calore viene trasmesso al gas circostante per effetto della conduzione termica, allora si ha una deflagrazione; se, invece, l'aumento della temperatura è dovuto alla propagazione di uno shock (vedi sezione 2.7) si ha una detonazione.

Come abbiamo visto nella sezione 3.1, nel caso di un'onda di deflagrazione, il fronte di combustione si muove con una velocità subsonica. Questo implica che i processi di diffusione del calore e della materia (la cui velocità non può superare quella del suono) non si possono trascurare, anzi, sono proprio questi processi che determinano la velocità di propagazione della deflagrazione stessa. Per valutare il contributo dovuto a questi fenomeni si introduce una quantità adimensionale detta *numero di Lewis* (Le), definita come il rapporto tra la diffusione del calore e la diffusione della materia reagente:

$$Le \equiv \frac{\kappa}{\rho C_P D}, \quad (3.22)$$

dove κ e D sono rispettivamente i coefficienti di diffusione termica e di diffusione della materia. Se il numero di Lewis assume valori superiori a 1 allora nel fluido si insatura prima l'equilibrio termico e solo in seguito avviene il mescolamento della materia dovuto alla diffusione. Viceversa per $Le < 1$ la materia si mescola prima di aver raggiunto l'equilibrio termico.

Le equazioni che descrivono un fluido in presenza di un'onda di deflagrazione sono ancora le equazioni (2.40), (2.48), (2.57), l'equazione di stato (2.3) e l'equazione per la cinetica delle reazioni (3.19); ma se si considera anche lo spessore della deflagrazione, queste equazioni vanno completate con dei termini che tengano conto dei processi diffusivi (per maggiori dettagli si rimanda a [80]). Quindi, trascurando la viscosità (approssimazione che sarà giustificata nella sezione 4.2 per il caso delle Supernovae), il set completo di equazioni diventa:

$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla E - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\kappa \nabla T + \frac{\kappa q}{Le \cdot C_P} \nabla Y_C \right) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \dot{q}, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial Y_C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla Y_C - \frac{\kappa}{Le \cdot \rho C_P} \nabla^2 Y_C = -Y_C^2 \frac{\rho}{\mu_C} S_e N_A < \sigma v >_C, \quad (3.27)$$

dove il vettore \mathbf{g} è l'accelerazione di gravità della nana bianca, che naturalmente è funzione della posizione e ha direzione opposta a quella di propagazione del fronte. Come vedremo nella sezione 4.2.2 questo contribuisce a rendere instabile il fronte di combustione.

Talvolta è possibile semplificare le precedenti equazioni (3.23)÷(3.27) a seconda delle relazioni tra i tempi scala delle reazioni, dei processi di diffusione e della propagazione del fronte. Per illustrare meglio le possibili approssimazioni (seguendo la trattazione di Law e Sung [50]) consideriamo una fiamma unidimensionale, adiabatica, piana e stazionaria che si propaga con velocità S_l nella direzione dell'asse z (da $+\infty$ a $-\infty$), vedi figura 3.5. Indichiamo la regione di gas incombusto e la regione contenente i prodotti della reazione rispettivamente con il pedice u (dall'inglese "unburned") e con il pedice b (dall'inglese "burned"). Consideriamo inoltre il caso in cui avvenga una singola reazione irreversibile che lasci costante l'indice politropico γ e, senza perdita di generalità, supponiamo che $v_u = -S_l$. Un'onda di deflagrazione, nella sua completezza (vedi figura 3.5(a)), può essere vista come una zona di reazione di spessore l_{reaz} preceduta da una zona di diffusione di dimensioni l_{diff} . La zona di diffusione è definita come la regione di gas in cui il rate della reazione è ancora troppo basso, così che è possibile considerare che qui non avvengano reazioni. In questa zona dominano, invece, i processi di diffusione della materia e del calore che permettono appunto di aumentare il rate della reazione, per questa ragione; spesso la zona di diffusione è anche chiamata zona di *induzione*. All'interno della zona di reazione il rate della reazione è invece massimo ed è qui che sono localizzate le reazioni. Da queste definizioni ne segue che lo spessore della zona di reazione è dato dal prodotto del tempo caratteristico per la velocità di propagazione della fiamma, cioè $l_{reaz} = \tau_R \cdot S_l$. Analogamente lo spessore della zona di diffusione dipende dal tempo caratteristico dei processi di diffusione e quindi dal numero di Lewis. Infatti, se $Le = 1$ allora i tempi scala del trasporto del calore e della materia sono simili e si potrà definire un'unico spessore l_{diff} per questa zona, in generale, però, per $Le \neq 1$ è necessario distinguere una zona di diffusione della

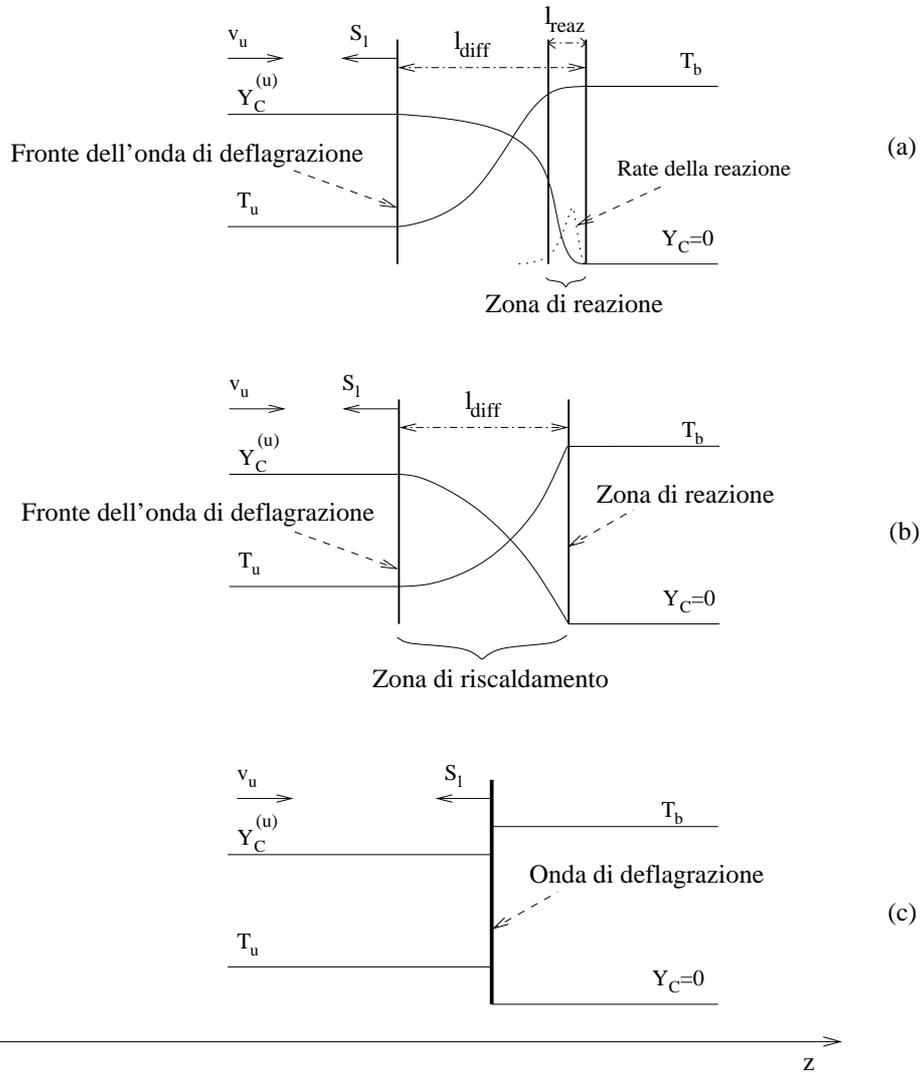


Figura 3.5: In figura è riportata la schematizzazione della struttura di un'onda di deflagrazione unidimensionale, adiabatica, piana e stazionaria per un gas in cui $Le = 1$, nella sua forma più completa (a) e nell'approssimazioni in cui $l_{reaz} \ll l_{diff}$ (b) e $l_{diff} \ll L$ (c).

materia (con spessore l_M) e una zona di diffusione del calore (con spessore l_T), tali che $Le = l_T^2/l_M^2$. In questo caso l_{diff} è pari al massimo tra l_M e l_T . In questa schematizzazione di una deflagrazione si ha che le quantità termodinamiche (per esempio la temperatura T) e la concentrazione della materia (per esempio dei reagenti Y_C) variano in modo continuo (e con derivata continua) a partire dai valori iniziali ($Y_C^{(u)}$ e T_u) fino a quelli finali ($Y_C^{(b)} = 0$ e

T_b).

Quando le reazioni sono caratterizzate da elevate energie di attivazione allora si verifica la condizione $l_{reaz} \ll l_{diff}$. In questo caso è quindi possibile approssimare la zona di reazione con una superficie di discontinuità (vedi figura 3.5(b)), lungo la quale dovranno essere soddisfatte le condizioni di Rankine-Hugoniot per la conservazione del flusso della massa, dell'impulso e dell'energia (considerando anche il rilascio di energia dovuto alla reazione). In questa approssimazione le quantità termodinamiche e la concentrazione della materia variano in modo continuo, ma con derivata discontinua. Infine quando anche lo spessore della zona di diffusione è trascurabile rispetto alle dimensioni caratteristiche del problema L (vedi figura 3.5(c)) è possibile considerare l'onda di deflagrazione come un'unica superficie di discontinuità che separa il gas dei reagenti dal gas dei prodotti. Lo stato termodinamico dei due gas è determinato dalle condizioni di Rankine-Hugoniot (come abbiamo visto nella sezione 3.1) e quindi non è più necessario risolvere esplicitamente l'equazione (3.27) per la cinetica delle reazioni.

Nel caso delle Supernovae l'energia di attivazione della fusione del carbonio ($E_A = 85.3 \cdot 10^9$ K, vedi sezione 3.2) è molto maggiore della temperatura caratteristica del gas quando la produzione di energia nucleare diventa significativa ($6.6 \cdot 10^8$ K [36]). Per questo motivo, per lo studio delle deflagrazioni durante l'esplosione di una nana bianca tratteremo la zona di reazione come una discontinuità. Inoltre, trascureremo anche i termini contenenti il numero di Lewis perchè, come vedremo nella sezione 4.2, per le Supernovae si ha che $Le \gg 1$. Questo significa che il trasporto del calore è molto efficiente rispetto alla diffusione della materia. In particolare, per un'onda di deflagrazione stazionaria si ha che il tempo caratteristico dei processi di combustione (τ_R) è simile a quello caratteristico per la diffusione del calore (τ_D). Da questo si può ricavare lo spessore della deflagrazione l_d infatti il tempo di reazione è dato da $\tau_R = q/\dot{q}$ (vedi sezione 3.2), mentre quello di diffusione è $\tau_D = l_d^2 C_P \rho_u / \kappa$, da cui:

$$l_d \sim \sqrt{\frac{q}{\dot{q}} \cdot \frac{\kappa}{C_P \rho_u}}. \quad (3.28)$$

Dall'equazione (3.28) è anche possibile stimare la velocità laminare S_l della fiamma, infatti:

$$|S_l| = |v_u| = \frac{l_d}{\tau_R} \sim \sqrt{\frac{\dot{q}}{q} \cdot \frac{\kappa}{C_P \rho_u}}. \quad (3.29)$$

Per confrontare la velocità della fiamma con quella del suono esprimiamo la diffusività termica $\kappa/(C_P\rho_u)$ attraverso la velocità del suono c_u (che è la velocità termica dei nuclei) e il tempo libero medio τ_{coll} , cioè $\kappa/C_P\rho_u \approx c_u^2\tau_{coll}$. In questo modo si ottiene $M_u = v_u/c_u \propto \sqrt{\tau_{coll}/\tau_R} < 1$, perchè, a causa dell'elevata energia di attivazione, soltanto una piccola frazione dei nuclei che collidono riescono anche a reagire. Questo significa che, come avevamo ricavato anche nella sezione 3.1, la velocità di propagazione della deflagrazione è sempre subsonica. In particolare, quando $M_u \ll 1$ il problema si può semplificare ulteriormente. Infatti, in questo caso la tipica variazione di pressione indotta dal passaggio della deflagrazione è dell'ordine di $\Delta P \propto \rho_u v_u^2$, così che $\Delta P/P_u \propto \rho_u v_u^2/P_u \propto M_u^2 \ll 1$ e, quindi, possiamo considerare la pressione circa costante. Con questa approssimazione detta anche *approssimazione quasi-isobarica* il gas può essere considerato come incomprimibile e quindi possiamo dire che le densità dei gas dei reagenti e dei prodotti sono uniformi e costanti e valgono rispettivamente ρ_u e ρ_b . Come abbiamo visto nella sezione 3.1, a seguito del passaggio di un'onda di deflagrazione la densità del gas diminuisce, quindi, dato che in questa approssimazione ρ_u e ρ_b sono costanti, è utile definire il *coefficiente di espansione* (Θ) come il rapporto tra la densità prima e dopo la zona di combustione:

$$\Theta \equiv \frac{\rho_u}{\rho_b}. \quad (3.30)$$

Per stimare il valore di questo parametro, notiamo che nell'approssimazione quasi-isobarica l'equazione (3.2) si riduce semplicemente a:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} P_u \left(\frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho_u} \right) = q, \quad (3.31)$$

da cui

$$\Theta = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{q}{P_u} \rho_u = 1 + (\gamma-1) \frac{q}{c_{su}^2}. \quad (3.32)$$

Nel caso delle Supernovae di tipo Ia esiste una fase dell'esplosione per la quale questo parametro vale circa 1 (come vedremo meglio nella sezione 4.2) e quindi, nell'analisi di questa fase sarà possibile utilizzare l'approssimazione quasi-isobarica.

3.4 Detonazione

Nella sezione 3.1 abbiamo esaminato il fenomeno della detonazione vista come una discontinuità priva di spessore. In questa sezione, invece, esamineremo meglio la struttura interna di una tipica onda di detonazione. Naturalmente il processo di combustione di una detonazione è lo stesso di quello di

una deflagrazione, ma è differente il meccanismo con cui vengono innescate le reazioni stesse. La descrizione di un fronte d'onda di detonazione piano e stazionario è stata effettuata indipendentemente da Zeldovich (1940), von Neumann (1942) e Doering (1943). Il loro modello (comunemente indicato con ZND), sebbene formalmente semplice, è tutt'oggi ancora molto usato in applicazioni pratiche (soprattutto ingegneristiche) in quanto è in stretto accordo con i risultati sperimentali di combustioni chimiche terrestri [26].

In questa tesi useremo il modello di ZND per descrivere una detonazione compatibile con l'esplosione di una Supernova e in particolare ne studieremo la stabilità (vedi sezione 4.4). Ricordiamo che questo modello, per quanto affidabile, è solo un'approssimazione del fenomeno, infatti si basa sulle seguenti assunzioni:

- il flusso è unidimensionale;
- tutte le grandezze termodinamiche sono sempre in equilibrio termodinamico locale;
- i processi di trasporto del calore (come la diffusione, la viscosità, la conduzione, la radiazione) sono trascurabili;
- avviene un'unica reazione irreversibile con un tempo di reazione finito.

Secondo questo modello una detonazione è costituita da due discontinuità (vedi figura 3.6), ovvero da una zona di reazione preceduta da un'onda d'urto. La regione 1 di fronte all'onda, contenente il gas dei reagenti, è in quiete e qui non avvengono reazioni. Inoltre, come abbiamo visto in precedenza le detonazioni si muovono supersonicamente, quindi lo stato termodinamico del gas 1 (descritto da P_1 , ρ_1 e T_1) rimane invariato finché esso non viene investito dall'onda d'urto. A causa dell'onda d'urto il gas subisce compressione e riscaldamento e passa allo stato termodinamico descritto da P_2 , ρ_2 e T_2 . Inoltre, se consideriamo un sistema di riferimento solidale con l'onda d'urto, lo stato 2 di transizione è completamente determinato dalle equazioni (2.92)÷(2.96). La compressione ed il riscaldamento del gas favoriscono le reazioni nucleari, sia perché aumenta il rate della reazione, sia perché gli incontri tra gli ioni diventano più probabili. A differenza delle deflagrazioni, nelle detonazioni l'aumento di temperatura si deve ad uno shock e quindi si può considerare istantaneo e da questo segue che la combustione tramite detonazione avviene più velocemente. Infine, il gas nello stato 3 è nuovamente inerte e contiene solo i prodotti della reazione. Nello stato di transizione il

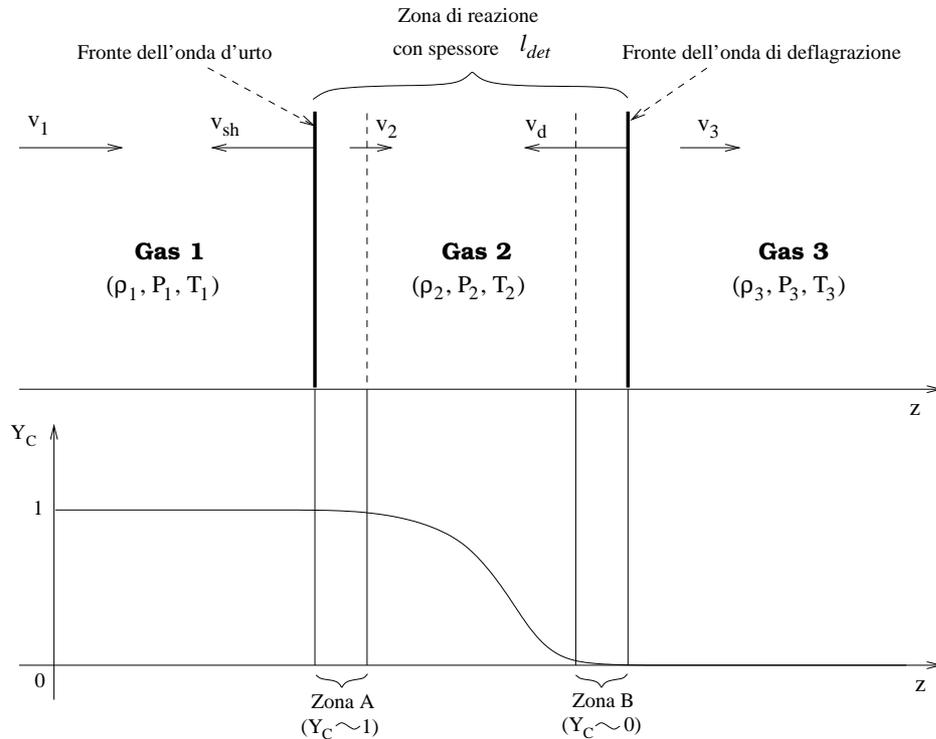


Figura 3.6: *Struttura di un'onda di detonazione unidimensionale, adiabatica, piana e stazionaria secondo il modello di Zeldovich, von Neumann e Doering (ZND). Le velocità v_1 , v_2 e v_3 sono intese rispetto ad un sistema di riferimento solido con la detonazione stessa, mentre $v_{sh} = v_d$ è la velocità della detonazione rispetto ad un sistema di riferimento esterno fissato.*

gas cambia composizione chimica e acquista energia perchè le reazioni sono esotermiche. Nel modello di ZND il meccanismo di reazione viene schematizzato con una variazione continua della composizione chimica all'interno della zona di reazione, ma con un rilascio istantaneo di energia solo al termine della zona di reazione, lungo una discontinuità detta *fiamma*.

Nella zona di transizione (regione 2) il gas è costituito da due specie chimiche diverse e quindi, in linea di principio, le equazioni della fluidodinamica ricavate nel capitolo 2 non sono adeguate per la descrizione di questo stato. In realtà, l'unica equazione che in cui compare esplicitamente la composizione del gas è l'equazione di stato (2.1), attraverso il peso molecolare medio. Quindi, nella regione 2, dato che in prima approssimazione, possiamo considerare uniformi sia la pressione che la densità (per la conservazione della massa durante le reazioni), dobbiamo porre particolare attenzione solo nella

stima della temperatura. Per questo motivo, nel seguito, noi non tratteremo tutta la regione di transizione, ma faremo riferimento soltanto ai piccoli strati al bordo di tale regione (indicati con “Zona A” e “Zona B” in figura 3.6), dove possiamo assumere che la composizione del gas sia omogenea (carbonio per la zona A e magnesio per la zona B).

Notiamo che per la soluzione stazionaria il flusso della massa attraverso l’onda d’urto deve essere uguale a quello che attraversa la fiamma e quindi anche la velocità della fiamma coincide con quella dello shock. Infatti se indichiamo con v_{sh} e v_d le velocità (dirette lungo l’asse z) rispettivamente dell’onda d’urto e della fiamma rispetto ad un sistema di riferimento fisso si ha per il flusso di massa:

$$j = \rho_1(v_1 - v_{sh}) = \rho_2(v_2 - v_{sh}) \quad (3.33)$$

e simultaneamente

$$j = \rho_2(v_2 - v_d) = \rho_3(v_3 - v_d). \quad (3.34)$$

Di conseguenza, affinché sia soddisfatta l’uguaglianza di queste due espressioni deve valere $v_{sh} = v_d \equiv v_d$. Questo significa che, nella situazione stazionaria, il sistema di riferimento solidale con la fiamma è lo stesso di quello solidale con lo shock e che lo spessore della detonazione l_{det} , definito da

$$l_{det} = \tau_R \cdot v_d, \quad (3.35)$$

rimane costante nel tempo.

La variazione dello stato termodinamico del gas investito da una detonazione descritta secondo il modello di ZND è facilmente visualizzabile nel piano $P - (1/\rho)$. Infatti, dato che esiste un’unica velocità di propagazione per l’onda d’urto e per la fiamma, l’equazione (2.86) resta valida sia per il gas 2 che per il gas 3. Ne segue che, con riferimento alla figura 3.7 un gas che si trova inizialmente nello stato $(1/\rho_1, P_1)$, quando viene investito da uno shock passa istantaneamente allo stato $(1/\rho_2, P_2)$ individuato dall’intersezione della curva adiabatca di Hugoniot con la linea di Rayleigh-Michelson ed infine, al termine delle reazioni, si trova nello stato $(1/\rho_3, P_3)$ individuato dall’intersezione della curva adiabatca di combustione con la linea di Rayleigh-Michelson. Dal grafico, inoltre, è immediato notare che non tutte le onde d’urto riescono a dare origine ad una detonazione perchè è necessario che la linea di Rayleigh-Michelson intersechi almeno in un punto anche la curva adiabatca di combustione.

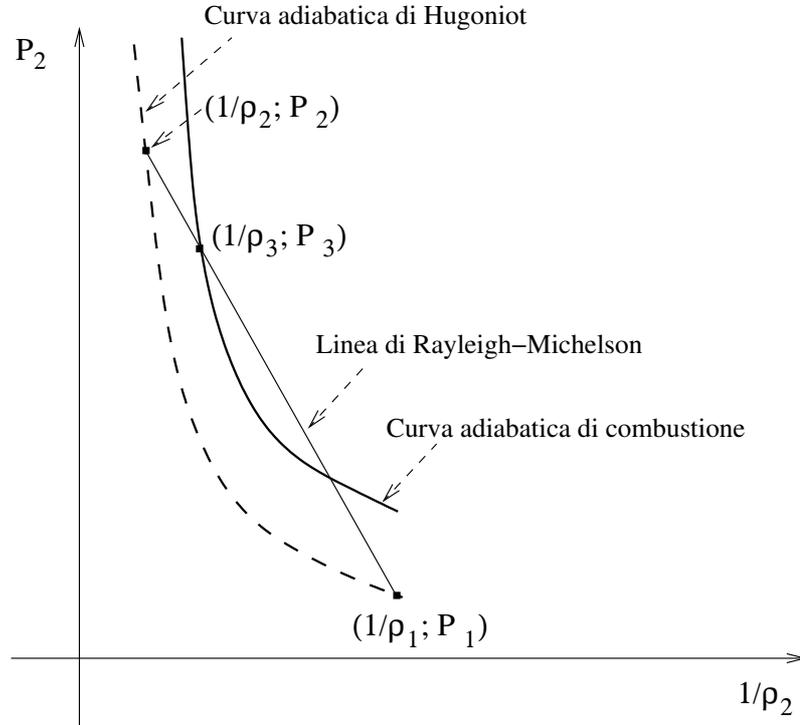


Figura 3.7: *Evoluzione dello stato termodinamico di un gas che viene investito da un'onda di detonazione secondo il modello di ZND.*

Nel modello di ZND la fiamma, che è la discontinuità che porta il gas dallo stato 2 allo stato 3 viene considerata come un'onda di deflagrazione. Quest'onda di deflagrazione si può descrivere come una discontinuità in quanto ora stiamo trascurando i processi di diffusione e stiamo invece considerando flussi di massa maggiori, quindi in questo caso non è più possibile trattare questa deflagrazione nell'approssimazione quasi-isobarica. Per trovare lo stato termodinamico del gas nella regione 3 si parte sempre dal fatto che lungo lungo la deflagrazione devono essere soddisfatte le relazioni di Rankine-Hugoniot (2.77)÷(2.79) per la conservazione del flusso della massa e dell'impulso, ma ora l'equazione per la conservazione del flusso dell'energia contiene un termine di sorgente dovuto alla produzione di energia nucleare e quindi si ha:

$$\left[\rho v_z \left\{ \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + \frac{P}{\rho} + E \right\} \right]_{\Sigma} = \int_{l_{\Sigma}} \rho_2 \dot{q} dz. \quad (3.36)$$

Usando $dz = v_{z2} dt$ e considerando un rilascio immediato di energia si ottiene

$$\int_{l_{\Sigma}} \rho_2 \dot{q} dz = \int_{l_{\Sigma}} \rho_2 v_{z2} \frac{dq}{dt} dt = \rho_2 v_{z2} q. \quad (3.37)$$

Infine, l'equazione per la conservazione dell'energia per questa deflagrazione, considerata come discontinuità, piana e stazionaria, si ottiene sostituendo l'equazione (3.37) nella (3.36), tenendo presente la (2.77) e ricordando la definizione di energia interna per unità di massa:

$$\frac{1}{2}(v_3^2 - v_2^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_2}{\rho_2} \right) = q. \quad (3.38)$$

Di conseguenza, il set di equazioni al bordo (2.77)÷(2.79) unito all'equazione (3.38), permette di determinare lo stato termodinamico del gas dopo il passaggio di un'onda di detonazione piana:

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{\gamma(P_2 + \rho_2 v_2^2) - \sqrt{(\rho_2 v_2^2 - \gamma P_2)^2 + 2q(\gamma^2 - 1)v_2^2 \rho_2^2}}{(\gamma + 1)v_2 \rho_2} \\ P_3 &= \frac{(P_2 + \rho_2 v_2^2) + \sqrt{(\rho_2 v_2^2 - \gamma P_2)^2 - 2q(\gamma^2 - 1)v_2^2 \rho_2^2}}{(\gamma + 1)} \\ \rho_3 &= \frac{\gamma \rho_2 (P_2 + \rho_2 v_2^2) + \sqrt{\rho_2^2 [(\rho_2 v_2^2 - \gamma P_2)^2 - 2q(\gamma^2 - 1)v_2^2 \rho_2^2]}}{\rho_2 (2q + v_2^2)(\gamma - 1) + 2\gamma P_2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

La soluzione qui riportata è quella che fornisce un numero di Mach inferiore ad 1 perchè, come abbiamo visto nella sezione 3.1 la velocità del gas dei prodotti rispetto al fronte d'onda di deflagrazione è subsonica.

La struttura di una detonazione come descritta in questa sezione ci sarà molto utile per analizzare la fase dell'esplosione di una Supernova di tipo Ia secondo il modello di detonazione ritardata in cui si sviluppa un'onda di detonazione (vedi sezione 4.4).

Capitolo 4

Modello di base per le Supernovae di tipo Ia

Le fasi esplosive di una Supernova sono un fenomeno estremamente complesso, determinato dall'interazione di differenti meccanismi fisici (reazioni termonucleari, perdite di neutrini e raggi gamma, fenomeni turbolenti e convettivi, propagazione di onde d'urto). Pertanto spesso si ricorre a una loro modellizzazione tramite l'impiego di simulazioni numeriche. Un approccio di questo genere presenta però il rischio potenziale che i risultati della simulazione siano fortemente condizionati da effetti numerici, specialmente per il fatto che il range dinamico delle scale fisiche in gioco (dal micron a 10^7 m) non è attualmente risolubile nella sua completezza. In questo capitolo discutiamo quindi un modello analitico per seguire le fasi lineari dell'esplosione di una supernova con per cercare di identificare, tramite un'analisi basata sui tempi scala e su una stima delle grandezze fisiche in gioco, i principali parametri del problema. In particolare studiamo la stabilità lineare del fronte d'onda tramite uno sviluppo in modi normali di una perturbazione unidimensionale. I risultati che abbiamo ottenuto evidenziano l'esistenza di significative instabilità a scale più piccole della risoluzione numerica delle attuali simulazioni che descrivono l'esplosione globale della Supernova. Queste instabilità, di difficile trattazione nelle analisi su grande scala, possono avere importanti conseguenze nell'evoluzione del fronte d'onda.

4.1 Fase di pre-supernova

Come abbiamo già visto nel primo capitolo, le caratteristiche osservative delle Supernovae di tipo Ia vengono ben riprodotte da un modello che prevede che esse siano il risultato dell'esplosione di una nana bianca di carbonio ed

ossigeno che accresce massa da una stella compagna. Quando negli strati superficiali della nana bianca viene accumulata una sufficiente quantità di materia ricca di idrogeno, in questi strati si innesca la fusione dell'idrogeno. La combustione dell'idrogeno può avvenire sia in una configurazione termodinamicamente stabile che attraverso dei *flashes* [15]. In generale, se l'accrescimento della massa è molto rapido (cioè per $\dot{M} > 3 \cdot 10^{-9} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ [57]) la fusione dell'idrogeno è stabile, così che si può assumere che tutta la materia ricevuta venga trasformata in elio, con conseguente rilascio di energia di legame nucleare. Invece, il risultato di un più lento accrescimento di materia è un intenso flash che espelle gran parte della materia ricevuta e ne trasforma solo poca in elio, quindi il rilascio di energia è minore rispetto al caso precedente. È anche possibile, sebbene più di rado, che la materia ricevuta dalla nana bianca sia direttamente elio e in questo caso essa viene trasformata in carbonio negli strati superficiali della stella.

Affinchè una nana bianca possa esplodere, è necessario che, durante questa fase di accrescimento di massa, la temperatura centrale della stella diventi sufficientemente alta da originare un'onda di deflagrazione. Per questo motivo questa fase è anche detta *di induzione*. Per determinare il tempo richiesto per dare inizio ad una deflagrazione nel nucleo di una nana bianca dobbiamo considerare i processi fisici che determinano l'andamento della temperatura centrale della struttura. Al fine di rendere la discussione più quantitativa consideriamo una tipica nana bianca [57] di massa iniziale pari $M_{WD}^{(0)} = 1.28 M_{\odot}$, con una temperatura centrale iniziale di $T_c^{(0)} = 2.6 \cdot 10^7$ K e una densità centrale iniziale di $\rho_c^{(0)} = 3.9 \cdot 10^8$ g/cm³, che accresce massa ad un ritmo di $\dot{M} = 3 \cdot 10^{-8} M_{\odot}/\text{yr}$.

Ricordiamo, innanzitutto, che il profilo di temperatura all'interno di una stella è tale che nelle zone centrali la temperatura è massima. Questo significa che anche se il calore prodotto dalle reazioni nucleari che avvengono negli strati superficiali della nana bianca, viene diffuso per conduzione verso le zone più interne della stella, esso non contribuisce all'aumento della temperatura centrale (essendo quest'ultima già superiore). Nonostante questo, la materia che si accumula sulla superficie della nana bianca ne aumenta la massa, causando la compressione della materia all'interno. Questa compressione rilascia energia gravitazionale L_g , contribuendo così all'aumento della temperatura e della densità centrale della stella. Secondo il modello di Nomoto [57] il rilascio di energia per unità di tempo dovuto all'accrescimento

di massa dipende dalla temperatura nel seguente modo:

$$L_g = \left(\frac{T}{3 \cdot 10^7 \text{ K}} \right) \left[3 \cdot 10^{-2} L_\odot \left(\frac{dM/dt}{7 \cdot 10^{-10} \text{ M}_\odot \text{ yr}^{-1}} \right) + 4 \cdot 10^{-2} L_\odot \left(\frac{M}{\text{M}_\odot} \right) \right], \quad (4.1)$$

dove $L_\odot = 3.9 \cdot 10^{33}$ erg/s è la luminosità del Sole. Man mano che la temperatura centrale aumenta, anche le reazioni di fusione del carbonio diventano sempre più probabili (vedi sezione 3.2) e anch'esse contribuiscono all'aumento della temperatura centrale. Il rate delle reazioni dipende fortemente dalla temperatura quindi è lecito considerare che le reazioni nucleari avvengano solo in una piccola regione sferica centrale (avente raggio r di circa 30 cm [11]). In questo caso l'energia per unità di tempo prodotta dalla fusione del carbonio è data da:

$$L_{nuc} = \frac{4\pi r^3}{3} \rho \dot{q} = \frac{4\pi r^3}{3} \rho^2 q \frac{Y_C^2}{\mu_C} S_e N_A \langle \sigma v \rangle_C \quad \text{erg/s.} \quad (4.2)$$

Contemporaneamente all'aumento di temperatura aumentano anche le perdite di energia per emissione di fotoni L_γ e di neutrini L_ν . Le perdite per fotoni avvengono solo negli strati superficiali della stella dove l'opacità per i fotoni diminuisce, ma nelle regioni centrali il cammino libero medio dei fotoni è molto basso e quindi i fotoni non rappresentano una perdita di energia, ma solo una redistribuzione. Per quanto riguarda i neutrini, essi vengono prodotti nelle zone calde della nana bianca (cioè in una regione di circa 100 km di raggio [11]) ed hanno una sezione d'urto con la materia stellare dell'ordine di 10^{-44} cm² [66], quindi riescono a sottrarre energia alla struttura. Esistono tre meccanismi di emissione di neutrini: (i) produzione di coppie neutrino-antineutrino ($e^+ + e^- \rightarrow \nu_{e,\mu,\tau} + \bar{\nu}_{e,\mu,\tau}$); (ii) produzione di "foto-neutrini" ($e^\pm + \gamma \rightarrow e^\pm + \nu_{e,\mu,\tau} + \bar{\nu}_{e,\mu,\tau}$); (iii) produzione di neutrini da oscillazioni del plasma (*plasmone* $\rightarrow \nu_{e,\mu,\tau} + \bar{\nu}_{e,\mu,\tau}$). Tutti questi meccanismi dipendono dalla temperatura e per le condizioni delle regioni centrali della nana bianca il meccanismo dominante di emissione di neutrini è quello dovuto alle oscillazioni del plasma [7]. Considerando solo questo meccanismo, l'energia persa per unità di tempo per l'emissione di neutrini dipende dalla temperatura nel seguente modo [54]:

$$L_\nu = \frac{2.4 \cdot 10^{-44} \cdot T^{12}}{5 \cdot 10^5 \cdot T^3 + 1.5 \cdot 10^8 \cdot T^2 + 6 \cdot 10^{17} \cdot T + 1.5 \cdot 10^{26}} \quad \text{erg/s.} \quad (4.3)$$

L'andamento dell'energia prodotta e dell'energia persa per unità di tempo in funzione della temperatura della stella è riportato in figura 4.1. Si nota

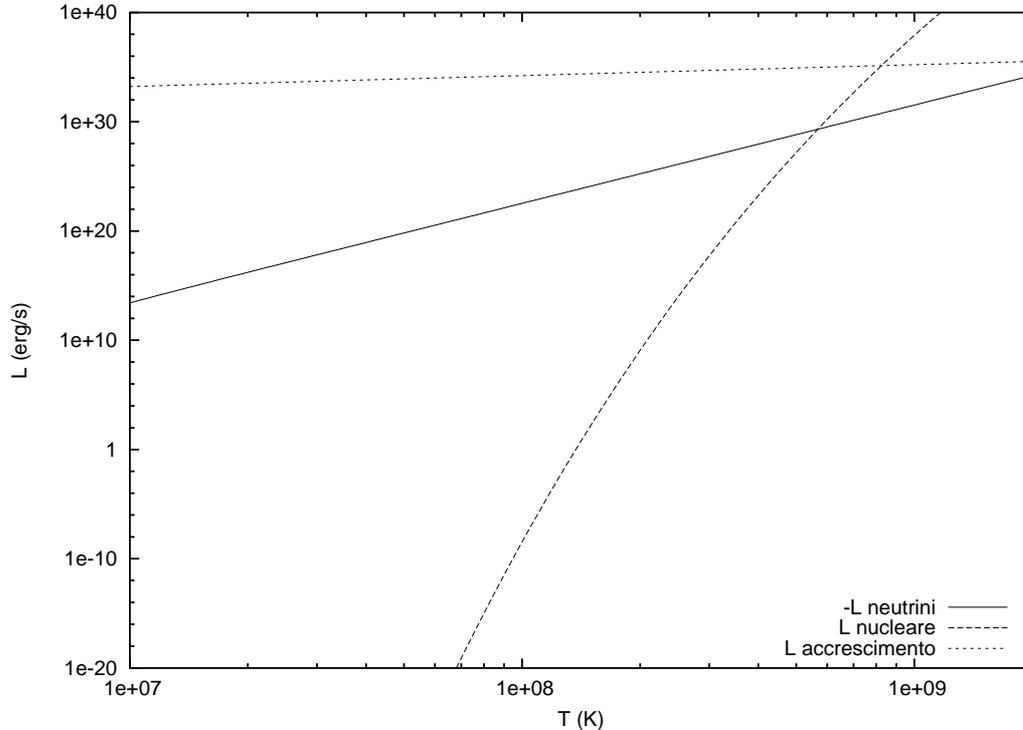


Figura 4.1: *Andamento dell'energia prodotta L_g e L_{nuc} e dell'energia persa L_ν per unità di tempo in funzione della temperatura centrale della nana bianca. Il punto corrispondente all'innesco della fusione del carbonio si ha per $T_c^* \simeq 5.7 \cdot 10^8$ K.*

che inizialmente la produzione di energia nucleare è del tutto trascurabile e quindi l'evoluzione iniziale della temperatura T_c è determinata essenzialmente dall'accrescimento di massa e dalle perdite di neutrini. Dal momento che il riscaldamento per compressione supera il raffreddamento per emissione di neutrini, la temperatura centrale aumenta. Questo effetto, d'altra parte incrementa il rate della reazione di fusione del carbonio. Quando la produzione di energia nucleare eguaglia la perdita dovuta ai neutrini, l'aumento di temperatura subisce una brusca accelerazione e si dice che la reazione di fusione del carbonio è stata *innescata*. Dal grafico di figura 4.1 si osserva che l'innesco del carbonio si ha per $T_c^* \simeq 5.7 \cdot 10^8$ K. Notiamo che questo valore è leggermente inferiore a quello che si trova generalmente in letteratura ($6.6 \cdot 10^8$ K [36]), ma questo si deve al fatto che in questa tesi stiamo considerando, per comodità, una composizione chimica iniziale di solo carbonio.

Quando il contributo al riscaldamento delle regioni centrali dovuto alle reazioni nucleari comincia a diventare significativo, nel nucleo si sviluppa anche il fenomeno della convezione. In questo ambiente, la convezione è in grado di trasportare materia verso l'esterno per qualche centinaia di km [11]. Quindi, per stimare l'intervallo Δt_{accr} in cui la nana bianca deve accrescere massa per innescare la fusione del carbonio dobbiamo calcolare l'energia ΔE necessaria per portare ad una temperatura di T_c^* tutta la zona convettiva (di raggio R di circa 100 km). Per il principio di equipartizione, l'energia interna della materia è proporzionale alla temperatura, ovvero $E = 3N_A k_B T N_{mol}/2$ dove N_{mol} è il numero di moli di materia e $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K è la costante di Boltzmann; quindi, nel nostro caso:

$$\Delta E = \frac{3}{2} \Delta T N_A k_B \frac{4\pi R^3 \rho}{3\mu_C} = 5.7 \cdot 10^{46} \text{ erg.} \quad (4.4)$$

Da cui, considerando che il maggior contributo all'incremento di temperatura deriva dalla compressione per accrescimento, si ha:

$$\Delta t_{accr} \sim \frac{\Delta E}{L_g} \sim 10^{13} \text{ s} = 4 \cdot 10^5 \text{ anni.} \quad (4.5)$$

All'innescio della fusione del carbonio, la massa della nana bianca ha raggiunto un valore prossimo al limite di Chandrasekhar, ovvero $M_{WD} \simeq 1.4M_\odot \simeq 2.79 \cdot 10^{33}$ g e la densità centrale è di circa $3 \cdot 10^9$ g/cm³ [58]. In questa situazione la nana bianca ha un raggio pari a $R_{WD} \simeq 2 \cdot 10^8$ cm [31] e quindi la sua energia gravitazionale risulta:

$$E_{grav} = -\frac{3}{5} \cdot G \cdot \frac{M_{WD}^2}{R_{WD}} = -1.56 \cdot 10^{51} \text{ erg.} \quad (4.6)$$

In queste condizioni la velocità di fuga di una particella è

$$v_f = \sqrt{2GM_{WD}/R_{WD}} = 1.4 \cdot 10^9 \text{ cm/s,} \quad (4.7)$$

ma, durante l'esplosione il raggio della stella aumenta, così che la velocità di fuga diminuisce.

A queste densità, come abbiamo già discusso, gli elettroni sono un gas degenerare ultrarelativistico mentre gli ioni possono essere ancora considerati un gas perfetto. Quindi, la materia stellare può essere descritta come un plasma a due componenti. Occorre sottolineare che questo plasma è un sistema molto collisionale, così che possiamo assumere che elettroni e ioni

abbiano la stessa temperatura. Per quanto riguarda la pressione, invece, essa è determinata esclusivamente dagli elettroni e vale (vedi anche [49]):

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left(\frac{\rho Z}{m_C} \right)^{4/3} = 4.9 \cdot 10^{14} \rho^{4/3} \Rightarrow P = 2.1 \cdot 10^{27} \text{ erg/cm}^3, \quad (4.8)$$

dove $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s è la velocità della luce, $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$ erg s è la costante di Planck e $Ze = 6e$ e $m_C = 1.99 \cdot 10^{-23}$ g sono rispettivamente la carica e la massa degli ioni di carbonio. Ne segue che, in queste condizioni, la velocità del suono rispetto al gas dei reagenti vale:

$$c_u^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right) = 6.6 \cdot 10^{14} \rho^{1/3} \Rightarrow c_u = 9.7 \cdot 10^8 \text{ cm/s}. \quad (4.9)$$

4.2 Fase di deflagrazione laminare

Come abbiamo visto nella precedente sezione l'innesco delle reazioni di fusione del carbonio avviene quando la densità e la temperatura centrali hanno raggiunto rispettivamente i valori $3 \cdot 10^9$ g/cm³ e $5.7 \cdot 10^8$ K. In queste condizioni, il tempo scala delle reazioni nucleari, che si può ottenere dall'equazione (3.21), è $\tau_R = 5.5 \cdot 10^4$ s e quindi è ancora molto maggiore di quello caratteristico della convezione τ_{conv} , che vale circa 100 s [84]. Ne segue che ora il principale meccanismo di trasporto del calore è la convezione e non la conduzione, ovvero non si è ancora originata un'onda di deflagrazione. Quando il gas raggiunge una temperatura di circa 10^9 K, il tempo scala delle reazioni nucleari è diventato dell'ordine di 10^{-7} s, ovvero $\tau_R \ll \tau_{conv}$, quindi possiamo considerare che la combustione del carbonio avvenga istantaneamente. È solo a questo punto che la superficie lungo la quale avvengono le reazioni si può definire un'onda di deflagrazione. Per stimarne lo spessore e la velocità laminare attraverso le equazioni (3.28) e (3.29) è necessario stimare anche la capacità termica e la conducibilità termica della materia stellare nelle condizioni sudette.

La materia stellare è costituita da elettroni (pedice 'e'), da ioni di carbonio (pedice 'C') e da radiazione (pedice 'γ'). Quindi, per la stima della capacità termica dobbiamo tenere presente i diversi contributi di questi componenti, cioè:

$$C_P = \frac{\rho_C(C_P)_C + \rho_e(C_P)_e}{\rho_{tot}} + (C_P)_\gamma \quad (4.10)$$

dove la densità del carbonio è circa la densità totale del gas ($\rho_C \approx \rho_{tot}$) e, ricordando che il carbonio è ionizzato sei volte, la densità degli elettroni è $\rho_e = 6m_e\rho_C/m_C$ con la massa dell'elettrone che vale $m_e = 9.11 \cdot 10^{-28}$ g.

Gli ioni di carbonio possono essere considerati come un gas perfetto e quindi la loro capacità termica non dipende dalla temperatura (vedi anche [49]). Per un gas monoatomico essa vale $C_P = 5\mathcal{R}/2 = 5N_A k_B/2$ erg K⁻¹ mol⁻¹, quindi:

$$(C_P)_C = \frac{5}{2} \cdot \frac{8.3 \cdot 10^7}{\mu_C} = 1.7 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{g} \cdot \text{K}}. \quad (4.11)$$

Gli elettroni, invece, possono essere descritti come un gas relativistico e completamente degenere, quindi (vedi [49]):

$$(C_P)_e = \frac{(3\pi^2)^{2/3} k_B^2}{3m_e c \hbar} \left(\frac{\mu_C}{6N_A \rho} \right)^{1/3} T = 5.5 \cdot 10^{10} \frac{\text{erg}}{\text{g} \cdot \text{K}}. \quad (4.12)$$

Infine, assumendo che la radiazione sia descrivibile con una distribuzione di corpo nero si ha che (vedi anche [49]):

$$(C_P)_\gamma \approx \frac{4aT^3}{\rho} = 8 \cdot 10^4 \frac{\text{erg}}{\text{g} \cdot \text{K}}, \quad (4.13)$$

dove $a = 7.56 \cdot 10^{-15}$ erg cm⁻³ K⁻⁴ è la costante di corpo nero. Da questi risultati si nota che, nelle condizioni caratteristiche di questa fase dell'esplosione, il contributo della radiazione alla capacità termica è trascurabile e possiamo, quindi, assumere che la capacità termica della materia stellare sia

$$C_P = \frac{6m_e}{m_C} (C_P)_e + (C_P)_C = 3.2 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{g} \cdot \text{K}}. \quad (4.14)$$

Per quanto riguarda la conducibilità termica, nelle nane bianche, il trasporto di calore è dovuto essenzialmente a processi radiativi e di conduzione elettronica. Infatti, possiamo trascurare il contributo degli ioni, in quanto la loro velocità è minore della velocità dei fotoni e degli elettroni (che è pari alla velocità della luce). Tenendo conto che alla conduzione elettronica contribuiscono i processi di *scattering* tra elettroni e ioni e tra elettroni ed elettroni e che l'effetto Compton è il principale meccanismo di trasporto di calore dovuto ai fotoni, Yakovlev e Urpin [11] hanno dimostrato che la conducibilità totale è data da:

$$\kappa = 0.81 \frac{\hbar c^2 k_B^2}{e^4 Z \Lambda_{ei}} \left(\frac{\rho Z}{m_C} \right)^{1/3} T \frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{cm} \cdot \text{K}}, \quad (4.15)$$

dove $\Lambda_{ei} \approx 1$ è il logaritmo di Coulomb, mentre la carica elementare vale $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ esu (1 esu² = erg cm). Dall'equazione (4.15) segue che, nel nostro caso, $\kappa = 8.8 \cdot 10^{18}$ erg s⁻¹ cm⁻¹ K⁻¹. Ricordando le equazioni (3.28)

e (3.29) è ora possibile stimare lo spessore dell'onda di deflagrazione e la sua velocità laminare rispetto al gas dei reagenti, infatti $l_d = 8.4 \cdot 10^{-3}$ cm e $v_u = 1.1 \cdot 10^4$ cm/s, da cui segue che il numero di Mach è $M_u = v_u/c_u = 1.1 \cdot 10^{-5}$. Possiamo quindi investigare la dinamica della deflagrazione utilizzando l'approssimazione quasi-isobarica (perchè $M_u \ll 1$) e considerando il fronte d'onda della deflagrazione come una discontinuità in quanto il suo spessore l_d è molto inferiore al raggio della nana bianca R_{WD} .

Per poter applicare le equazioni della sezione 3.3 è anche importante confrontare la diffusione del calore con quella della materia. Il coefficiente di diffusione del carbonio D_C per i plasmii stellari è stato studiato da Paquette et al. [60] i quali hanno trovato che, in prima approssimazione, $D_C \propto T^{-1/2}$ e quindi, nel nostro caso è dell'ordine di 10^{-5} cm²/s. Ne segue che il numero di Lewis per la deflagrazione che avviene all'interno della nana bianca vale circa $Le \approx 10^7$, di conseguenza si può trascurare il fenomeno della diffusione della materia rispetto a quello della diffusione del calore. Infine, per poter utilizzare le equazioni della sezione 3.3 dobbiamo verificare che gli effetti della viscosità siano anch'essi trascurabili. A questo fine si può introdurre il *numero di Prandtl* definito come il rapporto tra il coefficiente di viscosità η e il trasporto del calore, ovvero:

$$Pr \equiv \frac{C_P \eta}{\kappa}. \quad (4.16)$$

Utilizzando per η la stima di 10^7 g cm⁻¹ s⁻¹ [74], si ha che $Pr \approx 10^{-5}$, quindi, è legittimo trascurare anche il fenomeno della viscosità.

Riassumendo, abbiamo visto che quando la temperatura della stella raggiunge circa $2 \cdot 10^9$ K, si sviluppa un'onda di deflagrazione di spessore trascurabile che si propaga verso l'esterno della stella con una velocità estremamente subsonica. Il parametro di espansione che caratterizza la deflagrazione vale $\Theta = 1.4$, che si ricava dall'equazione (3.32), dove si può porre $Y_C \approx 1$, trascurando il consumo di carbonio avvenuto nella fase di induzione. Più accurate analisi numeriche del problema forniscono valori del coefficiente Θ compresi tra 1.2 e 1.7 (vedi per esempio [74], [11]), quindi la nostra stima di Θ ottenuta attraverso una trattazione analitica è in accordo con i risultati che si trovano in letteratura. Per esaminare la stabilità di questa onda di deflagrazione, la considereremo localmente piana e assumeremo l'asse z come direzione di propagazione. Nella prossima sezione studieremo la fiamma in assenza di accelerazione di gravità e ricaveremo l'insorgere dell'instabilità di Landau-Darrieus, successivamente ripristinando la gravità otterremo l'insorgere dell'instabilità di Rayleigh-Taylor.

4.2.1 Instabilità di Landau-Darrieus

L'instabilità di Landau-Darrieus si verifica in tutte le deflagrazioni che avvengono in un gas perchè è legata solo al coefficiente di espansione Θ . Siccome, in questa trattazione, il fronte d'onda è visto come una discontinuità, la sua velocità è una costante assegnata dall'esterno, che indichiamo con $v_u = S_l$. Inoltre, nell'approssimazione quasi-isobarica, la pressione rimane costante, cioè $P_u = P_b$ e i fluidi possono essere considerati incomprimibili, quindi le densità del gas dei reagenti e del gas dei prodotti sono fissate e valgono rispettivamente ρ_u e $\rho_b = \rho_u/\Theta$. Infine, dalla condizione di Rankine-Hugoniot per la conservazione del flusso della massa (2.72) si ricava per la velocità del gas dei prodotti rispetto al fronte d'onda $v_b = \Theta S_l$.

Per applicare il metodo descritto nell'appendice B per lo studio della stabilità di questo fronte d'onda sovrapponiamo alla soluzione imperturbata piana e stazionaria una perturbazione, nella direzione perpendicolare a quella di propagazione, della forma:

$$\tilde{F}(x, t) = \tilde{F} \exp(\sigma t + ikx), \quad (4.17)$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda della perturbazione (che ha lunghezza d'onda λ) e σ è il tasso di crescita della perturbazione. Lo scopo di quest'analisi è proprio quello di ricavare la relazione di dispersione legata all'instabilità, ovvero $\sigma = \sigma(k)$. Notiamo subito che, sulla base di considerazioni dimensionali, ci aspettiamo che il tasso di crescita sia della forma $\sigma = S_l k f(\Theta)$, dove $f(\Theta)$ è un fattore numerico che dipende solo dal coefficiente di espansione. Come sottolineato nell'appendice B, il flusso sarà instabile se esistono delle condizioni tali per cui la parte reale del tasso di crescita risulta positiva (ovvero $\text{Re } \sigma > 0$). In generale, la forma della perturbazione (4.17) dovrebbe essere presa in tre dimensioni (B.1), ma per la linearizzazione del problema non c'è differenza tra la configurazione bidimensionale (che stiamo considerando) e quella tridimensionale.

Siccome, nell'approssimazione quasi-isobarica, i fluidi possono essere considerati incomprimibili, le grandezze idrodinamiche che vengono perturbate possono essere solo la pressione e la velocità, che scriviamo quindi come:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, z, t) &= v_z + \mathbf{v}'(x, z, t) & \text{con} & & \mathbf{v}' &= (v'_x, 0, v'_z) \\ P(x, z, t) &= P_u + P'(x, z, t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dato che il problema è lineare, le perturbazioni di tutte le quantità idrodinamiche sono proporzionali alla perturbazione del fronte, cioè:

$$\begin{aligned} P'(x, z, t) &= \tilde{P}(z)e^{\sigma t + ikx} \\ v'_x(x, z, t) &= \tilde{v}_x(z)e^{\sigma t + ikx} \\ v'_z(x, z, t) &= \tilde{v}_z(z)e^{\sigma t + ikx} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sostituendo le equazioni (4.18) nelle equazioni (3.24) e (3.25) e tenendo conto dei soli termini lineari si ottengono le equazioni del moto per le quantità perturbate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v'_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v'_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x}, \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v'_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Infine, utilizzando le espressioni (4.19) si ottiene un sistema di equazioni alle derivate ordinarie a coefficienti costanti:

$$\frac{d\tilde{v}_z}{dz} + ik\tilde{v}_x = 0, \quad (4.20)$$

$$\rho\sigma\tilde{v}_x + \rho v_z \frac{d\tilde{v}_x}{dz} = -ik\tilde{P}, \quad (4.21)$$

$$\rho\sigma\tilde{v}_z + \rho v_z \frac{d\tilde{v}_z}{dz} = -\frac{d\tilde{P}}{dz}, \quad (4.22)$$

da risolvere indipendentemente sia nel gas dei reagenti (dove $\rho = \rho_u$ e $v_z = S_l$) che nel gas dei prodotti (dove $\rho = \rho_u/\Theta$ e $v_z = \Theta S_l$), ricordando che le perturbazioni si annullano lontano dal fronte d'onda (cioè per $z = \pm\infty$). Le soluzioni che si ottengono vanno poi raccordate lungo il fronte della deflagrazione (dove $z = 0$) attraverso le condizioni di Rankine-Hugoniot (2.77)÷(2.79), che linearizzate diventano:

$$\left[\rho\tilde{v}_z + \sigma\rho\tilde{F} \right]_{\Sigma} = 0,$$

$$\left[\tilde{v}_x - ikv_z\tilde{F} \right]_{\Sigma} = 0,$$

$$\left[\tilde{P} + 2\rho v_z(\tilde{v}_z + \sigma\tilde{F}) \right]_{\Sigma} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\rho_u}{\Theta}(\tilde{v}_{zb} + \sigma\tilde{F}) - \rho_u(\tilde{v}_{zu} + \sigma\tilde{F}) = 0, \quad (4.23)$$

$$\tilde{v}_{xb} - ik\Theta S_l \tilde{F} - \tilde{v}_{xu} + ikS_l \tilde{F} = 0, \quad (4.24)$$

$$\tilde{P}_b + 2\rho_u S_l(\tilde{v}_{zb} - \tilde{v}_{zu}) - \tilde{P}_u = 0. \quad (4.25)$$

Come abbiamo visto nella sezione 2.6, a queste equazioni va aggiunta la condizione (2.81) sulla velocità del gas dei reagenti, che, in questo caso, è semplicemente:

$$\tilde{v}_{zu} = -\sigma\tilde{F}. \quad (4.26)$$

La soluzione del sistema (4.20)÷(4.22) per il gas dei reagenti ($z < 0$) si trova derivando l'equazione (4.22) rispetto a z :

$$\rho_u \sigma \frac{d\tilde{v}_{zu}}{dz} + \rho_u S_l \frac{d^2\tilde{v}_{zu}}{dz^2} + \frac{d^2\tilde{P}_u}{dz^2} = 0 \quad (4.27)$$

e sostituendo in quest'ultima espressione le equazioni (4.20) e (4.21). In questo modo si ricava un'equazione differenziale armonica:

$$\frac{d^2\tilde{P}_u}{dz^2} = k^2\tilde{P}_u, \quad (4.28)$$

che ha per soluzione

$$\tilde{P}_u = B_u e^{kz} \quad \text{con} \quad B_u = \text{costante}. \quad (4.29)$$

La soluzione proporzionale a $\exp(-kz)$ va esclusa perchè per $z = -\infty$ la perturbazione si deve annullare.

Ora consideriamo l'equazione (4.22) che con l'espressione (4.29) diventa:

$$\rho_u \sigma \tilde{v}_{zu} + \rho_u S_l \frac{d\tilde{v}_{zu}}{dz} = -k B_u e^{kz}. \quad (4.30)$$

La soluzione dell'equazione omogenea associata alla (4.30) è:

$$\tilde{v}_{zu}(z) = C_u e^{-(\sigma z)/S_l} \quad \text{con} \quad C_u = \text{costante} \quad (4.31)$$

ma noi siamo interessati a possibili soluzioni con $\text{Re } \sigma > 0$ (cioè soluzioni instabili) e, in questo caso ($z < 0$), la soluzione (4.31) diverge all'infinito e dunque è da scartare. Quindi, la più generale soluzione dell'equazione (4.30) è:

$$\tilde{v}_{zu}(z) = A_u e^{kz}, \quad (4.32)$$

dove A_u è una costante tale che:

$$\rho_u A_u (\sigma + kS_l) = -k B_u. \quad (4.33)$$

Analogamente, dall'equazione (4.21) si ricava:

$$\tilde{v}_{xu}(z) = D_u e^{kz}, \quad (4.34)$$

dove D_u è una costante tale che:

$$D_u = -i A_u. \quad (4.35)$$

Procedendo nello stesso modo, la soluzione del sistema (4.20) ÷ (4.22) per il gas dei prodotti ($z > 0$) è

$$\tilde{P}_b = B_b e^{-kz} \quad \text{con} \quad B_b = \text{costante}, \quad (4.36)$$

che sostituita nell'equazione (4.22) dà:

$$\frac{\rho_u}{\Theta} \sigma \tilde{v}_{zb} + \rho_u S_l \frac{d\tilde{v}_{zb}}{dz} = k B_b e^{-kz}. \quad (4.37)$$

Ora, la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (4.37) è accettabile e quindi la più generale soluzione è data da:

$$\tilde{v}_{zb}(z) = C_b e^{-(\sigma z)/(\Theta S_l)} + A_b e^{-kz}. \quad (4.38)$$

Analogamente, per la componente tangenziale della velocità perturbata si ha:

$$\tilde{v}_{xb}(z) = G_b e^{-(\sigma z)/(\Theta S_l)} + D_b e^{-kz} \quad (4.39)$$

e le costanti di integrazione devono soddisfare a:

$$\begin{aligned} \rho_b A_b \left(\frac{\sigma}{\Theta} + kS_l \right) &= -k B_b \\ D_b &= -i A_b \\ k\Theta S_l G_b &= -i\sigma C_b. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Infine, note le soluzioni per $z < 0$ e $z > 0$, possiamo riscrivere le condizioni (4.23)÷(4.25) e (4.26) come:

$$\frac{\rho_u}{\Theta}(C_b + A_b + \sigma\tilde{F}) - \rho_u(A_u + \sigma\tilde{F}) = 0, \quad (4.41)$$

$$G_b + D_b - ik\Theta S_l \tilde{F} - D_u + ikS_l \tilde{F} = 0, \quad (4.42)$$

$$B_b + 2\rho_u S_l (C_b + A_b - A_u) - B_u = 0, \quad (4.43)$$

$$A_u = -\sigma\tilde{F}. \quad (4.44)$$

Le equazioni (4.33), (4.35), (4.40), (4.41)÷(4.44) formano un sistema lineare omogeneo, che risolto fornisce la seguente relazione di dispersione per l'instabilità di Landau-Darrieus:

$$\sigma^2 + \frac{2\Theta}{\Theta + 1}kS_l\sigma - \frac{\Theta - 1}{\Theta + 1}\Theta S_l^2 k^2 = 0, \quad (4.45)$$

da cui si ricava il tasso di crescita:

$$\sigma_{LD} = kS_l \frac{\Theta}{\Theta + 1} \left(\sqrt{\Theta + 1 - \frac{1}{\Theta}} - 1 \right). \quad (4.46)$$

Dall'equazione (4.46) si vede che il tasso di crescita è reale e positivo per tutti i valori del coefficiente di espansione, in quanto $\Theta > 1$ per tutte le deflagrazioni. Inoltre σ aumenta all'aumentare di Θ , cioè maggiore è la differenza tra la densità dei reagenti e la densità dei prodotti e prima si sviluppa l'instabilità di Landau-Darrieus. Le formule (4.45) e (4.46) che abbiamo ottenuto in una configurazione unidimensionale diventano tridimensionali semplicemente sostituendo a k il modulo del vettore d'onda $|\mathbf{k}|$ in tre dimensioni. Si può, dunque, concludere che piccole perturbazioni del fronte d'onda di una deflagrazione crescono esponenzialmente nel tempo dando origine all'instabilità di Landau-Darrieus, che ha l'effetto di curvare il fronte d'onda stesso.

Come si può notare dall'espressione (4.46), l'analisi di questa instabilità mostra che l'ampiezza di ogni modo di perturbazione aumenta indipendentemente dal suo numero d'onda, tanto più è minore la lunghezza d'onda della perturbazione tanto più velocemente essa aumenta. Per questo motivo dall'equazione (4.46) non si può determinare una lunghezza caratteristica dell'instabilità. L'unico vincolo sulla scala di lunghezza può essere trovato

indirettamente dalle assunzioni del modello. Infatti, la soluzione (4.46) è stata ottenuta nell'ipotesi di un fronte d'onda di spessore trascurabile, quindi essa vale solo per perturbazioni aventi una lunghezza d'onda maggiore dello spessore della fiamma ($\lambda \gg l_d$ o $kl_d \ll 2\pi$). Nel nostro caso, quindi, vale per $k \ll 7.5 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-1}$.

4.2.2 Instabilità di Rayleigh-Taylor

Durante l'esplosione di una Supernova, l'onda di deflagrazione si propaga verso l'esterno della stella, cioè in direzione opposta a quella dell'accelerazione di gravità. In questo caso l'instabilità di Landau-Darrieus può venire amplificata dall'instabilità di Rayleigh-Taylor. Quest'ultima si sviluppa solo quando è presente un'accelerazione e la superficie di discontinuità separa due fluidi di densità diversa tali che il gradiente di densità è opposto a tale accelerazione. Nel nostro caso, l'accelerazione è dovuta alla gravità e, come abbiamo già visto, il gas dei prodotti è più leggero di quello dei reagenti. Per stimare il valore dell'accelerazione possiamo di nuovo assumere che la deflagrazione si sviluppi al bordo di una sfera di raggio di circa 30 cm [11], alla cui superficie l'accelerazione vale $g \approx 10^4 \text{ cm/s}^2$.

L'analisi dell'istabilità di Rayleigh-Taylor è simile a quella sviluppata per l'instabilità di Landau-Darrieus. Infatti, bisogna nuovamente risolvere le equazioni della fluido-dinamica linearizzate rispetto alle quantità perturbate, cioè le equazioni (4.20)÷(4.22), con le condizioni al contorno (4.23), (4.24) e (4.26). L'unica differenza risiede nell'equazione linearizzata per la conservazione della componente normale del flusso dell'impulso, che in presenza della gravità diventa:

$$\left[\tilde{P} + 2\rho v_z(\tilde{v}_z + \sigma \tilde{F}) - \rho g \tilde{F} \right]_{\Sigma} = 0,$$

ovvero

$$\tilde{P}_b - \tilde{P}_u + 2\rho_u S_l(\tilde{v}_{zb} - \tilde{v}_{zu}) + \frac{\Theta - 1}{\Theta} \rho_u g \tilde{F} = 0. \quad (4.47)$$

Dal momento che, in presenza della gravità le equazioni linearizzate della fluido-dinamica sono ancora le (4.20)÷(4.22), allora anche le soluzioni per il gas dei reagenti e dei prodotti sono ancora valide. Di conseguenza il sistema lineare omogeneo da risolvere è ora costituito dalle equazioni (4.33), (4.35), (4.40), (4.41), (4.42), (4.44) e (4.47) che forniscono la seguente relazione di dispersione:

$$\sigma^2 + \frac{2\Theta}{\Theta + 1} k S_l \sigma - \frac{\Theta - 1}{\Theta + 1} \Theta S_l^2 k^2 - \frac{\Theta - 1}{\Theta + 1} g k = 0, \quad (4.48)$$

da cui si ricava il tasso di crescita per l'instabilità di Rayleigh-Taylor:

$$\sigma_{DL+RT} = \sqrt{\frac{\Theta - 1}{\Theta + 1} gk + \frac{\Theta^2 + \Theta - 1}{(\Theta + 1)^2} \Theta S_l^2 k^2} - \frac{\Theta}{\Theta + 1} k S_l. \quad (4.49)$$

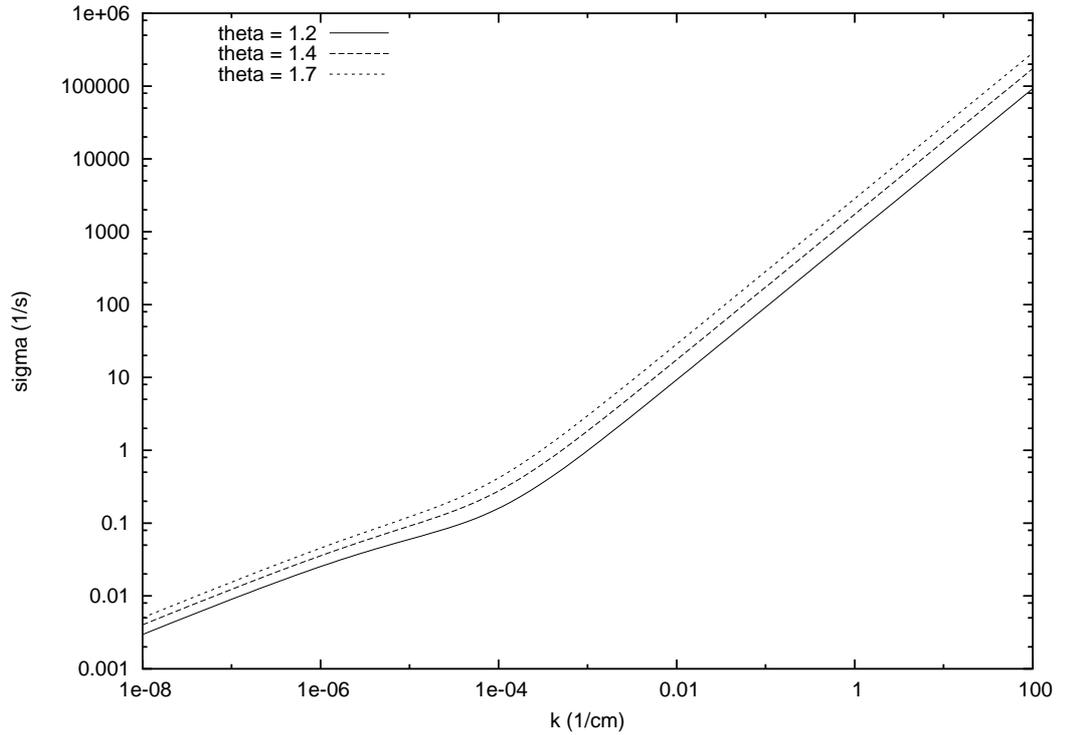


Figura 4.2: Andamento del tasso di crescita σ_{LD+RT} dell'instabilità di Rayleigh-Taylor in funzione della lunghezza d'onda della perturbazione e del coefficiente di espansione Θ .

In figura 4.2 è riportato l'andamento del tasso di crescita dell'instabilità di Rayleigh-Taylor per alcuni valori caratteristici del coefficiente di espansione (Θ) per le deflagrazioni in una nana bianca. Si può notare che, come nel caso dell'instabilità di Landau-Darrieus tutti i modi di perturbazione vengono amplificati e, di nuovo, tanto minore è la lunghezza d'onda della perturbazione, tanto maggiore risulta l'amplificazione. Anche in questo caso la lunghezza caratteristica dell'instabilità può essere ricavata solo dai limiti imposti dal modello e quindi la relazione (4.49) può essere considerata valida solo per $k < 10^2 \text{ cm}^{-1}$.

In assenza di accelerazione gravitazionale, la relazione di dispersione (4.49) si riduce a quella della sola instabilità di Landau-Darrieus. Nel caso opposto di elevate accelerazioni ($S_i^2 k/g \ll 1$) o per perturbazioni di lunghezza d'onda sufficientemente grande il tasso di crescita (4.49) diventa pari a:

$$\sigma_{RT} = \sqrt{\frac{\Theta - 1}{\Theta + 1}} gk \quad (4.50)$$

che è il classico risultato per l'instabilità di Rayleigh-Taylor (vedi anche [17]).

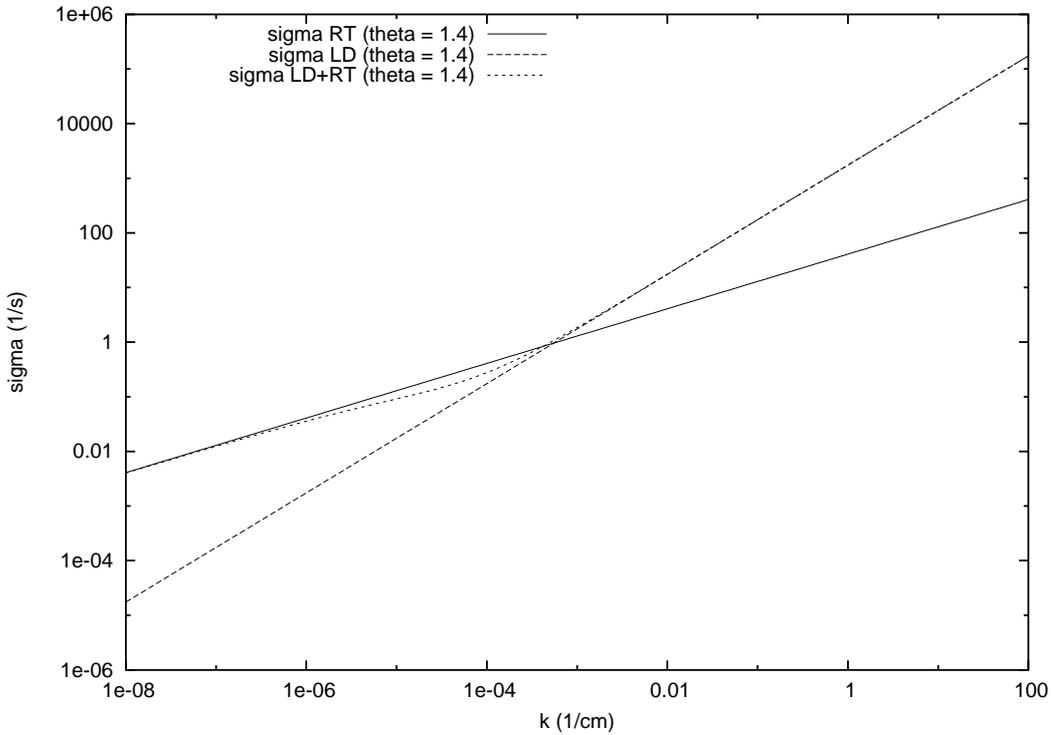


Figura 4.3: Confronto tra il tasso di crescita σ_{DL+RT} dovuto all'instabilità di Landau-Darrieus in presenza di campo gravitazionale, equazione (4.49) e i tassi di crescita della sola instabilità di Rayleigh-Taylor σ_{RT} , equazione (4.50) e della sola instabilità di Landau-Darrieus σ_{LD} , equazione (4.46).

Nel grafico di figura 4.3 sono riportati gli andamenti del tasso di crescita dell'instabilità di Landau-Darrieus (σ_{LD}), dell'instabilità di Rayleigh-Taylor (σ_{RT}) e dell'instabilità dovuta all'effetto congiunto di entrambe (σ_{LD+RT}). Notiamo che il tasso di crescita dell'instabilità di Landau-Darrieus in presenza di campo gravitazionale (σ_{LD+RT}) è diverso dalla semplice somma dei tassi

di crescita dell'instabilità di Landau-Darrieus e dell'instabilità di Rayleigh-Taylor. Inoltre, si può vedere che per lunghezze d'onda piccole ($\lambda < 10^4$ cm) l'instabilità di Landau-Darrieus è dominante, mentre per lunghezze d'onda più grandi domina l'instabilità di Rayleigh-Taylor. In letteratura esistono molte simulazioni numeriche del problema, in cui gli autori tengono conto soltanto dell'instabilità di Rayleigh-Taylor, perchè la griglia numerica non consente di esaminare lunghezze d'onda piccole a meno di non aumentare molto i tempi di calcolo. Trascurare i modi di perturbazione a piccole lunghezze d'onda significa, però, sottostimare di circa due ordini di grandezza l'amplificazione delle perturbazioni. Questo si riflette in un'erronea stima dei tempi scala con cui si sviluppano le instabilità. Infatti, se confrontiamo i tempi scala con cui si sviluppano una perturbazione avente $\lambda \sim 10^{-2}$ cm e una con $\lambda \sim 10^4$ cm si ottiene

$$\tau_{LD+RT}(\lambda = 10^{-2}) \approx 10^{-5} \text{ s} \ll \tau_{RT}(\lambda = 10^4) \approx 1 \text{ s}. \quad (4.51)$$

Questa differenza, a sua volta, si ripercuote sulla composizione chimica finale dei prodotti dell'esplosione.

4.3 Fase di combustione turbolenta

Nella precedente sezione abbiamo messo in luce il fatto che in breve tempo un'onda di deflagrazione diventa instabile. Questo significa che l'ampiezza, inizialmente infinitesima, di una perturbazione del flusso comincia a crescere esponenzialmente nel tempo e quindi, quando la perturbazione diventa dell'ordine della quantità imperturbata, la teoria lineare diventa incapace di descriverne l'ulteriore evoluzione. Inoltre, sebbene l'evoluzione dello stato di un fluido sia governato da equazioni deterministiche (le equazioni della fluidodinamica), può succedere che esistano punti di biforcazione del sistema di equazioni differenziali da risolvere. Quando il fluido viene a trovarsi in uno stato prossimo a tali punti diventa quindi praticamente impossibile determinare la direzione dell'evoluzione futura. In questo caso, la velocità del fluido sembra variare casualmente nel tempo e nello spazio ed esso viene definito *turbolento*. Poichè non è possibile sviluppare una teoria deterministica della turbolenza, si ricorre ad una descrizione statistica.

La teoria statistica proposta da Kolmogorov (1941) ha messo in luce il fatto che la turbolenza è un fenomeno dissipativo che trasferisce energia dalle grandi alle piccole scale. Di conseguenza, in un flusso turbolento la diffusione del calore è maggiore di quella di un flusso laminare, e questo riduce quindi i tempi scala del mescolamento (o *mixing*) della materia. In particolare, data

la natura intrinsecamente dissipativa del fenomeno, uno stato stazionario turbolento non può esistere per un sistema isolato. Una situazione quasi stazionaria si può invece verificare nel caso in cui il sistema riceva un continuo apporto di energia alle grandi scale che bilanci gli effetti della dissipazione turbolenta.

Nel caso dell'esplosione di una Supernova, il fronte d'onda di deflagrazione, a seguito dello sviluppo delle instabilità, può entrare in un regime turbolento. In questo caso l'increspamento indotto nel fronte d'onda aumenta la superficie effettiva della fiamma e quindi le dimensioni della zona di reazione. Questo induce una maggiore produzione di energia nucleare con una conseguente accelerazione del fronte d'onda. Ovviamente in queste fasi turbolente non si può più considerare la zona di reazione come una discontinuità in un modello unidimensionale, come quello sviluppato in questa tesi. Ricordiamo però che il pregio dell'analisi lineare della stabilità è proprio quello di fornire le condizioni e i tempi scala per l'instaurarsi del regime turbolento.

La comprensione di questa fase dell'esplosione è molto importante perchè proprio la turbolenza è ritenuta responsabile della transizione dal regime di deflagrazione a quello di detonazione, che, come abbiamo visto nella sezione 1.5.3, sembra spiegare meglio i dati osservativi. In letteratura (ad esempio vedi [6], [11], [44], [73]) sono stati proposti differenti modelli teorici per trattare questa complessa fase evolutiva. Allo stato attuale non sembra purtroppo che sia ancora emerso un modello universalmente accettato. Comunque un comune denominatore di questi modelli teorici è la predizione che l'espansione della struttura stellare indotta dall'onda di deflagrazione riesca a aumentare la densità fino ad un valore di circa $3 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$ (per esempio su un tempo scala di circa 4 secondi [6]). In queste condizioni (vedi anche sezione 1.5.3) si può sviluppare un'onda di detonazione perchè l'intensità dell'onda d'urto è sufficientemente elevata da permettere alla detonazione di auto-sostenersi (vedi sezione 3.4).

4.4 Fase di detonazione

In questa sezione ci occuperemo dello studio della fase dell'esplosione di una Supernova Ia in cui si sviluppa un'onda di detonazione. Come abbiamo già visto in precedenza i dati osservativi vengono ben riprodotti se un'onda di detonazione si origina quando il gas stellare ha raggiunto una densità inferiore a $3 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$. Per la nostra trattazione supporremo che la degenerazione elettronica sia stata completamente eliminata durante la fase precedente e

che il fronte di detonazione originatosi sia inizialmente laminare. Inoltre, assumeremo che durante la fase di deflagrazione sia stato consumato circa il 10% del carbonio iniziale (vedi anche [11]) e che la temperatura del gas sia quella dell'innesco delle reazioni di fusione del carbonio (circa $2 \cdot 10^9$ K). Naturalmente è più probabile che la detonazione che si sviluppi abbia una velocità prossima alla minima possibile, ovvero la velocità di Chapman-Jouguet, che in questo caso vale $v_{CJ} = 1.35 \cdot 10^9$ cm/s (vedi equazione (3.8)). Di conseguenza assumeremo come velocità dell'onda di detonazione stazionaria una velocità di poco superiore a quella di Chapman-Jouguet, ovvero $v_{det} = 1.4 \cdot 10^9$ cm/s.

In queste condizioni, il tempo caratteristico per le reazioni nucleari è pari a $\tau_R = 2.5 \cdot 10^{-13}$ s e quindi lo spessore dell'onda di detonazione, dato dall'equazione 3.35, è di $l_{det} = 3.5 \cdot 10^{-4}$ cm. Nella seguente tabella sono riportati i valori (rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la detonazione) delle quantità termodinamiche dello stato stazionario (vedi sezione 3.4), del quale nel seguito studieremo la stabilità.

	Gas 1	Gas 2	Gas 3
v (cm/s)	$1.4 \cdot 10^9$	$3.6 \cdot 10^8$	$7.4 \cdot 10^8$
ρ (g/cm ³)	$3 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^8$	$5.7 \cdot 10^7$
T (K)	$2 \cdot 10^9$	$5.5 \cdot 10^{10}$ (zona A) $7.3 \cdot 10^{10}$ (in media) 10^{11} (zona B)	$1.4 \cdot 10^{11}$
P (erg/cm ³)	$4.2 \cdot 10^{23}$	$4.4 \cdot 10^{25}$	$2.8 \cdot 10^{25}$
c_s (cm/s)	$1.5 \cdot 10^8$	$7.9 \cdot 10^8$	$9 \cdot 10^8$
M	9.2	0.46	0.82

Per analizzare la stabilità di un'onda di detonazione utilizziamo ancora il metodo della linearizzazione e dello sviluppo in modi normali (vedi appendice B). A differenza del caso dell'onda di deflagrazione, questa volta il gas non può più essere considerato incompressibile, quindi si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(x, z, t) &= \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'(x, z, t) & \text{con} & & \mathbf{v}' &= (v'_x, 0, v'_z), \\
 P(x, z, t) &= \bar{P} + P'(x, z, t), \\
 \rho(x, z, t) &= \bar{\rho} + \rho'(x, z, t),
 \end{aligned}
 \tag{4.52}$$

dove le quantità accentate indicano la variazione delle quantità a causa della perturbazione. Consideriamo un sistema di riferimento solidale con lo shock avente l'asse z nella stessa direzione della velocità dello shock, ma

verso opposto e con origine alla discontinuità stessa. Proseguendo nell'applicazione del metodo, con la notazione usuale, sovrapponiamo all'onda d'urto una perturbazione F della forma:

$$F(x, t) = \tilde{F}e^{\sigma t + ikx}, \quad (4.53)$$

così che, per la linearità del problema si può riscrivere:

$$\begin{aligned} \rho'(x, z, t) &= \tilde{\rho}(z)e^{\sigma t + ikx} \\ P'(x, z, t) &= \tilde{P}(z)e^{\sigma t + ikx} \\ v'_x(x, z, t) &= \tilde{v}_x(z)e^{\sigma t + ikx} \\ v'_z(x, z, t) &= \tilde{v}_z(z)e^{\sigma t + ikx}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Sostituendo le espressioni (4.52) e (4.54) nelle equazioni della fluido-dinamica e tenendo conto dei soli termini lineari si ottiene un sistema di equazioni alle derivate ordinarie da risolvere rispetto alle quantità perturbate:

$$\sigma \tilde{\rho} + \bar{v}_z \frac{d\tilde{\rho}}{dz} + \bar{\rho} \left(ik\tilde{v}_x + \frac{d\tilde{v}_z}{dz} \right) = 0, \quad (4.55)$$

$$\bar{\rho}\sigma\tilde{v}_x + \bar{\rho}\bar{v}_z \frac{d\tilde{v}_x}{dz} = -ik\tilde{P}, \quad (4.56)$$

$$\bar{\rho}\sigma\tilde{v}_z + \bar{\rho}\bar{v}_z \frac{d\tilde{v}_z}{dz} = -\frac{d\tilde{P}}{dz}, \quad (4.57)$$

$$\frac{1}{c_s^2} \left(\sigma\tilde{P} + \bar{v}_z \frac{d\tilde{P}}{dz} \right) = \sigma\tilde{\rho} + \bar{v}_z \frac{d\tilde{\rho}}{dz}. \quad (4.58)$$

Anche in questo caso, per risolvere analiticamente il problema, consideriamo costanti i coefficienti di questa equazione, il che significa che consideriamo costanti i valori assunti dalle quantità termodinamiche nella configurazione stazionaria. Questa approssimazione è corretta se il tempo scala con cui variano queste quantità è maggiore di quello che ci vuole per lo sviluppo dell'instabilità. Di conseguenza, la validità dell'approssimazione verrà giustificata solo *a posteriori*.

Nel sistema di riferimento scelto il gas di fronte allo shock (gas 1) corrisponde alla regione di spazio avente $z < 0$. La soluzione del sistema (4.55)÷(4.58) per $z < 0$ si trova sostituendo l'equazione (4.58) nella (4.55),

derivando poi rispetto a z l'equazione (4.57) e sostituendovi sia il risultato precedente che l'equazione (4.56). Si ottiene, quindi, un'equazione differenziale del secondo ordine per \tilde{P}_1 :

$$(1 - M_1^2) \frac{d^2 \tilde{P}_1}{dz^2} - 2\sigma \frac{M_1}{c_{s1}} \frac{d\tilde{P}_1}{dz} - \left(\frac{\sigma^2}{c_{s1}^2} + k^2 \right) \tilde{P}_1 = 0, \quad (4.59)$$

dove $M_1 = \bar{v}_1/c_{s1} > 1$, per definizione di shock. La soluzione di questa equazione è della forma

$$\tilde{P}_1(z) = A_1 e^{\alpha z} \quad \text{con} \quad A_1 = \text{costante} \quad (4.60)$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$ è la radice del polinomio associato all'equazione (4.59):

$$\alpha = -\frac{k}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \left[\frac{M_1 \sigma}{c_{s1} k \sqrt{M_1^2 - 1}} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{c_{s1}^2 k^2 (M_1^2 - 1)} - 1} \right]. \quad (4.61)$$

Le soluzioni che ci interessano sono solo quelle con $Re \alpha > 0$ perchè la perturbazione deve essere nulla lontano dal fronte dell'onda d'urto (cioè per $z = -\infty$). Per vedere se esistono soluzioni di questo tipo abbiamo riportato in figura 4.4 il grafico di $Re \alpha$ in funzione di $Re \sigma$ e $Im \sigma$.

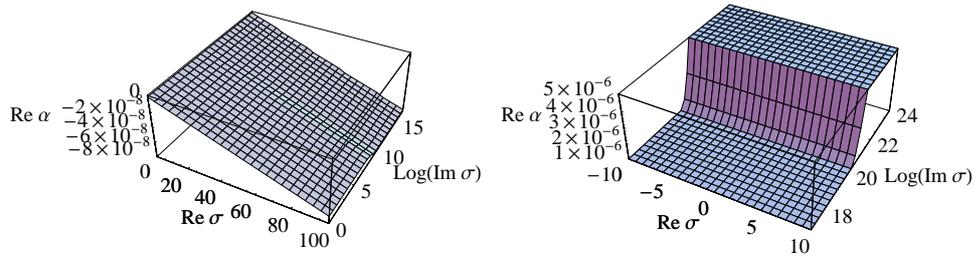


Figura 4.4: *Andamento di $Re \alpha$ in funzione di $Re \sigma$ e $Im \sigma$ dato dall'equazione (4.61) per $k = 1$. A sinistra l'espressione con il segno positivo e a destra con il segno negativo.*

Da questi andamenti si nota che $Re \alpha$ assume valori positivi solo se $Im \sigma > 10^{20}$, ma una tale frequenza dei modi di perturbazione, seppure teoricamente possibile, non è fisicamente giustificabile. Concludiamo, quindi, che con il nostro metodo d'analisi, un'onda d'urto risulta stabile.

Questo non significa necessariamente che anche la detonazione sia stabile, infatti, bisogna vedere cosa succede se si perturba la fiamma alla fine della zona di reazione. In questo caso, a differenza del caso della deflagrazione, stiamo assumendo che il fronte di combustione abbia uno spessore finito. Quindi la lunghezza d'onda massima che può avere una perturbazione non è più stimabile a priori, in quanto l'unico vincolo che possiamo porre è che l'instabilità cresca su tempi scala più lunghi del tempo di reazione, altrimenti il modello di ZND non è più applicabile. Il procedimento è analogo a quello descritto in precedenza, ma, per comodità, spostiamo l'origine del sistema di riferimento in corrispondenza della fiamma¹. In particolare, sviluppiamo ancora la perturbazione in modi normali della forma data dall'equazione (4.53), così ritroviamo le equazioni (4.55)÷(4.58) per l'evoluzione delle quantità perturbate.

4.4.1 Soluzione per $z < 0$

In questa regione, il gas è costituito da due specie nucleari (carbonio e magnesio), ma le equazioni della fluido-dinamica valgono ancora: l'unico cambiamento va effettuato nell'equazione di stato, perchè solo quest'ultima equazione dipende dal peso molecolare medio. Di conseguenza bisognerà porre particolare attenzione nella stima della temperatura, la quale non compare esplicitamente nel sistema di equazioni (4.55)÷(4.58), la cui soluzione per il gas 2 si trova in maniera analoga a quella del gas 1, quindi si ha:

$$(1 - M_2^2) \frac{d^2 \tilde{P}_2}{dz^2} - 2\sigma \frac{M_2}{c_{s2}} \frac{d\tilde{P}_2}{dz} - \left(\frac{\sigma^2}{c_{s2}^2} + k^2 \right) \tilde{P}_2 = 0, \quad (4.62)$$

dove, ora, $M_2 = \bar{v}_2/c_{s2} < 1$. Nuovamente, scriviamo la soluzione di questa equazione nella forma:

$$\tilde{P}_2(z) = A_2 e^{\beta z} \quad \text{con} \quad A_2 = \text{costante} \quad (4.63)$$

dove $\beta \in \mathbb{C}$ è la radice del polinomio associato all'equazione (4.62):

$$\beta = \frac{k}{\sqrt{1 - M_2^2}} \left[\frac{M_2 \sigma}{c_{s2} k \sqrt{1 - M_2^2}} \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{c_{s2}^2 k^2 (1 - M_2^2)}} \right]. \quad (4.64)$$

Di nuovo, siamo interessati solo le soluzioni con $Re\beta > 0$, perchè vogliamo che la perturbazione si annulli lontano dalla zona di reazione, cioè per $z = -\infty$. In questo caso, questa condizione significa che stiamo considerando

¹Ricordiamo che ciò è possibile senza cambiare il sistema di riferimento stesso perchè l'onda d'urto e la fiamma si muovono con la stessa velocità.

perturbazioni la cui ampiezza sia piccola rispetto allo spessore della zona di transizione. Per ottenere soluzioni con $Re\beta > 0$ dobbiamo considerare solo le radici con il segno positivo.

Ora consideriamo l'equazione (4.57), che diventa:

$$\bar{\rho}_2\sigma\tilde{v}_{z2} + \bar{\rho}_2\bar{v}_2\frac{d\tilde{v}_{z2}}{dz} = -A_2\beta e^{\beta z}. \quad (4.65)$$

Come nel caso dell'instabilità di un'onda di deflagrazione (vedi sezione 4.2.1), possiamo scartare la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (4.65) perchè siamo interessati a trovare se esistono soluzioni instabili ($Re\sigma > 0$). Quindi, la più generale soluzione dell'equazione (4.65) è:

$$\tilde{v}_{z2}(z) = B_2 e^{\beta z}, \quad (4.66)$$

dove B_2 è una costante tale che:

$$(\sigma + \bar{v}_2\beta)\bar{\rho}_2 B_2 = -\beta A_2. \quad (4.67)$$

Analogamente, dalle equazioni (4.56) e (4.58) si ricavano:

$$\tilde{v}_{x2}(z) = C_2 e^{\beta z}, \quad (4.68)$$

$$\tilde{\rho}_2(z) = D_2 e^{\beta z}, \quad (4.69)$$

dove C_2 e D_2 sono costanti tali che:

$$(\sigma + \bar{v}_2\beta)\bar{\rho}_2 C_2 = -ikA_2, \quad (4.70)$$

e

$$D_2 = \frac{1}{c_{s2}^2} A_2. \quad (4.71)$$

4.4.2 Soluzione per $z > 0$

Nella regione $z > 0$ il gas è completamente elaborato nuclearmente, ovvero le reazioni possono essere considerate terminate e il gas, costituito solo da magnesio, può essere considerato omogeneo. La soluzione del sistema (4.55)÷(4.58) è data ora da:

$$(1 - M_3^2)\frac{d^2\tilde{P}_3}{dz^2} - 2\sigma\frac{M_3}{c_{s3}}\frac{d\tilde{P}_3}{dz} - \left(\frac{\sigma^2}{c_{s3}^2} + k^2\right)\tilde{P}_3 = 0, \quad (4.72)$$

dove $M_3 = \bar{v}_3/c_{s3} < 1$. La soluzione di questa equazione è ancora della forma:

$$\tilde{P}_3(z) = A_3 e^{\eta z} \quad \text{con} \quad A_3 = \text{costante} \quad (4.73)$$

dove $\eta \in \mathbb{C}$ è la radice del polinomio associato all'equazione (4.72):

$$\eta = \frac{k}{\sqrt{1 - M_3^2}} \left[\frac{M_3 \sigma}{c_{s3} k \sqrt{1 - M_3^2}} \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{c_{s3}^2 k^2 (1 - M_3^2)}} \right]. \quad (4.74)$$

Tenendo presente che la perturbazione deve essere nulla lontano dal fronte dell'onda d'urto (cioè per $z = +\infty$), le soluzioni che ci interessano sono solo quelle con $Re \eta < 0$, che si hanno considerando solo il segno negativo nell'espressione di η .

L'equazione (4.57) diventa:

$$\bar{\rho}_3 \sigma \tilde{v}_{z3} + \bar{\rho}_3 \bar{v}_3 \frac{d\tilde{v}_{z3}}{dz} = -A_3 \eta e^{\eta z}. \quad (4.75)$$

La soluzione di questa equazione è:

$$\tilde{v}_{z3}(z) = B_3 e^{\eta z} + G_3 e^{-(\sigma z)/\bar{v}_3}, \quad (4.76)$$

dove B_3 e G_3 sono costanti. La condizione su B_3 deriva dall'equazione (4.75):

$$(\sigma + \bar{v}_3 \eta) \bar{\rho}_3 B_3 = -\eta A_3. \quad (4.77)$$

Analogamente, dalle equazioni (4.56) e (4.58) si ricavano:

$$\tilde{v}_{x3}(z) = C_3 e^{\eta z} + H_3 e^{-(\sigma z)/\bar{v}_3}, \quad (4.78)$$

$$\tilde{\rho}_3(z) = D_3 e^{\eta z} + L_3 e^{-(\sigma z)/\bar{v}_3}, \quad (4.79)$$

con C_3 e D_3 costanti tali che:

$$(\sigma + \bar{v}_3 \eta) \bar{\rho}_3 C_3 = -i k A_3 \quad (4.80)$$

e

$$D_3 = \frac{1}{c_{s3}^2} A_3. \quad (4.81)$$

Infine, dall'equazione (4.55) si ricava anche la condizione per le costanti H_3 e G_3 :

$$H_3 = \frac{\sigma}{i k \bar{v}_3} G_3. \quad (4.82)$$

4.4.3 Condizioni al bordo

Note le soluzioni delle equazioni della fluido-dinamica per le quantità perturbate nei gas 2 e 3, è necessario raccordare i valori di tutte le grandezze in gioco alla superficie di discontinuità, cioè per $z = 0$. Queste condizioni sono le condizioni di Rankine-Hugoniot, che linearizzate diventano:

$$\bar{\rho}_2 (\tilde{v}_{z2} + \sigma \tilde{F}) + \bar{v}_2 \tilde{\rho}_2 = \bar{\rho}_3 (\tilde{v}_{z3} + \sigma \tilde{F}) + \bar{v}_3 \tilde{\rho}_3, \quad (4.83)$$

$$\tilde{v}_{x2} - i k \bar{v}_2 \tilde{F} = \tilde{v}_{x3} - i k \bar{v}_3 \tilde{F}, \quad (4.84)$$

$$\tilde{P}_2 + 2 \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 (\tilde{v}_{z2} + \sigma \tilde{F}) + \bar{v}_2^2 \tilde{\rho}_2 = \tilde{P}_3 + 2 \bar{\rho}_3 \bar{v}_3 (\tilde{v}_{z3} + \sigma \tilde{F}) + \bar{v}_3^2 \tilde{\rho}_3, \quad (4.85)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\tilde{P}_3}{\bar{\rho}_3} - \frac{\bar{P}_3}{\bar{\rho}_3^2} \tilde{\rho}_3 - \frac{\tilde{P}_2}{\bar{\rho}_2} + \frac{\bar{P}_2}{\bar{\rho}_2^2} \tilde{\rho}_2 \right) = \bar{v}_2 (\tilde{v}_{z2} + \sigma \tilde{F}) - \bar{v}_3 (\tilde{v}_{z3} + \sigma \tilde{F}). \quad (4.86)$$

Sostituendo in queste equazioni le soluzioni ottenute in precedenza per le quantità perturbate, si ottiene:

$$\bar{\rho}_2 B_2 + \bar{v}_2 D_2 = \bar{\rho}_3 (B_3 + G_3) + \bar{v}_3 (D_3 + L_3) + \sigma \tilde{F} (\rho_3 - \rho_2), \quad (4.87)$$

$$C_2 - C_3 - H_3 = i k \tilde{F} (\bar{v}_2 - \bar{v}_3), \quad (4.88)$$

$$A_2 - A_3 + \bar{v}_2^2 D_2 - \bar{v}_3^2 (D_3 + L_3) = 2 \bar{\rho}_3 \bar{v}_3 (B_3 + G_3) - 2 \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 B_2, \quad (4.89)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{A_2}{\bar{\rho}_2} - \frac{A_3}{\bar{\rho}_3} - \frac{P_2}{\bar{\rho}_2^2} D_2 + \frac{P_3}{\bar{\rho}_3^2} (D_3 + L_3) \right] = \bar{v}_3 (B_3 + G_3) - \bar{v}_2 B_2 + \sigma \tilde{F} (\bar{v}_3 - \bar{v}_2). \quad (4.90)$$

Infine, come abbiamo ricordato nella sezione 2.6, le leggi di conservazione vanno completate con l'equazione (2.81) che determina la velocità del gas di fronte alla superficie di discontinuità rispetto alla discontinuità stessa. Avendo assunto che lo spessore della fiamma sia trascurabile possiamo considerare che la sua velocità sia una costante, assegnata dall'esterno. Quindi, come per l'analisi della deflagrazione (vedi equazione 4.26), la linearizzazione di questa condizione conduce a $\tilde{v}_{z2} = -\sigma \tilde{F}$, da cui:

$$B_2 = -\sigma \tilde{F}. \quad (4.91)$$

Le condizioni (4.67), (4.70), (4.71), (4.77), (4.80)÷(4.82) e (4.87)÷(4.91) che devono essere soddisfatte dalle costanti di integrazione delle soluzioni formano un sistema omogeneo lineare, la cui soluzione conduce alla seguente relazione di dispersione in forma implicita:

$$\frac{c_{s2}^2 \bar{\rho}_2 \sigma (\bar{v}_2 \beta + \sigma)}{\bar{v}_3 \eta + \sigma} \cdot \left[\frac{N}{D} - \frac{N'}{D'} \right] = 0, \quad (4.92)$$

dove

$$\begin{aligned} N &= \sigma^2 - k^2 \bar{v}_3^2 \\ D &= \sigma^2 \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 (\bar{v}_2 - \bar{v}_3) (\bar{v}_2 \beta + \sigma) + \\ &+ c_{s2}^2 [\sigma^2 (\bar{\rho}_3 \bar{v}_3 \beta - \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 \beta + \bar{\rho}_2 \sigma) - k^2 \bar{\rho}_3 \bar{v}_3^2 (\bar{v}_2 \beta - \bar{v}_3 \beta + \sigma)] \\ N' &= \bar{\rho}_2 \sigma [\gamma \bar{P}_3 (\sigma - \bar{v}_3 \eta) + \bar{\rho}_3 \bar{v}_3^2 (\bar{v}_3 \eta + \gamma \sigma)] + \\ &- \bar{\rho}_2 k^2 [\bar{\rho}_3 \bar{v}_3^4 (\gamma - 1) + 2\gamma \bar{P}_3 \bar{v}_3^2] \\ D' &= \gamma \sigma^2 (\bar{P}_3 \bar{\rho}_2^2 \bar{v}_2^2 - \bar{P}_2 \bar{\rho}_3^2 \bar{v}_3^2) (\bar{v}_2 \beta + \sigma) + c_{s2}^2 \bar{\rho}_2 + \\ &- k^2 \bar{\rho}_3 \bar{v}_3^2 [\bar{\rho}_3 \bar{v}_3^2 (\gamma - 1) + 2\gamma \bar{P}_3] (\bar{v}_2 \beta - \bar{v}_3 \beta + \sigma) + \\ &+ \sigma^2 \{ \bar{P}_3 \bar{\rho}_2 \gamma (\sigma - \bar{v}_2 \beta) + \bar{\rho}_3^2 \bar{v}_3^2 [\bar{v}_3 \beta (\gamma - 1) + \gamma (\bar{v}_2 \beta + \sigma)] \}. \end{aligned}$$

In questa relazione compaiono le variabili β e η che dipendono anch'esse da σ e k , come descritto dalle equazioni (4.64) e (4.74).

Dall'espressione (4.92) è immediato vedere che sono possibili soluzioni del problema sia $\sigma = 0$, corrispondente ad un flusso stazionario, sia $\sigma = -v_2 \beta$. Per questa seconda soluzione $Re \sigma$ risulta negativa perchè sia la velocità v_2 che $Re \beta$ sono positivi. Di conseguenza a questo stadio non è ancora possibile determinare se la detonazione è stabile o meno. Per semplificare la relazione di dispersione possiamo semplificare le espressioni di β e η . Infatti, se supponiamo (ipotesi che verrà giustificata a posteriori) che:

$$|\sigma|^2 \ll c_{s2}^2 k^2 \quad \text{e} \quad |\sigma|^2 \ll c_{s3}^2 k^2, \quad \text{cioè} \quad |\sigma|^2 \ll 4.9 \cdot 10^{17} \cdot k^2 \quad \text{s}^{-2} \quad (4.93)$$

allora β e η diventano lineari in k :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - M_2^2}} \cdot k \quad (4.94)$$

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{1 - M_3^2}} \cdot k. \quad (4.95)$$

In questo modo trovare le radici della relazione di dispersione (4.92) si riduce a trovare le radici di un polinomio di settimo grado. Abbiamo già discusso due di queste soluzioni, le altre sono state graficate sia in scala lineare che in scala logaritmica nelle figure 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, dalle quali si può notare che il tasso di crescita σ è sempre reale ed esistono due soluzioni aventi $\sigma > 0$ (la rimanente soluzione è risultata anch'essa nulla). Inoltre, notiamo che esiste una soluzione (σ_4) per la quale il tasso di crescita soddisfa l'assunzione (4.93) e quindi si può concludere che un'onda di detonazione è instabile a tutte le lunghezze d'onda.

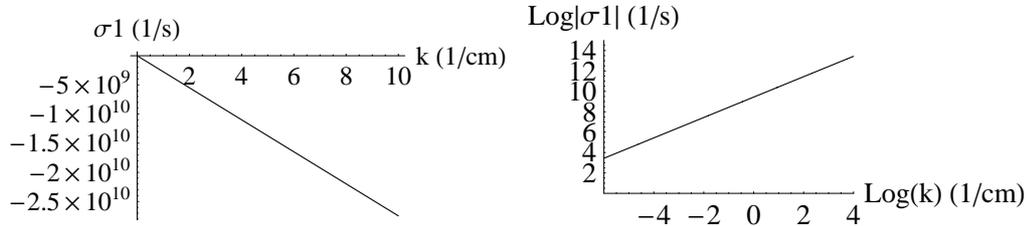


Figura 4.5: *Andamento del tasso di crescita della perturbazione in funzione del vettore d'onda k in scala lineare (a sinistra) e in scala logaritmica (a destra) per una soluzione (σ_1) della relazione di dispersione (4.92). La soluzione è stabile perchè σ è sempre negativo.*

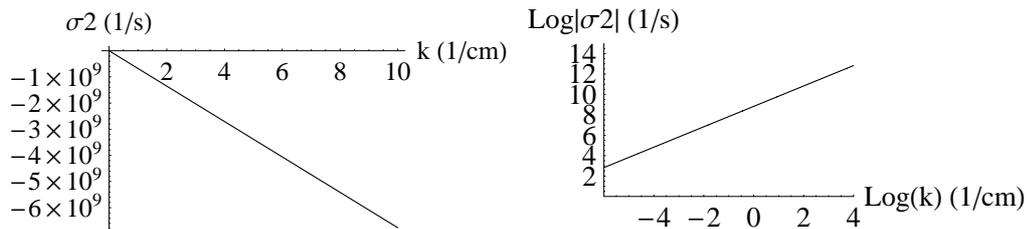


Figura 4.6: *Andamento del tasso di crescita della perturbazione in funzione del vettore d'onda k in scala lineare (a sinistra) e in scala logaritmica (a destra) per una soluzione (σ_2) della relazione di dispersione (4.92). La soluzione è stabile perchè σ è sempre negativo.*

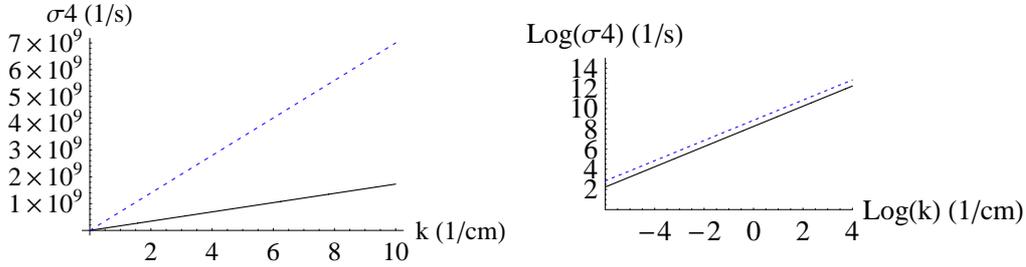


Figura 4.7: Andamento del tasso di crescita della perturbazione in funzione del vettore d'onda k in scala lineare (a sinistra) e in scala logaritmica (a destra) per una soluzione (σ_4) della relazione di dispersione (4.92). La soluzione è instabile perchè σ è sempre positivo. La linea tratteggiata riporta il limite imposto dall'approssimazione su β e η .

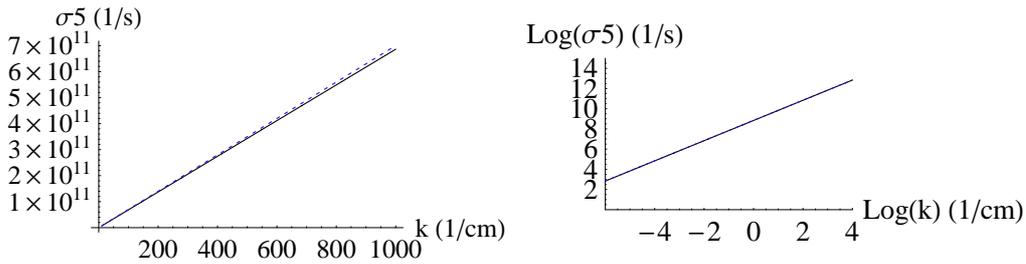


Figura 4.8: Andamento del tasso di crescita della perturbazione in funzione del vettore d'onda k in scala lineare (a sinistra) e in scala logaritmica (a destra) per una soluzione (σ_5) della relazione di dispersione (4.92). La soluzione è instabile perchè σ è sempre positivo. La linea tratteggiata riporta il limite imposto dall'approssimazione su β e η .

Dai grafici si nota che il vettore d'onda massimo che può avere una perturbazione è dell'ordine di circa 10^4 cm^{-1} , infatti per $k < 10^4 \text{ cm}^{-1}$, il tasso di crescita è dell'ordine di 10^{12} s^{-1} , ovvero inferiore al tempo scala nucleare τ_R . Questo significa che perturbazioni di piccola lunghezza d'onda (10^{-4} cm) rendono instabile il flusso su un tempo scala dell'ordine di 10^{-12} s che è molto inferiore al tempo caratteristico dell'intera esplosione (dell'ordine di qualche secondo [31]). A seguito di questa instabilità il fronte d'onda non può più essere considerato laminare. Nel caso di una detonazione l'instabilità conduce allo sviluppo di una struttura cellulare. Il modello di ZND utilizzato fin qui per la descrizione dell'onda di detonazione non è adatto per seguire

l'evoluzione del flusso in questo regime. Il nostro modello ci ha però permesso di concludere che un buon modello di Supernova Ia non può basarsi sulla propagazione laminare del fronte.

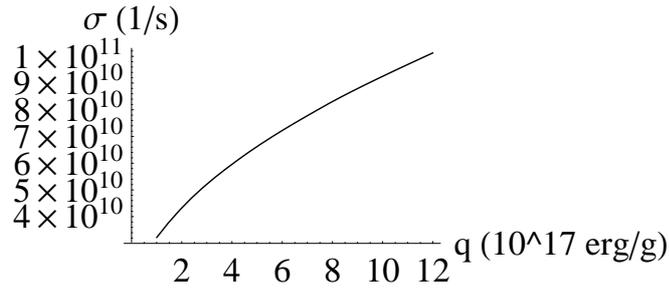


Figura 4.9: *Andamento del tasso di crescita della perturbazione in funzione del calore per unità di massa rilasciato dalle reazioni nucleari per $k = 100$.*

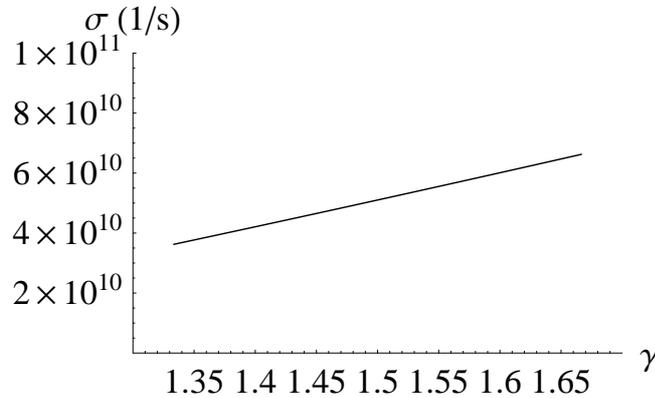


Figura 4.10: *Andamento del tasso di crescita della perturbazione in funzione dell'indice politropico γ del gas per $k = 100$.*

Infine, ricordiamo che nel nostro modello abbiamo considerato una nana bianca costituita da solo carbonio, in realtà, però, possono essere presenti anche altre specie nucleari (in particolare l'ossigeno). In questo caso, quindi, quando la temperatura è sufficientemente alta da innescare le reazioni di

fusione di questi elementi (circa $4 \cdot 10^9$ K [4] per l'ossigeno), il rilascio di energia nucleare è maggiore. Per questo motivo abbiamo riportato in figura 4.9 l'andamento del tasso di crescita (per un valore rappresentativo del vettore d'onda, $k = 100$) al variare del calore q (per unità di massa) rilasciato dalla reazione. Si può notare che, all'aumentare del calore, il tasso di crescita viene leggermente amplificato. Nel nostro modello abbiamo anche assunto che allo sviluppo dell'onda di detonazione il gas potesse essere considerato perfetto. Questo presuppone che durante la fase di deflagrazione venga eliminata la degenerazione degli elettroni. Se, invece, la degenerazione viene solo parzialmente eliminata allora l'indice politropico del gas assume un valore compreso tra $4/3$ e $5/3$. Dal grafico di figura 4.10 sulla variazione del tasso di crescita in funzione di γ (per $k = 100$) si può notare che il tempo scala con cui si sviluppa una detonazione cellulare rimane all'incirca costante al variare di γ .

Capitolo 5

Conclusioni e futuri sviluppi

In questa tesi abbiamo delineato un possibile modello per l'esplosione di una Supernova di tipo Ia, ponendo particolare attenzione nello studio delle instabilità che si possono sviluppare durante la propagazione del fronte di combustione.

Nello scenario che consideriamo, ritenuto standard in letteratura, le Supernovae di tipo Ia hanno origine dall'esplosione termonucleare di una nana bianca in un sistema binario. L'evoluzione della struttura stellare durante la fase esplosiva può essere descritta nel seguente modo (vedi figura 5.1).

- (1) **Fase di pre-Supernova.** La nana bianca accresce massa dalla stella compagna. Durante questa fase la temperatura centrale della nana bianca aumenta principalmente grazie alla contrazione gravitazionale dovuta all'accrescimento di massa, e secondariamente grazie alla produzione di energia nucleare attraverso la fusione del carbonio in magnesio. Questo aumento di temperatura è ostacolato (ma non soppresso) dalle perdite di energia per emissione di neutrini, che sono maggiori della produzione di energia per fusione, ma minori dell'aumento di energia per accrescimento. Per una nana bianca di massa iniziale pari a $M_{WD}^{(0)} = 1.28M_{\odot}$, che accresce massa ad un ritmo di $\dot{M} = 3 \cdot 10^{-8} M_{\odot}/\text{yr}$ questa fase dura circa $4 \cdot 10^5$ anni, ovvero fino a quando l'emissione di neutrini diventa trascurabile rispetto alla produzione di energia nucleare (che, ricordiamo, è più sensibile all'aumento di temperatura centrale rispetto alle perdite per neutrini).
- (2) **Combustione in regime di deflagrazione laminare.** Al termine della fase di pre-supernova si innesca l'esplosione. Quando il tempo scala della produzione di energia nucleare diventa minore del tempo

scala della convezione, le reazioni nucleari procedono sulla superficie di un fronte d'onda di deflagrazione, che inizialmente può essere considerato laminare. L'analisi della stabilità di questo fronte di combustione ha messo in luce il fatto che dopo circa 10^{-5} s le perturbazioni di piccola lunghezza d'onda (10^{-2} cm) cominciano a destabilizzare il fronte.

- (3) **Combustione in regime turbolento.** L'instabilità del fronte di combustione rende il gas stellare turbolento. Attualmente non è ancora del tutto chiaro come procedano le combustioni in questa fase, ma è certo che le dimensioni della zona di reazione aumentano e la materia combusta viene mescolata con quella incombusta. A seconda del modello che si assume per descrivere la turbolenza può succedere che la convezione sia un fenomeno rilevante [11] e quindi si formino diverse regioni di reazione che si allontanano dalla zone centrali (figura 5.1 (3a)). In altri modelli, invece, il fronte d'onda continua a propagarsi verso l'esterno con un'accelerazione che consente di trascurare gli effetti della convezione [73] (figura 5.1 (3b)).
- (4) **Combustione in regime di detonazione laminare.** Durante la fase di combustione turbolenta, comunque essa avvenga, la struttura stellare continua ad espandersi finché la densità non raggiunge un valore di circa $3 \cdot 10^7$ g/cm³. A questo punto, per essere consistenti con i dati osservativi [44] i modelli attuali assumono che si sviluppi un'onda di detonazione. Anche in questo caso non è ancora chiaro come avvenga una tale transizione, ma è possibile che l'eliminazione della degenerazione elettronica dia origine all'onda d'urto. Sia che si sviluppi al centro della struttura stellare o ad un raggio diverso da zero, la detonazione può inizialmente essere considerata laminare. In analogia con il caso della deflagrazione, dall'analisi della stabilità di quest'onda in questa tesi abbiamo ricavato che l'approssimazione di propagazione laminare è lecita solo per un tempo di circa 10^{-12} s.
- (5) **Combustione in regime di detonazione cellulare.** Dopo questo tempo il fronte diventa instabile e continua a propagarsi con una struttura cellulare fino a bruciare tutta la materia stellare. Per descrivere questa fase dell'esplosione il modello di Zeldovich-Neumann-Doering, che abbiamo adottato per ricavare il tempo scala del regime laminare, non è più adeguato, perché il fenomeno diventa almeno bi-dimensionale.

L'intera esplosione, dalla formazione dell'onda di deflagrazione a quando la detonazione raggiunge il raggio della nana bianca R_{WD} , dura un tempo dell'ordine di 2-6 s, variabile a seconda del modello che si adotta per giustificare la transizione da un regime all'altro (circa 2 s per [31], circa 6 s per [6]).

In questa tesi abbiamo in particolare considerato il regime di detonazione laminare per calcolare il tempo scala caratteristico per lo sviluppo dell'instabilità. Per fare questo abbiamo adottato un modello analitico che si poggia sulle seguenti assunzioni:

1. il fronte d'onda è unidimensionale;
2. il carbonio è l'unica specie nucleare presente inizialmente;
3. avviene una sola reazione che trasforma carbonio in magnesio;
4. si trascurano i termini non lineari nelle equazioni del moto per le quantità perturbate;
5. i coefficienti delle suddette equazioni vengono considerati costanti, cioè si assume che il flusso stazionario sia omogeneo.

Tutte queste ipotesi sono ragionevoli finchè ci limitiamo allo studio delle piccole perturbazioni del sistema. Infatti in questo caso per definizione i termini non lineari sono trascurati e per un problema lineare lo studio della stabilità può essere facilmente esteso da una a più dimensioni. Inoltre anche se durante l'esplosione avviene in realtà un complesso network di reazioni nucleari, la trasformazione del carbonio in magnesio è la prima ad innescarsi¹ e quindi la più importante ai fini della stabilità dell'onda di combustione. D'altra parte l'effetto del network di reazioni è quello di modificare il tasso di rilascio di energia nucleare, e a posteriori le nostre conclusioni sull'esistenza di instabilità a piccole scale sono robuste rispetto alla variazione dell'energia rilasciata. Un effetto più significativo potrebbe essere giocato dalle disomogeneità della struttura stellare, ma, a posteriori, anche questo effetto rimane trascurabile visti i tempi scala estremamente piccoli per il passaggio ad un regime di detonazione cellulare. L'aspetto tridimensionale del problema diventa d'altra parte fondamentale quando si vogliono studiare le fasi di propagazione non laminare del fronte di combustione.

I risultati che abbiamo ottenuto sullo sviluppo dell'instabilità sono particolarmente interessanti poichè le simulazioni numeriche che seguono l'intera esplosione di Supernovae di tipo Ia non risolvono le scale di cui ci siamo occupati, mentre simulazioni ad alta risoluzione su piccola scala sono state effettuate per combustioni in condizioni realizzabili sulla Terra, che quindi presentano condizioni iniziali molto differenti. In particolare esse hanno un numero di Lewis pari a circa 1 (mentre in una Supernova è dell'ordine di

¹grazie alla minore barriera Coulombiana, vedi sezione 3.2.

10^7), un numero di Mach più piccolo, un minore rilascio energetico e una minore energia di attivazione. È interessante che comunque anche in questi casi sia stato osservato che il fronte diventa instabile se l'energia di attivazione è abbastanza elevata [52].

Il semplice modello adottato in questa tesi per descrivere il fronte di combustione, sebbene non descriva tutte le fasi dell'esplosione, ci ha permesso di dimostrare che le piccole scale sono determinanti per lo sviluppo delle instabilità e in particolare di calcolarne il tempo scala caratteristico. Il fatto che questo tempo sia molto piccolo evidenzia come il regime turbolento o cellulare che si sviluppa come conseguenza dell'instabilità sia dominante nel determinare la composizione e la distribuzione di velocità della materia espulsa durante l'esplosione.

La nostra analisi può inoltre essere usata come guida per costruire modelli più realistici dell'esplosione, che dovranno in particolare concentrarsi su una trattazione delle instabilità a piccola scala e quindi sul ruolo giocato dalla turbolenza. In attesa quindi che l'aumento della capacità di calcolo permetta di eseguire simulazioni numeriche che coprano tutto il range di scale coinvolte nell'esplosione, gli effetti a piccole scale potranno essere considerati sotto forma di opportune ricette semi-analitiche.

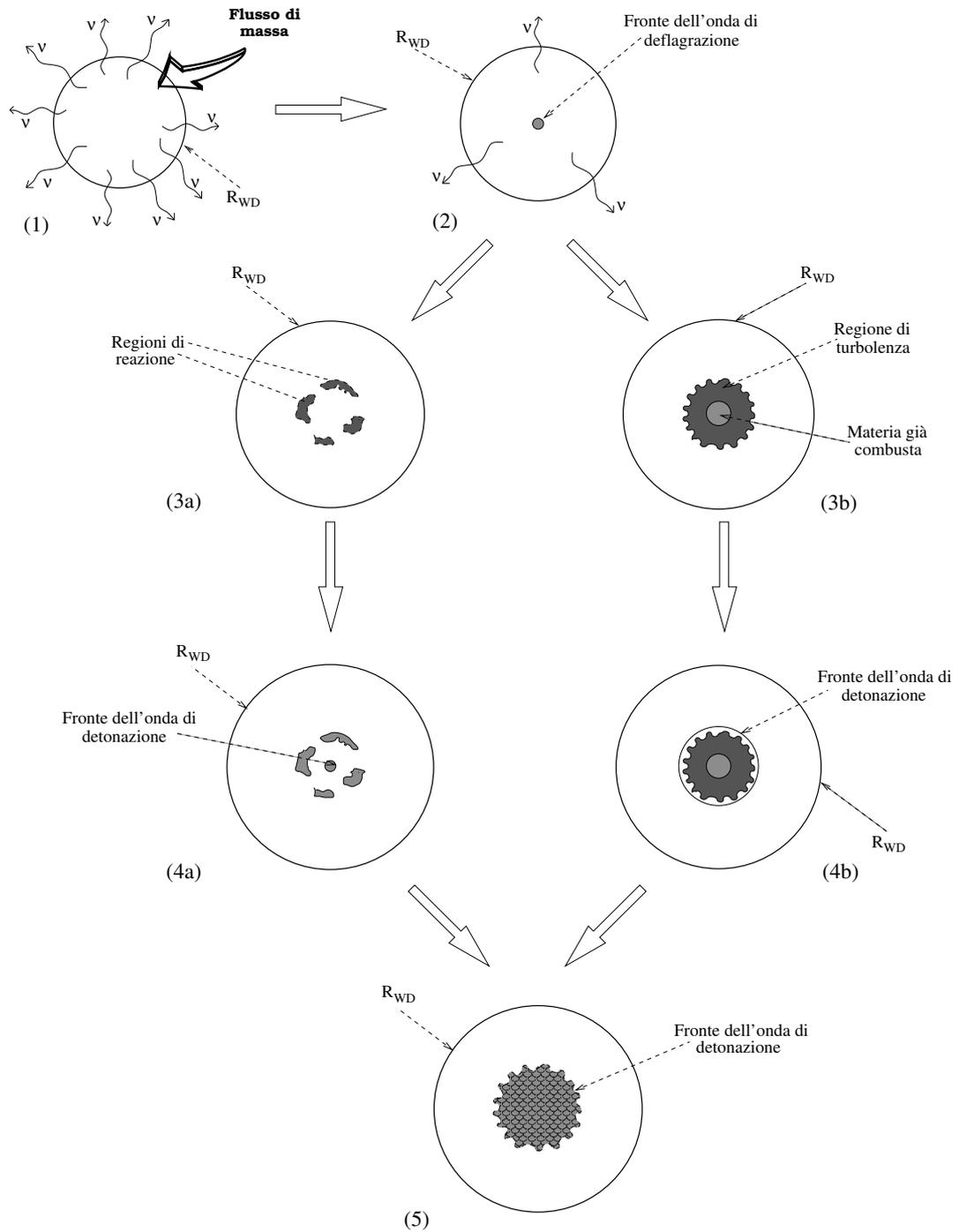


Figura 5.1: Rappresentazione schematica delle fasi di esplosione di una Supernova di tipo Ia. Le regioni colorate indicano i prodotti delle reazioni nucleari.

Appendice A

Supernovae di tipo Ia come indicatori di distanza

Alla base di molti metodi comunemente usati per misurare distanze astronomiche risiede il fatto che la maggior parte degli oggetti astrofisici (come stelle o galassie) sono luminose, cioè emettono una certa quantità di energia al secondo (fotoni in una certa banda), parte della quale può essere rivelata da Terra. Dato, infatti, che le onde elettromagnetiche prodotte sono sferiche e che dalla Terra la sorgente sottintende solo una frazione dell'angolo solido totale, noi non riveliamo l'emissione totale L^* bensì un flusso per unità di superficie L detto *luminosità apparente* (misurato quindi in $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$):

$$L \equiv \frac{L^*}{4\pi d^2}, \quad (\text{A.1})$$

dove d è la distanza tra la Terra e la sorgente. La luminosità apparente L viene, in genere, misurata secondo la cosiddetta *scala delle magnitudini*:

$$m_{\text{bol}} \equiv -2.5 \text{Log } L + \text{cost} = -2.5 \text{Log } L^* + 5 \text{Log } d + \text{cost}, \quad (\text{A.2})$$

dove il logaritmo è in base 10 e la costante è definita attraverso una o più stelle standard di opportuna assunta magnitudine. La magnitudine definita dall'equazione A.2 è detta *magnitudine bolometrica apparente* e corrisponde alla misura del flusso che dovrebbe ricevere un rivelatore ugualmente sensibile a tutte le lunghezze d'onda. Notiamo che tale magnitudine dipende sia dalla luminosità intrinseca della sorgente che dalla distanza, inoltre è chiaro che minore è la luminosità, maggiore risulta la magnitudine. La magnitudine bolometrica è, dunque, una misura del flusso totale di energia elettromagnetica inviato dalla sorgente alla Terra. Naturalmente se fosse nota la distanza d della sorgente dalla Terra e si potesse misurare la magnitudine bolometrica apparente, sarebbe immediato ricavare la luminosità intrinseca L^* della sorgente tramite la formula A.2.

Ogni strumento, però, è in grado di raccogliere i fotoni solo in una determinata banda, così, per ogni banda (per esempio, le bande U, B, V del sistema di Morgan e Johnson), si definiscono le magnitudini m_U , m_B , m_V secondo la relazione:

$$m_i = -2.5 \text{Log } L_i + \text{cost}, \quad (\text{A.3})$$

dove L_i è l'energia raccolta nella banda i . Ne segue che tra la magnitudine bolometrica e la magnitudine in una banda esiste una significativa differenza. Dato che, nella pratica, la magnitudine nel visuale, m_V , viene spesso assunta come rappresentativa della luminosità apparente della sorgente, si usa porre:

$$m_V = m_{bol} - BC, \quad (\text{A.4})$$

dove BC è detta *correzione bolometrica*, la quale risulta essere funzione della temperatura effettiva (per ulteriori approfondimenti vedi per esempio [15]).

Una misura della luminosità intrinseca della stella indipendente dalla distanza è data dalla magnitudine bolometrica *assoluta*, definita come la magnitudine bolometrica che la sorgente avrebbe se fosse ad una distanza di 10 pc dalla Terra:

$$M_{bol} \equiv -2.5 \text{Log} \left(\frac{L^*}{L_{\odot}} \right) + \text{cost}, \quad (\text{A.5})$$

dove L_{\odot} è la luminosità intrinseca del Sole e la costante (pari a 4.72) è la magnitudine bolometrica assoluta del Sole. In analogia all'equazione (A.5), è possibile definire anche la magnitudine assoluta in una banda specifica, M_U , M_B e M_V . È chiaro, però, che la conoscenza della magnitudine assoluta presuppone la conoscenza anche della distanza della sorgente dalla Terra.

Di conseguenza, dall'equazione (A.1) si deduce che, se fosse possibile conoscere a priori la luminosità intrinseca (o equivalentemente la magnitudine assoluta) di una sorgente, grazie a qualche sua caratteristica fisica, sarebbe immediato ricavarne la distanza, solamente rivelando la luminosità apparente. Nel caso delle Supernovae di tipo Ia, possiamo supporre che la luminosità intrinseca al massimo L_{max}^* sia una caratteristica universale per ragioni sia fisiche che osservative.

- Dalle osservazioni, come abbiamo già sottolineato nelle precedenti sezioni, si nota che le Supernovae Ia presentano delle curve di luce con forme molto simili tra loro.
- Fisicamente, la luminosità al massimo dipende dalla quantità di radiazione prodotta dal decadimento dei nuclei di ^{56}Ni e, quindi, dipende

dalla massa di ^{56}Ni prodotta nell'esplosione M_{Ni} . Se è vero che le tipiche Supernovae Ia sono il frutto dell'esplosione di stelle di massa simile allora anche il valore di M_{Ni} dovrebbe essere circa lo stesso e, quindi, la luminosità risulta univocamente determinata. (Secondo Branch [13] M_{Ni} dovrebbe essere circa $0.6 M_{\odot}$).

Nella pratica, si preferisce calibrare la luminosità assoluta in modo empirico e non con un modello teorico, perchè esso può essere affetto da incertezze sui meccanismi fisici coinvolti. Il valore più volte citato di $M_V \approx M_B = -19.5$ per la luminosità assoluta delle Supernovae di tipo Ia è stato, quindi, ottenuto [64] misurando la luminosità apparente di un campione di Supernovae a distanza nota, misurata tramite altri metodi, ad esempio per mezzo delle Cefeidi¹.

Infine, sottolineiamo che l'applicazione del metodo dipende da alcune assunzioni critiche, che non è detto siano sempre valide. In particolare: (1) L^* è universale; (2) tutti i fotoni ricevuti lungo la linea di vista della Supernova sono da essa emessi; (3) non c'è assorbimento; (4) l'esplosione della Supernova è a simmetria sferica. Ovviamente, se una o più di queste ipotesi sono violate, l'affidabilità del metodo diminuisce e l'errore sulla distanza aumenta. Tipicamente l'incertezza sulla distanza associata alle assunzioni sopra menzionate è dell'ordine del $10 \div 15\%$ [13].

¹In questo caso la luminosità assoluta è nota perchè è legata al periodo di pulsazione.

Appendice B

Fondamenti dell'analisi della stabilità di un flusso

Nel capitolo 2 abbiamo derivato le equazioni che governano il moto dei fluidi. In linea di principio, ad ogni problema con assegnate condizioni al contorno, può essere associata un'esatta soluzione delle equazioni della fluidodinamica. L'esistenza della soluzione, però, non fornisce alcuna informazione sulla sua stabilità, ovvero sulla possibilità che tale configurazione possa permanere invariata nel tempo. In questa appendice, pertanto, indicheremo come si affronta lo studio della stabilità di una data soluzione rispetto ad una piccola perturbazione.

Un flusso si dice *asintoticamente stabile* (o solo stabile) se piccole perturbazioni, che possono verificarsi occasionalmente, diminuiscono con il tempo. Se, invece, piccole perturbazioni nel flusso tendono ad aumentare con il tempo, allora il flusso è detto *assolutamente instabile*. Infine, se le piccole perturbazioni non diminuiscono, nè aumentano con il tempo, ma mantengono circa la stessa intensità si dice che il flusso è *neutralmente stabile*. Se la configurazione è stabile, allora esiste la possibilità che le perturbazioni diano origine a delle oscillazioni o onde.

In questa sezione descriveremo un approccio generale allo studio della stabilità di un flusso, che chiameremo *flusso di base*. Dato che una configurazione di non equilibrio è chiaramente instabile, l'analisi della stabilità è condotta su flussi di base che rappresentano una soluzione d'equilibrio delle equazioni della fluidodinamica. Questo fa sì, in particolare, che siano noti i valori di tutte le variabili caratteristiche del fluido in ogni punto x e ad ogni istante t . In generale, la soluzione in esame può essere non stazionaria, ma, per semplicità, restringeremo il nostro studio ai soli flussi di base stazionari.

Assegnato il flusso di base, ciò che vogliamo investigare è la risposta di tale flusso ad una piccola perturbazione. Tutte le possibili piccole perturbazioni possono, però, essere eccitate (più o meno intensamente) da qualche irregolarità o vibrazione presente nel flusso di base. Di conseguenza, il flusso di base persisterà solo se esso è stabile rispetto a tutte le piccole perturbazioni.

L'analisi matematica della stabilità di un flusso si basa sulla tecnica della *linearizzazione* e sullo sviluppo in *modi normali* [25]. La tecnica della linearizzazione delle equazioni perturbative consiste nel trascurare i termini non lineari delle quantità perturbate. Se le perturbazioni sono effettivamente piccole questo metodo di procedere è giustificato, perchè i termini lineari sono, in questo caso, dominanti. Se la perturbazione dà luogo ad una instabilità, le piccole perturbazioni cresceranno, entro un tempo scala caratteristico, fino al punto tale che questa approssimazione cesserà di fornire una corretta descrizione fisica. In questo caso sarà necessario abbandonare l'ipotesi di linearità e trovare esplicitamente una soluzione per il sistema non lineare di equazioni differenziali.

Il vantaggio della linearizzazione è che il principio di sovrapposizione, valido solo per equazioni lineari (e, quindi, non valido, in generale, per le equazioni fluido-dinamiche, che sono non lineari), diventa applicabile anche per le quantità perturbate. Inoltre, il principio di sovrapposizione ci permette di sviluppare ogni arbitraria perturbazione nelle sue componenti di Fourier, ovvero in modi normali. Infine, l'evoluzione di ogni modo normale può essere studiata singolarmente, perchè la linearità del problema implica che i diversi modi non interagiscono tra loro. Per poter applicare con successo questo metodo bisogna descrivere l'evoluzione della perturbazione attraverso un *set completo* di modi normali. Se chiamiamo F la perturbazione applicata al flusso di base allora possiamo sviluppare F nella seguente forma:

$$F(\mathbf{x}, t) \propto e^{\sigma t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (\text{B.1})$$

dove \mathbf{k} è il vettore d'onda della perturbazione. Le frequenze σ delle perturbazioni sono da determinare risolvendo le equazioni che governano il problema, con le appropriate condizioni al bordo.

Abbiamo, così, ottenuto un modo per riconoscere se il flusso di base è stabile oppure no. Infatti, scrivendo $\sigma \equiv \sigma_r + i\sigma_i$ possiamo dire che se $\sigma_r > 0$ per un modo, allora la corrispondente perturbazione cresce esponenzialmente con il tempo, quindi il flusso si trova in una situazione assolutamente instabile. Se, invece, $\sigma_r = 0$ il modo è detto neutralmente stabile e, in questo caso, un

ulteriore piccolo cambiamento dei parametri che caratterizzano il flusso può condurre il sistema ad un regime instabile. Infine, se $\sigma_r < 0$, la perturbazione decresce esponenzialmente con il tempo e il flusso è in una situazione stabile. Si conclude, quindi, che se $\sigma_r > 0$ per almeno un modo allora il flusso è instabile; al contrario, il flusso è stabile solo se $\sigma_r \leq 0$ per ogni modo del set completo scelto come base per lo sviluppo in serie di Fourier.

La situazione di confine tra stabilità ed instabilità, ovvero $\sigma_r = 0$, è anche detta *stato marginale*. Ci possono essere due tipi di stati marginali a seconda che $\sigma_i = 0$ o $\sigma_i \neq 0$. Se, per uno stato marginale, $\sigma_i = 0$ allora, evidentemente, anche $\sigma = 0$, quindi non c'è dipendenza temporale della soluzione perturbata, cioè il flusso perturbato è ancora stazionario. D'altra parte, se $\sigma_i \neq 0$ per uno stato marginale, allora l'instabilità genera un'oscillazione di ampiezza crescente. Un tale modo di instabilità è frequentemente chiamato *over-stabilità*, perchè le forze di richiamo sono così forti che il sistema oltrepassa la sua configurazione di equilibrio (fenomeno che, in inglese, viene detto *over-shooting*).

Notiamo, infine, che la teoria lineare fin qui applicata, ci permette solo di capire come si sviluppa una perturbazione che all'inizio è infinitesima. Naturalmente questa teoria non è più adeguata se l'ampiezza della perturbazione è troppo grande. Inoltre, questo metodo ci consente solo di determinare la stabilità di un flusso e l'eventuale tempo caratteristico con cui si sviluppa l'instabilità, ma non ci fornisce alcuna informazione su come evolve la struttura del flusso stesso o su quale sia l'ampiezza dell'eventuale instabilità. Le instabilità, inoltre, conducono il flusso ad un regime turbolento, nel quale le perturbazioni hanno raggiunto un'intensità tale che la non-linearità del fenomeno diventa significativa e la teoria lineare risulta, quindi, inadeguata per descrivere questa fase.

Ringraziamenti

Un grazie sentito al Professor Steven Shore che mi ha guidato con pazienza, chiarezza ed entusiasmo in questa avventura alla scoperta delle esplosioni di Supernovae. Grazie in particolare per avermi aiutato a sviluppare un approccio critico e ragionato ai problemi da affrontare.

Un grazie di cuore a Michele, non solo per tutti i suoi suggerimenti, ma soprattutto per avermi sopportato con grande pazienza in questi mesi, trovando sempre una parola che mi ridonasse il sorriso nei momenti di sconforto. Grazie anche per avermi regalato un portafortuna speciale, il grintoso Tigrotto da Princeton.

Grazie a Rosa Poggiani e a Scilla Degl'Innocenti, per i loro commenti e suggerimenti su una versione preliminare del manoscritto e per il sostegno che mi hanno sempre dimostrato. Grazie anche a tutti gli altri membri del gruppo di ricerca di astrofisica dell'Università di Pisa, in particolare a Nicola per aver sempre saputo risolvere tutti i problemi software e hardware che ho incontrato.

Un particolare ringraziamento va anche al Prof. Bruce Remington, al Prof. Paul Drake e a tutti i loro collaboratori per avermi permesso di assistere alla Quinta Conferenza Internazionale su "High Energy Density Laboratory Astrophysics" che si è tenuta a Tucson, Arizona, lo scorso marzo. Essa è stata per me un'occasione unica per conoscere i più recenti progressi nell'ambito degli esperimenti di laboratorio rivolti ad una maggiore comprensione dell'Universo astrofisico.

Grazie a tutti gli amici con cui ho trascorso in questi anni a Pisa tanti momenti sereni. In particolare desidero ringraziare Alberto e Alessandra, Edoardo e Roberta con la piccola Angelica, Laura e Filippo, Carla, Manuel, Manuela, Maria, Marta, Roberto e Valentina che mi hanno sempre sostenuto e incoraggiato.

Voglio poi ringraziare la mia mamma e tutta la mia famiglia (in particolare i nonni, Valeria, Paola e Alessandro) per essermi stati vicini con tanto affetto in questo periodo. Non posso dimenticarmi delle Prof. Bracci e Federico e degli altri insegnanti della Scuola Media O. Vergani, nè dei miei vicini di casa tutti sempre così gentili nei miei confronti.

Un grazie particolare anche ad Alberto, Mariella, Annalisa e Marcello e i loro amici per il sostegno spirituale e l'affetto che mi hanno sempre dimostrato.

Infine vorrei rivolgere una parola di ringraziamento a tutti i medici e infermieri che mi hanno permesso di essere qui oggi. In particolare al Dottor Papineschi, al Dottor Soligo e alla Dottoressa Radaelli, non solo per la straordinaria professionalità con cui mi hanno curato, ma soprattutto per la fiducia che sono riusciti a trasmettermi.

Bibliografia

- [1] Alastuey A. and Jancovici B. (1978). Nuclear Reaction Rate Enhancement in dense stellar matter. *Astrophys. J.* **226**, 1034
- [2] Arnett W. D. (1969). A possible Model of Supernovae: Detonation of ^{12}C . *Astrophys. Space Sci.* **5**, 180
- [3] Arnett W. D. et al. (1971). Nucleosynthesis in Supernova Models. II. The ^{12}C Detonation Model. *Astrophys. J.* **165**, 87
- [4] Arnett W. D. (1996). *Supernovae and Nucleosynthesis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- [5] Arnett W. D. and Livne E. (1994). The Delayed-Detonation Model of Type Ia Supernovae. I. The Deflagration Phase. *Astrophys. J.* **427**, 315
- [6] Arnett W. D. and Livne E. (1994). The Delayed-Detonation Model of Type Ia Supernovae. II. The Detonation Phase. *Astrophys. J.* **427**, 330
- [7] Beaudet G. and Petrosian V. and Salpeter E. E. (1967). Energy Losses due to Neutrino Processes. *Astrophys. J.* **150**, 979
- [8] Binney J. and Tremaine S. (1994). *Galactic Dynamics*, 3rd edition. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- [9] Bychkov V. V. and Liberman M. A. (1995). Hydrodynamic Instabilities of the Flame Front in White Dwarfs. *Astron. Astrophys.* **302**, 727
- [10] Bychkov V. V. and Liberman M. A. (1995). Thermal Instability and Pulsations of the Flame Front in White Dwarfs. *Astrophys. J.* **451**, 711
- [11] Bychkov V. V. and Liberman M. A. (1995). On the Theory of Type Ia Supernova Events. *Astron. Astrophys.* **304**, 440
- [12] Bychkov V. V. and Liberman M. A. (2000). Dynamics and Stability of Premixed Flames. *Phys. Rep.* **325**, 115

-
- [13] Branch D. (1998). Type Ia Supernovae and the Hubble constant. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **36**, 17
- [14] Brüggén M. and Hillebrandt W. (2001). Mixing through Shear Instabilities. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **320**, 73
- [15] Castellani V. (1985). *Astrofisica Stellare. I fondamenti fisici dell'interpretazione evolutiva di stelle e galassie*. Bologna: Zanichelli.
- [16] Caughlan G. R. and Fowler W. A. (1988). Thermonuclear Reaction Rates, V. *At. Data Nucl. Data Tables.* **40**, 283
- [17] Chandrasekhar S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford: Oxford University Press; reprinted by Dover.
- [18] Chandrasekhar S. (1939). *Introduction to the Study of Stellar Structure*. Chicago: The University of Chicago Press; reprinted by Dover.
- [19] Ciotti L. (2000). *Lecture Notes on Stellar Dynamics*. Pisa: Scuola Normale Superiore.
- [20] Clavin P. and He L. (1997). Stability and Nonlinear Dynamics of One-dimensional Overdriven Detonations in Gases. *J. Fluid Mech.* **306**, 353
- [21] Clavin P. et al. (1997). Multidimensional Stability Analysis of Overdriven Gaseous Detonations. *Phys. Fluids.* **9**, 3764
- [22] Courant R. and Friedrichs K. O. (1948). *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York: Springer.
- [23] Daou R. and Clavin P. (2003). Instability Threshold of Gaseous Detonations. *J. Fluid Mech.* **482**, 181
- [24] Di Nino D. (2003). *Instabilità fluido-dinamiche in Fenomeni di Supernovae*. Elaborato finale per laurea in Fisica. Pisa
- [25] Drazin P. G. and Reid W. H. (1983). *Hydrodynamic Stability*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [26] Fickett W. and Davis W. C. (2000). *Detonation: Theory and Experiment*, 2nd edition. New York: Dover.
- [27] Filippenko A. V. (1997). Optical Spectra of Supernovae. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **35**, 309

-
- [28] Fowler W. A., Caughlan G. R. and Zimmerman B. A. (1967). Thermonuclear Reaction Rates. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **5**, 525
- [29] Gamezo V. N. et al. (1999). Multilevel Structure of Cellular Detonations in Type Ia Supernovae. *Astrophys. J.* **512**, 827
- [30] Gamezo V. N. et al. (2003). Thermonuclear Supernovae: Simulations of the Deflagration Stage and Their Implications. *Science.* **299**, 77
- [31] Gamezo V. N. et al. (2004). Deflagrations and Detonations in Thermonuclear Supernovae. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 211102
- [32] Garcia-Senz D. and Woosley S. E. (1995). Type Ia Supernovae: The Flame is Born. *Astrophys. J.* **454**, 895
- [33] Hansen C. J. and Kawaler S. D. (1994). *Stellar Interiors*. New York: Springer.
- [34] He L. (1995). Stability Analysis of One-dimensional Gaseous Detonations. *Europhys. Lett.* **32**, 325
- [35] He L. and Lee J. H. S. (1995). The Dynamical Limit of One-dimensional Detonations. *Phys. Fluids.* **7**, 1151
- [36] Hillebrandt W. and Niemeyer J. C. (2000). Type Ia Supernova Explosion Models. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **38**, 191
- [37] Hillebrandt W. et al. (2003). The Physics and Astrophysics of Type Ia Supernova Explosions. *Mem. S.A.It.* **74**, 942
- [38] Hoeflich P. et al. (1991). Type Ia Supernovae. Theoretical Light Curves for SN1972E and SN1981B. *Astron. Astrophys.* **248**, L7
- [39] Hoeflich P. and Khokhlov A. M. (1996). Explosion Models for Type Ia Supernovae: a Comparison with Observed Light Curves, Distances, H_0 and q_0 . *Astrophys. J.* **457**, 500
- [40] Imshennik V. S. and Khokhlov A. M. (1984). Detonation-wave Structure and Nucleosynthesis in Exploding Carbon-Oxygen Cores and White Dwarfs. *Sov. Astron. Lett.* **10(4)**, 262
- [41] Imshennik V. S. et al. (1999). Is the Detonation Burning in a Degenerate Carbon-Oxygen Core of a Presupernova Possible? *Astron. Lett.* **25**, 206
- [42] Kenneth K. K. (1986). *Principles of Combustion*. New York: John Wiley & Sons.

-
- [43] Khokhlov A. M. (1989). The Structure of Detonation Waves in Supernovae. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **239**, 785
- [44] Khokhlov A. M. (1991). Delayed Detonation Model for Type Ia Supernovae. *Astron. Astrophys.* **245**, 114
- [45] Khokhlov A. M. (1991). Nucleosynthesis in Delayed Detonation Models of Type Ia Supernovae. *Astron. Astrophys.* **245**, L25
- [46] Khokhlov A. M. (1995). Propagation of Turbulent Flames in Supernovae. *Astrophys. J.* **449**, 695
- [47] Kirshner R. P. et al. (1993). SN1992A: Ultraviolet and Optical Studies Based on HST, IUE and CTIO Observations. *Astrophys. J.* **415**, 589
- [48] Landau L. D. and Lifshitz E. M. (1963). *Fluid Mechanics*, 2nd edition. Oxford: Pergamon.
- [49] Landau L. D. and Lifshitz E. M. (1999). *Fisica statistica*, 2^a edizione. Roma: Editori Riuniti.
- [50] Law C. K. and Sung C. J. (2000). Structure, Aerodynamics and Geometry of Premixed Flamelets. *Prog. Energy&Combustion Sci.* **26**, 459
- [51] Lee J. H. S. (1984). Dynamic Parameters of Gaseous Detonations. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **16**, 311
- [52] Lee H. I. and Stewart D. S. (1990). Calculation of Linear Detonation Instability: one-dimensional Instability of Plane Detonation. *J. Fluid Mech.* **216**, 103
- [53] Mazzali P. A. (2001). On the Presence of Silicon and Carbon in the Pre-Maximum Spectrum of the Type Ia SN. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **321**, 341
- [54] Munakata H. et al. (1985). Neutrino Energy Loss in Stellar Interiors. *Astrophys. J.* **296**, 197
- [55] Niemeyer J. C. and Woosley S. E. (1997). The Thermonuclear Explosion of Chandrasekhar Mass White Dwarfs. *Astrophys. J.* **475**, 740
- [56] Niemeyer J. C. and Hillebrandt W. (1995). Turbulent Nuclear Flames in Type Ia Supernovae. *Astrophys. J.* **452**, 769

- [57] Nomoto K. (1982). Accreting White Dwarf Models of Type I Supernovae. I. Presupernova Evolution and Triggering Mechanisms. *Astrophys. J.* **253**, 798
- [58] Nomoto K. et al. (1984). Accreting White Dwarf Models of Type I Supernovae. III. Carbon Deflagration Supernovae. *Astrophys. J.* **286**, 644
- [59] Paczynski B. (1972). Carbon Ignition in Degenerate Stellar Cores. *Astrophys. J.* **11**, L53
- [60] Paquette C. et al. (1986). Diffusion Coefficients for Stellar Plasmas. *Astrophys. J. Suppl.* **61**, 177
- [61] Penney W. G. et al. (1950). A Discussion on Detonation. *Proc. R. Soc. Lon. Series A, Math. Phys. Sci.* **204**, 1
- [62] Perlmutter S. et al. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift Supernovae. *Astrophys. J.* **517**, 565
- [63] Reinecke M. et al. (2002). Refined Numerical Models for Multidimensional Type Ia Supernova Simulations. *Astron. Astrophys.* **386**, 936
- [64] Saha A. et al. (1997). Cepheid Calibration of the Peak Brightness of Type Ia Supernovae. VII. *Astrophys. J.* **486**, 1
- [65] Sánchez A. L. et al. (2001). One-dimensional Overdriven Detonations with Branched-chain Kinetics. *Phys. Fluids.* **13**, 776
- [66] Schinder P. J. et al. (1987). Neutrino Emission by the Pair, Plasma and Photo Processes in the Weinberg-Salam Model. *Astrophys. J.* **313**, 531
- [67] Sharpe G. J. (1999). The Structure of Steady Detonation Waves in Type Ia Supernovae: Pathological Detonations in C-O Cores. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **310**, 1039
- [68] Shklovsky I. S. (1968). *Supernovae*. Rochester, New York: Wiley-Interscience Publication.
- [69] Shore S. N. (1992). *An Introduction to Astrophysical Hydrodynamics*. San Diego, California: Academic Press.
- [70] Shore S. N. (2003). *The Tapestry of Modern Astrophysics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

- [71] Short M. and Stewart D. S. (1998). Cellular Detonation Stability. I. A Normal-mode Linear Analysis. *J. Fluid Mech.* **368**, 229
- [72] Stein J. et al. (1999). The Role of Kinetic Energy Flux in the Convective URCA Process. *Astrophys. J.* **523**, 381
- [73] Timmes F. X. (1994). On the Acceleration of Nuclear Flame Fronts in White Dwarfs. *Astrophys. J.* **423**, L131
- [74] Timmes F. X. and Woosley S. E. (1992). The Conductive Propagation of Nuclear Flames. I. Degenerate C+O and O+Ne+Mg White Dwarfs. *Astrophys. J.* **396**, 649
- [75] Timmes F. X. et al. (2000). On the Cellular Structure of Carbon Detonations. *Astrophys. J.* **543**, 938
- [76] Tornambè A. (1990). *Fisica delle Supernovae*. Pisa: Riassunto delle lezioni del corso integrativo di Fisica Stellare tenute presso l'Università di Pisa.
- [77] Tritton D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics*. Oxford: Oxford University Press.
- [78] Wheeler J. C. et al. (1990). *Jerusalem Winter School for Theoretical Physics. Supernovae*. Volume VI. Singapore: World Scientific Publishing.
- [79] Wheeler J. C. et al. (1995). Stirling's Supernovae: a Survey of the Field. *Phys. Rep.* **256**, 211
- [80] Williams F. A. (1985). *Combustion Theory*, 2nd edition. Boulder, Colorado: Westview Press.
- [81] Winter M. and Andrew J. (2000). *Foundations of Inorganic Chemistry*. Oxford: Oxford University Press.
- [82] Woosley S. E. and Weaver T. A. (1986). The Physics of Supernova Explosions. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **24**, 205
- [83] Woosley S. E. and Phillips M. M. (1988). Supernova 1987A. *Science*. **240**, 750
- [84] Woosley S. E. et al. (2004). Carbon Ignition in Type Ia Supernovae: an Analytic Model. *Astrophys. J.* **607**, 921

- [85] Zel'dovich Ya. B. and Raizer Yu. P. (1966). *Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena*. Volume I. New York: Academic Press.
- [86] Zhang Q. (1998). Analytical Solution of Layer-Type Approach to Unstable Interfacial Fluid Mixing. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3391