

Università di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in
Scienze Fisiche e Astrofisiche

Anno Accademico 2003-2004

Tesi di Laurea Specialistica

Dinamica del
gruppo di rinormalizzazione
dei modelli di Potts gerarchici

Candidato:
Jacopo De Simoi

Relatore:
Prof. Stefano Marmi

Ringraziamenti

Desidero che le prime parole di questo lavoro siano rivolte alle persone che in questi anni hanno costellato la mia vita pisana con la loro presenza, la loro amicizia e la loro collaborazione. E così vorrei che su questo palco entrino, accolti da applausi scroscianti, uno ad uno i protagonisti della mia avventura.. Sipario!

Non posso che cominciare con la persona che mi è stata accanto durante tutta la mia avventura qui alla Scuola Normale Superiore di Pisa, mitico crocevia della cultura Italiana. Ti ringrazio di cuore, Miriam, per tutte le parole che hai saputo trovare, per ogni momento che mi hai saputo regalare, grazie. Grazie di tutti i viaggi e di tutte le follie in cui mi hai fatto mettere piede. Grazie per la Forza, grazie per la Tenacia, grazie per la Passione.

Ed ecco entrare in scena la seconda persona che voglio ringraziare, il relatore di questa tesi, la quale ormai vive seppure in molteplici stadi da quasi due anni e mezzo, nata come Colloquio del terzo anno e estesa fino a questo punto grazie all'entusiasmo e alla curiosità tipiche del mio prezioso interlocutore e mentore. E ora è la volta dei miei compagni d'anno, che vorrei salutare e ringraziare uno ad uno e in nessun ordine particolare: *l'irascibile* Andrea, collega di mille discussioni; *l'iracondo* Beppe, che finalmente ha una spalla tutta nuova; il *buon* Damiano, compagno di tante serate a suonare e cantare; il *posato* Umberto, da qualche tempo murato vivo in laboratorio; *Last Minute* Luca che già sogna Rio, ma ancora non ha il visto, la *dolce* Lisi, che è riuscita addirittura ad addomesticare il Capo; *HoLaSoluzione* Carlo, sempre in grado di farti tornare con i piedi per terra ($e^{i\pi\eta\eta^\dagger}$), *Calamity* Pietro, il matematico più pericoloso del West, *l'elettico* Enrico, compagno di didascaliche chiacchierate e di lunghi viaggi in treno, il *baciato dalla sorte* Bianca e la inseparabile Giulia.

Non posso certo dimenticare i *Fisici honoris causa*: Fabio (*Private communication*) nostro matematico di fiducia, e Liliana, che allietava il tè delle cinque con le sue sagge parole.

Tocca entrare ai matematici: Gianluca, Antonella, Andrea, Maurizio, Dario, Alberto che ancora sono in Italia e Valentino, Giulio, Enrico e Luca che sono a studiare negli States; a voi un grande grazie per tutte le volte che vi ho chiesto aiuto, per tutte le serate diverse in vostra compagnia, e per le vacanze in Croazia!

Ai miei amici rimasti a Treviso, Tito e Filippo, che ogni tanto mi reclamano per vari motivi, un grazie per avermi mantenuto vicino! Ai miei genitori e a mio fratello ed Elisa va un grande grazie per aver sopportato tutte le mie strambe-

rie di questi anni.

E come in tutte le opere, alla fine si ringraziano gli orchestrali.. e allora un grazie doveroso e sincero va ai miei amici dell' Orchestra Giovanile Universitaria di Pisa, perché grazie a voi ho continuato a suonare per tutto questo tempo, in particolare a Francesco che ci porta avanti con il suo inesauribile entusiasmo e a Luisa e Paolo che ci hanno trascinato con bravura e modestia.

Un applauso.

Sipario.

Per quanto riguarda i ringraziamenti di carattere professionale, non posso certo esimermi dal ringraziare di cuore Sergio Caracciolo per averci pazientemente ascoltato e sollecitato con questioni e domande e Charles Favre, che con incredibile cortesia ha risposto rapidamente ed esaurientemente a tutte le domande che gli abbiamo posto. Grazie anche ad Andrea Gambassi, che mi ha stupito con una inattesa quanto gradita telefonata e mi ha chiarito le idee su molti aspetti che erano piuttosto oscuri.

Indice

Introduzione	VII
1 Modelli gerarchici	1
1.1 Definizione dei sistemi di nostro interesse	1
1.2 Decorazioni	3
1.3 I modelli gerarchici	6
1.4 Funzione di partizione	7
1.4.1 Proprietà sotto decorazione	8
1.5 Spazi proiettivi	10
1.6 Alcune proprietà delle funzioni di partizione	13
2 Variabili Dinamiche e variabili Fisiche	15
2.1 Variabili Dinamiche	15
2.1.1 Simmetrie di posizione	15
2.1.2 Simmetrie di stato	17
2.2 Variabili fisiche	20
2.2.1 Immersione nello spazio dinamico	21
2.3 Una osservazione sul campo magnetico esterno	22
3 Alcuni esempi di modelli gerarchici	23
3.1 Reticolo a diamante	23
3.2 Ragnatela	25
3.3 Triangolo di Sierpinski	26
3.4 Tubi	30
3.5 Grafo di Cayley del gruppo libero a due generatori	32
4 Rinormalizzazione e Dinamica	35
4.1 Argomenti di teoria del potenziale e del pluripotenziale	35
4.1.1 Teoria del potenziale	35
4.1.2 Teoria del pluripotenziale	37
4.1.3 Correnti di grado $(1, 1)$ su \mathbb{P}^k	41
4.2 Applicazioni razionali sullo spazio proiettivo	42
4.3 La connessione con l'energia libera	47
4.4 Decorazioni non omogenee e stabilità algebrica	49
4.5 Funzione di Green	51
4.6 Conclusioni	52

5 Risultati numerici	55
5.1 Introduzione	55
5.2 Reticolo a diamante	58
5.3 Ragnatela	68
5.4 Triangolo di Sierpinski	74
5.5 Tubo triangolare	77
Codice sorgente dei programmi usati nella tesi	79

Introduzione

In questo lavoro di tesi vengono studiati i fenomeni critici di una classe molto speciale di modelli di Potts. Si tratta di modelli basati su reticoli per cui è possibile definire una procedura di *coarse-graining* che li lascia invariati. Un *coarse-graining* è una operazione che rimuove dettagli dal sistema in maniera sistematica, in modo da ottenere un sistema più semplice, con meno gradi di libertà; a questo punto si vuole associare al nuovo sistema una interazione che dia luogo alla stessa Fisica dell'interazione originale sul sistema originale. Questa procedura si chiama *rinormalizzazione*. In linea generale non è possibile scrivere in maniera esatta la mappa che porta dall'interazione originale alla interazione del nuovo sistema, dal momento che tipicamente la procedura di rinormalizzazione produce nuovi tipi di interazioni, e questo proliferare di nuovi parametri non è facilmente controllabile¹.

Per i modelli gerarchici però la situazione cambia radicalmente: dal momento che esiste un *coarse-graining* che lascia il reticolo invariato, la procedura di rinormalizzazione **non** produce nuovi tipi di interazioni tra le particelle, e quindi la mappa di rinormalizzazione si limita a cambiare le costanti di accoppiamento relative alle interazioni in gioco². Lo studio della dinamica delle iterazioni della mappa di rinormalizzazione ha portato alla teoria del *gruppo di rinormalizzazione* ([Kad][Wil][Fis]): secondo questo approccio, i valori dei parametri delle interazioni per cui si può avere una transizione di fase sono i punti su cui la dinamica del gruppo³ è instabile (punti fissi repulsivi o loro preimmagini). Esiste un altro approccio con cui si possono studiare le transizioni di fase, ed è quello proposto da Lee e Yang [YL1] [YL2]. Nonostante la funzione di partizione di qualunque sistema finito non possa annullarsi per valori fisici dei parametri, quando facciamo il limite per sistemi infiniti (*limite termodinamico*) è possibile che l'insieme degli zeri si accumuli sulla regione fisica. Lee e Yang stabilirono che l'insieme dei punti nella regione fisica dei parametri su cui si accumulano gli zeri della funzione di partizione è effettivamente l'insie-

¹Questo fenomeno si presenta anche in Teoria dei Campi, quando abbiamo a che fare con *teorie non rinormalizzabili*.

²In Teoria dei Campi si dice che la teoria è rinormalizzabile

³Da Fisher ([Fis]): *È utile porre l'accento su cosa il «Gruppo di rinormalizzazione» non sia! Nonostante in molte applicazioni il gruppo di rinormalizzazione utilizzato possa essere invertibile, e quindi costituisca un gruppo continuo o discreto di trasformazioni, in generale è solo un semigrupp. In altre parole un gruppo di rinormalizzazione non è necessariamente invertibile e, quindi, non si può seguire all'indietro senza ambiguità: in breve non è un «gruppo».*

Osserviamo inoltre come il fatto che la mappa non sia 1 a 1 costituisce tutt'altro che un problema; è anzi uno dei principali responsabili del successo della teoria: infatti se *molte* sistemi sono mandati in *un* sistema, studiando le proprietà di quell'unico sistema si ottengono le proprietà dei molti di cui il primo è l'immagine sotto la mappa.

me dei punti dove l'energia libera, e dunque tutte le quantità termodinamiche, possono presentare comportamento non analitico. Attraversando questi punti il sistema termodinamico può dunque manifestare un comportamento «non analitico», fenomeno che viene comunemente considerato una *transizione di fase*.

Nel 1983 Derrida, De Seze, Itzykson ([DSI]) osservarono, in un caso particolare di modello gerarchico⁴, che la mappa di rinormalizzazione si può scrivere, con una naturale scelta di coordinate, come una mappa razionale dallo spazio dei numeri complessi \mathbb{C} in sé. Grazie alla definizione esplicita della mappa, è possibile ottenere una relazione per la funzione di partizione che permette di trovare la distribuzione degli zeri della funzione di partizione nel limite termodinamico. Curiosamente, nello stesso anno, Lyubich [Ly] dimostrò un risultato molto generale (4.2.12) che nel caso di nostro interesse, salvo casi eccezionali, stabilisce che la distribuzione degli zeri è definita esclusivamente dalla dinamica della mappa e ha supporto sul suo insieme di instabilità, noto come insieme di Julia; in quest'ottica l'intuizione di [DSI] ha stabilito un preciso punto di contatto tra i due approcci. Lo studio dell'iterazione delle mappe razionali su \mathbb{C} è argomento di ricerca da più di ottant'anni, rinvigorito negli anni '80 grazie all'uso dei calcolatori, che danno la possibilità di eseguire degli esperimenti numerici, assai utili per chiarire le idee sull'argomento. In questa tesi si vuole mettere in luce una corrispondenza più generale tra la mappa di rinormalizzazione di modelli gerarchici e mappe razionali su spazi proiettivi complessi. Lo studio dell'iterazione di tali mappe è un argomento di ricerca piuttosto nuovo e su cui recentemente cominciano essere dimostrati i primi risultati di una certa importanza. In dimensione uno, infatti, molte dimostrazioni si basano sul *Teorema di uniformizzazione di Riemann* che in dimensione più alta non vale, e di cui non esiste uno stretto analogo. È dunque necessario, in un certo senso, ricominciare dall'inizio con un metodo alternativo; il metodo che oggi pare più promettente per lo studio di queste mappe è una estensione a più dimensioni della teoria del potenziale (cfr. 4.1.1) chiamata teoria del pluripotenziale. Con questo approccio sono stati dimostrati tutti i fatti attualmente a nostra disposizione sull'iterazione di mappe razionali su spazi proiettivi. Questi risultati sono, in alcuni casi, utili per trovare altri punti di contatto tra l'approccio di Lee e Yang e quello del gruppo di rinormalizzazione, ma il caso generale si basa ancora su asserzioni che attualmente sono solo allo stato di congettura.

Nel dettaglio il piano del lavoro e il seguente: nel capitolo 1 sono definiti i sistemi gerarchici e viene dimostrata la proprietà fondamentale per cui la mappa di rinormalizzazione di questi modelli si scrive *esattamente* ed è una mappa razionale su spazi proiettivi complessi. Nel capitolo 2 vengono presentate le variabili naturali nelle quali studiare l'iterazione della mappa di rinormalizzazione nel caso in cui siano presenti alcune simmetrie fisicamente rilevanti, sia del reticolo (analoghe alle proprietà di parità dei reticoli di Bravais) sia dell'interazione (come ad esempio il caso di campo magnetico nullo); tali variabili sono i parametri di accoppiamento della più generale interazione che è possibile attribuire al sistema in studio. Le variabili tipiche nelle quali comunemente si studia il comportamento critico di un sistema sono però altre, denominate variabili fisiche, che si immergono in maniera naturale nelle variabili dinami-

⁴Il reticolo a diamante (cfr. 3.1)

che. Nel capitolo 3 vengono proposti alcuni esempi di modelli gerarchici, il cui studio (numerico) sarà svolto successivamente nel capitolo 5, nel quale si compiono degli esperimenti numerici utilizzando programmi originali sviluppati in linguaggio C++. Tali esperimenti risultano estremamente interessanti come informazioni di base necessarie per cercare di dimostrare i comportamenti osservati. Il capitolo 4 è il fulcro matematico del lavoro; in questo capitolo vengono introdotti i fatti di base della dinamica complessa in più variabili e vengono mostrate le attuali ipotesi sulla base delle quali è possibile stabilire con precisione la corrispondenza che vogliamo mettere in evidenza.

Capitolo 1

Modelli gerarchici

1.1 Definizione dei sistemi di nostro interesse

Considerare sistemi termodinamici per i quali l'interazione è a coppie di primi vicini porta naturalmente a studiare reticoli descritti con il formalismo dei grafi. In questo lavoro di tesi è tuttavia necessario introdurre degli oggetti più generali, gli *ipergrafi*, su cui è possibile costruire una teoria più vasta mantenendo la possibilità di considerare le interazioni a coppie. Prima di introdurre le definizioni per questi oggetti più generali, è opportuno presentare definizioni analoghe per i grafi, in maniera tale da fissare le notazioni in un caso semplice e già noto.

Definizione 1.1.1 *Un grafo (orientato) è una coppia di insiemi $\Gamma = (V, E)$ tali che:*

- V è finito ed è detto insieme dei vertici;
- E è finito ed è un insieme di coppie ordinate di elementi di V ; E è detto insieme dei legami.

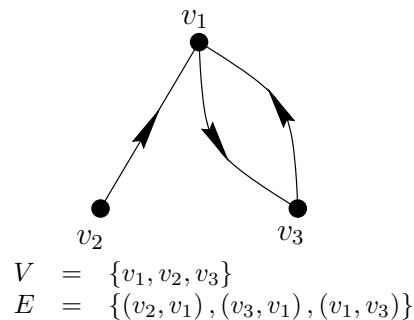


Figura 1.1: Esempio di grafo orientato.

In questo lavoro saranno studiati dei sistemi su *ipergrafi*, per i quali cambia la definizione di legame, permettendo a questi di collegare simultaneamente più di due vertici. È opportuno definire due categorie di ipergrafi particolarmente importanti per i nostri scopi.

Definizione 1.1.2 Un ipergrafo omogeneo è una coppia di insiemi $\Gamma = (V, E)$ tali che:

- V è finito ed è detto insieme dei vertici;
- E è finito ed è un insieme di n -uple ordinate di elementi di V ; E è detto insieme dei legami; n è detto ordine dell'ipergrafo.

In letteratura (cfr. per esempio [Ber]) questi tipi di ipergrafi sono noti come ipergrafi n -uniformi, tuttavia la trattazione che segue rende più significativo definirli omogenei.

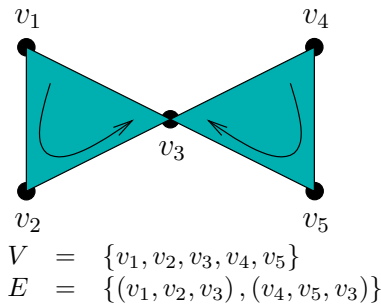


Figura 1.2: Esempio di ipergrafo di ordine $n = 3$.

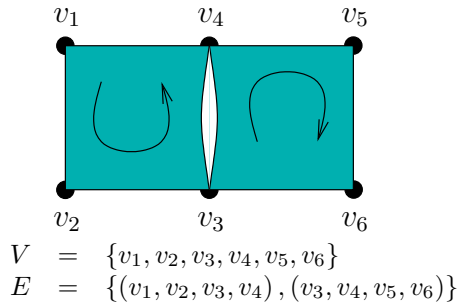


Figura 1.3: Esempio di ipergrafo di ordine $n = 4$.

Definizione 1.1.3 Un ipergrafo non omogeneo è una collezione di insiemi $\Gamma = (V, E_1, E_2, \dots, E_p)$ tali che:

- V è finito ed è detto insieme dei vertici;
- Ciascun E_i è finito ed è un insieme di n_i -uple ordinate di elementi di V ; gli E_i sono detti insiemi dei legami; la p -upla (n_1, n_2, \dots, n_p) è detta ordine dell'ipergrafo.

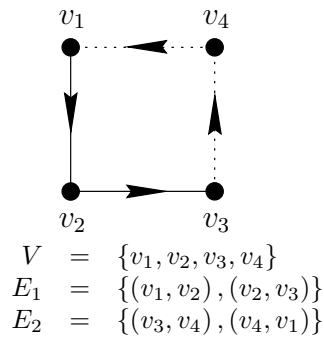


Figura 1.4: Esempio di ipergrafo di ordine $n = (2, 2)$.

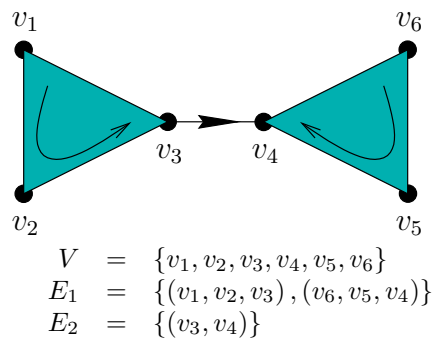


Figura 1.5: Esempio di ipergrafo di ordine $n = (3, 2)$.

1.2 Decorazioni

I reticoli a cui si associano sistemi termodinamici sono formati da un numero infinito di vertici e di legami. L'oggetto di studio di questa tesi è la classe dei reticoli che si possono costruire tramite l'iterazione di una procedura di *decorazione* su un ipergrafo di partenza assegnato. Decorare un ipergrafo permette di aggiungere sistematicamente spin e legami al grafo di partenza in modo che sia definibile con precisione una operazione inversa, di semplificazione, o *coarse-graining*.

In questa sezione si descriverà questo procedimento in modo preciso ed approfondito.

Definizione 1.2.1 Una decorazione omogenea di ordine n è un ipergrafo omogeneo di ordine n con almeno n vertici a cui si associa una n -upla ordinata di elementi di V , le cui componenti sono note come vertici esterni. I vertici che non sono esterni si dicono naturalmente vertici interni.

Definizione 1.2.2 Una decorazione non omogenea di ordine n è un ipergrafo non omogeneo con almeno n vertici a cui si associa una n -upla ordinata di elementi di V , le cui componenti sono note come vertici esterni. I vertici che non sono esterni si dicono vertici interni.

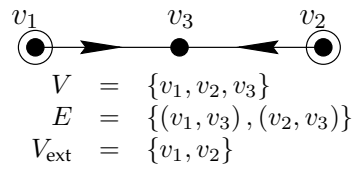


Figura 1.6: Esempio di decorazione omogenea di ordine $n = 2$.

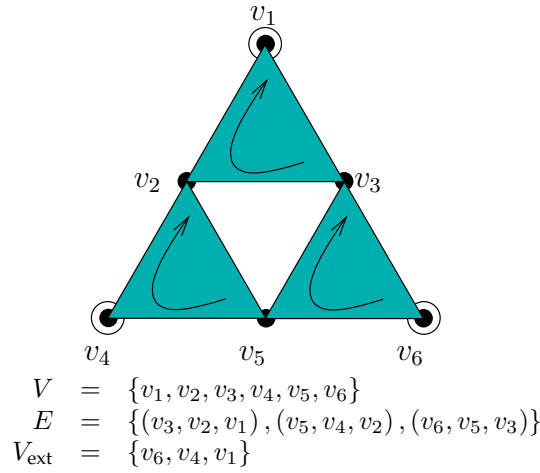


Figura 1.7: Esempio di decorazione omogenea di ordine $n = 3$.

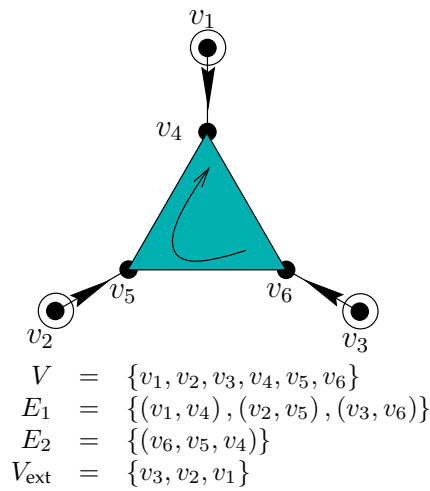


Figura 1.8: Esempio di decorazione non omogenea di ordine $n = 3$.

Definizione 1.2.3 (Prodotto di due decorazioni) Date due decorazioni \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 del medesimo ordine, si definisce decorazione prodotto $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ la decorazione che si ottiene unendo i rispettivi insiemi dei vertici e dei legami, modulo l'identificazione dei

vertici esterni.

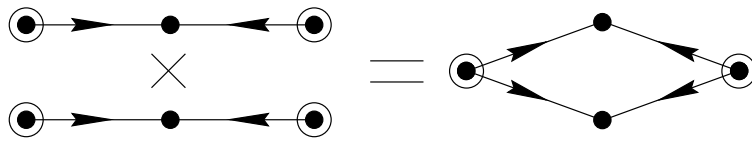


Figura 1.9: Esempio di prodotto di due decorazioni omogenee di ordine $n = 2$.

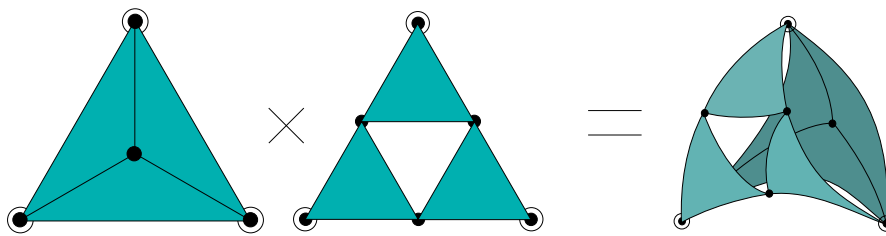


Figura 1.10: Esempio di prodotto di due decorazioni omogenee di ordine $n = 3$.

Definizione 1.2.4 Applicare a un ipergrafo una decorazione \mathcal{D} significa scegliere un tipo di legami e sostituire a ognuno di questi la decorazione, identificando ogni vertice della n -upla del legame originale con il corrispondente vertice esterno della decorazione.

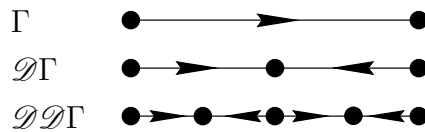


Figura 1.11: Esempio di applicazione della decorazione di figura 1.6; l'ipergrafo ottenuto iterando infinite volte la procedura è una catena unidimensionale infinita ad estremi aperti.

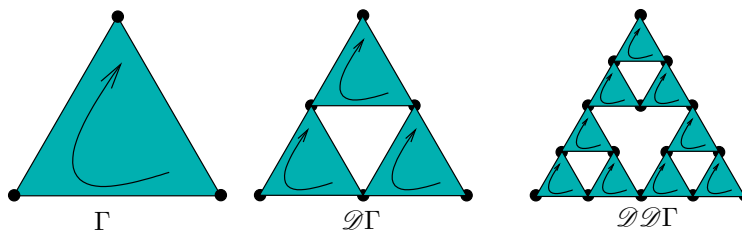


Figura 1.12: Esempio di applicazione della decorazione di figura 1.7; l'ipergrafo ottenuto nel limite di infinite iterazioni è noto come *Triangolo di Sierpinski*.

Definizione 1.2.5 (Composizione di due decorazioni) Siano \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 due decorazioni, rispettivamente di ordine n_1 e n_2 , tali che in \mathcal{D}_2 sia possibile scegliere un tipo di legame di ordine n_1 . Si definisce decorazione composta $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$ oppure $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ la decorazione di ordine n_2 che si ottiene applicando \mathcal{D}_1 ai legami del tipo scelto di \mathcal{D}_2 vista come ipergrafo. I vertici esterni di $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ rimangono naturalmente quelli di \mathcal{D}_2 .

Osservazione 1.2.6 La composizione di decorazioni è naturalmente una operazione associativa, ma non commutativa; in generale infatti $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 \neq \mathcal{D}_2\mathcal{D}_1$.

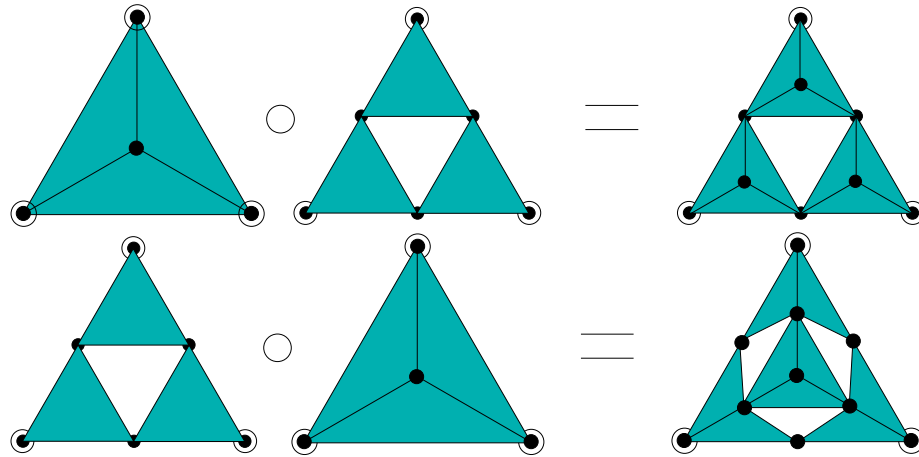


Figura 1.13: Esempio delle due possibili composizioni di due decorazioni di ordine $n = 3$.

I sistemi termodinamici che studieremo saranno sempre basati su reticoli che si ottengono iterando infinite volte l'applicazione di una assegnata decorazione a un determinato ipergrafo di partenza.

Definizione 1.2.7 Definiamo questi reticoli reticoli gerarchici.

1.3 I modelli gerarchici

I modelli gerarchici si costruiscono considerando modelli di Potts su reticoli gerarchici. Studieremo, come solitamente si fa, esclusivamente Hamiltoniane che dipendono *localmente* dagli stati degli spin; nella fattispecie si considerano quelle che si ottengono sommando contributi locali, chiamati *interazioni*, che dipendono solo da un numero finito di particelle. L'interazione tra gli spin che studieremo è la naturale generalizzazione di quella a coppie di primi vicini e sarà basata esclusivamente sulle configurazioni dei legami dell'ipergrafo, e quindi non necessariamente coinvolge solo una coppia di spin. Non teniamo esplicitamente in considerazione possibili interazioni che dipendano dall'insieme dei vertici, nonostante sia comunque possibile considerare legami degeneri con $n = 1$ (cfr. sezione 2.3).

Fissato con q il numero di stati del modello, si definisce $S = \{1, 2, \dots, q\}$ l'insieme degli stati che ogni spin può assumere. Una *configurazione* σ è quindi

una mappa da V in S e dunque è un elemento di S^V .

A ciascun tipo di legame si associa una *energia per configurazione*, ovvero una mappa dallo spazio delle configurazioni degli spin che il legame connette in \mathbb{C} . Per un legame di ordine n , lo spazio delle configurazioni è dunque S^n e ha quindi cardinalità q^n . L'energia per un'assegnata configurazione di un legame si indica con $J_{s_1 s_2 \dots s_n}$, dove $s_i \in S$, o con J_I ciascuno dei quali dove I è un n -multiindice che può correre da 1 a q ; si tratta quindi di un elemento dello spazio

$$\mathbb{C}^{S^n} = \mathbb{C}^{q^n} = \mathbb{C}^N.$$

L'energia della configurazione di un sistema sarà la somma su tutti i tipi di legame della somma su ciascun legame del tipo scelto dell'interazione relativa al legame considerato.

Per un ipergrafo omogeneo quindi si ha:

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in E} J_{\sigma(v_1)\sigma(v_2)\dots\sigma(v_n)}; \quad (1.1)$$

mentre per un ipergrafo non omogeneo:

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{j=1}^p \sum_{(v_1, v_2, \dots, v_{n_j}) \in E_j} J_{\sigma(v_1)\sigma(v_2)\dots\sigma(v_{n_j})}^j. \quad (1.2)$$

1.4 Funzione di partizione

Definizione 1.4.1 Si definisce la funzione di partizione per un sistema su un grafo Γ :

$$\mathcal{Z}_\Gamma = \sum_{\sigma \in S^V} \exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma)),$$

dove β è il parametro di temperatura che fisicamente corrisponde a $1/kT$, ove k è la costante di Boltzmann.

Definiamo le variabili associate ai pesi di Boltzmann:

$$z_K^j \doteq \exp(-\beta J_K^j);$$

Proposizione 1.4.2 Il termine $\exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma))$, espresso in queste nuove variabili, risulta un monomio di grado pari al numero di **tutti** i legami dell'ipergrafo; il grado relativo ad una scelta di $\{z^j\}$ è pure fissato, ed è pari al numero di legami del tipo scelto.

Dim: Consideriamo per cominciare il caso in cui si stia trattando un ipergrafo omogeneo e dunque sia presente un solo tipo di legami.

L'Hamiltoniana del sistema sarà della forma di equazione 1.1. Passando all'esponenziale i termini della somma diventano fattori di un prodotto; quindi il termine $\exp(-\beta \mathcal{H})$ sarà un monomio di grado pari al numero di legami dell'ipergrafo.

Nel caso generale di ipergrafo non uniforme, è possibile proporre la stessa dimostrazione separatamente per ciascun tipo di legame (cfr. eq. 1.2). Il termine

$\exp(-\beta\mathcal{H})$ sarà dunque il prodotto su tutti i tipi j di legame di un monomio nelle variabili $\{z^j\}$ di grado pari al numero di legami di tipo j . ■

Definizione 1.4.3 \mathcal{Z}_Γ è un polinomio omogeneo e separatamente omogeneo.

Per quanto riguarda le decorazioni, avendo a disposizione i vertici esterni, è possibile definire le funzioni di partizione condizionate dagli stati dei vertici esterni.

Definizione 1.4.4 Fissiamo una n -upla di stati $\{s_i\}$ e attribuiamo al vertice esterno j -esimo lo stato s_j . Si definiscono funzioni di partizione ridotte di una decorazione:

$$\mathcal{Z}_{s_1 s_2 \dots s_n}(\mathcal{D}) = \sum_{\substack{\sigma \in S^V \text{ t.c.} \\ \sigma(v_i) = s_i \forall v_i \text{ ext}}} \exp(-\beta\mathcal{H}(\sigma))$$

Si tratta ancora una volta di polinomi omogenei e separatamente omogenei e per cui il grado non dipende dalla scelta degli stati $s_1 s_2 \dots s_n$.

Definizione 1.4.5 Sia \mathcal{D} una decorazione di ordine n e \mathbb{C}^N lo spazio in cui abitano le variabili $\{z_{I_j}^j\}$, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $I_j \in S^{n_j}$. Definiamo mappa di rinormalizzazione $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ la mappa da \mathbb{C}^N in sé che ha per componenti le funzioni di partizione ridotte della decorazione \mathcal{D} relative al multiindice opportuno.

1.4.1 Proprietà sotto decorazione

Consideriamo un grafo omogeneo Γ e una decorazione omogenea \mathcal{D} dello stesso ordine di Γ . Ci chiediamo che rapporto esista tra \mathcal{Z}_Γ e $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}\Gamma}$.

Proposizione 1.4.6 (Rinormalizzazione)

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{D}\Gamma}(\{z_I\}) = \mathcal{Z}_\Gamma(\{\mathcal{Z}_I(\{z_J\})\}).$$

ovvero

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{D}\Gamma}(z) = \mathcal{Z}_\Gamma \circ \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(z) \quad \text{con } z = (z_I)_{I \in S^n}$$

Dim: Scriviamo esplicitamente la funzione di partizione di Γ :

$$\mathcal{Z}_\Gamma = \sum_{\sigma \in S^V} \exp(-\beta\mathcal{H}(\sigma))$$

Quando applichiamo \mathcal{D} , a ogni legame viene sostituita la decorazione, pertanto nella \mathcal{Z} bisognerà sommare anche sui nuovi spin introdotti da ogni legame. Dal momento che gli spin interni alla decorazione sono indipendenti da legame a legame, è possibile sommare separatamente per ciascun legame sulle configurazioni degli spin interni una volta fissata la configurazione degli spin esterni. Ciò corrisponde a sostituire con \mathcal{Z}_I ogni z_I presente in \mathcal{Z}_Γ . Quindi semplicemente si ha la tesi. ■

Corollario 1.4.7 Vale quindi naturalmente: se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$, allora $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}} = \mathcal{Z}_{\mathcal{D}_1} \circ \mathcal{Z}_{\mathcal{D}_2}$

Osservazione 1.4.8 *Nel caso in cui si decori un grafo omogeneo con una decorazione omogenea, osserviamo che le variabili z_I vengono mandate dalla mappa di rinormalizzazione in polinomi \mathcal{L}_I omogenei delle stesse variabili.*

Per applicare una decorazione a grafi non omogenei è necessario precedentemente stabilire su quale tipo di legami far agire la decorazione. Naturalmente in questo caso la mappa di rinormalizzazione agisce soltanto sulle variabili del tipo scelto. In generale è tuttavia possibile pensare di applicare differenti decorazioni (o eventualmente le decorazioni identità) a ciascun tipo di legame, ottenendo in questo modo una mappa da tutto lo spazio in sé.

Osservazione 1.4.9 *Nel caso in cui si decori un grafo non omogeneo con un dato numero di decorazioni anche non omogenee, osserviamo che le variabili $z_{I_j}^j$ vengono mandate dalla mappa di rinormalizzazione in polinomi $\mathcal{L}_{I_j}^j$ omogenei e separatamente omogenei in tutte le variabili. I gradi di omogeneità di un polinomio $\mathcal{L}_{I_j}^j$ sono in generale differenti a seconda della scelta di j .*

Definizione 1.4.10 *Una tale mappa si dice separatamente omogenea.*

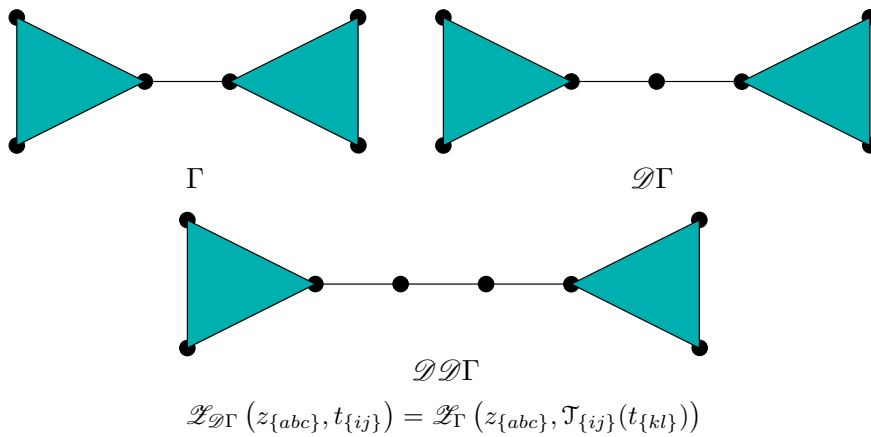


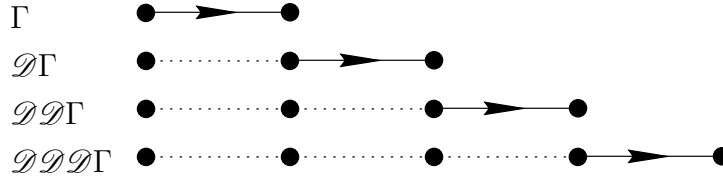
Figura 1.14: Applicazione della decorazione di figura 1.6 a un grafo inomogeneo. Per semplicità sono state omesse le orientazioni dei legami. Le funzioni di partizione ridotte \mathcal{T} sono funzioni delle sole variabili t .

Decorare un grafo è dunque equivalente, dal punto di vista della funzione di partizione e dunque per tutte le quantità termodinamiche, a sostituire le variabili fisiche con una scelta di preimmagini mediante la mappa di rinormalizzazione.

La procedura di decorazione può essere intesa, come detto, come l'inversa della procedura di coarse-graining che agisce sostituendo ogni decorazione presente nel grafo con un legame dell'ordine opportuno. È evidente come il gruppo di rinormalizzazione indotto da questo riscaldamento sia generato dalla mappa di rinormalizzazione $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$. Per i modelli gerarchici, si può quindi scrivere il gruppo di rinormalizzazione in maniera *esatta* indipendentemente dal valore dei parametri di accoppiamento, poiché si tratta di una relazione essenzialmente combinatorica. Questa proprietà assolutamente fondamentale è ciò



Figura 1.15: Esempio di decorazione non omogenea (2, 2).



$$\mathcal{L}_{D^3\Gamma}(z_{\{ab\}}^1, z_{\{ij\}}^2) = \mathcal{L}_{\Gamma}(z_{\{ab\}}^1, \mathcal{L}_{\{ij\}}^2(z_{\{ab\}}^1, z_{\{kl\}}^2))$$

Figura 1.16: Applicazione della decorazione non omogenea di figura 1.15 a un grafo omogeneo. Notare come la mappa di rinormalizzazione \mathcal{L}^2 sia funzione di entrambe le classi di variabili z^1 e z^2 .

che distingue i modelli gerarchici dagli altri modelli e che rende interessante lo studio del loro comportamento critico.

È noto che le proprietà di analiticità della funzione di partizione nel limite termodinamico sono legate strettamente alle fasi del sistema in considerazione. Ottenere informazioni sui domini di analiticità della funzione di partizione è dunque essenziale per la conoscenza delle proprietà critiche del sistema in oggetto. La teoria di Lee e Yang stabilisce che i domini di analiticità della funzione di partizione, e dunque di tutte le funzioni termodinamiche, hanno come bordo comune gli zeri della funzione di partizione. La proprietà interessante dei sistemi gerarchici è la possibilità di ottenere gli zeri della funzione di partizione nel limite termodinamico dalle proprietà *dinamiche* della mappa di rinormalizzazione. In particolare, come chiariremo in seguito, per i modelli gerarchici si ha equivalenza tra i risultati della teoria di Lee e Yang e della teoria del gruppo di rinormalizzazione.

1.5 Spazi proiettivi

Tutti i sistemi fisici sono invarianti se lo zero dell'energia viene traslato di una quantità arbitraria. Esiste cioè una sorta di simmetria di Gauge che agisce additivamente sulle energie e che lascia invariata la Fisica del sistema.

Osservazione 1.5.1 *Dal momento che il numero totale di legami di un tipo assegnato non dipende dalla configurazione degli spin, è possibile considerare l'azione additiva di \mathbb{C} sull'energia di un sistema come somma di p azioni additive indipendenti che agiscono sulle energie di configurazione di ciascun tipo di legame: $J_{I_j}^j \mapsto J_{I_j}^j + \Delta_j, \forall j$. Sulla funzione di partizione agisce quindi l'azione moltiplicativa di tanti $\mathbb{C} \setminus \{0\} \doteq \mathbb{C}^* = \exp(\mathbb{C})$ quanti sono i tipi di legame, dal momento che, se ogni $z^j \mapsto z^j \cdot e^{-\beta\Delta_j}$, la funzione di partizione scala nel modo seguente:*

$$\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z} \cdot \prod_j (e^{-\beta\Delta_j})^{d_j},$$

per d_j pari al grado relativo alle variabili associate al j -esimo tipo di legame.

Alla luce di questo fatto osserviamo inoltre che gli zeri di \mathcal{L} , ovvero i punti $z \in \mathbb{C}^N$ t.c. $\mathcal{L}(z) = 0$, sono un insieme invariante sotto l'azione di tutti i \mathbb{C}^* .

Prima di procedere diamo alcune definizioni riguardanti gli spazi proiettivi complessi

Definizione 1.5.2 Consideriamo uno spazio vettoriale \mathbb{C}^N e stabiliamo la relazione di equivalenza

$$z_1 \sim z_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.c. } z_1 = \lambda z_2.$$

Si definisce \mathbb{P}^{N-1} spazio proiettivo complesso $(N - 1)$ dimensionale l'insieme delle classi di equivalenza dei vettori di $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ secondo questa relazione.

Definizione 1.5.3 La proiezione canonica $\pi : \mathbb{C}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ agisce nel seguente modo:

$$\pi : (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}) \mapsto [z_0 : z_1 : \dots : z_{N-1}]$$

dove con $[z_0 : z_1 : \dots : z_{N-1}]$ si indica la classe di equivalenza dei punti di \mathbb{C}^N si ottengono da $(z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ moltiplicando per un $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Queste coordinate sul proiettivo si chiamano coordinate omogenee.

Definizione 1.5.4 Consideriamo gli N aperti $\Omega_j = \{[z] \in \mathbb{P}^{N-1} \text{ t.c. } z_j \neq 0\}$, per $j \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ e dividiamo ogni componente di un vettore in Ω_j per la sua coordinata z_j . Le restanti $N - 1$ coordinate sono elementi di un \mathbb{C}^{N-1} . Le applicazioni che portano un punto di \mathbb{P}^{N-1} in questi elementi mediante l'operazione descritta sono dette carte locali standard.

Studiamo ora come gli spazi proiettivi diventino, nei vari casi, gli spazi naturali in cui studiare la dinamica della mappa di rinormalizzazione.

Decorazioni omogenee di grafi omogenei È possibile eliminare l'azione moltiplicativa di cui all'osservazione 1.5.1 mediante un singolo passaggio al quoziente:

$$\mathbb{C}^N \setminus \{0\} \mapsto \frac{\mathbb{C}^N \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*} \doteq \mathbb{P}^{N-1}$$

Osserviamo peraltro che lo spazio delle variabili z è l'esponenziato dello spazio delle interazioni J e dunque esclude naturalmente il punto $\{0\}$.

Osservazione 1.5.5 Essendo la mappa di rinormalizzazione omogenea, sarà possibile passarla al quoziente e definirla su uno spazio proiettivo \mathbb{P}^{N-1} . Infatti, fissato un punto $[z] = [z_{\{I\}}] \in \mathbb{P}^{N-1}$, possiamo scegliere un suo rappresentante $z \in \mathbb{C}^N$ e definire

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}([z]) \doteq \pi(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(z)).$$

Si tratta di una buona definizione, poichè scelto un altro rappresentante $z' = \lambda z$,

$$\pi(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(z')) = \pi(\lambda^d \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(z)) = \pi(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(z))$$

Decorazioni omogenee di grafi non omogenei In questo caso è presente più di una classe di legami; dunque abbiamo una azione moltiplicativa di più di un \mathbb{C}^* sulle diverse classi di variabili. In questo caso il passaggio al quoziente è più articolato:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^N \setminus \{0\} &= \mathbb{C}^{N_1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^{N_2} \setminus \{0\} \times \dots \times \mathbb{C}^{N_p} \setminus \{0\} \mapsto \\ &\mapsto \frac{\mathbb{C}^{N_1} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*} \times \frac{\mathbb{C}^{N_2} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*} \times \dots \times \frac{\mathbb{C}^{N_p} \setminus \{0\}}{\mathbb{C}^*} \doteq \mathbb{P}^{N_1-1} \times \mathbb{P}^{N_2-1} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_p-1} \end{aligned}$$

Definiamo lo spazio risultante da questa operazione

$$\mathbb{P}^{\mathcal{N}-1} \doteq \mathbb{P}^{N_1-1} \times \mathbb{P}^{N_2-1} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_p-1}$$

La mappa $\pi : \mathbb{C}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{\mathcal{N}-1}$ agisce nel seguente modo:

$$\pi : \left((z_{\{I_1\}}^1), (z_{\{I_2\}}^2), \dots, (z_{\{I_p\}}^p) \right) \mapsto \left([z_{\{I_1\}}^1], [z_{\{I_2\}}^2], \dots, [z_{\{I_p\}}^p] \right)$$

dove con $[z_{\{I_j\}}^j]$ si indica la classe di equivalenza dei punti di \mathbb{C}^{N_j} che si ottengono dal vettore $(z_{\{I_j\}}^j)$ moltiplicando per un $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$. Queste coordinate su $\mathbb{P}^{\mathcal{N}-1}$ si chiamano *coordinate separatamente omogenee*.

Osservazione 1.5.6 *Le mappe di rinormalizzazione relative a ogni scelta di tipo di legame, essendo omogenee, passano a questo quoziente in maniera del tutto naturale. Infatti fissato un punto*

$$[z] = \left([z_{\{I_1\}}^1], [z_{\{I_2\}}^2], \dots, [z_{\{I_p\}}^p] \right) \in \mathbb{P}^{\mathcal{N}-1},$$

consideriamo un suo rappresentante $z \in \mathbb{C}^N$ e definiamo ancora:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}([z]) \doteq \pi(\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(z)).$$

Notiamo che è ancora una buona definizione, dato che se scegliamo un altro rappresentante z' , questo sarà tale che

$$z'^j_{I_j} = \lambda_j z^j_{I_j} \quad \forall I_j.$$

Chiamiamo ora d_j il grado dei polinomi \mathcal{Z}^j , e osserviamo che vale:

$$\mathcal{Z}^j_{I_j}(z') = \lambda_j^{d_j} \mathcal{Z}^j_{I_j}(z) \quad \forall I_j.$$

Da cui naturalmente si ricava:

$$\pi(\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(z')) = \pi(\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}(z))$$

Osserviamo inoltre che in questo caso la mappa relativa alla scelta dei legami di tipo j è un polinomio solo delle $\{z^j\}$, dunque in realtà la mappa $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}}$ si separa in p mappe indipendenti che agiscono sui rispettivi spazi proiettivi.

Decorazioni non omogenee Ancora una volta è presente più di un tipo di legami, dunque lo spazio su cui si vorrebbe definire la mappa è $\mathbb{P}^{\mathcal{N}-1}$

Osservazione 1.5.7 La mappa di rinormalizzazione, essendo separatamente omogenea, passa a questo quoziente in maniera del tutto naturale. Infatti fissato un punto

$$[z] = \left([z_{\{I_1\}}^1], [z_{\{I_2\}}^2], \dots, [z_{\{I_p\}}^p] \right) \in \mathbb{P}^{\mathcal{N}-1},$$

consideriamo un suo rappresentante $z \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ e definiamo ancora una volta:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}([z]) \doteq \pi(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(z)).$$

Notiamo che è ancora una buona definizione, dato che se scegliamo un altro rappresentante z' , questo sarà tale che

$$z'^j = \lambda_j z^j \quad \forall I_j.$$

Chiamiamo ora d_{ij} il grado dei polinomi \mathcal{Z}^i rispetto alle variabili z^j , e osserviamo che vale:

$$\mathcal{Z}_{I_i}^i(z') = \left(\prod_j \lambda_j^{d_{ij}} \right) \mathcal{Z}_{I_i}^i(z) \quad \forall I_i.$$

Da cui naturalmente si ricava:

$$\pi(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(z')) = \pi(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}(z))$$

In questo caso la mappa relativa alla scelta dei legami di tipo j è un polinomio in tutte le variabili, quindi questa mappa non si può separare in p componenti indipendenti come accadeva per le decorazioni omogenee, ma può essere vista come p mappe dipendenti da $p-1$ parametri che a loro volta evolvono mediante la mappa relativa all'opportuna scelta del tipo di legami.

Osservazione 1.5.8 Il passaggio alle variabili proiettive è il passaggio naturale per eliminare una ridondanza fisica altrimenti presente in tutti i sistemi. Bisogna però notare che i risultati di un qualsiasi calcolo (Energia libera, Energia interna) dipendono dall'azione con cui abbiamo quozientato lo spazio e dunque non risultano definiti sullo spazio proiettivo. Sarà sufficiente fare una scelta di zero dell'energia (analogo a fissare una gauge) e poi fare i calcoli nello spazio $\mathbb{C}^{\mathcal{N}-1}$ corrispondente.

1.6 Alcune proprietà delle funzioni di partizione

Proprietà 1.6.1 (Fattorizzazione delle componenti connesse) Dato un grafo Γ , esso sarà unione di un certo numero di componenti connesse $\Gamma^1, \dots, \Gamma^n$. Allora vale la seguente fattorizzazione:

$$\mathcal{Z}_{\Gamma} = \prod_{i=1}^n \mathcal{Z}_{\Gamma^i}$$

Dim: Notiamo per cominciare che è sufficiente la dimostrazione nel caso in cui siano presenti due sole componenti tra loro sconnesse. Consideriamo dunque

$$\Gamma = (V, E_1, \dots, E_p) = (V^1 \cup V^2, E_1^1 \cup E_1^2, \dots, E_p^1 \cup E_p^2),$$

da cui si ottiene:

$$\mathcal{Z}_\Gamma = \sum_{\sigma \in S^V = V^1 \cup V^2} \text{Monomio} \left(z_I^j \right) = \sum_{\substack{\sigma^1 \in S^{V^1} \\ \sigma^2 \in S^{V^2}}} \text{Monomio}^1 \left(z_I^j \right) \text{Monomio}^2 \left(z_I^j \right);$$

dal momento che ciascun monomio è indipendente dallo stato degli spin che non sono parte della sua componente connessa, si può scrivere:

$$\mathcal{Z}_\Gamma = \sum_{\sigma^1 \in S^{V^1}} \text{Monomio}^1 \left(z_I^j \right) \sum_{\sigma^2 \in S^{V^2}} \text{Monomio}^2 \left(z_I^j \right) = \mathcal{Z}_{\Gamma^1} \mathcal{Z}_{\Gamma^2}$$

■

Se ora consideriamo le funzioni di partizione ridotte, esse soddisfano una proprietà di fattorizzazione più forte, dovuta al fatto che per definizione non bisogna sommare sugli stati degli spin esterni. Si ha quindi:

Proprietà 1.6.2 Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Allora $\mathcal{Z}_\mathcal{D} = \mathcal{Z}_{\mathcal{D}_1} \cdot \mathcal{Z}_{\mathcal{D}_2}$ dove con il simbolo \cdot si intende il prodotto componente per componente.

Dim: Se la decorazione \mathcal{D} è prodotto di due decorazioni, i due insiemi di spin interni hanno intersezione nulla, dunque le $\mathcal{Z}_\mathcal{D}$ si fattorizzano allo stesso modo che nella proposizione 1.6.1. ■

Proprietà 1.6.3 Se una decorazione ha componenti connesse fatte da soli spin interni, le loro funzioni di partizione ridotte si fattorizzano in una parte dipendente dagli spin esterni e una parte da loro indipendente, uguale dunque per ciascuna possibile scelta di multiindice. Considerando la mappa di rinormalizzazione è dunque possibile raccogliere, come fattore comune a tutte le componenti decorate, la funzione di partizione delle componenti connesse costituite da soli spin interni. In questo modo si nota che tali componenti sono ininfluenti per la dinamica sullo spazio proiettivo e dunque possono non essere considerate.

In casi dotati di particolari simmetrie, questa fattorizzazione può presentarsi anche per grafi connessi, come vedremo in seguito in un esempio.

Capitolo 2

Variabili Dinamiche e variabili Fisiche

La mappa di rinormalizzazione agisce sullo spazio di tutte le possibili interazioni di una data classe di tipi di legame. Questo spazio, chiamato *spazio dinamico*, benché nel nostro caso sia finito dimensionale, risulta in generale più ampio dello *spazio fisico* su cui consuetamente vengono studiate le transizioni di fase, tipicamente generato da due variabili (temperatura e campo esterno). Questa distinzione dunque è necessaria per comprendere concretamente il comportamento delle fasi termodinamiche di un sistema gerarchico.

2.1 Variabili Dinamiche

L'obiettivo di questa sezione è di descrivere lo spazio su cui agisce la mappa di rinormalizzazione su un determinato tipo di legame. Sfruttando la presenza di opportune simmetrie è possibile ridursi a studiare la mappa di rinormalizzazione su sottospazi di dimensione inferiore, riducendo in tal modo il numero di variabili indipendenti. La prima simmetria che consideriamo è la *simmetria di posizione* e si riferisce alle caratteristiche proprie del reticolo; la seconda è la *simmetria di stato* che invece è una caratteristica delle interazioni tra gli spin. Nel caso generale privo di simmetrie le variabili da considerarsi sono gli elementi di uno spazio:

$$\mathbb{C}^q \ni z_{s_1 s_2 \dots s_n}$$

Così ad esempio per $n = 2$ e $q = 2$ si hanno:

$$z_{11} \quad z_{12} \quad z_{21} \quad z_{22},$$

mentre se $n = 3$ e $q = 2$ le variabili sono:

$$\begin{array}{cccc} z_{111} & z_{112} & z_{121} & z_{211} \\ z_{122} & z_{212} & z_{221} & z_{222}. \end{array}$$

2.1.1 Simmetrie di posizione

Nei grafi semplici ($n = 2$) si possono considerare legami orientati o non orientati. In analogia con questa situazione è possibile considerare per gli ipergrafi

legami con assegnate simmetrie di posizione; in questo caso più generale è tuttavia necessario considerare tutti i possibili sottogruppi del gruppo \mathfrak{S}_n delle permutazioni di n elementi (spin).

Affinché l'interazione basata su un legame con una qualche simmetria sia ben definita è necessario che l'interazione sia essa stessa simmetrica.

Definizione 2.1.1 Sia \mathfrak{P} un sottogruppo di \mathfrak{S}_n ; una interazione è \mathfrak{P} -simmetrica se

$$\forall \sigma \in \mathfrak{P}, \forall \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \quad J_{s_1 s_2 \dots s_n} = J_{s_{\sigma(1)} s_{\sigma(2)} \dots s_{\sigma(n)}}.$$

Lo spazio delle interazioni \mathfrak{P} -simmetriche è dunque il prodotto tensoriale \mathfrak{P} -simmetrizzato dello spazio \mathbb{C}^S degli stati di uno spin; in modo assolutamente naturale dovranno soddisfare le stesse proprietà le z .

Allo stesso modo, affinché sia ben definita la decorazione di un legame simmetrico, anche questa deve soddisfare le stesse proprietà di simmetria.

Definizione 2.1.2 Sia \mathfrak{P} un sottogruppo di \mathfrak{S}_n ; una decorazione (omogenea o non omogenea) è \mathfrak{P} -simmetrica se

$$\forall \sigma \in \mathfrak{P}, \forall \{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \forall \left\{ z_{t_1 t_2 \dots t_{n_j}}^j \right\} \in \text{sottospazio } \mathfrak{P}\text{-simmetrizzato}$$

$$\mathcal{L}_{s_1 s_2 \dots s_n} \left(\left\{ z_{t_1 t_2 \dots t_{n_j}}^j \right\} \right) = \mathcal{L}_{s_{\sigma(1)} s_{\sigma(2)} \dots s_{\sigma(n)}} \left(\left\{ z_{t_1 t_2 \dots t_{n_j}}^j \right\} \right)$$

A un legame \mathfrak{P} -simmetrico posso associare solo interazioni \mathfrak{P} -simmetriche e applicare solo decorazioni \mathfrak{P} -simmetriche.

Osservazione 2.1.3 Per definizione di decorazione \mathfrak{P} -simmetrica, il sottospazio \mathfrak{P} -simmetrizzato dello spazio \mathbb{C}^q è invariante per la rinormalizzazione indotta dalla decorazione.

Esempio 2.1.4 Legami $n = 2$ non orientati ($q = 2$)

Le variabili rilevanti sono ora $\frac{1}{2}q(q+1) = 3$:

$$z_{11} \quad (z_{12} = z_{21}) \quad z_{22},$$

Esempio 2.1.5 Legami $n = 3$ non ordinati ($q = 2$)

Le variabili rilevanti sono ora $\frac{1}{3!}q(q+1)(q+2) = 4$:

$$\begin{aligned} z_{111} & \quad (z_{112} = z_{121} = z_{211}) \\ (z_{122} = z_{212} = z_{221}) & \quad z_{222}. \end{aligned}$$

Esempio 2.1.6 Legami $n = 3$ invarianti per scambio di 2 con 3 ($q = 2$)

Le variabili rilevanti sono ora $\frac{1}{2}q^2(q+1) = 6$

$$\begin{aligned} z_{111} & \quad (z_{112} = z_{121}) & z_{211} \\ z_{122} & \quad (z_{212} = z_{221}) & z_{222}. \end{aligned}$$

2.1.2 Simmetrie di stato

Queste sono simmetrie dell'interazione; dato un sottogruppo di \mathfrak{S}_q , è possibile considerare interazioni simmetriche rispetto a questo sottogruppo:

Definizione 2.1.7 Sia \mathfrak{U} un sottogruppo di \mathfrak{S}_q ; J è \mathfrak{U} -simmetrica se

$$\forall U \in \mathfrak{U}, J_{s_1 s_2 \dots s_n} = J_{U(s_1) U(s_2) \dots U(s_n)}.$$

Definizione 2.1.8 Per ogni $U \in \mathfrak{S}_q$ definiamo $\mathcal{U} : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^q$ tale che

$$\mathcal{U}(z)_i \doteq z_{U^{-1}(i)}.$$

Con abuso di notazione chiameremo \mathcal{U} anche la mappa che agisce sullo spazio prodotto tensore (eventualmente simmetrizzato) definita facendo agire la permutazione separatamente su ciascun fattore:

$$\mathcal{U}(z)_{i_1 i_2 \dots i_n} \doteq z_{U^{-1}(i_1) U^{-1}(i_2) \dots U^{-1}(i_n)}.$$

Proposizione 2.1.9 (White renormalization) Sia U un elemento di \mathfrak{S}_q ; allora vale:

$$\mathcal{L}_{U(I)} \left(\left\{ z_J^j \right\} \right) = \mathcal{L}_I \left(\left\{ z_{U(J)}^j \right\} \right) \quad (2.1)$$

o equivalentemente:

$$\mathcal{U} \circ \mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \mathcal{L}_{\mathcal{G}} \circ \mathcal{U}$$

Dim: Ricordiamo la definizione di funzione di partizione ridotta:

$$\mathcal{L}_I \left(\left\{ z_J^j \right\} \right) = \sum_{\substack{\sigma \in S^V \text{ t.c.} \\ \sigma(\text{ext})=I}} \exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma))$$

Ora scriviamo il membro di sinistra della (2.1)

$$\mathcal{L}_{U(I)} \left(\left\{ z_J^j \right\} \right) = \sum_{\substack{\sigma \in S^V \text{ t.c.} \\ \sigma(\text{ext})=U(I)}} \exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma)) = \sum_{\substack{\sigma \in S^V \text{ t.c.} \\ U^{-1}(\sigma(\text{ext}))=I}} \exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma)) =$$

dal momento che sto sommando su tutto lo spazio delle configurazioni, posso applicare una qualunque permutazione su ciascun elemento dello spazio senza alcun problema. Applicando U^{-1} otteniamo:

$$\sum_{\substack{U^{-1}(\sigma) \in S^V \text{ t.c.} \\ U^{-1}(\sigma(\text{ext}))=I}} \exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma)) = \sum_{\substack{\sigma' \in S^V \text{ t.c.} \\ \sigma'(\text{ext})=I}} \exp(-\beta \mathcal{H}(U(\sigma'))) = \mathcal{L}_I \left(\left\{ z_{U(J)}^j \right\} \right)$$

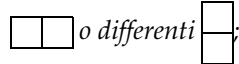
che è quanto si doveva dimostrare. ■

L'importanza della proposizione precedente consiste nel fatto che se l'interazione soddisfa una certa simmetria, allora tale simmetria verrà preservata dalla rinormalizzazione. Ciò permette di diminuire in modo drastico il numero di variabili indipendenti.

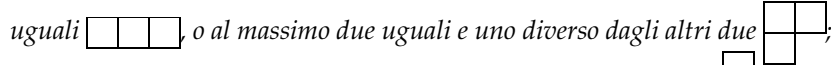
Esempio 2.1.10 Posizioni totalmente simmetriche, stati totalmente simmetrici (=senza campo esterno).

Le possibili configurazioni si distinguono in base al numero di stati tra loro uguali o differenti. Se vogliamo considerare le possibili configurazioni di legami di ordine n , dobbiamo disporre n spin nelle configurazioni possibili con q stati. Le possibili disposizioni sono i diagrammi di Young che è possibile costruire con n caselle e al più q righe. Ad esempio:

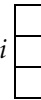
- se consideriamo legami ordinari, $n = 2, q \geq 2$, i due stati possono essere uguali



- con legami triangolari e due stati si ha $n = 3$ e $q = 2$, i tre stati possono essere



- se $n = 3$ e $q \geq 3$ ci sono abbastanza stati per avere tre spin diversi

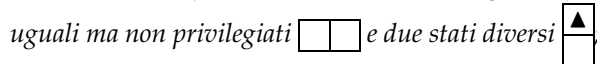


La tabella 2.1 porta esempi di stati senza campo fino a $n = 6$.

Esempio 2.1.11 Posizioni totalmente simmetriche, uno stato privilegiato, gli altri simmetrici (=campo esterno)

Le configurazioni ora dipendono ancora dal numero di stati uguali o diversi, ma distinguendo dagli altri lo stato privilegiato. Una rappresentazione conveniente sfrutta ancora i diagrammi di Young, ma è necessario aggiungere un segno distintivo per lo stato speciale. Ad esempio:

- se $n = 2$ e $q = 2$ possiamo avere i due stati uguali e privilegiati $\blacktriangle \blacktriangle$, due stati

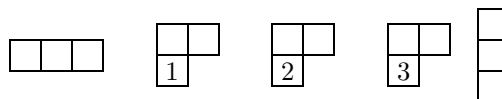


- se invece $q \geq 3$, si aggiunge anche \square .

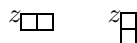
La tabella 2.2 porta esempi di stati con campo esterno fino a $n = 4$

Esempio 2.1.12 Posizioni non simmetriche, stati totalmente simmetrici

Le configurazioni dipendono da quali stati siano uguali e quali siano tra loro diversi. Possiamo utilizzare diagrammi di Young in cui si esplicitano le posizioni per i casi sensibili. Nel caso $n = 2$ non c'è differenza con il caso non simmetrico, ma ad esempio il caso con $n = 3, q = 3$ dà luogo a cinque possibili configurazioni:



Osservazione 2.1.13 (Notazione) In linea di principio dovremmo indicare le variabili che si riferiscono a una configurazione data da un assegnato diagramma di Young (per esempio quelle per $n = 2$ senza campo) con



n	q	Configurazioni indipendenti senza campo
n=2	$q \geq 2$	
n=3	$q=2$	
	$q \geq 3$	
n=4	$q=2$	
	$q=3$	
	$q \geq 4$	
n=5	$q=2$	
	$q=3$	
	$q=4$	
	$q \geq 5$	
n=6	$q=2$	
	$q=3$	
	$q=4$	
	$q=5$	
	$q \geq 6$	

Tabella 2.1: Configurazioni differenti nel caso totalmente simmetrico per posizioni senza campo esterno fino a $n = 6$

n	q	Configurazioni indipendenti con campo
n=2	q=2	
	q ≥ 3	
n=3	q=2	
	q=3	
	q ≥ 4	
n=4	q=2	
	q=3	
	q=4	
	q ≥ 5	

Tabella 2.2: Configurazioni differenti nel caso totalmente simmetrico per posizioni con campo esterno fino a $n = 4$

Risulta tuttavia estremamente più comodo dimenticare la z e confondere le variabili con i diagrammi di Young corrispondenti.

Le variabili definite precedentemente sono quelle su cui agisce la mappa di rinormalizzazione e tali che lo spazio proiettivo da loro generato (cfr. sezione 1.5) sia invariante per rinormalizzazione. Esse sono quindi denominate *variabili dinamiche*.

2.2 Variabili fisiche

Lo spazio delle variabili fisiche è lo spazio in cui vivono le variabili al variare delle quali vogliamo studiare la presenza di transizioni di fase. Sulle variabili fisiche non agisce direttamente la mappa di rinormalizzazione; esse sono una sorta di parametri che stabiliscono la «condizione iniziale» nello spazio delle interazioni.

Spesso siamo interessati a considerare una sola interazione a coppie primi vicini con parametro di accoppiamento J , che per dualità rappresenta anche la temperatura (visto che la variabile rilevante è βJ) e un'interazione con un campo esterno che, nel quadro dei modelli di Potts, si può considerare come un'energia assegnata a ciascuno spin sulla base dello stato in cui si trova. Una interazione a coppie di primi vicini dipende in linea di principio dal valore assegnato all'energia nel caso in cui gli spin siano concordi J_c , cui corrisponde la variabile di Boltzmann $z \doteq \exp(-\beta J_c)$ o discordi J_d cui corrisponde $w \doteq \exp(-\beta J_d)$. Questa coppia di variabili è soggetta all'azione moltiplicativa generata dalla scelta dello zero dell'energia (cfr. osservazione 1.5.1), quindi si

possono considerare variabili proiettive nella coppia $[z : w]$.

L'altra coppia di variabili fisiche è quella relativa al campo esterno. Il campo, in questi modelli, non ha carattere vettoriale, ma affine; è ancora una volta necessario fissare in qualche maniera uno zero, oppure aggirare questo problema passando alle variabili proiettive. Questa scelta di zero è indipendente dalla scelta dello zero delle variabili di interazione, esattamente come, nel caso di interazioni di tipo diverso, le varie scelte sono indipendenti. Nei casi di nostro interesse considereremo solo campi semplici, per cui esiste un solo stato privilegiato, di energia H_{\blacktriangle} , mentre tutti gli altri stati hanno la stessa energia H_0 . Le variabili di Boltzmann diventano $h_{\blacktriangle} \doteq \exp(-\beta H_{\blacktriangle})$ e $h_0 \doteq \exp(-\beta H_0)$ e la coppia proiettiva è dunque $[h_{\blacktriangle} : h_0]$.

Le variabili Fisiche dunque formano una varietà bidimensionale che è un $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ su cui vivono le variabili:

$$([z : w], [h_{\blacktriangle} : h_0]).$$

2.2.1 Immersione nello spazio dinamico

Come detto le variabili Fisiche vanno immerse nello spazio dinamico per poter iterare la mappa di rinormalizzazione. L'immersione dipende da *come* si stabiliscono le coppie di primi vicini.

Esempio 2.2.1 Nel caso $n = 4$ ci sono tre possibili modi di collegare tra loro tutti e quattro gli spin:

- Come vertici di un quadrato (fig. 2.1a)
- Come vertici di un tetraedro (fig. 2.1b)
- Come vertici di due triangoli affiancati (fig. 2.1c)

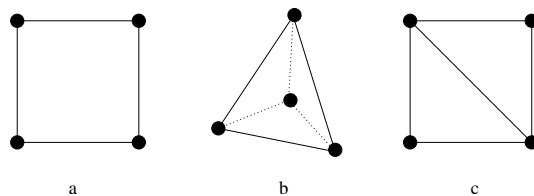


Figura 2.1: Differenti assegnazioni di primi vicini per il caso $n = 4$

Differenti assegnazioni daranno luogo a differenti immersioni.

Per $n < 4$ gli assegnamenti che connettono tutti gli spin sono unici; li riportiamo a titolo di esempio.

Esempio 2.2.2 ($n = 2$) Immersione delle variabili fisiche nelle variabili dinamiche.

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array} &= zh_{\blacktriangle}^2 & \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} &= wh_{\blacktriangle}h_0 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} &= zh_0^2 & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} &= wh_0^2 \end{aligned}$$

Esempio 2.2.3 ($n = 3$) Immersione delle variabili fisiche nelle variabili dinamiche.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array} = z^3 h_{\blacktriangle}^3 &
 \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array} = z w^2 h_{\blacktriangle}^2 h_0 &
 \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} = z w^2 h_{\blacktriangle} h_0^2 \\
 \\
 \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} = w^3 h_{\blacktriangle} h_0^2 &
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} = z^3 h_0^3 &
 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = z w^2 h_0^3 &
 \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = w^3 h_0^3
 \end{array}$$

Osserviamo che l'immersione non è in generale invertibile; già in un caso semplice ($n = 2$ con campo) ciò non si verifica. Inoltre notiamo come in generale non sia lecito attendersi che la mappa di rinormalizzazione preservi l'immagine dell'immersione. Questo è un comportamento generale del gruppo di rinormalizzazione: quando si effettua un riscaldamento possono nascere nuovi tipi di interazioni tra gli spin (non rinormalizzabilità di tutti i sistemi). I modelli gerarchici sono costruiti in maniera tale che questi tipi siano noti fin dall'inizio e che siano in numero finito.

2.3 Una osservazione sul campo magnetico esterno

Il campo magnetico esterno che abbiamo considerato finora pesa in maniera differente i vari spin a seconda del numero di legami a loro connessi (numero di coordinazione), dal momento che in realtà agisce sui legami che connettono gli spin. Nei reticoli per cui il numero di coordinazione è uniforme sugli spin, questa proprietà non costituisce un problema, ma quando ciò non si dovesse verificare, il campo esterno che viene considerato non è quello che solitamente bisognerebbe utilizzare.

Una alternativa è quella di considerare decorazioni (in un certo senso degeneri) di ordine $n = 1$, a cui associare una interazione a 1 con uno stato privilegiato (ovvero un campo). Tale alternativa ha il difetto di rendere la mappa disomogenea, e di introdurre dunque i problemi che saranno esposti in seguito. Si tratta di una strada comunque in linea di principio praticabile, una volta che saranno a disposizione le opportune strategie d'azione.

Capitolo 3

Alcuni esempi di modelli gerarchici

3.1 Reticolo a diamante

Il reticolo a diamante è stato il primo caso studiato ([DSI], [BL] [BZ]) di modello gerarchico in cui sia stato esplicitato il legame con la dinamica complessa di cui abbiamo parlato nell'introduzione e che sarà esposto in dettaglio nel capitolo seguente. Si tratta del reticolo che si ottiene scegliendo come decorazione il prodotto di un numero b di decorazioni a catena non orientate. Il reticolo che si ottiene è chiamato reticolo a diamante di ordine b o DHL_b .

La mappa di rinormalizzazione si scrive in maniera molto semplice nelle va-

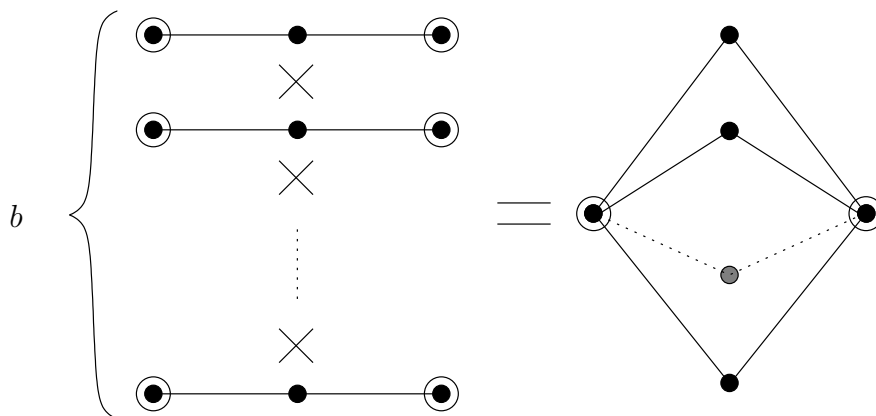


Figura 3.1: Decorazione che genera DHL_b

riabili dinamiche per qualunque numero q di stati; è sufficiente fissare le condizioni al bordo (gli stati dei vertici esterni della decorazione) e poi sommare

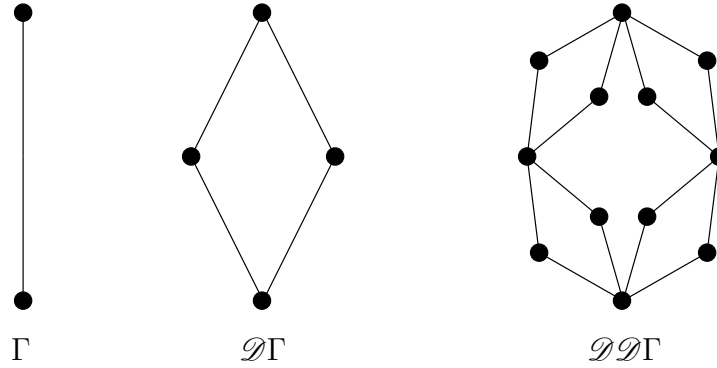


Figura 3.2: Decorazioni successive di DHL_2

su tutte le configurazioni degli spin interni.

$$\mathcal{Z}_{\square} = \left(\square\square^2 + (q-1) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \right)^b \quad (3.1a)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} = \left(2 \cdot \square\square \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + (q-2) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \right)^b \quad (3.1b)$$

Si tratta di una mappa su \mathbb{P}^1 ; le variabili fisiche si immergono in maniera iniettiva e surgettiva nelle variabili dinamiche e dunque la mappa di rinormalizzazione non introduce interazioni diverse da quella a coppie di primi vicini. Nel caso in cui sia presente un campo esterno, scriviamo la mappa di rinormalizzazione nel caso di q di Potts generico. Ancora una volta è necessario fissare gli stati dei vertici esterni, facendo attenzione a ricordare di considerare lo stato privilegiato, poi basta sommare sulle configurazioni degli spin interni. Un controllo che è possibile fare è quello di controllare che la somma dei coefficienti del polinomio corrispondente a ciascuna componente della mappa sia pari al numero di possibili configurazioni degli spin interni. Nel caso di DHL_b tale numero è q^b .

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle\blacktriangle \\ \hline \end{array}} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle\blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 + (q-1) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 \right)^b \quad (3.2a)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array}} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle\blacktriangle \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} \cdot \square\square + (q-2) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right)^b \quad (3.2b)$$

$$\mathcal{Z}_{\square} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 + \square\square^2 + (q-2) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \right)^b \quad (3.2c)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 + 2 \cdot \square\square \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + (q-3) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \right)^b \quad (3.2d)$$

Osserviamo subito tre caratteristiche della mappa:

- quando $q = 2$ la variabile $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ non dovrebbe esistere. In effetti se $q = 2$ tutti i termini nelle \mathcal{Z} relative alle tre variabili restanti che contengono la quarta variabile si annullano. Si dice che la variabile si *disaccoppia*. La dinamica dunque risulta correttamente svincolata dalla variabile spuria.

- nel caso in cui l'energia dello stato privilegiato tenda a $+\infty$, il suo peso di Boltzmann tende a 0 e con esso le variabili che contengono \square . La mappa si riduce a una mappa nelle due variabili senza campo identica alla 3.1 se $q \mapsto q - 1$. La presenza di un campo così svantaggioso rende fisicamente irrilevanti le variabili che ne tengono conto, ed è quindi naturale che uno stato venga «congelato».
- se $q = 2$ osserviamo che c'è simmetria per scambio di \blacktriangle e \square . Questa simmetria è fisicamente ovvia dato che se ho due stati, entrambi possono essere visti equivalentemente come stati privilegiati.

3.2 Ragnatela

La ragnatela è il più semplice reticolo gerarchico di ordine 3. La decorazione che lo genera è completamente simmetrica: aggiunge un solo spin al centro del triangolo e genera tre nuovi legami triangolari che connettono i vertici esterni al centro, come in figura 3.3.

La mappa di rinormalizzazione si scrive facilmente usando le variabili di

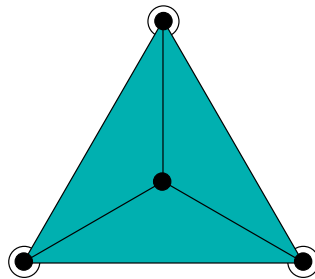


Figura 3.3: Decorazione che genera la ragnatela

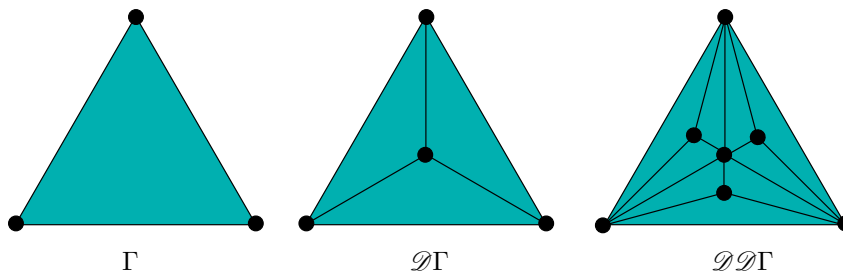


Figura 3.4: Decorazioni successive della ragnatela

tabella 2.1:

$$\mathcal{Z}_{\square\square\square} = \square\square\square^3 + (q-1) \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \quad (3.3a)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = \square\square\square \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^3 + (q-2) \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \quad (3.3b)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} = 3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + (q-3) \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^3 \quad (3.3c)$$

Osserviamo che, come riscontrato nel caso precedente, nel caso $q = 2$ la terza variabile diventa spuria e si disaccoppia dalle variabili rilevanti. Si tratta, per $q > 2$ di una mappa su \mathbb{P}^2 , dunque in questo caso l'immersione delle variabili fisiche non potrà certamente essere surgettiva; le variabili fisiche infatti vengono immerse nelle variabili dinamiche nel modo seguente:

$$\square\square\square = z^3 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = zw^2 \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = w^3.$$

È evidente dunque che l'immagine dello spazio fisico soddisfa la relazione algebrica:

$$\square\square\square \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^3$$

Una semplice verifica, utilizzando le 3.3, mostra che tale sottovarietà algebrica **non** è preservata dalla dinamica del gruppo di rinormalizzazione.

È naturalmente possibile scrivere la mappa di rinormalizzazione anche nel caso con campo esterno. Ci limitiamo per semplicità a scriverla per $q = 2$

$$\mathcal{Z}_{\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle} = \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle^3 + \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array}^3 \quad (3.4a)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array}} = \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 + \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 \quad (3.4b)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array}^2 \cdot \square\square\square \quad (3.4c)$$

$$\mathcal{Z}_{\square\square\square} = \square\square\square^3 + \begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array}^3 \quad (3.4d)$$

Ancora una volta notiamo che vale la simmetria $\square \leftrightarrow \blacktriangle$, tipica del caso $q = 2$.

3.3 Triangolo di Sierpinski

Il triangolo di Sierpinski è uno tra i frattali più conosciuti poiché viene spesso considerato come semplice esempio di struttura autosimilare. La decorazione che lo genera è illustrata in figura 3.5 e alcune iterazioni in figura 3.6. In [GASM] è stata studiato il comportamento della la mappa di rinormalizzazione per il caso di Ising, e nel caso di Potts, entrambi senza campo esterno, pur

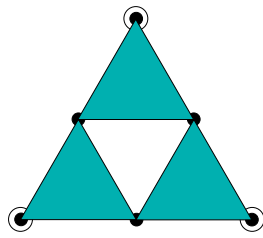


Figura 3.5: Decorazione che genera il triangolo di Sierpinski

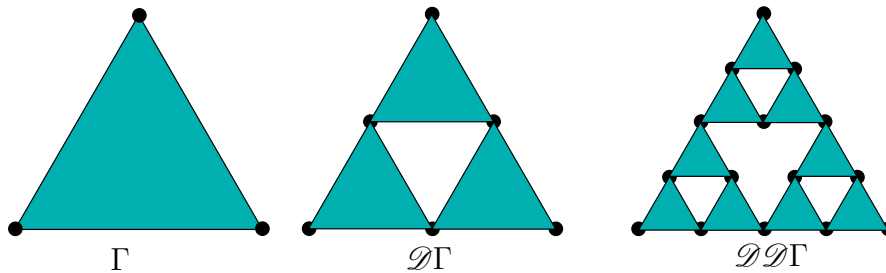


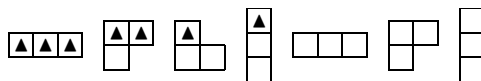
Figura 3.6: Decorazioni successive del triangolo di Sierpinski

senza ottenere l'espressione esplicita della mappa. Si tratta di una decorazione omogenea di ordine 3, completamente simmetrica. La mappa di rinormalizzazione si scrive ancora una volta fissando gli stati esterni e sommando sugli stati interni. La mappa (3.5) è stata generata da un programma al computer; la formula risultante non è stata semplificata al massimo per permettere di riconoscere i diversi termini, che altrimenti sarebbero stati mescolati. In effetti la formula esplicita è piuttosto lunga, ma abbiamo preferito mantenere questo formato poiché in fondo più maneggevole.

Nel primo polinomio ad esempio abbiamo che i tre spin esterni sono costretti ad essere nello stesso stato (*stato esterno*). Partendo dall'ultimo termine si riconoscono nell'ordine le seguenti configurazioni per gli spin interni, a parte fattori combinatorici:

- L'unico caso in cui siano tutti nello stato esterno;
- I tre casi in cui siano nella configurazione 2 uguali allo stato esterno e uno diverso;
- I tre casi in cui siano 1 uguale allo stato esterno, 2 diversi ma uguali tra loro;
- I tre casi in cui siano 1 uguale allo stato esterno e gli altri diversi tra loro e dallo stato esterno;
- L'unico caso in cui siano 3 uguali tra loro ma diversi dallo stato esterno;
- I tre casi in cui siano 2 uguali tra loro e uno diverso, tutti diversi dallo stato esterno;
- L'unico caso in cui siano tutti diversi tra loro e dallo stato esterno.

Osserviamo che questi casi sono associabili ai diagrammi di Young con uno stato privilegiato con un numero di quadrati pari al numero di vertici interni e un numero di stati arbitrario (cfr. tabella 2.2 per $n = 3$ $q \geq 4$).



In generale questo procedimento si può seguire anche nel caso più generale, bisogna però associare ogni coefficiente a una tabella di Young con tanti stati privilegiati quanti sono i diversi stati assunti dagli spin esterni. Questo compito è facilmente eseguibile da una macchina per mezzo del codice C++ riportato in appendice.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\square\square\square} &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^3 \cdot (q-3)(q-2)(q-1) + 3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot (q-2)(q-1) + \\ & \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \cdot (q-1) + 3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \cdot (q-2)(q-1) + \\ & + 3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \cdot (q-1) + 3 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot (q-1) + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\square\square} &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^3 \cdot (q-4)(q-3)(q-2) + \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^3 + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \right) (q-3)(q-2) + \\ & + \left(2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) (q-3)(q-2) + \\ & + 3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot (q-3)(q-2) + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) (q-2) + \\ & + \left(2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \right) (q-2) + \\ & + \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^2 + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) (q-2) + \\ & + \left(2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \right) (q-2) + \\ & + \left(2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \right) (q-2) + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \cdot (q-2) + \\ & + \left(2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \right) + \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \right) + \\ & + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (3.5b)$$

Osserviamo ancora una volta la simmetria per scambio $\square \leftrightarrow \blacktriangle$ peculiare del caso $q = 2$. Per confronto riportiamo la mappa nel caso senza campo per $q = 2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\square\square\square} &= 3 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 + 3 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 \\ \mathcal{Z}_{\square\blacktriangle} &= \left(2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \right) + \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^3 + 2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \right) + \\ &+ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (3.7a)$$

Osserviamo che in questa mappa in realtà si può fattorizzare il fattore comune $(\square\square + \blacktriangle\blacktriangle)$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\square\square\square} &= 4 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}^2 - \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^2 \\ \mathcal{Z}_{\square\blacktriangle} &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \left(3 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right), \end{aligned} \quad (3.8a)$$

Che è proprio la equazione 3.2 di [GASM] o la 14 di [BCD].

3.4 Tubi

Si tratta di una decorazione non omogenea molto semplice, che si può definire per un qualunque ordine n . Si fissa n e si parte da un poligono regolare con n lati. La decorazione consiste nel collegare con legami di ordine 2 ogni vertice del poligono originale a una coppia adiacente di vertici di un nuovo poligono «inscritto» nel precedente come esemplificato in figura 3.7. Il reticolo risultante, come meglio si può cogliere dall'esempio riportato in figura 3.8, è un tubo che ha come sezione l' n -gono di partenza

Riportiamo a titolo di esempio la mappa di rinormalizzazione per il caso più

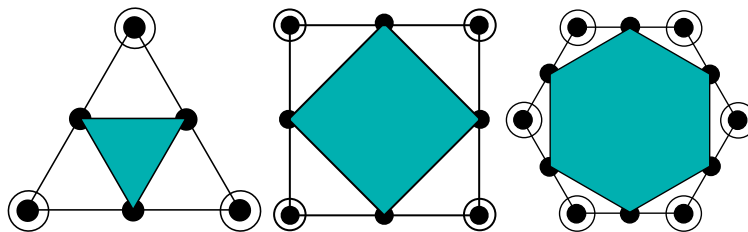
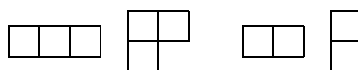


Figura 3.7: Decorazioni dei tubi di ordine 3,4 e 6

semplice: $n = 3$ e $q = 2$. Le variabili rilevanti sono $2 + 2$:



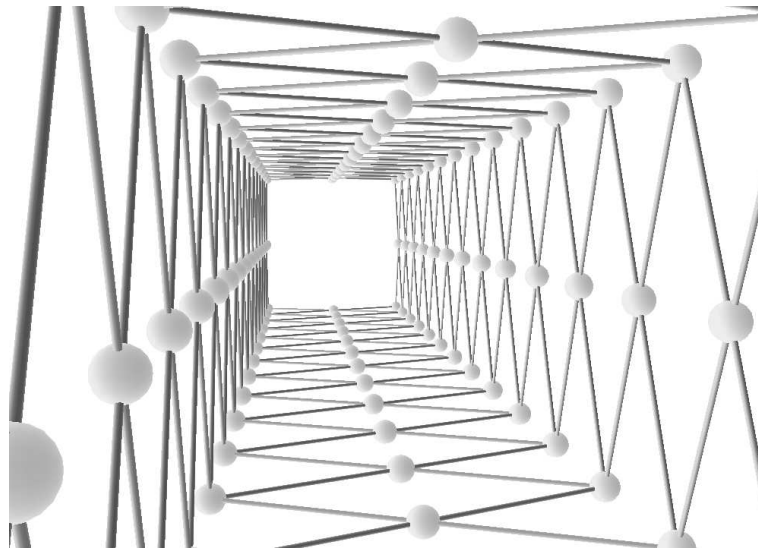


Figura 3.8: Esempio di iterazione della decorazione del tubo quadrato

E la mappa (non omogenea ma separatamente omogenea) indotta dalla decorazione è:

$$\mathcal{Z}_{\square\square\square} = \square\square\square \cdot \square\square\square^6 + 3 \cdot \square\square \left(\square\square^4 \cdot \square\square^2 + \square\square^2 \cdot \square\square^4 \right) + \square\square\square \cdot \square\square^6 \quad (3.9a)$$

$$\mathcal{Z}_{\square\square} = \square\square\square \cdot \square\square^4 \cdot \square\square^2 + 3 \cdot \square\square \left(\square\square^4 \cdot \square\square^2 + \square\square^2 \cdot \square\square^4 \right) + \square\square\square \cdot \square\square^2 \cdot \square\square^4 \quad (3.9b)$$

$$\mathcal{Z}_{\square\square} = \square\square \quad (3.9c)$$

$$\mathcal{Z}_{\square} = \square \quad (3.9d)$$

La mappa, sullo spazio delle variabili di ordine n , è complessivamente di grado $2n + 1$; in particolare è di grado $2n$ nelle variabili di ordine 2, mentre è di grado 1 nelle variabili di ordine n . Le variabili di ordine 2, dal canto loro, non vengono iterate e dunque svolgono il ruolo di parametri per la mappa sul primo spazio. La separata omogeneità della mappa, come dimostrato nell'osservazione 1.5.7, ci permette di considerare come spazio dinamico lo spazio

$$\mathbb{P}^{\tilde{n}} \times \mathbb{P}^1,$$

dove \tilde{n} è il numero di variabili di ordine n . Nel caso di Ising è semplice convincersi che

$$\tilde{n} = \left[\frac{n}{2} \right]$$

dove $[x]$ indica il pi ugrande intero minore o uguale a x .

3.5 Grafo di Cayley del gruppo libero a due generatori

Come ultimo esempio vogliamo presentare una decorazione non omogenea e orientata. Si tratta del grafo di Cayley del gruppo libero a due generatori.

Il gruppo libero a due generatori è il gruppo i cui elementi sono le stringhe finite di due elementi a e b e dei loro inversi, la cui unica relazione è l'ovvia relazione di semplificazione

$$aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = e.$$

È semplice verificare che l'insieme delle stringhe finite dotato della operazione di composizione a destra soddisfa tutte le proprietà necessarie per essere un gruppo. Questo gruppo viene chiamato gruppo libero (perché privo di relazioni non banali) a due generatori (poiché generato dalle stringhe di due soli caratteri).

È possibile dare una rappresentazione di un gruppo mediante un grafo, chiamato grafo di Cayley.

Definizione 3.5.1 Sia G un gruppo e S un insieme di generatori per G . Il grafo di Cayley di G rispetto a S è un grafo che ha un vertice per ogni elemento di G e un legame che connette ogni elemento $g \in G$ con $gs \in G \forall s \in S$.

Così se consideriamo il grafo di Cayley del gruppo libero a due generatori otteniamo un grafo di cui mostriamo in figura 3.9 una approssimazione in cui si visualizzano solo le stringhe di al più due caratteri. Il grafo di Cayley si può

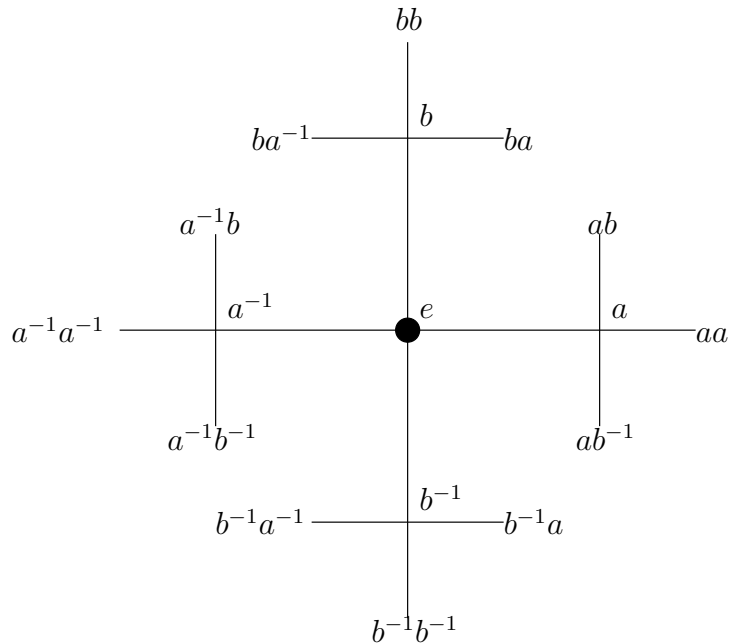


Figura 3.9: Approssimazione del grafo di Cayley del gruppo libero a due generatori

anche considerare un reticolo gerarchico se consideriamo come modulo la decorazione di figura 3.10; (cfr. figura 3.11.)

In questo caso abbiamo due classi di legami di ordine due; se consideriamo

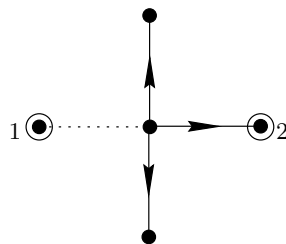


Figura 3.10: Decorazione (2, 2) che genera il grafo di Cayley del gruppo libero a due generatori. I legami tratteggiati non vengono iterati.

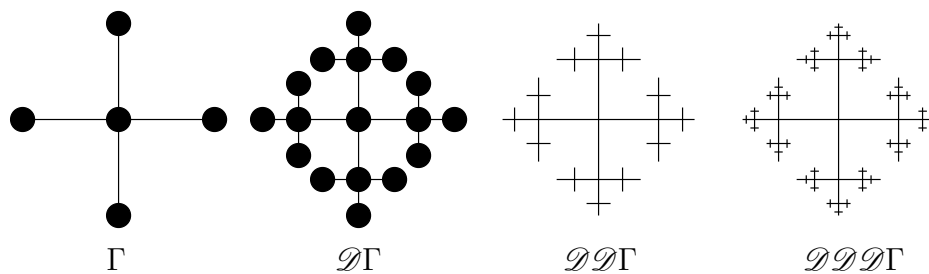
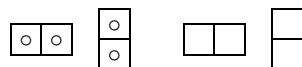


Figura 3.11: Decorazioni successive del grafo di Cayley; per chiarezza non sono stati disegnati i tratteggi e le frecce dell'orientazione (le quali vanno sempre dal centro verso l'esterno) e sono stati omessi gli spin nelle ultime iterazioni

interazioni simmetriche, le variabili rilevanti in questo modello sono 2 per i legami tratteggiati e 2 per i legami orientati: il caso $n = 2$, come già notato nell'esempio 2.1.12 non ha infatti abbastanza configurazioni disponibili per notare la mancata simmetria di posizione. Indichiamo le variabili «orientate» con il simbolo \square e quelle non orientate con il simbolo \square :



Osserviamo che l'interazione tra gli spin di questo reticolo si «propaga» mediante catene unidimensionali. Ciò implica in particolare che il sistema dovrebbe essere equivalente in qualche senso a una catena unidimensionale. Scrivendo la mappa di rinormalizzazione si può infatti osservare come essa sia uguale

a quella di un sistema unidimensionale:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\square\square} &= \square\square \cdot \square\square \cdot \left(\square\square + (q-1) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right)^2 + \\ &+ (q-1) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \cdot \square\square \cdot \left(\square\square + (q-1) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}} &= \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \cdot \square\square \cdot \left(\square\square + (q-1) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right)^2 + \\ &+ \cdot \square\square \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \cdot \left(\square\square + (q-1) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right)^2 + \\ &+ (q-2) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \cdot \left(\square\square + (q-1) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.10b)$$

$$\mathcal{X}_{\square\square} = \square\square \quad (3.10c)$$

$$\mathcal{X}_{\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}} = \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \quad (3.10d)$$

Questa mappa è separatamente omogenea nelle due coppie proiettive date dalle variabili

$$\left[\square\square : \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right], \left[\square\square : \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right].$$

Osserviamo che nella mappa relativa alla prima coppia proiettiva si può fattorizzare il termine:

$$\left(\square\square + (q-1) \cdot \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \right)^2.$$

Come osservato precedentemente, dal momento che siamo su uno spazio proiettivo, è possibile eliminare i fattori comuni dalla mappa e ottenere quella relativa alla decorazione di figura 3.12, che genera una catena unidimensionale. La mappa relativa alla seconda coppia proiettiva è semplicemente l'identità e

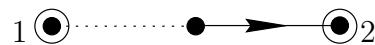


Figura 3.12: Decorazione di ordine (2,2) equivalente a quella che genera il grafo di Cayley del gruppo libero a due generatori.

dunque questa coppia agisce sulla dinamica semplicemente come parametro della mappa relativa alle prime due variabili. Osserviamo che l'equivalenza con il caso unidimensionale (che è poi il «gruppo libero a 1 generatore») è proprio dei grafi di Cayley dei gruppi liberi con un qualsiasi numero di generatori; infatti la mappa relativa alla decorazione con k generatori sarà uguale alla 3.10 modulo la sostituzione della potenza del fattore comune da 2 a $2(k-1)$. Questo è essenzialmente dovuto al fatto che il gruppo è libero, dunque il grafo non può avere dei *loop* e rimane fisicamente unidimensionale.

Capitolo 4

Rinormalizzazione e Dinamica

Nei capitoli precedenti è stato esposto il metodo generale per ottenere la mappa di rinormalizzazione a partire da una qualunque decorazione. In questo capitolo si studieranno le proprietà generali delle mappe di rinormalizzazione, e si esporranno le conclusioni che sarà possibile ottenere. È tuttavia necessario precedere questo studio con una veloce introduzione matematica; approfondimenti ulteriori si possono trovare in [Sib],[SB] e [McM].

4.1 Argomenti di teoria del potenziale e del pluri-potenziale

4.1.1 Teoria del potenziale

La teoria del potenziale può essere considerata il trattamento rigoroso delle funzioni tipo *energia potenziale* che vengono utilizzate in Fisica al fine di studiare la teoria classica dell'elettromagnetismo o della gravitazione. Tale origine è peraltro evidente nella terminologia (cariche, distribuzioni, correnti, potenziali) che la teoria ha ereditato per descrivere questo formalismo.

Cerchiamo innanzitutto la funzione di Green dell'operatore Δ nello spazio \mathbb{R}^n , ovvero quella funzione P tale che:

$$\Delta P(z) = \delta(z),$$

dove l'operatore laplaciano è inteso nel senso delle distribuzioni. Diremo che $P(z)$ è il potenziale generato da una carica o massa unitaria puntiforme posta nell'origine dello spazio \mathbb{R}^n . È semplice determinare le funzioni di Green per ogni n :

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad P(z) = \frac{1}{2}|z| \\ n = 2 & \quad P(z) = \frac{1}{2\pi} \log \|z\| \\ n \geq 3 & \quad P(z) = -\frac{1}{\sigma_{n-1}} \|z\|^{-(n-2)} \end{aligned}$$

dove per $\|z\|$ si considera la norma euclidea dell'opportuno \mathbb{R}^n e σ_m è la misura della sfera m -dimensionale unitaria.

Una misura su \mathbb{R}^n è una distribuzione di cariche positive e possiamo quindi, in analogia al caso elettrostatico definire:

Definizione 4.1.1 Il potenziale P_μ di una misura μ è dato dalla convoluzione

$$P_\mu(z) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} P(z-w) d\mu(w)$$

Osserviamo che la scelta di P è tale per cui $\Delta P_\mu = \mu$ nel senso delle distribuzioni (Teorema di Gauss). Ci domandiamo quali siano le proprietà che una funzione deve possedere per essere il potenziale di una qualche misura.

Definizione 4.1.2 (Proprietà della sottomeia) Sia f una funzione da un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in \mathbb{R} . Si dice che f ha la proprietà della sottomeia se $\forall z_0 \in \Omega, \forall D$ palla centrata in $z_0, D \Subset \Omega$ vale

$$f(z_0) \leq \frac{\int_{\partial D} f(\zeta) d\sigma_{n-1}(\zeta)}{\int_{\partial D} d\sigma_{n-1}(\zeta)}$$

dove $d\sigma_{n-1}$ è la misura di Lebesgue sulla sfera $n-1$ dimensionale.

Definizione 4.1.3 (Funzioni semicontinue superiormente) Una funzione f da uno spazio topologico X a valori in \mathbb{R} si dice semicontinua superiormente (s.c.s.) se i sottolivelli $f^{-1}(-\infty, a) \forall a \in \mathbb{R}$ sono insiemi aperti di X .

Definizione 4.1.4 (Funzioni subarmoniche) Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Una funzione $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ è subarmonica se

- u è semicontinua superiormente;
- u ha la proprietà della sottomeia;
- u non è identicamente $-\infty$ su nessuna componente di Ω .

Si può mostrare che se u è subarmonica, $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ e che $\Delta u \geq 0$ nel senso delle distribuzioni. Quindi data una funzione subarmonica, essa è localmente il potenziale di una distribuzione positiva.

Analizziamo ora con degli esempi le funzioni subarmoniche di $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Esempio 4.1.5

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z - z_0|$$

u è subarmonica ed è visibilmente il potenziale di una carica puntiforme posta in z_0 ; infatti è armonica su $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, e il suo laplaciano ha supporto in $\{z_0\}$.

Esempio 4.1.6 Sia $Q(z)$ un polinomio di grado d in \mathbb{C} . Allora si può scrivere

$$Q(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_d),$$

esplicitando la molteplicità delle radici. Quindi

$$\frac{1}{2\pi} \log |Q(z)| = \frac{1}{2\pi} \log |z - z_1| + \frac{1}{2\pi} \log |z - z_2| + \cdots + \frac{1}{2\pi} \log |z - z_d|,$$

che è ancora il potenziale generato da d cariche puntiformi poste sugli zeri del polinomio Q . Per scrivere quindi la distribuzione uniforme supportata sugli zeri di un polinomio è sufficiente prendere il Laplaciano di questo potenziale e normalizzare, se vogliamo una distribuzione di probabilità:

$$\mu_Q \doteq \frac{1}{d} \Delta \left(\frac{1}{2\pi} \log |Q(z)| \right).$$

Esempio 4.1.7 In generale se f è una funzione olomorfa di \mathbb{C} , allora $u = \log |f|$ è subarmonica; in particolare è armonica laddove f non è nulla.

Osserviamo che tutto questo è possibile grazie alle proprietà algebriche di \mathbb{C} e alle rigide proprietà dello spazio delle funzioni olomorfe. Ci domandiamo quindi come sia possibile estendere questi risultati a spazi complessi a più dimensioni, e a varietà complesse come gli spazi proiettivi.

4.1.2 Teoria del pluripotenziale

È necessario introdurre alcuni concetti nuovi, che sono gli stretti analoghi multidimensionali dei concetti introdotti in precedenza. Tale introduzione sarà presentata esplicitandone il parallelismo, in maniera da semplificare la comprensione.

Funzioni plurisubarmoniche La prima definizione da introdurre estende a \mathbb{C}^n il concetto di subarmonicità su \mathbb{C} . Naturalmente sarebbe possibile considerare la proprietà di subarmonicità su $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, ma questa si rivela troppo debole per ereditare tutte le buone caratteristiche della subarmonicità su \mathbb{C} .

Definizione 4.1.8 (Funzioni plurisubarmoniche) Sia Ω un aperto di \mathbb{C}^n e u una funzione da Ω in $[-\infty, +\infty[$ tale che:

- u è semicontinua superiormente;
- u non è identicamente $-\infty$ su nessuna componente di Ω ;
- vale la seguente proprietà:

$\forall z_0 \in \Omega, \forall w \in \mathbb{C}^n$ t.c. il disco $z_0 + wD \Subset \Omega$, dove D è il disco unità di \mathbb{C}

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + we^{i\theta}) d\theta.$$

Allora si dice che u è plurisubarmonica in Ω o p.s.h., o ancora $u \in Psh(\Omega)$.

Osservazione 4.1.9 Dal momento che le funzioni plurisubarmoniche di \mathbb{C}^n sono subarmoniche su \mathbb{R}^{2n} , dunque effettivamente la condizione p.s.h. è più forte della sola subarmonicità.

Le funzioni plurisubarmoniche soddisfano una proprietà di compattezza che si rivela essenziale per lo studio delle caratteristiche delle mappe razionali.

Teorema 4.1.10 *Sia u_j una successione di funzioni plurisubarmoniche su un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^m$. Supponiamo che per tutti i compatti $K \Subset \Omega$, la successione sia maggiorata da una funzione plurisubarmonica. Allora o u_j converge a $-\infty$ sui compatti di Ω o esiste una sottosuccessione u_{j_k} che converge in $\mathcal{L}_{loc}^1(\Omega)$ a una funzione plurisubarmonica.*

Le funzioni pluriarmoniche (cioè le funzioni u tali che sia u che $-u$ siano plurisubarmoniche) giocano il ruolo delle funzioni armoniche in dimensione 1; in particolare una funzione pluriarmonica è la parte reale di una funzione olomorfa, e dunque è analitica.

Correnti Diventa ora necessario trovare l'analogo multidimensionale delle distribuzioni. L'oggetto giusto da studiare sono le *correnti*. Prima di definire le correnti, ricordiamo la definizione di distribuzione di Schwartz.

Definizione 4.1.11 *Sia $\mathcal{D} = \mathcal{C}_0^\infty(M)$ lo spazio vettoriale delle funzioni su una varietà liscia M che hanno supporto compatto e che sono infinitamente derivabili. Stabiliamo su \mathcal{D} una nozione di convergenza dicendo che una successione $f_j \rightarrow 0$ se le f_j sono a supporto in un compatto fissato K e se $f_j \rightarrow 0$ uniformemente con tutte le loro derivate. Una distribuzione (di Schwartz) è un funzionale lineare continuo su \mathcal{D} . Lo spazio delle distribuzioni si indica con \mathcal{D}' .*

Ora possiamo definire le correnti.

Definizione 4.1.12 *Sia $\mathcal{D}^p(M)$ lo spazio vettoriale delle p -forme differenziali lisce e a supporto compatto su una varietà liscia M di dimensione m . Stabiliamo su $\mathcal{D}^p(M)$ una nozione di convergenza dicendo che una successione $\omega_j \rightarrow 0$ se le componenti di ω_j sono a supporto in un compatto fissato K e se tendono a zero uniformemente con tutte le loro derivate. Una corrente S di dimensione p (o corrente di grado $m - p$ o ancora $(m - p)$ -corrente) è un funzionale lineare continuo su \mathcal{D}^p . Lo spazio delle correnti di dimensione p si indica con \mathcal{D}'_p .*

Osservazione 4.1.13 *Sia N una sottovarietà di dimensione n di M . Allora N induce una corrente di dimensione n o una $(m - n)$ -corrente $[N]$ nella seguente maniera:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^n(M) \quad \langle [N], \varphi \rangle = \int_N \varphi$$

Questo fatto illustra il motivo per cui si dice che una corrente che agisce su una forma di grado p ha dimensione p .

Osservazione 4.1.14 *Si può in effetti pensare alle correnti di grado $m - p$ come «forme» di grado $m - p$ con coefficienti che sono distribuzioni, in particolare un elemento di \mathcal{D}^{m-p} è anche una $(m - p)$ -corrente. Infatti:*

$$\omega \in \mathcal{D}^{m-p}(M), \varphi \in \mathcal{D}^p(M); \langle \omega, \varphi \rangle \doteq \int_M \omega \wedge \varphi$$

Questo fatto illustra il motivo per cui si dice che una corrente che agisce sulle forme di grado $m - q$ ha grado q .

La topologia sullo spazio delle correnti è l'usuale topologia debole, cioè quella indotta dalla seguente nozione di convergenza:

$$\{S_j\} \subset \mathcal{D}'_p(M) \quad S_j \rightarrow S \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}^p(M) \quad \langle S_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle S, \varphi \rangle$$

Esattamente come si può moltiplicare una misura per una funzione, è possibile moltiplicare esternamente una p -corrente per una k -forma definendo l'operazione per dualità:

$$\langle S \wedge \omega, \varphi \rangle \doteq \langle S, \omega \wedge \varphi \rangle$$

La corrente risultante è una $(p+k)$ -corrente. Il prodotto di correnti soffre in generale degli stessi problemi di buona definizione del prodotto di misure, tuttavia in alcuni casi sarà possibile parlare di prodotto di due o più correnti.

Proprio come è possibile derivare le misure agendo per dualità, allo stesso modo si può prendere il differenziale esterno di una p -corrente nel modo seguente:

$$\langle dS, \varphi \rangle = (-1)^{p+1} \langle S, d\varphi \rangle,$$

e dS sarà una $p+1$ -corrente.

Supponiamo di avere due varietà M di dimensione m e N di dimensione n ; sia poi $f : M \rightarrow N$ una applicazione \mathcal{C}^∞ . Studiamo ora il comportamento delle correnti per pull-back o push-forward. Sappiamo che l'operazione naturale sui campi vettoriali è il push-forward mediante il differenziale f_* ; essendo le forme differenziali il duale dei campi vettoriali, l'operazione naturale su di loro è il pull-back f^* . Sulle correnti, essendo a loro volta il duale delle forme a supporto compatto, agisce naturalmente l'operazione di push-forward. Infatti sia $S \in \mathcal{D}'_p(M)$ una corrente sulla varietà di partenza. Si supponga poi che f ristretta al supporto di S sia una applicazione propria (controimmagine di compatti sia compatta): in questo caso il pull-back di una forma a supporto compatto in N è una forma a supporto compatto in sul supporto di S . Quindi si può definire il push-forward f_*S di S come quella corrente di dimensione p sulla varietà di arrivo N definita nel modo seguente:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^p(N), \langle f_*S, \varphi \rangle \doteq \langle S, f^*\varphi \rangle$$

Per definire il pull-back di correnti abbiamo bisogno di ipotesi più forti sulla f . Ora supponiamo $m \geq n$ e sia f una sommersione (cioè una applicazione con rango massimo in ogni punto) propria. Le preimmagini di ogni punto sono sottovarietà compatte della varietà M di dimensione $(m-n)$ (teorema di sommersione locale). È possibile definire in questo caso una operazione di push-forward f_* sulle forme $\psi \in \mathcal{D}^{m-p}(M)$ definita nel modo che segue: per ogni punto $x \in N$ e ogni $(n-p)$ -upla di vettori nello spazio tangente T_xN , possiamo definire una $(m-n)$ -forma su $f^{-1}(x)$ che si ottiene applicando ψ a una $(n-p)$ -upla di preimmagini dei vettori di N tramite una restrizione di $(f_*)^{-1}$.

$$\psi \in \mathcal{D}^{m-p}(M), v_1, \dots, v_{n-p} \in TM \quad \underbrace{\psi(v_1, v_2, \dots, v_{n-p}, \cdot, \dots, \cdot)}_{n-p} \in \mathcal{D}^{m-n}(M)$$

Otteniamo quindi una $(m-n)$ -forma che è possibile integrare sulla sottovarietà $f^{-1}(x)$. Quindi se $w_i = f_*v_i$ $i = 1, \dots, n-p$ e $\psi \in \mathcal{D}^{m-p}(M)$ definiamo

$$(f_*\psi)(w_1, \dots, w_{n-p}) = \int_{f^{-1}(p)} \psi(v_1, \dots, v_{n-p})$$

L'applicazione così definita porta dalle forme di dimensione $m-p$ in M a quelle di dimensione $n-p$ in N e si ha:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^p(N), \int_N f_* \psi \wedge \varphi = \int_N \psi \wedge f^* \varphi$$

Per dualità resta definita l'operazione di pull-back f^* sulle correnti di N :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^p(M) \quad \langle f^* S, \varphi \rangle = \langle S, f_* \varphi \rangle$$

Forme e correnti su varietà complesse Su \mathbb{C} abbiamo due forme di base standard indipendenti che sono dz (forme lineari) e $d\bar{z}$ (forme antilineari); dunque se studiamo forme differenziali e correnti su varietà complesse di dimensione non banale, sarà necessario indicare la dimensione relativa a entrambe le forme di base. In generale una forma a supporto compatto di bigrado (p, q) si può scrivere come

$$\mathcal{D}^{p,q} \ni \varphi = \sum_{|I|=p, |J|=q} \varphi_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

con $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ e naturalmente $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. Restano definite per dualità le correnti di bidimensionalità (p, q) .

Definizione 4.1.15 (Correnti positive) Si tratta dello stretto analogo delle distribuzioni positive. Una (p, p) -forma α si dice positiva se per ogni sottovarietà complessa Y di dimensione p , la restrizione $\alpha|_Y$ è una forma di volume non negativa, o equivalentemente se α si può scrivere come:

$$\alpha = i\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge i\omega_p \wedge \bar{\omega}_p \quad \text{con } \omega_j \in \mathcal{D}^{1,0}$$

Sia S una corrente di bidimensionalità (p, p) ; si dice che S è positiva se $\langle S, \varphi \rangle \geq 0$, per tutte le (p, p) -forme φ positive.

L'operatore di differenziazione esterna d si decompone nella somma di due operatori: ∂ e $\bar{\partial}$ che sono di seguito definiti per componenti:

$$\partial \varphi = \sum \frac{\partial \varphi_{IJ}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad \bar{\partial} \varphi = \sum \frac{\partial \varphi_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

Si definisce un altro operatore di differenziazione esterna:

$$d^c \doteq \frac{i}{2\pi} (\bar{\partial} - \partial).$$

che ha la proprietà, come d , di essere un operatore reale, cioè che $\overline{d^c u} = d^c \bar{u}$.

Osservazione 4.1.16

$$dd^c = \frac{i}{2\pi} (\partial + \bar{\partial}) (\bar{\partial} - \partial) = \frac{i}{2\pi} (\partial \bar{\partial} - \partial^2 + \bar{\partial}^2 - \bar{\partial} \partial) = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} = -d^c d$$

Inoltre su \mathbb{C} vale

$$\begin{aligned} dd^c f &= \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} f = \frac{i}{\pi} \cdot (\partial_z \partial_{\bar{z}} f) dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \frac{i}{\pi} \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y) \frac{1}{2} (\partial_x + i\partial_y) f (dx - idy) \wedge (dx - idy) \\ &= \frac{i}{4\pi} (\partial_x^2 + \partial_y^2) f (-2idx \wedge dy) = \frac{1}{2\pi} \Delta f dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Quindi dd^c ha la normalizzazione giusta per cui

$$dd^c \log |z| = \delta(z).$$

Per dualità gli stessi operatori agiscono sulle correnti:

$$\begin{aligned} \langle dS, \varphi \rangle &= (-1)^{1+p+p} \langle S, d\varphi \rangle = -\langle S, d\varphi \rangle \\ \langle d^c S, \varphi \rangle &= (-1)^{1+p+p} \langle S, d^c \varphi \rangle = -\langle S, d^c \varphi \rangle \\ \langle dd^c S, \varphi \rangle &= (-1)^{1+p+p} (-1)^{1+1+p+p} \langle S, d^c d\varphi \rangle = \langle S, dd^c \varphi \rangle. \end{aligned}$$

È necessario fare attenzione ai segni. Il d per passare al fattore di destra, prende un $(-)$ dall'integrazione per parti, e uno per ciascuna forma di base che scavalca. Nel caso di d o d^c singoli, essi devono scavalcare p forme del tipo dz e altrettante del tipo $d\bar{z}$; nel caso di dd^c , il primo operatore deve scavalcare $p+1$ forme di un tipo e p dell'altro, mentre il secondo ne ha solo p di un tipo e p dell'altro. In totale si ha un segno $(-)$ che serve a mandare $d^c d$ in dd^c nel fattore di destra.

Esattamente come una funzione subarmonica ha laplaciano positivo nel senso delle distribuzioni, valgono i seguenti fatti per le funzioni plurisubarmoniche:

- una funzione $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ è uguale quasi ovunque a una funzione p.s.h. se e solo se la $(1, 1)$ -corrente $dd^c u$ è una corrente positiva.
- Se S è una $(1, 1)$ -corrente positiva chiusa, per ogni $z_0 \in \Omega$, esiste un intorno $U \ni z_0$ e $u \in \text{Psh}(U)$ t.c. $S = dd^c u$. Naturalmente se u_1 e u_2 sono due soluzioni di $dd^c u_i = S$, la loro differenza è una funzione pluriarmonica (u è pluriarmonica se vale $dd^c u = 0$).

Esempio 4.1.17 Fissiamo $w \in \mathbb{C}^n$ e consideriamo la funzione $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita $u(z) = \log |\langle z, w \rangle| = \log |z_1 w_1 + \dots + z_n w_n|$. Si tratta di una funzione plurisubarmonica che rappresenta il pluripotenziale di una corrente uniformemente distribuita sull'iperpiano ortogonale al vettore w

Esempio 4.1.18 Supponiamo ora che $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sia un polinomio, R sia l'insieme delle radici e $[R]$ dunque sia la $(1, 1)$ -corrente (che nel caso di \mathbb{C} è una misura) uniforme sulle radici (contate con le molteplicità opportune. Abbiamo già visto come

$$[R] = dd^c \log |P|$$

La cosa vale in più dimensioni: $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sia un polinomio, V sia l'insieme dei punti tali che il polinomio P si annulli (V sarà formato in generale da ipersuperfici); allora vale:

$$[V] = dd^c \log |P|$$

dove $[V]$ si considera con le dovute molteplicità. Questo risultato è noto come formula di Poincaré-Lelong

4.1.3 Correnti di grado $(1, 1)$ su \mathbb{P}^k

L'ultimo passo che va compiuto prima di cominciare a utilizzare questo formalismo nei casi di nostro interesse è quello di definire le correnti di grado $(1, 1)$ su \mathbb{P}^k . Sia $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$ la proiezione canonica.

Definizione 4.1.19 Definiamo \mathcal{P} il cono convesso reale delle funzioni u , plurisubarmoniche di \mathbb{C}^{k+1} che verificano la seguente proprietà di omogeneità per un qualsiasi c reale positivo.

$$u(\lambda z) = c \log |\lambda| + u(z), \forall z \in \mathbb{C}^{k+1} \quad (4.1)$$

Gli elementi di \mathcal{P} si considerano normalizzati imponendo che

$$\int_B u \, dm = 0$$

dove B è la sfera unitaria e dm la misura di Lebesgue sulla sfera.

È possibile (cfr. per esempio [Sib]) stabilire una corrispondenza tra le funzioni di \mathcal{P} e le correnti $(1, 1)$ positive su \mathbb{P}^k . Ci limitiamo a mostrare come da un elemento di \mathcal{P} si ottenga una corrente su \mathbb{P}^k .

Fissiamo una sezione olomorfa s di π su un aperto $U \subset \mathbb{P}^k$, ovvero una mappa da U in \mathbb{C}^{k+1} tale che $\pi \circ s = \text{Id}$. Per ogni u definisco la corrente R su U :

$$R_s = dd^c(u \circ s).$$

Si tratta di una corrente di grado $(1, 1)$ positiva e chiusa. Mostriamo ora che la scelta della sezione è ininfluente per la definizione della corrente. Scegliamo infatti un'altra sezione s' olomorfa di π . Si ha che $s' = h \cdot s$ con h olomorfa mai nulla. Quindi semplicemente:

$$\begin{aligned} R_{s'} &= dd^c(u \circ s') = dd^c(u \circ (h \cdot s)) = \\ &= dd^c(c \log |h| + u \circ s) = c dd^c \log |h| + dd^c(u \circ s) = 0 + R_s. \end{aligned}$$

Viceversa, se R è una corrente positiva chiusa su \mathbb{P}^k di grado $(1, 1)$, è possibile trovare un unico elemento $u_R \in \mathcal{P}$ tale che $R = dd^c(u \circ s)$ per una qualche sezione s . u_R si definisce *potenziale* di R .

Definizione 4.1.20 Si definisce *norma* di una corrente R di grado $(1, 1)$ positiva chiusa il parametro di omogeneità c relativo al suo potenziale u_R

Osservazione 4.1.21 Sia P un polinomio omogeneo di grado d su \mathbb{C}^{k+1} . Allora

$$\log |P| \in \mathcal{P}, \text{ infatti } \log |P(\lambda z)| = d \cdot \log |\lambda| + \log |P(z)|$$

e naturalmente la corrente associata ha supporto sulle proiezioni degli zeri del polinomio e ha norma pari al grado del polinomio.

4.2 Applicazioni razionali sullo spazio proiettivo

Un'applicazione razionale di grado d su \mathbb{P}^N è una mappa che si può scrivere:

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_N] \mapsto [P_0 : P_1 : \dots : P_N]$$

Con i P_j polinomi omogenei di grado d senza fattori comuni non banali. Osserviamo che nelle carte standard queste mappe sono funzioni razionali, ovvero si possono scrivere come rapporto tra due polinomi.

Definizione 4.2.1 Data una mappa razionale f su \mathbb{P}^N , definiamo un suo sollevamento F una mappa su \mathbb{C}^{N+1} definita come $(z_0, z_1, \dots, z_N) \mapsto (P_0, P_1, \dots, P_N)$. La F è definita a meno di fattori moltiplicativi non nulli.

Definizione 4.2.2 Data una mappa razionale f , definiamo il suo insieme di indeterminazione $I \doteq \pi(F^{-1}(\{0\}))$. Sono i punti di \mathbb{P}^N su cui la mappa non può essere definita. Osserviamo che la definizione di I è una buona definizione poiché non dipende dal sollevamento scelto.

Esempio 4.2.3 Proponiamo un esempio semplice di mappa con insieme di indeterminazione non vuoto $I \neq \emptyset$. È facile vedere che la mappa va cercata in \mathbb{P}^n con $n \geq 2$ poiché abbiamo fatto la richiesta che i polinomi non abbiano fattori comuni a tutti.

$$(z, w, t) \mapsto ((z - w), (z - w), (w - t))$$

Questa mappa molto semplice si annulla su tutta la retta complessa $z = w = t$. Dunque la f di cui è il sollevamento avrà come punto di indeterminazione $I = [1 : 1 : 1]$. Osserviamo che in generale, grazie alla proprietà dei P_j di non avere fattori comuni, I è sempre un insieme di codimensione almeno 2.

Definizione 4.2.4 Una mappa f sul proiettivo \mathbb{P}^N si dice dominante se preso un qualunque sollevamento F , il suo determinante Jacobiano è non identicamente nullo. Le mappe dominanti da \mathbb{P}^N in sé di grado d si indicano con $\mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$.

Definizione 4.2.5 Se $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$ e $I_f = \emptyset$, la mappa f si dice olomorfa. Il semigrupp delle mappe olomorfe da \mathbb{P}^N in sé di grado d si indica con $\mathcal{H}_d(\mathbb{P}^N)$.

Notiamo che in \mathbb{P}^1 $\mathcal{M}_d = \mathcal{H}_d$, in quanto l'insieme di indeterminazione è sempre vuoto.

L'insieme di indeterminazione è il responsabile di un curioso fenomeno che può accadere iterando mappe razionali.

Esempio 4.2.6 (Mappa non algebricamente stabile) Consideriamo $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $h : [x : y : t] \mapsto [t(x + t) : yt + x^2 : t^2]$. Notiamo che l'iperpiano $t = 0$ è mandato sul punto $[0 : 1 : 0]$, che appartiene a I . Calcoliamo poi h^2

$$h^2 : [x : y : t] \mapsto [t^3(x + 2t) : t^2((yt + x^2) + (x + t)^2) : t^4],$$

e osserviamo che questo sollevamento ha come fattore comune t^2 . Il grado di h^2 è dunque 2, come il grado di h , e non 4 come ci si potrebbe aspettare. Questo fatto ci dice che l'applicazione h non è «algebricamente stabile».

Definizione 4.2.7 Una applicazione dominante $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$ si dice algebricamente stabile se non esiste alcun intero n e alcuna ipersuperficie V di codimensione 1 tale che $f^n(V) \subset I$. Questa proprietà è equivalente ad imporre che il grado d_n dell'iterata n -esima sia uguale a d^n .

In generale il grado d_n dell'iterata n -esima sarà minore o uguale a d^n .

Definizione 4.2.8 Sia $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$ una applicazione algebricamente stabile.

- Si definisce l'insieme E come la chiusura dei punti di indeterminazione delle iterate di f :

$$E \doteq \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n}$$

- Si definisce insieme di Fatou F l'insieme dei punti $p \in \mathbb{P}^N$ tale che esiste U intorno aperto di p su cui la famiglia delle funzioni iterate ristrette all'intorno $f^n|_U$ sia equicontinua.
- Si definisce insieme di Julia J il complementare di F .
- Si definisce N l'insieme dei punti normali come l'insieme dei punti $p \in \mathbb{P}^N$ tale che esiste U intorno aperto di p e $\exists V$ intorno aperto di I tali che $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(U) \cap V = \emptyset$. f si dice normale se $N = \mathbb{P}^k \setminus E$.

L'insieme di Fatou è aperto e risulta disgiunto da E e di conseguenza J è un compatto che contiene E .

Data una mappa $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$, possiamo associarle una $(1, 1)$ -corrente positiva chiusa nota come *corrente di Green*. Vedremo che se f è la mappa di rinormalizzazione associata ad un sistema fisico, la sua corrente di Green sarà molto importante per studiare i domini di analiticità delle funzioni termodinamiche associate. Osserviamo ora come la mappa f induca naturalmente una mappa tra le correnti positive chiuse di grado $(1, 1)$. Sia S una corrente di questo tipo e u il suo potenziale tale che $dd^c u = \pi^* S$. L'azione di f su \mathbb{P}^N induce una azione sullo spazio delle correnti di grado $(1, 1)$ positive e chiuse:

$$S \mapsto f^* S \text{ t.c. } \pi^*(f^* S) = dd^c(u \circ F)$$

Osserviamo che il supporto di $f^* S$ è la preimmagine mediante f del supporto di S . È vero inoltre (cfr. [Sib]) che se f è dominante, f^* agisce in maniera continua sullo spazio delle correnti di grado $(1, 1)$ positive e chiuse, nel senso che

$$S_j \rightarrow S \Rightarrow f^* S_j \rightarrow f^* S$$

Andremo tra poco a definire la corrente di Green. Prima è necessario definire la forma di Kähler standard ω (forma di Fubini-Study) su \mathbb{P}^N . Essa è definita dalla relazione:

$$\pi^* \omega = dd^c \log |z|$$

Teorema 4.2.9 (Da [Sib]) Sia $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$ una applicazione dominante di grado $d \geq 2$ algebricamente stabile. La successione

$$T_n \doteq \frac{1}{d^n} (f^n)^* \omega$$

converge verso una corrente positiva chiusa T di bigrado $(1, 1)$ che verifica la seguente proprietà:

$$f^* T = d \cdot T.$$

Se $F = (F_0, F_1, \dots, F_N)$ è un sollevamento di f , T ammette un potenziale G plurisubarmonico su \mathbb{C}^{N+1} che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} G(\lambda z) = \log |\lambda| + G(z) \\ G(F(z)) = d \cdot G(z) \end{cases}$$

Dim: La dimostrazione è interessante poiché costruttiva. Prendiamo un sollevamento F di f tale che il $\sup_{\|z\|=1} \|F\| = 1$. Per l'omogeneità vale quindi:

$$|F(z)| \leq |z|^d \text{ da cui } |F^{n+1}(z)| \leq |F^n(z)|^d \quad (4.2)$$

Ricordiamo che ω è definito in modo tale che $\pi^*\omega = dd^c u = dd^c \log |z|$. Definiamo le «approssimanti della funzione di Green»:

$$G_n \doteq \frac{1}{d^n} u \circ F^n = \frac{1}{d^n} \log |F^n|,$$

per le quali per definizione vale $\pi^*T_n = dd^c G_n$. Per la proprietà data dalla (4.2) abbiamo:

$$G_{n+1}(z) = \frac{1}{d^{n+1}} \log |F^{n+1}(z)| \leq \frac{1}{d^{n+1}} d \log |F^n(z)| = G_n(z),$$

da cui si deduce che la successione G_n è una successione decrescente di funzioni p.s.h. (logaritmo del modulo di una mappa olomorfa). Le G_n dunque convergono verso un limite G che o è plurisubarmonica o è identicamente $-\infty$. Dimostriamo che $G \not\equiv \infty$. Sia per ogni N :

$$\sigma_N \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{d^n} (f^n)^* \omega.$$

La successione $\{\sigma_N\}$ è una successione di correnti positive chiuse con la proprietà $\|\sigma_N\| = 1$. Si può quindi estrarre una sottosuccessione convergente $\sigma_{N_i} \rightarrow \sigma$. Si deduce, dalla continuità dell'operatore f^* sullo spazio delle correnti, che vale al limite:

$$\frac{1}{d} f^* \sigma = \sigma.$$

Sia h il potenziale di σ ; l'eguaglianza scritta sopra implica che $\frac{1}{d}(h \circ F) = h + c$, con c costante. Definiamo

$$H \doteq h + \frac{cd}{d-1}$$

è ancora un potenziale di σ e in più vale $H \circ F = d \cdot H$. Ciò che mostriamo ora è che $H \leq G$ e ciò implica che $G \not\equiv -\infty$. Infatti dalla relazione $H(\lambda z) = \log |\lambda| + H(z)$ si deduce

$$H(z) \leq \log |z| + C;$$

da cui, usando la relazione $H \circ F = d \cdot H$:

$$H(z) = \frac{1}{d^n} H(F^n(z)) \leq \frac{1}{d^n} (\log |F^n| + C).$$

Passando al limite si riconosce a destra la funzione G e ne si deduce che $H \leq G$ quindi $G \not\equiv -\infty$. Rimane da mostrare che G soddisfa le proprietà indicate nella tesi. Ma esse discendono dalle proprietà delle approssimanti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} G(F(z)) &= \lim \frac{1}{d} G_n(F(z)) = \lim G_{n+1}(z) = G(z) \\ G_n(\lambda z) &= \log |\lambda| + G_n(z) \Rightarrow G(\lambda z) = \log |\lambda| + G(z) \end{aligned}$$

Pertanto la corrente T , definita in modo tale che $\pi^*T = dd^c G$ ha le proprietà seguenti:

$$f^*T = d \cdot T \quad \|T\| = 1$$

■

Questa corrente rispecchia le proprietà dinamiche della mappa f , in particolare vale il teorema seguente:

Teorema 4.2.10 Sia $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$ algebricamente stabile. Allora la corrente T ha supporto contenuto nell'insieme di Julia. Se f è normale il supporto di T è proprio l'insieme di Julia J .

Abbiamo inoltre un argomento di regolarità della funzione di Green:

Teorema 4.2.11 Sia $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$ algebricamente stabile. G è hölderiana su $\pi^{-1}(N)$. In particolare è continua e tali sono tutti i potenziali della stessa corrente, in quanto differiscono da essa per una funzione pluriarmonica.

La proprietà fondamentale della corrente di Green è che il suo supporto è un oggetto definito dinamicamente. Questa proprietà si riflette nei seguenti fatti:

Teorema 4.2.12 (Brolin [Br], Lyubich [Ly]) Consideriamo $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^1)$; la $(1, 1)$ -corrente di Green T , dal momento che studiamo mappe in dimensione 1, è una misura di probabilità che indicheremo con μ .

Esiste un insieme E fatto da al più due punti, completamente invariante, tale che, indicando con δ_w la misura di Dirac concentrata nel punto w vale $\forall w \in \mathbb{P}^1 \setminus E$:

$$\frac{1}{d^n} (f^n)^* \delta_w = \frac{1}{d^n} \sum_{z \in f^{-n}(\{w\})} \delta_z \rightarrow \mu$$

Più in generale se ho una misura ν tale che $\nu(\mathbb{P}^1 \setminus E) \neq 0$, allora $\frac{1}{d^n} (f^n)^* \nu \rightarrow \mu$.

In realtà le mappe che hanno insieme eccezionale non nullo si classificano facilmente. Risultano infatti coniugate¹ a mappe della forma:

- $[z_0 : z_1] \mapsto [P(z_0, z_1) : z_1^d]$ con $P \neq z_0^d \Rightarrow E = \{z_1 = 0\}$;
- $[z_0 : z_1] \mapsto [z_0^d : z_1^d] \Rightarrow E = \{z_0 = 0\} \cup \{z_1 = 0\}$
- $[z_0 : z_1] \mapsto [z_1^d : z_0^d] \Rightarrow E = \{z_0 = 0\} \cup \{z_1 = 0\}$

L'insieme delle mappe per cui si ha insieme eccezionale nullo è quindi assai ristretto. Questo risultato è stato esteso recentemente a \mathbb{P}^2 :

Teorema 4.2.13 (Favre-Jonsson [FJ]) Sia $f \in \mathcal{H}_d(\mathbb{P}^2)$ di grado $d \geq 2$. Allora esistono un insieme algebrico E_1 completamente invariante ($f^{-1}(E_1) = E_1 = f(E_1)$) composto al più da tre linee complesse e un insieme finito E_2 totalmente invariante con la proprietà seguente: se S è una corrente positiva chiusa di grado $(1, 1)$ e massa unitaria tale che:

- S non carica le linee complesse di cui è composto E_1 ;
- S ha un potenziale locale limitato su E_2

Allora vale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} f^{n*} S = T$$

¹Due mappe f e g sono coniugate se sono uguali modulo un cambio di coordinate, ovvero se esiste una $h : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$ invertibile tale che $f \circ h = h \circ g$

Anche in questo caso le mappe che hanno insieme eccezionale non vuoto sono poche; osserviamo inoltre che nel passare da \mathbb{P}^1 a \mathbb{P}^2 i due punti dell'insieme eccezionale in \mathbb{P}^1 diventano tre linee in \mathbb{P}^2 . Le tre linee sono, mediante un opportuno cambio di coordinate le tre linee $\{z_0 = 0\}, \{z_1 = 0\}, \{z_2 = 0\}$. Si congettura che risultati analoghi valgano in \mathbb{P}^n , ma tuttora mancano teoremi precisi, che stabiliscano la forma degli insiemi eccezionali, anche se in linea generale ci si aspetta un comportamento simile a quello in dimensione bassa, cioè al più n ipersuperfici di codimensione 1. Per il caso di mappe razionali dominanti non olomorfe, non ci sono risultati analoghi, ma vale un risultato di generalità piuttosto confortante ([Sib]) che assicura che data una famiglia di correnti dipendenti da un parametro ($w \in \mathbb{C}^l, \|w\| \leq 1$ per qualche l) con alcune buone (ma non troppo restrittive) proprietà, allora l'insieme dei parametri \mathcal{E} per cui la corrente **non** converge alla corrente di Green è un insieme² di misura di Lebesgue nulla in cplx^l . Questo risultato non è spendibile nel nostro caso, dal momento che noi consideriamo di partire da una corrente supportata sugli zeri della funzione di partizione del grafo iniziale. E nulla ci assicura che quel «punto» nello spazio delle correnti non appartenga proprio all'insieme \mathcal{E} delle correnti che non convergono alla corrente di Green.

4.3 La connessione con l'energia libera

Osservazione 4.3.1 *Nella precedente parte del capitolo abbiamo descritto una procedura che, data una mappa $f : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$, permette di definire una operazione f^* sullo spazio delle correnti di grado $(1, 1)$ positive e chiuse. Un particolare esempio di correnti sono quelle che si possono rappresentare come integrazione su una data sottovarietà. Abbiamo poi già notato come f^*T sia una corrente supportata sulla preimmagine del supporto di T . I teoremi 4.2.12 e 4.2.13 in quest'ottica dicono che il limite delle preimmagini mediante le iterate di f di una sottovarietà di codimensione $(1, 1)$ generica è indipendente dalla scelta iniziale della sottovarietà, salvo casi eccezionali.*

Vedremo ora come questa osservazione si applica allo studio dei modelli gerarchici.

Definizione 4.3.2 *Dato un sistema termodinamico, con funzione di partizione \mathcal{Z} , si definisce l'energia libera per questo sistema come*

$$\mathcal{F}(z) \doteq \frac{1}{\#\text{elementi}} \log |\mathcal{Z}(z)|$$

dove gli elementi di cui si deve tener conto sono, nel nostro caso, i legami, su cui, per le nostre assunzioni, va sommata la più generale interazione. Il modulo $|\cdot|$ nella definizione di \mathcal{F} serve per rendere reale la funzione; nei casi fisici l'energia libera è già reale e dunque le due definizioni con o senza il modulo sono (fisicamente) equivalenti.

La presenza della normalizzazione serve per poter introdurre l'energia libera anche nel limite termodinamico, quando il numero di elementi è infinito.

Ricordiamo che il numero di legami introdotti con una fissata decorazione è pari al grado della mappa di rinormalizzazione associata e lo stesso vale per il

²Si tratta in realtà di un insieme pluripolare; gli insiemi pluripolari sono gli insiemi «piccoli» in teoria del potenziale.

numero di legami di un tipo assegnato. Pertanto il numero di legami dell'iterazione n -esima di una decorazione omogenea³ su un grafo iniziale sarà pari al prodotto tra il numero di legami del grafo iniziale e d^n . Il numero di legami del grafo iniziale sarà naturalmente pari al grado della funzione di partizione relativa a quel grafo. Per la proprietà dei modelli gerarchici (1.4.6), la funzione di partizione dell' n -esima decorazione di un grafo Γ_0 è:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{D}^n \Gamma_0} = \mathcal{Z}_{\Gamma_0} \circ \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}^n$$

Quindi l'energia libera dell' n -esima decorazione di un grafo Γ_0 si scrive:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}^n \Gamma_0} = \frac{1}{\deg \mathcal{Z}_{\Gamma_0}} \frac{1}{d^n} \log |\mathcal{Z}_{\Gamma_0} \circ \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}^n|. \quad (4.3)$$

Osservazione 4.3.3 *L'energia libera \mathcal{F} risulta dunque il pluripotenziale della corrente supportata sugli zeri del polinomio $\mathcal{Z}_{\Gamma_0} \circ \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}^n$, che sono gli zeri di Lee e Yang del nostro sistema.*

Il nucleo di questo lavoro di tesi sta nel mettere in luce la corrispondenza tra le proprietà di analiticità della funzione di Green \mathcal{G} e quelle dell'energia libera \mathcal{F} .

Gli zeri della funzione di partizione al passo n -esimo si possono scrivere come

$$[LY_n] = \frac{1}{d^n} (\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}^n)^* [LY_0],$$

dove $[LY_0]$ è la corrente supportata sugli zeri della funzione di partizione del reticolo iniziale Γ_0 .

$$[LY_0] = \frac{1}{\deg \mathcal{Z}_{\Gamma_0}} \log |\mathcal{Z}_{\Gamma_0}|$$

Se valessero dei Teoremi di tipo Brolin in dimensione arbitraria, basterebbe controllare che $[LY_0]$ non sia supportata sull'insieme eccezionale E per poter affermare che $[LY_n] \rightarrow T$ e quindi avere che i domini di analiticità delle funzioni termodinamiche non contengono il supporto della corrente di Green associata alla mappa di rinormalizzazione, che risulta dunque far parte dei luoghi dove è possibile trovare una transizione di fase.

Potenziali diversi della stessa corrente sono infatti tali per cui la loro differenza è una funzione pluriarmonica, che è sempre (localmente) la parte reale di una funzione olomorfa, dunque analitica; i punti dove \mathcal{G} non è analitica sono pertanto gli stessi dei punti in cui \mathcal{F} non è analitica. Naturalmente è necessario controllare che le mappe di rinormalizzazione soddisfino le ipotesi dei teoremi enunciati. In particolare risulta decisiva l'ipotesi di *dominanza*; esistono dei casi semplici in cui la mappa di rinormalizzazione relativa a una decorazione omogenea è non dominante:

Esempio 4.3.4 (Decorazione simmetrica) *Una decorazione con determinate proprietà di simmetria ha dei vincoli algebrici sull'immagine e dunque naturalmente non ha in nessun punto rango massimo. Consideriamo ad esempio la decorazione di figura 1.6 a pagina 4. La mappa di rinormalizzazione a lei associata soddisfa la relazione*

$$\mathcal{Z}_{s_1 s_2}([z]) = \mathcal{Z}_{s_2 s_1}([z]) \quad \forall [z] \in \mathbb{P}^{N-1 \div q^2 - 1}$$

³Per le decorazioni non omogenee non esiste un calcolo altrettanto semplice

Quindi naturalmente la mappa $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, avendo come immagine un insieme algebrico, **non** è dominante

Esempio 4.3.5 (Decorazione riducibile) Una decorazione la cui mappa si può scrivere come prodotto di decorazioni relative a un numero di spin minore dell'ordine della decorazione si dice *riducibile*. Un esempio semplice è il caso di una decorazione che sconnette tra loro i vertici esterni. In generale però una decorazione fatta in questo modo non può avere come immagine che un insieme algebrico e dunque non può essere dominante. Consideriamo ad esempio la decorazione di figura 4.1. È ovvio che la

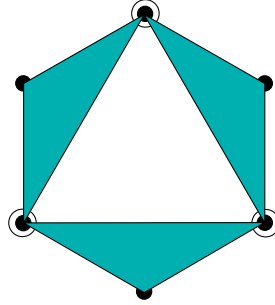


Figura 4.1: Esempio di decorazione riducibile di ordine 3

mappa di rinormalizzazione si può scrivere:

$$\mathcal{L}_{abc} = \tilde{\mathcal{L}}_{ab} \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{bc} \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{ca},$$

pertanto, le \mathcal{L}_I soddisfano la relazione algebrica:

$$\forall i \neq i', j \neq j', k \neq k' \quad \frac{\mathcal{L}_{ijk} \cdot \mathcal{L}_{i'jk'}}{\mathcal{L}_{ijk'} \cdot \mathcal{L}_{i'jk}} = \frac{\tilde{\mathcal{L}}_{ki} \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{k'i'}}{\tilde{\mathcal{L}}_{k'i} \cdot \tilde{\mathcal{L}}_{ki'}} = \frac{\mathcal{L}_{ij'k} \cdot \mathcal{L}_{i'j'k'}}{\mathcal{L}_{ij'k'} \cdot \mathcal{L}_{i'j'k}}.$$

4.4 Decorazioni non omogenee e stabilità algebrica

Abbiamo già visto come le mappe indotte da decorazioni non omogenee siano separatamente omogenee e dunque definibili su un opportuno spazio (un prodotto cartesiano di spazi proiettivi) che abbiamo definito $\mathbb{P}^{\mathcal{N}-1}$. Non sono tuttavia a tutt'oggi noti procedimenti generali per studiare mappe razionali su simili spazi, anche se in casi particolari è comunque possibile produrre dei risultati, come avremo modo di vedere nel capitolo 5.

Si può essere tentati dal considerare queste mappe separatamente omogenee come semplici mappe non omogenee da $\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ in sé. Dal momento che è conveniente studiare l'iterazione di mappe su una varietà compatta, le mappe su $\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$ vengono tipicamente *estese* a $\mathbb{P}^{\mathcal{N}}$ seguendo il procedimento illustrato qui di seguito.

Si aggiunge una nuova variabile non fisica x allo spazio dinamico $\mathbb{C}^{\mathcal{N}}$, e si moltiplica ogni componente della mappa per la potenza di x utile a raggiungere il grado più alto presente nella mappa originale. Fissando $x \mapsto x^d$ si ottiene una mappa omogenea da $\mathbb{C}^{\mathcal{N}+1}$ in sé. A questo punto si può passare al quoziente per omogeneità e ottenere una mappa da $\mathbb{P}^{\mathcal{N}}$ in sé.

Esempio 4.4.1 Vogliamo estendere a \mathbb{P}^2 la mappa definita su \mathbb{C}^2

$$(z, w) \mapsto (z^3, zw).$$

Aggiungiamo una variabile x allo spazio e scriviamo:

$$(z, w, x) \mapsto (z^3, zw, x^3).$$

A questo punto la mappa è omogenea e può essere considerata definita sul proiettivo \mathbb{P}^2 .

Mostriamo ora come questo procedimento, in linea di principio, genera mappe che sono **non algebricamente stabili**.

Ricordiamo che una mappa è algebricamente stabile se il grado d_n dell'iterata n -esima è uguale a d^n . Il grado di una mappa associata a una decorazione è, come già osservato, il numero totale dei legami presenti. Visto che per una decorazione non omogenea \mathcal{D} ho più di un tipo di legame presente, non è in generale vero che il numero di legami dell'iterata n -esima di \mathcal{D} è pari a d^n , dal momento che d è semplicemente il numero massimo di legami che provengono da un legame dello stesso tipo. Altri tipi di legame, in generale, verranno decorati con un numero inferiore di legami e dunque daranno luogo a un *difetto* nel numero di legami presenti in una qualche iterata \bar{n} . La mappa di rinormalizzazione associata alla decorazione $\mathcal{D}^{\bar{n}}$, avrà dunque grado totale pari al numero di legami della decorazione, che in generale sarà inferiore a $d^{\bar{n}}$.

Accade che questo comportamento si riscontra anche nell'iterazione della mappa estesa a \mathbb{P}^N associata alla decorazione non omogenea. Infatti se andiamo a considerare $f^{\bar{n}}$ e un suo qualche sollevamento $F^{\bar{n}}$ si può osservare come:

$$F_I^{\bar{n}} = h_{\bar{n}} \cdot (F_{\bar{n}})_I,$$

dove $h_{\bar{n}}$ è un polinomio di grado pari a $(d^{\bar{n}} - d_{\bar{n}})$ e $F_{\bar{n}}$ è un sollevamento della mappa di rinormalizzazione associata a $\mathcal{D}^{\bar{n}}$ estesa a \mathbb{P}^N .

Per esempio la decorazione del tubo (illustrata in figura 3.7) di ordine n porta con ogni iterazione $(2n + 1)$ legami, ma la sua iterazione m -esima ne porta $(2nm + 1)$ e non $(2n + 1)^m$. In questo caso addirittura il numero di legami cresce *linearmente* con le iterazioni, invece che *esponenzialmente*, come ci si dovrebbe attendere da una decorazione omogenea.

Il problema più grave è però un altro. L'iterazione della mappa omogenea figlia della decorazione non omogenea **NON** possiede le medesime proprietà di distribuzione delle preimmagini delle sue controparti omogenee. In particolare vale il seguente teorema.

Teorema 4.4.2 (cfr. [Sib]) Sia $f \in \mathcal{M}_d(\mathbb{P}^N)$ non algebricamente stabile. Allora valgono le seguenti proprietà:

- La corrente di Green T associata ad f è supportata da una unione di ipersuperfici;
- Se $F^m = h_m \cdot F_m$, si ha

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} [h_n = 0],$$

dove $[h_n = 0]$ rappresenta la corrente di integrazione sull'ipersuperficie identificata dalla relazione $(h_n = 0)$;

- Per tutte le correnti positive chiuse S di grado $(1, 1)$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} f^{n*} S = T$$

La corrente di Green di una applicazione algebricamente stabile dunque **non** è supportata sull'insieme dei punti «instabili» della mappa di rinormalizzazione, ma piuttosto rende conto della distribuzione delle ipersuperfici che, per iterazione, raggiungono l'insieme di indeterminazione I . Questo fatto non è tuttavia rilevante dal punto di vista fisico. La mappa con la quale viene fatta evolvere la funzione di partizione è la mappa non omogenea, dal momento che la funzione di partizione stessa è un oggetto non omogeneo. La corrente da studiare sarebbe piuttosto una corrente ottenuta iterando la parte di grado corretto. Infatti se una mappa f non è algebricamente stabile, come abbiamo visto, per m abbastanza grande vale, per un suo qualunque sollevamento:

$$F^m = h_m \cdot F_m$$

Con F_m senza fattori comuni e di grado d_m . L'idea giusta è di studiare la corrente che si ottiene prendendo come funzione di Green:

$$\tilde{\mathcal{G}}_m = \frac{1}{d_m} \log |F_m|$$

Non sono tuttavia attualmente note proprietà di questa funzione simili alle funzioni di Green delle mappe algebricamente stabili, in particolare non sono noti risultati generali che ne assicurino la convergenza.

4.5 Funzione di Green

Nel caso di mappa omogenea, è possibile calcolare numericamente la funzione di Green di un punto sfruttando le proprietà di omogeneità della mappa. In particolare, dal momento che vale:

$$F(\lambda z) = \lambda^d F(z)$$

Possiamo scrivere che

$$\|F(z)\| = \left\| F\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \cdot \|z\|^d,$$

e quindi iterando:

$$\|F^n(z)\| = \left\| F\left(\frac{F^{n-1}(z)}{\|F^{n-1}(z)\|}\right) \right\| \cdot \|F^{n-1}(z)\|^d,$$

e dunque, definendo la successione delle iterate normalizzate:

$$z_n \doteq \frac{F^n(z_0)}{\|F^n(z_0)\|}$$

possiamo definire la successione delle norme:

$$\lambda_n(z_0) \doteq \|F(z_n)\|$$

In questo modo, prendendo $z = z_0$ normalizzato:

$$\begin{aligned} \|F(z)\| &= \lambda_0(z) \\ \|F^2(z)\| &= \lambda_0(z)^d \cdot \lambda_1(z) \\ &\vdots \\ \|F^n(z)\| &= \lambda_0(z)^{d^{(n-1)}} \lambda_1(z)^{d^{(n-2)}} \dots \lambda_{n-1}(z) \end{aligned}$$

Quindi

$$\log(\|F^n(z)\|) = \sum_{j=0}^{n-1} (d^{n-j-1}) \log \lambda_j(z)$$

da cui facilmente:

$$\frac{1}{d^n} \log(\|F^n(z)\|) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{d^{j+1}} \log \lambda_j(z).$$

Ovvero:

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{d^{j+1}} \log \lambda_j(z).$$

Pertanto è possibile sviluppare la funzione di Green in serie nel parametro $\frac{1}{d}$. Questa riscrittura è *estremamente* utile dal punto di vista numerico. Infatti il calcolo dei λ_j non presenta gli stessi problemi di instabilità che invece presenterebbe il calcolo diretto della funzione di Green, dal momento che essi rimangono limitati. Una variante di questo risultato vale per il calcolo dell'energia libera 4.3; in questo caso, tuttavia, si ha

$$\mathcal{F}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{d^{j+1}} \log \lambda_j(z) + \frac{1}{\deg(\mathcal{Z}_{\Gamma_0}) \cdot d^n} \log |\mathcal{Z}_{\Gamma_0}(z_n)| \right)$$

Il secondo addendo è un termine non facilmente controllabile. Se gli z_n non toccano e non si accumulano sugli zeri di \mathcal{Z}_{Γ_0} , il logaritmo rimane finito e dunque è soppresso dalla frazione che lo deprime esponenzialmente e $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Se gli z_n toccano gli zeri, abbiamo dei problemi di definizione. Controllare queste caratteristiche è equivalente a controllare che gli zeri di \mathcal{Z}_{Γ_0} non siano in un qualche insieme speciale, esattamente come enunciato nei teoremi 4.2.12 e 4.2.13.

4.6 Conclusioni

Prima di mostrare i risultati numerici, è opportuno concludere il quadro che abbiamo dipinto fino a questo momento.

In questo lavoro di tesi si sono definiti i modelli di Potts gerarchici, per cui è possibile scrivere la mappa di rinormalizzazione in maniera esatta per ogni possibile valore degli accoppiamenti. Si è visto come questa mappa sia una mappa razionale su spazi proiettivi o su un prodotto cartesiano di spazi proiettivi. Questo risultato, assolutamente unico, permette in certi casi (decorazione omogenea) non solo di stabilire **esattamente** su quale insieme sono supportati gli zeri della funzione di partizione nel limite termodinamico, ma anche di

conoscerne, in linea di principio, la densità. Lo stesso risultato permette di studiare analiticamente e numericamente a questi sistemi anche in presenza di campo magnetico esterno.

La tecnologia matematica che servirebbe per studiare il caso generale non è vicina; passare da polinomi in una variabile complessa ([Br]) a funzioni razionali di \mathbb{P}^1 ([Ly]) ha richiesto circa vent'anni di lavoro, che è curiosamente circa lo stesso tempo che bisogna aspettare per avere la prima generalizzazione al più semplice spazio complesso compatto di dimensione 2 (\mathbb{P}^2 con [FJ]). Lo studio delle mappe separatamente omogenee su $\mathbb{P}^{\mathcal{N}-1}$ non è stato ancora affrontato in linea generale.

Ancora, lo stesso risultato mostra un parallelo assai stretto tra punti in cui la dinamica del gruppo di rinormalizzazione presenta instabilità (Insieme di Julia) e zeri della funzione di partizione, ovvero luoghi di non-analiticità delle funzioni termodinamiche.

Bisogna naturalmente osservare come questa classe di modelli risolubili, seppur vasta, sia composta da modelli costruiti su reticoli assolutamente non banali e tipicamente autosimili (anche se talvolta l'autosimilarità può essere ben nascosta, come nel caso dei tubi); questo potrebbe far pensare a comportamenti particolari e non esportabili a casi più semplici (e più realistici). Dal momento che la quantità di esempi studiati fino a questo momento è decisamente esigua, non è ancora tuttavia molto chiaro come si può rispondere a questa questione.

Capitolo 5

Risultati numerici

5.1 Introduzione

In questo capitolo si riportano alcuni risultati numerici calcolati con programmi originali sviluppati in C++. Per ottenere questi risultati sono stati seguiti due approcci: nel primo vengono cercati i *bacini di attrazione* dei punti fissi attrattivi della mappa di rinormalizzazione e lo spazio fisico viene suddiviso nell'insieme attratto dall'uno o dall'altro punto fisso; nel secondo viene calcolato il laplaciano di una approssimante della funzione di Green e vengono individuati i punti dello spazio fisico per cui tale laplaciano è non nullo.

Carte locali Per studiare numericamente la dinamica è opportuno fissare delle carte locali dello spazio fisico, in maniera tale da lavorare su piani complessi. Ricordiamo che lo spazio fisico è

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni ([z : w], [h_\blacktriangle : h_0]).$$

Definizione 5.1.1 *Chiamiamo piano delle temperature o piano delle interazioni la carta locale standard del primo spazio proiettivo caratterizzata da $w \neq 0$. Ciò è equivalente a studiare le mappe nella variabile*

$$\zeta \doteq e^{-\beta(J_e - J_a)} \doteq e^{-\beta J}.$$

In questo piano (supponendo positiva la temperatura) sul semiasse fisico \mathbb{R}_+ si individuano i punti seguenti:

- 0 corrisponde al caso $J \rightarrow \infty$ (interazione fortemente antiferromagnetica);
- 1 corrisponde al caso $J = 0$ (interazione nulla);
- ∞ corrisponde al caso $J \rightarrow -\infty$ (interazione fortemente ferromagnetica).

Equivalentemente (per dualità) possiamo supporre l'interazione ferromagnetica (negativa) e identificare i punti seguenti:

- 0 corrisponde al caso $\beta \rightarrow -\infty$ (temperatura piccola negativa);

- 1 corrisponde al caso $\beta \rightarrow 0$ (temperatura infinita);
- ∞ corrisponde al caso $\beta \rightarrow \infty$ (temperatura piccola positiva).

Talvolta sarà necessario considerare l'altra carta locale standard, in cui naturalmente accade che i ruoli di 0 e ∞ si scambiano.

Definizione 5.1.2 Chiamiamo piano del campo la carta locale standard del secondo spazio proiettivo caratterizzata da $h_0 \neq 0$. Ciò è equivalente a studiare le mappe nella variabile

$$\tau \doteq e^{-\beta(H_\bullet - H_0)} \doteq e^{-\beta H}.$$

Supponendo positiva la temperatura troviamo sul semiasse fisico \mathbb{R}_+ :

- 0 corrisponde a $H \rightarrow \infty$: lo stato privilegiato è energeticamente molto svantaggiato;
- 1 corrisponde a $H = 0$, cioè il caso senza campo esterno;
- ∞ corrisponde a $H \rightarrow -\infty$: lo stato privilegiato è energeticamente molto avvantaggiato.

In questo caso, se $q = 2$, considerare l'altra carta locale standard è del tutto equivalente per la simmetria $\blacksquare \leftrightarrow \square$. Lo spazio fisico tuttavia risulta, scelte le carte locali, uno spazio complesso di dimensione 2, dunque con 4 dimensioni reali. Risulta più semplice visualizzare sezioni di dimensione complessa 1 di questo spazio; tipicamente si prendono sezioni parallele ora al piano della temperatura a diversi valori del campo esterno, ora al piano del campo esterno a diversi valori della temperatura.

Studio dei bacini di attrazione Lo scopo di questo approccio è di discriminare tra i punti che appartengono ai vari bacini di attrazione della mappa di rinormalizzazione. Il primo compito da svolgere è dunque quello di individuare i punti fissi attrattivi della mappa.

Questo compito è in generale piuttosto semplice, poiché i punti rilevanti sono tipicamente suggeriti dalla Fisica del sistema. Ad esempio un punto tipicamente attrattivo è il punto dato dall'interazione nulla $[1 : 1 : \dots : 1]$ oppure vari punti di tipo ferromagnetico, che tendono ad aumentare il peso di Boltzmann relativo a uno stato concorde (per esempio nel caso $n = 2$ senza campo esterno, il punto $[1 : 0]$ nelle variabili $[\square : \blacksquare]$).

Una volta individuati i punti fissi attrattivi, si definisce per ciascuno di loro un intorno che li contenga e sia sufficientemente piccolo da far sì che tutti i punti contenuti in questo intorno, iterati mediante la mappa, convergano al punto fisso loro relativo. Siano i punti fissi $[z_j]$ e i relativi intorni U_j . A questo punto scegliamo un punto iniziale $[\bar{z}]$ e seguiamo la sua orbita sotto iterazione della mappa di rinormalizzazione. Se una qualche iterata n -esima del punto entra in uno degli U_j , siamo certi che il punto $[\bar{z}]$ converge al punto fisso attrattivo $[z_j]$. Abbiamo in questo modo un metodo algoritmico per stabilire in tempo finito se un generico punto $[z]$ converge a un qualche punto fisso $[z_j]$.

Per implementare questo algoritmo su una macchina è necessario rendere finito il numero dei punti da analizzare, dunque si deve stabilire, assegnata una

carta locale, una regione finita dello spazio \mathbb{C}^2 , o di una sua sezione \mathbb{C} e discretizzarla in pixel¹; in seguito è in linea di principio possibile iterare la mappa per ciascun pixel e stabilire, qualora accada, a quale punto converga.

Bisogna infatti tenere in considerazione il caso in cui il punto scelto non converga a nessun punto attrattivo (possiamo essere tanto fortunati da aver scelto come punto iniziale per esempio un punto fisso repulsivo, o un punto dell'insieme di Julia, dove la dinamica è instabile e i punti non convergono a nessun punto fisso). Per far terminare comunque l'algoritmo è necessario stabilire un limite al numero di iterazioni che siamo disposti a fare prima di dichiarare il punto di partenza non attratto da nessun punto fisso attrattivo.

Si assegna a ogni punto attrattivo un colore e si decide di visualizzare tutti i pixel che convergono a un dato punto fisso con il suo colore. È inoltre possibile scegliere la luminosità del colore in funzione del numero di iterazioni necessario per raggiungere il punto fisso. Ad esempio si stabilisce che più iterazioni sono necessarie per raggiungere il punto fisso, tanto più scuro sarà il colore assegnato al pixel.

Studio della funzione di Green Lo scopo di questo approccio è di visualizzare i punti di non analiticità delle funzioni termodinamiche calcolando numericamente la funzione di Green e il suo laplaciano discretizzato. Stabiliamo le carte locali su cui calcolare la funzione di Green. Anche in questo caso lo spazio risultante è \mathbb{C}^2 , quindi è conveniente prendere delle sezioni di dimensione 1. Queste sezioni si immergono nello spazio dinamico, dove è naturalmente definita la funzione di Green. L'immersione definisce tramite pull-back una funzione di Green sulla sezione:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^k \quad \mathcal{G}(\zeta) \doteq \mathcal{G}(f(\zeta));$$

Dal momento che la sezione viene immersa analiticamente, le proprietà di analiticità della \mathcal{G} definita su \mathbb{C} sono le stesse di quelle di \mathcal{G} sull'immagine dell'immersione nello spazio dinamico. Quindi, se calcoliamo il laplaciano di \mathcal{G} sulla sezione scelta, otteniamo una misura supportata sui punti tali che la funzione di Green non sia analitica sulla loro immagine mediante l'immersione. Si calcola la funzione di Green per ogni pixel con lo sviluppo in serie riportato nella sezione 4.5. Il calcolo del laplaciano si esegue con la nota formula per il laplaciano discretizzato, data δ la distanza tra due pixel:

$$\Delta \mathcal{G}(x + iy) \doteq \frac{1}{\delta^2} \left(\mathcal{G}(x - \delta + iy) + \mathcal{G}(x + \delta + iy) + \mathcal{G}(x + i(y - \delta)) + \mathcal{G}(x + i(y + \delta)) - 4\mathcal{G}(x + iy) \right)$$

Questo approccio ha il vantaggio di essere indipendente dal numero e dalla posizione dei punti attrattivi, e di fornire informazioni sulla densità degli zeri. La densità degli zeri può tuttavia tendere a zero in determinati punti, e dunque, con questo approccio, si rischia di non mostrare completamente il supporto della misura di Green.

¹In maniera più appropriata, nel caso di \mathbb{C}^2 , essi si dovrebbero chiamare *voxel*, che sta per *volumetric pixel*

Spazio dei parametri I modelli di Potts dipendono dal parametro q , che in linea di principio assume valori naturali e maggiori di 1. Nelle mappe di rinormalizzazione, però, q entra in gioco come parametro in forma polinomiale; è dunque possibile pensare di estendere il dominio di q al piano complesso². Si può studiare la dinamica della mappa di rinormalizzazione al variare di q ; sorprendentemente ciò che si osserva è che la stessa *dinamica* presenta a sua volta delle transizioni di fase, chiamate quindi *metatransizioni*.

5.2 Reticolo a diamante

Per il caso senza campo esterno, come abbiamo già osservato nella sezione 3.1, le variabili dinamiche sono *uguali* alle variabili fisiche. Studiando la mappa (3.1 a pag 24) troviamo che essa è naturalmente dominante e i punti fissi attrattivi sono, nel caso $b > 1$ il punto $[1 : 1]$ corrispondente alla fase paramagnetica e $[1 : 0]$ corrispondente alla fase ferromagnetica. Si tratta di punti fissi superattrattivi, ovvero tali che la dinamica in un intorno è coniugata a $[z : x] \mapsto [z^2 : x^2]$.

La teoria della dinamica olomorfa in dimensione uno assicura che il supporto della misura di Green è il bordo tra i due bacini di attrazione (insieme di Julia). Dunque naturalmente si ha che gli zeri di Lee e Yang stanno sul bordo dei domini di stabilità della mappa di rinormalizzazione.

Per questo modello q non influisce sul numero di variabili necessarie per lo studio della dinamica, e pertanto è possibile studiare numericamente il comportamento della mappa di rinormalizzazione per qualunque q , anche complesso. Sono dunque state prodotte delle animazioni che narrano l'evoluzione per q reale della forma dei bacini. In tali animazioni si osserva un esempio di «metatransizioni». Infatti tra $q = 3$ e $q = 3 + \varepsilon$ si osserva un importante cambiamento delle caratteristiche dei domini di analiticità. Per $2 < q < 3$ si hanno infinite componenti connesse, mentre per $q > 3$ si hanno soltanto due componenti connesse. Ciò cambia il modo con cui gli zeri si accumulano sull'asse reale e dunque può avere delle ripercussioni sulle caratteristiche delle transizioni di fase (cfr. [DIL]).

- Le figure 5.1, 5.2 portano esempi, nel piano della temperatura, dei domini di analiticità delle funzioni termodinamiche;
- La figura 5.3 illustra ciò che accade nel piano dei parametri; si nota la metatransizione a $q = 3$;
- La figura 5.4 illustra i domini di analiticità per alcuni valori di b e q .

Nel caso del campo esterno osserviamo come la mappa (3.2 a pagina 24) non sia più olomorfa, dal momento che esistono due punti di indeterminazione:

$$I = \left\{ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right] = [-1 : \pm i : 1] \right\}.$$

Lo studio del comportamento sul piano del campo esterno presenta delle interessanti proprietà. Abbiamo visto nel piano della temperatura che i modelli

²Non è tuttavia ancora chiaro cosa deve accadere quando q influisce sul numero di variabili necessario a studiare la dinamica

gerarchici dovrebbero presentare una transizione di fase a temperatura finita. Nel piano del campo, quindi ci aspettiamo che la distribuzione degli zeri tocchi il semiasse \mathbb{R}_+ per valori di J nella fase ferromagnetica e non lo tocchi per valori di J nella fase paramagnetica. Osserviamo numericamente in figura 5.5 che ciò non accade. Anche nel dominio paramagnetico gli zeri continuano ad addensarsi in maniera anomala sull'asse reale; in realtà [BZ] hanno dimostrato che gli zeri sono densi sulla circonferenza unitaria per ogni valore ferromagnetico dell'accoppiamento J . Numericamente si osserva però una interessante caratteristica degli zeri nella fase paramagnetica (cfr. figura 5.6). I punti che toccano l'asse reale sono infatti punti che appartengono all'insieme E , che ricordiamo essere la chiusura dell'unione dei punti di indeterminazione delle iterate di \mathcal{Z} . La funzione energia libera dunque non può in linea di principio nemmeno essere definita sui punti di E . La figura 5.7 mostra come, per iterazione nella fase paramagnetica, gli zeri di Lee et Yang propriamente detti si «aprono», come correttamente ci si dovrebbe aspettare dalla Fisica, ma i punti di E prendono il loro posto sulla circonferenza unitaria.

Per dare una idea di ciò che accade, possiamo dimostrarlo il seguente fatto:

Proposizione 5.2.1 *Consideriamo il modello a diamante nel caso di $q = 2$. Sia $J = 0$ quindi $\zeta = 1$ (punto fisso paramagnetico). Allora se $b > 1$ la circonferenza unitaria del piano del campo τ è riempita in maniera densa da preimmagini di I .*

Dim: L'immersione, nel caso di $J_c = J_d = J = 0$ si scrive:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array} = \tau^2 \quad \begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array} = \tau \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = 1.$$

Osserviamo che $\tau = \pm i$ appartiene a I . Cerchiamo dunque le preimmagini di I . Scriviamo la mappa nel caso in questione.

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|c|} \hline \blacktriangle & \blacktriangle \\ \hline \end{array}} = \tau^{2b} (\tau^2 + 1)^b \quad (5.1a)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|} \hline \blacktriangle \\ \hline \end{array}} = \tau^b (\tau^2 + 1)^b \quad (5.1b)$$

$$\mathcal{Z}_{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}} = (\tau^2 + 1)^b. \quad (5.1c)$$

Eliminando il fattore comune troviamo che la mappa preserva il piano del campo e si può definire sulle variabili τ in maniera assai semplice:

$$\tau \mapsto \tau^b.$$

Se $b = 1$ la preimmagine di $I = \{\pm i\}$ è proprio I ; se $b > 1$ abbiamo che le preimmagini di I per una iterazione sono:

$$I_1 = \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}^{-1}(I) = \left\{ \exp\left(\pm i \frac{\pi + 2\pi k}{b}\right) \text{ per } k \in \{0, 1, \dots, b-1\} \right\}$$

Naturalmente prendendo n volte la preimmagine otteniamo:

$$I_n = \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}^{-n}(I) = \left\{ \exp\left(\pm i \frac{\pi + 2\pi k}{b^n}\right) \text{ per } k \in \{0, 1, \dots, b^n - 1\} \right\}$$

Che si addensano, per giunta uniformemente, sulla circonferenza unitaria. ■

Nel caso in cui $\zeta \neq 1$ la numerica sostiene che accada lo stesso sulla porzione della circonferenza che non è già coperta dai genuini zeri di Lee e Yang. Questa anomalia non è naturalmente presente per $b = 1$ (catena unidimensionale) come confermato dalla numerica in figura 5.8.

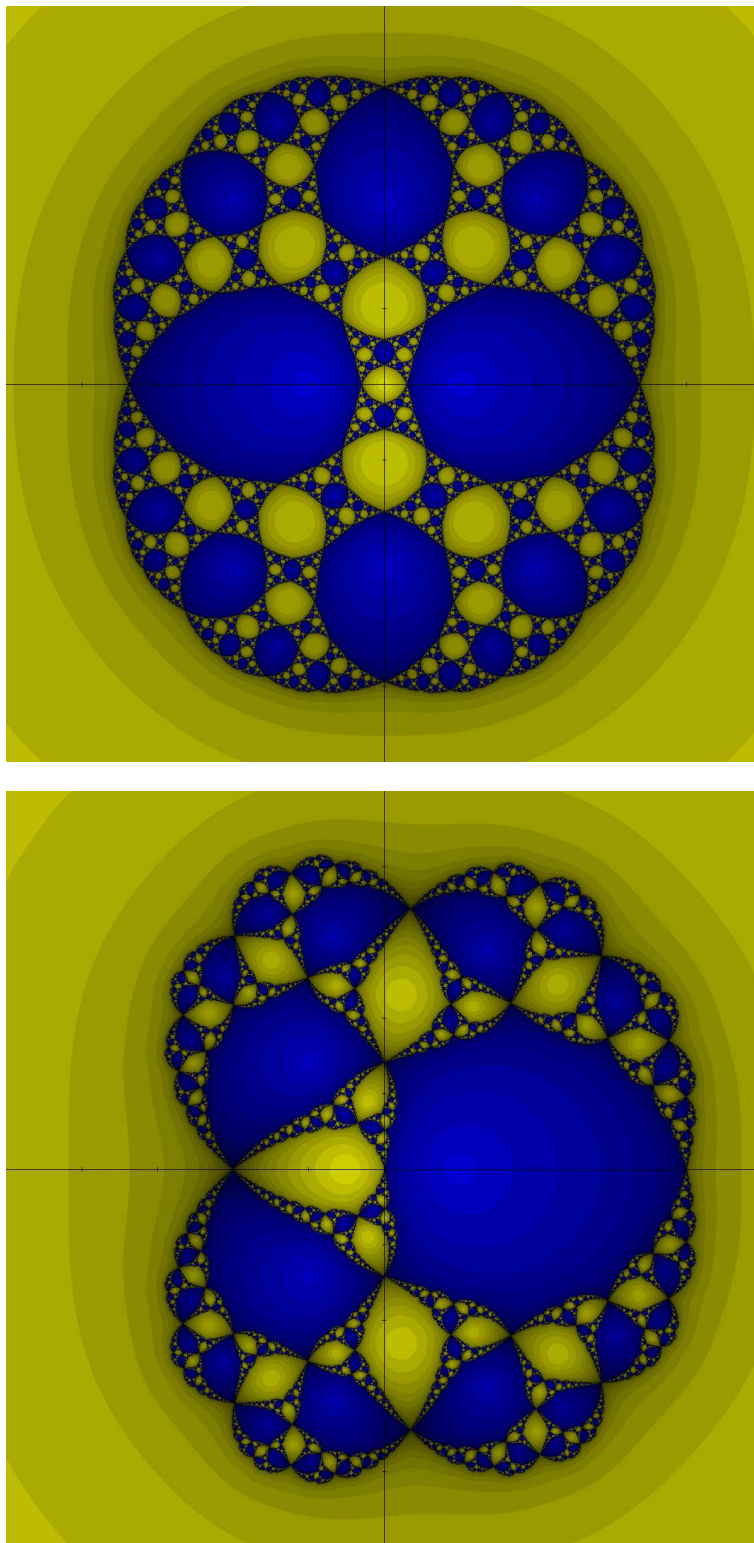


Figura 5.1: *Piano della temperatura*: Domini di attrazione dei punti fissi paramagnetico (blu) e ferromagnetico (giallo) del reticolo a diamante con $b = 2$ nei casi $q = 2$ (figura in alto) e $q = 3$ (figura in basso). Per $q = 2$ c'è fase antiferromagnetica.

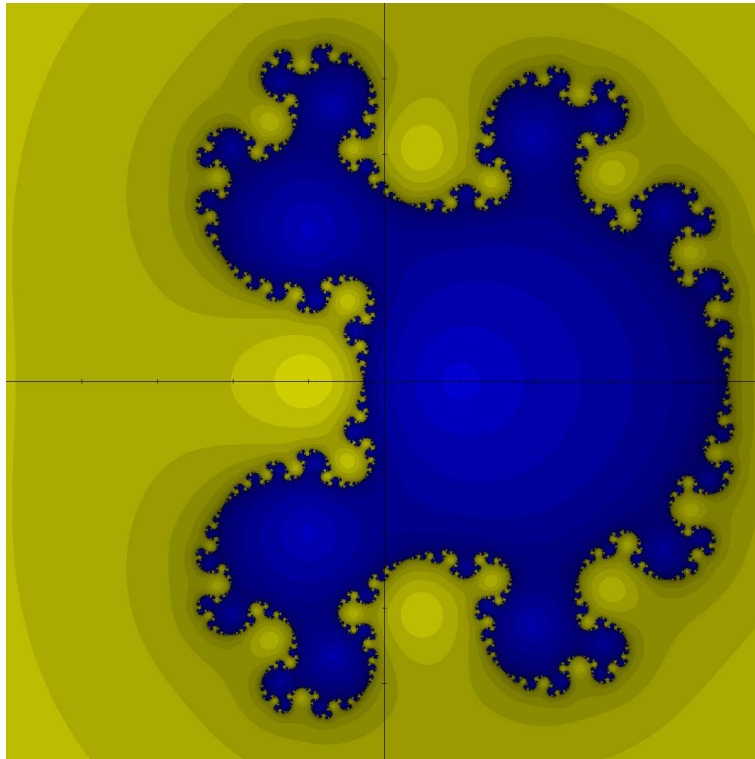


Figura 5.2: *Piano della temperatura*: Domini di attrazione dei punti fissi paramagnetico (blu) e ferromagnetico (giallo) del reticolo a diamante con $b = 2$ nel caso $q = 4$.

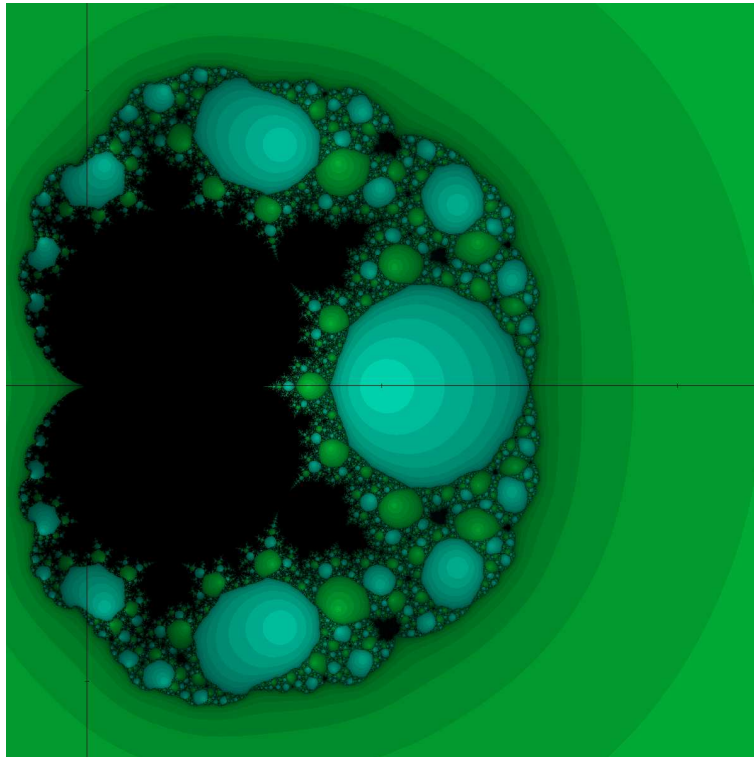


Figura 5.3: *Piano dei parametri*: Metatransizioni di fase (nel piano q) del modello gerarchico a diamante $b = 2$. La zona azzurra centrata in $q = 2$ stabilisce l'esistenza della fase antiferromagnetica; nell'insieme verde esterno l'insieme degli zeri di Fisher è una curva di Jordan.

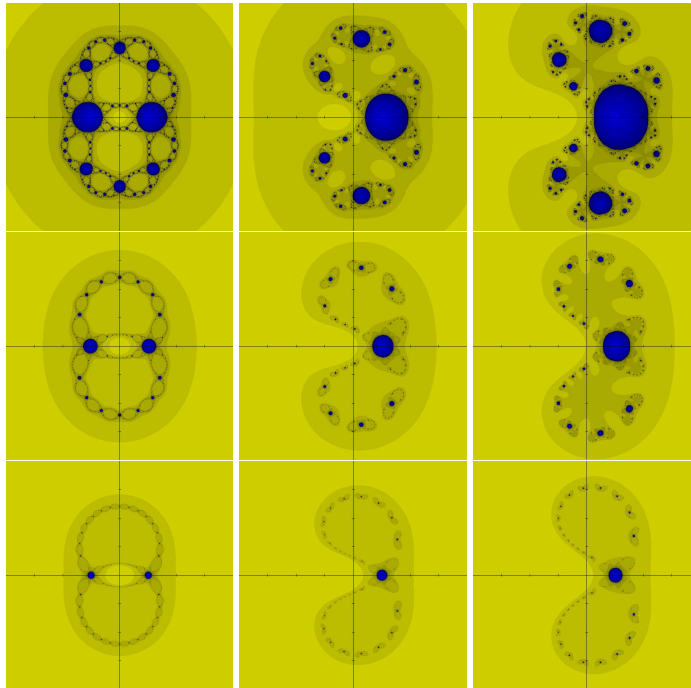


Figura 5.4: *Piano della temperatura*: Domini di attrazione dei punti fissi paramagnetico (blu) e ferromagnetico (giallo) del reticolo a diamante con $b = 4$ (riga in alto) $b = 8$ (riga in mezzo) $b = 16$ (riga in basso) nel caso $q = 2$ (colonna sinistra) $q = 3$ (colonna centrale) $q = 4$ (colonna destra).

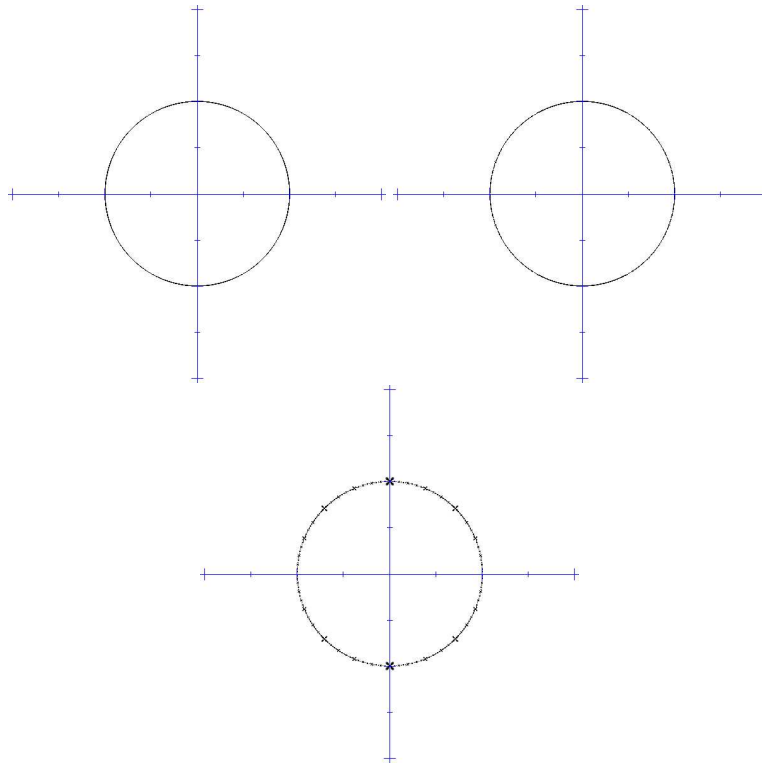


Figura 5.5: *Piano del campo*: Zeri di Lee e Yang per interazioni $\zeta = \{5, 1.5, 1\}$. L'insieme degli zeri **non** si apre in $\tau = 1$ nel passare dalla fase ferromagnetica alla fase paramagnetica.

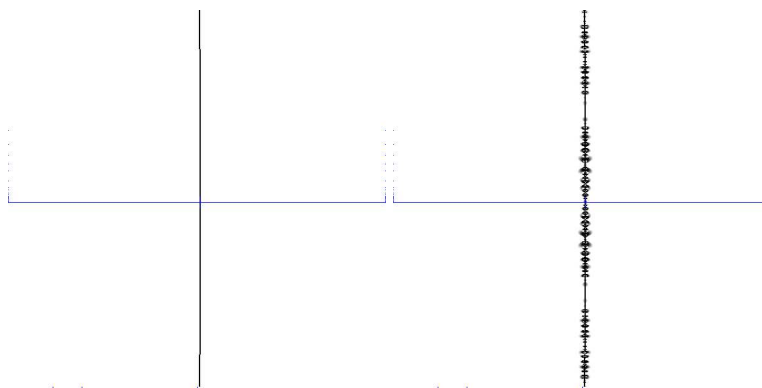


Figura 5.6: *Piano del campo*: Differenza tra i modi con cui gli zeri di Lee e Yang toccano il semiasse fisico: nel caso ferromagnetico (sinistra) si avvicinano normalmente, ma nel caso paramagnetico (destra) si avvicinano in maniera anomala. Ciò è causato dalla differente natura degli zeri, nel primo caso sono zeri genuini, nel secondo caso sono preimmagini dell'insieme di indeterminazione.

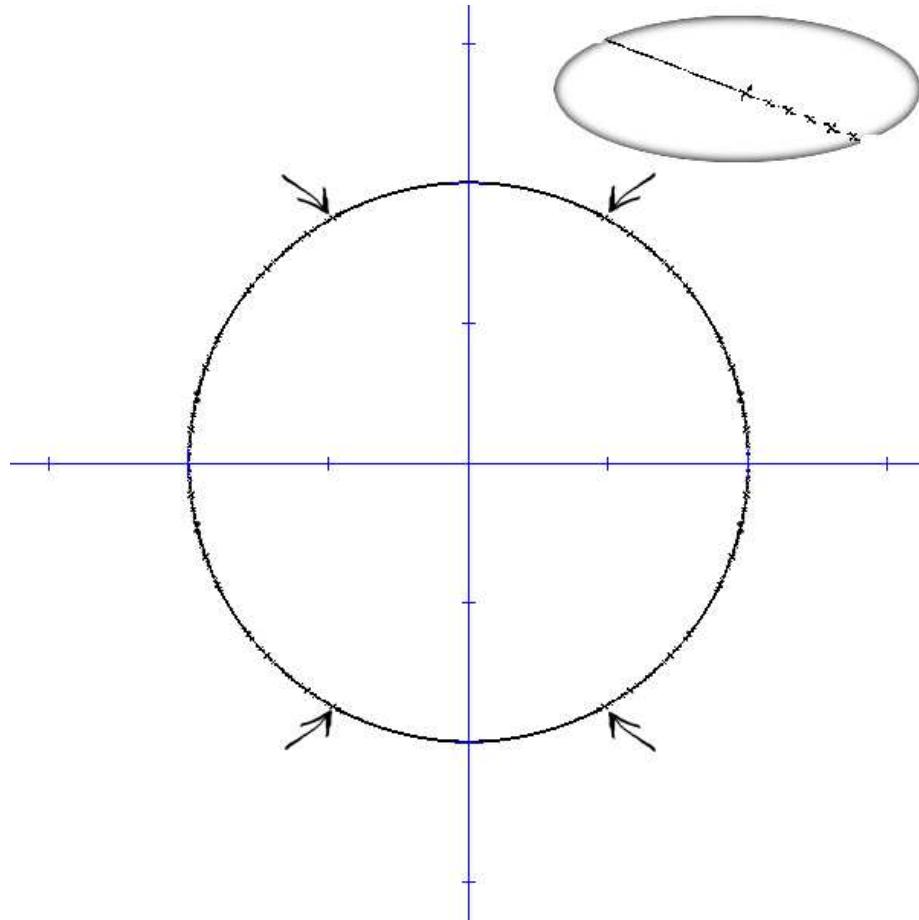


Figura 5.7: *Piano del campo*: In piena fase paramagnetica gli zeri si addensano sulla circonferenza unitaria di τ sia come zeri genuini che come preimmagini dell'insieme di indeterminazione. Gli zeri genuini si sono «aperti» e non toccano più l'asse reale (le frecce indicano il punto in cui si fermano e l'inserito mostra cosa accade nel punto indicato dalle frecce), mentre le preimmagini di I si addensano su ciò che rimane della circonferenza.

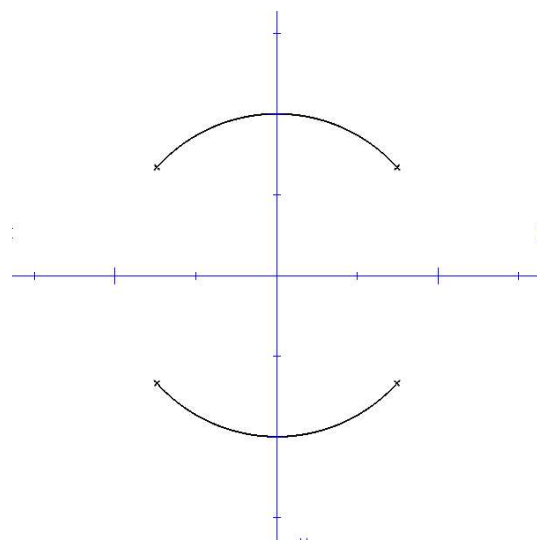


Figura 5.8: *Piano del campo*: La catena unidimensionale non presenta l'anomalia tipica dei modelli gerarchici a diamante.

5.3 Ragnatela

In questa sezione proponiamo lo studio numerico della distribuzione degli zeri della funzione di Green del reticolo a Ragnatela. La mappa su cui stiamo lavorando è la 3.3 a pagina 26. Per $q = 2$ si tratta di una mappa su \mathbb{P}^1 ; l'immersione non è iniettiva, ma è genericamente 2 a 1. Nella carta locale standard $\square \neq 0$ la mappa si scrive, definendo la variabile η come segue:

$$\zeta^2 = \eta \div \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

$$\eta \mapsto \frac{\mathcal{Z} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}}{\mathcal{Z} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}} = \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}^3 + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}^3}{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}^2 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \right)} = \frac{\eta^3 + 1}{\eta + 1} = \eta^2 - \eta + 1.$$

Si tratta dunque di un polinomio di grado due, il cui insieme di Julia (noto come *cavolfiore*), visto nelle variabili fisiche, appare come in figura 5.10 in alto. Dall'equazione si può notare che il punto $[1 : 1]$ è un punto fisso parabolico (punto fisso con autovalore di modulo 1 e argomento multiplo razionale di π), e nei suoi pressi la convergenza della funzione di Green è lenta, pertanto l'insieme disegnato non tocca effettivamente il punto $[1 : 1]$ come in realtà accade. Lo stesso fenomeno si ripresenta per le sue preimmagini (per esempio il punto $[0 : 1]$).

Il punto fisso paramagnetico $[1 : 1]$ è dunque un punto parabolico che attrae i punti reali alla sua sinistra e respinge quelli alla sua destra. Ciò significa che per interazione ferromagnetica non sarà presente la fase paramagnetica, dato che tutti i punti tendono verso il punto fisso ferromagnetico. Il punto fisso diventa (debolmente) attrattivo per interazioni antiferromagnetiche. Il motivo di questo si può individuare nella *frustrazione* di cui soffre il modello a ragnatela nel caso di $q = 2$. La frustrazione è un fenomeno che compare ogni volta si hanno interazioni antiferromagnetiche su un reticolo in cui sono presenti loop con un numero dispari di legami (cfr. figura 5.9). Non è possibile trovare un modo

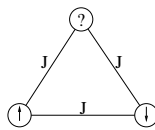


Figura 5.9: Frustrazione in un loop triangolare

per «accontentare» tutti i legami simultaneamente e dunque gli spin si trovano *frustrati*. Per $q = 3$ va considerata la mappa su tutte e tre le variabili proiettive. Osserviamo che il punto $[0 : 0 : 1]$ è un punto di indeterminazione. Questo viene rappresentato dalla croce al centro della figura 5.10 in basso; notiamo inoltre che compare una nuova fase in un intorno di $[0 : 0 : 1]$. Studiando dove quel dominio di analiticità viene rinormalizzato (figura 5.11) si osserva che con una iterazione viene mandato nel dominio ferromagnetico. Per $q = 4$ (figura 5.12) la nuova fase scompare, matematicamente perché nella mappa si «attiva» l'ultimo termine dell'ultima coordinata, e fisicamente perché ci sono troppi stati

perché la configurazione «antiferromagnetica» sia stabile (esattamente come accadeva per il diamante a $q = 3$).

È possibile ancora studiare la distribuzione degli zeri nel piano del campo esterno per $q = 2$; anche in questo caso la mappa (3.4 a pagina 26) ha insieme di indeterminazione non vuoto. Nel caso di interazione ferromagnetica il teorema di Lee e Yang assicura che gli zeri sono contenuti nella circonferenza unitaria del piano del campo esterno. Numericamente otteniamo *sempre* la circonferenza unitaria completa. In effetti, come già visto questo sistema presenta per qualsiasi valore di interazione ferromagnetica solo la fase ferromagnetica. Per interazione antiferromagnetica la situazione cambia; in figura 5.13 mostriamo cosa accade nel piano del campo per alcuni valori dell'interazione. Per $\zeta = 1$, come nel caso del diamante, abbiamo che le tre radici di -1 sono punti di indeterminazione. La mappa si riduce a $\tau \mapsto \tau^2$, dunque ancora una volta le preimmagini di I sono dense sulla circonferenza unitaria. Siamo di fronte ad un'altra anomalia simile a quella del diamante.

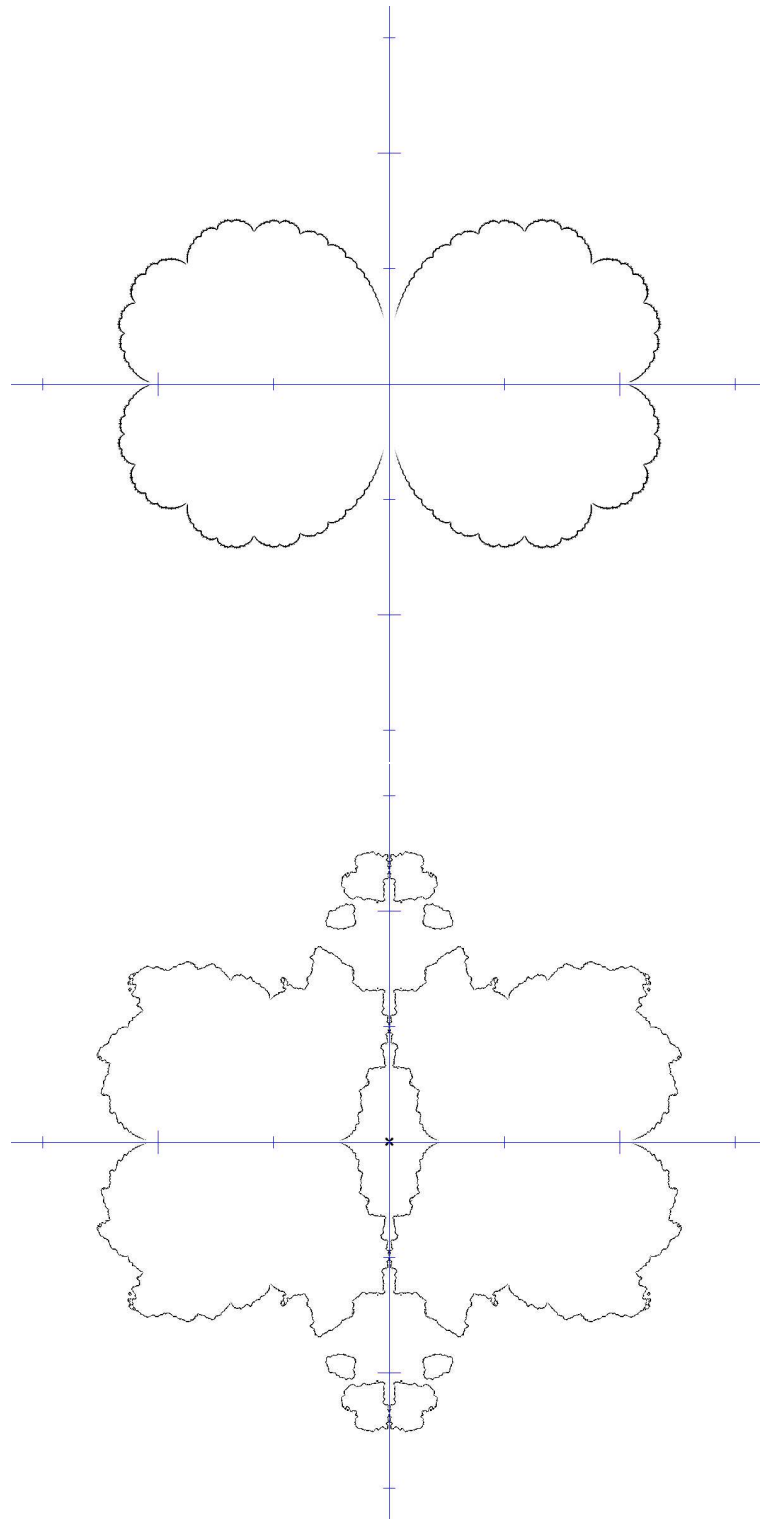


Figura 5.10: *Piano della temperatura*: Zeri di Fisher per la ragnatela; in alto per $q = 2$, in basso per $q = 3$

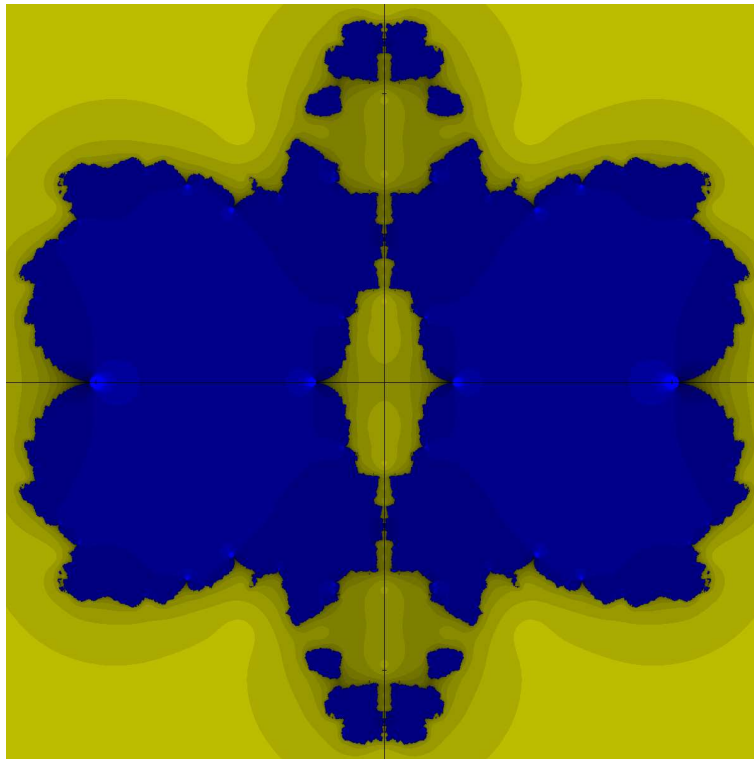


Figura 5.11: *Piano della temperatura*: La nuova fase appartiene al dominio ferromagnetico nel senso che è iterata nel bacino di attrazione del punto ferromagnetico

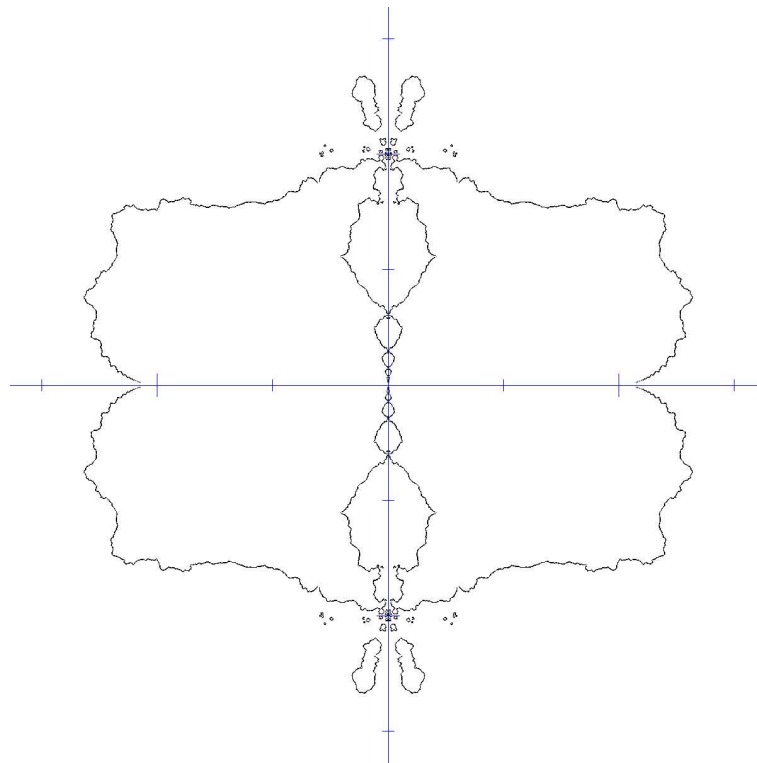


Figura 5.12: *Piano della temperatura*: Zeri di Fisher per $q = 4$; la fase centrata in $[0 : 0 : 1]$ è sparita.

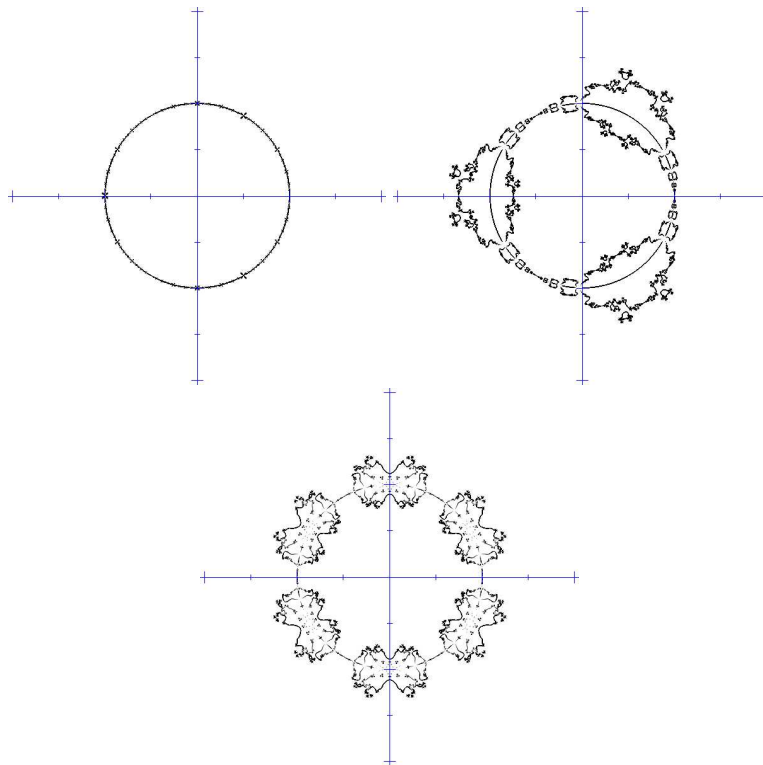


Figura 5.13: *Piano del campo*: Zeri di Lee e Yang per la ragnatela $q = 2$ nella variabile $\tau = \exp(-\beta H)$. I valori dell'interazione sono $\zeta = \exp(-\beta J) = \{1, 0.9, 0\}$.

5.4 Triangolo di Sierpinski

Uno studio numerico degli zeri del triangolo di Sierpinski è stato svolto per il caso di Ising senza campo esterno da [BCD]. In questo lavoro si presentano risultati numerici nel piano delle interazioni per q generico e nel piano del campo magnetico per $q = 2$. Si osserva (figura 5.14) che non abbiamo mai transizioni di fase a temperatura finita; solo a temperatura nulla abbiamo sempre una transizione. Il punto fisso paramagnetico attrae tutto il semiasse reale positivo, dunque non c'è mai fase ferromagnetica. Questo è confermato dalla numerica nel piano del campo (figura 5.15) da cui si vede come per nessun valore dell'interazione gli zeri di Lee e Yang si possano addensare sul semiasse fisico. Il triangolo di Sierpinski in quest'ottica assomiglia alla catena unidimensionale.

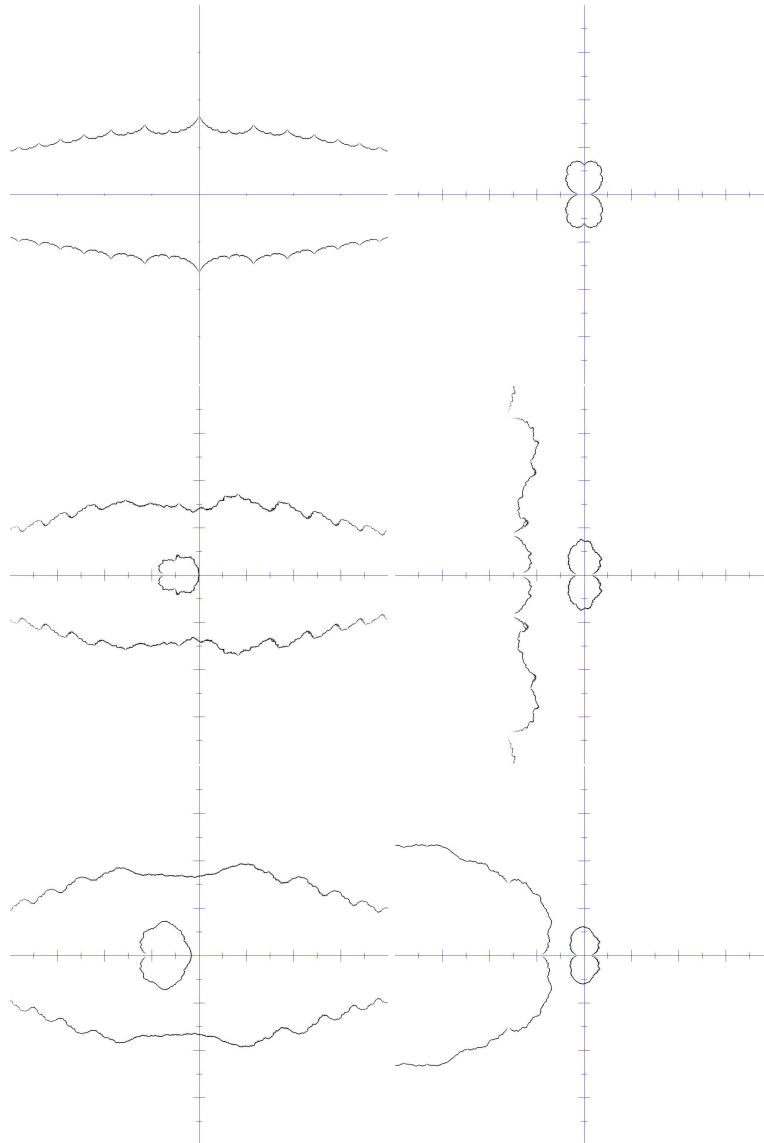


Figura 5.14: *Piano della temperatura*: Zeri di Fisher per il triangolo di Sierpinski. La colonna di sinistra mostra gli zeri nella variabile $z = e^{-\beta J}$, mentre la colonna di destra mostra gli zeri nella variabile $z = e^{\beta J}$; le tre righe sono in ordine dall'alto verso il basso per $q = 2, 3, 4$.

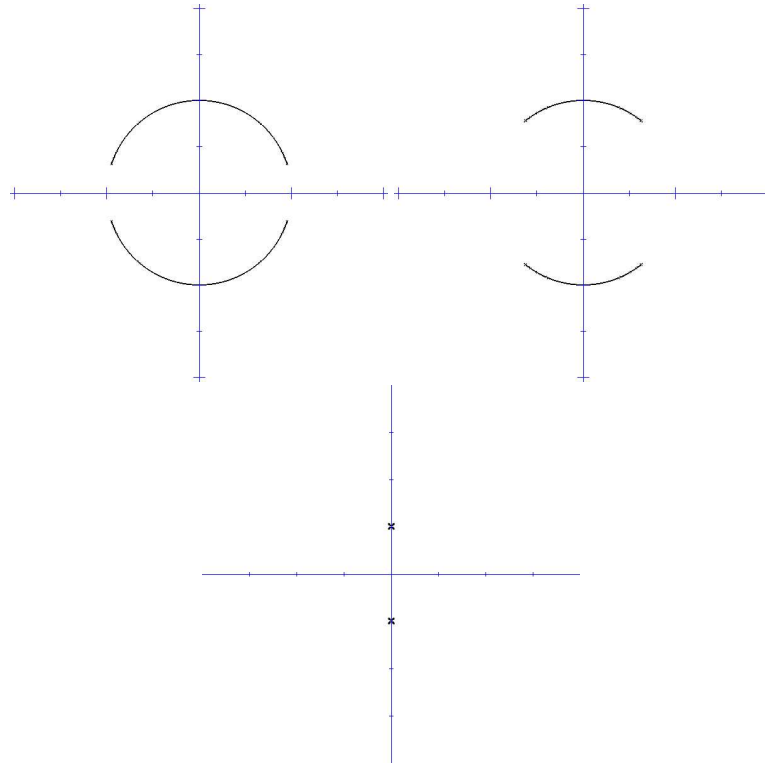


Figura 5.15: *Piano del campo*: Zeri di Lee e Yang per il triangolo di Sierpinski per diversi valori della interazione (tutti ferromagnetici); nell'ordine $\zeta = e^{-\beta J} = \{1.5, 1.1, 1.0\}$. Notiamo che **non** è possibile l'esistenza di una fase ferromagnetica.

5.5 Tubo triangolare

Studiare gli zeri del reticolo a tubo è differente dallo studiare gli zeri delle decorazioni osservate finora, dal momento che si tratta di una decorazione non omogenea. Fortunatamente, come già osservato in precedenza, la decorazione non omogenea è l'identità nella coppia di coordinate proiettive di ordine 2, che poi sono le variabili fisiche. Tali variabili dunque giocano il ruolo di parametri per la mappa sullo spazio delle coordinate di ordine n . Il caso più semplice da studiare è quello di ordine 3, per cui le variabili di ordine n , imponendo la simmetria³, stanno esse stesse sul proiettivo \mathbb{P}^1 . Come osservato, la mappa 3.9 è un automorfismo di \mathbb{P}^1 , cioè una mappa lineare omogenea da \mathbb{C}^2 in sé quotientata sul proiettivo. Come ogni mappa lineare, essa si può rappresentare mediante una matrice, che in questo caso è una matrice 2×2 .

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \square\square^6 + \square^6 \\ \left(\square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \right) \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} \square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \\ \square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \end{pmatrix} \\ \left(\square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \right) & 3 \begin{pmatrix} \square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \\ \square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ora visto che siamo sul proiettivo possiamo dividere ogni elemento della matrice per

$$\left(\square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \right)$$

e, definendo

$$a \left(\left[\begin{array}{c} \square\square \\ \square \end{array} : \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right] \right) \doteq \frac{\square\square^6 + \square^6}{\left(\square\square^4 \cdot \square^2 + \square\square^2 \cdot \square^4 \right)}$$

scrivere la matrice nella forma:

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Possiamo decidere di scegliere una normalizzazione in maniera tale che il determinante della matrice sia 1, dunque la mappa lineare risulta:

$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}} \begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La dinamica di una mappa lineare è definita dai suoi autovalori. Avendo normalizzato il determinante a 1, in realtà abbiamo in questo caso solo un autovalore indipendente λ di modulo minore o uguale a uno. Se il modulo è minore di uno, la dinamica è governata da due punti fissi, uno attrattivo e uno repulsivo (caso iperbolico). Possiamo pensare in un certo senso che la dinamica «cambi» quando $|\lambda| = 1$, dal momento che in questo caso posso avere due punti fissi indifferenti (caso ellittico) attorno ai quali tutti gli altri punti ruotano, oppure un solo punto fisso attrattivo (caso parabolico). Definendo la variabile

$$c \doteq \left(\frac{\square}{\square} \right)^2$$

³Essendo variabili non fisiche, possiamo sempre imporre la totale simmetria dell'interazione

notiamo che

$$a = \frac{c^3 + 1}{c(c + 1)} = \frac{c^2 - c + 1}{c}.$$

Possiamo ora parametrizzare il luogo dei punti c tali che l'autovalore abbia modulo uno imponendo $\lambda = e^{i\theta}$ e risolvendo l'equazione. Si ottiene l'espressione esatta:

$$c_{\pm}(\theta) = -\frac{1}{4}e^{-2i\theta} \left(-3 - 2e^{2i\theta} - 3e^{4i\theta} - \sqrt{3}\sqrt{3 - 4e^{2i\theta} - 14e^{4i\theta} - 4e^{6i\theta} + 3e^{8i\theta}} + \right. \\ \left. \pm \sqrt{-16e^{4i\theta} + (3 + 2e^{2i\theta} + 3e^{4i\theta} + \sqrt{3}\sqrt{3 - 4e^{2i\theta} - 14e^{4i\theta} - 4e^{6i\theta} + 3e^{8i\theta}})^2} \right)$$

Disegnando per $\theta \in [0, 2\pi]$ il valore di c otteniamo la figura 5.16 di destra. Possiamo comunque decidere di studiare la funzione di Green definita in maniera analoga alle mappe su proiettivi singoli, cioè:

$$\mathcal{G} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_n} \log |F_c^n(z_0)|,$$

dove z_0 è fissato per ragioni fisiche a un valore nullo delle interazioni ($z_0 = [1 : 1]$). Il laplaciano verrà preso nelle variabili c e un'approssimazione della misura risultante è illustrata in figura 5.16 a sinistra. In generale nulla si può dire sulle proprietà di convergenza di questa funzione, tuttavia in questo caso il suo laplaciano pare, almeno numericamente, convergere (seppur lentamente) a una misura supportata sull'insieme trovato con la parametrizzazione analitica riportata poco sopra.

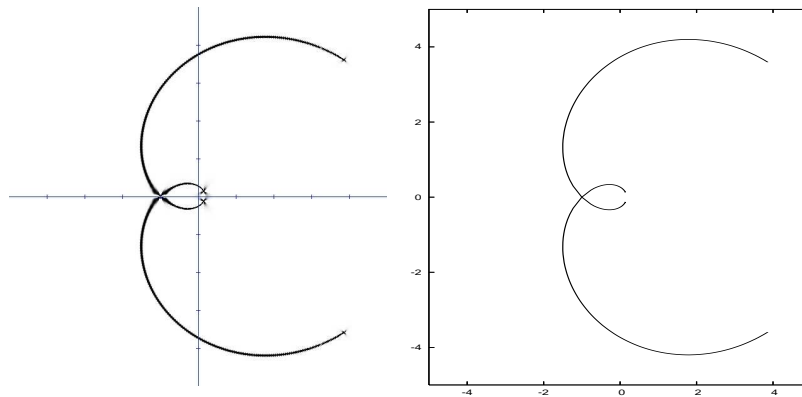


Figura 5.16: Piano della temperatura: A sinistra l'insieme dei punti di non analiticità della funzione di Green (numerica); a destra l'insieme dei valori di c tali che $|\lambda(c)| = 1$.

Codice sorgente dei programmi usati nella tesi

Si allega in questa appendice il codice sorgente di alcuni programmi che sono stati usati per ottenere risultati analitici e numerici.

Mappa di rinormalizzazione di una decorazione omogenea

Quello che segue è il sorgente del programma utilizzato per generare, ad esempio, la mappa 3.5. In generale è capace di generare mappe di rinormalizzazione per qualunque decorazione omogenea completamente simmetrica.

```
#include <iostream>
using namespace std;

//Questo programma calcola la mappa di rinormalizzazione per le decorazioni omogenee totalmente simmetriche
//L'output e' in una forma comprensibile dal programma opensource MAXIMA (http://maxima.sourceforge.net/)

//Il codice non e' una perla di eleganza, ma funziona ed e' abbastanza ben commentato
const char* alphabet="0123456789!@#%&'";

int *youngtab;
int *stateTab;
int *coeff;

int *youngVar;
int numVar,maxVar;
int N;

int *youngCoeff;
int numCoeff,maxCoeff;
int M;

int factorial (int n)
{
  if (n==0) return 1; else return n*factorial(n-1);
}

void swap(int *a,int*b)
{
  int y=*a;
  *a=*b;
  *b=y;
}

// Questa funzione mescola i <len> interi in <array> usando la permutazione indicizzata da p
// BUGGY CODE: p DEVE essere piu' piccolo di <len>! (buffer overflow)

void permuta (int p, char* array, int len)
{
  //Grazie Miri!! Questo e' opera tua!
  if (len==1) return;
  int al=p/(factorial(len-1)); //al e' la posizione dell'item scelto
  int temp=array[al]; //temp e' il valore dell'item scelto
  for (int i=al;i>0;i--) array[i]=array[i-1]; // Ordina gli item rimanenti
  array[0]=temp; //e poni il primo uguale a quello scelto
  permuta(p%(factorial(len-1)),array+1,len-1); // poi continua a permutare quelli che rimangono
  return;
}

int young(int n, int maxCol, int maxRow, int row=0)
{
  //Comincio a riempire la tabella (o quello che ne rimane) dal massimo numero
```

```

//di colonne consentito.
for (int j=min(n,maxCol);j>0;j--) {
    youngtab[row]=j;
    if (maxRow>row) //Controllo di non usare troppi stati
        if (n-j>0) young(n-j,j,maxRow,row+1); //se avanzano stati e spin, posso ricorrere
        else //Ho finito, scrivo la tabella cosi' ottenuta
    {
        numVar++;
        if (numVar>maxVar)
            {
                int * temp=new int[N*numVar];
                memcpy(temp,youngVar,N*maxVar*sizeof(int));
                maxVar=numVar;
                delete youngVar;
                youngVar=temp;
            }
        memset(&youngVar[N*(numVar-1)],0,N*sizeof(int));
        memcpy(&youngVar[N*(numVar-1)],youngtab,(row+1)*sizeof(int));
    }
}

return 0;

int youngField(int n, int maxCol, int maxRow, int maxField, int row=0)
{
    for (int j=min(n,maxCol);j>(maxField>row?-1:0);j--) {
        coeff[row]=j;
        if (maxRow>row)
            if (n-j>0)
                if (maxField>row) //Ci sono ancora variabili con campo
                    youngField(n-j,n-j,maxRow,maxField,row+1); else //Finite le variabili con campo!
                    youngField(n-j,j,maxRow,maxField,row+1);
                else // Finito! ora scrivo la tabella
            {
                numCoeff++;
                if (numCoeff>maxCoeff)
                    {
                        int * temp=new int[M*numCoeff];
                        memcpy(temp,youngCoeff,M*maxCoeff*sizeof(int));
                        maxCoeff=numCoeff;
                        delete youngCoeff;
                        youngCoeff=temp;
                    }
                memset(&youngCoeff[M*(numCoeff-1)],0,M*sizeof(int));
                memcpy(&youngCoeff[M*(numCoeff-1)],coeff,(row+1)*sizeof(int));
            }
    }
    return 0;
}

int main()
{
    int q; //q di Potts
    int n; //Ordine gerarchico
    int m; //Numero di nuovi spin
    int b; //Numero di aggregazione (=# di legami)

    cout<<"Thesis< | Reno-rmalization\n This program works ONLY for fully symmetric decorations\n";
    cout<<"Insert n (hierarchy order):";
    cin>>n;

    //A questo punto devo determinare le variabili da usare.
    //Devo trovare tutti i diagrammi di Young di ordine n e
    //salvarli da qualche parte

    youngtab=new int[n]; // Variabile ausiliaria.
    youngVar=new int[n]; //
    stateTab=new int[n];
    numVar=0;maxVar=1;N=n; //numVar sara' il numero di variabili trovate
    young(n,n,n);
    cout<<"Young variables:"<<numVar<<"\n";

    cout<<"Insert m (number of inner spins):";
    cin>>m;
    cout<<"Insert b (aggregation number):"; //Griffiths & Kaufman
    cin>>b;
    cout<<"\n Boundary spins are labeled as:";
    for (int i=0;i<n;i++) cout<<(char)('a'+i); //Possibile integer overflow
    cout<<"\n Inner spins are labeled as:";
    for (int i=0;i<m;i++) cout<<(char)('a'+n+i); //Possibile integer overflow
    char * decoration=(char*)(new char[n*b]);
    char temp[256]; //Possibile buffer overflow
    cout<<"\nInsert the decoration:\n";
    for (int i=0;i<b;i++) {
        cout<<i<<" ";
        cin>>temp; //POSSIBILE BUFFER OVERFLOW
        memcpy(&decoration[i*n],temp,n);
    }

    char * state=new char[n*m];
    char * boundaryState=state;
    char * innerState=state+n;

```

```

cout<<"\nStart.\n";
for (int variable=0;variable<numVar;variable++) // Devo trovare la mappa per ciascuna variabile di young
{
    int bstate=0;int extState=0;
    bool done=false;
    int row=0;
    while (bstate<N) //Una volta assegnati gli stati agli N spin siamo a posto.
    {
        int spinrow=youngVar[variable*N+row]; //Numero di spin con lo stesso stato extState
        for (int aux=0;aux<spinrow;aux++) boundaryState[bstate+aux]=extState; // Assegna gli stati esterni
        row++; //Cambia riga
        extState++; //Cambia stato
    }

    cout<<"P["<<variable<<"]=";

    // Per calcolare la decorazione devo sommare sulle configurazioni degli spin interni,
    // Le configurazioni rilevanti sono quelle relative ai diagrammi di young con un numero
    // di stati speciali pari al numero di righe del diagramma relativo alla variabile che
    // stiamo considerando.

    coeff=new int[m+row]; // Variabile aux.
    youngCoeff=new int[m+row]; //
    numCoeff=0;maxCoeff=1;M=m+row; //
    youngField(m,m,M,row);

    // In youngCoeff ora ci sono le tabelle di young speciali di cui al commento precedente
    // La parte difficile e' la combinatorica; e' semplice assegnare i pesi dipendenti da q,
    // ma e' difficile assegnare gli stati interni in maniera opportuna
    // il modo piu' facile (ma "piu' lento") per fare questo e' di calcolare ogni possibile
    // permutazione delle assegnazioni e poi dividere per le assegnazioni ripetute. Quindi
    // il problema si riduce a calcolare il numero delle possibili ripetizioni
    // Tale numero e' il prodotto di:
    // prodotto del fattoriale del numero di quadrati di ogni riga
    // e
    // prodotto del fattoriale del numero di righe con lo stesso numero di quadrati
    // (tranne per gli stati speciali)

    for (int c=0;c<numCoeff;c++)
    {
        int stupid=1;
        for (int r=0;r<M;r++) stupid*=factorial(youngCoeff[M*c+r]); //La riga
        for (int s=1;s<=1+s++)
        { // Cicla sul numero di quadrati in una riga
            int howmuch=0;
            for (int r=row;r<M;r++)
            if (youngCoeff[M*c+r]==s) howmuch++; //Cicla sugli stati non speciali
            stupid*=factorial(howmuch);
        }

        cout << "(1/"<<stupid<<")**";

        for (int r=row;r<M;r++) if (youngCoeff[M*c+r]>0) cout<<"(q-"<<r<<")**";
        cout << "(";

        // Ora sappiamo il numero di permutazioni ridondanti,
        // dobbiamo assegnare gli stati agli spin interni
        // Prima di tutto li assegnamo in ordine

        char * innerSorted=new char[m];
        int inCount=0;
        for (int r=0;r<M;r++)
            for (int count=0; count<youngCoeff[M*c+r];count++)
                innerSorted[inCount++]=r; // Assegna lo stato all'inner spin.

        // Poi per ogni permutazione fissiamo lo stato nel buffer innerState;
        for (int perm=0;perm<factorial(m);perm++)
        {
            memcpy(innerState,innerSorted,m*sizeof(char));
            permuta(perm,innerState,m);

            //Ora abbiamo lo stato giusto al posto giusto. Dobbiamo calcolare l'energia
            //sommiamo sui legami...
            for (int edge=0;edge<b;edge++)
            {
                // Bisogna trovare il diagramma corrispondente.
                // prima si costruisce il diagramma nella var youngtab

                int knownStates=0;
                for (int i=0;i<n;i++) youngtab[i]=0;
                for (int spin=0;spin<n;spin++)
                {
                    int st=state[int(decoration[edge*n+spin])-(int('a'))]; // stato dello spin indexed by <spin>
                    //Controlla se e' noto
                    bool known=false;
                    int knownCounter=0;
                    while ((!known) && (knownCounter<knownStates))
                    if (stateTab[knownCounter++]==st) known=true; // controlla se e' noto lo stato
                    if (!known) stateTab[knownStates++]=st;
                    else knownCounter--; // se no aggiungilo alla lista degli stati noti
                    youngtab[knownCounter]++;
                }
                //Ora bisogna ordinare la tabella
                //Lo facciamo in un modo estremamente stupido
                int counter=0;

                for (int l=n;l>0;l--)
                    for (int i=0;i<n;i++)
                        if (youngtab[i]==l)

```

```

swap(youngtab[counter++],youngtab[i]);

//Ora abbiamo in youngtab la tabella di young giusta; bisogna trovare
//a quale variabile corrisponde
counter=0;
bool found=false;
while (!found)
{
    found=true;
    for (int i=0;i<n;i++) if (youngtab[i]!=youngVar[counter*n+i]) found=false;
    counter++;
}
counter--;

// Abbiamo finito!
cout<<"w["<<counter<<"]**";
}
    cout<<"l+";
}
    cout <<"0)+";
}
    cout << "0;\n";
    delete coeff;
    delete youngCoeff;
}

//Fulgida
delete youngVar;
delete youngtab;
delete stateTab;
delete state;
}

```

Simulazioni numeriche

Il cuore delle simulazione è la classe `homogeneous<>` che rappresenta le coordinate omogenee sul proiettivo. Per la visualizzazione grafica vengono utilizzate le librerie multimediali multiplatforma chiamate Simple DirectMedia Layer (<http://www.libsdl.org/>)

```

using namespace std;

template < class T, int n > class homogeneous;

#define cplx complex<double>

template < int n > class homogeneous<double, n>{
public:
    //arf arf!
    cplx co[n];

public:
    homogeneous() {}
    double squaredNorm(){
        double res;
        res=0;
        for (int i=0;i<n;i++) res+=norm(co[i]);
        return res;
    }
    double squaredDistance(const homogeneous<double, n> y)
    {
        int i=n;
        while (norm(y.co[--i])<1e-10);
        if (norm(co[i])<1e-10) return 1000; //tanto
        cplx xa,ya;
        xa=cplx(1)/co[i];
        ya=cplx(1)/y.co[i];
        homogeneous<double, n> x;
        for (int i=0;i<n;i++) x.co[i]=(xa*co[i]-ya*y.co[i]);
        return x.squaredNorm();
    }
    double normalize(){
        //TODO: Take care of the zero case.
        bool done=false;

        // We want to fix the normalization of our homogeneous coordinates in a way such that
        // the coordinate whose norm is the biggest is real and the norm is 1
        //
        double maxnorm=0;
        int ii=-1;
        for (int i=0;i<n;i++) if (norm(co[i])>=maxnorm)
        {
            maxnorm=norm(co[i]);
            ii=i;
        }
        cplx brii=cplx(1,0);
        if (ii>=0) brii=conj(co[ii])/abs(co[ii]);
        for (int i=0;i<n;i++) co[i]=co[i]*brii;
        { // Take care somehow

```

```

    double res=1./sqrt(squaredNorm());
    for (int i=0;i<n;i++) co[i]=cplx(res);
}
return 0;
}
double normalizelog(){
    double res=1./sqrt(squaredNorm());
    for (int i=0;i<n;i++) co[i]=cplx(res);
    return log(res);
}
void iterate();
void iterateSpiderWeb(cplx q);
void iterateFieldSpiderWeb(cplx q);
void iterateSierpinski(cplx q);
void iterateSierpinskiField(cplx q);
void iterateDHL(cplx q);
void iterateFieldDHL(cplx q);
void iterateqFieldDHL(cplx q);
void iterateTube(cplx z);
};
inline void homogeneous<double,2>::iterateTube(cplx z)
{
    cplx nc[2];

    nc[0]=co[0]*(z*z+z+cplx(1))+cplx(3)*co[1]*(z*(z+cplx(1)));
    nc[1]=(co[0]+cplx(3)*co[1])*(z*(z+cplx(1)));

    co[0]=nc[0];
    co[1]=nc[1];
}
inline void homogeneous<double,5>::iterateTube(cplx z)
{
    cplx nc[5];

    nc[0]=co[0]*(co[2]*co[2]*co[2]+co[3]*co[3]*co[3]+cplx(3)*co[1]*(co[2]*co[3]*(co[2]+co[3]));
    nc[1]=(co[0]+cplx(3)*co[1])*(co[2]*co[3]*(co[2]+co[3]));
    nc[2]=co[2]*co[4]*co[4]*co[4];
    nc[3]=co[3]*co[4]*co[4]*co[4];
    nc[4]=co[4]*co[4]*co[4]*co[4];

    co[0]=nc[0];
    co[1]=nc[1];
    co[2]=nc[2];
    co[3]=nc[3];
    co[4]=nc[4];
}
inline void homogeneous<double,4>::iterateqFieldDHL(cplx q)
{
    cplx nc[4];

    nc[0]=co[0]*co[0]+(q-cplx(1))*co[1]*co[1];
    nc[1]=co[1]*co[0]+co[1]*co[2]+(q-cplx(2))*co[1]*co[3];

    nc[2]=co[2]*co[2]+co[1]*co[1]+(q-cplx(2))*co[3]*co[3];
    nc[3]=co[1]*co[1]+cplx(2)*co[2]*co[3]+(q-cplx(3))*co[3]*co[3];
    co[0]=nc[0]*nc[0];
    co[1]=nc[1]*nc[1];
    co[2]=nc[2]*nc[2];
    co[3]=nc[3]*nc[3];
}
inline void homogeneous<double,3>::iterateFieldDHL(cplx q)
{
    cplx nc[3];

    nc[0]=co[0]*co[0]+co[1]*co[1];
    nc[1]=co[1]*co[0]+co[1]*co[2];
    nc[2]=co[1]*co[1]+co[2]*co[2];

    // Cambiare qui per aumentare il b
    co[0]=nc[0]*nc[0];
    co[1]=nc[1]*nc[1];
    co[2]=nc[2]*nc[2];

    for (int i=0;i<3;i++) co[i]=co[i];
}
inline void homogeneous<double,2>::iterateDHL(cplx q)
{
    cplx nc[2];

    nc[0]=co[0]*co[0]+(q-cplx(1))*co[1]*co[1];
    nc[1]=cplx(2)*co[0]*co[1]+(q-cplx(2))*co[1]*co[1];

    co[0]=nc[0]*nc[0];
    co[1]=nc[1]*nc[1];
}

```

```

inline void homogeneous<double,4>::iterateFieldSpiderWeb(cplx q)
{ //q e' inutile
  cplx nc(4);

  nc[0]=co[0]*co[0]*co[0]+co[1]*co[1]*co[1];
  nc[1]=co[0]*co[1]*co[1]+co[1]*co[2]*co[2];
  nc[2]=co[1]*co[1]*co[2]+co[2]*co[2]*co[3];
  nc[3]=co[3]*co[3]*co[3]+co[2]*co[2]*co[2];

  co[0]=nc[0];
  co[1]=nc[1];
  co[2]=nc[2];
  co[3]=nc[3];
}

inline void homogeneous<double,3>::iterateSpiderWeb(cplx q) {

  cplx duequadro, duecubo, trequadro;
  cplx nc[3];
  // 0 is XXX
  //
  // 1 is XX
  //   X
  //
  // 2 is X
  //   X
  //   X
  duequadro=co[1]*co[1];
  duecubo=co[1]*co[1]*co[1]; // credo sia + veloce, poi controllo
  trequadro=co[2]*co[2];
  nc[0]=co[0]*co[0]*co[0]+(q-cplx(1))*duecubo;
  if (q.real()<2) nc[1]=co[1]*(co[0]*co[1]+co[1]*co[1]); //+(q-cplx(2))*trequadro);
  else nc[1]=co[1]*(co[0]*co[1]+co[1]*co[1]+(q-cplx(2))*trequadro);
  if (q.real()<3) nc[2]=co[2]*(cplx(3)*duequadro); //+(q-cplx(3))*(q-cplx(2))*trequadro);
  else nc[2]=co[2]*(cplx(3)*duequadro+(q-cplx(3))*trequadro);
  for (int i=0;i<3;i++) {co[i]=nc[i];}
}

inline void homogeneous<double,2>::iterateSpiderWeb(cplx q) {

  cplx duequadro, duecubo, trequadro;
  cplx nc[2];
  // 0 is XXX
  //
  // 1 is XX
  //   X
  //
  // 2 is X
  //   X
  //   X
  duequadro=co[1]*co[1];
  duecubo=co[1]*co[1]*co[1]; // credo sia + veloce, poi controllo
  nc[0]=co[0]*co[0]-co[0]*co[1]+co[1]*co[1];
  nc[1]=co[1]*co[1];

  for (int i=0;i<2;i++) {co[i]=nc[i];}
}

inline void homogeneous<double,3>::iterateSierpinski(cplx q) {

  cplx nc[3];
  // 0 is XXX
  //
  // 1 is XX
  //   X
  //
  // 2 is X
  //   X
  //   X
  cplx w111=co[1]*co[1]*co[1];
  cplx w222=co[2]*co[2]*co[2];
  cplx w122=co[1]*co[2]*co[2];
  cplx w112=co[2]*co[1]*co[1];
  cplx w011=co[0]*co[1]*co[1];
  cplx w000=co[0]*co[0]*co[0];
  cplx w012=co[0]*co[1]*co[2];
  cplx w022=co[0]*co[2]*co[2];
  cplx w001=co[0]*co[0]*co[1];

  cplx qm1=q-cplx(1);
  cplx qm2=q-cplx(2);
  cplx qm3=q-cplx(3);
  cplx qm4=q-cplx(4);
  cplx qm5=q-cplx(5);

  if (qm1.real()<0) qm1=0;
  if (qm2.real()<0) qm2=0;
  if (qm3.real()<0) qm3=0;
  if (qm4.real()<0) qm4=0;
  if (qm5.real()<0) qm5=0;

  const cplx d=cplx(2);
  const cplx t=cplx(3);

  nc[0]=w222*qm3*qm2*qm1+ t*w122*qm2*qm1+ t*w112*qm2*qm1+
        cplx(4)*w111*qm1+ t*w011*qm1+ w000; //giusto
}

```

```

nc[1]= w222*gm4*gm3*gm2+(w222+d*w122)*gm3*gm2+
(d*w122+w112)*gm3*gm2+
t*w122*gm3*gm2+(w122+d*w112)*gm2+
d*(w122+w112+w111)*gm2+
(w022+d*w112)*gm2+
(d*w112+w111)*gm2+
(d*w012+w111)*gm2+w111*gm2+
d*w111+w011+w111+d*w011+w011+w001; // giusto!

nc[2]=w222*gm5*gm4*gm3+t*(w222+d*w122)*gm4*gm3+
t*w122*gm4*gm3+
t*(w222+d*w122+t*w112)*gm3+
t*(w122+d*w112)*gm3+
t*(w022+d*w112)*gm3+w111*gm3+
w222+cplx(9)*w112+cplx(6)*w012+
cplx(8)*w111+t*w011; //giusto

for (int i=0;i<3;i++) {co[i]=nc[i];}
}

inline void homogeneous<double,4>::iterateSierpinskiField(cplx q) {

cplx nc[4];

cplx w000=co[0]*co[0]*co[0];
cplx w111=co[1]*co[1]*co[1];
cplx w222=co[2]*co[2]*co[2];
cplx w333=co[3]*co[3]*co[3];

const cplx d=cplx(2);
const cplx t=cplx(3);

nc[0]=w000+t*(co[0]+co[2])*co[1]*co[1]+w222;
nc[1]=co[0]*co[0]*co[1]+co[1]*co[1]*co[1]*co[1]+d*co[2]*co[0]+co[1]*co[3]+d*co[2]*co[2]+co[3]*co[2]*co[2];
nc[2]=co[3]*co[3]*co[2]+co[2]*co[2]*co[2]*co[2]+d*co[1]*co[3]+co[2]*co[0]+d*co[1]*co[1]+co[0]*co[1]*co[1];
nc[3]=w333+t*(co[3]+co[1])*co[2]*co[2]+w111;

for (int i=0;i<4;i++) {co[i]=nc[i];}
for (int i=0;i<4;i++) {co[i]*=co[i];}
}
inline void homogeneous<double,2>::iterateSierpinski(cplx q) {

cplx nc[2];
// 0 is XXX
//
// 1 is XX
// X
//
// 2 is X
// X
// X
cplx w111=co[1]*co[1]*co[1];

const cplx d=cplx(2);
const cplx t=cplx(3);

nc[0]= cplx(4)*co[1]*co[1]- co[0]*co[1]+ co[0]*co[0]; //giusto
nc[1]= co[1]*(co[0]+t*co[1]); // giusto!

for (int i=0;i<2;i++) {co[i]=nc[i];}
}

```

Sono qui riportate le funzioni che iterano la mappa scelta sullo spazio proiettivo date le coordinate a e b di una sezione in $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$

```

inline float Rbasin(float a,float b, int *basin=NULL,int chart=0){

int n=0;

//immersione
cplx z=cplx(a,b);
cplx x=1;

//Esempio nel caso di variabili di ordine 3 nel caso di Ising con campo esterno
homogeneous<double, 4> zeta;
zeta.co[0]=z*z*z*h*h*h;
zeta.co[1]=z*h*h;
zeta.co[2]=z*h;
zeta.co[3]=z*z*z;

// Qui si definiscono gli attrattori in coordinate omogenee
homogeneous<double, 4> attractor1;
attractor1.co[0]=cplx(1);
attractor1.co[1]=cplx(0);
attractor1.co[2]=cplx(0);
attractor1.co[3]=cplx(0);
attractor1.normalize();

homogeneous<double, 4> attractor2;
attractor2.co[0]=cplx(0);
attractor2.co[1]=cplx(0);
attractor2.co[2]=cplx(0);

```

```

attractor2.co[3]=cplx(1);
attractor2.normalize();

homogeneous<double, 3> attractor3;
attractor3.co[0]=cplx(-1);
attractor3.co[1]=cplx(-1);
attractor3.co[2]=cplx(1);
attractor3.normalize();

zeta.normalize();

//E' necessario normalizzare attrattori e zeta prima di cominciare.

//Stabiliamo quanto siamo disposti ad aspettare prima di dichiarare un
//punto perduto.
int cutoff=800;

while ((n++<cutoff) && (zeta.squaredDistance(attractor1)>0.005) && (zeta.squaredDistance(attractor2)>0.005) )
{
    //iteriamo ad esempio il Sierpinski con campo (q e' inutile in questo caso)
    zeta.iterateSierpinskiField(q);
    zeta.normalize();
}
*basin=2; //Bacino di default (NERO)
if (zeta.squaredDistance(attractor1)<=0.005) *basin=0;
if (zeta.squaredDistance(attractor2)<=0.005) *basin=1;

return float(n);
}

inline float Green(float a,float b){

int n=0;

//immersione
cplx z=cplx(a,b);
cplx x=1;

double dd=1./degree; //Bisogna dire il grado della mappa

// Caso di ordine 3 senza campo
homogeneous<double, 3> zeta;
zeta.co[0]=z*z*z;
zeta.co[1]=z*x*x;
zeta.co[2]=x*x*x;

zeta.normalizeLog();
double green=0;
double d=1;

while ((n++<maxN) ) {
    zeta.iterateSpiderWeb(q);
    green-=zeta.normalizeLog()*d; //Il meno e' dovuto al normalizeLog.
    d*=dd;
}
return green;
}

```


Bibliografia

Gruppo di Rinormalizzazione e transizioni di fase

- [Fis] Michael E. Fisher: Renormalization group theory: its basis and formulation in Statistical Physics. *Rev. Mod. Phys.* 70, no. 2, 653-681 (1998)
- [Kad] Leo P. Kadanoff: Scaling laws for Ising models near T_C . *Physics* 2, no. 6, 263-272 (1966)
- [Wil] Kenneth G. Wilson: The renormalization group and critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 55, no. 3, 583-600 (1983)
- [YL1] C. N. Yang, T. D. Lee: Statistical theory of equations of state and phase transitions: Theory of condensation. *Phys. rev.* 87, 404-409 (1952)
- [YL2] C. N. Yang, T. D. Lee: Statistical theory of equations of state and phase transitions: Lattice Gas and Ising Model. *Phys. rev.* 87, 410-419 (1952)

Dinamica complessa

- [Br] H. Brolin: Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.* 6, 103-114 (1965)
- [FJ] Charles Favre & Matthias Jonsson: Brolin's theorem for curves in two complex dimensions. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 53, 5, 1461-1501 (2003)
- [Ly] Mikhail Ju. Lyubich: Entropy properties of rational endomorphism of the Riemann Sphere. *Ergodic Theory & Dynamical Systems* 3, 351-385 (1983)
- [McM] Curtis McMullen: Appunti per il corso «Algebra and Dynamics». <http://abel.math.harvard.edu/~ctm/home/text/class/harvard/275/03/html/home/pn/pn.pdf> , (2004)
- [Sib] Nessim Sibony: Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k . *Panoramas & Synthèses* 8, 97-185 (1999)
- [SB] John Smillie & Gregory T. Buzzard: Complex Dynamics in Several Variables. *Flavours of Geometry* 31, 117-150 (1997)

Reticoli gerarchici

- [BL] P. M. Bleher, M. Ju. Ljubić: Julia Sets and Complex Singularities in Hierarchical Ising Models. *Commun. Math. Phys.* 141, 453-474 (1991)
- [BZ] P. M. Bleher, E. Žalys: Asymptotics of the Susceptibility for the Ising Model on the Hierarchical Lattice. *Commun. Math. Phys.* 120, 409-436 (1989)
- [BCD] R. Burioni, D. Cassi, L. Donetti: Lee-Yang zeros ant the Ising model on the Sierpinski gasket. *J. Phys. A* 32, 5017-5027 (1999)
- [DSI] B. Derrida, L. De Seze, C. Itzykson: Fractal Structure of Zeroes in Hierarchical Models. *Journal of Statistical Physics* 33, 559-569 (1983)
- [DIL] B. Derrida, C. Itzykson, J. M. Luck: Oscillatory Critical Amplitudes in Hierarchical Models. *Commun. Math. Phys.* 94, 115-123 (1984)
- [GASM] Y. Gefen, A. Aharony, Y. Shapir, B. B. Mandelbrot: Phase transitions on fractals: II. Sierpinski gaskets. *J. Phys. A* 17, 435-444 (1984)

Altro

- [Ber] Claude Berge: Hypergraph Seminar. *Lecture Notes in Mathematics* 411, (1974)