

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

24 febbraio 2005

Invarianti di Nodi Legendriani

Candidato

Maria Antonietta Pascali

Relatore

Prof. Paolo Lisca

Università di Pisa

Controrelatore

Prof. Fulvio Lazzeri

Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2003/2004

Introduzione

Le strutture di contatto su varietà sono rintracciabili anche molto addietro negli anni, ad esempio in lavori nel campo dell'ottica geometrica ad opera di Huygens, Hamilton e Jacobi, o nel campo delle equazioni alle derivate parziali, con Lie. (Per maggiori informazioni storiche cfr. [Gei01].) Oggi, l'interesse di queste strutture e dei nodi (legendriani e trasversi) immersi in esse è molto legato allo studio della topologia e della dinamica in dimensione bassa. Negli ultimi quindici anni la geometria di contatto ha conosciuto un ulteriore notevole sviluppo, grazie, in particolar modo, a Yasha Eliashberg, H. Hofer, A. Givental, J. B. Etnyre, H. Geiges, E. Giroux, K. Honda, L. Ng, M. Sabloff, ed altri ancora. In questo quadro generale lo studio e la classificazione di nodi legendriani riveste un ruolo sempre più fondamentale, in quanto si sono dimostrati utili strumenti per individuare e costruire strutture di contatto. Un obiettivo dovrebbe essere quello di avere a disposizione una chiara classificazione dei nodi anche all'interno della teoria di contatto.

Nelle 3-varietà di contatto si parla di nodi legendriani e di isotopia legendriana (per la definizione vedi cap. 1). Chekanov è tra i primi a dedicare un lavoro, nel 2002 ([Che02a]), allo scopo di trovare degli invarianti per isotopia legendriana che permettano una classificazione dei nodi legendriani in 3-varietà di contatto più fine di quella ottenuta mediante l'utilizzo degli invarianti (detti classici) definiti nel primo capitolo : tipo topologico, numero di rotazione, numero di Thurston-Bennequin. Costruisce un'omologia di contatto, ed esibisce un esempio in cui gli invarianti classici non riescono ad escludere una eventuale isotopia legendriana, e la sua omologia invece ne è capace. Il limite è che tale risultato vale solo in \mathbb{R}^3 , dotato della struttura di contatto standard; la sua forza sta nel fatto che gli strumenti richiesti per la costruzione di tale invariante sono minimi (analisi ed algebra di base). Senza contare il fatto che a partire da questo articolo Etnyre, Ng e Sabloff ([ENS02]) sono riusciti a sollevare l'omologia di Chekanov, che è un'algebra su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduata su $\mathbb{Z}/2 \text{rot}(L)\mathbb{Z}$, ad un'algebra su $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ graduata su \mathbb{Z} eliminando la dipendenza dal numero di rotazione del nodo, ed Ekholm,

Etnyre e Sullivan ([EES]) hanno generalizzato il risultato a dimensione più alta.

Lo scopo principale di questa tesi è di esporre il teorema di Chekanov, riportato in [Che02a], in cui si afferma che due nodi legendriani sono legendrianamente isotopi se e solo se due algebre opportunamente associate ad essi sono equivalenti a meno di stabilizzazione (nozione che viene definita nel cap. 2).

La disposizione degli argomenti è la seguente:

Nel primo capitolo si definisce tutto ciò che serve alla comprensione del risultato esposto a partire dalla definizione di struttura di contatto e si enunciano i risultati più classici del campo.

Il secondo capitolo è la parte centrale di questa tesi, e consiste in una riscrittura della dimostrazione del teorema in cui si afferma che l'omologia di Chekanov è un invariante di nodi legendriani, in [Che02a]. Data la mole di tale dimostrazione si è scelto di esplorarla dimostrando man mano tutto quello che occorre senza separare gli enunciati dalle dimostrazioni, accentuando i passaggi salienti ed argomentando in maniera più esauriente alcune affermazioni la cui veridicità non è sembrata, ad una prima lettura, del tutto evidente.

Nel terzo si espongono due esempi di applicazione del teorema, estratti rispettivamente da [Che02a] e da [Etn]. In entrambi i casi si dimostra che non esiste un'isotopia legendriana tra i due nodi considerati, ma lo si fa utilizzando due metodi diversi.

Nel quarto ed ultimo capitolo si dà un accenno agli sviluppi avuti a partire dal lavoro di Chekanov.

Ringrazio sentitamente il prof. Paolo Lisca per il tempo dedicato, l'impegno, la pazienza e la disponibilità dimostrati. Un ringraziamento particolare va anche alla mia famiglia, per l'indispensabile e continuo appoggio ed incoraggiamento; agli amici, tutti, che mi sono stati molto vicini; ad Andrea, che per me c'è sempre.

Indice

Introduzione	iii
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Prime definizioni e risultati	1
1.2 Nodi legendriani	3
1.3 Invarianti classici di nodi legendriani	6
2 Omologia di Chekanov	9
2.1 Algebre differenziali graduate	9
2.2 Stabilizzazione	10
2.3 DGA semi-libera associata ad un nodo legendriano	12
2.4 DGA ed isotopia legendriana	23
3 Invariante di Chekanov	39
3.1 Calcolo del differenziale per I e II	39
3.2 I. Linearizzazione	42
3.3 II. Algebra caratteristica	47
4 Sviluppi e generalizzazioni	49

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Prime definizioni e risultati

Come prima cosa è opportuno definire rigorosamente gli oggetti con cui si avrà a che fare nei prossimi capitoli, ed enunciare alcuni risultati fondamentali nel campo, che o verranno utilizzati successivamente, o costituiscono comunque un tassello importante per aiutare una certa comprensione dell'ambiente in cui è impostato il lavoro di Chekanov e, con esso, questa tesi.

Sia M una varietà C^∞ , di Hausdorff, a base numerabile. Un *campo di iperpiani* su M è un sottoinsieme $\xi \subset TM$ tale che:

- (i) $\xi_m := \xi \cap T_m M$ sia un sottospazio di codimensione 1
- (ii) per ogni $m \in M$ esiste U intorno di m , ed esiste α 1-forma su U per cui $\xi|_U = \ker \alpha$.

Un campo di iperpiani si dice *coorientabile* se esiste un campo vettoriale $v \in \Gamma(M)$ tale che $T_m M = v_m \oplus \xi_m$, e cioè un campo vettoriale trasverso a ξ in ogni punto. Per il fatto che ξ_m ha sempre codimensione 1 per definizione, risulta che $v_m \neq 0$. Osservazione abbastanza semplice da verificare è che per un campo di iperpiani essere coorientabile equivale a dire che tale campo è il nucleo di una 1-forma globale (cioè definita su tutto M).

Un campo di iperpiani si dice *struttura di contatto* su M , e la varietà di contatto si indicherà con (M, ξ) , se per ogni $m \in M$ esistono un intorno U ed una 1-forma $\alpha_U \in \Omega^1(U)$ tali che $\xi|_U = \ker \alpha_U$ e $\alpha_U \wedge (d\alpha_U)^n \neq 0$ in ogni punto di U . Quest'ultima condizione è chiamata *di contatto*.

L'esempio più semplice di struttura di contatto è la struttura standard

ξ_{st} su \mathbb{R}^{2n+1} :

$$\xi_{st} = \ker \left(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right)$$

Un altro interessante esempio di struttura di contatto, questa volta su \mathbb{R}^3 è ξ_{ot} definita in coordinate cilindriche (z, r, θ) :

$$\xi_{ot} = \ker (\cos r dz + r \sin r d\theta).$$

Da ora in poi si considereranno esclusivamente varietà di dimensione dispari, $\dim(M) = 2n + 1$, e campi di iperpiani coerentabili.

Sono stati scelti questi due esempi perchè sono rappresentativi di una fondamentale distinzione che si fa tra le strutture di contatto su 3-varietà chiuse: ξ_{st} è una struttura *tesa*, mentre ξ_{ot} si dice *overtwisted*. Definiamo (M, ξ) *overtwisted* quando esiste un disco D embedded in M che è tangente ai piani di contatto lungo il bordo. (M, ξ) si dice *tesa* altrimenti.

Due varietà di contatto (M, ξ) e (N, η) sono *isomorfe* se esiste un diffeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ per cui $d\varphi(\xi) = \eta$.

Due strutture di contatto ξ e ξ' su una varietà M si dicono *isotope* se esiste un diffeomorfismo isotopo all'identità $\varphi : M \rightarrow M$ tale che $d\varphi(\xi) = \xi'$.

Richiamiamo brevemente due teoremi: il primo è dovuto a Darboux (1882), il secondo a Gray (1959); per entrambe le dimostrazioni si può far riferimento a [ea94] o a [Gei03].

Teorema 1.1.1. *Sia α una 1-forma di contatto su una varietà M e sia m un suo punto. Allora esistono coordinate locali $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ su un intorno U di m sul quale*

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

Questo teorema implica, in particolare, che ogni struttura di contatto su \mathbb{R}^3 localmente è isomorfa alla struttura standard.

Teorema 1.1.2. *Sia (ξ_t) , $t \in [0, 1]$ una famiglia di strutture di contatto su una varietà chiusa M . Allora esiste un'isotopia $(\phi_t : M \rightarrow M)_t$ tale che:*

- (i) $\phi_0 = \text{id}_M$
- (ii) $(d\phi_t)(\xi_0) = \xi_t \quad \forall t \in [0, 1]$.

Per approfondimenti si rimanda a [Gei03].

1.2 Nodi legendriani

Si introducono ora i veri protagonisti: i nodi legendriani. Verranno trattati in dettaglio, mediante lo studio delle due proiezioni che sembrano descriverli meglio (specialmente per quanto riguarda nodi immersi in \mathbb{R}^3). Gli invarianti di cui si parla sono invarianti per isotopia legendriana; finalmente, in questa sezione, si dà la definizione di isotopia legendriana.

Un *nodo legendriano* L in una varietà di contatto (M^3, ξ) è l'immagine di un embedding di S^1 che è in ogni punto tangente a ξ :

$$T_x L \in \xi_x, \quad \forall x \in L.$$

Per completezza definiamo anche i nodi trasversi: un *nodo trasverso* L in una varietà di contatto (M^3, ξ) è l'immagine di un embedding di S^1 tale che in ogni punto

$$T_x L \cap \xi_x = 0, \quad \forall x \in L.$$

Siccome vale il teorema di Darboux, ci si limita a considerare nodi in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) ; oltretutto, in questa varietà si ha la comodità di poter sfruttare delle proiezioni per visualizzare i nodi su \mathbb{R}^2 .

Come parametrizzazione di L usiamo:

$$\begin{aligned} \phi : S^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\mapsto (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \end{aligned}$$

con ϕ almeno C^1 . Il fatto che L è tangente a ξ impone una condizione sulle derivate:

$$\phi'(\theta) \in \xi_{\phi(\theta)}, \text{ e cioè } z'(\theta) - y(\theta)x'(\theta) = 0.$$

Diciamo che due nodi legendriani sono *legendrianamente isotopi* se esiste un'isotopia $(L_t)_t$, $t \in [0, 1]$, nello spazio dei nodi legendriani che li congiunge.

Due sono le proiezioni più usate per rappresentare nodi legendriani: la proiezione *fronte d'onda* Π ,

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, z) \end{aligned}$$

e quella *lagrangiana* π ,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y). \end{aligned}$$

Vediamo di caratterizzare il diagramma, prima quello fronte d'onda, poi quello lagrangiano, di un generico nodo legendriano.

Proiezione II. La condizione sulle derivate $z'(\theta) = y(\theta)x'(\theta)$, implica un primo fatto: se $x'(\theta) = 0$ allora $z'(\theta) = 0$ e dunque la proiezione fronte d'onda di un nodo legendriano non ha tangenti verticali (per verticale indichiamo la direzione $\frac{\partial}{\partial z}$).

Inoltre, nei punti in cui $x' \neq 0$ si ricava la coordinata y :

$$y(\theta) = \frac{z'(\theta)}{x'(\theta)}$$

Se poi il punto θ_0 in cui x' si annulla è isolato, possiamo ancora ricavare la coordinata y come limite:

$$y(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{z'(\theta)}{x'(\theta)}.$$

Esistono però nodi in cui x' si annulla su intervalli aperti; in questo caso quello che si fa è operare una piccola perturbazione nello spazio dei nodi legendriani che renda più accentuata la cuspide nel diagramma fronte d'onda. Si ottiene un arco legendriano isotopo a quello di partenza, ma con $x' = 0$ in un unico punto. Da questa osservazione segue che le proiezioni fronte d'onda di nodi legendriani possono essere parametrizzate mediante un'applicazione che è un'immersione meno che in un numero finito di punti nei quali è ben definita una retta tangente. Tali punti vengono detti *cuspidi generalizzate*.

Nelle cuspidi generalizzate, mediante una perturbazione C^2 -piccola, ed un cambio di coordinate, è possibile ottenere la parametrizzazione $z(\theta) = 3\theta^2$ e $x(\theta) = 2\theta^2$. Da semplici calcoli è possibile anche osservare che in ogni incrocio del diagramma l'arco che passa sopra ha inclinazione minore dell'altro. (cfr. Approximations theorems in [Gei03])

Utilizzando le osservazioni fatte sopra sui diagrammi di nodi legendriani ed il teorema di Darboux, si dimostra il teorema, riportato in [Etn]:

Teorema 1.2.1. *Dato un nodo topologico L esiste un nodo legendriano C^0 -vicino ad esso.*

Così come per i diagrammi di nodi topologici, anche per i nodi legendriani esiste un insieme di *mosse di Reidmeister*. (In fig. 1.1 sono illustrate in proiezione fronte d'onda; in fig. 1.2 in proiezione lagrangiana.)

Interessante è il teorema, dimostrato in [Swi92]

Teorema 1.2.2. *Due diagrammi fronte d'onda rappresentano due nodi legendriani che sono legendrianamente isotopi se e soltanto se esiste una successione di omotopie regolari e mosse di Reidmeister (in numero finito) che li connette.*

Oss. Non esiste un diretto analogo di questo risultato per i diagrammi lagrangiani. Però è possibile ottenere una caratterizzazione dell'isotopia legendriana discutendo un'opportuna operazione di conversione tra i due tipi di diagrammi. (cfr. [Etn, sezione 4.5])

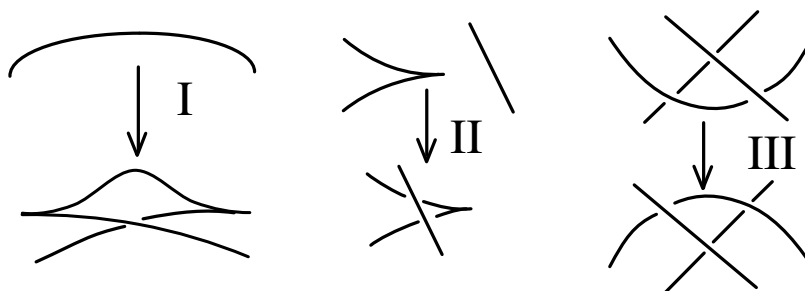


Figura 1.1. Mosse di Reidmeister in fronte d'onda

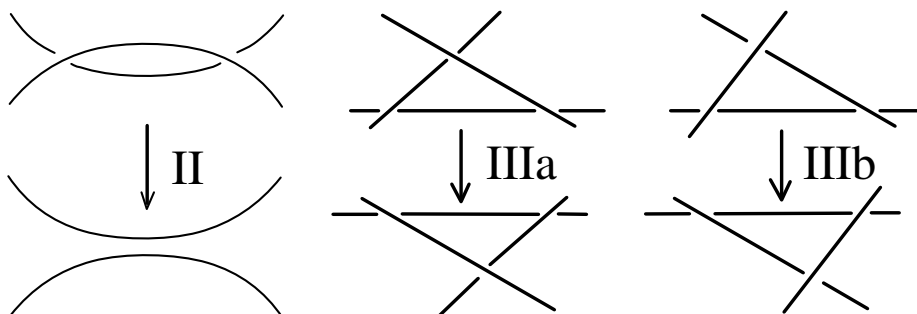


Figura 1.2. Mosse di Reidmeister in proiezione lagrangiana

Proiezione π . A differenza della proiezione fronte d'onda, la proiezione lagrangiana è sempre parametrizzata da un'immersione, infatti se $x'(\theta) = y'(\theta) = 0$, allora $z'(\theta) \neq 0$. Poi, siccome L è embedding di un S^1 , bisogna tener conto che gli incroci di $\pi(L)$ non corrispondono mai ad autointersezioni di L .

Inoltre è possibile ricavare dalla proiezione lagrangiana il nodo L in quanto

$$z(\theta) = z(0) + \int_0^\theta y(\varphi)x'(\varphi)d\varphi.$$

L'unica ambiguità in questa operazione è la scelta di $z(0)$.

Per il teorema di Stokes l'equazione di prima si traduce nel fatto che $\pi(L)$ borda una regione $\subset \mathbb{R}^2$ la cui area (calcolata con segno) è nulla.

Un nodo L si dice π -generico se tutte le autointersezioni di $\pi(L)$, che chiameremo incroci, sono punti doppi trasversi.

1.3 Invarianti classici di nodi legendriani

In questa sezione, l'obiettivo è quello di presentare la definizione degli invarianti di nodi legendriani considerati tutt'ora classici, e di richiamare brevemente il modo in cui si calcolano.

Tipo topologico. Il primo invariante di nodi legendriani che presentiamo è il tipo topologico del nodo. Questo è possibile in quanto una qualsiasi isotopia legendriana tra due nodi legendriani è anche un'isotopia topologica.

Numero di Thurston-Bennequin. Intuitivamente si può spiegare come un indice di quante volte ξ ruota attorno ad L . La varietà M è di Hausdorff ed a base numerabile, dunque ammette una metrica riemanniana. In questo caso, data una sua sottovarietà N è possibile definire il fibrato normale geometrico come $TN^\perp \subset T_N M$. Definiremo il numero di Thurston-Bennequin solo nel caso di nodi legendriani L per i quali esiste una superficie orientabile immersa Σ di cui L sia il bordo: sia \mathbf{v} un campo vettoriale mai nullo lungo L in $TN^\perp \cap \xi$ e sia L' una copia di L ottenuta traslando (di una quantità piccola a piacere) L lungo \mathbf{v} ; allora $tb_\Sigma(L)$ si definisce come il numero di allacciamento (linking number) di L con L' : $tb_\Sigma(L) = lk(L, L')$. In generale questo numero dovrà dipendere dalla superficie Σ scelta; però in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) si dimostra che è un intero che non dipende da Σ . Si osservi che gli invarianti fin qui definiti non dipendono dall'orientazione del nodo.

Numero di rotazione. Sia Σ una superficie orientabile immersa il cui bordo sia L , nodo orientato. Se consideriamo i piani di contatto ristretti a Σ , $\xi|_\Sigma$, otteniamo un fibrato di rango 2. Inoltre abbiamo che $\xi|_\Sigma \rightarrow \Sigma$ ammette sempre una sezione mai nulla τ . Sia \mathbf{t} un campo vettoriale mai nullo tangente ad L e sempre concorde con l'orientazione di L . Definiamo il numero di rotazione $rot(L)$ come quante volte \mathbf{t} gira rispetto a τ . Ovviamente questo numero dipende dall'orientazione fissata su L ed in particolare assume valore opposto qualora si inverta l'orientazione su L . Si dimostra che tale numero è un intero e che è un invariante per isotopia legendriana, ma non per il tipo topologico del nodo.

Osserviamo ancora che nel caso (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) il vettore $\frac{\partial}{\partial y}$ è una sezione mai nulla della struttura standard su tutto \mathbb{R}^3 .

In ultimo riportiamo brevemente come è possibile calcolare rot e tb nelle due proiezioni Π e π . Per le dimostrazioni di queste affermazioni si consulti [Etn].

In $\Pi(L)$:

$$rot(L) = \frac{1}{2}(D - U)$$

dove D rappresenta il numero di cuspidi discendenti e U il numero di quelle ascendenti.

In $\pi(L)$, $rot(L)$ è il numero di rotazione del campo vettoriale tangente a $\pi(L)$.

Per dare la formula che permette un veloce calcolo del numero di Thurston-Bennequin, è invece necessario assegnare un segno agli incroci tra L ed il proprio traslato lungo la direzione di z (nel caso di (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) , $\partial/\partial z$ è esattamente il campo vettoriale trasverso a ξ lungo L della definizione). Siano dati i segni come in fig. 1.3; tale convenzione vale in entrambe le proiezioni.

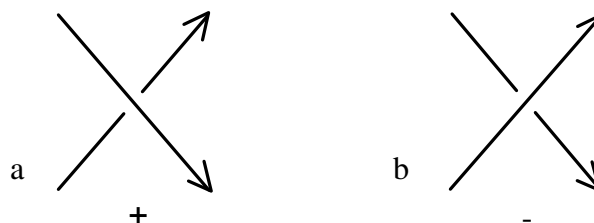


Figura 1.3. Convenzione sugli incroci

Sia $W(\Pi(L))$ il numero di incroci tipo (a) diminuito del numero di incroci tipo (b) e CS il numero di cuspidi. Allora, in $\Pi(L)$,

$$tb(L) = W(\Pi(L)) - \frac{CS}{2}.$$

Invece in $\pi(L)$ il calcolo è più semplice:

$$tb(L) = W(\pi(L)).$$

Capitolo 2

Omologia di Chekanov

L'obiettivo di questo lungo capitolo è arrivare a definire l'omologia di Chekanov e dimostrarne l'invarianza per isotopia legendriana. Quello che si fa è associare un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algebra differenziale graduata ad ogni nodo legendriano: i generatori dell'algebra corrispondono agli incroci del diagramma, ed il differenziale deriva dal conteggio di particolari poligoni immersi, i cui lati giacciono su $\pi(L)$, ed i cui vertici sugli incroci. Questa associazione, per essere veramente utile deve avere più caratteristiche: ad esempio deve consentire il passaggio "indolore" tra nodi legendrianamente isotopi, ed in realtà non lo fa; occorre infatti introdurre una relazione di equivalenza tra algebre differenziali graduate. Si dimostra che due nodi legendrianamente isotopi hanno DGA equivalenti. Sarebbe molto utile che fosse immediato, dato un nodo legendriano qualsiasi, esibire l'algebra differenziale associata, ma soprattutto dovrebbe essere semplice verificare che due DGA appartengono alla stessa classe di equivalenza. L'ultima di queste richieste non è semplice da soddisfare; di come risolvere questo problema si tratterà ampiamente nel prossimo capitolo.

2.1 Algebre differenziali graduate

Sia A una algebra associativa su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si dice che A è graduata su un gruppo ciclico Γ se è definita un'applicazione $\deg : A \rightarrow \Gamma$ ed esiste una decomposizione di A come spazio vettoriale in componenti omogenee rispetto a \deg : $A = \bigoplus_{i \in \Gamma} A_i$; inoltre deve essere $A_i A_j \subset A_{i+j}$.

Una mappa ∂ da A in sè è chiamata *differenziale* su A se verifica le seguenti proprietà:

- (i) ∂ è lineare;

- (ii) $\partial^2 = 0$;
- (iii) vale la *regola di Leibnitz*: $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b) \forall a, b \in A$;
- (iv) $\deg \partial = -1$.

Tale coppia (A, ∂) è detta *algebra differenziale graduata*, o semplicemente *DGA*.

Nella terza sezione di questo capitolo vedremo come costruire, a partire dalla proiezione lagrangiana di un nodo legendriano (generico rispetto a tale proiezione), un' algebra differenziale graduata.

2.2 Stabilizzazione

Allo scopo di definire un invariante che tenga conto del fatto che più diagrammi lagrangiani possono corrispondere a nodi legendrianamente isotopi, è utile introdurre una relazione di equivalenza tra DGA semi-libere (semi-libera vuol dire libera, ma con generatori fissati), che in seguito verificheremo essere quella opportuna.

Indichiamo con $T(a_1, \dots, a_n)$ l'algebra su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associativa, con unità, libera, con generatori $a_1, \dots, a_n (n \geq 0)$; in sostanza è l'algebra non commutativa dei polinomi nelle variabili a_1, \dots, a_n . Osserviamo che esiste una ovvia decomposizione di T come spazio vettoriale: $T(a_1, \dots, a_n) = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} T_l$, con T_l il sottospazio generato dai monomi del tipo $a_{i_1} \cdots a_{i_l}$ con $1 \leq i_j \leq n \forall j$ e $T_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Siano (A, ∂_A) e $(A', \partial_{A'})$ due DGA semi-libere, dove $(A, \partial_A) = (T(a_1, \dots, a_n), \partial_A)$ su Γ_A e $(A', \partial_{A'}) = (T(b_1, \dots, b_m), \partial_{A'})$ su $\Gamma_{A'}$. Definiremo allora il prodotto libero tra due generiche DGA semi-libere come:

$$(A, \partial_A) \amalg (A', \partial_{A'}) = (T(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m), \partial)$$

con $\partial(a_i) = \partial_A(a_i)$ e $\partial(b_j) = \partial_{A'}(b_j)$ su $\Gamma_A \otimes \Gamma_{A'}$, ed i gradi dei generatori definiti nella maniera ovvia da $\Gamma_A \rightarrow \Gamma_A \otimes \Gamma_{A'}$ e $\Gamma_{A'} \rightarrow \Gamma_A \otimes \Gamma_{A'}$.

Consideriamo l'algebra differenziale semi-libera (E_i, ∂_i) graduata su \mathbb{Z} , con $i \in \mathbb{Z}$; precisamente $E_i = T(e_1, e_2)$, $\deg(e_1) = i$ e $\deg(e_2) = i - 1$, $\partial_i(e_1) = e_2$ e $\partial_i(e_2) = 0$. Definiamo la *i-esima stabilizzazione* di (A, ∂) : $S_i(A, \partial) = (A, \partial) \amalg (E_i, \partial_i)$ graduata su $\Gamma_A \otimes \mathbb{Z}$.

Definiamo ora il concetto di appartenenza alla stessa classe di stabilizzazione.

Un automorfismo graduato g di un'algebra libera graduata $T(a_1, \dots, a_n)$ si dice *elementare* se esiste $j \in [1, \dots, n]$ tale che:

$g(a_i) = a_i$ per $i \neq j$, $g(a_j) = a_j + u$ con $u \in T(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$.

Il gruppo degli *automorfismi tame* è il gruppo generato dagli automorfismi elementari.

Un *isomorfismo* graduato $T(a_1, \dots, a_n) \rightarrow T(a'_1, \dots, a'_n)$ è detto *tame* se è composizione di un automorfismo tame e dell'isomorfismo che manda $a_i \mapsto a'_i \forall i$.

Un omomorfismo graduato tra due algebre graduate sullo stesso gruppo Γ è chiamato *DGA-omomorfismo* tra (A, ∂_A) e (A', ∂'_A) se $g \circ \partial_A = \partial'_A \circ g$.

Un *DGA-isomorfismo tame* è sia un isomorfismo tame, sia un DGA-isomorfismo.

Si dice che due DGA semi-libere appartengono alla stessa classe di stabilizzazione se sono tame isomorfe a meno di un numero finito di stabilizzazioni. Nel prossimo lemma si dimostra che appartenere alla stessa classe di stabilizzazione comporta avere omologie isomorfe.

Lemma 2.2.1. *Se due DGA semi-libere (A, ∂) (A', ∂') appartengono alla stessa classe di stabilizzazione, allora le loro omologie sono isomorfe come algebre graduate. Inoltre questo isomorfismo è indotto da DGA omomorfismi $\sigma : (A, \partial) \rightarrow (A', \partial')$, $\tau : (A', \partial') \rightarrow (A, \partial)$.*

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare il lemma nel caso in cui $(A', \partial') = S_j(A, \partial)$. Sia X l'ideale bilatero generato in A' da e_1 ed e_2 . Dunque si ha la decomposizione, come spazio vettoriale, $A' = A \oplus X$.

Siano $\sigma : (A, \partial) \rightarrow (A', \partial')$ l'inclusione e $\tau : (A', \partial') \rightarrow (A, \partial)$ la proiezione; queste applicazioni sono DGA omomorfismi. La tesi si dimostra considerando $\sigma \circ \tau : A' \rightarrow A'$ e $\tau \circ \sigma : A \rightarrow A$. Si osserva che $\tau \circ \sigma = \text{id}_A$, e dunque, passando in omologia, si ottiene l'isomorfismo desiderato ($\sigma_* \circ \tau_* = \text{id}_{A_*}$). Non rimane che verificare che $\sigma \circ \tau$ sia omotopo a $\text{id}_{A'}$, e cioè che $\exists h : A' \rightarrow A'$ omomorfismo tale che $\sigma \circ \tau + \text{id}_{A'} = h \circ \partial - \partial \circ h$; questo indurrà l'isomorfismo in omologia.

Definendo

$$h(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w \in A \\ ye_1z & \text{per } w = ye_2z \quad e \quad y \in A, z \in A' \\ 0 & \text{per } w = ye_1z \quad e \quad y \in A, z \in A' \end{cases}$$

si verifica immediatamente la relazione di omotopia di catena, infatti:

$$(i) \quad \begin{aligned} \tau(w) + \text{id}_A(w) &= 0 \\ h(\partial'(w)) + \partial'(h(w)) &= h(\partial(w)) = 0 \end{aligned}$$

- (ii) $\tau(ye_2z) + \text{id}_{A'}(ye_2z) = ye_2z$
 $h(\partial'(ye_2z)) = \partial(y)e_1z + ye_1\partial'(z)$
 $\partial'(h(ye_2z)) = \partial'(ye_1z) = \partial(y)e_1z + ye_2z + ye_1\partial'(z)$
- (iii) $\tau(ye_1z) + \text{id}_{A'}(ye_1z) = ye_1z$
 $h(\partial'(ye_1z)) = ye_1z$
 $\partial'(h(ye_1z)) = 0.$

□

2.3 DGA semi-libera associata ad un nodo legendriano

L'obiettivo di questa sezione è assegnare ad un nodo legendriano L , generico rispetto alla proiezione lagrangiana, una opportuna coppia (A, ∂) .

In primo luogo consideriamo il suo diagramma $Y = \pi(L)$ e chiamiamo $C(Y) = \{a_1, \dots, a_n\}$ l'insieme degli incroci di Y . Dunque definiamo $A = T(a_1, \dots, a_n)$ come $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algebra, libera, associativa e con unit . Occorre per  anche definire il grado.

Sia $a \in C(Y)$. Allora ci sono due punti a^+ ed a^- su L , la cui proiezione   a . Sia a^+ quello con coordinata z maggiore, e sia $\tilde{\gamma}_a$ un arco: $[0, 1] \rightarrow (L)$ che congiunga a^+ ad a^- . Consideriamo, allora, la proiezione γ_a di $\tilde{\gamma}_a$ su $\pi(L)$ e definiamo l'applicazione $g_a : [0, 1] \rightarrow S^1$ definita come $g_a(t) = \frac{\gamma'_a(t)}{|\gamma'_a(t)|}$; essendo la proiezione generica, $g_a(0) \neq g_a(1)$. Si consideri l'estensione di g_a a $[0, 1 \cup] 1, 2\pi]$, dove in $[1, 2\pi]$ g_a   la rotazione in senso orario di $g_a(1)$ su $g_a(0)$. L'applicazione risulta definita: $S^1 \rightarrow S^1$.   importante osservare che sono due i possibili archi che congiungono i due punti su L ; questa per  rimane una buona definizione se tale grado   calcolato modulo $2 \text{rot}(L)$. Infatti l'unione dei due archi   tutto L , e la differenza tra i due possibili gradi   proprio due volte il numero di rotazione di L .

$$\deg(a) := \deg(g_a) \pmod{2 \text{rot}(L)}.$$

Dunque A risulta essere un'algebra graduata su $\Gamma = \mathbb{Z}/2 \text{rot}(L)\mathbb{Z}$.

Rimane da definire il differenziale su A . Lo si fa definendolo sui generatori ed estendendo poi tale definizione mediante la regola di Leibnitz.

L'intorno di ogni incrocio a in \mathbb{R}^2   diviso in quattro settori da Y e convenzionalmente indicheremo come positivi i due generati dalla rotazione antioraria dell'arco di coordinata z maggiore, in a , sull'altro, e negativi i rimanenti. Sia $\Pi_k \subset \mathbb{R}^2$ un k -poligono curvilineo con i vertici $\{x_0^k, \dots, x_{k-1}^k\}$ numerati in senso antiorario.

Gli insiemi di applicazioni con cui avremo a che fare per poter definire il differenziale sono immersioni particolari. La forma $dx \wedge dy$ dota \mathbb{R}^2 di un'orientazione. Si consideri l'insieme delle immersioni lisce $f : (\Pi_k, \partial(\Pi_k)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, Y)$ che preservano l'orientazione e tali che $f(x_i^k) \in C(Y) \quad \forall i = 0, \dots, k-1$; indichiamo con $W_k(Y)$ tale insieme quozientato per la relazione d'equivalenza "essere una riparametrizzazione di". (Dove g è una riparametrizzazione di f se esiste un'applicazione $C^\infty h : \Pi_k \rightarrow \mathbb{R}$ mai nulla tale che $g = hf$.) Osserviamo che se due immersioni appartengono alla stessa classe allora assumono gli stessi valori nei vertici del poligono. Inoltre diciamo che un vertice è positivo per f quando l'immagine di un suo piccolo intorno copre un settore positivo; analogamente si definiscono i vertici negativi. Sia l'insieme $W_k^+(Y)$ come l'insieme delle immersioni di $W_k(Y)$ che hanno il vertice x_0^k positivo e tutti gli altri negativi. Qualora si voglia evidenziare quale sia l'immagine del vertice positivo in Y , si indicherà l'insieme con $W_k^+(Y, a_j)$.

Chiamiamo *immersioni ammissibili*, e le indichiamo con $W^+(Y, a_j)$, l'unione degli insiemi $W_k^+(Y, a_j)$ al variare di k in \mathbb{N} .

Finalmente possiamo definire il differenziale:

$$\partial = \sum_{k \geq 0} \partial_k \quad (\text{mod } 2)$$

$$\text{con} \quad \partial_k(a_j) = \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} f(x_1^{k+1}) \cdots f(x_k^{k+1}) \quad (\text{mod } 2)$$

Si osservi che cambiare l'orientazione di L non modifica il differenziale.

Le verifiche che faremo su ∂ così definito sono essenzialmente la parte centrale dell'articolo di Chekanov e consistono di alcuni lemmi e di un teorema.

Cominciamo con un lemma di largo utilizzo che chiameremo *lemma delle altezze*. Si definisca $H : C(Y) \rightarrow \mathbb{R}^+$ come la funzione che ad ogni incrocio a di Y associa $z(a^+) - z(a^-)$. Allora vale:

Lemma 2.3.1 (delle altezze). *Data $f \in W_k(Y)$, si ha che:*

$$\sum_{x \in Q_+} H(f(x)) - \sum_{x \in Q_-} H(f(x)) = \int_{\Pi_k} f^*(dx \wedge dy) > 0, \quad (2.3.1)$$

dove Q_+ (risp. Q_-) è l'insieme dei vertici positivi (risp. negativi) per f . In particolare, almeno uno dei vertici deve essere positivo.

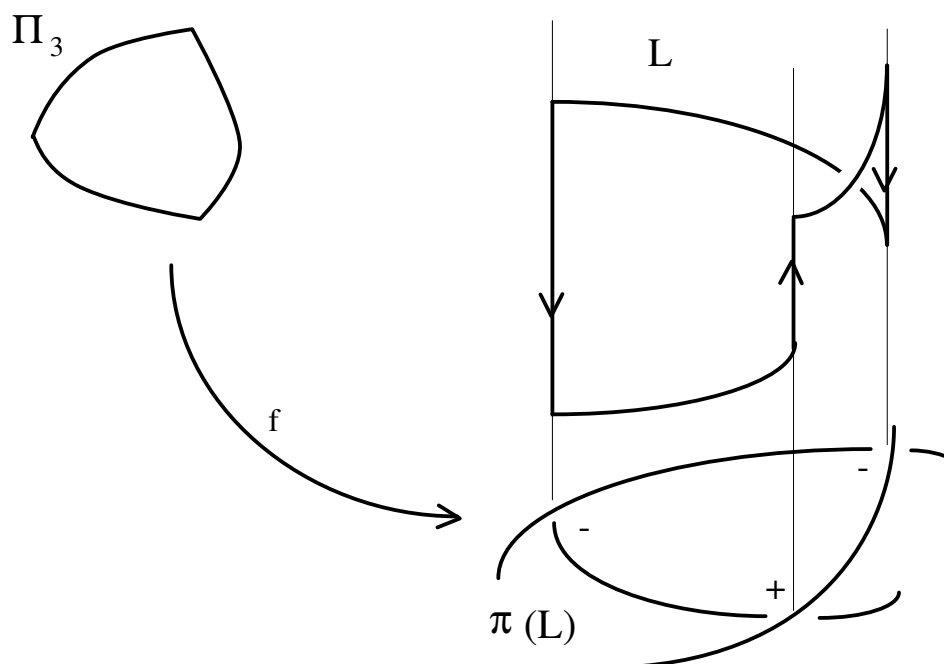


Figura 2.1. Esempio di costruzione di un cammino Γ

Dimostrazione. Denotiamo con X_i la porzione di $\partial\Pi_k$ che congiunge x_i^k con x_{i+1}^k per $i = 0, \dots, k-1$ ed $x_k^k = x_0^k$; sia poi γ_i il pezzo di L che si proietta su $f(X_i)$, orientato nel verso che va dal punto che si proietta su $f(x_i^k)$ a quello che si proietta su $f(x_{i+1}^k)$; chiamiamo inoltre γ'_i il segmento verticale in \mathbb{R}^3 che connette $(f(x_i^k))^+$ con $(f(x_i^k))^-$, orientato da $-$ a $+$ se x_i^k è positivo e nell'altro senso altrimenti.

Non rimane che chiamare Γ il cammino ottenuto dalla riparametrizzazione e giustapposizione dei cammini definiti sopra nell'ordine

$$\Gamma : \gamma'_0, \gamma_0, \dots, \gamma'_{k-1}, \gamma_{k-1}.$$

Osserviamo che questo è un cammino chiuso in \mathbb{R}^3 , e dunque, per il teorema di Seifert, esiste una superficie Σ di cui Γ sia il bordo. Dividiamo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove in Γ_1 sono raccolti i tratti legendriani, ed in Γ_2 quelli verticali. (Si veda un esempio del caso Π_3 in fig. 2.1.) Integriamo la 1-forma $dz - ydx$ su Γ in due modi: il primo separando il dominio e calcolando separatamente i due

integrali risultanti, ed il secondo sfruttando il teorema di Stokes.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \int_{\Gamma} (dz - y \wedge dx) &= \int_{\Gamma_1} (dz - y \wedge dx) + \int_{\Gamma_2} (dz - y \wedge dx) \stackrel{(\text{L. legendr.})}{=} \\
 &= \int_{\Gamma_2} (dz - y \wedge dx) = \sum_{x \in Q_+} H(f(x)) - \sum_{x \in Q_-} H(f(x)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \int_{\Gamma} (dz - y \wedge dx) &= \int_{\Gamma} dz - \int_{\Gamma} y \wedge dx \stackrel{(\text{Stokes})}{=} \int_{\Sigma} d^2z - \int_{\Gamma} y \wedge dx = \\
 &= - \int_{\pi(\Gamma)} y \wedge dx = - \int_{\partial f(\Pi_k)} y \wedge dx = - \int_{\partial \Pi_k} f^*(y \wedge dx) \stackrel{(\text{Stokes})}{=} \\
 &= - \int_{\Pi_k} f^*(dy \wedge dx) = \int_{\Pi_k} f^*(dx \wedge dy) > 0.
 \end{aligned}$$

E' così dimostrata la tesi. \square

Immediatamente, in base a questo lemma, risulta che:

$$\text{se } f \in W_k^+(Y) \text{ allora } H(f(x_0^k)) > \sum_{i=1}^{k-1} H(f(x_i^k)). \quad (2.3.2)$$

Lemma 2.3.2. *Per ogni nodo legendriano generico rispetto alla proiezione lagrangiana esiste solo un numero finito di immersioni ammissibili. Di conseguenza, ∂ è calcolabile.*

Dimostrazione. Sia $f \in W_k^+(Y)$. Risulta:

$$\int_{\Pi_k} f^*(dx \wedge dy) = \sum_{l=1}^m n_l(f) S_l,$$

dove S_l è l'area della l -esima componente connessa limitata U_l in cui Y divide \mathbb{R}^2 , ed $n_l(f)$ è la cardinalità dell'insieme $f^{-1}(c)$ con $c \in U_l$.

In base al lemma precedente, $\sum_{l=1}^m n_l(f) S_l$ non può superare il massimo di H ; dunque le cardinalità $n_l(f)$ si possono scegliere solo in un numero finito di modi. D'altra parte, data una successione n_1, \dots, n_m , esiste un numero finito di immersioni ammissibili tali che $n_l(f) = n_l \forall l$. E' così dimostrato il lemma. \square

Ora dimostriamo che effettivamente ∂ è un differenziale: le proprietà (i) e (iii) richieste sono soddisfatte come conseguenza immediata della definizione. Nel prossimo lemma si verificherà la (iv). Sarà invece più involuta e faticosa la dimostrazione della proprietà (ii), che verrà riportata a conclusione di questa sezione.

Lemma 2.3.3. *Data $f \in W_k(Y)$ e Q_+ (risp. Q_-) l'insieme dei vertici positivi (risp. negativi) per la f , vale che:*

$$\sum_{x \in Q_+} \deg(f(x)) - \sum_{x \in Q_-} \deg(f(x)) = 2 - |Q_+|. \quad (2.3.3)$$

Oss. Si noti che questa non è la diretta dimostrazione della proprietà (iv) per il differenziale definito, ma la implica. Vediamolo:

$$\begin{aligned} \deg(\partial_k(a_j)) &= \deg \left(\sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} f(x_1^{k+1}) \cdots f(x_k^{k+1}) \right) = \\ &= \deg(a_j) - 1, \end{aligned}$$

in quanto ognuno dei termini della somma ha il medesimo grado:

$$\sum_{i=1}^k \deg(f(x_i^{k+1})) \stackrel{(lemma)}{=} \deg(f(x_0^{k+1})) - 1 = \deg(a_j) - 1.$$

Ciò implica che $\partial_k(A_i) \subset A_{i-1} \forall k$, dove $i = \deg(a_j)$, e dunque che $\deg \partial = -1$.

Dimostrazione. Si consideri la funzione $\theta : L \times L \rightarrow \mathbb{R}/2 \operatorname{rot}(L)\mathbb{Z}$, che manda (x, y) in due volte il numero di rotazione della porzione di $Y \subset \mathbb{R}^2$ che va dalla proiezione di x a quella di y . Il numero di rotazione di uno dei due cammini (su Y) che uniscono $\pi(x)$ a $\pi(y)$ è definito come la somma del numero di rotazione dei tratti lisci che compongono il cammino scelto. Affinchè θ sia ben definita, occorre eliminare l'ambiguità circa la scelta del cammino; come per la definizione del grado data all'inizio di questa sezione, si ovvia all'inconveniente calcolando il numero di rotazione modulo $2 \operatorname{rot}(L)$.

Chiaramente, $\forall x, y, z \in L$ valgono le seguenti proprietà:

$$\theta(x, y) = -\theta(y, x); \quad \theta(x, y) + \theta(y, z) = \theta(x, z).$$

Chiamiamo X_i il lato di Π_k che congiunge x_i^k ad x_{i+1}^k $0 \leq i \leq k-1$; consideriamo l'immersione liscia $\phi_i : X_i \rightarrow L$ tale che $f|_{X_i} = \pi \circ \phi_i$.

$$\text{Siano } y_i := \phi_i(x_i^k), y'_{i+1} := \phi_i(x_{i+1}^k), y'_0 := y'_k.$$

Siano, ancora:

$$C_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \theta(y_i, y'_{i+1}), \quad C_2 = \sum_{i=0}^{k-1} \theta(y'_i, y_i).$$

Per le proprietà su richiamate, per la definizione data, riordinando opportunamente gli addendi, $C_1 + C_2 = 0$:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \theta(y'_0, y_0) + \theta(y_0, y'_1) + \cdots + \theta(y'_{k-1}, y_{k-1}) + \theta(y_{k-1}, y'_k) \stackrel{(\text{II propr.})}{=} \\ &= \theta(y'_0, y'_1) + \theta(y'_1, y'_2) + \cdots + \theta(y'_{k-1}, y'_k) = \theta(y'_0, y'_k) \stackrel{(\text{I propr.})}{=} 0. \end{aligned}$$

Se indichiamo con K la curva chiusa $\partial f(\Pi_k)$ orientata in senso antiorario, dalla stessa definizione di θ segue anche che $C_1 = 2 \text{rot}(K)$. Per semplicità deformiamo L in piccoli intorni degli incroci (è possibile poiché abbiamo supposto che L sia π -generico) in modo che in Y gli archi si intersechino perpendicolarmente; se poi definiamo K' la curva chiusa ottenuta da K allisciando nei vertici, si ha che K' è una curva liscia che borda un disco immerso. Sfruttando il fatto che f è un'immersione che conserva l'orientazione di \mathbb{R}^2 , si dimostra che $\text{rot}(K') = 1$. Ora è facile vedere che $\text{rot}(K) = \text{rot}(K') - k/4 = 1 - k/4$. Così abbiamo calcolato i valori $C_1 = 2 - k/2$ e $C_2 = -C_1 = k/2 - 2$.

Per definizione di grado in A , risulta: $\deg(f(x_i^k)) = \mu_i \theta(y'_i, y_i) - 1/2$, dove $\mu_i = +1$ (-1) a seconda che x_i^k sia un vertice positivo (negativo) per f . Dunque

$$\begin{aligned} \sum_{x \in Q_+} \deg(f(x)) - \sum_{x \in Q_-} \deg(f(x)) &= -C_2 - \frac{1}{2}(|Q_+| - |Q_-|) = \\ &= -C_2 + \frac{k}{2} - |Q_+| = 2 - |Q_+|. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.4. *Per ogni nodo legendriano π -generico L si ha $\partial^2 = 0$.*

Dimostrazione. Osserviamo che è sufficiente dimostrare la tesi per ogni incrocio di $Y = \pi(L)$. Gli incroci siano a_1, \dots, a_n .

Come prima cosa esprimiamo $\partial(a_j)$ raccogliendo i termini della somma in base alla lunghezza della parola. Questo lo si fa sfruttando la linearità e la regola di Leibnitz:

$$\begin{aligned} \partial^2(a_j) &= \partial \left(\sum_{k \geq 0} \partial_k(a_j) \right) = \partial \sum_{k \geq 0} \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} \left(f(x_1^{k+1}) \dots f(x_k^{k+1}) \right) \stackrel{(lin.di\partial)}{=} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} \partial \left(f(x_1^{k+1}) \dots f(x_k^{k+1}) \right) = \sum_{k \geq 0} \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} \partial(a_{j_1} \dots a_{j_k}) = \\ &= \stackrel{(Leibnitz)}{=} \sum_{k \geq 0} \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} (\partial_{j_1})(a_{j_2} \dots a_{j_k}) + a_{j_1} \partial(a_{j_2} \dots a_{j_k}) = \dots \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n}} a_{j_1} \dots a_{j_{i-1}} \partial(a_{j_i}) a_{j_{i+1}} \dots a_{j_k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} \sum_{h \geq 0} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n}} a_{j_1} \cdots a_{j_{i-1}} \partial_h(a_{j_i}) a_{j_{i+1}} \cdots a_{j_k} = \\
 &= \dots = \sum_{k \geq 1} \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{k-1} \leq n} Z(a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}) a_{j_1} \cdots a_{j_{k-1}},
 \end{aligned}$$

dove con $Z(a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$ si intende la cardinalità dell'insieme $U(a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$ consistente delle triplette di applicazioni (f', i, f'') tali che:

- (i) $f' \in W_{k'}^+(Y, a_j)$, $i \in \{1, \dots, k' - 1\}$, $f'' \in W_{k''}^+(Y, f'(x_i^{k'}))$;
- (ii) $(a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}) = (f'(x_1^{k'}), \dots, f'(x_{i-1}^{k'}), f''(x_1^{k''}), \dots, f''(x_{k''-1}^{k''}), f'(x_{i+1}^{k'}), \dots, f'(x_{k'-1}^{k'}))$.

Si osservi che, da quanto definito sopra, si ha: $k' + k'' = k + 2$.

Si ricordi che ∂ va poi calcolato modulo 2. Per avere la tesi, la strategia seguita da Chekanov è quella di affermare che la cardinalità dell'insieme $U(a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$ (d'ora in poi nella dimostrazione lo indicheremo con U) è sempre pari.

L'idea è quella di introdurre un insieme ausiliario di immersioni, V , e di costruire delle mappe $\varphi : U \rightarrow V$, ψ_1 e $\psi_2 : V \rightarrow U$ che soddisfino le seguenti condizioni:

$\forall f \in V$ e $\tau \in U$ si ha:

$$\begin{aligned}
 f &= \varphi(\psi_1(f)) = \varphi(\psi_2(f)), \\
 \psi_1(f) &\neq \psi_2(f), \\
 \tau &= \psi_i(\varphi(\tau)) \text{ per } i = 1 \text{ o } 2, \text{ ma non per entrambi.}
 \end{aligned}$$

Ciò implica che U abbia un numero pari di elementi; infatti le condizioni sopra indicano che la cardinalità di U deve essere esattamente il doppio di quella di V .

Osserviamo che in questo punto si utilizza il fatto che l'algebra è una $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -algebra.

Costruzione dell'insieme $V(Y, a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$. Per $k \geq 1$ chiamiamo Θ_k il k -poligono curvo $\subset \mathbb{R}^2$ che possiede uno ed un solo vertice (che chiameremo y_0^k) il cui angolo interno corrispondente supera l'angolo piatto. A partire da tale vertice, la numerazione degli altri procede in senso antiorario. La definizione di $V(Y, a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$ è del tutto analoga a quella di W_k^+ : prendiamo in considerazione le immersioni lisce $f : \Theta_k \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ che

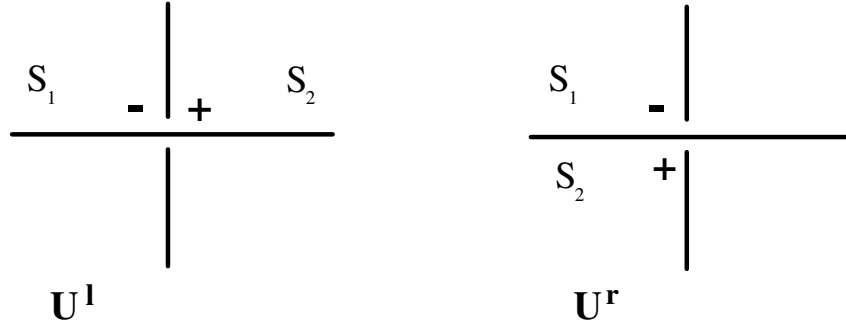


Figura 2.2.

preservano l'orientazione indotta dalla forma $dx \wedge dy$, con $f(\partial\Theta_k) \subset Y$ ed in particolare mandano i vertici di Θ_k negli incroci di Y ; quozientiamo tale insieme per la relazione d'equivalenza "essere riparametrizzazione di"; diamo la stessa convenzione di positività e negatività dei vertici usata per definire W_k^+ , meno che per il vertice y_0^k , al quale si assegna valore opposto a quello del settore dell'intorno di $f(y_0^k)$ che è complementare dell'immagine dell'intorno di y_0^k . Chiamiamo $V_k(Y, a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$ l'insieme delle immersioni suddette che abbiano esattamente un vertice positivo, y_s^k , e tali che $(f(y_s^k), \dots, f(y_{k-1}^k), f(y_1^k), \dots, f(y_{s-1}^k)) = (a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$; indichiamo, infine, con V l'unione (disgiunta) al variare di k dei V_k .

Incollamento. Costruzione di φ . Indichiamo con S' un intorno di $x_i^{k'}$ in $\Pi_{k'}$ ed S'' un intorno di $x_0^{k''}$ in $\Pi_{k''}$.

Data $(f', i, f'') \in U$ le possibili posizioni reciproche di $S_1 = f'(S')$ e $S_2 = f''(S'')$ sono due e sono illustrate in fig. 2.2.

In questa maniera rappresentiamo U come unione disgiunta di due insiemi, U' ed U'' a seconda che la tripletta scelta porti alla prima od alla seconda configurazione. Di conseguenza si discuterà la costruzione della mappa φ solo su U' , essendo l'altra del tutto analoga.

Siano $f'_0 : \Pi_{k'} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f''_0 : \Pi_{k''} \rightarrow \mathbb{R}^2$ due immersioni che rappresentano le classi di equivalenza di f' ed f'' , rispettivamente. Allora esistono immersioni lisce $r' : [0, 1] \rightarrow \partial\Pi_{k'}$ e $r'' : [0, 1] \rightarrow \partial\Pi_{k''}$ tali che:

$$\begin{aligned} r'(0) &= x_i^{k'}, \quad r''(0) = x_0^{k''}; \\ f'_0 \circ r' &= f''_0 \circ r''. \end{aligned}$$

Inoltre tali immersioni si scelgono in modo che la loro immagine sia la più grande possibile. Da ciò segue che almeno uno tra $r'(1)$ e $r''(1)$ deve essere un vertice.

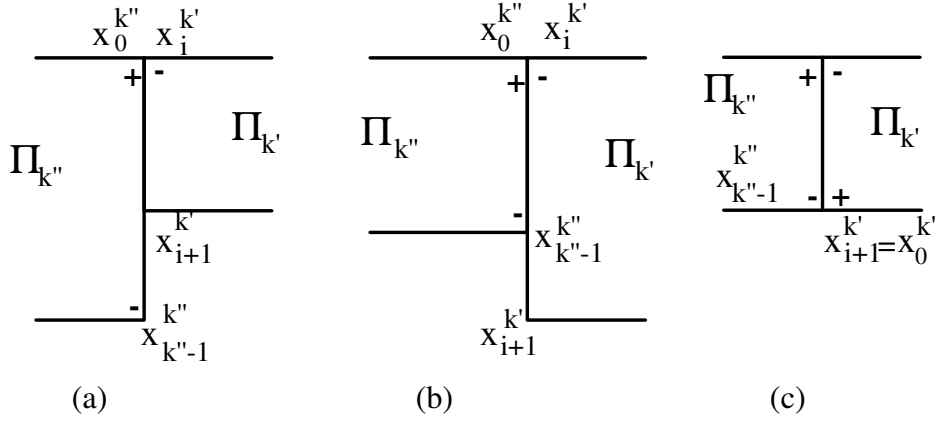


Figura 2.3. Incollamento.

Vogliamo costruire il dominio giusto per una $f \in V$ a partire dalla tripletta $(f', i, f'') \in U'$. La discussione ora si divide in due casi: $k'' > 1$ e $k'' = 1$.

$k'' > 1$. L'incollamento utile è l'identificazione $r'(t) \sim r''(t) \quad \forall t \in [0, 1]$.

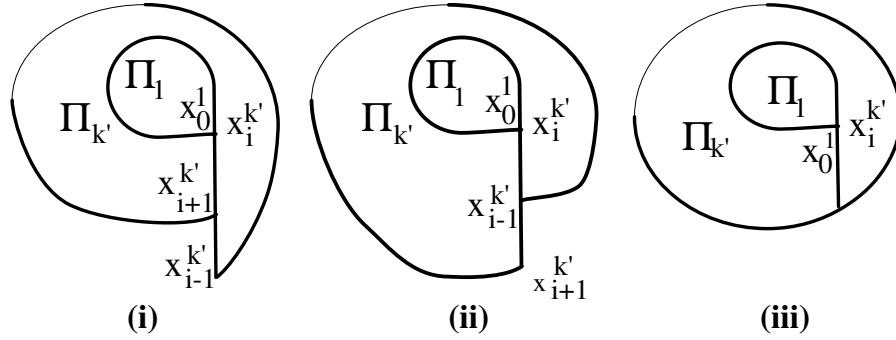
Sostanzialmente quello che si fa è incollare i domini relativi a f' ed f'' mediante l'identificazione data dalle immersioni r' ed r'' , ed osservare che in ognuna delle tre possibili configurazioni il nuovo poligono ottenuto, chiamiamolo Σ è il dominio di una funzione (ed una sola) che è in V . Le configurazioni possibili sono tre:

- (a) $r'(1) = x_{i+1}^{k'}$
- (b) $r''(1) = x_{k''-1}^{k''}$
- (c) $x_{i+1}^{k'} = r'(1) \sim r''(1) = x_{k''-1}^{k''}$;

e sono illustrate nella fig. 2.3.

Eliminiamo il caso (c); $x_0^{k''}$ è un vertice positivo, di conseguenza $x_{k''-1}^{k''}$ è negativo, ma, per l'incollamento dato, $x_{i+1}^{k'}$ deve essere un vertice positivo. Dunque nell'identificazione ho cancellato entrambi i vertici positivi. E' assurdo, poiché il poligono risultante Σ è diffeomorfo a $\Pi_{k'+k''-4}$ ed è il dominio di una funzione (generata dall'incollamento di f' ed f'') che è in $W_k(Y)$, e per tali funzioni vale il lemma delle altezze, ed in particolare che devono avere almeno un vertice positivo.

In entrambi i restanti casi il poligono Σ è diffeomorfo a Π_k , $(k' + k'' - 2 = k)$. Dunque identifichiamo i due poligoni e chiamiamo f l'immersione da-


 Figura 2.4. Incollamento ($k'' = 1$).

ta dall'incollamento di f' e f'' . I vertici di Σ , numerati in senso antiorario, sono: $x_0^{k'}, \dots, x_{i-1}^{k'}, x_1^{k''}, \dots, x_{k''-1}^{k''}, x_{i+1}^{k'}, \dots, x_{k'-1}^{k'}$. Tale successione ha come immagine tramite la f proprio $a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}$; dunque $f \in V(Y, a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$ e la si prende come immagine di (f', i, f'') tramite φ .

$k'' = 1$. Anche qui va definito un incollamento ad hoc a livello di dominio. Se $r''(1) \neq x_0^1$, allora deve essere $r'(1) = x_{i+1}^{k'}$, e si può ripetere la medesima costruzione usata per il caso $k'' > 1$. Anche nel caso in cui $r''(1) = x_0^1$ e $r'(1) = x_{i+1}^{k'}$, Π_1 e $\Pi_{k'}$ si incollano mediante $r'(t) \sim r''(t)$.

Se invece $r''(1) = x_0^1$ e $r'(1) \neq x_{i+1}^{k'}$, l'incollamento da eseguire è un po' più laborioso perché vanno incollati anche dei pezzi di $\partial\Pi_{k'}$. Siano r_+ ed r_- immersioni lisce: $[0, 1] \rightarrow \partial\Pi_{k'}$ tali che: $r_+(0) = x_i^{k'}$, $r_-(0) = r'(1)$, ed infine $f'_0 \circ r_+ = f'_0 \circ r_-$. Si scelgano tali immersioni in modo da massimizzarne l'immagine, e si identifichi $r_+(t) \sim r_-(t)$.

Ci sono tre possibilità, illustrate poi in fig. 2.4.

- (i) $r_+(1) = x_{i+1}^{k'}$, $r_-(1) \neq x_{i-1}^{k'}$;
- (ii) $r_+(1) \neq x_{i+1}^{k'}$, $r_-(1) = x_{i-1}^{k'}$;
- (iii) $r_+(1) = x_{i+1}^{k'}$, $r_-(1) = x_{i-1}^{k'}$.

In realtà, il caso (iii), mediante le stesse argomentazioni che hanno portato all'eliminazione del caso (c) per $k'' > 1$, si dimostra essere impossibile.

Negli altri due casi il poligono Σ ottenuto è diffeomorfo a Θ_k , e le immersioni f' ed f'' possono essere combinate in modo unico a formare una $f \in V_k$, in quanto, oltretutto, Θ_k possiede esattamente un vertice (proveniente da $x_0^{k'}$) rispetto ad f , ed i vertici, numerati in senso antiorario, hanno come immagine $(a_j, a_{j_0}, \dots, a_{j_{k-1}})$.

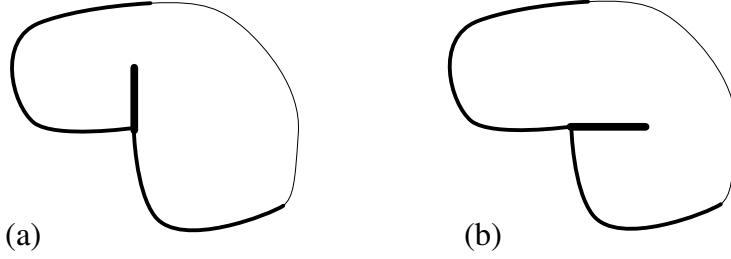


Figura 2.5. Taglio.

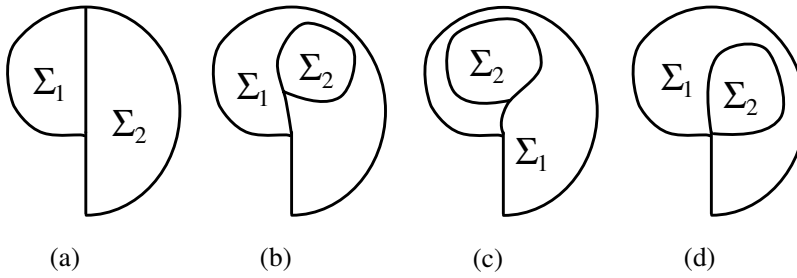


Figura 2.6. Taglio.

Taglio. Costruzione di ψ_1 e ψ_2 . Sia $f \in V(Y, a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}})$. Anche qui la strategia è quella di operare a livello di dominio: si taglia Θ_k , di vertici $(y_0^k, \dots, y_{k-1}^k)$, in una coppia di poligoni diffeomorfi a $\Pi_{k'}$ e $\Pi_{k''}$, con $k' + k'' = k + 2$. Le restrizioni di f a tali poligoni produrrà immersioni f' ed f'' tali che $(f', i, f'') \in U$ per qualche i .

Il taglio comincia nel vertice y_0^k ed esistono due possibili direzioni; una porta alla costruzione della ψ_1 , e l'altra alla ψ_2 , come si vede in fig.2.5.

Consideriamo gli embedding lisci r_1 ed $r_2 : [0, 1/2] \rightarrow \Theta_k$ tali che: $r_1(0) = r_2(0) = y_0^k$, $r_1([0, 1/2]) \subset f^{-1}(Y)$, $r_2([0, 1/2]) \subset f^{-1}(Y)$, e le immagini di r_1 ed r_2 sono rappresentate nel disegno come la linea più spessa che parte dal vertice il cui angolo supera π . Si estendano, poi, tali embedding ad immersioni lisce $r_1, r_2 : [0, 1] \rightarrow \Theta_k$ tali che per ogni $i \in \{1, 2\}$, risulti: $r_i([0, 1]) \subset f^{-1}(Y)$, la restrizione di r_i a $[0, 1)$ sia un embedding nell'interno di Θ_k , e si verifichi che $r_i(1) \in \partial\Theta_k$ oppure $r_i(1) \in r_i([0, 1[)$. Queste immersioni sono definite in maniera unica a meno di riparametrizzazione. Si userà r_1 per definire ψ_1 ed r_2 per ψ_2 .

Le possibili configurazioni di $r_1([0, 1])$ sono in fig. 2.6.

Chiamiamo Σ_1 e Σ_2 i due pezzi in cui viene diviso Σ dall'immagine di

r_1 . Σ_1 e Σ_2 sono diffeomorfi a dei poligoni $\Pi_{k'}$, $\Pi_{k''}$, con $k' + k'' = k + 2$. Nel caso (a) il vertice positivo per f è il vertice di uno dei due poligoni; lo indichiamo con $\Pi_{k'}$. Negli altri tre casi chiameremo $\Pi_{k'}$ il poligono con $k + 1$ vertici.

Restringendo ai poligoni $\Pi_{k'}$ e $\Pi_{k''}$ un rappresentante (parametrizzato) di f , passando poi nuovamente a due rappresentanti di tali restrizioni, otteniamo due applicazioni $f' \in W_{k'}^+(Y)$, $f'' \in W_{k''}^+(Y)$. Per semplicità, diciamo che i due vertici positivi in questione siano $x_0^{k'}$ e $x_0^{k''}$; si numerino gli altri vertici di conseguenza.

Sia $i \in \{1, \dots, k' - 1\}$ tale che, come punti di Θ_k , $x_i^{k'}$ e $x_0^{k''}$ siano identificati. Nei casi da (a) a (c) la scelta di tale i è unica. Invece, nel caso (d), convenzionalmente, si sceglie il più piccolo dei (due) valori possibili. Si definisca allora $\psi_1 = (f', i, f'')$, che è facile vedere che è in U .

La costruzione di ψ_2 cambia di poco: si usa r_2 invece di r_1 e nella configurazione (d) la scelta di i cade sul più grande dei due valori.

Per verificare che effettivamente

$$f = \varphi(\psi_1(f)) = \varphi(\psi_2(f)) \quad \forall f \in V(Y, a_j, a_{j_1}, \dots, a_{j_{k-1}}) \text{ e } \tau = \psi_i(\varphi(\tau)),$$

basta osservare che le operazioni di taglio ed incollamento, sopra definite, sono l'una l'inversa dell'altra. Quello che rimane da dimostrare è che $\psi_1(f) \neq \psi_2(f) \quad \forall f \in V$. Supponiamo per assurdo che coincidano, e chiamiamo tale applicazione τ . Ma allora la linea di incollamento vicino y_0^k (vertice di Θ_k in cui si effettua il taglio) dovrà essere sia del tipo disegnato in fig. 2.5(a) sia del tipo (b). Dunque la decomposizione di Θ_k dovrebbe essere come in fig. 2.6(d). Ed ecco l'assurdo: $(f', i, f'') = \psi_1(f) = \psi_2(f) = (f', i + 1, f'')$. \square

2.4 DGA ed isotopia legendriana

Questa sezione è interamente dedicata alla dimostrazione di un cruciale teorema:

Teorema 2.4.1. *Siano (A, ∂) e (A', ∂') le due algebre differenziali graduate associate rispettivamente ad L ed L' , nodi legendriani π -generici.*

Se L ed L' sono legendriamente isotopi, allora (A, ∂) ed (A', ∂') appartengono alla stessa classe di stabilizzazione.

Dimostrazione. Sia $\{L_t\}$ per $0 \leq t \leq 1$ un cammino liscio π -generico nello spazio degli embedding legendriani tra L ed L' , e siano $\{Y_t\}$ i corrispondenti diagrammi. Per il teorema 1.2.2 e per l'osservazione che lo segue, basta discutere la tesi per $L = L_x$ ed $L' = L_y$ dove nell'intervallo $[x, y]$ non si

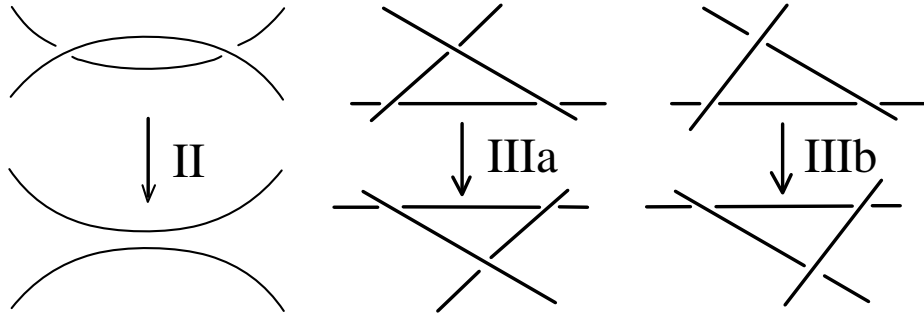


Figura 2.7. Mosse di Reidmeister.

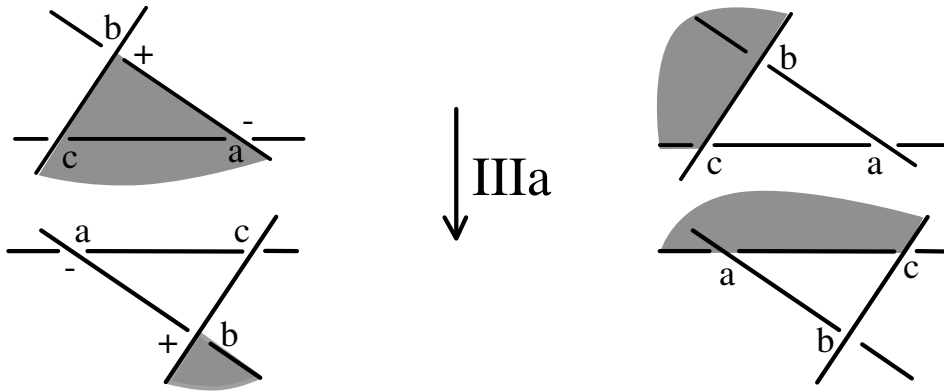


Figura 2.8. IIIa. Convezione per $\{a, b, c\}$.

verificano mosse di Reidmeister, e per $L = L'_t - \varepsilon$ ed $L' = L'_t + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), dove in t' avviene una delle tre mosse in fig. 2.7.

Assumiamo che tra x ed y non ci siano mosse. Dato che la definizione di differenziale è puramente combinatoria, $(A_{L_x}, \partial_{L_x})$ e $(A_{L_y}, \partial_{L_y})$ sono naturalmente isomorfe. Rimane da dimostrare il caso in cui se in t' c'è una deformazione del tipo II, IIIa, IIIb, allora, per ε abbastanza piccolo, $(A_{L_{t'+\varepsilon}}, \partial_{t'+\varepsilon})$ e $(A_{L_{t'-\varepsilon}}, \partial_{t'-\varepsilon})$ appartengono alla stessa classe di stabilizzazione.

Supponiamo che, in ognuna delle tre mosse, la deformazione modifichi solo un piccolo intorno del gruppo di incroci interessati.

IIIa. Il numero totale degli incroci non cambia, ma le posizioni reciproche dei tre punti interessati a, b, c cambiano: rinominiamo a, b, c in $t' + \varepsilon$ come mostrato in fig. 2.8.

In questo modo l'algebra A rimane la stessa: $T(a, b, c, a_1, \dots, a_l)$. Affermiamo che $\partial_- = \partial_+$.

Siano $f_{\pm} \in W_3^k(Y_{L_{t' \pm \varepsilon}})$ le immersioni la cui immagine è il triangolino di vertici a, b, c . Queste due immersioni producono in $\partial_{\pm}(a)$ lo stesso termine bc . Inoltre, poiché vale il lemma delle altezze, sappiamo che $H(a) > H(b) + H(c)$. Però la differenza $H(a) - (H(b) + H(c))$ può essere resa piccola a piacere (variando ε) in quanto corrisponde all'area del triangolino; di conseguenza la parola bc non può comparire in nessun altro modo in $\partial_{\pm}(a)$.

Ora un breve lemma caratterizzerà meglio le immersioni diverse da f_{\pm} :

Lemma 2.4.2. *Sia $f \in W_k^+(Y_{L_{t' \pm \varepsilon}})$, $f \neq f_{\pm}$. Allora nessuno dei lati (curvilinei) del triangolo di vertici a, b, c è immagine di un qualche lato di Π_k tramite f .*

Dimostrazione. Se per assurdo $[a, b]$ fosse immagine di un lato di Π_k , allora, per f , il vertice mandato in b sarebbe positivo, mentre quello mandato in a sarebbe negativo, ma questo è impossibile, perché per il lemma delle altezze dovrebbe valere che $H(b) > H(a)$, mentre abbiamo osservato in precedenza che $H(a) > H(b) + H(c)$. Identica è l'argomentazione quando si prenda in considerazione il lato $[a, c]$. Se invece $[b, c]$ fosse immagine di un lato di Π_k , allora avrei che f avrebbe addirittura due vertici positivi, quelli mandati in b ed in c , e questo è impossibile, perché f è un'immersione ammissibile. \square

Al fine di dimostrare che i due differenziali coincidono, costruiremo un'applicazione biunivoca $R : W_k^+(Y_{t' - \varepsilon}) \rightarrow W_k^+(Y_{t' + \varepsilon})$ tale che per ogni vertice $x_i^k \in \Pi_k$ si abbia che l'incrocio $f(x_i^k)$ in $Y_{t' - \varepsilon}$ e $R(f)(x_i^k)$ in $Y_{t' + \varepsilon}$ corrispondano alla stessa lettera in $T(a, b, c, a_1, \dots, a_l)$.

Se $f \in W_k^+(Y_{t' - \varepsilon})$, $f \neq f_-$, allora tale f è responsabile di una modifica nel differenziale solo se manda uno dei vertici di Π_k in a, b , o c . Supponiamo che lo faccia; per il lemma sopra dimostrato, allora tale f non potrà avere come immagine di un lato di Π_k uno dei lati del triangolo di vertici a, b, c . Per questa ragione, f può essere deformata con continuità in una immersione $R(f) \in W_k^+(Y_{t' + \varepsilon})$. Alcuni esempi di tale trasformazione sono dati nella fig. 2.8.

Non rimane che completare la costruzione di R definendo $R(f_-) = f_+$, ed osservare che R è biunivoca in quanto, cambiando la direzione del tempo nelle deformazioni considerate, si ottiene esattamente l'applicazione inversa di R .

IIIb. Rinominiamo a, b, c in $t' + \varepsilon$ come mostrato in fig. 2.9.

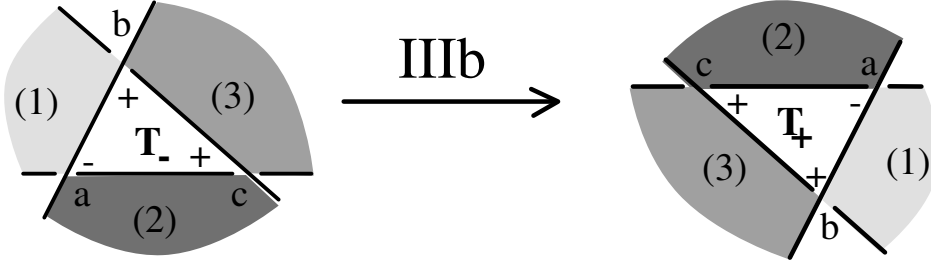


Figura 2.9.

In questo modo l'algebra A rimane la stessa: $T(a, b, c, a_1, \dots, a_l)$. In questo caso, in generale, non è vero che $\partial_- = \partial_+$. Il nostro obiettivo è dimostrare che esiste un isomorfismo tame tra (A, ∂_-) e (A, ∂_+) . Quello che si trova è automorfismo elementare g di $A = T(a, b, c, a_j, \dots, a_l)$ per cui $\partial_- = \partial_+^g (= g\partial_+g^{-1})$. Prendiamo in considerazione l'automorfismo g che manda $a \mapsto a + bc$ ed è l'identità sugli altri generatori. L'unica cosa che non è evidente è che tale automorfismo rispetta la gradazione di A , ma, grazie al lemma 2.3.3 applicato alle immersioni di $W_k(Y_{t' \pm \varepsilon})$ le cui immagini coprono i triangolini (T_-, T_+) di vertici a, b, c , si ha che $\deg(a) = \deg(bc)$.

Sia $f \in W_k^+(Y_{t' \pm \varepsilon})$. Il triangolo T_{\pm} non può essere immagine di alcuna immersione ammissibile, in quanto altrimenti tale f avrebbe due vertici positivi. Dobbiamo concentrare la nostra attenzione sulle immersioni che producono delle diversità a livello di differenziale: allora consideriamo le immersioni di $W_k^+(Y_{t' \pm \varepsilon})$ che mandano un lato X_i del poligono Π_k in un lato del triangolo T_{\pm} . Nella fig. 2.9 i settori sono numerati a seconda del lato del triangolo che toccano, per rendere più semplice la notazione. Se f manda un intorno di X_i nel settore (1) o (2), allora il vertice positivo per f deve essere a , dunque $f \in W_k^+(Y_{t' \pm \varepsilon}, a)$. Se invece il settore coperto è il (3), allora $f \in W_k^+(Y_{t' \pm \varepsilon}, a_i)$ per qualche $i \in \{1, \dots, l\}$. Quest'ultima deduzione, cioè che il vertice positivo per f non può essere nè b nè c , segue subito da (2.3.2). Inoltre, non si può neppure verificare il caso $f(x_0^k) = a$. Dimostriamolo. Per il lemma delle altezze, per $f \in W_k^+(Y_{t' \pm \varepsilon}, a)$ vale:

$$H(a) - \sum_{x \in Q_-} H(f(x)) = \text{area}(Im f)$$

e dunque, isolando i termini su cui sappiamo qualcosa

$$H(a) - H(b) - H(c) - \sum_{x \in (Q_- \setminus \{b, c\})} H(f(x)) = \text{area}(Im f)$$

ma allora, applicando il lemma delle altezze ad una immersione in $W_k(Y_{t' \pm \varepsilon})$ con immagine T_{\pm} , si ha:

$$- \sum_{x \in (Q_- \setminus \{b, c\})} H(f(x)) = \text{area}(T_{\pm}) + \text{area}(\text{Im } f).$$

Ecco l'assurdo: il termine a sinistra è negativo, in quanto H è un'applicazione a valori in \mathbb{R}^+ , mentre quello a destra è strettamente positivo.

Osserviamo brevemente che, essendo su \mathbb{Z}_2 , $g^{-1} = g$. Ci accingiamo ora a dimostrare che $\partial_- = \partial_+^g$ sui generatori di A . Distinguiamo due casi: $s \neq a$ ed $s = a$.

$s \neq a$. Allora $g(s) = s$ e quello che dobbiamo verificare è che $\partial_-(s) = g(\partial_+(s))$. Lo si fa riconducendosi ad una affermazione equivalente. A questo scopo definiamo:

- $\tilde{A} = T(a', a'', b, c, a_1, \dots, a_l)$;
- $\sigma : \tilde{A} \rightarrow A$ omomorfismo di algebre (graduate) che manda a' ed a'' in a ed è l'identità su tutti gli altri generatori di \tilde{A} ;
- g' e $g'' : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ automorfismi (elementari) che mandano rispettivamente $a' \mapsto a' + bc$ e $a'' \mapsto a'' + bc$ e sono l'identità su tutto il resto.

Le seguenti proprietà sono immediatamente verificate:

$$g' \circ g'' = g'' \circ g', \quad \sigma \circ g'' \circ g' = g \circ \sigma \quad \text{e} \quad (g')^2 = (g'')^2 = \text{id}_{\tilde{A}}.$$

Da ora in poi, indicheremo più semplicemente l'insieme $W^+(Y_{t' + \varepsilon}, s)$ con $W_+(s)$. E' proprio di queste immersioni che ci dobbiamo interessare, in quanto sono quelle che producono ∂_+ . Sarà anche utile definire un suo sottoinsieme:

$$S_+(s) = \{f \in W_+(s) \text{ tali che } \text{Im}(f) \text{ non contiene regioni tipo (3) in fig. 2.9}\}.$$

Analogamente si procede per $W_-(s)$ e $S_-(s)$.

La prossima operazione consiste nel costruire due particolari sollevamenti del differenziale in \tilde{A} . Per ogni $f \in W_+(s)$ che produca a in un qualche termine di ∂_+ , si sostituisca tale a con a' se l'intorno di a viene coperto dalla f come in fig. 2.10 (a) o (b); con a'' se invece l'immagine è tipo fig. 2.10 (c) o (d).

Definiamo $\xi_-(s)$ in \tilde{A} . Per ogni $f \in W^+(Y_{t' - \varepsilon}, s)$ che produca a in un qualche termine di ∂_+ , si sostituisca tale a con a' se l'intorno di a viene

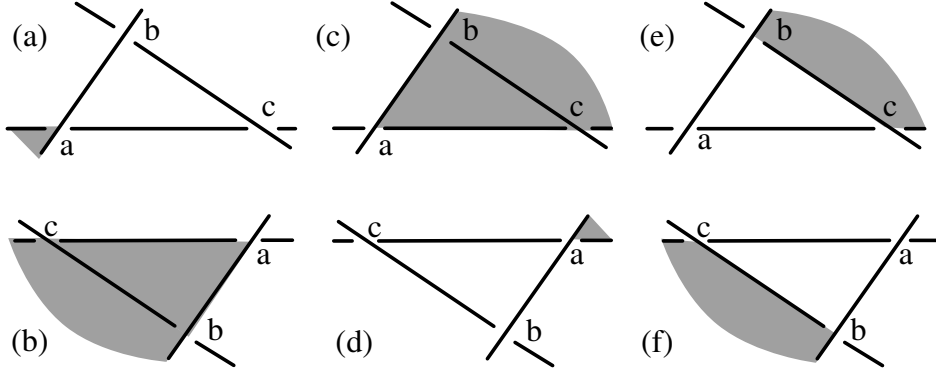


Figura 2.10.

coperto dalla f come in fig. 2.10 (a) (o (b)); con a'' se invece l'immagine è tipo fig. 2.10 (c) (o (d)). Analogamente si procede per definire $\xi_+(s)$ a partire da immersioni in $W^+(Y_{t'+\varepsilon}, s)$. Poiché $\sigma(a') = \sigma(a'') = a$, è immediato verificare che $\sigma(\xi_+(s)) = \partial_+(s)$ e $\sigma(\xi_-(s)) = \partial_-(s)$. Chiamiamo poi θ_{\pm} la somma dei termini di $\xi_{\pm}(s)$ che sono prodotti dalle immersioni di $S_{\pm}(s)$. In realtà possiamo indicare tale elemento di \tilde{A} con lo stesso simbolo, θ ; infatti, dato che $s \neq a$, e che le immersioni che si considerano non possono dare origine a termini del differenziale che contengano bc , θ non cambia al variare di t in $[t' - \varepsilon, t' + \varepsilon]$.

Ora possiamo formulare condizioni che implicano $\partial_-(s) = g(\partial_+(s))$:

$$g'(\theta) = \xi_+, \quad g''(\theta) = \xi_-$$

e dimostrare l'implicazione:

$$\begin{aligned} \partial_-(s) &= \sigma(\xi_-) =^* \sigma \circ g''(\theta) = \sigma \circ g'' \circ (g')^2(\theta) = (\sigma \circ g'' \circ g') \circ g'(\theta) = \\ &= g \circ \sigma \circ g'(\theta) =^* g \circ \sigma(\xi_+) = g(\partial_+(s)). \end{aligned}$$

Per dimostrare la veridicità delle due uguaglianze, fissiamo $f \in S_+$ (risp. S_-) e definiamo M_f come l'insieme delle porzioni di immagine della f del tipo mostrato in fig. 2.10 (b) (risp. (c)), contate con la propria molteplicità. Consideriamo l'insieme delle parti 2^{M_f} e costruiamo un'applicazione T_f che ad un dato sottoinsieme $C \subset M_f$ associa un'immersione in W_+ (risp. W_-). Se $f \in S_+^k(s)$, allora definiamo $T_f : 2^{M_f} \rightarrow W_+^{k+1}(s)$ come l'applicazione che sostituisce le porzioni di immagini di f di C nel modo indicato in fig. 2.10 (f) (risp. (e)). In questo modo otteniamo:

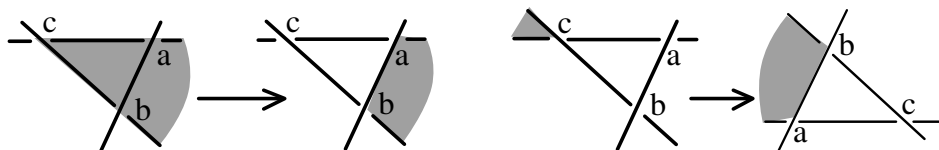


Figura 2.11.

$$W_{\pm}^k(s) = \dot{\bigcup}_{f \in S_{\pm}(s)} \text{Im}(T_f).$$

Osserviamo che, ad esempio, per riottenere come immagine di T_f le immersioni che sono in $S_{\pm}^k(s)$, basta prendere come C l'insieme vuoto. Da questa partizione dell'insieme $W_{\pm}^k(s)$ seguono $\xi_- = g''(\theta)$ e $\xi_+ = g'(\theta)$; infatti calcolare il differenziale sulle immersioni di $\text{Im}(T_f)$ al variare di f (che dà ξ_{\pm}) è la stessa cosa che applicare g' (risp. g'') al differenziale calcolato su $S_+(s)$ (risp. S_-). Dunque è conclusa la dimostrazione di $\partial_-(s) = g(\partial_+(s))$, per $s \neq a$.

$s = a$. Va dimostrato che $\partial_-(a) = g(\partial_+(a))$. In base al lemma delle altezze sappiamo che $H(b) + H(c) - H(a) = \text{area}(T_{\pm})$. Facendo decrescere ε , diminuisce $\text{area}(T_{\pm})$; dunque, per ε sufficientemente piccolo si hanno $H(a) > H(b)$ e $H(a) > H(c)$. Per (2.3.2), allora, a non può comparire nè in $\partial_+(a)$, nè in $\partial_+(b)$, nè in $\partial_+(c)$. Per questo motivo $\partial_+^g(a) = g \circ \partial_+(g(a)) = g \circ \partial_+(a + bc) = \partial_+(a + bc)$. Dunque la tesi diventa $\partial_-(a) = \partial_+(a + bc) = \partial_+(a) + \partial_+(bc)$ che, essendo su \mathbb{Z}_2 , equivale a $\partial_-(a) + \partial_+(a) = \partial_+(bc)$ che poi, per Leibnitz, è uguale a $\partial_+(b)c + b\partial_+(c)$. Per $i = 1, 2$, siano:

- $S_{\pm}^k(i)$ l'insieme di immersioni di $W_{\pm}^k(a)$ che contengono nella propria immagine settori come (i) nella fig. 2.9 (a);
- $\lambda_{\pm}(i)$ la somma dei termini di $\partial_{\pm}(a)$ provenienti dalle funzioni in $S_{\pm}^k(i)$.

Dalle definizioni appena date risulta che: $\partial_-(a) + \partial_+(a) = \lambda_+(1) + \lambda_-(1) + \lambda_+(2) + \lambda_-(2)$.

Inoltre, per ogni immersione $f \in W_+^k(c)$ si può costruire un'immersione $f' \in S_+^{k+1}(1) \cup S_-^{k+1}(1)$ come mostrato nella fig. 2.11. Tale corrispondenza è biunivoca, e dunque si ottiene $\lambda_+(1) + \lambda_-(1) = b\partial_+(c)$. Allo stesso modo, costruendo cioè una corrispondenza biunivoca tra $W_+^k(b)$ e $S_+^{k+1}(2) \cup S_-^{k+1}(2)$

si vede che $\lambda_+(2) + \lambda_-(2) = \partial_+(b)c$. Si conclude così la verifica del caso $s = a$.

II. La mossa II diminuisce di due il numero degli incroci. Diciamo che se $C(Y_{t'-\varepsilon})$ è l'insieme degli incroci al tempo $t' - \varepsilon$, allora $C(Y_{t'+\varepsilon}) = C(Y_{t'-\varepsilon}) \setminus \{a, b\}$. Dunque indichiamo con a, b gli incroci che scompaiono e con D la regione compresa tra i due archi incrociati per $t < t'$. Facendo decrescere ε , ed eventualmente modificando L_t possiamo numerare gli incroci $a, b, a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m$ in modo che

$$H(a_l) \geq \dots \geq H(a_1) \geq H(a) > H(b) \geq H(b_1) \geq \dots \geq H(b_m).$$

Infatti, supponiamo che la mossa II compori esclusivamente la deformazione di un piccolo intorno degli incroci a, b e quindi che i due diagrammi $Y_{t' \pm \varepsilon}$ coincidano fuori di tale intorno; allora, per il lemma delle altezze, si ha che $H(a) - H(b) = \text{area}(D)$ (per un'opportuna scelta di a e b) ed inoltre, per ε sufficientemente piccolo, l'area di D sarà tanto piccola da non permettere che $H(a) > H(b_i) \geq H(b) \forall i = 1, \dots, m$. Inoltre, possiamo supporre $H(a) - H(b) < H(b_i) \forall i = 1, \dots, m$. Questo ci permette di dedurre che l'unico termine in $\partial_-(a)$ a contenere b è quello che corrisponde all'immersione $\bar{f} \in W_2^+(Y_{t'-\varepsilon}, a)$ la cui immagine è D . Dunque si può scrivere:

$$\partial_-(a) = b + v, \text{ dove } v \in T(b_1, \dots, b_m).$$

Possiamo anche osservare che, se (A_-, ∂_-) e (A_+, ∂_+) , dove $A_- = A_{L_{t'-\varepsilon}} = T(a, b, a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m)$, $\partial_- = \partial_{L_{t'-\varepsilon}}$ ed analogamente sono definiti A_+ e ∂_+ , allora A_+ è graduata come sottoalgebra di A_- .

Definiamo poi $(A, \partial) := (A_+, \partial_+) \coprod (E_k, \partial_k)$ con $k = \text{deg}(a)$. Dunque, l'obiettivo è dimostrare che esiste un isomorfismo tame graduato tra (A_-, ∂_-) e (A_+, ∂_+) . La linea dimostrativa è semplificata nel seguente diagramma:

$$(A_-, \partial_-) \cong (A, \hat{\partial}) \cong (A, \partial) \cong S_k(A_+, \partial_+).$$

Due sono i passi fondamentali: il primo consiste nel verificare che (A_-, ∂_-) è DGA tame isomorfa a $(A, \hat{\partial})$ dove $\hat{\partial}$ è un differenziale su A ; nel secondo passo si costruisce induttivamente un isomorfismo tame tra (A, ∂) e $(A, \hat{\partial})$. Questo dà la tesi, poiché ciò significa che esiste un DGA-isomorfismo tame tra (A_-, ∂_-) e la k -stabilizzazione di (A_+, ∂_+) .

Sia $s : A_- \rightarrow A$ l'isomorfismo che manda $a \mapsto e_1$, $b \mapsto e_2 + v$ ed è l'identità su tutti gli altri generatori; di conseguenza prendiamo $\hat{\partial} = s \circ \partial_- \circ s^{-1}$. Osserviamo che s è un DGA-isomorfismo di algebre tame per costruzione.

Rimane ora da costruire un automorfismo tame graduato $g : A \rightarrow A$ tale che $\partial = \hat{\partial}^g$. Chiamiamo X l'ideale bilatero in A generato da e_1 ed e_2 ;

allora possiamo decomporre A come spazio vettoriale in $A_+ \oplus X$. Definiamo poi $A_{[i]} := T(a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_m, e_1, e_2)$ con $i = 1, \dots, l$. Immediatamente possiamo verificare che su $A_{[0]}$ i due differenziali ∂ e $\hat{\partial}$ coincidono. Infatti $\partial e_1 = e_2$ e, dalla definizione, $\hat{\partial} e_1 = s \circ \partial_-(a) = s(b + v) = e_2 + v + v = e_2$; infine $\hat{\partial}(e_2) = \hat{\partial}^2(e_1) = 0 = \partial(e_2)$. Inoltre dal lemma della altezze segue che $\partial_-(b_j)$ non può contenere nè a , nè b nei suoi termini, in quanto $H(a) > H(b) \geq H(b_1) \geq \dots \geq H(b_m)$. Allora abbiamo che $\hat{\partial}(b_j) = \partial(b_j)$, e si può concludere che $\hat{\partial} = \partial$ su $A_{[0]}$.

Verifichiamo l'esistenza dell'automorfismo g . Sia g_i una successione di automorfismi tame graduati di A , più precisamente elementari, definiti da $g_i(a_i) = a_i + q_i$ con $q_i \in A_{[i-1]} \cap X$, e g_i uguale all'identità su tutti gli altri generatori. Questa successione di automorfismi produce una successione di differenziali che chiamiamo $\partial_{[i]}$ su A definiti induttivamente:

$$\begin{aligned}\partial_{[0]} &= \hat{\partial} \\ \partial_{[i+1]} &= \partial_{[i]}^{g_i^{i+1}}.\end{aligned}$$

Allora, le DGA $(A, \partial_{[i]})$ risultano essere tame isomorfe.

Dimostreremo che è possibile scegliere elementi $q_i \in A_{[i-1]} \cap X$ in modo che $\partial_{[i]}$ coincida con ∂ su $A_{[i]}$. Ciò produrrà un isomorfismo tame tra (A, ∂) e $(A, \hat{\partial})$.

Supponiamo di avere già definito g_1, \dots, g_{j-1} . Definiamo

$$q_j = h(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)),$$

dove h sia la mappa lineare di grado 1 che dà l'omotopia tra τ (proiezione) e l'id su A' della dimostrazione del lemma 2.2.1 (e dove però non vale la relazione $A' = A \oplus X$ ma $A = A_+ \oplus X$, e dunque vanno effettuati i due cambiamenti di notazione $A' \rightsquigarrow A$ e $A \rightsquigarrow A_+$). Per comodità richiamiamo la definizione di h :

$$h(w) = \begin{cases} 0 & \text{se } w \in A_+ \\ ye_1z & \text{per } w = ye_2z \quad e \quad y \in A_+, z \in A \\ 0 & \text{per } w = ye_1z \quad e \quad y \in A_+, z \in A \end{cases}$$

Ovviamente, $q_j \in X$, in quanto $h(A) \subset X$. Vediamo ora che $q_j \in A_{[j-1]} \cong T(a_1, \dots, a_{j-1}, b_1, \dots, b_m, e_1, e_2)$: $\partial(a_j) \in A_{[j-1]}$, poiché a_j non può comparire in tale differenziale sempre per una immediata conseguenza del lemma delle altezze; poi $\partial_{[j-1]}(a_j) = g_{j-1} \circ \dots \circ g_1(\hat{\partial}(a_j)) = g_{j-1} \circ \dots \circ g_1(s(\partial_-(a_j)))$. Allora, dato che $\partial_-(a_j) \in T(a, b, a_1, \dots, a_{j-1}, b_1, \dots, b_m)$, risulta $\partial_{[j-1]}(a_j) \in A_{[j-1]}$. Inoltre, per costruzione, $h(A_{[j-1]}) \subset A_{[j-1]}$, e si conclude che $q_j \in A_{[j-1]}$.

Ora rimane da verificare la condizione sui differenziali e cioè che la scelta di q_j permette di dimostrare che $\partial_{[i]}$ coincide con ∂ su $A_{[i]} \forall i$.

Per ipotesi induttiva si ha che $\partial_{[j-1]}(q_j) = \partial(q_j)$. Vogliamo arrivare a dimostrare che $\partial_{[j]}(a_j) = \partial(a_j)$.

$$\partial_{[j]}(a_j) = \partial_{[j-1]}^{g_j}(a_j) = g_j \circ \partial_{[j-1]} \circ g_j^{-1}(a_j) =$$

dato che $g_j(a_j) = a_j + q_j$ e che $q_j \in A_{[j-1]}$,

$$= g_j \circ \partial_{[j-1]}(a_j + q_j) =$$

per ipotesi induttiva, e poiché $\partial_{[j-1]}(a_j) \in A_{[j-1]}$,

$$= \partial_{[j-1]}(a_j) + \partial(q_j)$$

dunque, per la definizione di q_j e per il fatto che h , per il lemma 2.2.1, soddisfa la relazione $\tau + \text{id} = h \circ \partial + \partial \circ h$, si ha:

$$\begin{aligned} \partial_{[j]}(a_j) &= \partial_{[j-1]}(a_j) + \partial(q_j) = \partial_{[j-1]}(a_j) + \partial h(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) = \\ &= \partial_{[j-1]}(a_j) + (\tau + \text{id} + h\partial)(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) = \\ &= \partial_{[j-1]}(a_j) + \tau(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) + (\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) + \\ &\quad + h\partial(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) = \pmod{2} \\ &= \partial(a_j) + \tau(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) + h(\partial)^2(a_j) + h(\partial_{[j-1]})^2(a_j) = \\ &= \partial(a_j) + \tau(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)). \end{aligned}$$

Quello che serve a questo punto è poter dire che $\tau(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) = 0$. Lo vediamo come conseguenza di un lemma che utilizzeremo qui e dimostreremo subito dopo:

Lemma 2.4.3. $\tau \circ \partial = \tau \circ \hat{\partial}$.

Osserviamo che al fine di ottenere $\tau(\partial(a_j) + \partial_{[j-1]}(a_j)) = 0$ ci basterà che la tesi del lemma 2.4.3 sia vera sui generatori a_j . Infatti, dato che vale $\tau \circ g_i = \tau$, si ottiene che:

$$\tau \partial_{[j-1]}(a_j) = \tau g_{j-1} \circ \dots \circ g_1(\hat{\partial}(a_j)) = \tau \circ \hat{\partial}(a_j) \stackrel{\text{lemma}}{=} \tau \circ \partial(a_j)$$

□

Accingiamoci ora a dimostrare il lemma che ci ha permesso di concludere la dimostrazione del teorema 2.4.2.

Dim. del lemma 2.4.3. Intanto, quando abbiamo definito $A_{[i]}$, abbiamo subito osservato che i due differenziali ∂ e $\hat{\partial}$ coincidono su $A_{[0]}$. Dunque rimane da dimostrare la tesi per i generatori a_j . Ricordato che $\partial_-(a) = b + v$ con $v \in T(b_1, \dots, b_m)$, consideriamo l'omomorfismo $\zeta : A_- \rightarrow A_+$ definito come $\zeta = \tau \circ s$; dunque manda $a \mapsto 0$, $b \mapsto v$, e su tutti gli altri generatori è l'identità. Allora la tesi del lemma si può scrivere come:

$$\tau \circ \hat{\partial}(a_j) = \tau(s(\partial_-(a_j))) = \zeta(\partial_-(a_j)) = \tau \circ \partial(a_j).$$

Osserviamo inoltre che $\tau \circ \partial(a_j) = \tau \circ \partial_+(a_j)$ e che $\tau \circ \partial_+(a_j) = \partial_+(a_j)$. Dunque quello che va dimostrato è:

$$\zeta(\partial_-(a_j)) = \partial_+(a_j) \quad \forall j = 1, \dots, l$$

Definiamo $U = \{f \in W_k^+(Y_{t'-\varepsilon}, a_j) \mid \text{nessuno dei vertici di } \Pi_k \mapsto a\}$; data $f \in U$, diciamo che $f^{-1}(b) = \{x_{i_1}^k, \dots, x_{i_p}^k\}$.

Date f_1, \dots, f_p tali che $f_r \in W_{k_r}^+(Y_{t'+\varepsilon}, a)$ e sono tutte diverse dalla \bar{f} (l'immersione che abbiamo definito in precedenza come quella che ha come propria immagine D), tramite la f possiamo costruire per incollamento (ovviamente con i necessari passaggi da classe a rappresentante, e viceversa) una $f' \in W_{k'}^+(Y_{t'+\varepsilon}, a_j)$, con $k' = k + \sum_1^p k_r - 2p$ (nota che f ed f' hanno lo stesso vertice positivo). Per rendere più chiaro come si possa fare, nella figura sottostante si mostra come si effettua questa operazione vicino ogni vertice che dalla f viene mandato in b . Sostanzialmente si opera a livello di dominio, attaccando il poligono Π_k ai poligoni Π_{k_r} nei punti $x_{i_r}^k \sim x_0^{k_r}$ per $r = 1, \dots, p$.

Se f non manda nessuno dei vertici di Π_k in b , ovviamente la f può essere deformata naturalmente ed in modo C^∞ in una f' con le caratteristiche di cui sopra. ($p = 0$)

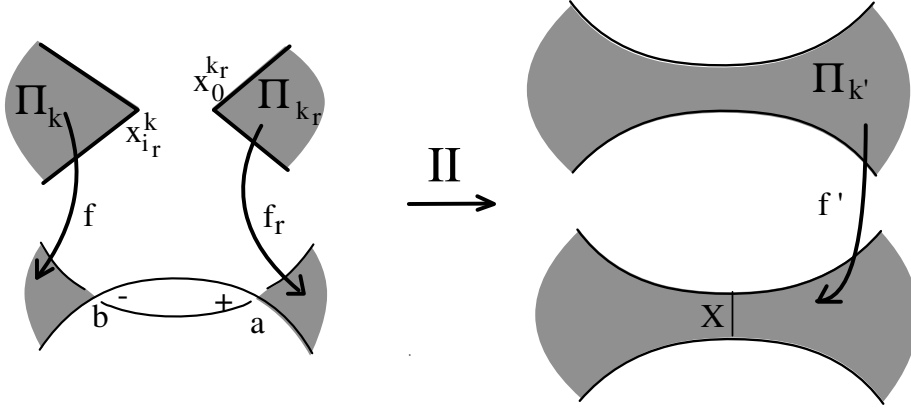
Se si riesce a dimostrare che ogni f' in $W_{k'}^+(Y_{t'+\varepsilon}, a_j)$, al variare di k' , si può costruire come incollamento di opportune f, f_1, \dots, f_n , allora, poiché

$$\partial_+(a_j) = \sum_{k' \geq 1} \sum_{f' \in W_{k'}^+(Y_{t'+\varepsilon}, a_j)} f'(x_1^{k'}) \cdots f'(x_{k'-1}^{k'}),$$

si ha poi la tesi del lemma: $\zeta \partial_-(a_j) = \partial_+(a_j)$.

Infatti, supponiamo che $f' \in W_{k'}^+(Y_{t'+\varepsilon}, a_j)$ sia costruita come incollamento di f, f_1, \dots, f_n . Allora $f'(x_0^{k'}) = f(x_0^k) = a_j$ ed è possibile indicare con $x_{i_1}^k, \dots, x_{i_n}^k$ i vertici di Π_k che vanno in a , cioè in corrispondenza dei quali si incollano il dominio della f con quelli delle f_1, \dots, f_n . Sfruttando

Figura 2.12.



questo fatto, scriviamo il generico termine di $\partial_+(a_j)$ proveniente da f' :

$$\begin{aligned} f'(x_1^{k'}) \cdots f'(x_{k'-1}^{k'}) &\equiv \\ f(x_1^k) \cdots f(x_{i_1-1}^k) f_1(x_1^{k_1}) \cdots f_1(x_{k_1-1}^{k_1}) f(x_{i_1+1}^k) \cdots \\ \cdots f(x_{i_2-1}^k) f_2(x_1^{k_2}) \cdots f_n(x_1^{k_n}) \cdots f_n(x_{k_n-1}^{k_n}) f(x_{i_n+1}^k) \cdots f(x_{k-1}^k). \end{aligned}$$

Osserviamo che applicare ζ a $\sum_{k \geq 0} \sum_{f \in W_{k+1}^+(Y, a_j)} (f(x_1^{k+1}) \cdots f(x_k^{k+1}))$ significa eliminare da tale somma le immersioni che mandano un qualche vertice in a e, ogni volta che c'è b , sostituirlo con v . D'altra parte, le f_i sono immersioni che contribuiscono al differenziale $\partial_-(a)$ e precisamente al termine $v \in T(b_1, \dots, b_m)$; inoltre al variare delle f' si ottiene proprio v . Questo vuol dire che tutte le parole del tipo $f_i(x_1^{k_i}) \cdots f_i(x_{k_i-1}^{k_i})$ con $i = 1, \dots, n$ (presenti in $\partial_+(a_j)$) devono essere contenute in v , e che l'espressione di $\partial_+(a_j)$ fatta mediante (f, f_1, \dots, f_n) è semplicemente un'espressione in cui si è esplicitato il termine v , spezzandolo nelle singole parole che lo compongono, ma, nella sostanza, assolutamente identica a $\zeta \partial_-(a_j)$.

Sia $f' \in W_{k'}^+(Y_{t'+\varepsilon}, a_j)$, ed f'_0 un suo rappresentante (parametrizzato); sia $X \subset \mathbb{R}^2$ il segmento in fig. 2.12 che unisce i due punti in $L_{t'+\varepsilon}$ che al tempo t' corrispondevano al punto di intersezione tra i due archi coinvolti nella mossa II. Consideriamo la controimmagine tramite f'_0 di X : $(f'_0)^{-1}(X) = X_1 \cup \cdots \cup X_n \subset \Pi_{k'}$; sono degli archi con estremi sul bordo del poligono.

Oss. Vogliamo escludere il caso che tali archi si possano intersecare nell'interno del poligono. Supponiamo per assurdo che due archi si intersechino in un punto che chiamiamo y ; in tale punto il differenziale di f' non è più iniet-

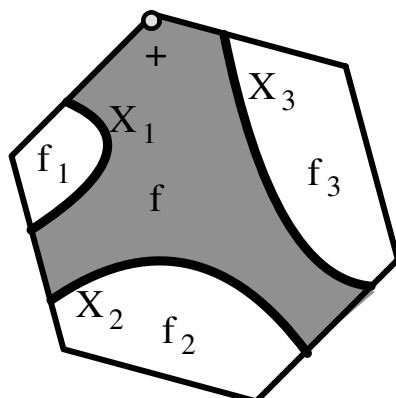


Figura 2.13.

tivo, e ciò va contro l'ipotesi che f' sia un'immersione ammissibile. Questo significa che la controimmagine di X è un'unione disgiunta di archi.

Chekanov qui dice che attorno ad ogni controimmagine di X va effettuata un'operazione che è l'inversa di quella mostrata in fig. 2.12 e produce $n + 1$ immersioni: $f \in W^+(Y_{t'-\varepsilon}, a_j)$ che è quella che eredita il vertice positivo $x_0^{k'}$ della f' ; $f_1, \dots, f_n \in W^+(Y_{t'-\varepsilon}, a)$. Ma bisogna anche dimostrare che tra queste ultime non vi sia \bar{f} . Una volta fatto questo, si capisce come procede l'operazione inversa di quella già spiegata: nell'intorno di ogni arco X_i bisogna effettuare un'identificazione di tutto l'arco ad un punto (che mima il cambiamento del diagramma per $\varepsilon \rightarrow 0$), e poi separare in quel punto le due regioni, dando così origine a due nuovi vertici, uno negativo (nel bordo di Π_k) che verrà mandato da f in b , ed uno positivo (nel bordo di Π_{k_i}) che di conseguenza verrà mandato da f_i in a .

Proprio per poter eliminare il caso che $f_i = \bar{f}$ per qualche i , occorre che il dominio si presenti come in fig. 2.13, e cioè che la porzione di poligono a cui appartiene il vertice positivo, cioè quella che viene assegnata alla funzione f , contenga nel proprio bordo $X_i \forall i = 1, \dots, n$. Infatti, se per esempio il dominio si presentasse come in fig. 2.14, allora, mediante l'operazione su descritta, si è forzati dalla costruzione delle altre immersioni a prendere la regione compresa tra X_i ed X_j , in figura, come dominio per un'immersione di $W^+(Y_{t'-\varepsilon}, a)$ che possiede nella propria immagine i vertici a e b e quindi, per quanto osservato all'inizio della discussione della mossa II, tale immersione necessariamente, per essere ammissibile, deve appartenere alla stessa classe di \bar{f} .

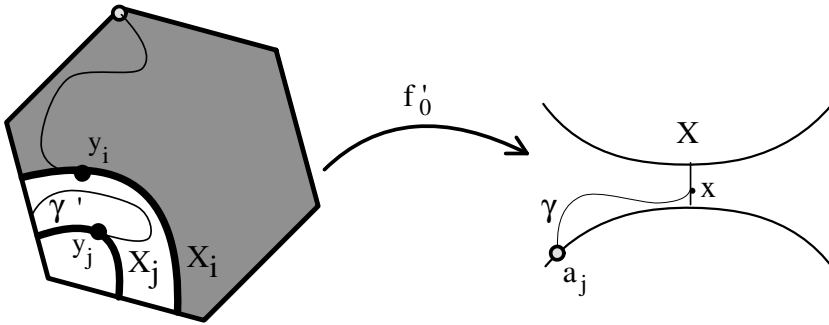


Figura 2.14.

Dobbiamo escludere che il dominio di f'_0 possa essere del tipo di quello in fig. 2.14. Procediamo per assurdo: sia X_j non contenuto nel bordo nel dominio della f . Scelto a piacere un punto x su X , se ne consideri la controimmagine su X_i , y_i , e su X_j , y_j . Si consideri un cammino, tutto contenuto nel dominio della f , che congiunge y_i con il vertice positivo. L'immagine di questo cammino tramite f'_0 è un arco γ che unisce il punto scelto su X ad a_j . Usando il fatto che f'_0 è localmente un diffeomorfismo con l'immagine, ed il fatto che il dominio è compatto, si costruisce con argomenti standard un sollevamento γ' di γ tramite f'_0 , di punto base y_j . Vediamo che ciò porta ad un assurdo: γ' è un cammino nel dominio di f'_0 che parte da y_j e non può intersecare di nuovo alcuna controimmagine di X ; quindi tale cammino non può passare nel dominio della f . Ciò nonostante, γ' deve arrivare in un vertice che deve essere mandato dalla f'_0 nel vertice positivo a_j . Ciò vuol dire che esiste un'altra controimmagine di a_j nel complementare del dominio della f (vedi fig. 2.14). Questo è assurdo, poiché per il lemma delle altezze un'immersione ammissibile, ed f'_0 lo è, non può passare più di una volta dal proprio vertice positivo.

Si può adesso concludere la dimostrazione verificando che effettivamente il numero j dei vertici che vengono mandati a b dalla f è uguale al numero di archi che costituiscono la controimmagine tramite f'_0 di X , che chiamiamo n . Per costruzione $j \leq n$. Supponiamo che f mandi j vertici in b , con $j < n$. Allora, per qualche $f_i \in W_{k_i}^+(Y_{t'-\varepsilon}, a)$ esiste un vertice negativo che viene mandato da f_i in b . Dato che il vertice positivo di tale f_i è a , per precedenti osservazioni, $f_i = \bar{f}$, ed è assurdo. Dunque $j = n$.

Siano $x_{s_1}^k, \dots, x_{s_n}^k$ i vertici che vengono mandati da f in b . La maniera canonica di numerare le immersioni $f_i \in W_{k_i}^+(Y_{t'-\varepsilon})$, è quella di chiamare

Π_{k_i} la regione di $\Pi_{k'}$ che all'istante $t = t'$ è attaccata a Π_k nel punto $x_{s_i}^k$.
In questo modo, l'operazione di incollamento riconduce alla f' di partenza. \square

Capitolo 3

Invariante di Chekanov

L'intento di questo capitolo è di illustrare due applicazioni del teorema 2.4.1: la prima consiste nel dimostrare che i due nodi in fig. 3.1, chiamati di Chekanov-Eliashberg, hanno tutti gli invarianti classici uguali, ma non sono legendrianamente isotopi; nella seconda, invece si dimostra la stessa cosa, ma per il nodo in fig 3.2 ed il suo chirale (cioè la sua immagine tramite l'applicazione $\Phi : (x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$). Sono stati scelti questi due esempi, perchè si usano due modi diversi per applicare il teorema 2.4.1, presentati entrambi in [Che02a], ma illustrati in dettaglio rispettivamente in [Che02a] ed in [Etn].

3.1 Calcolo del differenziale per I e II

Per quanto riguarda il calcolo esplicito del differenziale, non è molto chiaro come si possa essere certi che le immersioni ammissibili su cui si è effettuata la somma siano tutte le possibili. Infatti non si ha alcuna stima della cardinalità dell'insieme delle immersioni ammissibili; se, ad esempio, tali immersioni non potessero avere come immagine di diversi vertici di Π_k lo stesso incrocio, si potrebbe stimare, con metodi combinatori, il numero esatto di immersioni tra cui cercare quelle ammissibili. Grazie ad un corollario del lemma delle altezze si è dimostrato che il differenziale è calcolabile; più precisamente, si è dimostrato che l'insieme delle immersioni ammissibili è finito. Ciò che ha aiutato praticamente nel calcolo dei differenziali qui di seguito, è stato il tenere presente alcuni fatti: se f è un'immersione ammissibile, allora la propria immagine non può coprire una componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus \pi(L)$; in secondo luogo l'immagine di Π_k nell'intorno di ogni suo vertice deve coprire uno solo dei settori in cui viene diviso un intorno dell'incrocio che è immagine del vertice considerato; l'ultimo importante

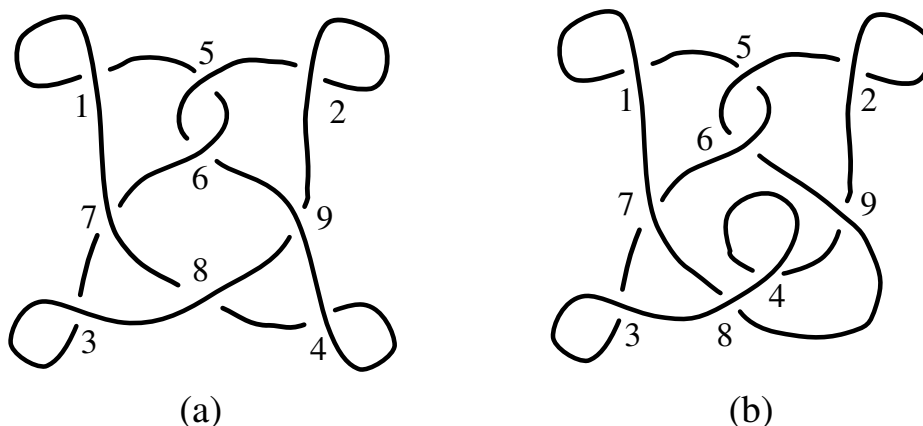


Figura 3.1. I. Nodi di Chekanov-Eliashberg.

accorgimento è quello di prestare attenzione al fatto che f deve preservare l'orientazione di \mathbb{R}^2 .

I.(a) Si prendano L ed L' i due nodi legendriani con diagramma in fig. 3.1. Si ha che appartengono entrambi alla classe topologica 5_2 , $\text{rot}(L) = \text{rot}(L') = 0$ e $\text{tb}(L) = \text{tb}(L') = 1$.

Nella DGA associata a L , (A, ∂) i gradi sono: $\deg(a_i) = 1$ per $i = 1, \dots, 5$, $\deg(a_6) = -1$, $\deg(a_i) = 0$ per $i = 7, 8, 9$. Calcoliamo il differenziale sui generatori:

$$\begin{aligned} \partial(a_1) &= 1 + a_7 + a_7 a_6 a_5 \\ \partial(a_2) &= 1 + a_9 + a_5 a_6 a_9 \\ \partial(a_3) &= 1 + a_8 a_7 \\ \partial(a_4) &= 1 + a_9 a_8 \\ \partial(a_5) &= \partial(a_6) = \partial(a_7) = \partial(a_8) = \partial(a_9) = 0 \end{aligned}$$

I.(b) In quella associata a L' , (A', ∂') , si ha: $\deg(a_i) = 1$ per $i = 1, \dots, 4$, $\deg(a_i) = 0$ per $i = 5, \dots, 9$; ed il differenziale è:

$$\begin{aligned} \partial'(a_1) &= 1 + a_7 + a_5 + a_7 a_6 a_5 \\ \partial'(a_2) &= 1 + a_9 + a_5 a_6 a_9 \\ \partial'(a_3) &= 1 + a_8 a_7 \\ \partial'(a_4) &= 1 + a_8 a_9 \\ \partial'(a_5) &= \partial'(a_6) = \partial'(a_7) = \partial'(a_8) = \partial'(a_9) = 0 \end{aligned}$$

II. I due nodi che prendiamo in considerazione sono L , in fig. 3.2, ed $L' = \Phi(L)$ (ricordiamo che $\Phi : (x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$). L'algebra relativa ad L

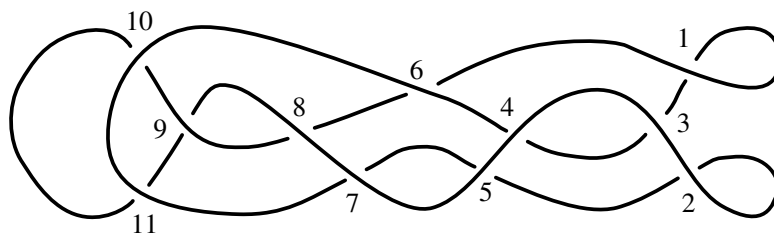


Figura 3.2.

ha 11 generatori. L e $\Phi(L)$ appartengono allo stesso tipo topologico, inoltre $\text{rot}(\Phi(L)) = -\text{rot}(L) = 0$ e $\text{tb}(L) = \text{tb}(\Phi(L))$. I gradi sono: $\deg(a_1) = \deg(a_2) = \deg(a_7) = \deg(a_9) = \deg(a_{10}) = 1$; $\deg(a_3) = \deg(a_4) = 0$; $\deg(a_5) = \deg(a_6) = \deg(a_8) = \deg(a_{11}) = -1$. Fin qui L e $\Phi(L)$ non si distinguono. Invece i differenziali sono diversi: per L

$$\begin{aligned} \partial(a_1) &= 1 + a_{10}a_5a_3 & \partial(a_6) &= a_{11}a_8 \\ \partial(a_2) &= 1 + a_3(1 + a_6a_{10} + a_{11}a_7) & \partial(a_7) &= a_8a_{10} \\ \partial(a_4) &= a_{11} + (1 + a_6a_{10} + a_{11}a_7)a_5 & \partial(a_9) &= 1 + a_{10}a_{11} \\ \partial(a_3) &= \partial(a_5) = \partial(a_8) = \partial(a_{10}) = \partial(a_{11}) = 0; \end{aligned}$$

per $\Phi(L)$

$$\begin{aligned} \partial'(a_1) &= 1 + a_3a_5a_{10} & \partial'(a_6) &= a_8a_{11} \\ \partial'(a_2) &= 1 + (1 + a_{10}a_6 + a_7a_{11})a_3 & \partial'(a_7) &= a_{10}a_8 \\ \partial'(a_4) &= a_{11} + a_5(1 + a_{10}a_6 + a_7a_{11}) & \partial'(a_9) &= 1 + a_{11}a_{10} \\ \partial'(a_3) &= \partial'(a_5) = \partial'(a_8) = \partial'(a_{10}) = \partial'(a_{11}) = 0. \end{aligned}$$

Per tutte e due le coppie di nodi prese in considerazione, si hanno stessi invarianti classici, ed inoltre le algebre associate hanno gli stessi generatori; però i due differenziali sono diversi. Come fare a dire che le due algebre (A, ∂) e (A, ∂') sono o non sono tame isomorfe dopo un certo numero di stabilizzazioni, o che i rispettivi anelli di omologia sono o non sono isomorfi? Due buone risposte a questa domanda sono contenute nelle sezioni qui di seguito.

3.2 I. Linearizzazione

E' possibile stratificare A in base alla lunghezza delle parole (in termini dei generatori), ottenendo A_i il sottogruppo di A generato dalle parole di lunghezza $\leq n$; si osservi che A_i è uno spazio vettoriale, ma non un'algebra. Se si assume che $\partial_0 = 0$, di conseguenza si ha che $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$, e quindi che $\partial_1(A_1) \subset A_1$. Allora consideriamo l'omologia

$$H(A_1, \partial_1) = \frac{\ker \partial_1|_{A_1}}{\text{Im } \partial_1|_{A_1}}$$

che risulta essere uno spazio vettoriale graduato sullo stesso gruppo ciclico Γ su cui è graduata A . Nel caso di A algebra associata ad un nodo legendriano L , $\Gamma = \mathbb{Z}_{2\text{rot}(L)}$. Definiamo il *polinomio di Poincaré-Chekanov* $P_{(A,\partial)}$ come:

$$P_{(A,\partial)} = \sum_{\lambda \in \Gamma} \dim(H_\lambda(A_1, \partial_1))t^\lambda,$$

dove $H_\lambda(A_1, \partial_1)$ indica la componente omogenea di grado λ di $H(A_1, \partial_1)$.

Data una DGA (A, ∂) , sotto la condizione che il differenziale applicato ad un qualsiasi generatore di A non contenga termini costanti (si dice che l'algebra è *augmentata*), è ben definito ∂_n , differenziale su A_n indotto da ∂ , ed è possibile, nella computazione del polinomio di Poincaré-Chekanov, prendere in considerazione (A_n, ∂_n) , invece di (A_1, ∂_1) ; in tal caso, il polinomio si dice di ordine n :

$$P_n(t) = \sum_{\lambda \in \Gamma} \dim(H_\lambda(A_n, \partial_n))t^\lambda.$$

Indichiamo con $H(A_n, \partial_n)$ l'omologia $\frac{\ker \partial_n|_{A_n}}{\text{Im } \partial_n|_{A_n}}$ che prende il nome di *omologia di contatto di ordine n* ; a quella di ordine 1, precedentemente introdotta, ci si fa riferimento anche con il nome di omologia di contatto *lineare* o *linearizzata*.

Indichiamo con $Aut_t(A)$ il gruppo degli automorfismi tame e graduati di A . Nel nostro caso (A è DGA semi-libera). Chiaramente un elemento $g \in Aut_t(A)$ è un DGA isomorfismo tra (A, ∂) e (A, ∂^g) . Chiamiamo $Aut_0(A) = \{g \in Aut_t(A) \mid a_i \xrightarrow{g} a_i + c_i, \text{ con } c_i \in A_0 \ \forall i\}$; è sottogruppo di $Aut_t(A)$. Se $g \in Aut_0(A)$; allora deve conservare la gradazione di A ; dunque $\deg(a_i) \neq 0$ implica $c_i = 0$. Ancora, definiamo $U(A, \partial)$ come l'insieme degli automorfismi g in $Aut_t(A)$ per cui $(\partial^g)_0 = 0$.

Possiamo ora introdurre $I(A, \partial)$ l'*invariante di Chekanov*

$$I(A, \partial) = \{P_{(A,\partial^g)} \mid g \in Aut_0(A) \cap U(A, \partial)\} \quad (3.2.1)$$

Dimostreremo che tale insieme è invariante per la classe di stabilizzazione di (A, ∂) .

Osserviamo che se il numero di incroci di L è n , allora la cardinalità di $Aut_0(A)$ è al massimo 2^n . Questo implica che tale invariante è calcolabile.

Associamo al nodo legendriano L π -generico $I(L) := I(A_L, \partial_L)$. Per dire che questo è un invariante di nodi per isotopia legendriana manca da dimostrare (tenuto conto del teorema 2.4.1) il seguente teorema:

Teorema 3.2.1. *Se (A, ∂_A) e (B, ∂_B) appartengono alla stessa classe di stabilizzazione, allora $I(A, \partial_A) = I(B, \partial_B)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si divide sostanzialmente in due parti: nella prima ci si preoccupa di argomentare il fatto che l'invariante di Chekanov non viene modificato da isomorfismi tame, nella seconda da un numero finito di stabilizzazioni.

Invarianza per isomorfismi tame. Sia $\bar{A} = \bigoplus_{l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_l \subset A$, e sia $Aut_r(A)$ l'insieme degli automorfismi tame graduati di A per i quali $g(\bar{A}) \subset \bar{A}$.

Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $Aut_t(A)$:

$El(A)$ è l'insieme degli automorfismi elementari,

$El_0(A) = El(A) \cap Aut_0(A)$,

$El_r(A) = El(A) \cap Aut_r(A)$.

Osserviamo che: $Aut_t(A) = \bigcup_{m \geq 0} El(A)^m$, dove $El(A)^m$ indica gli automorfismi generati dalla composizione di m automorfismi elementari (def. in 2.2). Quello che ora si vuole ottenere è una più utile caratterizzazione dell'insieme degli automorfismi tame, e cioè:

Lemma 3.2.2. $Aut_t(A) = Aut_0(A)Aut_r(A) = Aut_r(A)Aut_0(A)$.

Dimostrazione. A questo scopo dimostriamo che

$$El(A)^m = Aut_0(A)El_r(A)^m = El_r(A)^m Aut_0(A).$$

Dato $s \in El(A)$, esiste un qualche i tale che $s(a_i) = v_i + c_i$, con $c_i \in A_0$, $v_i \in \bar{A}$ e $s(a_j) = a_j$ per $i \neq j$. A s possiamo associare canonicamente due automorfismi:

$$\begin{aligned} s_0 \in El_0(A) & \quad a_i \xrightarrow{s_0} a_i + c_i \\ s_r \in El_r(A) & \quad a_i \xrightarrow{s_r} v_i \end{aligned}$$

e che sono l'identità su tutti gli altri generatori. Risulta vera la seguente uguaglianza: $s = s_0 s_r = s_r s_0$; da cui si deduce che

$$El(A) \subset Aut_0(A)El_r(A) \text{ e } El(A) \subset El_r(A)Aut_0(A).$$

Sono vere anche le inclusioni inverse. Verifichiamone una (l'altra è analoga). Consideriamo $g_r \in El_r(A)$ e $g_0 \in Aut_0(A)$, ed osserviamo che $g_0^2 = \text{id}$ e che $g_0 g_r g_0 \in El(A)$. Allora $g_r g_0 = g_0 (g_0 g_r g_0) =;$ poiché $Aut_0(A)El(A) \subset El(A)$, risulta $El_r(A)Aut_0(A) \subset El(A)$. Dunque

$$El(A) = El_r(A)Aut_0(A) = El_r(A)Aut_0(A).$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} El(A)^m &= (El_r(A)Aut_0(A))^m = El_r(A)^m Aut_0(A) \\ El(A)^m &= (Aut_0(A)El_r(A))^m = Aut_0(A)El_r(A)^m. \end{aligned}$$

Detto ciò, passiamo all'unione su $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} Aut_t(A) &= \bigcup_{m \geq 0} El(A)^m = \bigcup_{m \geq 0} El_r(A)^m Aut_0(A) = \\ &= \bigcup_{m \geq 0} (Aut_r(A) \cap El(A))^m Aut_0(A) = \bigcup_{m \geq 0} (Aut_r(A) \cap El(A)^m) Aut_0(A) = \\ &= (Aut_r(A) \cap Aut_t(A)) Aut_0(A) = Aut_r(A) Aut_0(A). \end{aligned}$$

Si è ottenuta la caratterizzazione cercata

$$Aut_t(A) = Aut_0(A)Aut_r(A) = Aut_r(A)Aut_0(A).$$

□

Il passo successivo è dimostrare il seguente lemma:

Lemma 3.2.3.

$$I(A, \partial) = \{P_{(A, \partial^g)} \mid g \in U(A, \partial)\}.$$

Dimostrazione. Per prima cosa verifichiamo che $U(A, \partial) \subset Aut_0(A)$. Sia $g \in U(A, \partial)$. Essendo $g \in Aut_t(A)$, per la caratterizzazione appena fornita di tale insieme, è possibile avere: $g = \bar{g}g_0$, con $\bar{g} \in Aut_r(A)$ e $g_0 \in Aut_0(A)$. Inoltre $\bar{g} \in Aut_r(A)$ implica che anche \bar{g}^{-1} , ∂^g mandano \bar{A} in se stesso, così come $\partial^{g_0} = \bar{g}^{-1}\partial^g\bar{g}$. Quindi $g_0 \in U(A, \partial) \cap Aut_0(A)$. Consideriamo l'automorfismo lineare graduato $\varphi : A_1 \rightarrow A_1$ definito come $\pi_1 \circ \bar{g}$, dove $\pi_1 : A \rightarrow A_1$ è semplicemente la proiezione; dunque i differenziali $(\partial^{g_0})_1$ e $(\partial^g)_1$ risultano essere coniugati tramite φ (cioè $(\partial^{g_0})_1 = (\varphi)^{-1}(\partial^g)_1\varphi$). Ciò implica che $P_{(A, \partial^{g_0})} = P_{(A, \partial^g)}$. E' così dimostrato il lemma. □

Per concludere la dimostrazione del teorema, rimane da verificare che, date (A, ∂_A) e (B, ∂_B) DGA algebre tame isomorfe tramite $f : A \rightarrow B$, allora

$$I(A, \partial_A) = I(B, \partial_B).$$

E' sufficiente osservare che vi è una corrispondenza biunivoca R tra $U(A, \partial)$ e $U(B, \partial_B)$ fatta in modo che $(\partial_A^g)_1 = f^{-1}(\partial_B^{R(g)})_1 f$; tale corrispondenza è data dalla coniugazione con f : $R(g) = f \circ g \circ f^{-1}$. Questo infatti basta per avere l'uguaglianza a livello di omologia di contatto lineare e dunque la coincidenza dei due insiemi di polinomi I_A e I_B . E' così verificata l'invarianza rispetto agli isomorfismi tame.

Invarianza rispetto alla stabilizzazione. Dimostriamo che $I(A, \partial) = I(S_i(A, \partial))$. Per fare questo bisogna capire come si comporta I rispetto ai prodotti liberi. Da (3.2.1) si deduce che:

se (A, ∂_A) e (B, ∂_B) sono graduate sullo stesso gruppo Γ , allora

$$\begin{aligned} I\left((A, \partial_A) \amalg (B, \partial_B)\right) &= I(A, \partial_A) + I(B, \partial_B) = \\ &= \{P_A + P_B \mid P_A \in I(A, \partial_A), P_B \in I(B, \partial_B)\}. \end{aligned}$$

Ma è anche possibile contemplare il caso in cui le due algebre non siano graduate sullo stesso gruppo ciclico. Se (A, ∂_A) è graduato su Γ_A , ed ho un omomorfismo surgettivo $\psi_A : \Gamma_A \rightarrow \Gamma$, dove Γ è anch'esso ciclico, dopo aver ridotto il grado in A mediante ψ_A (si prende $\psi_A(\deg(a))$ come grado di $a \in A$), allora posso costruire una nuova DGA: $(A^{\psi_A}, \partial^{\psi_A}) =: (A, \partial)^{\psi_A}$, graduata però su Γ .

Se (A, ∂_A) e (B, ∂_B) sono graduate su Γ_A e Γ_B rispettivamente, allora

$$I\left((A, \partial_A) \amalg (B, \partial_B)\right) = I((A, \partial_A)^{\psi_A}) + I((B, \partial_B)^{\psi_B}),$$

dove $\psi_A : \Gamma_A \rightarrow \Gamma_A \otimes \Gamma_B$ e ψ_B , definita analogamente, sono gli omomorfismi naturali.

Questa affermazione è diretta conseguenza di quella prima, poiché con tali ψ_A e ψ_B risulta: $(A, \partial_A) \amalg (B, \partial_B) = (A, \partial_A)^{\psi_A} \amalg (B, \partial_B)^{\psi_B}$.

Utilizzando queste ultime osservazioni nel caso specifico di $S_i(A, \partial)$, si ottiene che $I(S_i(A, \partial)) = I(A, \partial) + I((E_i, \partial_i)^\psi)$, dove ψ è l'omomorfismo naturale $\mathbb{Z} \rightarrow \Gamma \otimes \mathbb{Z}$. Chiamiamo (E, ∂_E) la DGA $(E_i, \partial_i)^\psi$. Quello che occorre verificare è che $I(E, \partial_E) = \{0\}$. L'omologia è calcolata su $(E_1, \partial|_{E_1})$. Dunque, dato $g_0 \in \text{Aut}_0(E)$, a noi interessa calcolare $\partial_E^{g_0}$ su e_1 ed e_2 : $\partial_E^{g_0}(e_2) = 0$; e $\partial_E^{g_0}(e_1) = g_0(e_2) = e_2$ oppure $e_2 + 1$. Quindi $\text{Im}(\partial_E^{g_0})_1 = (e_2)$, e $\ker(\partial_E^{g_0})_1 = (e_2)$ e, per definizione, $I(E, \partial_E) = \{0\}$; è così completata la dimostrazione. \square

Non rimane che utilizzare quanto dimostrato per discutere il caso dei nodi L e L' .

Se $g \in \text{Aut}_0(A)$, allora $g(a_i) = a_i + c_i \forall i = 1, \dots, 9$ e, dato che g è graduato, deve essere che $c_i = 0$ per $i = 1, \dots, 6$ e, di conseguenza, $\partial^g(a_i) = g\partial(a_i) \quad \forall i \leq 6$. Indicando inoltre con $\pi_0 : A \rightarrow A_0$ la proiezione canonica,

$$\begin{aligned} (\partial^g)_0(a_1) &= \pi_0 \circ g(\partial(a_1)) = \pi_0(g(1 + a_7 + a_7 a_6 a_5)) = \\ &= \pi_0(1 + a_7 + c_7 + (a_7 + c_7)a_6 a_5) = 1 + c_7 \\ (\partial^g)_0(a_2) &= 1 + c_9 \\ (\partial^g)_0(a_3) &= 1 + c_7 c_8 \\ (\partial^g)_0(a_4) &= 1 + c_8 c_9 \\ (\partial^g)_0(a_i) &= 0 \text{ per } i = 5, \dots, 9. \end{aligned}$$

Se $g \in U(A, \partial)$, si ha che $(\partial^g)_0 = 0$. Combinando con quanto ottenuto sopra, si deduce che $c_7, c_8, c_9 = 1$ e che tale g è unico. E' facile, allora, calcolare $(\partial^g)_1$:

$$\begin{aligned} (\partial^g)_1(a_1) &= \pi_1 \circ g(\partial(a_1)) = \pi_1(g(1 + a_7 + a_7 a_6 a_5)) \\ &= \pi_1(1 + a_7 + 1 + (a_7 + 1)a_6 a_5) = a_7 \\ (\partial^g)_1(a_2) &= a_9 \\ (\partial^g)_1(a_3) &= a_7 + a_8 \\ (\partial^g)_1(a_4) &= a_8 + a_9 \\ (\partial^g)_1(a_i) &= 0 \text{ per } i = 5, \dots, 9. \end{aligned}$$

Dunque si ha l'omologia $H(A_1, \partial_1) = \frac{\langle a_1 + a_2 + a_3 + a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \rangle}{\langle a_7, a_9, a_7 + a_8, a_8 + a_9 \rangle} = \langle a_1 + a_2 + a_3 + a_4, a_5, a_6 \rangle$; $H_1 = \langle a_5, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \rangle$ e $H_{-1} = \langle a_6 \rangle$. Ne segue che $P_L(t) = t^{-1} + 2t^1$ ed $I(A, \partial)$ consta solo di tale elemento.

Rifacciamo gli stessi calcoli per l'altro nodo: L' . Sia $g \in \text{Aut}_0(A', \partial')$, con $g(a_i) = a_i + c_i$.

$$\begin{aligned} (\partial^g)_0(a_1) &= \pi_0 \circ g(\partial'(a_1)) = \pi_0(g(1 + a_7 + a_5 + a_7 a_6 a_5)) = \\ &= 1 + c_5 + c_7 + c_5 c_6 c_7 \\ (\partial^g)_0(a_2) &= 1 + c_9 + c_5 c_6 c_9 \\ (\partial^g)_0(a_3) &= 1 + c_7 c_8 \\ (\partial^g)_0(a_4) &= 1 + c_8 c_9 \\ (\partial^g)_0(a_i) &= 0 \text{ per } i = 5, \dots, 9. \end{aligned}$$

Sia $g \in U(A', \partial')$. Questo implica che $(\partial^g)_0 = 0$. Combinando con quanto ottenuto sopra, si deduce che $c_7, c_8, c_9 = 1$ e che $c_5 c_6 = 0$. A questo

punto sembrerebbe di dover distinguere i tre casi: $c_5 = 0, c_6 = 1; c_5 = 1, c_6 = 0; c_5 = 0, c_6 = 0$; ma non è necessario. Calcoliamo $(\partial'^g)_1$:

$$\begin{aligned} (\partial'^g)_1(a_1) &= \pi_1 \circ g(\partial'(a_1)) = a_7 + c_5 a_6 + c_6 a_5 \\ (\partial'^g)_1(a_2) &= a_9 + c_5 a_6 + c_6 a_5 \\ (\partial'^g)_1(a_3) &= a_7 + a_8 \\ (\partial'^g)_1(a_4) &= a_8 + a_9 \\ (\partial'^g)_1(a_i) &= 0 \text{ per } i = 5, \dots, 9. \end{aligned}$$

E, in tutti e tre i casi, si ha l'omologia $H(A'_1, \partial'_1)$ con componenti omogenee: $H_1 = \langle a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \rangle$ e $H_0 = \langle a_5, a_6 \rangle$. Ne segue che $P_{L'}(t) = t^1 + 2t^0$ ed $I(A', \partial')$ consta solo di tale elemento.

In questa sezione si è visto che L ed L' generano due DGA con invarianti di Chekanov differenti; allora per il lemma 3.2.1 le due DGA non possono appartenere alla stessa classe di stabilizzazione e questo implica, grazie al teorema 2.4.1, che L ed L' non possono essere legendrianamente isotopi.

3.3 II. Algebra caratteristica

Lo strumento che ora definiamo è fondamentale per la discussione dell'esempio II, e non solo: in [Ng03] Ng ha trovato esempi in cui le omologie di contatto linearizzate coincidono, ma le algebre caratteristiche sono diverse. Questo implica che l'algebra caratteristica è un invariante un po' più forte di quello di Chekanov.

Sia (A, ∂) la DGA con generatori a_1, \dots, a_n . Definiamo J l'ideale bilatero in A generato da $\langle \partial(a_j) \rangle_{j=1}^n$. Definiamo l'algebra caratteristica di (A, ∂) : A/J .

Diciamo che due algebre caratteristiche, A_1/J_1 e A_2/J_2 , sono *tame isomorfe* se dopo aver eventualmente aggiunto ad A_i un certo numero di generatori ed a J_i gli stessi di generatori, per $i = 1, 2$, esiste un isomorfismo tame $A_1 \rightarrow A_2$ che manda J_1 in J_2 . Si dice che le due algebre caratteristiche sono *equivalenti* se aggiungendo un certo numero di generatori ad A_1 e A_2 (ma non agli ideali corrispondenti), le due algebre A_1/J_1 e A_2/J_2 risultano essere tame isomorfe.

Richiameremo qui, senza dimostrarlo, un teorema di Ng (contenuto in [Ng01]):

Teorema 3.3.1. *Se due nodi sono legendrianamente isotopi, allora le corrispondenti algebre caratteristiche sono equivalenti.*

Sostanzialmente Ng verifica che le algebre caratteristiche associate rispettivamente ad L , in fig. 3.2, ed il suo chirale $\Phi(L)$ non sono equivalenti.

Dal calcolo del differenziale fatto nella prima sezione di questo capitolo, si nota che i due differenziali differiscono per un'operazione che potremmo chiamare di inversione a specchio, che manda la generica parola $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \mapsto (a_{i_k}, \dots, a_{i_1})$. Da ciò si deduce che le algebre caratteristiche sono A/J e A/J' dove con J' si intende l'immagine di J tramite l'inversione descritta sopra. Inoltre, si verifica che

$$A/J = \frac{\langle a_1, \dots, a_{10} \rangle}{\langle 1 + a_{10}a_5a_3, 1 + a_3a_{10}a_5, 1 + a_{10}^2a_5^2, 1 + a_{10}a_5 + a_6a_{10} + a_{10}a_5^2a_7 \rangle}.$$

A/J non possiede elementi v di grado -1 e w di grado 1 tali che $vw = 1$. Se per assurdo esistessero tali elementi, allora si potrebbe considerare l'algebra quoziente $\widetilde{A/J}$ prodotta dall'introduzione su A/J delle seguenti relazioni: $a_3 = 1, a_1 = a_2 = a_6 = a_7 = a_9 = 0$. Quest'algebra è $\frac{\langle a_5, a_{10} \rangle}{\langle 1 + a_{10}a_5 \rangle}$. In questa algebra si dovrebbe avere l'immagine sia di v sia di w , ma si vede che tali elementi in $\widetilde{A/J}$ non possono esistere.

Invece, in A/J' tale coppia di elementi esiste: basta prendere $v = a_{10}$ e $w = a_5a_3$.

Si conclude così l'argomentazione del fatto che non esiste alcuna isotopia legendriana tra L e $\Phi(L)$.

Capitolo 4

Sviluppi e generalizzazioni

Il passaggio più semplice che porta ad una generalizzazione lo fa Chekanov stesso in [Che02a]: estende la definizione del suo invariante al caso di link.

Un'altra generalizzazione abbastanza naturale è passare da (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) a $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$. E' quello che fanno Ekholm, Etnyre e Sullivan in [EES].

Si consideri \mathbb{R}^{2n+1} dotato della struttura standard e si definisca la proiezione lagrangiana $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ come la proiezione sulle prime $2n$ coordinate. Associamo ad un nodo legendriano π -generico L un'algebra differenziale graduata in questo modo: l'algebra, a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è identica a quella presa per \mathbb{R}^3 . Definire il grado è invece un po' più complicato, in quanto bisogna tener conto del fatto che per ogni punto della proiezione lagrangiana di L , non è definita una direzione tangente, ma un piano in \mathbb{C}^n , e dunque, quando si considera un cammino (in generale vi è più di un cammino) che congiunge i due punti di L che si proiettano sullo stesso incrocio, quello che in realtà si sta trattando è un cammino nello spazio dei piani in \mathbb{C}^n ; siccome L è generico rispetto alla proiezione lagrangiana, il piano al tempo 0 sarà trasverso al piano al tempo 1, ma si può completare il cammino ottenendo un laccio a cui si associa il numero di Conley-Zehnder (per la cui definizione si veda [HWZ99]); questo numero, che è un intero, dipende in generale dal cammino scelto e dunque, per una buona definizione del grado, bisogna eliminare tale dipendenza. Il grado in a viene definito come il numero di Conley-Zehnder ($cz(a)$) diminuito di 1, ma considerato modulo m con m il massimo comun divisore tra tutti i possibili numeri $cz(a)$ associati ai differenti cammini possibili (sono in numero finito). Infine va definito il differenziale: come al solito lo si definisce solo sui generatori e poi lo si estende con la regola di Leibnitz. Questa volta le funzioni che si usano per calcolare il differenziale sono delle applicazioni

olomorfe $u : (\Pi_{k+1}, \partial\Pi_{k+1}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \pi(L))$ (Π_{k+1} è il $k + 1$ -poligono in \mathbb{C}) che soddisfano particolari condizioni:

- (i) mandano i vertici del poligono nell'insieme degli incroci di $\pi(L)$;
- (ii) la restrizione di u a $\partial\Pi_{k+1}$ meno i vertici del poligono si solleva ad un'applicazione su L ;
- (iii) il primo vertice è positivo e tutti gli altri negativi, dove la convenzione di positività è del tutto analoga a quella data da Chekanov.

Una rilevante differenza rispetto alla costruzione di Chekanov è che la somma non è fatta su tutte le parole possibili: se indichiamo con M_{b_1, \dots, b_k}^a l'insieme delle applicazioni ammissibili che mandano il vertice positivo in a e quelli negativi, in ordine, in b_1, \dots, b_k , nella somma compariranno solo le parole $b_1 \cdots b_k$ per cui $\dim(M_{b_1, \dots, b_k}^a) = 0$.

Sia nella dimostrazione di $\partial^2 = 0$, che nel teorema 2.4.1, si è utilizzato più volte il fatto che le algebre considerate sono a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ciò corrisponde, in qualche senso, al non aver assegnato alcun tipo di orientazione all'omologia di contatto. Al fine di individuare quali fossero i rapporti tra l'omologia di contatto di Chekanov e quella descritta da Eliashberg, Givental e Hofer in [EGH00], J. B. Etnyre, L. L. Ng e J. Sabloff in [ENS02] hanno ottenuto un sollevamento dell'omologia di Chekanov. Hanno modificato le costruzioni usate da Chekanov al fine di associare ad un nodo legendriano L una DGA graduata su \mathbb{Z} ed avente coefficienti in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, con $\deg(t) = 2 \operatorname{rot}(L)$; e verificato che, riducendo il grado a $\mathbb{Z}/2 \operatorname{rot}(L)\mathbb{Z}$, ed utilizzando l'omomorfismo $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ che manda t e $1 \mapsto 1$, si riottiene la stessa algebra che Chekanov associa ad L . Dimostrano, poi, che la teoria dell'omologia di contatto di Eliashberg e Hofer presentata in [EGH00] (in sostanza un adattamento alla varietà di contatto delle idee dell'omologia di Floer), è realmente la teoria in cui si inquadrano sia l'omologia di Chekanov, sia la generalizzazione di quest'ultima da loro effettuata. L'utilità dell'aver esplicitato le relazioni che intercorrono tra tutti questi risultati è che gli eventuali calcoli (ad esempio del differenziale) possono essere fatti nella versione combinatoria di Chekanov o di Etnyre, Ng e Sabloff invece che nella teoria omologica di Eliashberg e Hofer dove risultano più lunghi e complicati.

A livello di curiosità riportiamo che in [Che02b] esiste lo sketch di una diversa costruzione, anch'essa combinatoria, dello stesso invariante di Chekanov, che si può dire parallela all'altra, in quanto una parte dall'associare

alla proiezione lagrangiana un'algebra differenziale graduata, e l'altra si basa sulla decomposizione della proiezione fronte d'onda in curve chiuse.

Siccome in [CGH] è dimostrato che il numero di nodi legendriani con fissati invarianti classici sono in numero finito, la speranza è che si possa riuscire a costruire invarianti che permettano una classificazione esaustiva, e cioè che distinguano una qualsiasi coppia di nodi legendriani stabilizzati aventi i medesimi invarianti classici.

Citiamo alcuni lavori che costituiscono, fornendo un certo numero di esempi, passi importanti se non verso la soluzione del problema, certamente verso una comprensione più completa del quadro generale. Etnyre e Honda hanno costruito, per ogni m , esempi di nodi legendriani aventi gli stessi invarianti classici ma che non sono legendrianamente isotopi nemmeno dopo m stabilizzazioni ([EH]). Il problema noto come *legendrian mirror problem*, è illustrato in [FT97]: dato un nodo legendriano L , esiste un'isotopia tra L e la sua immagine tramite l'applicazione $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$? La risposta è che in alcuni casi non esiste alcuna isotopia, e la dimostrazione di questo fatto è data da Ng in [Ng03] ed un esempio, tra i tanti, è proprio quello riportato in sezione 3.3.

Bibliografia

- [CGH] V. COLIN, E. GIROUX E K. HONDA, *On the coarse classification of tight contact structures*, preprint 2002 ArXiv:math.GT/0305186.
- [Che02a] YU. V. CHEKANOV, *Differential algebra of Legendrian links*, Inv. Math. **150** (2002) 441–483.
- [Che02b] YU. V. CHEKANOV, *Invariants of Legendrian knots*, proceedings of the ICM (Beijing, 2002) 385–394, ArXiv:math.GT/0304294.
- [ea94] B. AEBISCHER ET AL., *Symplectic Geometry*, Prog. Math., **124**, Birkäuser, Basel Boston Berlin, 1994.
- [EES] T. EKHOLM, J. B. ETNYRE E M. SULLIVAN, *Non-isotopic Legendrian submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1}* , preprint 2002 ArXiv:math.SG/0210124.
- [EGH00] Y. ELIASHBERG, A. GIVENTAL E H. HOFER, *Introduction to symplectic field theory*, Geom. Funct. Anal., Special Volume, Part II (2000) 560–673.
- [EH] J. B. ETNYRE E K. HONDA, *Knots and contact geometry II: Connected Sums*, preprint 2002 ArXiv:math.GT/0205310.
- [ENS02] J. B. ETNYRE, L. L. NG E J. M. SABLOFF, *Invariants of Legendrian knots and coherent orientations*, J. Symplectic Geom. **1** (2002) 321–367.
- [Etn] J. B. ETNYRE, *Legendrian and transversal knots*, preprint 2003 ArXiv:math.SG/0306256.
- [FT97] D. FUCHS E S. TABACHNIKOV, *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, Topology **36** (1997) 1025–1053.

- [Gei01] H. GEIGES, *A brief history of contact geometry and topology*, Expo. Math. **19** (2001) 25–53.
- [Gei03] H. GEIGES, *Contact Geometry*, to appear in Handbook of Differential Geometry, vol. 2 (2003) ArXiv:math.SG/0307242.
- [HWZ99] H. HOFER, K. WYSOCKI E E. ZEHNDER, *Properties of pseudoholomorphic curves in symplectizations. III. Fredholm theory.*, Topics in Nonlinear Analysis, pg. 381-475 Birkäuser, Basel, 1999.
- [Ng01] L. L. NG, *Maximal Thurston-Bennequin number of two-bridge links*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001) 427–434.
- [Ng03] L. L. NG, *Computable Legendrian invariants*, Topology **42** (2003) 55–82.
- [Swi92] J. SWIATKOWSKI, *On the isotopy of Legendrian knots*, Ann. glob. Anal. Geom. **10** (1992) 195–207.