



Università degli studi di Pisa

Facoltà di ingegneria

Corso di laurea in ingegneria meccanica

Tesi di laurea

# **Modellazione funzionale di un freno a tamburo**

candidato

Antonio Sponziello

Relatori:

Prof. Ing. Massimo Guiggiani

Prof. Ing. Francesco Frenzo

Ing. Claudio Ricci (Centro Ricerche FIAT)

Data di laurea: 27 Ottobre 2004

Archivio tesi corso di laurea in ingegneria meccanica 83/04

Anno accademico 2004/2005

---

*Ai miei genitori,  
ai miei fratelli Alessandro e Gabriele  
ed alla mia ragazza Alessia*

# Indice

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>Sommario</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 L'impianto frenante</b>	<b>4</b>
1.1 Descrizione di impianti frenanti per autovetture . . . . .	4
1.2 Elementi frenanti . . . . .	10
1.2.1 Freni a disco . . . . .	10
1.2.2 Freni a tamburo . . . . .	13
<b>2 Il modello meccanico del freno</b>	<b>25</b>
2.1 Gli obiettivi del modello . . . . .	25
2.2 Ipotesi effettuate . . . . .	28
2.3 Equilibrio dinamico . . . . .	37
2.4 Spostamento del pistone necessario a recuperare il gioco tra ganascia e tamburo . . . . .	41
2.5 Equilibrio statico . . . . .	42
2.5.1 Determinazione della direzione di accostamento $\beta$ . . .	42
2.5.2 Determinazione della pressione massima . . . . .	48
2.5.3 Determinazione del momento frenante fornito da una ganascia . . . . .	49

---

2.5.4	Determinazione degli assorbimenti idraulici . . . . .	50
2.6	Variazione del coefficiente d'attrito . . . . .	53
2.7	Riepilogo . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Il modello termico del freno</b>	<b>56</b>
3.1	Ripartizione del calore tra tamburo e guarnizione . . . . .	56
3.2	Discretizzazione del freno durante la frenata . . . . .	66
3.3	Equilibrio termico degli elementi . . . . .	69
3.4	Riepilogo . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Risultati di alcune simulazioni</b>	<b>78</b>
4.1	Frenata al limite dalla velocità di 150 Km/h . . . . .	78
4.2	Manovra di fade con raffreddamento . . . . .	83
4.3	Esempi di utilizzo del modello per la progettazione . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Implementazione del modello in Matlab-Simulink</b>	<b>92</b>
A.1	Il blocco meccanico . . . . .	94
A.1.1	La ganascia . . . . .	95
A.2	Il blocco termico . . . . .	100
A.2.1	Equilibrio termico degli elementi . . . . .	101
<b>B</b>	<b>Espressione esplicita della pressione massima</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>104</b>

## **TITOLO**

### **Modellazione funzionale di un freno a tamburo**

#### **Sommario**

Scopo di questo lavoro è la costruzione di un modello matematico implementato in Matlab-Simulink che sia in grado di prevedere il comportamento termomeccanico di un freno a tamburo, in particolare di un freno Simplex a ganasce flottanti: questo può essere utile sia in fase di progettazione per ottimizzare un determinato obiettivo, sia in fase di integrazione dei sistemi frenanti di tipo “passivo” con sistemi di tipo “attivo”.

Il modello sviluppato è stato suddiviso in un blocco che descrive il comportamento meccanico ed in un blocco che descrive il comportamento termico. I due blocchi interagiscono fra di loro e con l'esterno, ricevendo informazioni (pressione idraulica, velocità del veicolo e velocità di rotazione della ruota) e fornendone altre (momento frenante, assorbimento idraulico, temperatura freno). Il modello meccanico esegue un'analisi dinamica e statica del freno. Il modello termico calcola la temperatura del tamburo e della ganascia senza fare alcuna ipotesi su come si ripartisce la potenza termica tra tamburo e guarnizione: ciò è ottenuto tramite una opportuna discretizzazione del componente.

## **TITLE**

### **Functional modelling of drum brake**

#### **Abstract**

The aim of this work is to build a mathematical model with Matlab-Simulink. It must be able to predict the thermomechanical behaviour of drum brakes, particularly leading-trailing shoe brakes with sliding abutment: this model can be useful either to design a drum to optimize some goal or to integrate “passive” brake systems with “active” ones.

The developed model is subdivided into a part that describes the mechanical behaviour and a part that describes the thermal behaviour. The two parts interact and receive some information from outside (hydraulic pressure, vehicle speed and wheel speed) and yielding other ones (brake torque, hydraulic absorption, brake temperature). The mechanical model performs dynamic and static analyses of the brake. The thermal model computes temperatures of the drum and the shoe without assuming how thermal power is splitted between drum and lining: this is obtained with an appropriate discretization of the brake.

# Introduzione

È notevole l'importanza che ha un impianto frenante nell'uso di un autoveicolo al fine controllare opportunamente la sua velocità. Le funzioni, a cui esso deve assolvere a seconda delle condizioni di utilizzazione del veicolo, possono sostanzialmente essere sintetizzate in tre punti:

- arresto d'emergenza, con decelerazione la più elevata possibile, compatibile con l'aderenza disponibile;
- controllo della velocità con intervento pressoché continuativo del freno, anche se con momenti frenanti modesti: è il caso tipico del mantenimento di velocità costante su una discesa prolungata;
- assicurare l'arresto di stazionamento del veicolo parcheggiato in pendenza.

Per svolgere queste tre funzioni e, contemporaneamente, per aumentare la sicurezza stradale, accanto agli impianti frenanti idraulici di tipo “passivo”, sono stati messi a punto dispositivi di controllo del sistema di frenatura che consentono di frenare ciascuna ruota al limite di aderenza, liberando immediatamente la stessa non appena inizi lo slittamento per effetto di una variazione del coefficiente di aderenza o per una eccessiva pressione idraulica all'interno del circuito idraulico, dovuta ad una elevata azione frenante sul pedale del freno. Questi sistemi di frenatura, denominati “attivi”, permettono di realizzare spazi di frenata il più possibile ridotti, a tutto vantaggio della sicurezza. Tra i sistemi di tipo “attivo” ricordiamo quello realizzato dalla Bosch e noto come ABS (Antiskid Brake System) ed altri meno complessi

come l'EBC (Electronic Brake Control) della Brembo. Questi sistemi, di tipo elettronico, ricevono i segnali provenienti da sensori montati sul veicolo e restituiscono in uscita dei segnali elaborati da una centralina elettronica, i quali saranno attuati da uno o più sottosistemi del veicolo. I mezzi di attuazione privilegiata sono l'impianto frenante stesso (attraverso la modulazione della pressione idraulica) ed il motore (tramite la regolazione della valvola a farfalla e la gestione dei tempi di iniezione e di accensione del combustibile).

Indipendentemente dal tipo di impianto idraulico che viene utilizzato in un autoveicolo, gli elementi ultimi per mezzo dei quali viene esplicata l'azione frenante sulle ruote sono i freni, che possono essere del tipo a disco o a tamburo. È importante, quindi, conoscere quale sia la capacità frenante di un freno in funzione delle diverse condizioni di utilizzo (ad esempio, in funzione della pressione esistente all'interno dell'impianto idraulico, della velocità di marcia e della temperatura del freno), sia ai fini progettuali (scelta del freno giusto per un determinato autoveicolo), sia proprio ai fini dell'integrazione di un impianto idraulico di tipo "passivo" con sistemi di tipo "attivo", i quali devono "conoscere" il comportamento del freno, per poter agire di conseguenza.

Questo lavoro di tesi nasce presso l'unità operativa "dinamica del veicolo" del Centro Ricerche FIAT (C.R.F.), e si propone di sviluppare un modello funzionale in ambiente Matlab-Simulink che sia in grado di prevedere il comportamento frenante, sia dal punto di vista termico che dal punto di vista meccanico, di un freno a tamburo, una volta che di questo sia stata definita la geometria interna ed esterna, oltre che le proprietà termo-meccaniche dei materiali utilizzati per realizzarlo.

Come abbiamo già anticipato, un modello del genere è utile in sede di progettazione di un veicolo, quando si dovranno definire geometria e materiali di un eventuale freno a tamburo (di solito utilizzato sull'assale posteriore): l'obiettivo è quello di determinare quel freno che sia in grado di esplicare un'azione frenante compatibile con le prestazioni richieste dall'autoveicolo e che nello stesso tempo abbia la massa più piccola possibile. Quest'ultima

richiesta, importante per ridurre la massa sospesa del veicolo e quindi per migliorare la sua tenuta di strada, si deve però scontrare con l'esigenza di evitare un eccessivo riscaldamento del freno stesso (dovuto alla trasformazione di energia cinetica e/o potenziale in energia termica), il che potrebbe compromettere la sua efficacia, visto che, in genere, il coefficiente di attrito cala con l'aumento della temperatura e con esso il momento frenante prodotto dal freno a parità di pressione idraulica. Infatti, l'aumento di temperatura durante una frenata, può essere contenuto, oltre che con un miglioramento del raffreddamento per ventilazione (ad esempio, facendo tamburi alettati), con l'aumento della massa del freno e quindi della sua capacità termica: si configurano, così, due opposte esigenze, tra le quali è necessario trovare il giusto compromesso, ed in questo può essere d'aiuto un modello di simulazione.

Gli obiettivi essenziali che ci siamo proposti all'inizio per il modello matematico, sono stati raggruppati nei successivi punti:

- conoscere il momento frenante del freno a tamburo in funzione della pressione idraulica, della temperatura, della velocità di marcia del veicolo e della velocità di rotazione della ruota;
- conoscere il volume di fluido assorbito, parametro importante perché va ad influenzare la corsa pedale, e quindi il feeling del comando;
- conoscere la temperatura raggiunta dal freno durante la frenata;
- avere un'idea del tempo di ritardo, ossia di quanto tempo intercorre tra l'istante in cui comincia a salire la pressione nel cilindro e l'istante in cui comincia a svilupparsi il momento frenante sulla ruota.

In seguito ad una ricerca bibliografica sull'argomento, si è dedicato ampio spazio alla sintesi del modello matematico (sia nella parte meccanica, sia in quella termica) in ambiente Matlab-Simulink; successivamente si è proceduto all'analisi dei risultati ottenuti da alcune simulazioni di prove di frenata.

# Capitolo 1

## L'impianto frenante

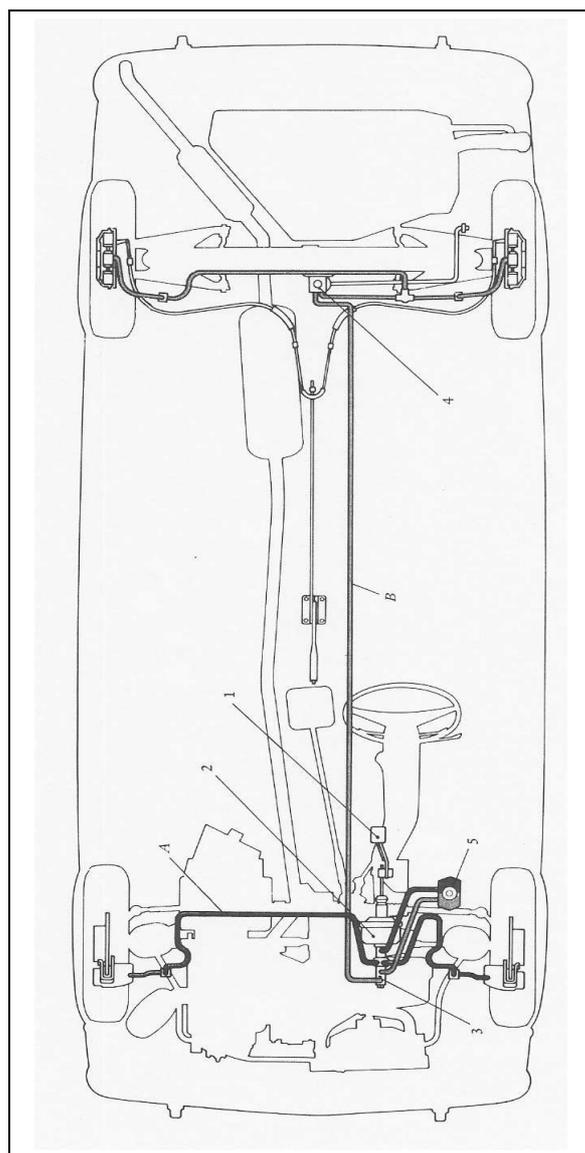
*In questo capitolo introduttivo si descriverà inizialmente un impianto frenante classico ed i principali organi che lo costituiscono. Successivamente ci si soffermerà a descrivere in maniera più dettagliata l'elemento che sarà oggetto della modellazione matematica: il freno a tamburo.*

### 1.1 Descrizione di impianti frenanti per autovetture

La frenatura delle autovetture è normalmente ottenuta mediante freni meccanici ad attrito azionati idraulicamente. La logica secondo la quale tali freni agiscono è quella di trasformare l'energia cinetica e potenziale posseduta dal veicolo in energia termica, proprio grazie all'attrito che si viene a creare durante la frenatura tra superfici in movimento relativo. L'energia termica acquistata dal freno, dovrà poi essere ceduta all'aria circostante per convezione: si comprende, così, come l'aspetto termico giochi un ruolo importante nella progettazione di un elemento frenante.

Nella figura 1.1 è illustrato un classico esempio di impianto frenante per automobile, comunemente detto di tipo misto: le ruote anteriori sono infatti munite di freni a disco, in cui la frenatura avviene per il serraggio di pinze solidali agli organi di sospensione su un disco solidale alle ruote, mentre

le ruote posteriori sono provviste di freni a tamburo, nei quali il momento frenante è prodotto dalla pressione di ganasce sulla superficie interna di un tamburo solidale alle ruote stesse.



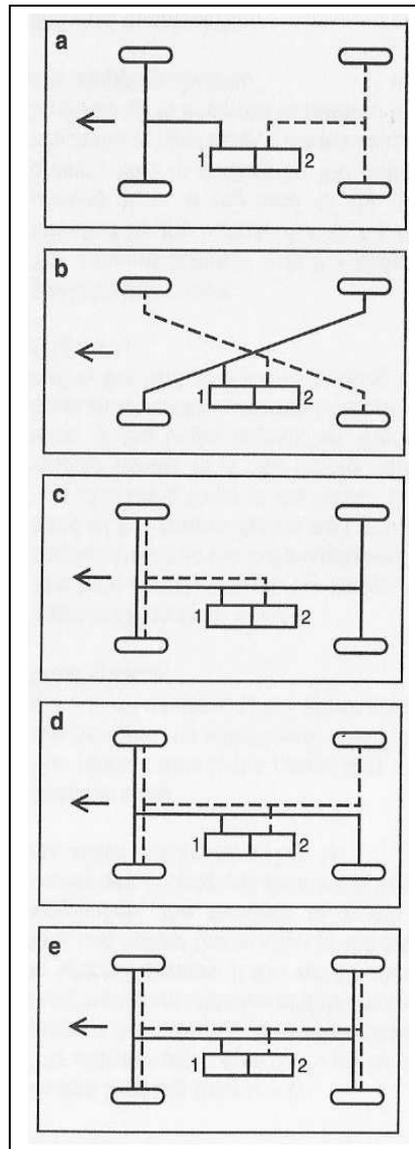
**Figura 1.1:** Esempio di impianto frenante di un veicolo

L'impianto frenante comprende un pedale di comando 1, che agisce su un dispositivo pneumatico di amplificazione dello sforzo 2 (servofreno), che a sua volta comanda una pompa 3 a doppio stantuffo, per il contemporaneo azionamento di due circuiti idraulici, destinati uno al comando delle pinze agenti sulle ruote anteriori, l'altro al comando dei cilindri azionanti le ganasce dei freni delle ruote posteriori; in questo circuito è inserita una valvola modulatrice di pressione 4, detta comunemente correttore di frenata, avente essenzialmente lo scopo di limitare il momento frenante sull'asse posteriore, scongiurando così il pericolo di bloccaggio delle ruote, quando per effetto delle condizioni di carico e decelerazione del veicolo, il peso gravante sull'asse si è ridotto. L'alimentazione di olio dei due circuiti è assicurata da un serbatoio 5, comprendente due distinte vaschette affiancate, da ciascuna delle quali l'olio può affluire alla corrispondente sezione della pompa doppia 3.

Le disposizioni di omologazione dei veicoli prescrivono che questi siano muniti di freno di servizio, da usarsi normalmente, di freno di soccorso, per arrestare il veicolo in spazi ragionevoli in caso di inefficienza del freno di servizio, e di freno di stazionamento. Nell'esempio di impianto da noi considerato la funzione di freno di soccorso è svolta dallo stesso freno di servizio, grazie all'accorgimento consistente nell'uso di circuiti idraulici A e B separati e lavoranti in parallelo, e quindi alla ridottissima probabilità di contemporanea avaria nei due circuiti. Il freno di stazionamento è invece azionato meccanicamente (mediante una leva posta nel tunnel del veicolo) ed agisce normalmente sui freni posteriori.

Quello appena descritto è solo un esempio di impianto frenante di autovettura, in quanto esistono numerose varianti che si discostano da esso per uno o più aspetti. Ad esempio, riguardo lo schema di realizzazione del circuito idraulico, esistono diverse configurazioni: oltre a quella a singolo circuito, che non viene praticamente mai usata per questioni di sicurezza in caso di guasto del circuito frenante, esistono altre 5 configurazioni a doppio circuito, rappresentate schematicamente in figura 1.2. Sebbene siano tutte realizzabili, quelle più usate sono le prime due ("a" e "b"), denominate rispettivamente

a “doppio I” e ad “X”, evidentemente per motivi di complessità costruttiva, e quindi di costo.



**Figura 1.2:** Diverse configurazioni di impianto frenante

Riguardo al tipo di freni ed ai dispositivi di correzione di frenata possiamo rammentare anche i seguenti altri schemi:

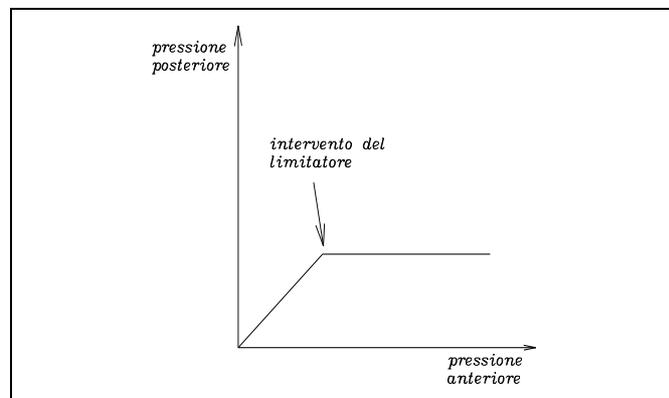
- quattro freni a disco, completati da correttore di frenata del tipo appena descritto;
- quattro freni a disco;
- due freni a disco (sul'asse anteriore) e due freni a tamburo;
- due freni a disco anteriori e due freni a tamburo, con valvola limitatrice della pressione massima sul circuito dell'asse posteriore.

Con riferimento all'ultimo punto, si vuole precisare la differenza tra valvola limitatrice della pressione massima e correttore di frenata vero e proprio. La valvola limitatrice è un componente che, posto in serie al circuito idraulico dei freni posteriori, permette una pressione sui freni anteriori uguale a quella sui freni posteriori fino ad un determinato valore, oltre il quale la pressione sui freni posteriori non aumenta più, ma si mantiene costante al valore massimo, mentre continua ad aumentare quella sui freni anteriori. La caratteristica di tale dispositivo è rappresentata in figura 1.3. Il correttore di frenata, invece, permette che la pressione anteriore sia uguale alla pressione posteriore fino ad un determinato valore, oltre il quale esse continuano ad aumentare, ma con un diverso rapporto di proporzionalità, in maniera tale che la pressione posteriore non sia più uguale ma minore della pressione anteriore. La caratteristica del correttore è rappresentata in figura 1.4.

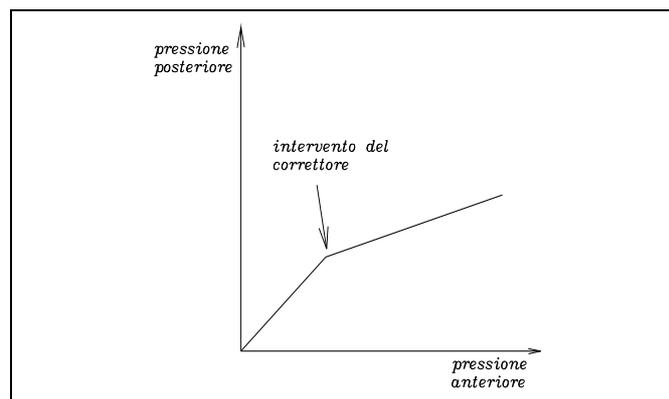
Tali dispositivi vengono utilizzati, in quanto permettono di aumentare l'efficienza dell'impianto frenante in un più ampio range di condizioni di aderenza e di carico. L'efficienza di frenatura può essere definita come il rapporto tra la decelerazione massima che si ottiene con quel determinato proporzionamento di impianto frenante senza bloccaggio delle ruote, e la decelerazione massima che le condizioni di aderenza e di carico potrebbero fornire. Quest'ultima è indipendente dalle condizioni di carico, ma dipende solo dalle condizioni di aderenza ed è pari a:

$$|a_{max}| = \mu g \quad (1.1)$$

dove  $\mu$  è il coefficiente di aderenza tra ruote ed asfalto e  $g$  l'accelerazione di gravità. Risulta che l'efficienza di frenatura è una funzione delle condizioni di aderenza e delle condizioni di carico. Senza l'uso di tali dispositivi si avrebbe una efficienza unitaria solo in una determinata condizione di carico e di aderenza e calerebbe rapidamente man mano che ci si allontanerebbe da questa condizione. Utilizzando correttori e limitatori, invece, si ha un innalzamento dell'efficienza in un più ampio range di condizioni stradali e di carico, pur rimanendo inferiore all'unità.



**Figura 1.3:** Caratteristica del limitatore



**Figura 1.4:** Caratteristica del correttore

Naturalmente, se si utilizzano dispositivi antibloccaggio, l'uso di correttori di frenata diventa meno rilevante, in quanto i primi, se sono ben progettati, dovrebbero garantire una frenatura quasi ottimale in ogni condizione di carico e di fondo stradale (in teoria una efficienza unitaria in qualunque situazione).

Concludiamo, dando un accenno ai diversi tipi di servofreni utilizzati: esistono servofreni a depressione e servofreni idraulici. I primi sfruttano come forza aggiuntiva a quella muscolare, quella fornita dalla depressione esistente nel collettore di aspirazione. I secondi, invece, sfruttano la pressione fornita da una pompa idraulica ad ingranaggi azionata dal motore. Infine, si può dire che la disposizione pedale-servofreno-pompa non è l'unica possibile: infatti vi sono casi in cui il servofreno è a valle della pompa di comando, ora azionata direttamente dal guidatore, ed il servofreno è interposto tra uscita della pompa e cilindretti attuatori. In questo caso il servofreno non agisce come moltiplicatore di sforzo meccanico, ma come moltiplicatore di pressione idraulica.

## 1.2 Elementi frenanti

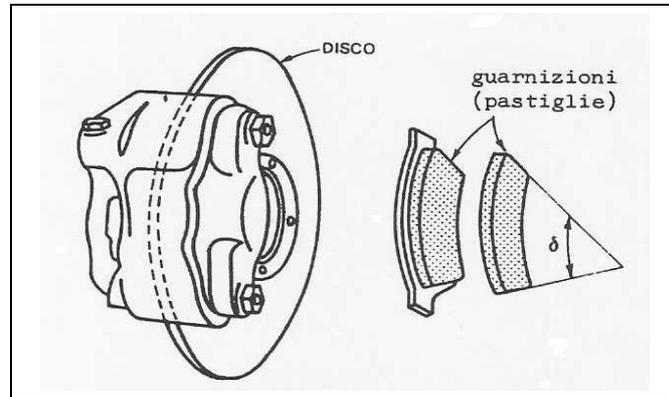
### 1.2.1 Freni a disco

Il freno a disco è, per definizione, un freno per il quale la superficie di strisciamento è piana e perpendicolare all'asse di rotazione del disco (figura 1.5).

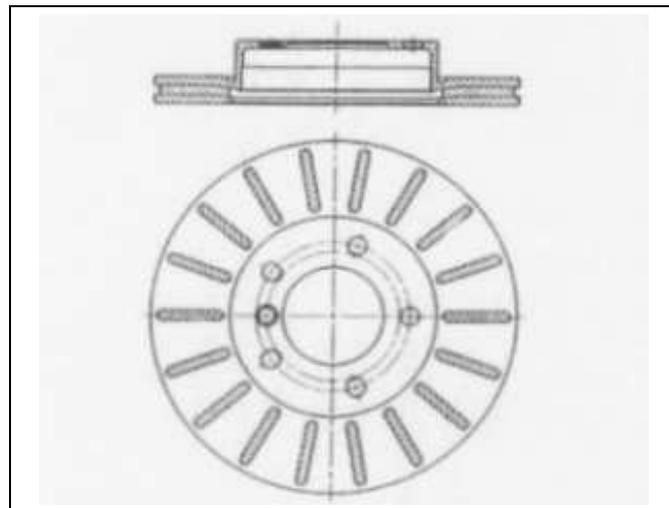
Nei freni a disco i ceppi, portati da apposite pinze, e sostenenti a loro volta le guarnizioni (pastiglie), sono premuti contro le facce di uno o più dischi montati solidalmente all'albero che deve essere frenato.

I dischi comunemente utilizzati hanno forma di cilindri di modesta larghezza, e almeno nella parte attiva le facce opposte del disco portano le piste di strisciamento. Si ricordano i dischi autoventilati che non sono altro che un doppio disco formato da due cartelle separate da ponti metallici detti pioli che ne assicurano la coesione pur lasciando passare l'aria (figura 1.6). Questo aumento delle superfici di contatto fa sì che il calore scambiato per

convezione sia circa il doppio rispetto a quello scambiato da dischi pieni e ciò permette un più energico raffreddamento.



**Figura 1.5:** Freno a disco

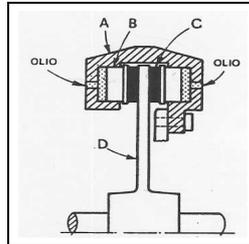


**Figura 1.6:** Disco autoventilato

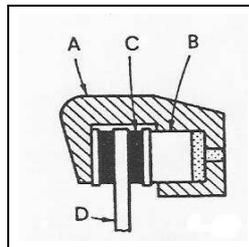
Nel settore automobilistico vengono universalmente utilizzati i freni monodisco ed i ceppi parziali, che ricoprono una porzione angolare assai ridotta del disco.

Per i freni monodisco sono possibili diverse soluzioni costruttive ricondu-

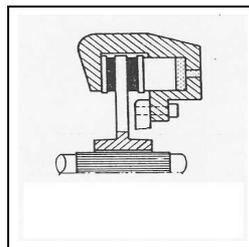
cibili ai seguenti schemi: a pinza e disco fissi (fig. 1.7), a pinza mobile e disco fissi (fig. 1.8), a disco mobile e pinza fissa (fig. 1.9).



**Figura 1.7:** Freno con pinza e disco fissi



**Figura 1.8:** Freno con pinza mobile e disco fisso



**Figura 1.9:** Freno con pinza fissa e disco mobile

Nella prima configurazione la pinza A che abbraccia il disco D è solidale al telaio del veicolo e porta, dalle parti opposte del disco, dei cilindri idraulici (almeno uno per parte) nei quali si muovono i pistoni B. I pistoncini portano delle guarnizioni C di varia forma (dette “pastiglie”) che la pressione idraulica del fluido di comando spinge contro il disco. Nella seconda

configurazione abbiamo un solo pistone di lavoro e la pinza, che è flottante secondo una direzione parallela all'asse del disco, si muove per reazione: questo fatto permette di ridurre l'ingombro assiale del freno ed una usura più uniforme della pastiglia grazie al fatto che il grado di libertà in più le consente un miglior adattamento al disco. Quest'ultima soluzione è quella più utilizzata nei freni automobilistici, grazie ai vantaggi che fornisce. Infine abbiamo l'ultima configurazione in cui ad essere flottante è il disco: questo fatto se da una parte comporta una riduzione degli ingombri assiali come nel caso precedente, d'altra parte comporta lo svantaggio che l'accoppiamento scanalato con cui deve essere calettato il disco all'albero è assai critico, in quanto deve essere lavorato con elevata precisione per evitare problemi d'impuntamento del disco durante il suo movimento assiale. Questo fatto fa sì che quest'ultima soluzione sia poco impiegata nel settore automobilistico.

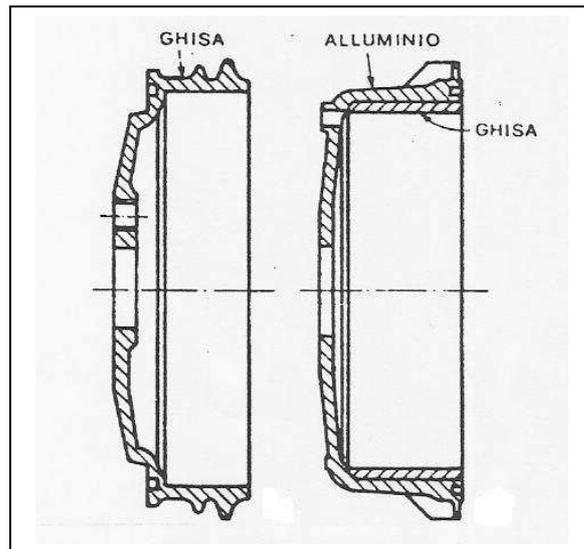
### 1.2.2 Freni a tamburo

Nelle normali costruzioni di autoveicoli leggeri sono ancora impiegati freni a tamburo, costituiti da un tamburo solidale alla ruota, costruito, a seconda dei casi in alluminio o in ghisa, o con fascia d'attrito in ghisa circondata o da un anello calettato in lega d'alluminio, ovvero da un anello d'acciaio, per veicoli molto veloci (figura 1.10). Contro la superficie di questo tamburo vengono spinte, per effetto delle forze esercitate dai cilindretti idraulici, le ganasce, ordinariamente in numero di due, realizzate in lega leggera o in lamiera tranciata e saldata, rivestite sulla superficie affacciata al tamburo da guarnizioni in materiale di attrito.

Per evitare che la ganascia sia trascinata in rotazione dal tamburo, durante la frenata, essa deve essere vincolata opportunamente. Con riferimento alle modalità di vincolo e di comando delle ganasce, i freni a tamburo possono essere così classificati:

1. Freno Simplex a cerniere fisse (fig. 1.12).
2. Freno Simplex a ganasce flottanti.

3. Freno Duplex (fig. 1.13).
4. Freno con due ganasce, una delle quali comandata dalla reazione dell'altra (fig. 1.14).



**Figura 1.10:** Due diverse realizzazioni di tamburi

Prima di descrivere ogni singola tipologia di freno a tamburo, è bene dare due definizioni di grandezze caratteristiche dei freni a tamburo, ma relative anche alle altre tipologie di freni: il Brake Factor (o efficacia) e la sensibilità.

Il Brake Factor per un freno a tamburo è definito come il rapporto tra il momento generato dal freno (in determinate condizioni di attrito) e il prodotto tra il raggio interno del tamburo e la differenza tra la forza idraulica di comando e la forza idraulica di accostamento. Esso è una funzione del coefficiente di attrito per una fissata geometria. In formule matematiche:

$$BF = \frac{M_f}{(p - p_{acc})A_{cil}R_i} \quad (1.2)$$

dove  $M_f$  è il momento frenante totale generato dal freno,  $p$  la pressione di comando,  $p_{acc}$  la pressione di accostamento, che è la pressione necessaria ad accostare le ganasce al tamburo,  $A_{cil}$  l'area del cilindretto idraulico,  $R_i$  il

raggio interno del tamburo. Se nella formula precedente si inserisce il momento frenante generato da una singola ganaschia, anziché il momento totale, si ottiene il  $BF$  relativo ad una singola ganaschia: in questo modo il  $BF$  totale del freno risulta essere la somma dei  $BF$  relativi alle singole ganasche. Se aumentando il coefficiente d'attrito il  $BF$  di una ganaschia cresce molto rapidamente, quella ganaschia si definisce autoserrante o avvolgente (fisicamente questo equivale a dire che le forze tangenziali di attrito che il tamburo esercita sulla ganaschia, tendono a serrarla ulteriormente sul tamburo, realizzando una autoamplificazione dello sforzo). In tal caso, se in qualche situazione il coefficiente di attrito assume valori elevati, allora la ganaschia tende a serrarsi sul tamburo anche in assenza di forza di comando, ed il freno è detto autobloccante (self-locking).

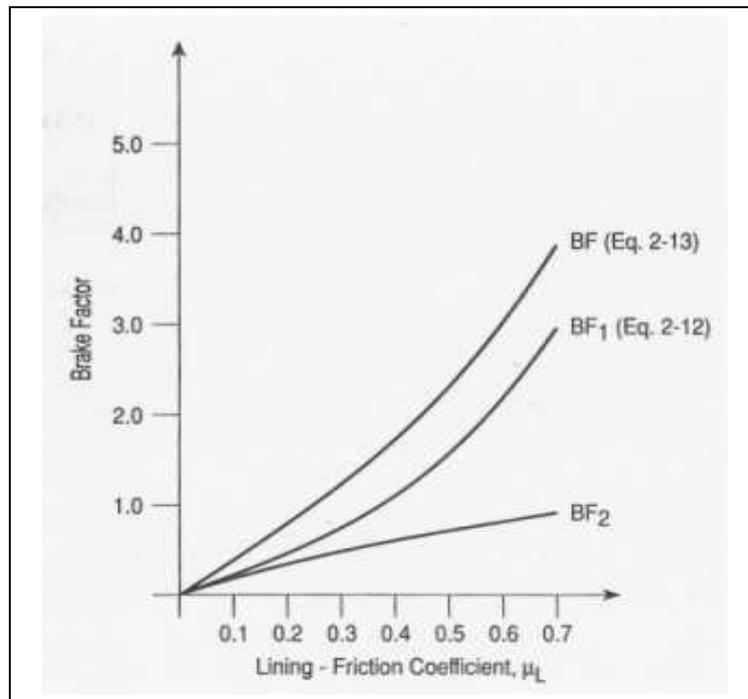
La sensitività  $s$  del freno è la derivata del  $BF$  fatta rispetto al coefficiente di attrito  $f$ :

$$s = \frac{d(BF)}{df} \quad (1.3)$$

Essa è indice di quanto varia il  $BF$  con il coefficiente di attrito. Un buon freno dovrebbe avere una bassa sensitività, in maniera tale che la sua efficacia non vari considerevolmente con piccole variazioni del coefficiente di attrito, le quali sono inevitabili a causa della dipendenza di quest'ultimo dalla temperatura, oltre che dalla pressione di contatto e dalla velocità di strisciamento.

Ritorniamo ora alle tipologie di freni a tamburo. Nel freno Simplex a cerniere fisse (fig. 1.12) le due ganasche 6 e 7 sono disposte simmetricamente rispetto ad un piano verticale, articolate in basso su perni fissi 8 e comandate superiormente da un cilindro idraulico doppio 5; le frecce 2 e 3 indicano il verso del movimento tendenziale causato dalle forze di attrito, ancor meglio rappresentato dalle frecce 4, che indicano la direzione dei corrispondenti momenti rispetto alle cerniere agenti sulle ganasche: risulta chiaramente che la ganaschia 6 per effetto delle forze di attrito scambiate col tamburo tende ulteriormente a serrarsi su esso (vi è cioè autoamplificazione dello sforzo frenante), mentre la ganaschia 7 tende a staccarsi ed ha perciò azione meno

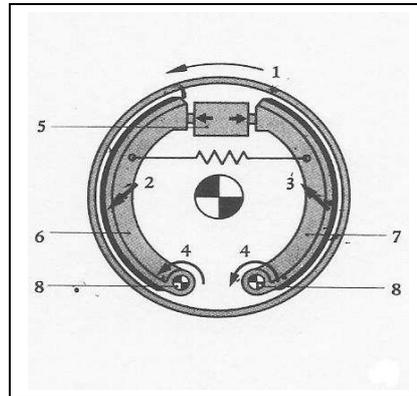
efficace. La ganaschia 6 è quindi una ganaschia avvolgente o autoserrante, mentre la ganaschia 7 è detta svolgente. In figura 1.11 è rappresentato il tipico andamento dei Brake Factors relativi ad un freno di questo tipo:  $BF_1$  è quello relativo alla ganaschia avvolgente,  $BF_2$  è quello relativo alla ganaschia svolgente,  $BF$  quello totale relativo al freno e pari alla somma dei due precedenti.



**Figura 1.11:** Brake Factors in funzione del coefficiente di attrito

Come è chiaramente intuibile, al  $BF$  totale contribuisce per la maggior parte la ganaschia avvolgente e risulta sempre che il  $BF_1$  è maggiore del  $BF_2$ , così come i momenti generati dalle rispettive ganasce. Le considerazioni fatte valgono con il senso di rotazione indicato dalla freccia 1, perché se esso è opposto, allora la ganaschia 6 diventa svolgente e la ganaschia 7 avvolgente. Questa tipologia di freni ha il vantaggio di avere una bassa sensibilità rispetto agli altri tipi di freni e quindi una coppia frenante stabile.

Il freno Simplex a ganasce flottanti è descritto in maniera più approfondi-

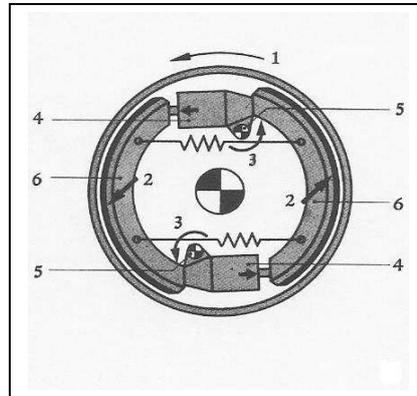


**Figura 1.12:** Freno Simplex a cerniere fisse

ta nel paragrafo successivo, in quanto esso sarà l'oggetto della modellazione matematica, perché si è verificato che è il tipo di freno più utilizzato dalle vetture che adottano freni a tamburo nell'assale posteriore. Per ora diciamo che differisce dal precedente tipo soltanto per la sostituzione delle cerniere fisse con l'appoggio delle ganasce contro superfici di riscontro piane, le quali possono essere verticali od inclinate: potendosi così le ganasce meglio adattare al tamburo (grazie al grado di libertà aggiuntivo fornito dall'appoggio) si ha una usura più regolare delle guarnizioni di attrito; dal punto di vista dell'autoamplificazione degli sforzi frenanti, non differisce in nulla dal tipo appena descritto.

Nel freno Duplex le condizione di vincolo e comando delle ganasce sono antisimmetriche, in modo che su ambedue l'effetto delle forze tangenziali d'attrito sia di autoserraggio quando il verso di rotazione del tamburo è quello indicato in figura 1.13, perché altrimenti le ganasce sarebbero tutte e due svolgenti.

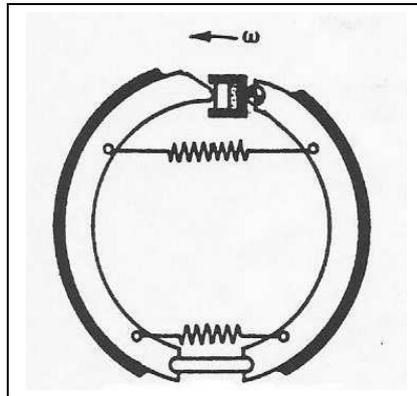
Infine abbiamo l'ultimo tipo, che è quello a due ganasce avvolgenti, di cui una comandata dalla reazione dell'altra e rappresentato in figura 1.14. In questo tipo di freno la prima ganascia (quella di sinistra nella figura), e detta "principale", riceve l'azione di comando e si appoggia, per mezzo di una bielletta all'estremità inferiore dell'altra ganascia, detta "secondaria".



**Figura 1.13:** Freno Duplex

La forza di comando agisce su una ganascia ed è trasmessa, attraverso la bielletta, alla ganascia “secondaria”. Per effetto della pressione idraulica la ganascia principale è spinta contro il tamburo e la forza di attrito esercita su di essa un’azione autofrenante. Grazie alla presenza della bielletta (che permette anche uno spostamento verticale), si trasmette una pressione sull’altra ganascia, la quale si trova nelle stesse condizioni della “principale”, essendo anch’essa avvolgente. Questo tipo di freno presenta una elevata efficacia poiché entrambe le ganasce sono avvolgenti; tuttavia, presenta l’inconveniente, che se cambia il verso di rotazione del tamburo, si trasforma in un freno a due ceppi svolgenti con una efficacia molto bassa; inoltre, presenta una elevata sensibilità alla variazione del coefficiente di attrito, e quindi è poco regolare. Ad esempio un aumento del 15% del fattore d’attrito, a causa di sporcizia o della variazione della temperatura, porta ad un aumento nella coppia frenante del 40-50%. Questo può voler dire un prematuro bloccaggio dell’assale posteriore e quindi perdita di stabilità durante la frenata.

Esistono, infine, delle varianti delle tipologie di freni che si sono appena illustrate e che usano leve ad angolo e puntoni. Tali varianti permettono di migliorare qualche aspetto del comportamento di un determinato tipo di freno, ma la maggiore complicazione costruttiva, e quindi il maggior costo, non ne giustificano l’uso per le applicazioni automobilistiche.



**Figura 1.14:** Freno a due ganasce avvolgenti, di cui una comandata dalla reazione dell'altra

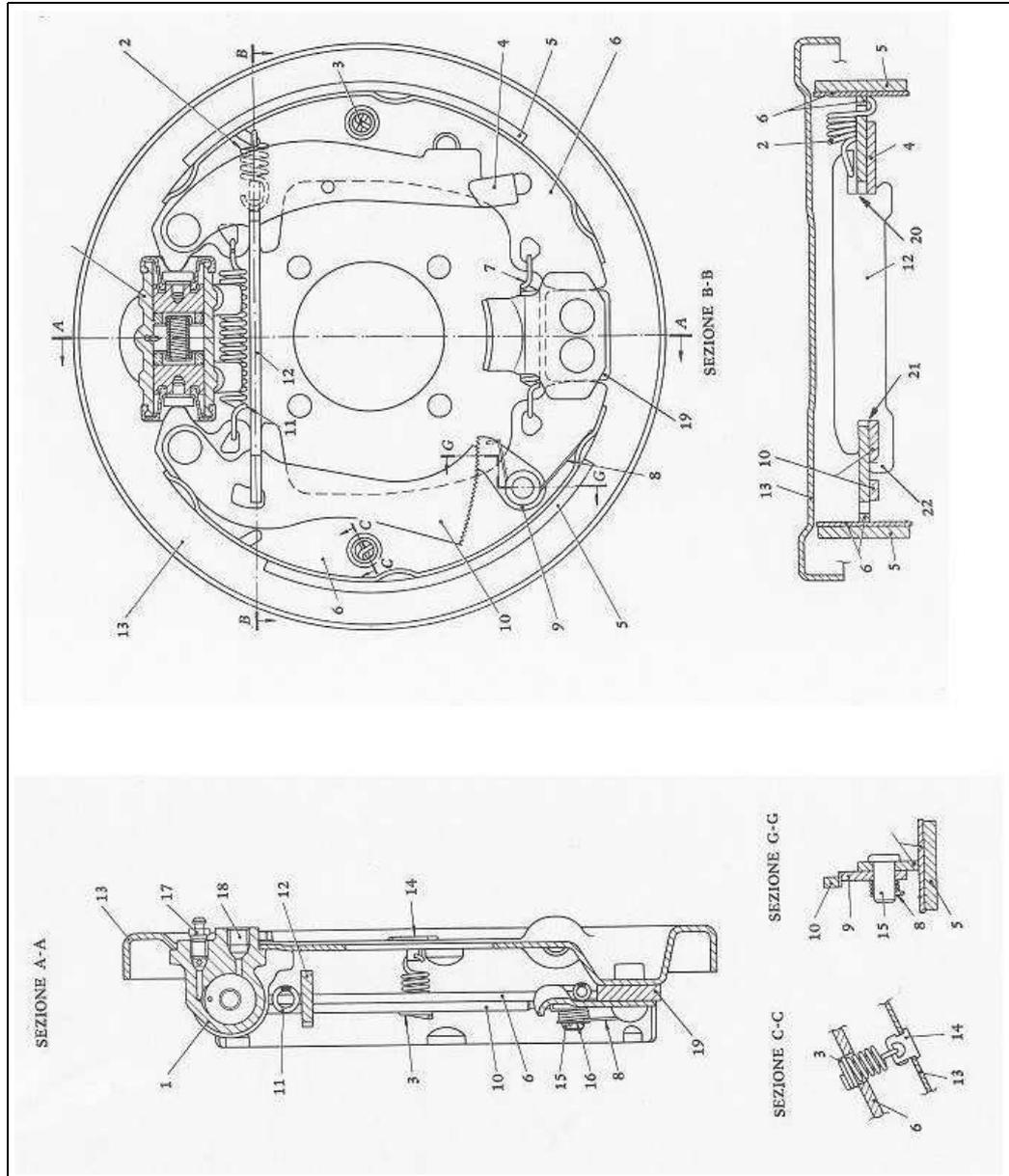
### Il freno a tamburo Simplex a ganasce flottanti

Come abbiamo già anticipato precedentemente, tale tipologia è quella che viene montata più frequentemente dalle vetture che adottano freni a tamburo, e perciò l'abbiamo scelta come obiettivo della modellazione matematica svolta nei capitoli successivi.

Nella figura 1.15 sono riportate la vista e le sezioni più importanti per illustrare il gruppo costituito dalle ganasce e dai sistemi di comando e di registrazioni delle stesse di un freno Simplex a ganasce flottanti.

A differenza di quanto avveniva in costruzioni più antiche e tradizionali le ganasce 6 non sono incernierate mediante perni fissi sulla piastra di sostegno 13, ma si appoggiano con la loro estremità inferiore su un blocchetto di riscontro 19, contro il quale premono per effetto della molla 7. Il piano di appoggio può essere verticale oppure inclinato di un certo angolo, quindi la modellazione dovrà prevedere tale eventualità. Le ganasce sono normalmente mantenute nella posizione di riposo dal tiro della molla 11 e vengono costrette a ruotare, intorno alla generatrice di contatto con il blocchetto 19, eventualmente traslando leggermente, in modo da meglio adattarsi nell'accoppiamento al tamburo, per effetto delle forze esercitate sulle estremità superiori delle ganasce dai pistoncini contenuti all'interno del cilindretto idraulico 1, e sono

inoltre sostenute dalle molle trasversali 3, come illustrato nella sezione C-C.



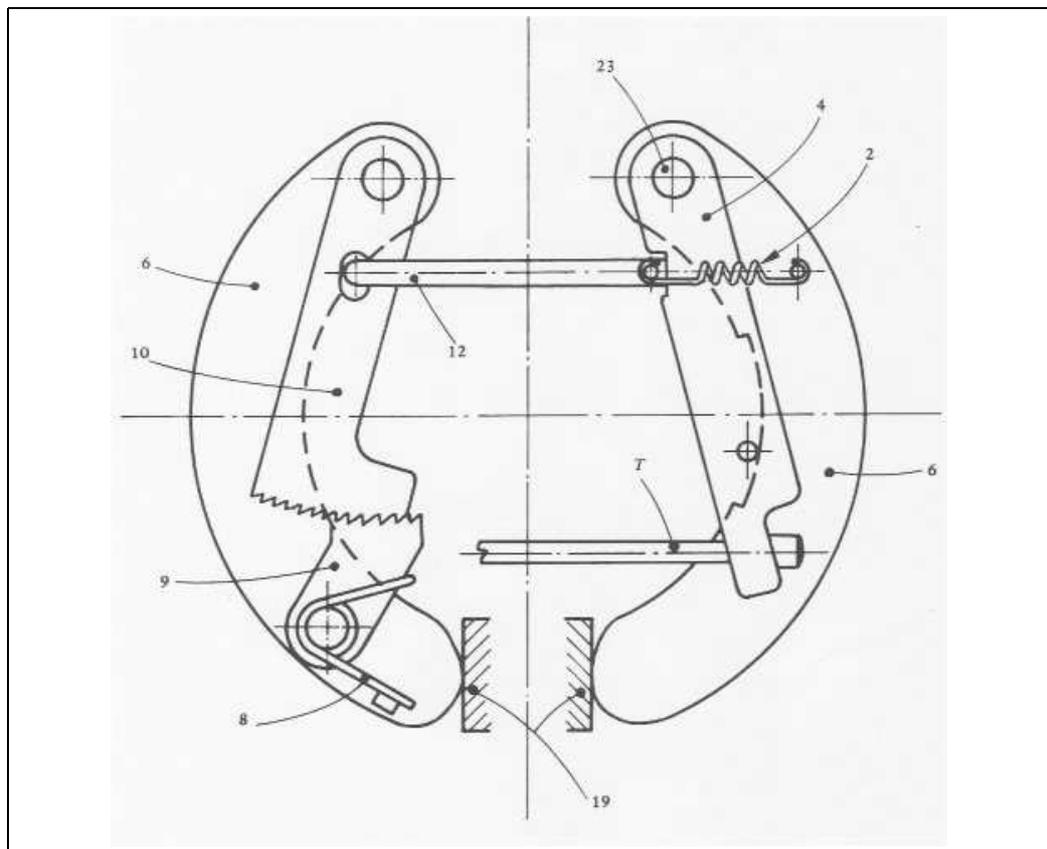
**Figura 1.15:** Freno Simplex a ganasce flottanti

La posizione di riposo, imposta dalla molla 11 è stabilita dal traversino 12 provvisto di superfici di battuta (sezione B-B) destinate l'una (20) ad andare in riscontro con la costola della ganascia di destra, l'altra (21) con

il bordo della leva 10, collegata alla ganaschia di sinistra. Questa leva è uno degli elementi essenziali di un dispositivo di ripresa automatica dei giochi tra ganasce e tamburo. Essa è vincolata superiormente mediante cerniera alla ganaschia sinistra ed ha un bordo inferiore provvisto di dentatura asimmetrica, impegnata con una corrispondente dentatura di un nottolino oscillante 9, mantenuto in ingranamento dalla spinta di una molla 8, portata anch'essa dalla ganaschia 6. Il traversino 12 presenta anche un dente 22 (sezione B-B) inserito in una fessura praticata nella leva 10, dente che insieme alla superficie di battuta 21 stabilisce, salvo un piccolo gioco, un accoppiamento bilaterale tra traversino e leva 10, mentre il collegamento del traversino stesso con la ganaschia di destra può avvenire o tramite la superficie di battuta 20 ovvero, elasticamente, tramite la molla 2. Infine sulla ganaschia destra è incernierata una leva 4 sulla cui estremità inferiore può essere applicata, come illustrato nello schema di figura 1.16, una forza circa orizzontale mediante il comando con cavo flessibile T, che è collegato alla leva di comando del freno di stazionamento. Tale figura schematica, consente di illustrare con maggiore semplicità il principio di funzionamento del dispositivo automatico di ripresa del gioco, nonchè quello del comando del freno di stazionamento.

Se il gioco tra ganasce e tamburo è sui valori normali, moto relativo tra dente 22 e fessura nella leva 10 ed allungamento della molla 2 consentono l'accostamento di ambedue le ganasce al tamburo, senza che la leva 10 abbia dovuto ruotare rispetto alla ganaschia sinistra; se invece il gioco è eccessivo, per ottenere l'accostamento delle ganasce al tamburo si impone alla molla 2 un maggiore allungamento che provoca un tiro sul traversino 12 sufficiente ad imporre una rotazione relativa della leva 10 rispetto alla ganaschia sinistra 6 in senso antiorario, vincendo la resistenza del nottolino 9 e traslando così di uno o più passi a seconda dell'eccesso di gioco rispetto al valore normale, l'accoppiamento ad arpionismo delle due dentature, e di conseguenza mutando la posizione della leva 10 rispetto alla 6; al termine della frenata, la molla 11 richiama le ganasce 6 e viene ripristinato il contatto tra le battute 20 e la ganaschia destra, tra battuta 21 e leva 10. Poichè tale configurazione viene

ripresa avendo però imposto nella corsa di frenata una rotazione relativa tra ganaschia sinistra e leva 10, rotazione che non si può annullare, per effetto dell'arpionismo (quindi irreversibile), nella corsa di richiamo il movimento delle ganasce che ha provocato tale rotazione, che è appunto la corsa dovuta ai giochi indesiderati, non può essere recuperata, e perciò il gioco ristabilito corrisponde al valore nominale.



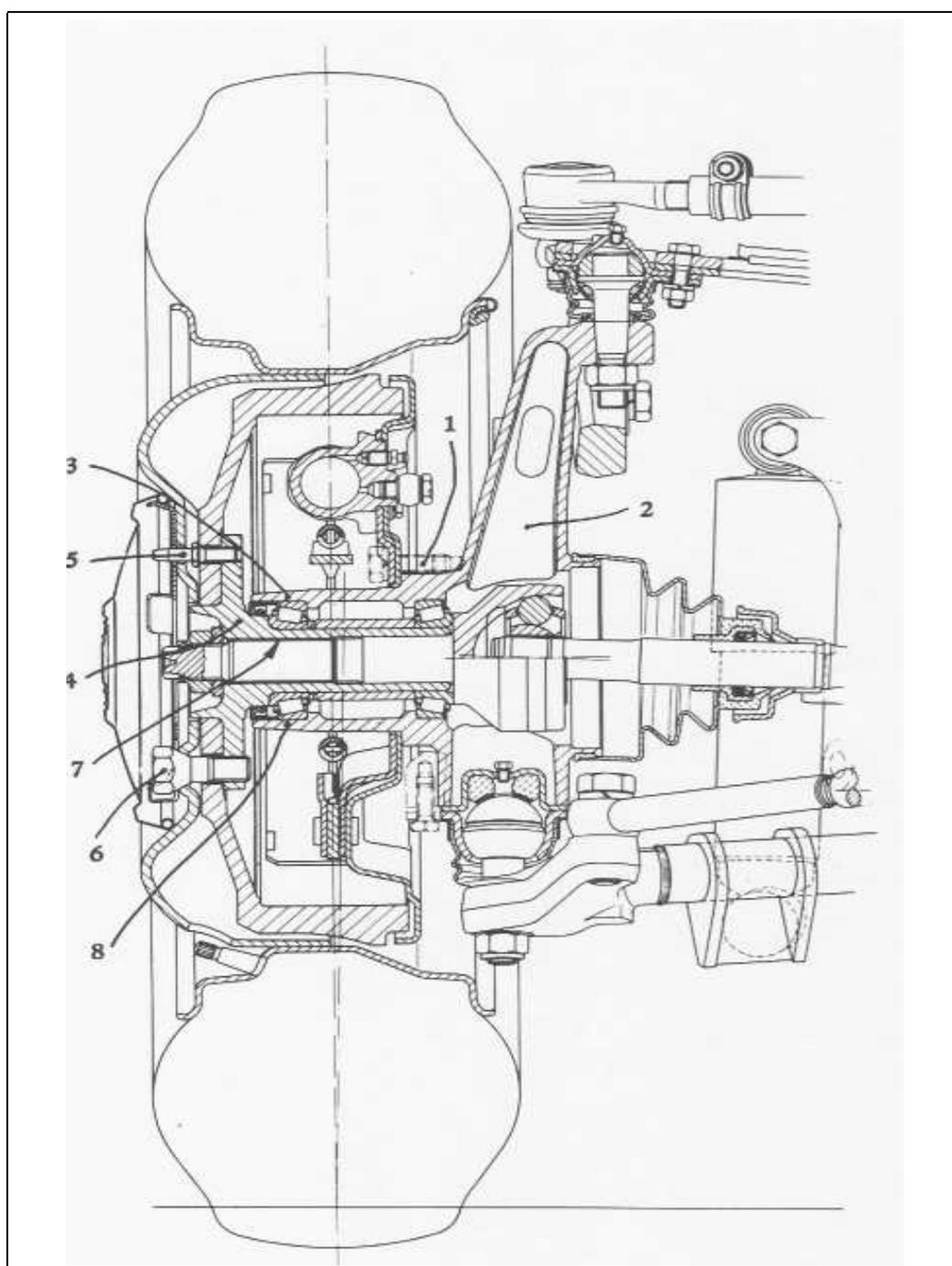
**Figura 1.16:** Schema del freno di fig 1.15

Il principio di funzionamento del freno di stazionamento è il seguente: una forza circa orizzontale applicata alla estremità della leva 4, e diretta verso sinistra provoca sulla leva stessa, rispetto al perno 23 un momento orario che deve essere equilibrato da una reazione di compressione sul traversino 12, che

pertanto agisce sul complesso rigido formato dalla leva 10 e dalla ganaschia sinistra con una forza ancora diretta verso sinistra, che preme quindi questa ganaschia contro il tamburo; la ganaschia destra è invece respinta verso destra dalla reazione scambiata nel perno 23 tra la leva 4 e ganaschia destra.

Il cilindro idraulico è costituito da una corpo esterno, ottenuto per fusione e sagomato, in modo da consentire il vincolo sulla piastra 13 e nella parte centrale presenta inferiormente una sede filettata 18 per l'inserimento del raccordo collegato al tubo flessibile di alimentazione, e superiormente una valvola 17 per lo spurgo dell'aria del circuito, come chiaramente visibile nella sezione A-A. All'interno del cilindro è contenuta una molla ad elica di compressione che agendo su due rosette comprime due guarnizioni anulari appoggiate ai pistoni. L'ermeticità del gruppo è garantita da due cuffie in gomma vincolate ciascuna da un lato sul bordo esterno del cilindro, dall'altro tra stantuffo vero e proprio ed una testa d'appoggio, centrata sullo stantuffo mediante un apposito piolino, e destinata ad accoppiarsi con la corrispondente estremità delle ganasce 6 e 7.

La successiva figura 1.17 mostra l'installazione di un freno a tamburo simile a quello appena descritto sulla ruota anteriore motrice di un'autovettura. Il gruppo è fissato, mediante quattro viti 1, una delle quali è rappresentata in falsa vista nel disegno, sul montante 2 della sospensione, che presenta una appendice tubolare 8 che costituisce la sede per i cuscinetti di supporto della bussola 4. Questa è provvista di una flangia laterale, sede dei prigionieri 5 e delle viti 6 che rispettivamente fissano sulla bussola il tamburo del freno ed il cerchio ruota, ed è vincolato torsionalmente, mediante speciale accoppiamento scanalato 7 all'elemento condotto di un giunto omocinetico Rzeppa.



**Figura 1.17:** Installazione di un freno a tamburo

# Capitolo 2

## Il modello meccanico del freno

*In questo capitolo, dopo una breve esposizione degli obiettivi e delle ipotesi semplificative che sono alla base della costruzione del modello, verranno esposte quali sono le equazioni matematiche che regolano la meccanica del sistema, sia nella sua parte statica, sia nella sua parte dinamica.*

### 2.1 Gli obiettivi del modello

Prima di esporre le ipotesi che sono state utilizzate per la costruzione del modello di freno a tamburo, si è ritenuto opportuno specificare quali siano gli obiettivi del modello, sui quali si basa l'identificazione delle ipotesi stesse.

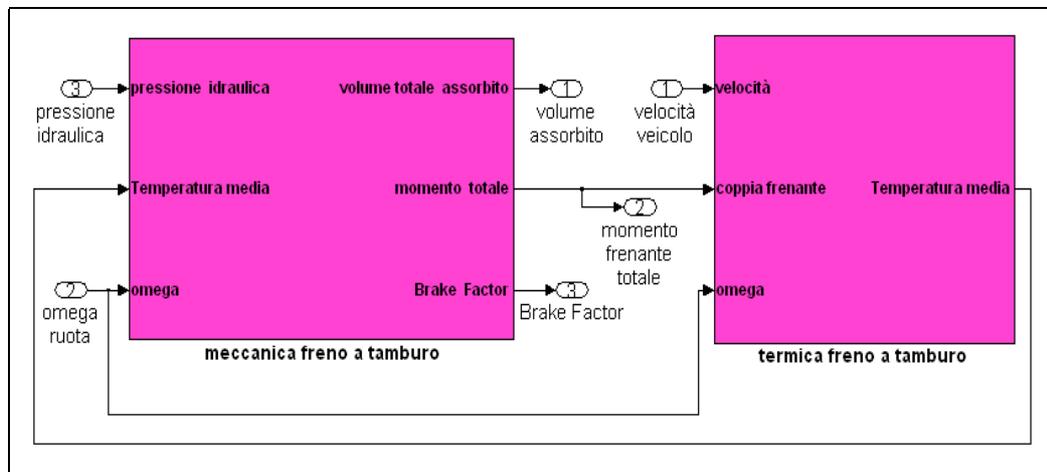
Tre sono i principali obiettivi :

1. Conoscere il momento frenante sviluppato dal freno a tamburo, in funzione della pressione idraulica esistente all'interno del cilindretto, della temperatura e della velocità angolare della ruota.
2. Conoscere il volume di fluido assorbito, in funzione delle condizioni di funzionamento, perché esso va ad influenzare la corsa pedale.
3. Identificare l'ordine di grandezza del tempo di ritardo, ossia di quanto tempo intercorre tra l'istante in cui comincia a salire la pressione nel

cilindretto e l'istante in cui comincia a svilupparsi il momento frenante sulla ruota (tale ritardo è dovuto essenzialmente al gioco iniziale esistente tra tamburo e guarnizione e che deve essere recuperato).

Mentre per i primi due obiettivi sarebbe sufficiente solo un'analisi statica, per il terzo obiettivo è necessario tener conto della dinamica: in particolare si è tenuto conto della dinamica della ganaschia solo fino al contatto con il tamburo, mentre dopo il contatto si è semplicemente svolta un'analisi statica (il motivo di questa suddivisione così netta sarà esposto in seguito).

Si vuole puntualizzare che l'intero modello di freno a tamburo è stato suddiviso in due grandi blocchi: un blocco che descrive il funzionamento meccanico del freno, ed un blocco che invece descrive il funzionamento termico del freno stesso; inoltre, i due blocchi interagiscono fra di loro tramite delle informazioni che si scambiano l'un l'altro. La figura 2.1 chiarisce il concetto appena esposto:



**Figura 2.1:** I due blocchi del modello matematico

Come si può vedere dalla figura precedente, il blocco meccanico riceve come segnali di ingresso l'andamento della pressione idraulica, l'andamento della velocità angolare della ruota e quello della temperatura del tamburo. Que-

st'ultima informazione proviene dal blocco termico ed insieme alla velocità angolare della ruota è necessaria per la determinazione del coefficiente di attrito tra tamburo e guarnizione (il quale dipende anche dalla pressione di contatto). Il blocco meccanico fornisce il volume di fluido assorbito dal freno e il momento totale sviluppato, il quale è anche uno degli input del blocco termico. Esso infatti, insieme alla velocità angolare della ruota, permette di determinare la potenza termica dissipata nel freno. Inoltre il blocco termico ha un terzo parametro di input, che è la velocità del veicolo, e serve per tener conto che il coefficiente di convezione è funzione di essa. Si può dunque concludere che l'intero modello di freno a tamburo può essere visto come una scatola chiusa che riceve come segnali dall'esterno la pressione idraulica, la velocità del veicolo e la velocità angolare della ruota, mentre restituisce il momento frenante sviluppato, il volume di fluido assorbito ed eventualmente lo si desidera la temperatura raggiunta. I segnali di input possono essere forniti in due modi: possono essere impostati in fase di progettazione per verificare il comportamento termodinamico di una determinata scelta di geometria e di materiali del freno, ovvero si può integrare il modello all'interno di un simulatore completo di veicolo, in maniera tale da avere delle risposte più vicine alla realtà, in quanto in tal caso i segnali di ingresso tengono conto della dinamica dell'intero veicolo (possono ad esempio essere simulate delle manovre di frenata vere e proprie).

Prima di esporre le ipotesi semplificative utilizzate per la costruzione del modello, riportiamo nella figura 2.2 lo schema di un freno a tamburo simplex a ganasce flottanti (a cui faremo riferimento, come specificato nel paragrafo 1.2.2 a pagina 13), insieme alle dimensioni importanti ai fini dello studio del comportamento meccanico del freno. Nella figura è rappresentata solo una ganasca, essendo l'altra simmetrica rispetto all'asse  $x$ , mentre il tamburo (riportato con tratto blu), può ruotare in senso orario od antiorario. In alto a destra è riportato in blu il sistema di riferimento fisso.

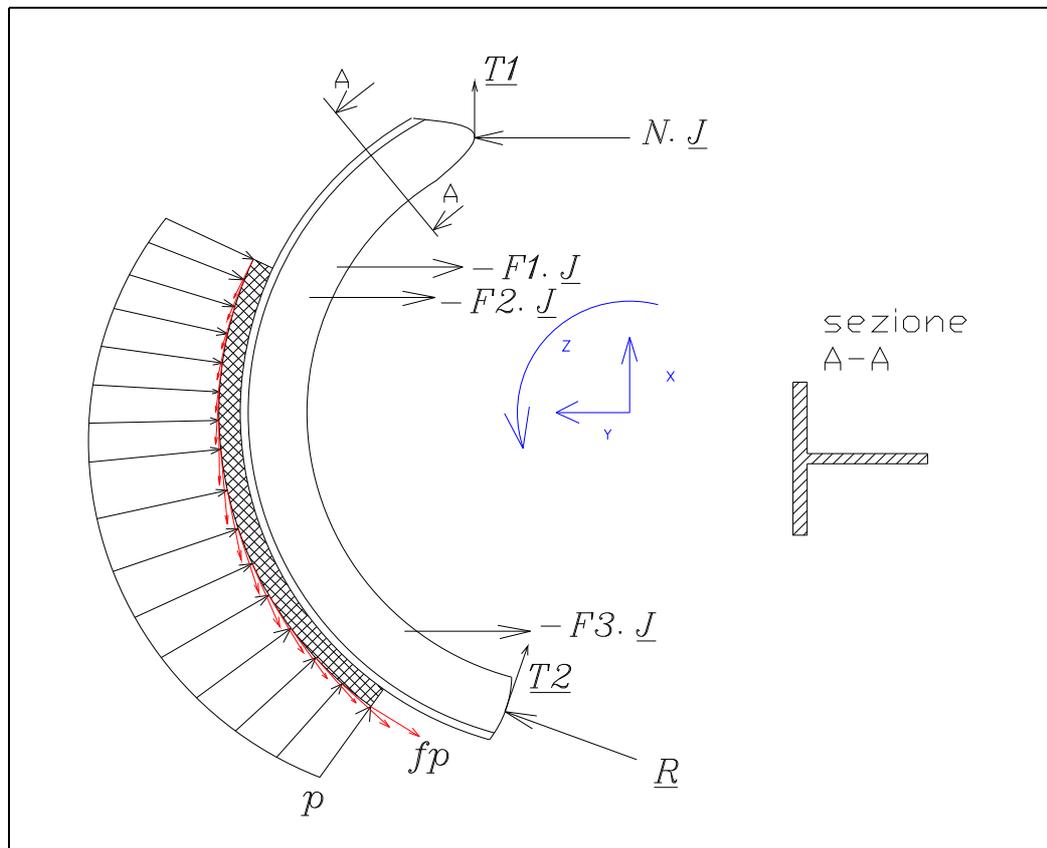


### Appoggi della ganascia sempre a contatto con pistoncino e bloccetto inferiore

Questa ipotesi potrà essere verificata a posteriori, andando a guardare le reazioni degli appoggi della ganascia e verificando che siano sempre positive (secondo i versi positivi rappresentati in figura 2.3).

### Ganascia rigida

Tale ipotesi è giustificata sia dal fatto che la sezione della ganascia è a forma di T, sia da come sono distribuiti i carichi. Infatti se si osserva la figura 2.3



**Figura 2.3:** Diagramma di corpo libero della ganascia in caso di rotazione antioraria del tamburo

sulla ganascia agiscono (in condizioni statiche e quindi in assenza di forza

d'inerzia) le pressioni di contatto tra tamburo e guarnizione (sia normali che tangenziali e distribuite sull'intera guarnizione d'attrito), le reazioni negli appoggi (che sono perpendicolari a questi se si trascura l'attrito nel contatto acciaio-acciaio), le forze elastiche dovute alle molle di richiamo, e la forza peso della ganascia (che è trascurabile). C'è da specificare che le pressioni di contatto tra tamburo e guarnizione sono diverse da zero solo dopo che viene recuperato il gioco tra tamburo e guarnizione.

Come si può intuire analizzando la figura 2.3, la sezione generica sarà sollecitata soprattutto a momento flettente, ma, data la sua forma, la deformazione potrà essere trascurata. Se c'è deformazione, questa di certo non andrà ad influenzare gli assorbimenti, ma influenzerà un pò il modo in cui si distribuisce la pressione di contatto tra guarnizione e tamburo (comunque di questo non se ne terrà conto perché sarebbe una complicazione eccessiva per il modello).

### **Piccoli spostamenti**

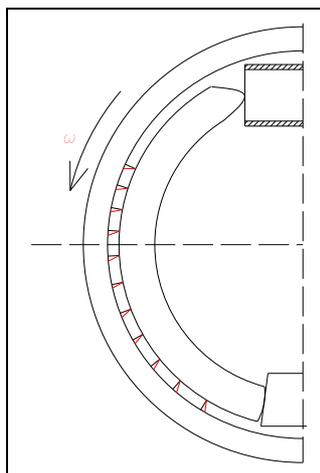
Questa ipotesi permette di effettuare alcune linearizzazioni nei paragrafi successivi.

### **Guarnizione deformabile**

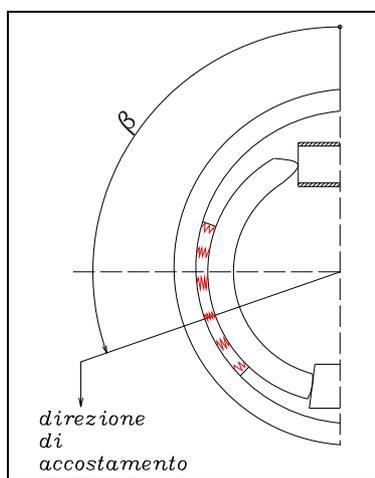
Questa ipotesi è sostenuta dal fatto che dalla letteratura si sono rilevati dei moduli di Young della guarnizione d'attrito variabili da  $165 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  a  $1200 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ , molto inferiori rispetto a quello dell'acciaio o della ghisa, che invece è pari a  $210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ .

Si suppone che la guarnizione sia deformabile a compressione (a causa delle tensioni normali) e a taglio (a causa delle tensioni tangenziali dovute all'attrito). Però, mentre le tensioni normali procurano schiacciamento nella direzione dello spessore della guarnizione, e ciò va ad influire sulla configurazione finale di equilibrio ed in sostanza sugli assorbimenti, le tensioni tangenziali provocano una deformazione a taglio della guarnizione che non va ad influire sulla configurazione finale di equilibrio e quindi sugli assorbimenti

idraulici. Di conseguenza, nel calcolo degli assorbimenti (fatto nel paragrafo 2.5.4) verrà preso in considerazione solo lo schiacciamento nella direzione dello spessore. Le figure seguenti chiariscono meglio il concetto.



**Figura 2.4:** L'attrito porta ad una deformazione della guarnizione (schematizzata con travi a mensola) che non influisce sugli assorbimenti



**Figura 2.5:** Lo schiacciamento della guarnizione (schematizzata con molle radiali) influenza gli assorbimenti idraulici

Se si ipotizza che la pressione locale sia legata allo schiacciamento della guarnizione da una relazione di linearità, e si osserva la figura 2.5, si conclude (nell'ipotesi di piccoli spostamenti) che la pressione debba avere una distribuzione di questo tipo:

$$p = p_{max} \cos(\beta - \alpha) \quad (2.1)$$

dove  $\alpha$  rappresenta l'angolo generico e la  $p_{max}$  viene raggiunta in corrispondenza dell'angolo beta, come rappresentato in figura 2.2. Si aggiunge che la pressione è supposta invariante lungo l'asse  $z$ .

La distribuzione di pressione ipotizzata è del tutto analoga a quella prevista dalla teoria di Reye [5, pag.62], la quale prevede la (2.1) basandosi sull'ipotesi che il volume di guarnizione asportato per usura è proporzionale al lavoro delle forze d'attrito. Quindi i due approcci (quello che si basa sulla deformabilità della guarnizione in senso radiale e quello che si basa sull'ipotesi dei Reye) portano esattamente agli stessi risultati. Tuttavia il primo permetterà di tener conto nel paragrafo 2.5.4 dell'influenza che ha la deformazione della guarnizione sugli assorbimenti idraulici. Proprio in analogia alla teoria di Reye, la direzione secondo la quale si raggiunge la pressione massima, viene denominata "direzione di accostamento".

### **Pistone e tamburo rigidi**

Per giustificare tale ipotesi è stata effettuata una stima della deformazione del pistone e del tamburo in un freno di diametro interno 181 mm, quando la pressione idraulica  $p_i$  è pari a 150 bar. Successivamente si è controllato se tale deformazione potesse avere qualche influenza sugli assorbimenti idraulici.

Nell'ipotesi che l'andamento della pressione di contatto tra tamburo e guarnizione sia dato dalla (2.1), si ottiene un valore della pressione massima pari a 34.8 bar (per calcolare la  $p_{max}$  sono state utilizzate le formule (2.21) e (2.23)).

Per stimare la deformazione del tamburo, alla distribuzione di pressione (2.1) viene associata una pressione media da considerare applicata in maniera

uniforme all'intera circonferenza interna del tamburo, come se fosse un tubo sottoposto ad una pressione interna:

$$p_m = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_{max} \cos(\beta - \alpha) R_i d\alpha}{\pi R_i} \quad (2.2)$$

Così, si ottiene  $p_m = 13.35$  bar. A questo punto si può calcolare la variazione di raggio interno del tamburo  $\delta R_i$ :

$$\delta R_i = \frac{\sigma R_i}{E_t} = \frac{p_m R_i^2}{s E_t} = 8 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

dove:

$E_t$  = modulo di Young del tamburo =  $210 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>;

$s$  = spessore del tamburo = 0.0065 m;

$\sigma$  = tensione di trazione circonferenziale del tamburo.

Praticamente la variazione di raggio stimata è trascurabile rispetto allo spostamento del pistone dovuto al recupero gioco ed alla elasticità della ganasca, che è dell'ordine di 2 mm (calcolato con la formula (2.29)).

Per quanto riguarda il pistone, esso sarà sottoposto ad una forza di compressione pari a  $p_i A$ , quindi la sua tensione interna sarà proprio pari a  $\sigma = p_i = 150$  bar. Di conseguenza, l'accorciamento del pistone sarà:

$$\delta l = \frac{p_i l}{E_p} = 0.5 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

dove

$E_p$  = modulo di Young del pistone =  $210 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>;

$l$  = lunghezza del pistone = 0.0065 m;

$A$  = area del cilindretto.

Anche tale deformazione può essere considerata ininfluenza ai fini del calcolo degli assorbimenti, se confrontata ancora una volta con lo spostamento del pistone dovuto al recupero gioco ed alla elasticità della ganasca.

È dunque possibile considerare il tamburo ed il pistone rigidi.

### Smorzamento

Lo smorzamento del sistema (durante la fase “dinamica”, e quindi prima del recupero gioco), è dovuto oltre che agli attriti coulombiani (che non sono stati presi in considerazione), all’attrito viscoso dovuto al fatto che si ha un pistone lubrificato all’interno di un cilindro. Per semplicità si terrà conto solo di quest’ultimo, dando un valore di riferimento al coefficiente di attrito viscoso pari a 200 Ns/m.

Con queste ipotesi si può concludere che la ganaschia possiede due g.d.l.: infatti, la sua posizione è individuata una volta che siano fissati due parametri, ad esempio la posizione in direzione  $y$  del pistoncino e la rotazione della ganaschia rispetto all’asse  $z$ . Tali spostamenti sono degli spostamenti assoluti e misurati a partire dalla configurazione di equilibrio iniziale (relativa a quando la pressione idraulica è nulla). Nel caso in cui l’appoggio inferiore non fosse inclinato ( $\psi = 0$ ), uno spostamento in direzione  $y$  del pistoncino, definisce anche la rotazione della ganaschia rispetto all’asse  $z$ : in tal caso è necessario scegliere un altro parametro al posto della rotazione per definire univocamente la sua posizione, ad esempio lo spostamento  $x_G$  del suo baricentro.

Giunti a questo punto, si tratterebbe di studiare la dinamica di un sistema a due gradi di libertà. Ciò è alquanto complicato da realizzare con precisione a causa della presenza dell’attrito coulombiano (presente negli appoggi), che introduce una notevole non linearità: infatti, se le superfici di contatto sono in movimento relativo, la forza d’attrito (parallela alla tangente nel punto di contatto) è contraria alla velocità di strisciamento relativo e pari al coefficiente di attrito dinamico per la componente normale della reazione, se, invece, le superfici di contatto non sono in movimento relativo, si ha forza di attrito statico. Inoltre, avendo due appoggi, si possono avere varie situazioni: infatti si potrebbero avere degli istanti in cui si ha rotolamento senza strisciamento nell’appoggio inferiore e rotolamento con strisciamento nell’appoggio

superiore, degli istanti in cui la situazione è invertita e degli istanti in cui si ha rotolamento con strisciamento in entrambi gli appoggi. Se si dovesse tener conto di tutto ciò, si avrebbe, oltre alla difficoltà di implementazione del modello matematico su Matlab-Simulink, un notevole incremento dei tempi di calcolo a causa delle non linearità. Si conclude che sono necessarie delle semplificazioni e delle ipotesi di lavoro, tenendo presente che l'obiettivo non è tanto quello di conoscere con esattezza la dinamica della ganascia, quanto quello di stimare il tempo di ritardo. Questo comporterà un notevole vantaggio sia per quanto riguarda la costruzione del modello, sia per quanto riguarda i tempi di calcolo.

Le semplificazioni adottate sono quelle di considerare l'attrito coulombiano degli appoggi nullo (per limitare la non linearità), e di aggiungere un ulteriore vincolo alla ganascia, in maniera tale da realizzare una riduzione di gradi di libertà da due ad uno. Quest'ultima semplificazione, però, è stata adottata solo fino a quando non viene recuperato il gioco iniziale tra tamburo e guarnizione.

L'ulteriore vincolo che si può aggiungere alla ganascia può essere quello di considerare uno solo dei due appoggi incernierati (l'altro di conseguenza rotolerà con strisciamento), ovvero di imporre rotolamento senza strisciamento in solo uno dei due appoggi. Sono state analizzate due situazioni: quella in cui si considera la ganascia incernierata nell'appoggio inferiore e quella in cui si impone allo stesso appoggio rotolamento senza strisciamento. Le differenze che si sono ottenute non sono apprezzabili e questo era attendibile dati i piccoli spostamenti in gioco. Si conclude che qualsiasi ipotesi di vincolo venga presa in considerazione, questa porta a risultati comunque soddisfacenti; pertanto, si considera la ganascia incernierata nell'appoggio inferiore, perché questa è una situazione più facile da analizzare.

Apriamo una parentesi per sottolineare che il fatto che nel modello si consideri trascurabile la forza di attrito, non deve far dimenticare l'importanza che comunque ha nella realtà: infatti, l'attrito esistente sugli appoggi, grazie al precarico delle molle di richiamo, impedisce alla ganascia di scivolare in

direzione  $x$  sotto l'azione della forza peso e delle eventuali vibrazioni dovute al movimento delle sospensioni.

Una volta che la ganaschia recupera il gioco iniziale ed entra in contatto con il tamburo, in teoria si dovrebbero innescare delle oscillazioni, dovute proprio alla elasticità della guarnizione (come se la ganaschia urtasse contro il tamburo). Tuttavia tener conto delle oscillazioni dopo il contatto, rende il sistema estremamente complicato da analizzare; inoltre le oscillazioni sono di altissima frequenza (circa 1000 Hz) e di bassissima ampiezza (data l'elevata rigidità della guarnizione e la ridotta massa della ganaschia), e quindi hanno poca importanza ai fini della determinazione degli assorbimenti idraulici (senza contare, inoltre, che tali oscillazioni saranno smorzate, ad esempio a causa degli attriti interni al materiale). Quindi, anche se si riuscisse a fare un modello che riesca a riprodurre tali oscillazioni, ciò non sarebbe utile ai fini dei nostri obiettivi, proprio per i motivi che abbiamo appena detto. Il calcolo della frequenza delle oscillazioni in maniera approssimata può essere fatto in questo modo: dallo studio successivo si sono calcolate una massa ridotta del sistema ganaschia-pistone pari a 0.094 Kg ed una rigidità ridotta (che tiene conto anche della rigidità della guarnizione) pari a  $3.6 \times 10^6$  N/m. Quindi la frequenza di oscillazione sarà:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 1000 \text{ Hz}$$

proprio come era stato detto in precedenza.

Pertanto, tenendo conto delle osservazioni appena fatte, si adotterà la seguente semplificazione: si ipotizza che la ganaschia nell'istante dell'urto annulli la sua velocità e perda la sua massa, cioè come se da quell'istante in poi il sistema si deformasse in maniera, per così dire "statica", secondo una relazione del tipo  $F = kx$ .

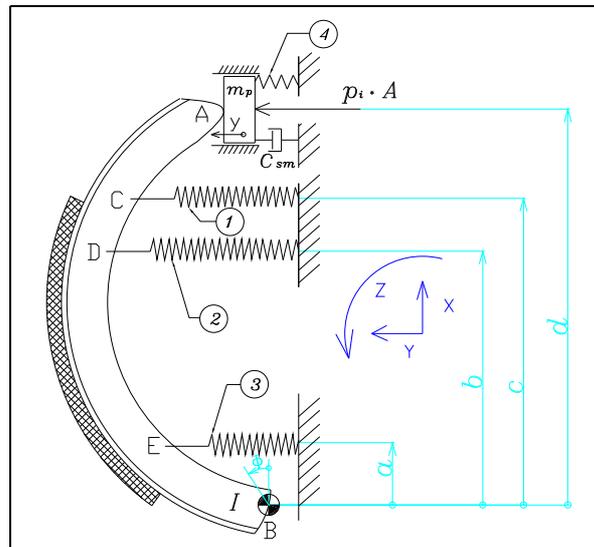
L'equilibrio che sarà fatto (questa volta di tipo statico), avrà come fine il calcolo della direzione di accostamento, della pressione massima che si raggiunge in corrispondenza di tale direzione, dello schiacciamento della guarnizione, ed in ultima istanza del momento frenante.

Si puntualizza che nel fare l'equilibrio statico, sono stati trascurati gli attriti tra ganaschia ed appoggi e la forza peso: abbiamo infatti verificato che il considerare le forze di attrito porta ad una variazione non significativa della direzione di accostamento, della pressione massima, degli assorbimenti e del momento frenante. Inoltre, la ganaschia è stata considerata vincolata con due appoggi (come lo è nella realtà) e non con un appoggio ed una cerniera, come è stato fatto nell'equilibrio di tipo dinamico.

## 2.3 Equilibrio dinamico

Faremo ora l'equilibrio dinamico, che come abbiamo specificato in precedenza vale negli istanti in cui la ganaschia non contatta con il tamburo.

In base alle ipotesi formulate in precedenza, lo schema a cui ci riferiamo per la scrittura delle equazioni di equilibrio è quello di figura 2.6.



**Figura 2.6:** Schema per l'equilibrio dinamico

Nella figura 2.6:

$p_i$  = pressione idraulica;

$c_{sm}$  = coefficiente di smorzamento;

$A$  = area del cilindretto;

$I$  = momento d'inerzia della ganascia rispetto al punto di appoggio inferiore;

$m_p$  = massa del pistoncino.

Inoltre le molle 1, 2, 3, 4 forniscono delle forze elastiche che hanno solo componente lungo  $y$  pari a:

$$F_1 = -F_{01} - 2K_1 y_C;$$

$$F_2 = -F_{02} - 2K_2 y_D;$$

$$F_3 = -F_{03} - 2K_3 y_E;$$

$$F_4 = F_{04} - 2K_4 y.$$

Dove  $F_{0i}$  sono i valori assoluti dei precarichi con cui vengono montate le molle,  $K_i$  le rigidezze delle molle,  $y_i$  gli spostamenti assoluti dei punti di ancoraggio delle molle e misurati a partire dalla configurazione iniziale di equilibrio. I "2" visibili nelle formule precedenti sono una conseguenza del fatto che si suppone che la ganascia non rappresentata in figura abbia un moto esattamente simmetrico. A proposito dei precarichi si aggiunge che nella configurazione iniziale, quando  $p_i = 0$ , essi si scaricano su una battuta che nel freno di figura 1.15 di pagina 20 è rappresentata dal traversino 12 e dalle superfici di battuta 20, 21, 22. Infine indichiamo con  $\phi$  la rotazione assoluta della ganascia e misurata a partire dalla configurazione iniziale.

Facciamo l'equilibrio a momento della ganascia rispetto al punto fisso O:

$$-I\ddot{\phi} - (F_{01} + 2K_1 y_C)c - (F_{02} + 2K_2 y_D)b - (F_{03} + 2K_3 y_E)a + Nd = 0 \quad (2.3)$$

Dove  $N$  è la componente lungo l'asse  $y$  della forza che il pistone esercita sulla ganascia e rappresenta una incognita (la componente lungo  $x$  è nulla per l'ipotesi di attrito nullo). Nell'equilibrio precedente non è stata inclusa la

forza peso, che è di entità trascurabile. Per ricavare  $N$  facciamo l'equilibrio lungo  $y$  del pistone:

$$-m_p\ddot{y} - c_{sm}\dot{y} + F_{04} - 2K_4y + p_iA - N = 0 \quad (2.4)$$

Da cui ricaviamo:

$$N = -m_p\ddot{y} - c_{sm}\dot{y} + F_{04} - 2K_4y + p_iA; \quad (2.5)$$

Infine esprimiamo gli spostamenti  $\phi$ ,  $y_C$ ,  $y_D$ ,  $y_E$ , in funzione dell'unico grado di libertà  $y$ . Notiamo che la velocità del punto A considerato appartenente alla ganascia è:

$$\vec{v}_A = \dot{\phi}\vec{k} \wedge \overrightarrow{BA} \quad (2.6)$$

La condizione di vincolo nell'appoggio superiore è  $v_{xA} = \dot{y}$ , ma dalla formula (2.6):  $v_{xA} = \dot{\phi}d = \dot{y}$ , da cui ricaviamo:

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{y}}{d} \quad (2.7)$$

da cui nell'ipotesi di piccoli spostamenti:

$$\phi = \frac{y}{d} \quad (2.8)$$

L'ipotesi di piccoli spostamenti permette di considerare costanti le grandezze geometriche utilizzate nelle formule precedenti e rappresentate in figura 2.6: se non fosse così, esse sarebbero funzioni dello spostamento  $y$  del pistone e tramite esso del tempo.

Utilizzando la (2.8) si ricavano gli spostamenti  $y_C$ ,  $y_D$ ,  $y_E$ :

$$y_C = \phi c = \frac{y}{d}c \quad (2.9)$$

$$y_D = \phi b = \frac{y}{d}b \quad (2.10)$$

$$y_E = \phi a = \frac{y}{d}a \quad (2.11)$$

Sostituendo le (2.5), (2.9), (2.10), (2.11) nella (2.3), si ottiene:

$$\left(\frac{I}{d^2} + m_p\right)\ddot{y} + c_{sm}\dot{y} + 2\left(\frac{K_1c^2 + K_2b^2 + K_3a^2 + K_4d^2}{d^2}\right)y =$$

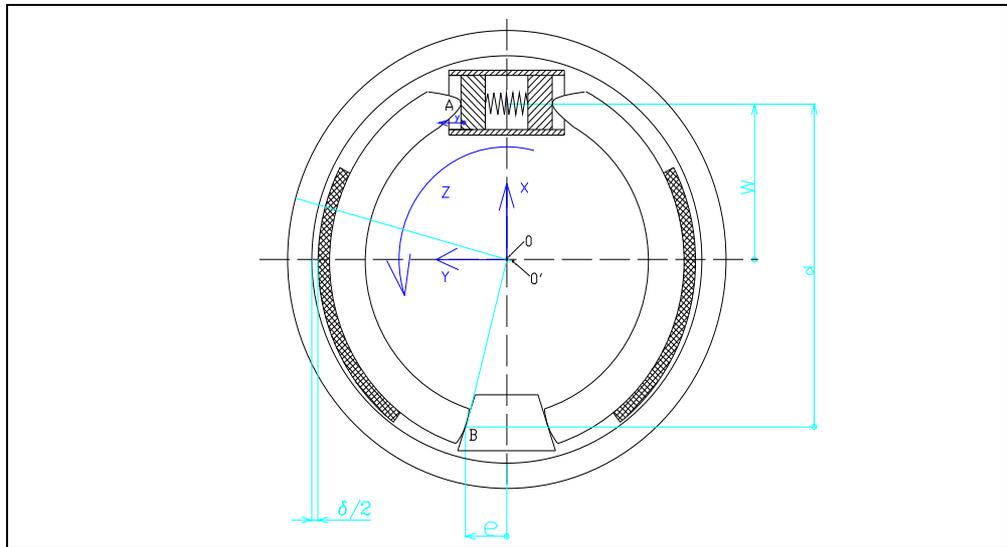
$$= p_i A - \frac{F_{01}c + F_{02}b + F_{03}a - F_{04}d}{d} \quad (2.12)$$

La precedente equazione differenziale risolta fornisce la funzione  $y(t)$ , ossia lo spostamento del pistoncino in funzione del tempo fino all'istante di impatto della guarnizione con il tamburo, e moltiplicando tale spostamento per l'area del cilindro si ottiene il volume di fluido assorbito.

Come si può notare la (2.12) è un'equazione differenziale del secondo ordine, alle derivate totali, non omogenea nell'incognita  $y$ . Confrontandola con l'equazione dinamica di un sistema massa-molla-smorzatore, si può osservare, che il coefficiente che moltiplica la derivata seconda rappresenta una sorta di massa equivalente, il coefficiente che moltiplica la derivata prima è uno smorzamento equivalente, il coefficiente che moltiplica il termine lineare è una rigidità equivalente, mentre il termine noto è una forza equivalente. In realtà si potrebbe effettuare un'ulteriore semplificazione eliminando il termine in cui compare la rigidità equivalente, in quanto si è visto, facendo alcune simulazioni, che variando la rigidità delle molle da zero fino a 6000 N/m la soluzione rimane identica, e questo si spiega pensando che l'allungamento delle molle fino a quando non viene recuperato il gioco, è piccolissimo e di conseguenza è piccolissimo l'aumento della forza elastica rispetto al valore che essa ha inizialmente e corrispondente al valore di precarico  $F_{0i}$ , che invece ha una certa importanza sui risultati. A proposito del precarico, c'è da osservare che fino a quando la pressione idraulica non sale ad un valore tale da rendere positivo l'intero termine noto, la ganaschia è ferma perché spinta contro la battuta: per cui quando la forza equivalente è negativa, essa va considerata nulla. Tuttavia c'è da dire che quest'ultima affermazione è vera solo se negli istanti in cui la forza equivalente è negativa, la  $y$  è nulla. Infatti, se la  $y$  è maggiore di zero, allora la forza equivalente (se è negativa) non va considerata nulla, ma esattamente com'è.

## 2.4 Spostamento del pistone necessario a recuperare il gioco tra ganaschia e tamburo

I costruttori di freni a tamburo forniscono il gioco diametrale tra ganaschia e tamburo. Poiché dalla (2.12) si ricava lo spostamento  $y(t)$  del pistone, è necessario ricavare quale sia lo spostamento del pistone quando il gioco diametrale viene recuperato. La sua conoscenza è importante perché individua il passaggio dalla fase “dinamica” alla fase “statica”.



**Figura 2.7:** Schema per il recupero gioco

Indicando con  $\delta$  il gioco diametrale,  $\delta/2$  sarà il gioco radiale (osservare figura 2.7). Tuttavia se si osserva la figura precedente, quando il gioco è nullo, la circonferenza esterna della ganaschia coincide con la circonferenza interna del tamburo: questo vuol dire che in condizioni di riposo il gioco radiale non può essere costante, ma variabile circonferenzialmente e quindi il parametro fornito dai costruttori deve essere interpretato come un gioco medio.

Sempre nell'ipotesi che sia valida l'approssimazione di moto rotatorio attorno al punto di contatto  $B$ , quando il gioco viene recuperato il centro  $O'$

corrispondente alla circonferenza esterna della ganascia, andrà a sovrapporsi al centro  $O$  del tamburo ed in tal caso  $O'$  avrà percorso una distanza (nella direzione perpendicolare al vettore  $\overrightarrow{BO}$ ) pari a circa  $\delta/2$ . Quindi avremo (nell'ipotesi di piccoli spostamenti):

$$\frac{\delta}{2} = \phi \sqrt{e^2 + (d - w)^2}$$

da cui utilizzando la (2.8):

$$y = \frac{\delta d}{2\sqrt{e^2 + (d - w)^2}} \quad (2.13)$$

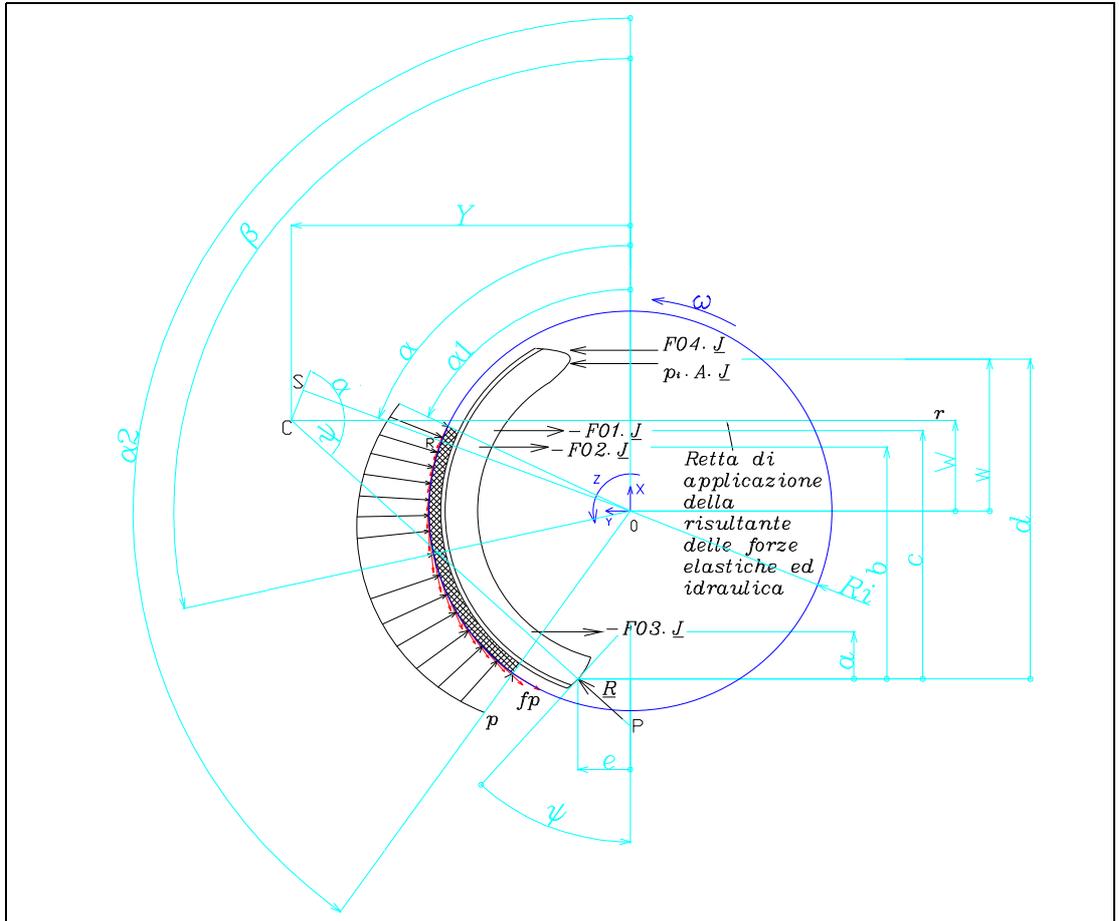
che è l'espressione dello spostamento del pistone necessario a recuperare il gioco tra tamburo e guarnizione. Si tratta di una relazione di linearità tra lo spostamento ed il gioco diametrale. Il coefficiente di proporzionalità tiene conto dei parametri geometrici del sistema.

## 2.5 Equilibrio statico

Una volta che il pistone ha percorso la distanza  $y$  espressa dalla (2.13), ossia che la ganascia ha recuperato il gioco con il tamburo, bisogna conoscere quale sarà il momento frenante in funzione della pressione idraulica, e che influenza ha la deformabilità della guarnizione sugli assorbimenti. Per far questo, si dovrà calcolare la direzione di accostamento e la distribuzione di pressione in corrispondenza dell'arco di contatto ed in questa operazione abbiamo già detto che si seguirà un approccio di tipo statico.

### 2.5.1 Determinazione della direzione di accostamento $\beta$

Nella figura 2.8 sono rappresentate le forze che agiscono sulla ganascia: abbiamo già detto che quest'ultima verrà considerata effettivamente appoggiata sull'appoggio inferiore e non incernierata come nel caso dell'equilibrio dinamico, fatto nel paragrafo precedente. Le forze che vengono trascurate sono



**Figura 2.8:** Schema per l'equilibrio statico

la forza peso, e le forze di attrito negli appoggi. In tal caso le uniche incognite sono la direzione di accostamento individuata dall'angolo  $\beta$ , la  $p_{max}$ , e la reazione  $\vec{R}$  nell'appoggio inferiore (perpendicolare a quest'ultimo). In questo modo abbiamo un sistema staticamente determinato: se invece avessimo considerato anche le forze di attrito negli appoggi, il sistema sarebbe stato due volte iperstatico e per determinarle avremmo dovuto considerare la deformabilità della ganaschia. Si sottolinea, inoltre che una volta noti l'angolo  $\beta$  e la  $p_{max}$ , è anche nota (grazie alla (2.1)), l'intera distribuzione delle forze di pressione nel contatto tra guarnizione e tamburo.

Per determinare l'angolo  $\beta$ , si fa l'equilibrio a momento della ganaschia

rispetto al punto C, che è il punto di incontro tra la retta perpendicolare all'appoggio inferiore passante per il punto di contatto e la retta  $r$  in cui può essere considerata applicata la risultante delle forze elastiche e della forza idraulica. In questo modo si annulla il momento della reazione  $\vec{R}$  e quello complessivamente generato dalle forze elastiche e dalla forza idraulica. Con riferimento alle forze elastiche, sono stati considerati solo i precarichi delle molle per quanto detto a pagina 40.

La posizione della retta  $r$  e quindi del punto C rispetto a cui si fa momento sono individuati dalla grandezza  $W$  (osservare figura 2.8). Per la sua determinazione bisogna ricordare la definizione di sistema equivalente di forze: la retta  $r$  è quella retta in cui se si pensa applicata la risultante delle forze elastiche ed idraulica, ottengo un momento rispetto al punto O uguale a quello (rispetto allo stesso punto) generato dalle forze idraulica ed elastiche. In formule:

$$\begin{aligned} (F_{04} + p_i A)w - F_{01}(c + w - d) - F_{02}(b + w - d) + F_{03}(d - w - a) = \\ = W(p_i A + F_{04} - F_{03} - F_{02} - F_{01}) \end{aligned}$$

Da cui si ricava:

$$W = \frac{(F_{04} + p_i A)w + F_{01}(d - c - w) + F_{02}(d - w - b) + F_{03}(d - w - a)}{(p_i A + F_{04} - F_{03} - F_{02} - F_{01})} \quad (2.14)$$

Come è possibile notare dalla (2.14) la grandezza  $W$  è funzione della pressione idraulica. Per rendersi conto se questa dipendenza ha una qualche influenza sui risultati abbiamo rappresentato in figura 2.9 la funzione  $W(p_i)$ . Quest'ultima ha senso rappresentarla per valori di pressione superiori alla pressione di accostamento, la quale è la pressione minima necessaria ad accostare la ganaschia al tamburo ed è pari a:

$$p_{acc} = \frac{F_{01}c + F_{02}b + F_{03}a - F_{04}d}{Ad} \quad (2.15)$$

Infatti per valori inferiori alla pressione di accostamento la ganaschia non è a contatto con il tamburo e quindi il momento sviluppato dal freno è nullo.

L'andamento di figura 2.9 si riferisce ad un dimensionamento e precarico tipici. Si può notare che in corrispondenza del valore di pressione in cui si annulla il denominatore della (2.14) esiste una discontinuità della funzione. Inoltre, si nota che per valori di pressione superiori a 40-50 bar, la retta  $r$  coincide con ottima approssimazione con la retta di azione della forza idraulica (rappresentata dalla linea rossa). Si può concludere che se la pressione è abbastanza elevata (maggiore di circa 50 bar) si potrebbe far coincidere la retta  $r$  con quella di applicazione della forza idraulica, mentre se la pressione è più bassa non è possibile trascurare l'influenza che ha la pressione idraulica sulla posizione della retta  $r$  e del punto C.

Detta  $Y$  la distanza di C dall'asse  $x$ , si ha, osservando la figura 2.8:

$$Y = (d - w + W) \cot \psi + e \quad (2.16)$$

Le forze che hanno un momento intorno a C sono: le pressioni normali  $pBR_i d\alpha$  e le pressioni tangenziali  $f pBR_i d\alpha$ , dove  $f$  è il coefficiente di attrito tra tamburo e guarnizione e  $B$  la larghezza di quest'ultima. I loro bracci sono rispettivamente:

$$\overline{CS} = Y \cos \alpha - W \sin \alpha \quad (2.17)$$

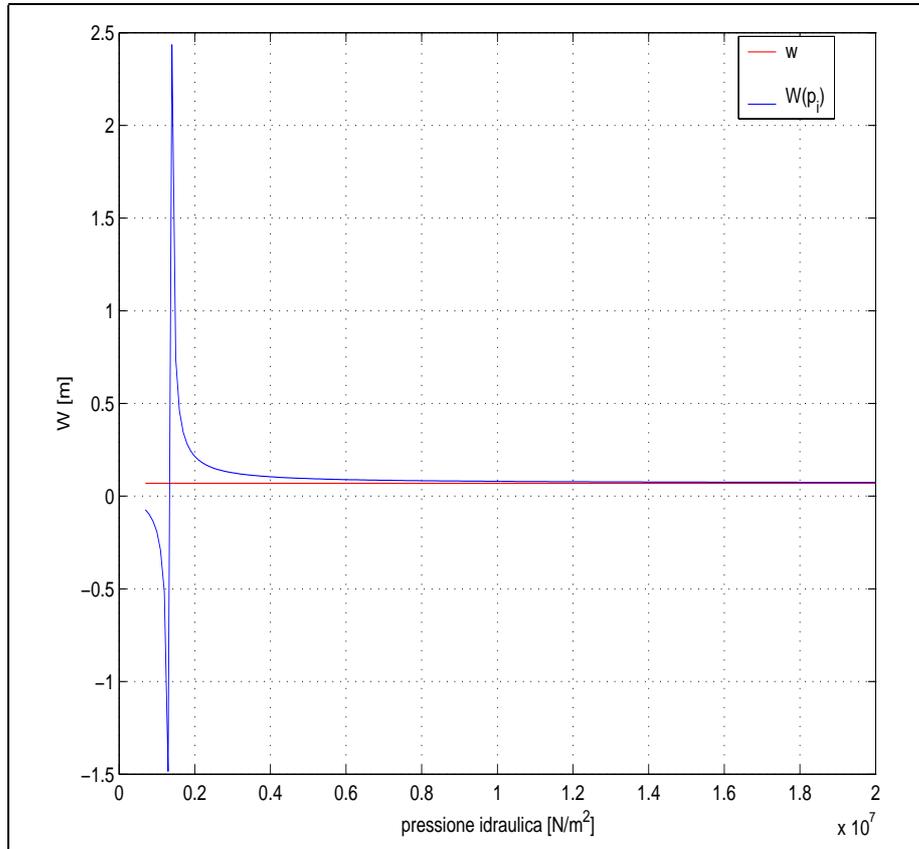
$$\overline{SR} = W \cos \alpha + Y \sin \alpha - R_i \quad (2.18)$$

L'equilibrio a momento rispetto a C di tali forze sarà:

$$- \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} pBR_i(Y \cos \alpha - W \sin \alpha) d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f pBR_i(W \cos \alpha + Y \sin \alpha - R_i) d\alpha = 0 \quad (2.19)$$

Sostituendo nella precedente la (2.1), si ottiene:

$$\begin{aligned} & -p_{max}BR_i \left[ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\beta - \alpha)(Y \cos \alpha - W \sin \alpha) d\alpha + \right. \\ & \left. + f \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\beta - \alpha)(W \cos \alpha + Y \sin \alpha - R_i) d\alpha \right] = 0 \quad (2.20) \end{aligned}$$



**Figura 2.9:** Posizione della retta  $r$  in funzione della pressione idraulica

Semplificando i termini al di fuori delle parentesi quadre e svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\tan \beta = \frac{A}{B} \quad (2.21)$$

ove

$$A = (Y + Wf) \left( \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1}{2} \right) - \\ -(W - fY)(\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) - 2fR_i(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

$$B = (W - Yf) \left( \alpha_2 - \alpha_1 - \frac{\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1}{2} \right) - \\ -(Y + fW)(\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1) + 2fR_i(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Si può notare che l'angolo  $\beta$  è una funzione della geometria del freno, del coefficiente di attrito tra tamburo e guarnizione e della pressione idraulica (tramite il parametro  $W$ ).

L'equilibrio appena fatto vale per la ganaschia rappresentata in figura 2.8, e cioè per la ganaschia avvolgente. Per l'equilibrio della ganaschia non rappresentata in figura, cioè quella svolgente, basta invertire nella figura 2.8 il senso di rotazione del tamburo e cioè il verso delle forze tangenziali: questo equivale a dire che nella (2.21) basta sostituire  $f$  con  $-f$  per ottenere l'espressione della direzione di accostamento per la ganaschia svolgente.

Infine si osserva che la (2.21) vale nel caso in cui sia soddisfatta la condizione:

$$\alpha_2 - \frac{\pi}{2} \geq \beta \leq \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \quad (2.22)$$

Se non fosse soddisfatta la precedente, si verrebbero ad avere punti con pressioni radiali e tangenziali negative, il che è assurdo. In tal caso gli integrali visibili nella (2.20) hanno degli estremi di integrazione modificati come segue:

- se  $\beta \geq \alpha_1 + \pi/2$ , allora bisogna integrare tra  $\beta - \pi/2$  e  $\alpha_2$ , questo vuol dire che nella (2.21) bisogna sostituire  $\alpha_1$  con  $\beta - \pi/2$ ;
- se  $\beta \leq \alpha_2 - \pi/2$ , allora bisogna integrare tra  $\alpha_1$  e  $\beta + \pi/2$ , questo vuol dire che nella (2.21) bisogna sostituire  $\alpha_2$  con  $\beta + \pi/2$ .

In tutti e due i casi precedenti l'espressione (2.21) dell'angolo  $\beta$  è in forma implicita e va quindi determinato in modo approssimato, ad esempio con un metodo iterativo.

Nella figura successiva è rappresentato l'andamento dell'angolo  $\beta$  (sia per la ganaschia avvolgente che per quella svolgente) in funzione del coefficiente di attrito e per un valore fissato della pressione idraulica pari a 150 bar. Le caratteristiche geometriche del freno sono le stesse di quello a cui si riferisce la figura 2.9.

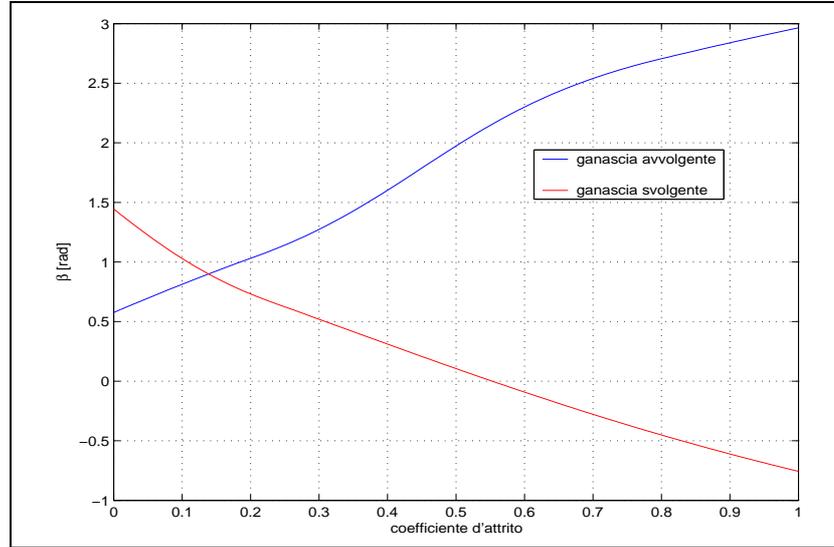


Figura 2.10: Direzione di accostamento in funzione del coefficiente di attrito

## 2.5.2 Determinazione della pressione massima

Per determinarla scriviamo l'equazione di equilibrio alla rotazione della ganascia rispetto al punto P di figura 2.8:

$$(p_i A + F_{04})(d + e \tan \psi) - F_{01}(c + e \tan \psi) - F_{02}(b + e \tan \psi) - F_{01}(a + e \tan \psi) - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{p B R_i (e \tan \psi + d - w) \sin \alpha - f p B R_i [R_i + (e \tan \psi + d - w) \cos \alpha]\} d\alpha = 0$$

Se nella precedente si sostituisce la distribuzione di pressione fornita dalla (2.1) si ricava l'espressione della  $p_{max}$ :

$$p_{max} = \frac{C}{D} \quad (2.23)$$

dove:

$$C = (p_i A + F_{04})(d + e \tan \psi) - F_{01}(c + e \tan \psi) - F_{02}(b + e \tan \psi) - F_{01}(a + e \tan \psi)$$

$$D = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\beta - \alpha) B R_i (e \tan \psi + d - w) \sin \alpha d\alpha -$$

$$- \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\beta - \alpha) f B R_i [R_i + (e \tan \psi + d - w) \cos \alpha] d\alpha$$

Per semplicità le espressioni esplicite dei termini  $C$  e  $D$  sono state riportate in appendice B.

Naturalmente devono essere effettuate le sostituzioni discusse nel precedente paragrafo nel caso in cui si consideri la ganascia svolgente o nel caso in cui l'angolo  $\beta$  non soddisfi la condizione (2.22).

### 2.5.3 Determinazione del momento frenante fornito da una ganascia

Per determinare il momento frenante fornito da una ganascia facciamo il momento rispetto al centro del tamburo delle azioni tangenziali che si sviluppano tra tamburo e guarnizione:

$$M_f = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f p B R_i^2 d\alpha = f p_{max} B R_i^2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(\beta - \alpha) d\alpha$$

Da cui si ricava:

$$M_f = f p_{max} B R_i^2 [\sin(\beta - \alpha_1) - \sin(\beta - \alpha_2)] \quad (2.24)$$

Naturalmente ci sono da effettuare le opportune sostituzioni nel caso in cui l'angolo  $\beta$  non soddisfi la condizione (2.22).

A questo punto, utilizzando la (1.2) e la (2.15) si può ricavare l'espressione esplicita del  $BF$  per la ganascia avvolgente:

$$BF_{avv} = \frac{f p_{max} B R_i^2 [\sin(\beta - \alpha_1) - \sin(\beta - \alpha_2)]}{\left( p_i - \frac{F_{01}c + F_{02}b + F_{03}a - F_{04}d}{Ad} \right) A R_i} \quad (2.25)$$

Per determinare il momento frenante complessivo fornito dal freno ed il  $BF$  totale, basta semplicemente sommare rispettivamente i singoli momenti e  $BF$  forniti da ciascuna ganascia.

### 2.5.4 Determinazione degli assorbimenti idraulici

Abbiamo già anticipato che agli assorbimenti idraulici contribuiscono due fattori:

- il recupero del gioco tra guarnizione e tamburo;
- la deformabilità a compressione della guarnizione.

Per quanto riguarda il primo fattore abbiamo già calcolato nel paragrafo 2.4 lo spostamento  $y$  del pistone necessario a recuperare il gioco iniziale tra tamburo e guarnizione.

Rimane da calcolare la relazione che intercorre tra lo spostamento del pistoncino idraulico e la compressione della guarnizione. Per determinare tale relazione occorre osservare che durante la compressione della guarnizione, il centro  $O'$  della circonferenza della guarnizione si muove secondo la direzione di accostamento  $\beta$  e nello stesso tempo i punti A e B della ganascia devono rimanere a contatto il primo con il pistone, il secondo con il blocchetto di appoggio inferiore (osservare figura 2.11).

Indichiamo con  $\delta$  il modulo del vettore spostamento del centro  $O'$  della ganascia e con  $\vec{n}$  il versore normale alla superficie di appoggio inferiore. Esse avranno le seguenti componenti, secondo il sistema di riferimento di figura 2.11:

$$\vec{\delta} \equiv \left( -\delta \sin \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right), \delta \cos \left( \beta - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

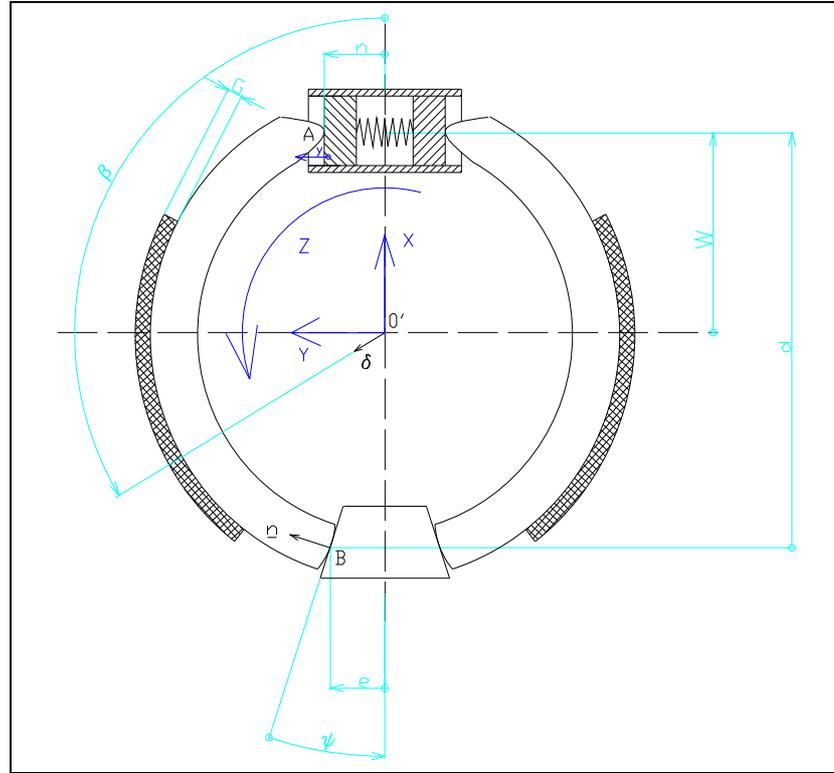
$$\vec{n} \equiv (\sin \psi, \cos \psi)$$

Esprimiamo lo spostamento del centro  $O'$  e del punto B in funzione della rotazione e dello spostamento del punto A della ganascia:

$$\vec{\delta} = \vec{a} + \phi \vec{k} \wedge \overrightarrow{AO'}$$

$$\vec{b} = \vec{a} + \phi \vec{k} \wedge \overrightarrow{AB}$$

dove con  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\phi$  si indicano rispettivamente il vettore spostamento del punto A, il vettore spostamento del punto B, la rotazione della ganascia



**Figura 2.11:** Schema per il calcolo degli assorbimenti

(tali spostamenti sono dei piccoli spostamenti). Se nell'ultima equazione imponiamo che lo spostamento del punto B secondo la direzione della normale sia nullo, otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} \vec{\delta} = \vec{a} + \phi \vec{k} \wedge \overrightarrow{AO'} \\ \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 = \vec{a} \cdot \vec{n} + \phi \vec{k} \wedge \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} \end{cases}$$

che in componenti diventa:

$$\begin{cases} \delta \cos \beta = a_x + \phi n & (1) \\ \delta \sin \beta = a_y - \phi w & (2) \\ 0 = a_x \sin \psi + a_y \cos \psi + \phi [\sin \psi (n - e) - d \cos \psi] & (3) \end{cases} \quad (2.26)$$

Dove per un assegnato  $\delta$  abbiamo le tre incognite  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $\phi$ , anche se a noi interessa conoscere in particolare come  $a_y$  dipende da  $\delta$ . Ricaviamo dalla

terza equazione della (2.26)  $a_x$ :

$$a_x = -a_y \cot \psi - \phi[(n - e) - d \cot \psi]$$

che sostituiamo nella equazione (1) della (2.26), ottenendo:

$$\delta \cos \beta = -a_y \cot \psi - \phi[(n - e) - d \cot \psi] + \phi n$$

Da cui ricaviamo  $\phi$ :

$$\phi = \frac{\delta \cos \beta + a_y \cot \psi}{e + d \cot \psi}$$

Sostituiamo l'angolo  $\phi$  appena ottenuto nella (2) della (2.26):

$$\delta \sin \beta = a_y - w \left( \frac{\delta \cos \beta + a_y \cot \psi}{e + d \cot \psi} \right)$$

da cui finalmente possiamo ottenere  $a_y$ :

$$a_y = \delta \left[ \frac{e \sin \beta + w \cos \beta + d \sin \beta \cot \psi}{e + (d - w) \cot \psi} \right] \quad (2.27)$$

La relazione appena trovata definisce il legame che intercorre tra lo spostamento  $a_y$  del pistone e il modulo del vettore spostamento del centro O' della circonferenza della guarnizione.

Sapendo che  $\delta/G$  rappresenta la deformazione  $\epsilon$  della guarnizione in corrispondenza della direzione di accostamento e supponendo un legame elastico lineare tra pressione radiale e deformazione:

$$p_{max} = E\epsilon = E \frac{\delta}{G} = \frac{a_y E (e + (d - w) \cot \psi)}{G (e \sin \beta + w \cos \beta + d \sin \beta \cot \psi)}$$

da cui si ricava:

$$a_y = p_{max} \left\{ \frac{G (e \sin \beta + w \cos \beta + d \sin \beta \cot \psi)}{E [e + (d - w) \cot \psi]} \right\} \quad (2.28)$$

che è la relazione che lega lo spostamento del pistone con la pressione massima, che a sua volta è nota tramite la (2.23). Si tratta di una relazione di linearità ed il coefficiente di proporzionalità tiene conto della geometria del sistema e dell'elasticità della guarnizione (tramite il suo modulo di Young).

A questo punto è possibile determinare lo spostamento totale del pistone, che è pari alla somma del contributo dovuto al recupero giochi e del contributo dovuto alla deformazione a compressione della guarnizione. Una volta noto lo spostamento del pistone, se lo si moltiplica per l'area del cilindretto, si trova il volume di fluido assorbito:

$$V_{ass} = \frac{Ap_{max}G(e \sin \beta + w \cos \beta + d \sin \beta \cot \psi)}{E[e + (d - w) \cot \psi]} + \frac{A\delta d}{2\sqrt{e^2 + (d - w)^2}} \quad (2.29)$$

che da il volume di fluido assorbito da una singola ganasce: il volume totale di fluido assorbito dal freno sarà, quindi, la somma dei volumi assorbiti dalle singole ganasce.

## 2.6 Variazione del coefficiente d'attrito

È noto che il coefficiente d'attrito dinamico varia in funzione dei materiali a contatto, della temperatura delle superfici di sfregamento, della loro velocità relativa e della pressione normale. Si suppone che questa dipendenza sia nota e misurata sperimentalmente.

Nel caso del freno a tamburo abbiamo due superfici in movimento relativo, la cui velocità di scorrimento relativo è una funzione della velocità angolare della ruota, che nel modello è una informazione proveniente dall'esterno (osservare figura (2.1)). La temperatura delle superfici è una informazione interna al modello di freno che proviene invece dal blocco termico. Per quanto riguarda la dipendenza del coefficiente di attrito dinamico dalla pressione c'è da osservare che lungo l'arco di contatto della guarnizione la pressione radiale non è costante ma variabile con l'angolo  $\alpha$ : questo significherebbe anche una variazione del fattore d'attrito lungo l'arco di contatto ed in sostanza un appesantimento del modello matematico con notevole incremento dei tempi di calcolo. Per aggirare questo problema si è pensato di associare alla distribuzione di pressione effettiva una pressione media da cui far dipendere il

coefficiente di attrito. La pressione media è calcolata in questo modo:

$$p_m = \frac{\int_{\Delta_{\alpha_{avv}}} p_{max_{avv}} \cos(\beta_{avv} - \alpha) R_i d\alpha + \int_{\Delta_{\alpha_{sv}}} p_{max_{sv}} \cos(\beta_{sv} - \alpha) R_i d\alpha}{R_i(\Delta_{\alpha_{avv}} + \Delta_{\alpha_{sv}})} \quad (2.30)$$

nella quale gli integrali sono estesi il primo sull'arco effettivo di contatto della ganaschia avvolgente, il secondo sull'arco effettivo di contatto della ganaschia svolgente.

## 2.7 Riepilogo

In questo capitolo è stato sviluppato il modello matematico che descrive il comportamento meccanico del freno. Dopo una serie di ipotesi ragionevoli (problema piano, guarnizione d'attrito deformabile, piccoli spostamenti, ganaschia, pistone e tamburo rigidi), si è fatta una netta distinzione tra la fase in cui la ganaschia si accosta al tamburo per recuperare il gioco e la fase che segue tale recupero (durante la quale c'è lo sviluppo del momento frenante). Per la prima fase (che sostanzialmente è quella responsabile del tempo di ritardo) è stato fatto un equilibrio di tipo dinamico, mentre per la seconda un equilibrio di tipo statico.

L'equilibrio statico ha portato alla determinazione del momento frenante, che sostanzialmente dipende da due fattori per una determinata geometria: la pressione idraulica ed il coefficiente d'attrito dinamico tra guarnizione e tamburo (formula (2.24)). Quest'ultimo a sua volta è funzione della temperatura del freno, della velocità di rotazione della ruota e della pressione locale di contatto (formula (2.30)).

Per quanto riguarda la stima degli assorbimenti idraulici si è supposto che essi fossero la somma di due soli contributi: la corsa del pistone necessaria affinché venga recuperato il gioco (formula (2.13)) e la corsa effettuata a causa della compressione radiale della guarnizione (formula (2.28)). Anche in questo caso essi dipendono (per una determinata geometria) dal gioco

iniziale tra guarnizione e tamburo, dalla pressione idraulica e dal coefficiente di attrito (formula (2.29)).

Si può concludere che in questo capitolo sono stati raggiunti tre dei quattro obiettivi che ci siamo prefissi all'inizio (momento frenante, assorbimento, tempo di ritardo). Rimane da conoscere il riscaldamento del freno : ciò sarà effettuato con l'analisi termica svolta nel capitolo tre.

# Capitolo 3

## Il modello termico del freno

*In questo capitolo verrà svolta l'analisi termica del freno a tamburo al fine di costruire un modello che sia in grado di prevedere con buona approssimazione l'andamento della temperatura nel tempo durante la frenata. Tale informazione viene utilizzata nel modello meccanico per tener conto della variazione del coefficiente d'attrito con la temperatura.*

### **3.1 Ripartizione del calore tra tamburo e guarnizione**

È noto che il principio di funzionamento dei freni è basato sulla trasformazione di energia cinetica e potenziale (possedute dal veicolo) in energia termica: questo avviene grazie all'attrito tra due superfici di strisciamento che sono situate all'interno dei freni. L'energia termica così prodotta tende a far aumentare la temperatura del freno stesso: è necessario, dunque, provvedere ad un adeguato raffreddamento per consentire alla temperatura di mantenersi a valori ragionevoli ai fini dell'integrità del freno. Il modo più semplice è quello di realizzare una circolazione d'aria, che raffreddi il freno per convezione.

La potenza termica che viene dissipata all'interfaccia tamburo-guarnizione

per un freno a tamburo è pari a:

$$\dot{Q} = M_f \omega \quad (3.1)$$

dove  $M_f$  è il momento frenante sviluppato dal freno ed è una informazione proveniente dal blocco meccanico, mentre  $\omega$  è la velocità angolare della ruota ed è una informazione proveniente nel modello dall'esterno (osservare figura 2.1). Tale potenza termica si andrà a ripartire tra il tamburo e le ganasce: di conseguenza, se si volessero analizzare separatamente tamburo e ganasce sarebbe necessario conoscere il fattore di ripartizione  $\gamma$  pari a:

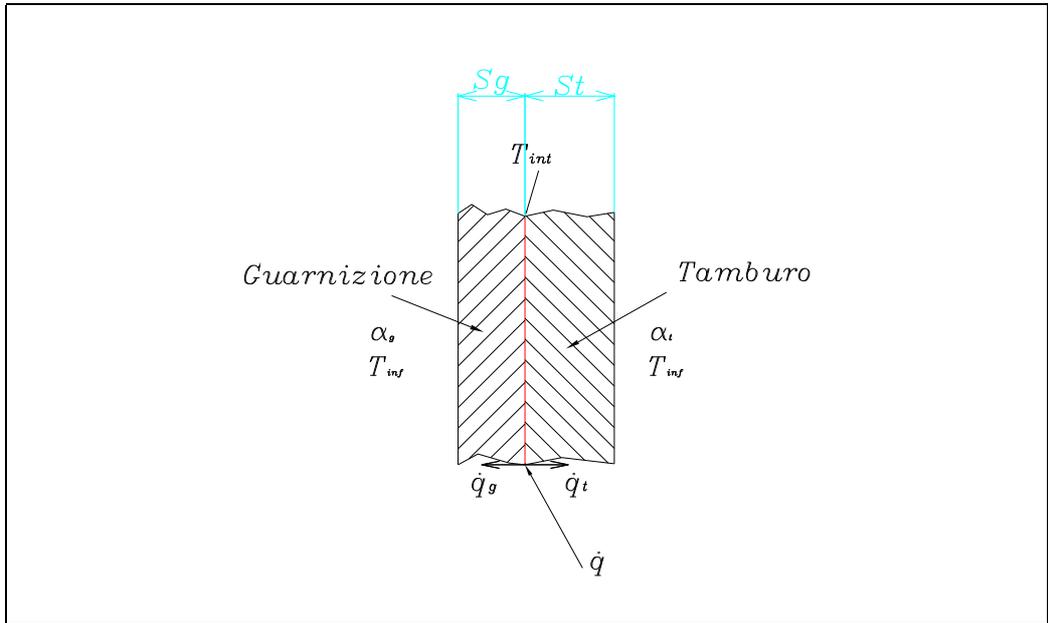
$$\gamma = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_g} \quad (3.2)$$

dove  $\dot{Q}_t$  e  $\dot{Q}_g$  sono rispettivamente la potenza termica entrante nel tamburo e la potenza termica entrante nella guarnizione.

Purtroppo, conoscere il fattore di ripartizione  $\gamma$  non è semplice, senza tener conto che esso non è costante ma dipendente dalle condizioni di funzionamento del freno. Ad esempio esso varia se ci riferiamo a condizioni di funzionamento stazionarie o se ci riferiamo a condizioni transitorie.

Per poter capire ciò consideriamo per semplicità il tamburo e la guarnizione sviluppati in piano: in questo modo si commette un errore modesto se si pensa che di solito i tamburi dei freni hanno raggio di curvatura grande rispetto allo spessore. Di conseguenza, lo studio del flusso di calore attraverso la coppia tamburo-guarnizione si riduce a quello di una trasmissione di calore attraverso due piastre di lunghezza infinita e spessore rispettivamente  $s_t$  ed  $s_g$ . All'interfaccia delle due piastre viene dissipata una determinata potenza termica specifica (per unità di area)  $\dot{q}$  costante. Calcoliamo prima di tutto il fattore di ripartizione in condizioni stazionarie. A tal fine osserviamo la figura 3.1 in cui  $T_{int}$  rappresenta la temperatura di interfaccia, mentre  $T_{inf}$  è la temperatura dell'aria che lambisce le superfici libere del tamburo e della guarnizione ed è supposta mantenuta costante. Definiamo la resistenza termica del tamburo e della guarnizione in questo modo:

$$R_t = \frac{T_{int} - T_{inf}}{\dot{q}_t} \quad (3.3)$$



**Figura 3.1:** Schema per l'analisi termica

$$R_g = \frac{T_{int} - T_{inf}}{\dot{q}_g} \quad (3.4)$$

In tal caso risulterebbe:

$$\gamma = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_g} = \frac{\dot{q}_t}{\dot{q}_g} = \frac{R_g}{R_t} \quad (3.5)$$

dove con il simbolo  $q$  si indica la potenza termica per unità di area. È noto [1, pag.95] anche che in condizioni stazionarie le resistenze termiche delle piastre valgono:

$$R_t = \frac{s_t}{k_t} + \frac{1}{\alpha_t} \quad (3.6)$$

$$R_g = \frac{s_g}{k_g} + \frac{1}{\alpha_t} \quad (3.7)$$

dove  $k_t$  e  $k_g$  sono rispettivamente la conduttività termica del tamburo e della guarnizione d'attrito. Si ricava dunque che:

$$\gamma_s = \frac{s_g/k_g + 1/\alpha_t}{s_t/k_t + 1/\alpha_t} \quad (3.8)$$

che rappresenta il fattore di ripartizione del calore in condizioni stazionarie.

Calcoliamo ora il fattore di ripartizione in condizioni di transitorio. Per raggiungere tale obiettivo si deve prima dire che se si ha una parete di spessore finito inizialmente a temperatura uniforme  $T_{inf}$  e su una delle due superfici libere viene dissipata una potenza specifica  $\dot{q}$  (costante nel tempo), allora l'andamento (approssimato) della temperatura della superficie sulla quale si ha la dissipazione, in funzione del tempo vale [1, pag.98]:

$$T_{sup} \simeq T_{inf} + \frac{\dot{q}}{k} \sqrt{\frac{5at}{4}} \quad (3.9)$$

dove  $k$  ed  $a$  sono rispettivamente la conduttività termica e la diffusività termica del materiale e sono supposti costanti per un determinato materiale. C'è da specificare che la formula precedente è ritenuta valida approssimativamente per i primi istanti di tempo, in particolare per istanti di tempo inferiori al cosiddetto tempo di penetrazione del calore, pari a [1, pag.98]:

$$t_p \simeq \frac{s^2}{5a} \quad (3.10)$$

dove  $s$  è lo spessore della parete. Valori tipici di  $t_p$  per un tamburo sono di circa  $0.5 \div 0.7$  secondi. Si osserva inoltre che nella formula (3.9) non interviene in alcun modo lo spessore del materiale ed il coefficiente di convezione tra parete ed aria: questo si spiega considerando il fatto che la (3.9) è valida solo per i primi istanti di tempo, quando ancora la temperatura della parete esposta all'aria non è aumentata sufficientemente e quindi la piastra si comporta come se fosse infinita, pur avendo spessore finito. Passiamo ora al caso di nostro interesse, ossia al problema delle due piastre interfacciate. Supponiamo che inizialmente sia il tamburo sia la guarnizione siano uniformemente a temperatura  $T_{inf}$  e che all'istante iniziale si cominci a dissipare all'interfaccia una certa potenza specifica  $\dot{q}$  costante. Tale flusso termico si ripartisce, come visibile in (3.1), in un flusso  $\dot{q}_t$  che attraversa il tamburo ed in un flusso  $\dot{q}_g$  che attraversa la guarnizione: di conseguenza, la formula (3.9) si specializza nel seguente modo per il caso particolare del tamburo e della guarnizione interfacciate:

$$T_{int} - T_{inf} \simeq \frac{\dot{q}_t}{k_t} \sqrt{\frac{5a_t t}{4}} \quad (3.11)$$

$$T_{int} - T_{inf} \simeq \frac{\dot{q}_g}{k_g} \sqrt{\frac{5a_g t}{4}} \quad (3.12)$$

Nel fare la precedente operazione di sostituzione si è implicitamente supposto che le quantità  $\dot{q}_t$  e  $\dot{q}_g$  siano costanti nel tempo proprio perché la formula (3.9) è valida per flussi di calore costanti nel tempo; tuttavia, non esiste alcuna ragione per ritenere che ciò si verifichi effettivamente.

Dalle precedenti formule si possono a questo punto ricavare le resistenze termiche applicando le definizioni (3.3) e (3.4):

$$R_t \simeq \sqrt{\frac{5t}{4\rho_t c_t k_t}} \quad (3.13)$$

$$R_g \simeq \sqrt{\frac{5t}{4\rho_g c_g k_g}} \quad (3.14)$$

e quindi:

$$\gamma_b = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_g} = \frac{R_g}{R_t} \simeq \sqrt{\frac{\rho_t c_t k_t}{\rho_g c_g k_g}} \quad (3.15)$$

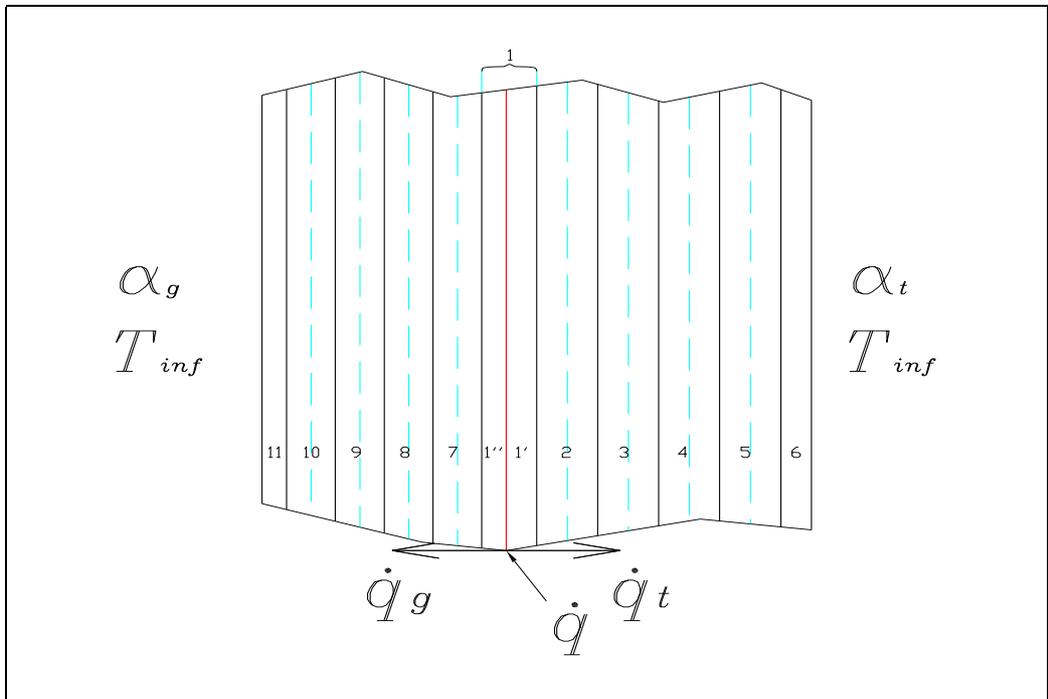
Nel caso in cui il tamburo e la guarnizione abbiano superfici di contatto diverse, come accade effettivamente in un freno a tamburo, allora la precedente diventa:

$$\gamma_b = \frac{\dot{Q}_t}{\dot{Q}_g} = \frac{\dot{q}_t A_t}{\dot{q}_g A_g} = \frac{R_g A_t}{R_t A_g} \simeq \frac{A_t}{A_g} \sqrt{\frac{\rho_t c_t k_t}{\rho_g c_g k_g}} \quad (3.16)$$

dove  $\rho$  e  $c$  sono rispettivamente la densità ed il calore specifico dei materiali. Le formule (3.15) e (3.16) sono da ritenere valide solo per i primi istanti di tempo successivi all'inizio della frenata proprio per il fatto che le formule da cui sono state ricavate (la (3.11) e la (3.12)) sono valide approssimativamente fino al tempo di penetrazione del calore (3.10).

Abbiamo dunque ottenuto due diversi valori del coefficiente di ripartizione del calore: uno corrispondente alle condizioni stazionarie (formula (3.8)) ed uno che può essere utilizzato per frenate di breve durata (formula (3.16)). Sebbene la maggior parte delle frenate siano di breve durata, non si possono escludere frenate di lunga durata, come accade ad esempio in caso di mantenimento di velocità costante in discesa. Di conseguenza, sarebbe riduttivo prendere in considerazione per la costruzione del modello solo uno

dei coefficienti di ripartizione, in quanto esso sarebbe adatto solo a determinate circostanze: l'ideale sarebbe costruire un modello che prescindendo dalla ripartizione del calore e che quindi si adatti sempre, in maniera naturale, a tutte le situazioni. Per ottenere tale obiettivo, prima di considerare il freno a tamburo vero e proprio, si è continuato ad analizzare il problema di due piastre sulla cui interfaccia venga dissipata un potenza termica specifica  $\dot{q}$ , realizzando un modello che riproduca l'andamento di temperatura nelle piastre, ma che prescindesse dalla conoscenza del fattore di ripartizione del calore e dalle ipotesi sulla durata della frenata.



**Figura 3.2:** Discretizzazione delle due piastre

Nella figura precedente si può notare che le due piastre sono state discretizzate ciascuna in elementi. All'interno di ogni elemento la temperatura è uniforme, ma variabile con il tempo. Si suppone che le superfici libere delle piastre siano esposte ad un fluido di temperatura  $T_{inf}$  e coefficiente di convezione  $\alpha_t$  da una parte e  $\alpha_g$  dall'altra parte. Sulla superficie comune (indicata

dalla linea rossa) viene dissipata una potenza termica specifica  $\dot{q}$  che si ripartisce come visibile in figura tra le due piastre. Ora, per ogni elemento si scrive l'equilibrio termico.

### Equilibrio termico dell'elemento 1'

L'elemento 1' riceve un flusso termico  $\dot{q}_t$  da sinistra e ne cede all'elemento 2, quindi il bilancio termico sarà:

$$\dot{q}_t - k_t \frac{(T_{1'} - T_2)}{s_t/5} = \rho_t c_t \frac{s_t}{10} \dot{T}_{1'} \quad (3.17)$$

### Equilibrio termico dell'elemento 1''

L'elemento 1'' riceve un flusso termico  $\dot{q}_g$  da sinistra e ne cede all'elemento 7, quindi il bilancio termico sarà:

$$\dot{q}_g - k_g \frac{(T_{1''} - T_7)}{s_g/5} = \rho_g c_g \frac{s_g}{10} \dot{T}_{1''} \quad (3.18)$$

### Vincolo di continuità della temperatura

La condizione di continuità della temperatura all'interfaccia impone che:

$$T_{1'} = T_{1''} = T_1 \quad (3.19)$$

Inoltre non bisogna dimenticare che:

$$\dot{q}_t + \dot{q}_g = \dot{q} \quad (3.20)$$

### Equilibrio termico degli elementi 2-3-4-5

$$-k_t \frac{(T_i - T_{i-1})}{s_t/5} - k_t \frac{(T_i - T_{i+1})}{s_t/5} = \rho_t c_t \frac{s_t}{5} \dot{T}_i \quad (3.21)$$

### Equilibrio termico dell'elemento 6

$$-k_t \frac{(T_6 - T_5)}{s_t/5} - \alpha_t (T_6 - T_{inf}) = \rho_t c_t \frac{s_t}{10} \dot{T}_6 \quad (3.22)$$

### Equilibrio termico degli elementi 7-8-9-10

$$-k_g \frac{(T_i - T_{i-1})}{s_g/5} - k_g \frac{(T_i - T_{i+1})}{s_g/5} = \rho_g c_g \frac{s_g}{5} \dot{T}_i \quad (3.23)$$

### Equilibrio termico dell'elemento 11

$$-k_g \frac{(T_{11} - T_{10})}{s_g/5} - \alpha_g (T_{11} - T_{inf}) = \rho_g c_g \frac{s_t}{10} \dot{T}_{11} \quad (3.24)$$

In questo modo si ottiene un sistema di quattordici equazioni differenziali del primo ordine nelle quattordici incognite:  $T_{1'}, T_{1''}, \dot{q}_t, \dot{q}_g, T_i$  ( $i = 2, \dots, 11$ ). Il numero delle equazioni si riduce se si vanno a sommare membro a membro la (3.17) e la (3.18) e se si tiene conto delle (3.19) e (3.20):

$$\dot{q} - k_t \frac{(T_1 - T_2)}{s_t/5} - k_g \frac{(T_1 - T_7)}{s_g/5} = \left( \rho_t c_t \frac{s_t}{10} + \rho_g c_g \frac{s_g}{10} \right) \dot{T}_1 \quad (3.25)$$

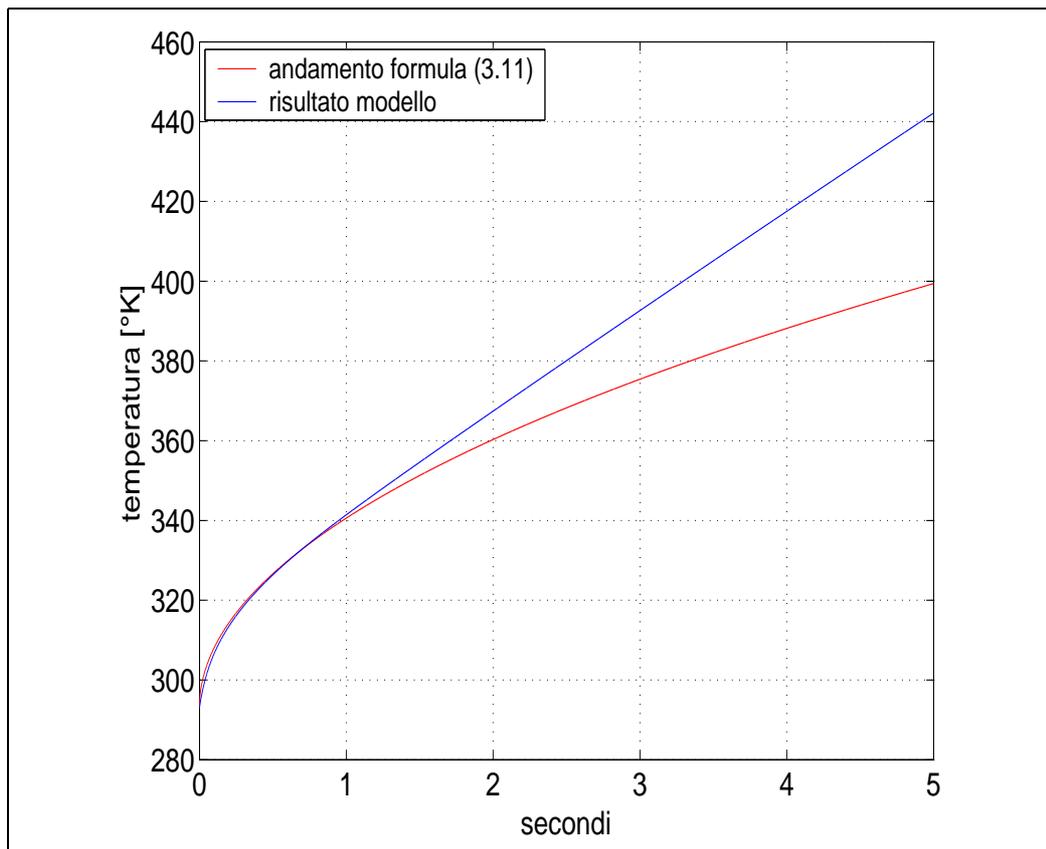
L'equazione precedente può essere sostituita alle equazioni che vanno da (3.17) a (3.20), ottenendo un sistema di 12 equazioni differenziali in cui le uniche incognite sono le temperature  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 11$ ), che può essere risolto una volta che siano note le temperature iniziali  $T_{0i}$ : così facendo abbiamo ottenuto un modello matematico che non ha la necessità di dover conoscere anticipatamente il coefficiente di ripartizione del calore, ma prescinde da esso e dalle ipotesi sulla durata della frenata.

Osserviamo che l'equazione (3.25) poteva essere ottenuta immediatamente se si consideravano gli elementi 1' ed 1'' come un unico elemento di temperatura  $T_1$  e si scriveva l'equazione di equilibrio termico di tale elemento, che denominiamo "elemento interfaccia". Infatti, esso riceve il flusso termico  $\dot{q}$  e scambia calore per conduzione con gli elementi 2 e 7.

Per verificare la validità del modello creato, abbiamo calcolato la temperatura  $T_1$  quando all'interfaccia viene dissipato un flusso termico pari a  $560000 \text{ W/m}^2$ ;  $k$ ,  $\rho$ ,  $c$ , sono quelle relative ai materiali che vengono tipicamente usati per la realizzazione di freni a tamburo. La temperatura fornita dal modello è stata poi confrontata con quella data dalla formula (3.11), in

cui, se si tiene conto del coefficiente di ripartizione,  $\dot{q}_t$  è pari a  $\dot{q}\gamma_b/(1 + \gamma_b)$ . Si ricorda che (3.11) è valida solo per istanti di tempo inferiori al tempo di penetrazione del calore.

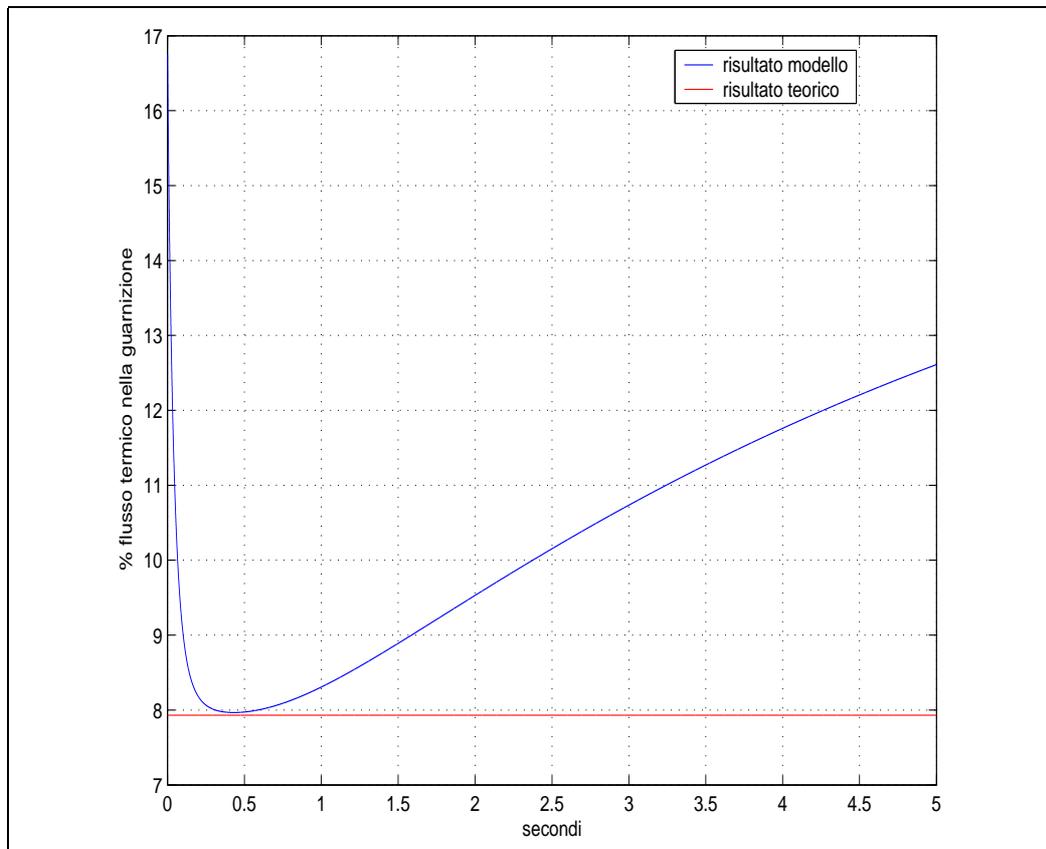
I risultati sono visibili in figura 3.3, in cui in blu è rappresentato il risultato del modello, mentre in rosso quello dato dalla formula (3.11): è chiaro che l'accordo tra i due andamenti è ottimo fino a circa 1 secondo, quindi anche un po' oltre il tempo di penetrazione fornito dalla formula (3.10). Oltre 1 secondo l'accordo viene a mancare proprio perché l'andamento in rosso non è più significativo. Tutto ciò sta a dimostrare che il modello che abbiamo costruito è valido e questo senza fare alcuna ipotesi a priori su come si ripartisce il flusso termico tra le due piastre. Successivamente ad un secondo



**Figura 3.3:** Confronto tra il risultato del modello e la formula (3.11)

l'accordo tra i due andamenti non c'è più perché non è più valida la formula (3.9).

Nella successiva figura 3.4 si riporta l'andamento (in blu) nel tempo della percentuale di flusso termico che va a finire nella guarnizione calcolato utilizzando la formula (3.18). Tale percentuale la si è confrontata con quella prevista teoricamente per brevi tempi di frenata e pari a  $1/(1 + \gamma_b)$  (in rosso). È evidente che fino ad un secondo, il valor medio del flusso calcolato con il



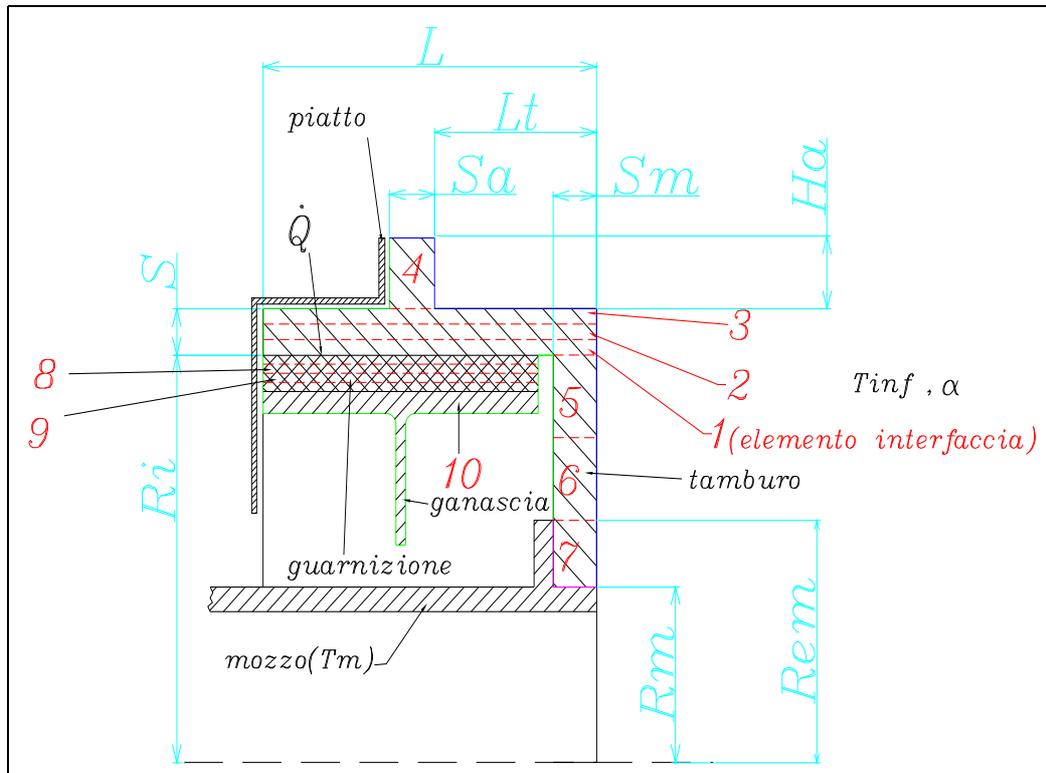
**Figura 3.4:** Confronto tra il risultato del modello e quello teorico con riferimento alla percentuale di flusso che finisce nella guarnizione

modello è molto vicino a quello previsto teoricamente e questo è ancora un risultato che ci conforta circa la validità del modello creato. Dopo il primo secondo l'andamento teorico non è più valido ed infatti il disaccordo tra i due

andamenti è nettamente più evidente. Si può infine osservare che il modello prevede una ripartizione del calore tra tamburo e guarnizione non costante, e non c'è nessuna ragione per ritenere che lo sia, come invece fa la formula (3.15): questo vuol dire che l'ipotesi che le quantità  $\dot{q}_g$  e  $\dot{q}_t$  siano costanti e che ha permesso il passaggio dalla formula (3.9) alle formule (3.11) e (3.12) non è del tutto esatta. Quindi un'altra importante conclusione è che il flusso termico non si ripartisce in maniera costante tra tamburo e guarnizione, anche nel caso in cui la potenza dissipata all'interfaccia sia costante.

## 3.2 Discretizzazione del freno durante la frenata

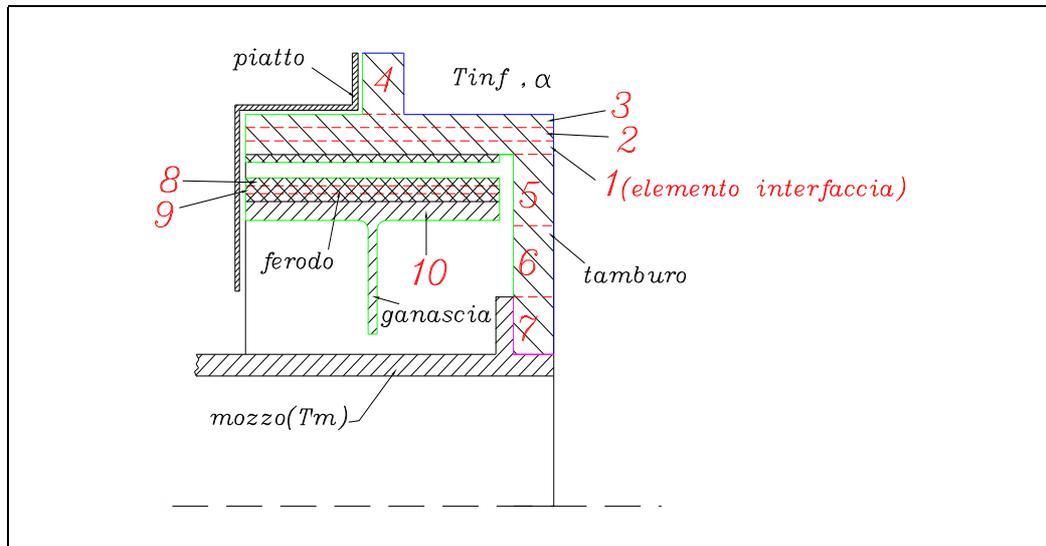
Ora che abbiamo trovato il modo di discretizzare due piastre interfacciate, è possibile utilizzare la stessa idea per discretizzare il freno a tamburo vero e proprio che si differenzia dal problema delle due piastre per il fatto che la sua geometria è più complicata e per il fatto che si interfaccia con il mondo esterno in maniera diversa. Nella figura 3.5 è visibile la sezione di un freno a tamburo: si distingue il tamburo che gira solidale al mozzo il quale gira solidale alla ruota; sono rappresentati inoltre le sezioni della guarnizione, della ganaschia e del piatto, i quali invece non girano, ma sono fissati alla sospensione. Prima di descrivere come abbiamo discretizzato il tamburo è bene capire come il freno scambia calore con l'esterno. In blu è stata indicata la superficie del tamburo che scambia calore per convezione con l'aria con coefficiente di convezione  $\alpha$ . In magenta è indicata la superficie del tamburo che scambia per conduzione con il mozzo che è considerato un pozzo di calore a temperatura  $T_m$ . Dai risultati sperimentali di prove effettuate su pista è scaturito che la maggior parte del calore scambiato dal freno, viene ceduto per convezione all'aria e per conduzione al mozzo; solo la minima parte viene scambiata per irraggiamento: è lecito dunque trascurare il calore ceduto per irraggiamento rispetto a quello scambiato per convezione e conduzione. In verde è indicata la superficie del tamburo e della ganaschia



**Figura 3.5:** Discretizzazione del freno quando è azionato

che viene considerata adiabatica, in quanto tra tamburo e piatto c'è dell'aria ferma che ha un coefficiente di scambio termico molto basso: ciò è attestato anche dalle prove sperimentali che rilevano come la velocità di raffreddamento della ganascia sia molto bassa. Sulla superficie di contatto tra tamburo e guarnizione viene dissipata per attrito una potenza termica  $\dot{Q}$ .

Il freno è stato discretizzato in 10 elementi che nella figura 3.5 sono separati dalle linee tratteggiate rosse. L'elemento "interfaccia" è un elemento che comprende parte del tamburo e parte della guarnizione. Esso riceve la potenza termica  $\dot{Q}$  durante la frenata e scambia calore con gli elementi 2 e 5 del tamburo per conduzione, con l'aria per convezione e con l'elemento 8 della guarnizione per conduzione. Quando il freno non è azionato, allora la potenza termica  $\dot{Q}$  è nulla; non solo: siccome in queste condizioni la guarnizione non è più a contatto con il tamburo (perché richiamata dalle molle



**Figura 3.6:** Discretizzazione del freno quando non è azionato

di richiamo), è nullo anche lo scambio termico tra l'elemento 1 e l'elemento 8: in pratica quando non si frena è come se il modello diventasse quello di figura 3.6. Si può vedere nel modello di figura 3.6 che quando il freno non è azionato, essendo l'elemento 1 composto inescindibilmente da una parte di tamburo e da una parte di guarnizione, la guarnizione d'attrito risulta avere spessore minore di quello che ha nella realtà: naturalmente questa è solo un'approssimazione, che, come si intuisce, diminuisce man mano che aumenta il numero degli elementi in cui si discretizza la guarnizione, perché all'aumentare di tale numero diminuisce la percentuale di guarnizione che va a comporre l'elemento "interfaccia".

L'elemento 10 è un elemento che comprende la ganascia (che in genere è fatta di acciaio) e parte della guarnizione; esso scambia calore solo con l'elemento 9 per conduzione.

Come al solito, nello scrivere l'equazione di equilibrio termico di ogni elemento, la temperatura è stata supposta costante all'interno dell'elemento, ma variabile in funzione del tempo. La temperatura di ogni elemento la si pensa assegnata al suo baricentro. Si osserva, inoltre che una discretizza-

zione come quella di figura 3.5 presuppone l'ipotesi che la temperatura nel tamburo e nella guarnizione vari solo in funzione del raggio. Tuttavia non sono da escludere sia gradienti assiali di temperatura nel tamburo sia assiali e circonferenziali nella ganascia.

### 3.3 Equilibrio termico degli elementi

Ora, si scriveranno l'equazioni di bilancio termico di ogni elemento, a partire dall'elemento 1. Si sottolinea che con  $\dot{Q}_{i \rightarrow j}$  si indica la potenza termica che l'elemento  $i$  cede all'elemento  $j$ , mentre con  $\dot{Q}_{i \rightarrow aria}$  si indica la potenza termica che l'elemento  $i$  cede all'aria per convezione.

#### Elemento 1

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{1 \rightarrow 5} - \dot{Q}_{1 \rightarrow 8} - \dot{Q}_{1 \rightarrow aria} = \\ = \left( \rho_t c_t \frac{2\pi R_i L s}{3} + \rho_g c_g \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1) R_i B s_g}{4} \right) \dot{T}_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove:

$B$  = larghezza della guarnizione;

$s_g$  = spessore della guarnizione;

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = k_t \frac{(T_1 - T_2)}{s/3} 2\pi R_i L$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 5} = k_t \frac{(T_1 - T_5)}{(R_i - R_{em})/4 + s/6} 2\pi R_i s_m$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow aria} = \alpha (T_1 - T_{inf}) 2\pi R_i \frac{s}{3}$$

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 8} = \begin{cases} k_g \frac{(T_1 - T_8)}{s_g/4} 2(\alpha_2 - \alpha_1) R_i B & \text{se } \dot{Q} > 0 \\ 0 & \text{se } \dot{Q} = 0 \end{cases}$$

**Elemento 2**

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - \dot{Q}_{2 \rightarrow 3} - \dot{Q}_{2 \rightarrow aria} = \left( \rho_t c_t \frac{2\pi R_i L s}{3} \right) \dot{T}_2 \quad (3.27)$$

dove:

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 3} = k_t \frac{(T_2 - T_3)}{s/3} 2\pi R_i L$$

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow aria} = \alpha (T_2 - T_{inf}) 2\pi R_i \frac{s}{3}$$

**Elemento 3**

$$\dot{Q}_{2 \rightarrow 3} - \dot{Q}_{3 \rightarrow 4} - \dot{Q}_{3 \rightarrow aria} = \left( \rho_t c_t \frac{2\pi R_i L s}{3} \right) \dot{T}_3 \quad (3.28)$$

dove:

$$\dot{Q}_{3 \rightarrow 4} = k_t \frac{(T_3 - T_4)}{s/6 + H_a/2} 2\pi R_i s_a$$

$$\dot{Q}_{3 \rightarrow aria} = \alpha (T_3 - T_{inf}) \left( 2\pi R_i \frac{s}{3} + 2\pi R_i L_t \right)$$

**Elemento 4**

$$\dot{Q}_{3 \rightarrow 4} - \dot{Q}_{4 \rightarrow aria} = \left\{ \rho_t c_t \pi [(R_i + s + H_a)^2 - (R_i + s)^2] s_a \right\} \dot{T}_4 \quad (3.29)$$

dove:

$$\dot{Q}_{4 \rightarrow aria} = \alpha (T_4 - T_{inf}) \left\{ 2\pi (R_i + s + H_a) s_a + \pi [(R_i + s + H_a)^2 - (R_i + s)^2] \right\}$$

**Elemento 5**

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 5} - \dot{Q}_{5 \rightarrow 6} - \dot{Q}_{5 \rightarrow aria} = \left\{ \rho_t c_t \pi \left[ R_i^2 - \left( \frac{R_i + R_{em}}{2} \right)^2 \right] s_m \right\} \dot{T}_5 \quad (3.30)$$

dove:

$$\dot{Q}_{5 \rightarrow 6} = k_t \frac{(T_5 - T_6)}{(R_i - R_{em})/2} \pi (R_i + R_{em}) s_m$$

$$\dot{Q}_{5 \rightarrow aria} = \alpha (T_5 - T_{inf}) \pi \left[ R_i^2 - \left( \frac{R_i + R_{em}}{2} \right)^2 \right]$$

### Elemento 6

$$\dot{Q}_{5 \rightarrow 6} - \dot{Q}_{6 \rightarrow 7} - \dot{Q}_{6 \rightarrow aria} = \left\{ \rho_t c_t \pi \left[ \left( \frac{R_i + R_{em}}{2} \right)^2 - R_{em}^2 \right] s_m \right\} \dot{T}_6 \quad (3.31)$$

dove:

$$\dot{Q}_{6 \rightarrow 7} = k_t \frac{(T_6 - T_7)}{(R_i - R_{em})/4 + (R_{em} - R_m)/2} 2\pi R_{em} s_m$$

$$\dot{Q}_{6 \rightarrow aria} = \alpha (T_6 - T_{inf}) \pi \left[ \left( \frac{R_i + R_{em}}{2} \right)^2 - R_{em}^2 \right]$$

### Elemento 7

$$\dot{Q}_{6 \rightarrow 7} - \dot{Q}_{7 \rightarrow mozzo} - \dot{Q}_{7 \rightarrow aria} = [\rho_t c_t \pi (R_{em}^2 - R_m^2) s_m] \dot{T}_7 \quad (3.32)$$

dove:

$$\dot{Q}_{7 \rightarrow mozzo} = k_t \frac{(T_7 - T_m)}{(R_{em} - R_m)/2} [\pi (R_{em}^2 - R_m^2) + 2\pi R_m s_m]$$

$$\dot{Q}_{7 \rightarrow aria} = \alpha (T_7 - T_{inf}) \pi (R_{em}^2 - R_m^2)$$

### Elemento 8

$$\dot{Q}_{1 \rightarrow 8} - \dot{Q}_{8 \rightarrow 9} = \rho_g c_g 2\pi R_i B \frac{s_g}{4} \dot{T}_8 \quad (3.33)$$

dove:

$$\dot{Q}_{8 \rightarrow 9} = k_g \frac{(T_8 - T_9)}{s_g/4} 2\pi R_i B$$

**Elemento 9**

$$\dot{Q}_{8 \rightarrow 9} - \dot{Q}_{9 \rightarrow 10} = \rho_g c_g 2\pi R_i B \frac{s_g}{4} \dot{T}_9 \quad (3.34)$$

dove:

$$\dot{Q}_{9 \rightarrow 10} = k_g \frac{(T_9 - T_{10})}{s_g/4} 2\pi R_i B$$

**Elemento 10**

$$\dot{Q}_{9 \rightarrow 10} = \left( \rho_g c_g 2\pi R_i B \frac{s_g}{4} + M_g \right) \dot{T}_{10} \quad (3.35)$$

dove:

$M_g$  = massa della ganascia

Le equazioni che vanno da (3.26) a (3.35), rappresentano un sistema di 10 equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ). Il sistema può essere risolto una volta che sia nota la potenza termica dissipata  $\dot{Q}$  e le condizioni iniziali  $T_{0i}$ . Inoltre, diventa non lineare non appena si va a considerare la variabilità delle proprietà termiche dei materiali (calori specifici e coefficienti di conduzione termica) con la temperatura e la variazione del coefficiente di convezione  $\alpha$  con la velocità del veicolo.

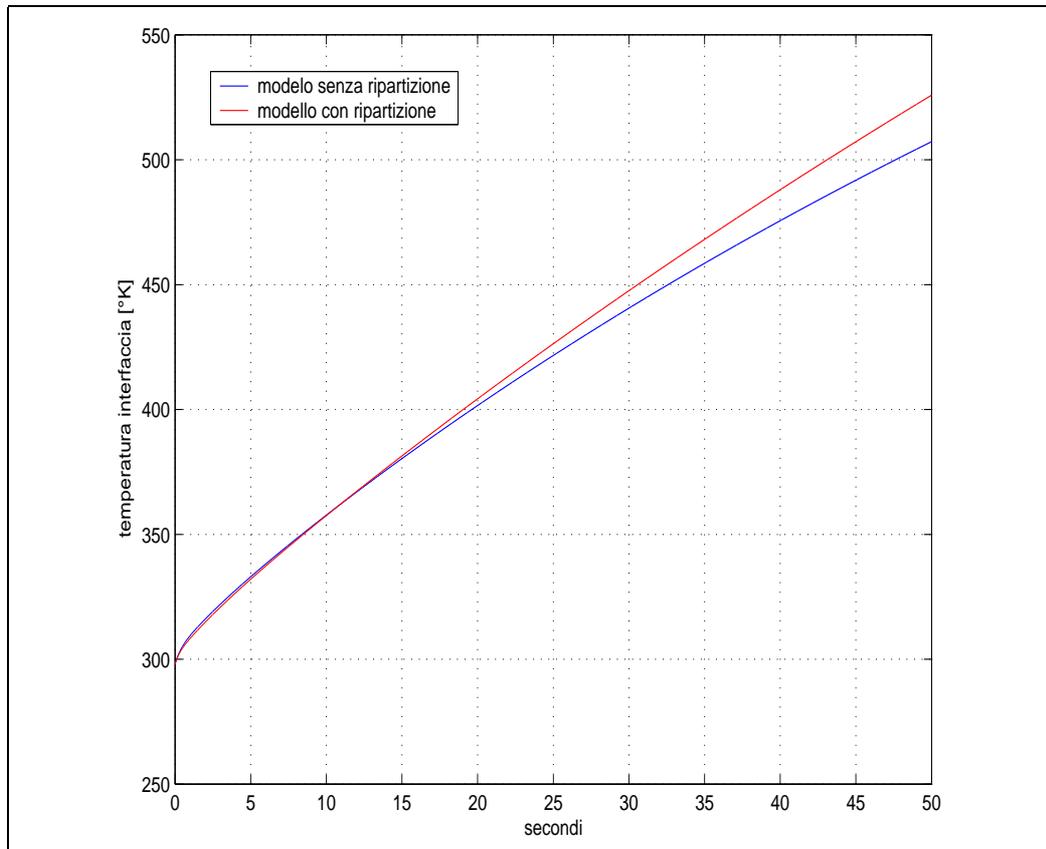
Riguardo al coefficiente di convezione esso è stato misurato con prove di ventilazione su pista che consistono nel portare la temperatura del tamburo ad un certo valore mediante delle frenate di accostamento successive. In seguito, mantenendo la velocità del veicolo costante, si misura l'andamento della temperatura in funzione del tempo. Da quest'andamento si ricava poi il coefficiente di convezione supponendo che per una fissata velocità esso sia indipendente dalla temperatura. Naturalmente se si cambia la velocità di prova si otterrà un valore diverso del coefficiente di convezione. Per tale coefficiente, noi abbiamo ipotizzato un andamento parabolico in funzione della velocità. In tal caso sono bastati solo tre valori (corrispondenti a tre velocità differenti) per determinare l'andamento parabolico (in quanto per

tre punti passa una ed una sola parabola ad asse verticale). Se si dispone di più valori misurati del coefficiente di convezione allora bisognerà trovare la parabola che meglio li approssima utilizzando, ad esempio, il metodo dei minimi quadrati.

Riguardo alla variazione dei calori specifici e dei coefficienti di conduzione termica con la temperatura, essa è stata fornita dal C.R.F. ed implementata nel modello semplicemente con delle look-up table.

Abbiamo confrontato i risultati che ci da il modello appena creato, che non fa alcuna ipotesi sulla ripartizione del calore, con i risultati di un modello che si differenzia dal primo per il semplice fatto che ipotizza la ripartizione del calore data dalla formula (3.16) (non si utilizza la (3.15) perché le aree a contatto sono di entità diversa). La discretizzazione del freno per il modello che usa la (3.16) è identica a quella del primo modello: in questo modo le differenze nei risultati sono da imputare esclusivamente all'ipotesi sulla ripartizione del calore. In figura (3.7) è rappresentato l'andamento in funzione del tempo della temperatura dell'interfaccia quando la pressione idraulica è pari a 50 bar e la velocità di marcia è di 21 Km/h (può ad esempio rappresentare una manovra di mantenimento di velocità costante in discesa). Anche in questo caso si può notare un ottimo accordo tra i due modelli fino ad circa quindici secondi: oltre le differenze cominciano ad essere rilevanti e sono da imputare sostanzialmente al fatto che la ripartizione del calore data dalla formula (3.16) non è più valida. Ciò è confermato anche dalla figura 3.8, la quale confronta la percentuale di potenza termica che finisce nella guarnizione (calcolata con il modello che prescinde dalla conoscenza della ripartizione del calore) con quella che si ricava considerando la (3.16) e che è pari a  $1/(1 + \gamma_b)$ : si può notare che il valor medio della curva in blu fino a circa 15 secondi coincide approssimativamente con il valore indicato dalla retta rossa. La potenza termica che finisce nella guarnizione è stata calcolata con la seguente formula:

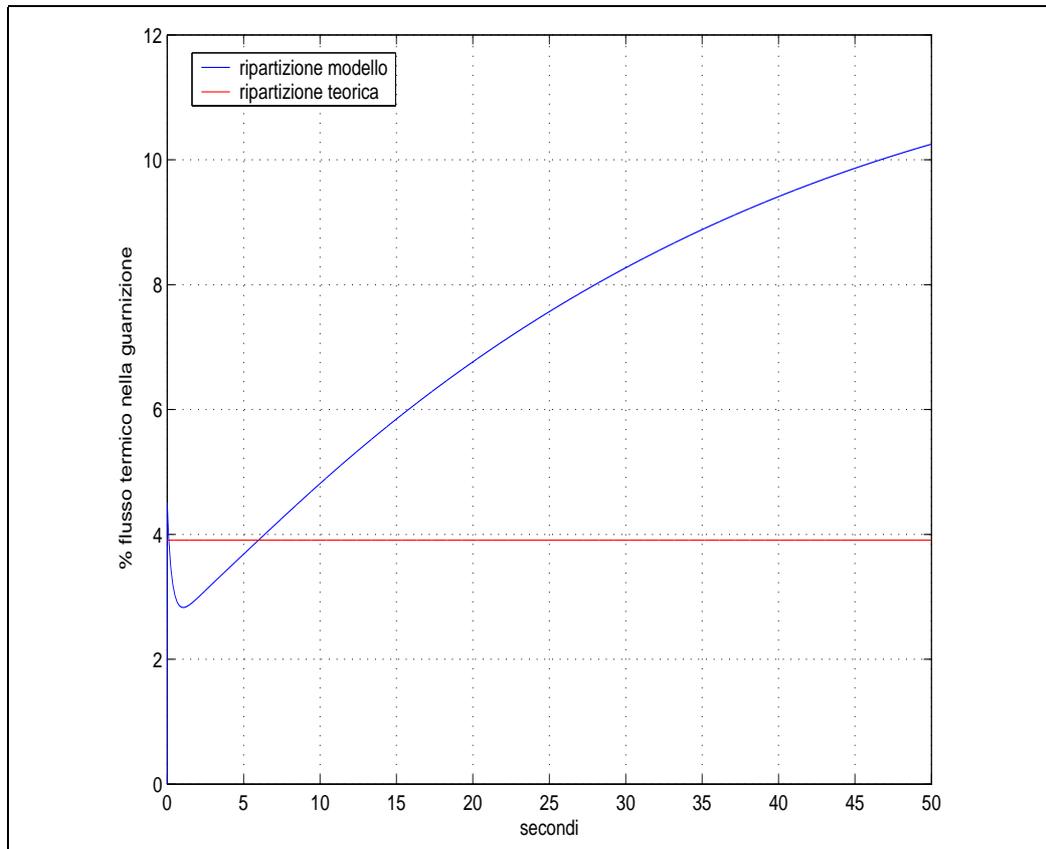
$$\dot{Q}_g = \dot{Q}_{1 \rightarrow 2} + \rho_g c_g \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1) R_i B s_g \dot{T}_1}{4} \quad (3.36)$$



**Figura 3.7:** Confronto della temperatura tra il modello che ipotizza la ripartizione e quello che non la ipotizza

Si può sostanzialmente concludere che i risultati offerti dai due modelli (quello che ipotizza la ripartizione e quello che non la ipotizza) sono praticamente coincidenti per brevi tempi di frenata (per il freno utilizzato nelle simulazioni circa 15 secondi). I due modelli differiscono, invece, non appena i tempi di frenata diventano più lunghi: ciò accade perché non è più valido il modello che usa la ripartizione di calore data dalla formula (3.16). Tutti questi erano risultati attesi, viste le conclusioni del paragrafo 3.1.

Si osserva, inoltre, che il modello che prescinde dalla ripartizione del calore è preferibile (oltre che per il motivo che abbiamo appena detto) perché tiene conto dell'influenza che si può avere nei risultati se ganascia e tambu-



**Figura 3.8:** Confronto tra il modello che ipotizza la ripartizione e quello che non la ipotizza

ro sono a temperature diverse, come accade nel caso di una prova di fade con raffreddamento in cui la differenza può essere dell'ordine dei centinaia di gradi.

Infine si aggiunge che se si estende fino a 1000 secondi la simulazione con cui è stata ottenuta la curva blu della figura 3.8 (naturalmente una frenata di 1000 secondi non ha alcun senso realistico), si può vedere (figura 3.9) che la potenza termica che finisce nella ganascia tende a zero ed anche questo è un risultato atteso perché man mano che passa il tempo ci si avvicina alle condizioni stazionarie ed in tal condizioni tutto il calore finisce dalla parte del tamburo perché si è imposto che la superficie di scambio della ganascia

fosse adiabatica (vedi figura 3.5) . Naturalmente questi risultati non sono ottenibili con il modello che presuppone la ripartizione del calore.

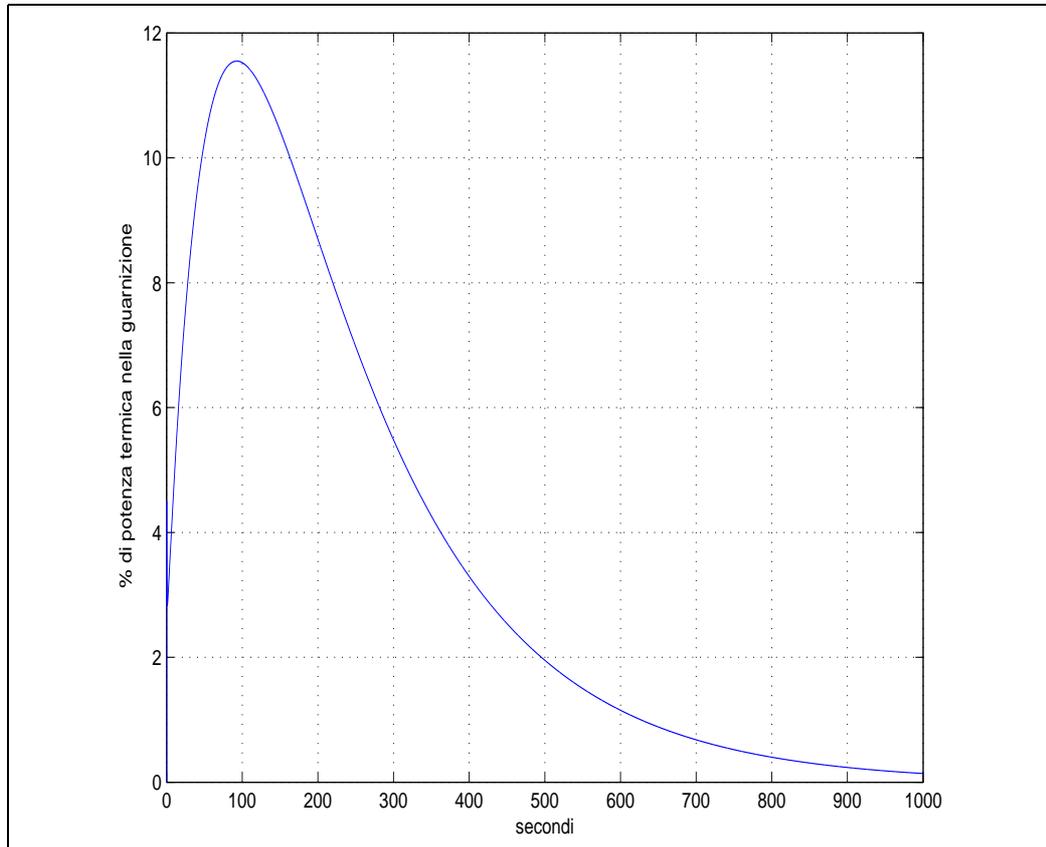


Figura 3.9: Percentuale di potenza termica che finisce nella guarnizione

### 3.4 Riepilogo

In questo capitolo si è svolta l'analisi termica del freno a tamburo con l'obiettivo di determinare l'andamento della temperatura in funzione del tempo durante la frenata. Il primo approccio seguito è stato quello di studiare separatamente la storia termica del tamburo e della guarnizione. Ciò comporta l'esigenza di definire il coefficiente di ripartizione del calore, ossia come la potenza termica sviluppata per attrito si ripartisce tra tamburo e guarnizione.

Tuttavia l'impossibilità di definire un coefficiente di ripartizione che fosse valido per qualsiasi situazione (condizioni stazionarie e condizioni transitorie) ha evidenziato l'esigenza di definire un modello che prescindesse dalla conoscenza dal fattore di ripartizione e dalle ipotesi di durata della frenata. Ciò è stato ottenuto con una opportuna discretizzazione del freno in elementi, in particolare grazie all'utilizzo dell'elemento "interfaccia" (ossia un elemento che comprende contemporaneamente parte del tamburo e parte della guarnizione). All'interno di ogni elemento la temperatura è uniforme ma variabile nel tempo. Gli elementi scambiano calore tra di loro e con l'esterno, sia per conduzione, sia per convezione. Da prove sperimentale si è visto che è possibile trascurare il calore scambiato per irraggiamento rispetto a quello scambiato per convezione. Nella parte finale del capitolo si è sottolineato come il secondo approccio permetta una descrizione più realistica del fenomeno termico (ad esempio riuscendo a prevedere come il coefficiente di ripartizione non sia costante, ma variabile durante la frenata).

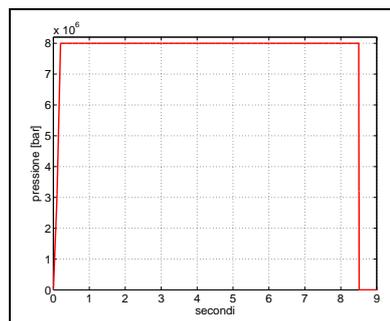
# Capitolo 4

## Risultati di alcune simulazioni

*In questo capitolo verranno presentati i risultati di alcune simulazioni per dimostrare che il modello sviluppato soddisfa gli obiettivi che ci siamo prefissi all'inizio della tesi.*

### 4.1 Frenata al limite dalla velocità di 150 Km/h

È stata fatta la simulazione di una prova di frenata dalla velocità di 150 Km/h con una decelerazione costante di  $0.5g$ . È stata imposta la pressione all'interno del cilindretto ed ha l'andamento mostrato in figura 4.1: in pratica dopo due decimi di secondo è al valore di regime di 150 bar. Nella realtà

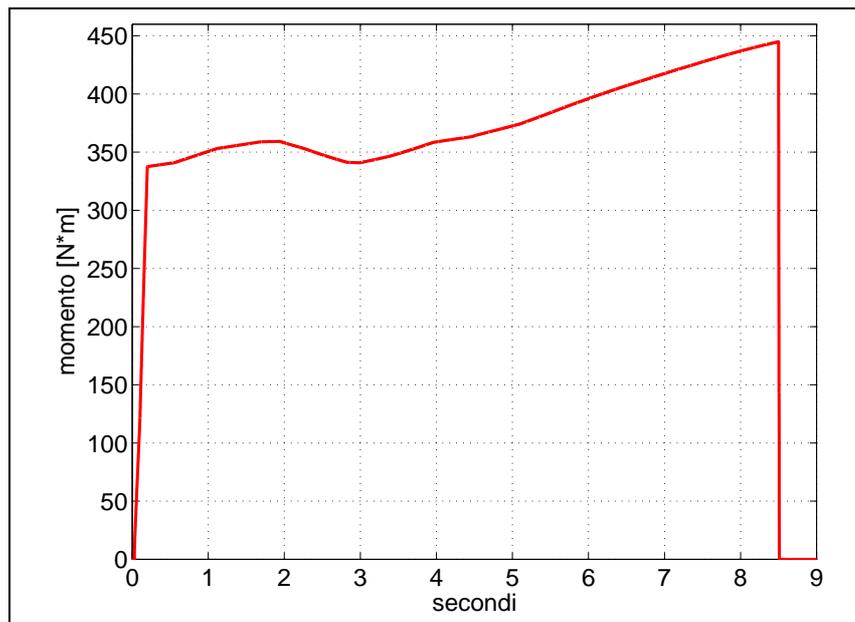


**Figura 4.1:** Andamento della pressione nel cilindretto

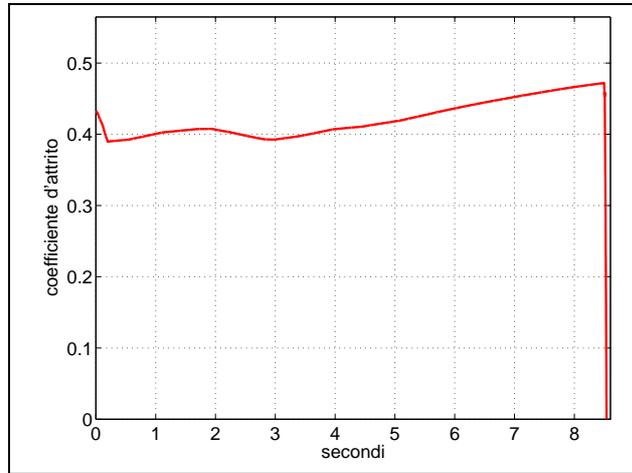
questo modo di procedere non è del tutto esatto perché la pressione in una

prova di frenata non può essere imposta ma deve essere una conseguenza delle modalità con cui si svolge la prova stessa: in tal caso deve avere un andamento tale da generarmi una decelerazione di  $0.5 g$ . Questo fatto richiederebbe l'integrazione del modello all'interno di un simulatore completo di veicolo per ottenere dei risultati ancora più realistici, in quanto si terrebbe conto di tutta la dinamica del veicolo durante la frenata. Tuttavia in mancanza di una simile integrazione, si è proceduto per quest'altra via, che pur essendo non del tutto esatta, riesce a fornire comunque delle importanti indicazioni. Il freno utilizzato per la simulazione è un freno a tamburo di diametro interno di 181 mm e si suppone di non far uso di ABS.

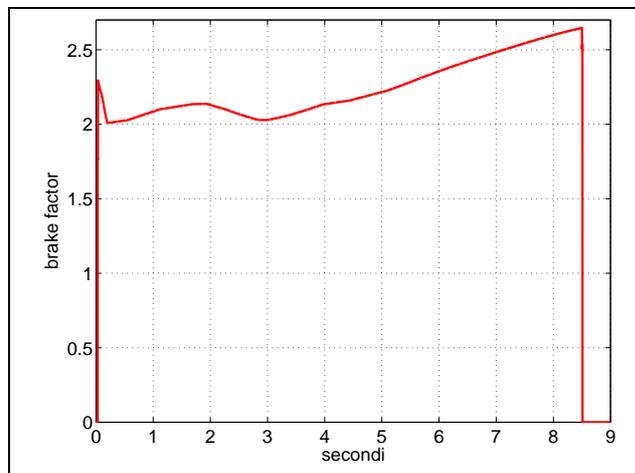
Verranno ora riportati una serie di grafici ottenuti dopo aver effettuato la simulazione.



**Figura 4.2:** Andamento del momento frenante



**Figura 4.3:** Andamento del coefficiente di attrito



**Figura 4.4:** Andamento del Brake Factor

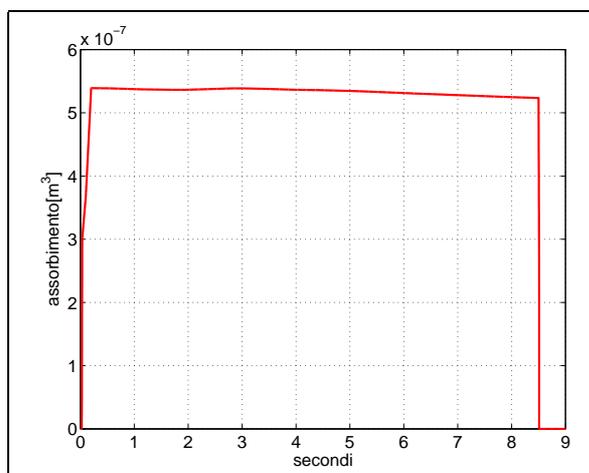


Figura 4.5: Assorbimento idraulico

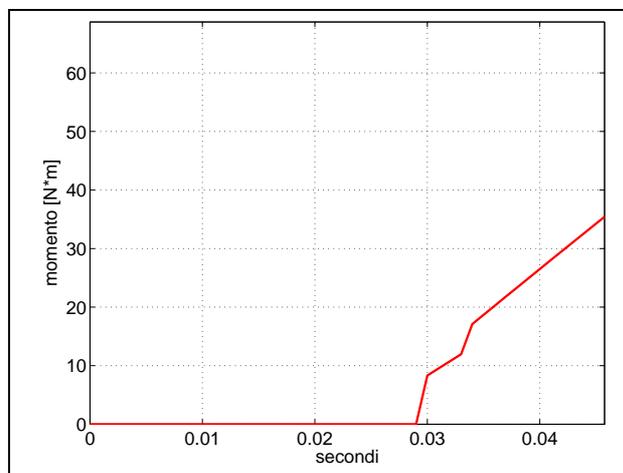


Figura 4.6: Tempo di ritardo

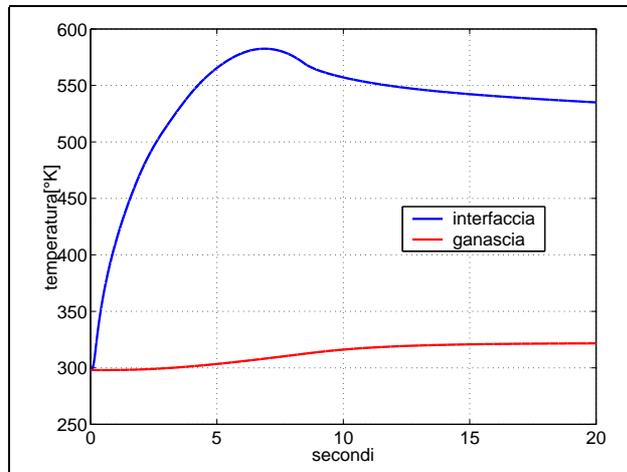


Figura 4.7: Temperature della ganascia e dell'interfaccia

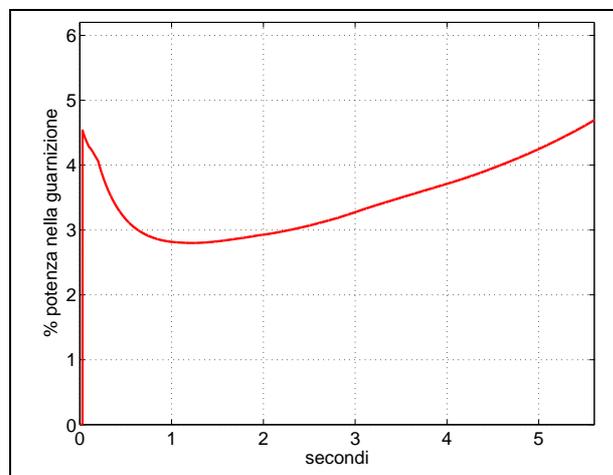


Figura 4.8: % di potenza termica che finisce nella guarnizione

Dalle figure precedenti è possibile dedurre delle osservazioni interessanti:

- il brake factor, dopo un primo calo, aumenta e ciò è in accordo sostanzialmente con l'andamento del coefficiente di attrito e del momento fre-

nante che presentano lo stesso comportamento. Probabilmente questo si spiega pensando che il coefficiente di attrito in genere diminuisce con l'aumento della temperatura e della velocità di rotazione della ruota: quindi, immediatamente dopo l'inizio della frenata prevale l'influenza dell'aumento della temperatura, mentre man mano che la velocità cala, prevale l'influenza di quest'ultimo parametro.

- Dalla figura 4.1 si rileva che il tempo di ritardo allo sviluppo del momento frenante sulla ruota può essere stimato intorno ai 3 centesimi di secondo che alla velocità di 150 Km/h corrispondono a un metro e 25 cm di spazio percorso dal veicolo. In esso sostanzialmente si sommano due contributi: il tempo necessario alla pressione di diventare maggiore della pressione di accostamento ed il tempo impiegato dalla ganascia ad accostarsi al tamburo; naturalmente, è fortemente influenzato dalla velocità con cui sale la pressione nel circuito idraulico. Inoltre, insieme al tempo di reazione del guidatore determina il ritardo all'inizio della frenata vera e propria.
- La temperatura della ganascia continua a salire anche molto dopo la fine della frenata: questo è dovuto al ritardo termico con cui il calore penetra nella ganascia ed è un fatto confermato dai dati sperimentali.
- La maggior parte della potenza termica finisce nel tamburo.

## 4.2 Manovra di fade con raffreddamento

La prova consiste nell'effettuare 25 frenate consecutive intervallate da 45 secondi che fanno oscillare la velocità della vettura da 100 Km/h a 60 Km/h, con una pressione frenante tale da indurre una decelerazione di  $0.5g$ . Anche in questo caso è stata imposta la pressione, per cui valgono le stesse considerazioni fatte all'inizio del paragrafo 4.1. Il freno utilizzato per la simulazione è lo stesso della prova descritta nel paragrafo precedente. Non è stato utilizzato ABS. I risultati ottenuti sono i seguenti:

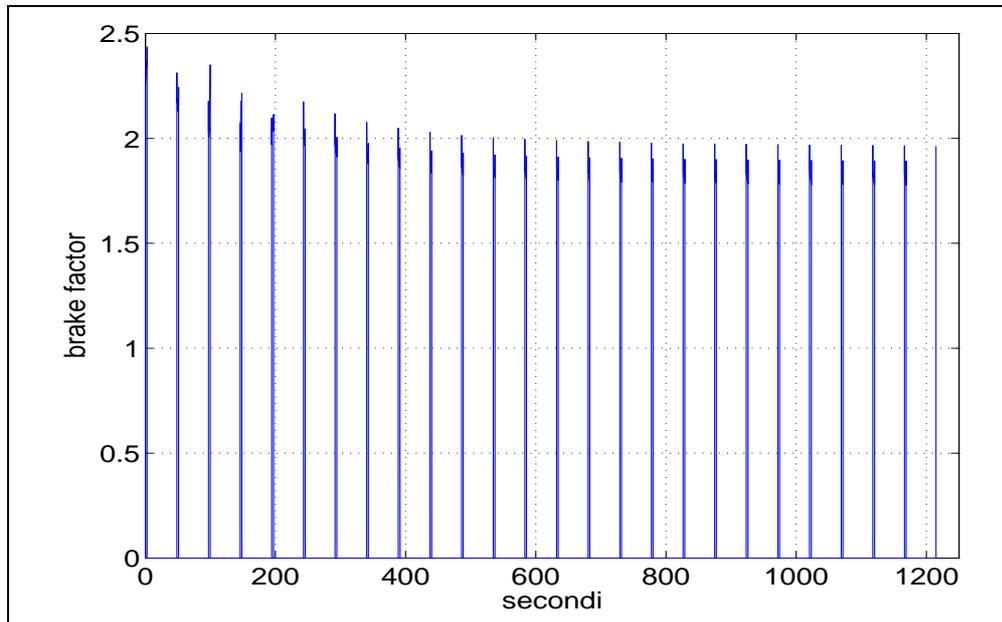


Figura 4.9: Brake factor

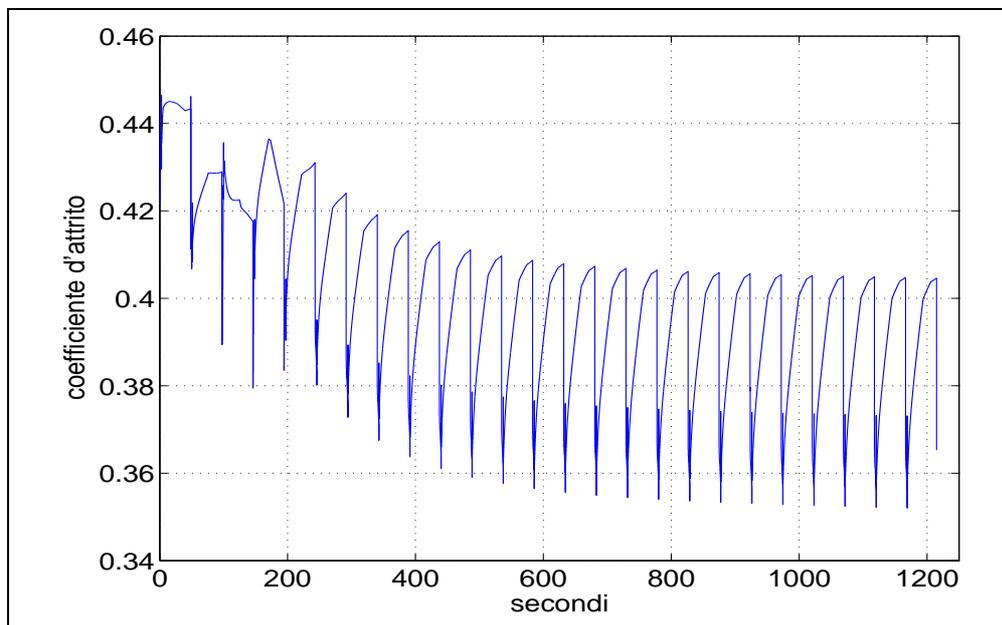
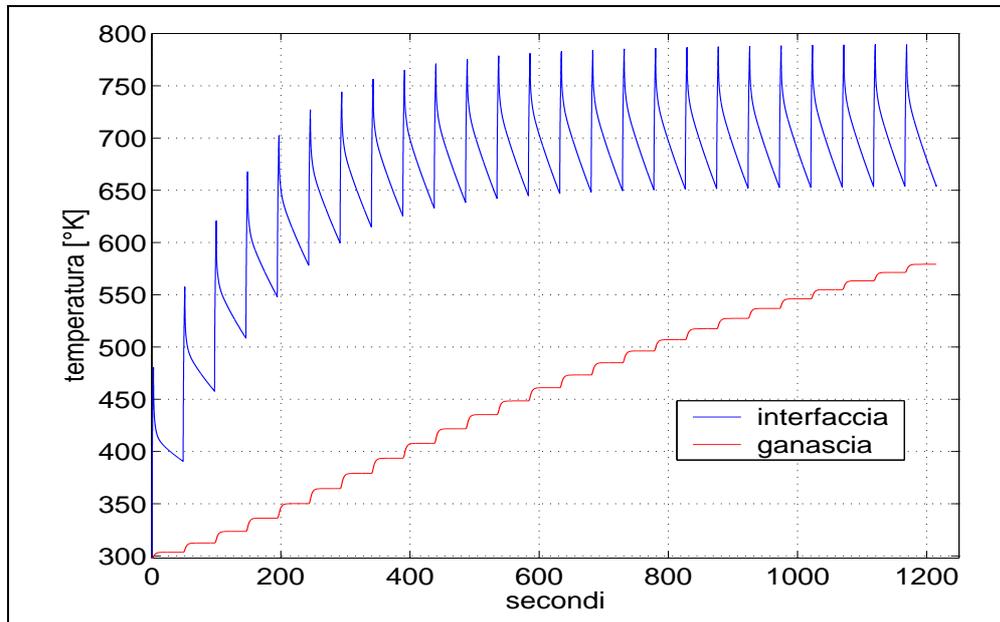


Figura 4.10: Coefficiente d'attrito



**Figura 4.11:** Temperatura

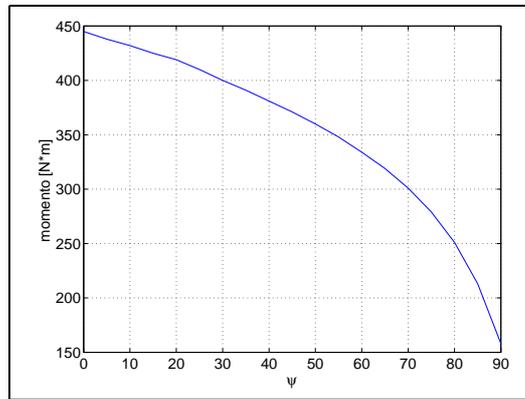
Dalle figure precedenti è possibile fare due osservazioni:

- a causa dell'aumento di temperatura c'è una diminuzione del coefficiente di attrito e quindi del brake factor: tuttavia essi tendono ad un valore di regime quando il numero delle frenate successive diventa alto;
- sebbene la maggior parte della potenza termica finisca nel tamburo e quindi l'aumento di temperatura della ganascia ad ogni frenata sia di soli pochi gradi (circa 10-15 gradi), quest'ultima non ha la possibilità di raffreddarsi velocemente come il tamburo fra una frenata e l'altra: di conseguenza man mano che aumenta il numero delle frenate la differenza di temperatura tra i due elementi tende a diminuire.

### 4.3 Esempi di utilizzo del modello per la progettazione

Mostreremo come il modello possa facilmente essere utilizzato per la progettazione del freno a tamburo.

Prima analizzeremo come varia il momento frenante al variare dell'inclinazione dell'angolo  $\psi$  di figura 2.8 a parità di coefficiente di attrito, di velocità di rotazione e di pressione idraulica:



**Figura 4.12:** Variazione del momento con l'angolo  $\psi$

Si conclude facilmente che conviene fare la superficie d'appoggio del blocchetto inferiore verticale perché questo produce la massima capacità frenante.

Ora si mostrerà come scegliere le dimensioni  $H_a$  ed  $S_a$  dell'aletta di figura 3.6 per massimizzare la velocità di raffreddamento del freno. Per ottenere tale risultato, sono state fatte delle simulazioni di prove di ventilazione a velocità costante e a partire dalla temperatura di 700 °K variando le dimensioni dell'aletta.

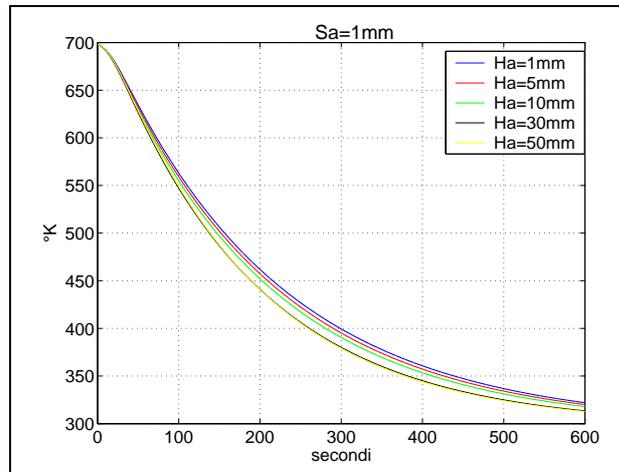


Figura 4.13: Temperatura del freno

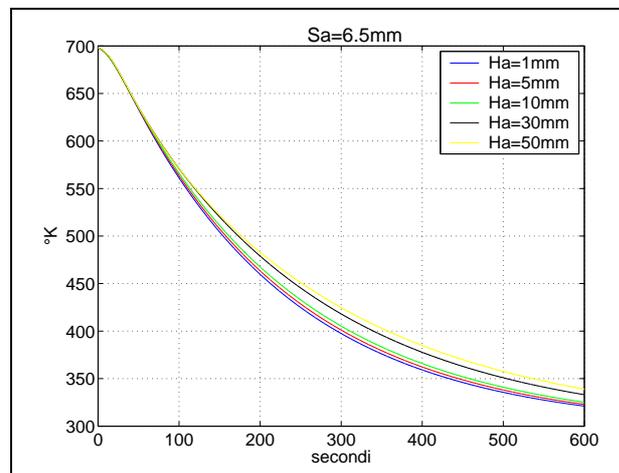
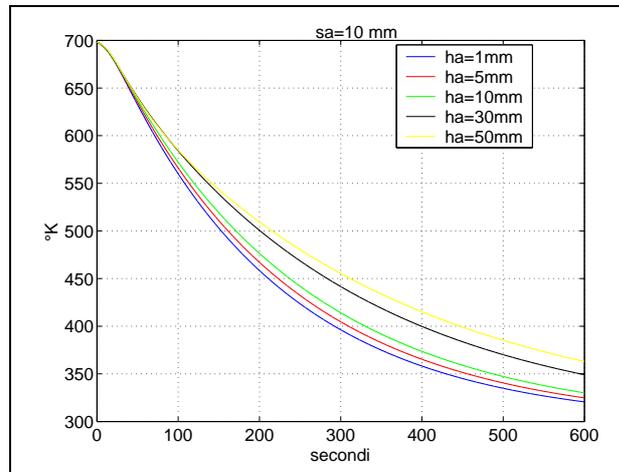


Figura 4.14: Temperatura del freno



**Figura 4.15:** Temperatura del freno

Dalle figure precedenti è possibile stabilire che se si fa l'aletta di piccolo spessore, conviene farla lunga perché aumenta di molto la superficie di scambio termico ma la massa (e quindi la capacità termica del freno) aumenta di poco. Se, invece, la si fa di grosso spessore, conviene farla corta perché all'aumentare della lunghezza aumenta troppo la capacità termica rispetto alla superficie di scambio termico. In ogni caso, per avere la massima velocità di raffreddamento è bene fare l'aletta di piccolo spessore e lunga, piuttosto che grossa e corta.

# Capitolo 5

## Conclusioni

Il lavoro di questa tesi è consistito nel modellare il comportamento termico e meccanico di un freno a tamburo.

Data la grande varietà di tipologie di freni a tamburo esistenti e di cui è stata fatta una breve carrellata nel primo capitolo, è stato preso come riferimento per la modellazione il freno Simplex a ganasce flottanti, che tra l'altro è anche la tipologia più frequentemente usata dalle vetture che adottano freni a tamburo sull'assale posteriore.

Il modello è stato concettualmente diviso in due blocchi: uno che descrive il comportamento meccanico ed uno che descrive il comportamento termico. I due blocchi interagiscono fra di loro e con l'esterno ricevendo segnali e fornendone altri. In pratica l'intero modello può essere visto come una scatola chiusa che riceve in input la pressione idraulica, la velocità di marcia e la velocità di rotazione della ruota, mentre restituisce come segnali di output il momento frenante, il brake factor, l'assorbimento idraulico e la temperatura raggiunta dal freno.

Con riferimento alla modellazione del comportamento meccanico, dopo una serie di ipotesi ragionevoli (problema piano, piccoli spostamenti, ganasce, pistone e tamburo rigidi, guarnizione d'attrito deformabile), si è fatta una netta distinzione tra la fase in cui la ganasce si accosta al tamburo per recuperare il gioco e la fase che segue tale recupero (durante la quale c'è lo

sviluppo del momento frenante). Per la prima fase (che sostanzialmente è quella responsabile del tempo di ritardo) è stato fatto un equilibrio di tipo dinamico, mentre per la seconda un equilibrio di tipo statico.

Per quanto riguarda la stima degli assorbimenti idraulici si è supposto che essi fossero la somma di due soli contributi: la corsa del pistone necessaria affinché venga recuperato il gioco e la corsa effettuata a causa della compressione radiale della guarnizione.

Nel capitolo tre è stata eseguita l'analisi termica che ha portato alla formazione di un modello in cui il freno è visto discretizzato in 10 elementi, all'interno dei quali la temperatura è uniforme ma variabile nel tempo. Gli elementi scambiano calore fra di loro e con l'esterno, sia per conduzione, sia per convezione. È stato trascurato il calore scambiato per irraggiamento: naturalmente questo è supportato dai dati sperimentali. Grazie all'elemento "interfaccia" (ossia un elemento che comprende contemporaneamente parte del tamburo e parte della guarnizione), è stato possibile costruire un modello che non fa alcuna ipotesi su come si ripartisce la potenza termica tra i due elementi a contatto, anzi può essere utilizzato per ricavare proprio il fattore di ripartizione (figura 4.1).

Le equazioni meccaniche e termiche sono state implementate in ambiente Matlab-Simulink ottenendo un modello non eccessivamente complicato e abbastanza veloce nell'esecuzione, ma che allo stesso tempo raggiunge gli obiettivi che si sono prefissi all'inizio di questo lavoro: ossia la conoscenza del momento frenante, dell'andamento della temperatura nel tempo, dell'assorbimento idraulico e del tempo di ritardo.

Nel quarto capitolo è stato visto come il modello possa essere impiegato per simulare manovre di frenata vere e proprie e quante informazioni utili per chi progetta i freni possono essere ottenute da una singola simulazione. Comunque, è necessaria l'integrazione del modello di freno all'interno di un simulatore completo di veicolo in maniera tale da ottenere dei risultati ancora più realistici dalle simulazioni di frenata. Sempre nello stesso capitolo sono stati riportati degli esempi in cui il modello viene utilizzato per ottimizzare

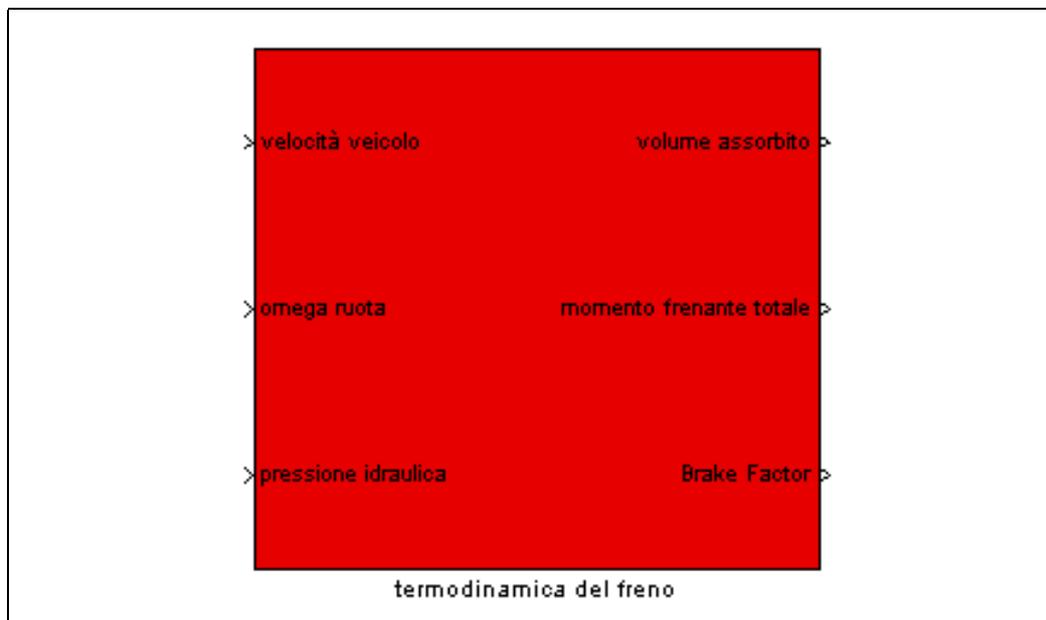
alcuni parametri (ad esempio momento frenante e velocità di raffreddamento) facendo variare altri (ad esempio le dimensioni o i materiali costituenti il freno).

Rimane da effettuare una validazione del modello confrontando i dati ottenuti dalle simulazioni con quelli rilevati durante le prove di frenata su pista. Naturalmente per effettuare ciò è necessario fornire al modello, oltre ai parametri geometrici del freno utilizzato durante la prova, tutti i vari parametri fisici, come le proprietà termiche dei materiali costituenti (e come queste variano in funzione della temperatura), il coefficiente di convezione tra tamburo ed aria e la sua variazione in funzione della velocità veicolo (ottenuta ad esempio con prove di ventilazione).

# Appendice A

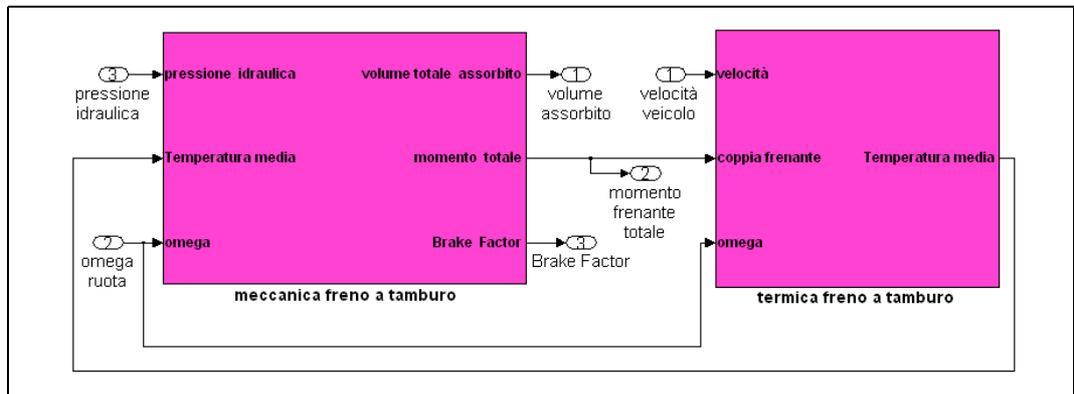
## Implementazione del modello in Matlab-Simulink

Il freno appare come una scatola chiusa che riceve in ingresso dei segnali (la pressione idraulica dell'impianto, la velocità del veicolo, la velocità di rotazione della ruota) e restituisce altri (momento frenante, essorbimento idraulico, Brake Factor).

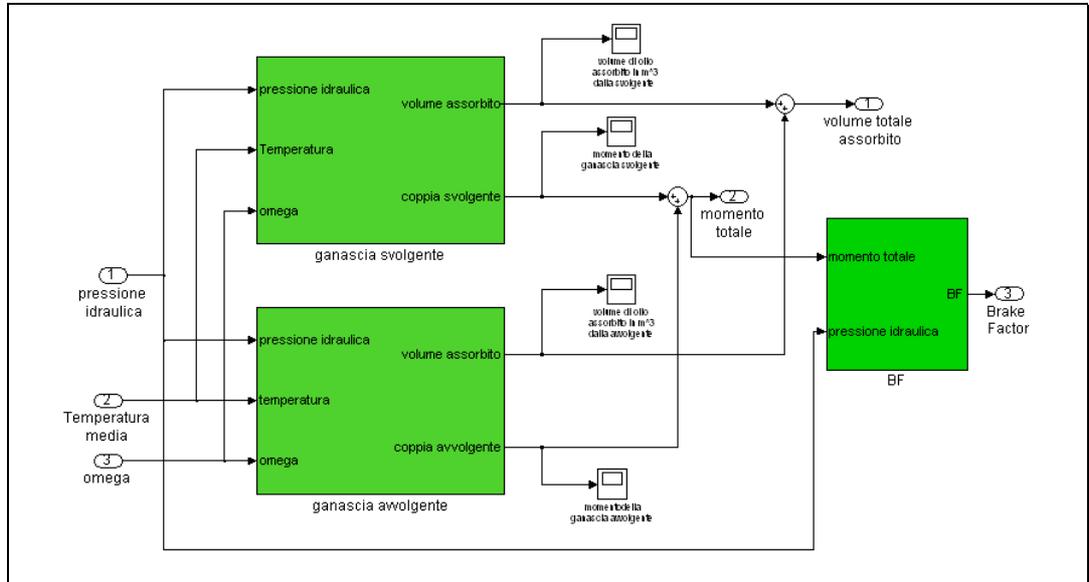


Il modello è suddiviso in due blocchi, uno in cui sono implementate le equazioni che regolano la meccanica del freno ed uno in cui sono implementate le equazioni che descrivono il comportamento termico del freno:

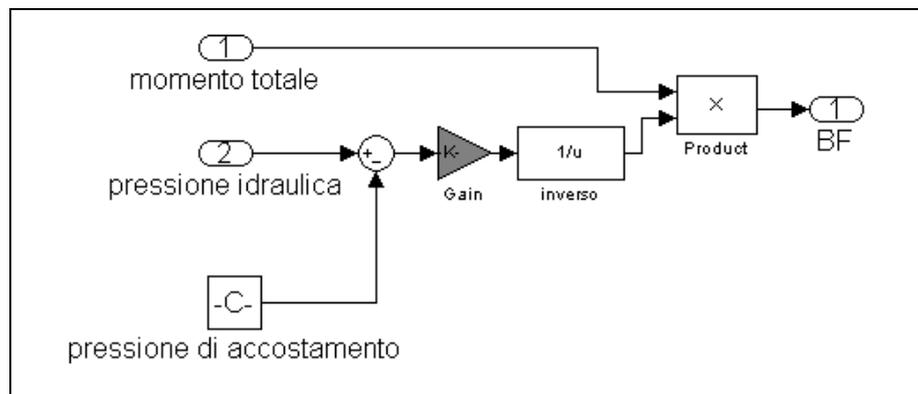
- il blocco meccanico riceve la pressione idraulica, la temperatura media del freno e la velocità angolare della ruota: quest'ultimi due segnali servono per determinare il coefficiente di attrito tra tamburo e guarnizione. Esso fornisce il momento frenante, il Brake Factor ed il volume di fluido assorbito.
- Il blocco termico riceve la velocità del veicolo (in quanto il coefficiente di convezione tra tamburo ed aria ne è funzione), il momento frenante e la velocità angolare della ruota che con il loro prodotto determinano la potenza termica dissipata nel freno per attrito. Esso fornisce la temperatura delle varie parti di cui è composto il freno.



## A.1 Il blocco meccanico

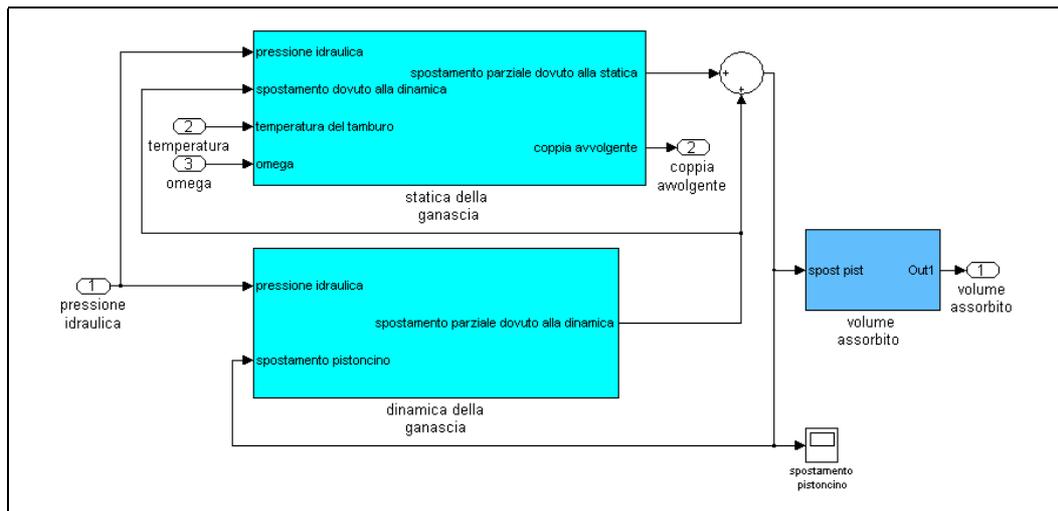


All'interno di tale blocco ci sono due sottosistemi: in uno è implementata la meccanica della ganascia avvolgente, mentre nell'altro quella della ganascia svolgente. Ciascuna delle due ganasce contribuisce ad una quota del momento frenante e dell'assorbimento idraulico. Esiste poi un terzo sottosistema che calcola il Brake factor del freno, per cui al suo interno è implementata l'equazione (1.2):



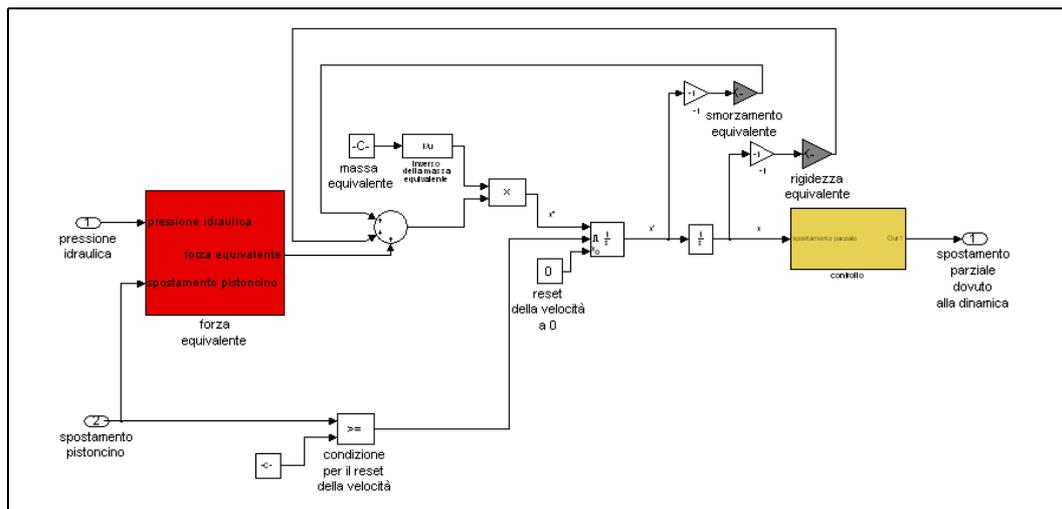
### A.1.1 La ganascia

All'interno del blocco "ganascia" ci sono due sottosistemi: uno che studia la dinamica fino all'istante in cui viene recuperato il gioco ed uno che studia la statica da quell'istante in poi. Ciascuno dei due contribuisce allo spostamento totale del pistoncino che moltiplicato per l'area del cilindretto fornisce il volume di fluido assorbito da una ganascia. Il blocco che studia la statica inoltre fornisce anche il momento frenante della ganascia in considerazione.



## La dinamica della ganascia

All'interno del blocco "dinamica della ganascia" è implementata l'equazione differenziale (2.12) che fornisce lo spostamento del pistone in funzione del tempo fino al momento in cui viene recuperato il gioco. Sono inoltre presenti tutta una serie di controlli per cercare di integrare in maniera ottimale tale blocco con quello che descrive il comportamento statico: ad esempio la velocità viene resettata a zero se si rileva che lo spostamento totale del pistone è maggiore di quello necessario a recuperare il gioco tra guarnizione e tamburo (formula (2.13)); in questo modo il contributo allo spostamento totale offerto da tale blocco è costante e pari al valore espresso da (2.13).



Il blocco rosso della figura precedente calcola la forza equivalente (termine a secondo membro della (2.12)). Anche qui però vengono effettuati dei controlli che fanno in modo che se la forza equivalente è negativa e lo spostamento del pistone è nullo, allora essa viene considerata nulla in quanto in tale condizione la ganascia è ferma perchè spinta contro la battuta (traversino 12 di figura 1.15).

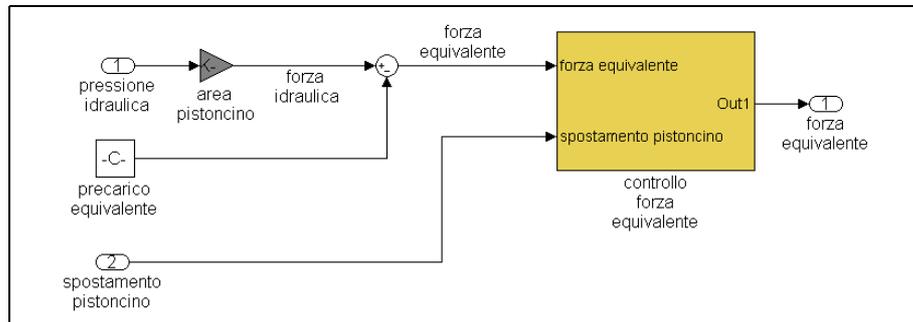
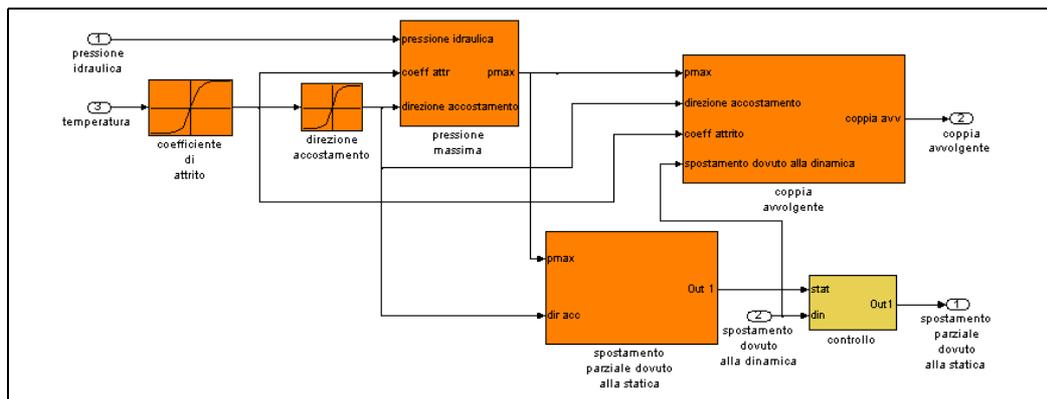


Figura A.1: Calcolo della forza equivalente

### La statica della ganaschia

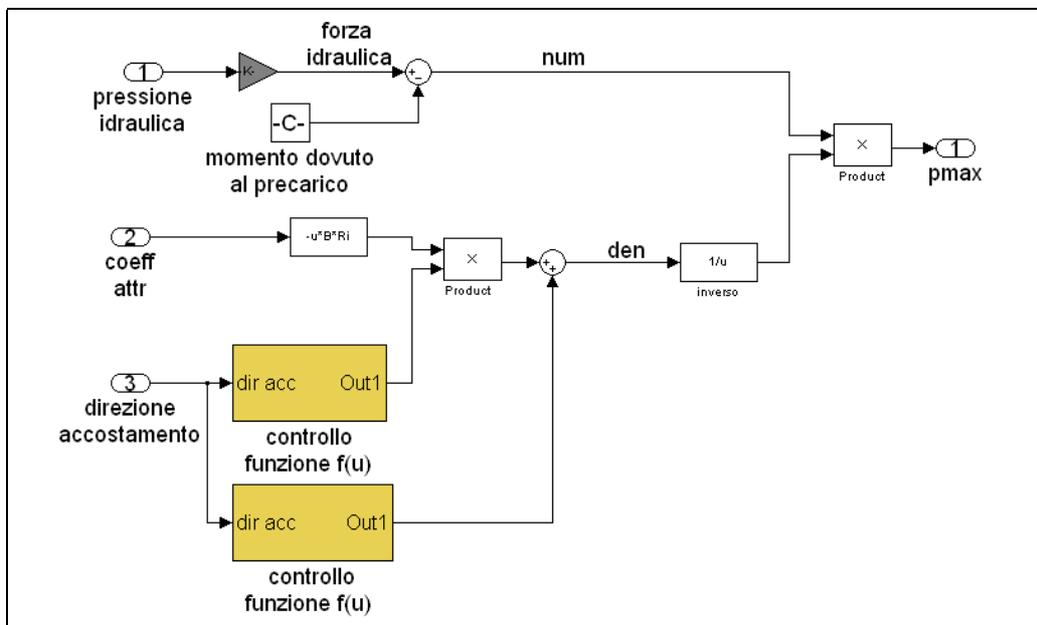


La prima look-up table a sinistra determina il coefficiente di attrito tra tamburo e guarnizione: per semplicità, nello schema precedente esso è funzione solo della temperatura, ma non bisogna dimenticare che esso dipende anche dalla velocità angolare della ruota e dalla pressione media di contatto (formula (2.30)).

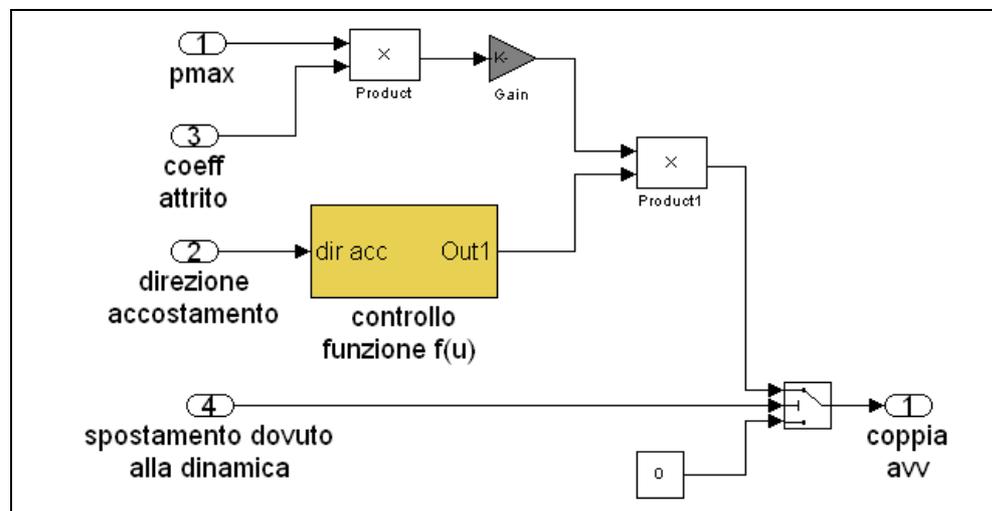
La seconda look-up table calcola la direzione di accostamento della ganaschia in considerazione: essa dipende dal coefficiente di attrito e dalla pressione idraulica (formula (2.21)). Nella figura c'è solo la dipendenza dal coefficiente di attrito in quanto lo schema si riferisce ad un freno Simplex a ganaschie flottanti con angolo  $\psi$  nullo e si può facilmente verificare che in tale condizione la direzione di accostamento non dipende dalla pressione idraulica. Nel calcolo

della direzione di accostamento si è tenuto conto anche della possibilità che non sia soddisfatta la condizione (2.22).

Il sottosistema che calcola la pressione massima utilizza come dati di input la pressione idraulica, il coefficiente di attrito e la direzione di accostamento. Al suo interno è implementata la formula (2.23) con i vari controlli nel caso in cui non sia soddisfatta la (2.22):



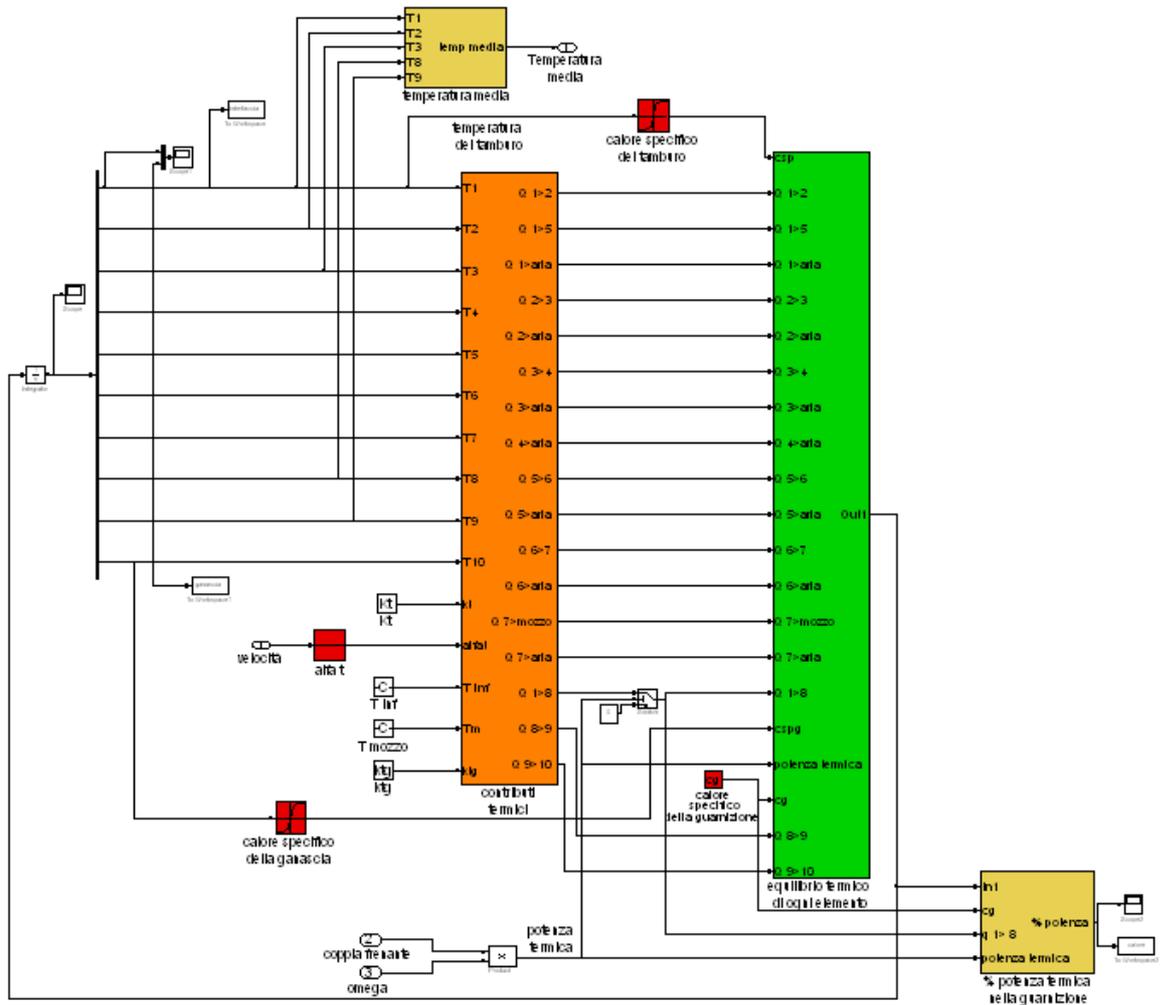
Il blocco che calcola il momento frenante fornito dalla ganascia utilizza la pressione massima, il coefficiente di attrito, la direzione di accostamento, lo spostamento parziale del pistone dovuto alla dinamica. L'ultima informazione serve per tener conto che se esso è minore del valore dato da (2.13) allora il momento è nullo:



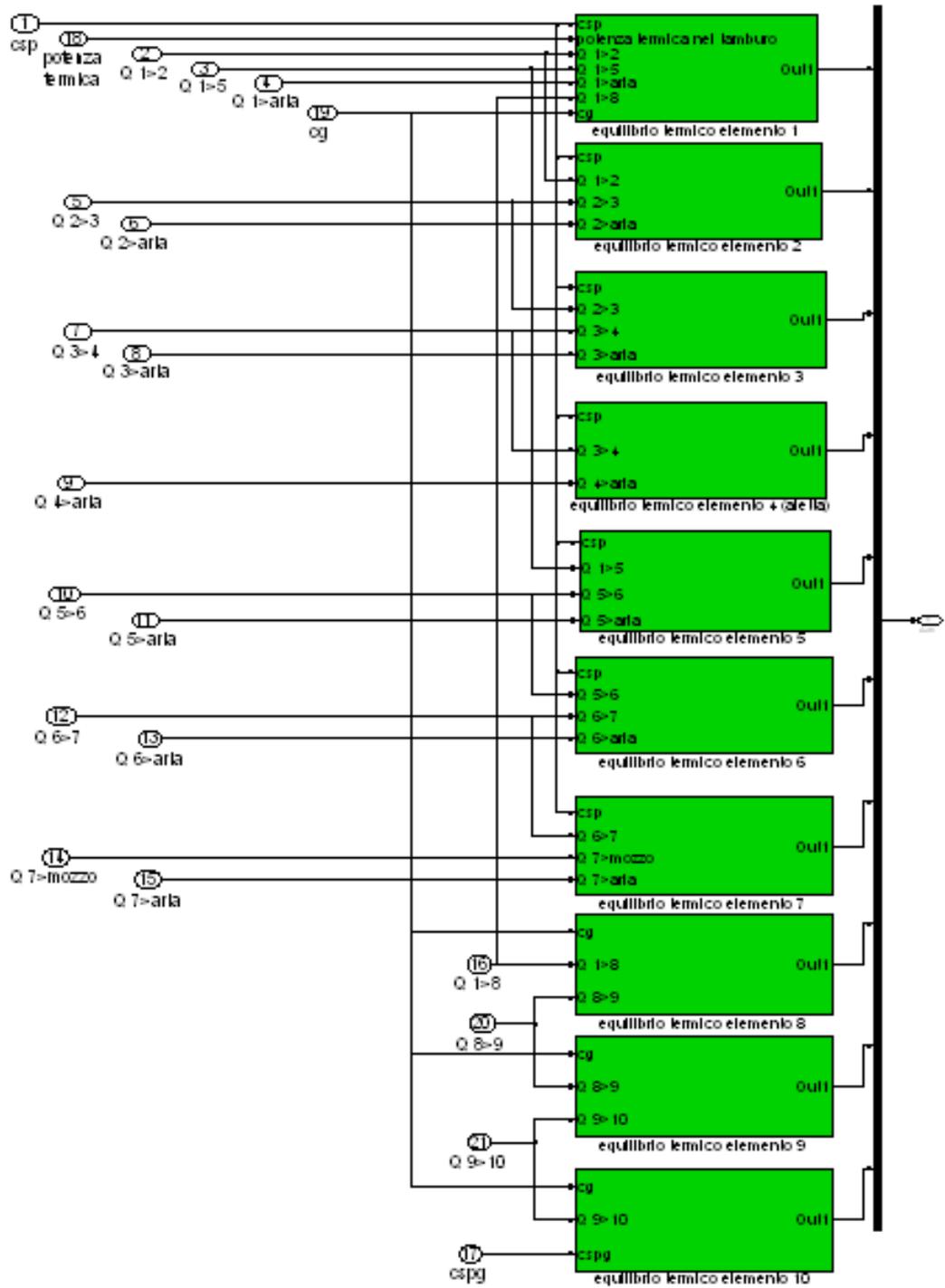
Infine c'è un blocco che calcola lo spostamento parziale dovuto alla statica (vi è implementata la formula (2.28)) ed un blocco di controllo che fa in modo che tale spostamento sia nullo negli istanti in cui quello dovuto alla dinamica è minore del valore dato da (2.13)

## A.2 Il blocco termico

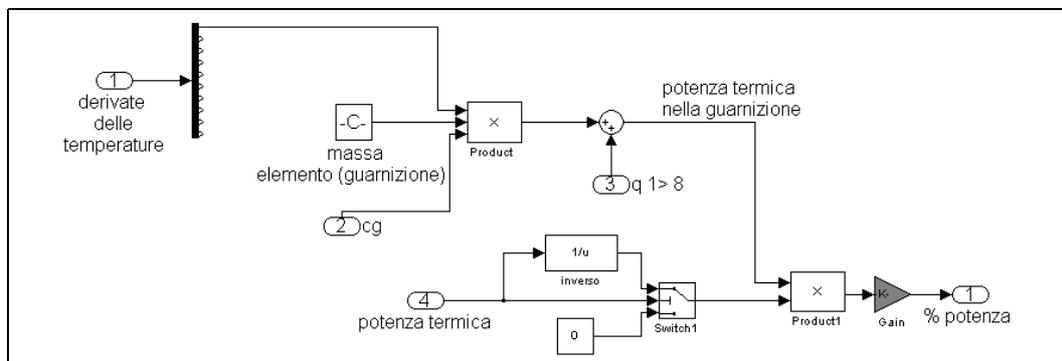
Al suo interno troviamo un sottosistema che calcola i vari contributi termici ed uno che fa l'equilibrio termico degli elementi ( formule da (3.26) a (3.35)). Ci sono poi delle look-up table che tengono conto della variazione delle caratteristiche termiche dei materiali con la temperatura e del coefficiente di convezione con la velocità del veicolo.



### A.2.1 Equilibrio termico degli elementi



Abbiamo infine un sottosistema che calcola la media ponderata della temperatura degli elementi 1, 2, 3, 8 e 9 (utilizzando come pesi le masse corrispondenti) ed un sottosistema che calcola la percentuale di calore che finisce nella guarnizione (formula (3.36)):



**Nota:** sono stati mostrati solo i blocchi principali del modello

## Appendice B

# Espressione esplicita della pressione massima

Nel secondo capitolo abbiamo ricavato la pressione massima:

$$p_{max} = \frac{C}{D}$$

dove:

$$C = (p_i A + F_{04})(d + e \tan \psi) - F_{01}(c + e \tan \psi) - \\ - F_{02}(b + e \tan \psi) - F_{01}(a + e \tan \psi)$$

$$D = BR_i(e \tan \psi + d - w) \left[ \frac{\cos \beta (\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)}{2} + \right. \\ \left. + \sin \beta \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + \frac{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}{4} \right) \right] - \\ - fBR_i \left\{ R_i [\sin(\beta - \alpha_1) - \sin(\beta - \alpha_2)] + \right. \\ \left. + (e \tan \psi + d - w) \left[ \cos \beta \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} - \frac{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}{4} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin \beta (\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2)}{2} \right] \right\}$$

# Bibliografia

- [1] Limpert (1992), *Brake design and safety*, SAE International.
- [2] Newcomb & Spurr, Chapman and Hall (1969), *Automobile brakes and braking systems*.
- [3] Guido Bongiovanni, Giovanni Roccati (1993), *Freni*, Levrotto & Bella, Torino.
- [4] Massimo Guiggiani (1998), *Dinamica del veicolo*, CittàStudiEdizioni.
- [5] E. Funaioli, A. Maggiore, U. Meneghetti (1987), *Lezioni di meccanica applicata alle macchine*, Pàtron Editore.
- [6] Rinaldo Ghigliazza, Carlo Ugo Galletti (1986), *Meccanica applicata alle macchine: teoria delle macchine*, UTET Torino.
- [7] Rosario Scuto, Pietro Leone (1967), *Tecnica dell'autoveicolo*, Levrotto & Bella, Torino.
- [8] Brembo (1997), *Manuale dei freni*.
- [9] F. Buffoni (1965), *L'autoveicolo*, Ulrico Hoepli, Milano.
- [10] Giuseppe Palloni (1960), *Costruzioni automobilistiche, Il veicolo*, Levrotto & Bella, Torino.
- [11] H. J. Leyhausen (1991), *Manuale di tecnica automobilistica*, Tecniche Nuove.

- [12] Domenico Lucchesi (1971), *Corso di tecnica automobilistica, L'autotelaio*, Ulrico Hoepli, Milano.
- [13] Newcomb & Spurr (1967), *Braking of road vehicles*, Chapman and Hall.
- [14] D. Bellotti, E. Sabbioni, *Un modello numerico di impianto frenante per lo sviluppo di un sistema di controllo attivo integrato in un simulatore di un autoveicolo*, Tesi di laurea , politecnico di Milano.