

Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

Superfici algebriche rigate con il massimo numero di nodi

Candidato

Linda Dimare

Relatore

Prof.ssa Rita Pardini

Anno Accademico 2003/2004

*Alla mia famiglia
e a Donato*

Indice

Introduzione	vii
Notazione	xi
1 Risoluzione di una superficie e contrazione delle curve	1
1.1 La singolarità del cono	2
1.2 Risoluzione delle superfici e singolarità semplici	4
1.3 Il nodo nella categoria analitica	14
1.4 Contrazione di curve nodali	16
2 Il codice associato a una famiglia di curve nodali	23
2.1 Codici binari	23
2.2 Il codice associato a una famiglia di curve nodali	25
2.3 Il rivestimento associato al codice	27
2.4 Normalizzazione di uno \mathbb{Z}_2^r -rivestimento	34
3 Numero di nodi su una superficie rigata	39
3.1 Superfici rigate	39
3.2 Risultati preliminari	47
3.3 Numero di nodi su una superficie rigata	57
Conclusione	65

Introduzione

Con il presente lavoro, mi propongo di determinare il massimo numero di nodi che può avere una superficie nodale rigata non razionale su \mathbb{C} , e di studiare le superfici nodali rigate non razionali che hanno il massimo numero di nodi.

Supponiamo che Σ sia una superficie proiettiva normale. Allora, Σ ha al massimo un numero finito di singolarità isolate. È noto che esiste ed è unica la risoluzione minimale di Σ (vedi [18]), diciamo $\eta : Y \rightarrow \Sigma$. Un punto singolare $x \in \Sigma$ si dice un nodo se la controimmagine $\eta^{-1}(x)$ è una curva irriducibile liscia razionale con autointersezione -2 . Una curva con queste proprietà si dice “curva nodale”. Se Σ ha come singolarità soltanto dei nodi, allora diciamo che Σ è una superficie nodale.

Sia Σ una superficie nodale di grado d immersa in \mathbb{P}^3 : è un problema classico quello di cercare un limite massimo al numero di nodi di Σ , limite che usualmente viene indicato con $\mu(d)$. Non è stata ancora trovata una soluzione generale di questo problema: quello che sappiamo è che $\mu(d)$ esiste ed è finito per ogni $d \in \mathbb{N}$ e, inoltre, si conoscono i valori di $\mu(d)$ per ogni $d \leq 6$.

I valori di $\mu(d)$ per $d \leq 4$ si conoscevano già alla fine del 1800. Inoltre, nel 1906, Basset (vedi [4]) ha dimostrato che per ogni $d \geq 5$ vale la disuguaglianza:

$$\mu(d) \leq \frac{1}{2} \left[d(d-1)^2 - 5 - \sqrt{d(d-1)(3d-14) + 25} \right],$$

dalla quale si deduce in particolare che $\mu(5) \leq 34$ e $\mu(6) \leq 66$.

Sono invece risultati moderni: $\mu(5) = 31$ e $\mu(6) = 65$. Il primo è stato dimostrato da Beauville nel 1979 (vedi [6]). In seguito, usando metodi simili a quelli di Beauville, è stato possibile dimostrare che $\mu(6) = 65$ (vedi [2] e [11]).

Il lavoro di Beauville è stato fondamentale: il suo merito è stato quello di pensare di associare ai nodi un codice binario e quindi utilizzare le proprietà di questo codice. Egli è stato il primo a collegare codici e nodi.

Pur partendo da motivazioni diverse da quelle di Beauville, nel 2002 Dolgachev, Mendes Lopes e Pardini (vedi [7]) hanno preso spunto dal suo articolo e, associando un codice ai nodi, hanno trovato il numero massimo di nodi che può avere una superficie nodale razionale su un campo k algebricamente chiuso con caratteristica diversa da 2. Non solo, hanno anche stabilito quali sono le superfici nodali razionali con massimo numero di nodi: quelle che loro chiamano “esempi standard”.

Nel loro lavoro il problema della determinazione del numero massimo di nodi su una superficie nodale viene affrontato da un punto di vista diverso: come punto di partenza non si considera più il grado della superficie, ma la classe a cui la superficie appartiene (superfici razionali), ed il numero massimo di nodi viene espresso in funzione del numero di Picard.

A partire da questo articolo, mi sono proposta di estendere il risultato ivi esposto al caso di una superficie nodale rigata non razionale, almeno quando il campo base è \mathbb{C} . Il metodo che ho usato è lo stesso: associare un codice ai nodi della superficie che stiamo trattando. Effettivamente, il metodo ha funzionato e non escludo la possibilità di generalizzare ulteriormente il risultato che ho trovato. Nella dimostrazione che io do si utilizza la varietà di Albanese e ciò ha senso solo in caratteristica zero. Se si riuscisse a dare una dimostrazione del tutto algebrica, senza utilizzare questo oggetto, si potrebbe estendere il risultato ad un campo di caratteristica arbitraria diversa da 2.

Spiego brevemente come è strutturato il lavoro.

Il primo capitolo ha un carattere introduttivo: in esso, stabilisco un pa-

rallato fra lo studio dei nodi di una superficie nodale e lo studio delle curve nodali disgiunte di una superficie liscia, usando l'esistenza della risoluzione minimale di una superficie normale e la contraibilità delle curve nodali.

Nel secondo capitolo, richiamo ciò che mi serve sui codici e sui rivestimenti per lo studio dei nodi di una superficie nodale: in particolare, definisco il codice associato ad una famiglia di curve nodali disgiunte su una superficie liscia ed il rivestimento associato a questo codice.

Infine, nel terzo ed ultimo capitolo, determino il numero massimo di nodi su una superficie nodale rigata non razionale e descrivo le superfici nodali rigate non razionali che hanno il numero massimo di nodi.

Come ho già accennato, il problema che affronto è stato risolto in [7] nel caso in cui la superficie nodale in questione sia razionale. Il metodo di associare un codice alle curve nodali e poi un rivestimento a questo codice, che descrivo nel secondo capitolo, è anch'esso tratto da [7]. Il mio contributo consiste nell'aver adattato questo metodo al caso di una superficie nodale che sia rigata non razionale, trovando che:

Teorema 0.0.1. *Sia Y una superficie liscia rigata non razionale e siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y . Allora, se $\rho(Y)$ è il numero di Picard di Y , si ha che $k \leq \rho(Y) - 2$ e $k = \rho(Y) - 2$ se e solo se Y è l'esempio standard.*

(Per la terminologia vedi il Capitolo 3.)

Notazione

Utilizzo la convenzione secondo la quale con il nome di *varietà* si indica una varietà irriducibile. Inoltre, a meno che non sia altrimenti specificato, supporrò sempre che le varietà siano varietà proiettive sul campo \mathbb{C} dei numeri complessi.

In questo lavoro gli oggetti di studio sono le superfici proiettive su \mathbb{C} , ovvero le varietà proiettive di dimensione 2 sul campo dei numeri complessi. Mi riferirò ad esse semplicemente con il nome di superfici. Le curve su una superficie saranno sempre curve proiettive, o, equivalentemente, sottovarietà chiuse di codimensione uno della superficie in questione.

Quando parlerò di divisori, intenderò sempre i divisori di Cartier. Identificherò le classi di divisori con le classi di isomorfismo dei fasci invertibili e con quelle dei fibrati lineari, perciò utilizzerò le notazioni additiva e moltiplicativa scambievolmente. In particolare, dato un fascio invertibile \mathcal{L} su una varietà, indicherò con \mathcal{L}^n il prodotto tensoriale di \mathcal{L} con sé stesso n volte. Nel caso di varietà lisce, identificherò divisori di Weil e di Cartier. La notazione che utilizzerò per questi oggetti sarà la stessa usata da Beauville in [5].

Sempre a proposito di divisori, l'equivalenza lineare sarà denotata con il simbolo " \equiv ", mentre indicherò l'equivalenza algebrica con " \sim ".

Data una varietà proiettiva X , indicherò con $e(X)$ la caratteristica di Eulero-Poincaré topologica, ovvero $e(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i(X, \mathbb{R})$.

Data una superficie di Gorenstein X , denoterò con K_X la classe canonica e con $\chi(X)$ la caratteristica di Eulero-Poincaré, ovvero:

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{O}_X).$$

Il numero di Picard, ovvero il rango del gruppo di Néron-Severi, sarà indicato con $\rho(X)$.

Per tutto il resto le notazioni sono quelle standard.

Capitolo 1

Risoluzione di una superficie e contrazione delle curve

In generale una superficie può avere molte singolarità e queste, a loro volta, possono essere estremamente complicate. Gli studiosi di superfici hanno cercato di isolare le singolarità con determinate caratteristiche e quindi di classificarle. L'argomento si è rivelato molto vasto e, certamente, non sono ancora state esaurite tutte le possibilità.

Le superfici che considererò in questo capitolo saranno sempre supposte normali. Su una varietà quasi-proiettiva normale, l'insieme dei punti singolari ha codimensione ≥ 2 . Ne deriva che una superficie normale può avere solo un numero finito di singolarità isolate. Al contrario di ciò che si potrebbe pensare, questa non è una grandissima semplificazione, nel senso che si possono presentare comunque singolarità molto difficili da studiare.

Nel mio lavoro prenderò in esame soltanto la prima singolarità della classificazione, che è anche la più semplice: il nodo o punto doppio ordinario o singolarità di tipo A_1 .

Questo capitolo serve a introdurre dei concetti di base, che sono continuamente utilizzati quando si studiano le superfici e che saranno strumenti essenziali per affrontare i problemi dei capitoli seguenti.

1.1 La singolarità del cono

Il “nodo” per eccellenza è la singolarità del cono quadrico. Prendiamo su \mathbb{A}^3 le coordinate (x, y, z) e consideriamo il cono Σ definito dalla equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Esso ha un'unica singolarità nell'origine $P = (0, 0, 0)$. Consideriamo lo scoppimento di \mathbb{A}^3 nell'origine, che indichiamo con

$$\pi : \widehat{\mathbb{A}^3} \subseteq \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3.$$

Ricordo che $\widehat{\mathbb{A}^3}$ è l'insieme

$$\widehat{\mathbb{A}^3} = \left\{ ((x, y, z); (x_1 : x_2 : x_3)) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid \text{rk} \begin{bmatrix} x & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \leq 1 \right\},$$

dove $(x_1 : x_2 : x_3)$ sono coordinate omogenee in \mathbb{P}^2 .

$\widehat{\mathbb{A}^3}$ è unione di tre aperti isomorfi ad \mathbb{A}^3 , uno dei quali è:

$$(\widehat{\mathbb{A}^3})_{x_1} = \widehat{\mathbb{A}^3} \cap \{x_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^3,$$

dove l'isomorfismo è dato da $((x, y, z), (x_1 : x_2 : x_3)) \mapsto (x, x_2/x_1, x_3/x_1)$.

Indicate con (x, u, v) le coordinate su $(\widehat{\mathbb{A}^3})_{x_1}$, la restrizione di π è data da

$$\begin{aligned} \pi : (\widehat{\mathbb{A}^3})_{x_1} &\rightarrow \mathbb{A}^3 \\ (x, u, v) &\mapsto (x, y = ux, z = vx). \end{aligned} \tag{1.1}$$

La trasformata stretta $\widehat{\Sigma}$ del cono in \mathbb{A}^3 è il cilindro di equazione $u^2 + v^2 + 1 = 0$, e la curva eccezionale $\Gamma = \pi^{-1}(P) \subset \widehat{\Sigma}$ è la circonferenza unitaria sul piano $\{x = 0\}$. Abbiamo ottenuto una superficie liscia ed al posto della singolarità abbiamo la curva Γ , la quale gode delle seguenti proprietà:

$$\Gamma \cong \mathbb{P}^1, \quad \Gamma^2 = -2.$$

Vediamo brevemente come si trova $\Gamma^2 = -2$. Considero \mathbb{A}^3 come aperto di \mathbb{P}^3 : più precisamente, se $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ sono le coordinate omogenee in \mathbb{P}^3 , identifico \mathbb{A}^3 con l'aperto $\{y_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^3$ e dunque P con il punto $(1 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^3$. A questo punto, vedo lo scoppimento di \mathbb{A}^3 in P come

restrizione dello scoppimento di \mathbb{P}^3 in P , che indico con $\varepsilon : \widehat{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathbb{P}^3$, dove $\widehat{\mathbb{P}^3}$ è l'insieme

$$\widehat{\mathbb{P}^3} = \{((y_0 : y_1 : y_2 : y_3); (x_1 : x_2 : x_3)) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid x_i y_j = x_j y_i \ \forall i, j = 1, 2, 3\} .$$

Posso vedere il cono Σ come intersezione con \mathbb{A}^3 della quadrica definita in \mathbb{P}^3 da $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$. Per comodità indico questa quadrica ancora con Σ e la sua trasformata stretta con $\widehat{\Sigma} \subset \widehat{\mathbb{P}^3}$. Sia H un qualunque iperpiano di \mathbb{P}^3 : per semplicità lo scelgo che non passi per il centro P dello scoppimento. Allora $\Sigma \equiv 2H$. Indichiamo con E il divisore eccezionale dello scoppimento di \mathbb{P}^3 . Prendiamo l'aperto $U_1 = \{y_0 \neq 0, x_1 \neq 0\} = (\widehat{\mathbb{A}^3})_{x_1} \subset \widehat{\mathbb{P}^3}$. Su U_1 lo scoppimento è della forma 1.1. Consideriamo il pull-back dell'equazione di Σ su questo aperto: esso è $x^2(1 + u^2 + v^2) = 0$. Da questa equazione si vede che $\varepsilon^*\Sigma$ ha uno zero di ordine due lungo E e uno zero di ordine uno lungo $\widehat{\Sigma}$. Mettendo insieme queste osservazioni, si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*\Sigma &= \widehat{\Sigma} + 2E \\ \varepsilon^*\Sigma &\equiv 2\varepsilon^*H \\ &\Downarrow \\ \widehat{\Sigma} &\equiv 2\varepsilon^*H - 2E . \end{aligned}$$

La formula di aggiunzione nella forma data in [3] (Teorema 6.4, Capitolo I), ci dà:

$$K_{\widehat{\Sigma}} = \left(\widehat{\Sigma} + K_{\widehat{\mathbb{P}^3}} \right) \Big|_{\widehat{\Sigma}} .$$

Consideriamo ora una 3-forma differenziale razionale ω su \mathbb{P}^3 , che sia regolare e non nulla nel punto P . Consideriamo l'intorno aperto $\mathbb{A}^3 \subset \mathbb{P}^3$ del punto P su cui abbiamo lavorato all'inizio, con coordinate (x, y, z) : allora la forma differenziale sarà del tipo $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$, con f una funzione razionale che sia regolare e non nulla in P . Consideriamo di nuovo la restrizione dello scoppimento ε all'aperto U_1 , la quale è della forma 1.1. Su U_1 abbiamo $\varepsilon^*\omega = (\varepsilon^*f)x^2 dx \wedge du \wedge dv$. Poiché ε^*f è regolare e non nulla su E , $\text{div}(\varepsilon^*\omega)$ ha uno zero di ordine 2 lungo E . Gli zeri e i poli fuori di E sono quelli di

$\varepsilon^*(\operatorname{div} \omega)$. Da questo calcolo deriva che:

$$K_{\widehat{\mathbb{P}^3}} = \varepsilon^* K_{\mathbb{P}^3} + 2E .$$

Allora

$$\begin{aligned} K_{\widehat{\Sigma}} &= (2\varepsilon^* H - 2E + \varepsilon^* K_{\mathbb{P}^3} + 2E)|_{\widehat{\Sigma}} \\ &= \varepsilon^* (K_{\mathbb{P}^3} + 2H)|_{\widehat{\Sigma}} , \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$K_{\widehat{\Sigma}} \cdot \Gamma = \varepsilon^* (K_{\mathbb{P}^3} + 2H) \cdot \widehat{\Sigma} \cdot E = 0 .$$

Infatti $\varepsilon^* (K_{\mathbb{P}^3} + 2H) \cdot E = 0$. Tenendo conto del fatto che $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$, applichiamo la formula di aggiunzione e otteniamo quanto voluto:

$$\Gamma^2 = 2g(\Gamma) - 2 - (K_{\widehat{\Sigma}} \cdot \Gamma) = -2 .$$

La definizione generale di nodo è strettamente legata alle due proprietà di Γ appena viste, ma, prima di darla, dobbiamo considerare il problema della risolubilità delle singolarità di una superficie.

1.2 Risoluzione delle superfici e singolarità semplici

Data una superficie Σ , indichiamo con $\operatorname{sing}(\Sigma)$ l'insieme delle sue singolarità.

Definizione 1.2.1. Data una superficie Σ , una *risoluzione* di Σ è una superficie liscia Y insieme con un morfismo birazionale $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ tale che, posto $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \operatorname{sing}(\Sigma)$ e $Y_0 = Y \setminus \eta^{-1}(\operatorname{sing}(\Sigma))$, si ha che $\eta|_{Y_0} : Y_0 \rightarrow \Sigma_0$ è un isomorfismo.

Definizione 1.2.2. Data una superficie Σ , una risoluzione $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ si dice *minimale* se vale la seguente proprietà universale:

data un'altra risoluzione $\eta' : Y' \rightarrow \Sigma$, esiste un unico morfismo $\phi : Y' \rightarrow Y$ tale che $\eta' = \eta \circ \phi$, ovvero tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\eta'} & \Sigma \\ & \searrow \phi & \nearrow \eta \\ & Y & \end{array}$$

In altre parole, una risoluzione è minimale se ogni altra risoluzione fattorizza in modo unico attraverso di essa.

Dalla definizione segue subito che la risoluzione minimale di una superficie Σ , qualora esista, è unica (a meno di isomorfismo canonico).

Teorema 1.2.3. *Sia Σ una superficie normale.*

- i) Esiste una (non necessariamente unica) risoluzione di Σ .*
- ii) Esiste ed è unica la risoluzione minimale di Σ .*

Non essendo l'argomento centrale del mio lavoro, non dimostrerò il teorema 1.2.3. La prima dimostrazione puramente algebrica è stata data da Zariski nel 1939 (vedi [18]). In seguito, nel 1964, Hironaka ha dimostrato che è possibile generalizzare il teorema a varietà di dimensione qualunque con un lavoro lungo circa duecento pagine (vedi [10]), per il quale si è meritato la medaglia Fields nel 1970.

Vediamo subito una utile conseguenza del teorema appena enunciato. Sia Σ una superficie normale: grazie al teorema di Castelnuovo (vedi [9], Teorema 5.7, Capitolo V) sulla contraibilità delle (-1) -curve (curve lisce razionali con autointersezione -1), si può dimostrare che $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ è la risoluzione minimale di Σ se e solo se η non contrae nessuna (-1) -curva. Per vederlo, serve il seguente risultato generale:

Lemma 1.2.4. *Sia Y una superficie normale e siano C_1, \dots, C_k curve su Y . Sia X una superficie normale e sia $\varepsilon : Y \rightarrow X$ un morfismo tale che:*

- i) ε contrae le curve C_1, \dots, C_k ;*
- ii) ε è un isomorfismo fra $Y \setminus (\cup_{i=1}^k C_i)$ e $X \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$, dove $P_i = \varepsilon(C_i)$*

per ogni $i = 1, \dots, k$ e $P_i \neq P_j$ se $i \neq j$.

Infine, sia $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ un morfismo da Y in una varietà quasi-proiettiva normale Σ di dimensione ≤ 2 , che contrae le curve C_1, \dots, C_k .

Allora, esiste ed è unico un morfismo $\beta : X \rightarrow \Sigma$ tale che $\beta \circ \varepsilon = \eta$, ovvero tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varepsilon} & X \\ & \searrow \eta & \downarrow \beta \\ & & \Sigma \end{array}$$

Dim. Per la surgettività di ε , è chiaro che se β esiste, deve essere unico e, per ogni $i = 1, \dots, k$, deve mandare il punto P_i nel punto $\eta(C_i)$. Grazie alla condizione (ii), sappiamo già che fuori dei punti P_1, \dots, P_k il diagramma si chiude con un morfismo $\beta : X \setminus \{P_1, \dots, P_k\} \rightarrow \Sigma$ univocamente determinato. Si tratta di estendere questo morfismo ai punti P_1, \dots, P_k . È sufficiente risolvere la questione localmente. Allora, sia $Q \in \Sigma$ un punto a cui è stata contratta una delle curve C_1, \dots, C_k . Sia $U \subset \Sigma$ un intorno aperto affine di Q e siano $A := \eta^{-1}(U)$ e $B := \varepsilon(A)$. Per le proprietà di ε , si ha che $B = X \setminus \varepsilon(Y \setminus A)$, dunque A e B sono aperti rispettivamente in Y e X . Restringendo i morfismi ε ed η , otteniamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varepsilon} & B \\ & \searrow \eta & \\ & & U \end{array} \tag{1.2}$$

Poiché U è affine, dare un morfismo $\beta : B \rightarrow U$ equivale a dare un omomorfismo di \mathbb{C} -algebre $\beta^* : \mathbb{C}[U] \rightarrow \mathcal{O}_B(B)$. Siano $\varepsilon^* : \mathcal{O}_B(B) \rightarrow \mathcal{O}_A(A)$ e $\eta^* : \mathbb{C}[U] \rightarrow \mathcal{O}_A(A)$ gli omomorfismi di \mathbb{C} -algebre definiti ponendo, per ogni $f \in \mathcal{O}_B(B)$, $\varepsilon^*(f) := f \circ \varepsilon$ e, per ogni $g \in \mathbb{C}[U]$, $\eta^*(g) := g \circ \eta$. Per chiudere il diagramma 1.2, è necessario e sufficiente chiudere il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_A(A) & \xleftarrow{\varepsilon^*} & \mathcal{O}_B(B) \\ & \nwarrow \eta^* & \\ & & \mathbb{C}[U] \end{array} \tag{1.3}$$

Poiché ε è surgettivo, ε^* è iniettivo. Dico che ε^* è surgettivo. Per vederlo, considero $f \in \mathcal{O}_A(A)$ arbitrario. Poiché ε è un isomorfismo fuori dalle curve C_1, \dots, C_k , allora induce una funzione f' regolare su $B \setminus (B \cap \{P_1, \dots, P_k\})$. Poiché B è normale, grazie alla condizione S_2 di Serre, f' si può estendere in modo unico ad una funzione regolare su tutto B , che indico ancora con f' . La funzione $\varepsilon^* f'$ coincide con f fuori dalle curve C_1, \dots, C_k , dunque le due funzioni coincidono su tutto un aperto di A e ciò è sufficiente per affermare che $\varepsilon^* f' = f$. Allora ε^* è surgettiva. A questo punto sappiamo che $\varepsilon^* : \mathcal{O}_B(B) \rightarrow \mathcal{O}_A(A)$ è un omomorfismo bigettivo di \mathbb{C} -algebre, allora ε^* è un isomorfismo e il diagramma 1.3 si chiude. \square

Proposizione 1.2.5. *Sia Σ una superficie normale. Una risoluzione $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ è minimale se e solo se il morfismo η non contrae curve lisce razionali con autointersezione -1 .*

Dim. Sia $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ una risoluzione minimale e supponiamo per assurdo che η contragga una (-1) -curva C . Per il teorema di contraibilità di Castelnuovo esiste un morfismo birazionale $\varepsilon : Y \rightarrow X$ da Y in una superficie liscia X , che contrae la curva C ed è un isomorfismo fra $Y \setminus C$ e $X \setminus \varepsilon(C)$. A questo punto, siamo nelle ipotesi del Lemma 1.2.4, allora esiste ed è unico un morfismo $\beta : X \rightarrow \Sigma$ tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varepsilon} & X \\ & \searrow \eta & \downarrow \beta \\ & & \Sigma \end{array}$$

Per costruzione, $\beta : X \rightarrow \Sigma$ è una risoluzione, dunque fattorizza in modo unico attraverso η , ovvero esiste un unico morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ tale che $\eta \circ \phi = \beta$. Ma allora, $\phi \circ \varepsilon = \text{Id}_Y$, il che è chiaramente in contraddizione con il fatto che ε contrae la curva C . Dunque abbiamo dimostrato che se $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ è una risoluzione minimale, allora η non contrae (-1) -curve.

Viceversa, supponiamo che la risoluzione $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ non contragga curve

lisce razionali con autointersezione -1 . Sia $\eta' : Y' \rightarrow \Sigma$ la risoluzione minimale. Allora esiste un unico morfismo $\varepsilon : Y \rightarrow Y'$ tale che $\eta' \circ \varepsilon = \eta$. Poiché η ed η' sono birazionali, anche ε lo è e, visto che Y e Y' sono superfici lisce, ε è una composizione di isomorfismi e scoppamenti. Poiché η non contrae (-1) -curve, allora neanche ε contrae (-1) -curve e ciò significa che ε è un isomorfismo. Dunque $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ è minimale. \square

Torniamo a considerare il Teorema 1.2.3. È chiaro che sia un risultato potente: di fatto, per quanto riguarda le superfici, ha semplificato molto lo studio delle singolarità. Addirittura, è possibile caratterizzarle in base alla risoluzione minimale, come illustrerò tra poco per le singolarità di Du Val. Non solo, l'esistenza di una risoluzione permette di lavorare su una superficie normale utilizzando concetti inizialmente definiti solo per le superfici lisce. Per esempio, data una superficie normale Σ , è possibile, a partire da una risoluzione, definire una forma di intersezione su $\text{Pic}(\Sigma)$.

Definizione 1.2.6. Sia Σ una superficie normale. Dati due divisori $D_1, D_2 \in \text{Pic}(\Sigma)$, definiamo il loro numero di intersezione $D_1 \cdot D_2$ nel modo seguente:

data una risoluzione qualunque $\eta : Y \rightarrow \Sigma$, poniamo

$$D_1 \cdot D_2 \doteq (\eta^* D_1) \cdot (\eta^* D_2).$$

Dato che, in generale, le risoluzioni non sono uniche, dobbiamo verificare che la definizione sia indipendente dalla scelta della risoluzione. Facciamo questa verifica. Mettiamoci nella situazione della definizione e prendiamo due risoluzioni di Σ , $\eta_1 : Y_1 \rightarrow \Sigma$ e $\eta_2 : Y_2 \rightarrow \Sigma$. Vogliamo dimostrare che $(\eta_1^* D_1) \cdot (\eta_1^* D_2) = (\eta_2^* D_1) \cdot (\eta_2^* D_2)$. Consideriamo la risoluzione minimale $\eta : Y \rightarrow \Sigma$. Per definizione di risoluzione minimale, η_1 e η_2 fattorizzano in modo unico attraverso η . Allora esistono e sono unici due morfismi $\phi_1 : Y_1 \rightarrow Y$

e $\phi_2 : Y_2 \rightarrow Y$, tali che il diagramma seguente commuti.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & \nearrow \phi_1 & \downarrow \eta & \nwarrow \phi_2 & \\
 Y_1 & & & & Y_2 \\
 & \searrow \eta_1 & \downarrow & \swarrow \eta_2 & \\
 & & \Sigma & &
 \end{array}$$

ϕ_1 e ϕ_2 sono morfismi birazionali fra superfici lisce, allora non sono altro che una composizione di isomorfismi e scoppamenti. Da questo fatto e dalla commutatività del diagramma, segue la tesi, infatti:

$$\begin{aligned}
 (\eta_1^* D_1) \cdot (\eta_1^* D_2) &= \phi_1^*(\eta^* D_1) \cdot \phi_1^*(\eta^* D_2) \\
 &= (\eta^* D_1) \cdot (\eta^* D_2) \\
 &= \phi_2^*(\eta^* D_1) \cdot \phi_2^*(\eta^* D_2) \\
 &= (\eta_2^* D_1) \cdot (\eta_2^* D_2).
 \end{aligned}$$

Osservazione 1.2.7. È chiaro che potevamo definire sin dall'inizio la forma di intersezione su una superficie normale attraverso la sua risoluzione minimale. In tal caso, grazie all'unicità di questa, non ci sarebbe stato bisogno di verifiche. Però, nelle applicazioni, può risultare più utile la definizione data con le risoluzioni qualsiasi. Del resto, la verifica appena fatta mostra che la definizione data con risoluzioni minimali sarebbe stata equivalente a quella data attraverso risoluzioni qualunque.

Come ho accennato prima, attraverso le risoluzioni minimali si possono anche caratterizzare le singolarità. In questo contesto, posso finalmente dire cosa sono i nodi. Essi fanno parte di una classe più ampia di singolarità, le singolarità di Du Val, perciò comincerò da quelle.

Definizione 1.2.8. Data una superficie normale Σ , un punto $P \in \Sigma$ è una *singolarità di Du Val* o *singolarità semplice* o *punto doppio razionale*, se la risoluzione minimale di Σ , diciamo $\eta : Y \rightarrow \Sigma$, è tale che la controimmagine di P sia l'unione di un numero finito di curve C_1, \dots, C_r , che abbiano intersezione nulla con la classe canonica di Y , ovvero tali che $C_i K_Y = 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

Supponiamo di essere nella situazione descritta nella definizione 1.2.8. Si ha che la matrice di intersezione $(C_i C_j)$ è definita negativa. Ciò non dipende dal contesto particolare in cui ci troviamo, ma succede ogni volta che vengono contratte delle curve. Il risultato è noto come *criterio di Mumford* (1961, [13]) e riveste una grande importanza nello studio delle singolarità.

Proposizione 1.2.9 (Criterio di Mumford). *Sia $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ una mappa regolare tra superfici, con Y nonsingolare. Siano poi C_1, \dots, C_r curve su Y che vengono contratte da η a un unico punto $x \in \Sigma$ e supponiamo che $\eta : Y \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_r) \xrightarrow{\sim} \Sigma \setminus \{x\}$ sia un isomorfismo. Allora la matrice di intersezione $(C_i C_j)$ è definita negativa.*

Dim. Possiamo considerare una curva E su Y , distinta dalle C_i , ma che le intersechi tutte. In particolare, possiamo prendere come curva E una sezione iperpiana di Y . Infatti, tutte le varietà con cui abbiamo a che fare sono proiettive, allora possiamo considerare una qualunque immersione chiusa di Y nello spazio proiettivo; poi scegliamo un punto $y_i \in C_i$ per ogni curva C_i , prendiamo una forma lineare che non si annulli sugli y_i e indichiamo con $E \subset Y$ il suo luogo di zeri su Y ; è un risultato ben noto che $\dim(E) = \dim(Y) - 1 = 1$ e $\dim(E \cap C_i) = \dim(C_i) - 1 = 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, r\}$; allora, la sezione iperpiana E così definita soddisfa le proprietà suddette. Poniamo $\eta(E) = H \subset \Sigma$. H è un chiuso proprio di Σ . Allora, possiamo scegliere una funzione razionale $u \neq 0$ su Σ che sia regolare sul punto x e che si annulli su H . Per convincersene, basta considerare un intorno affine U del punto x e osservare che $H \cap U$ è un chiuso proprio di U . Quindi esiste certamente un elemento nell'anello delle coordinate di U che si annulla su $H \cap U$. Prendo uno di questi elementi, ed esso definisce automaticamente una funzione razionale u su Σ con le proprietà richieste. Poiché η è regolare e surgettiva, ha senso considerare il pull-back $g = \eta^*u$ della funzione u , che sarà una funzione razionale su Y , regolare sulle curve C_i e nulla su E . Consideriamo il divisore principale $\text{div}(g)$. Per costruzione, E interseca tutte le curve C_i , allora $x \in H$ e la funzione u si annulla su x . Di conseguenza g si annulla su ogni curva C_i . Allora, il divisore $\text{div}(g)$ sarà

della forma $\operatorname{div}(g) = \sum m_i C_i + Z - P$, dove $m_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$ e Z, P sono divisori effettivi su Y i cui supporti non contengono le curve C_i . Per costruzione, $P \cdot C_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Poiché g si annulla su E ed E è distinta dalle C_i , allora E è contenuta nel supporto di Z . Detto questo, dalla costruzione è chiaro che

$$Z \cdot C_i = E \cdot C_i + (Z - E) \cdot C_i \geq E \cdot C_i > 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, r.$$

Allora, indicato con F il divisore $Z - P$, si ha $\operatorname{div}(g) = \sum m_i C_i + F$ e $F \cdot C_i = (Z - P) \cdot C_i = Z \cdot C_i > 0$ per ogni curva C_i . Posto $D = \sum m_i C_i$, si ha che $D \equiv -F$, dunque $D \cdot C_i < 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

A questo punto, la tesi è un corollario immediato del seguente risultato di algebra lineare:

Lemma 1.2.10. *Sia M uno \mathbb{Z} -modulo dotato di una forma bilineare simmetrica:*

$$\begin{aligned} M \times M &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 m_2. \end{aligned}$$

Sia $\{e_1, \dots, e_r\}$ un insieme di generatori di M tale che $e_i e_j \geq 0$ per ogni $i \neq j$. Supponiamo che esista un elemento $d = \sum m_i e_i \in M$, con $m_i > 0$, per ogni $i = 1, \dots, r$ e tale che $d e_j < 0$ per ogni $j = 1, \dots, r$. Allora, ogni elemento non nullo $m \in M$ soddisfa $m^2 < 0$ ed $\{e_1, \dots, e_r\}$ è una base libera di M .

Dim. del lemma. Indichiamo con A la matrice $r \times r$ con entrate $a_{ij} = e_i e_j$ e indichiamo con $\varphi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare (possibilmente degenere) su \mathbb{R}^r definito da questa matrice. È sufficiente dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) < 0$. Infatti, consideriamo la mappa \mathbb{Z} -lineare $\iota : \mathbb{Z}^r \rightarrow M$, che manda gli elementi f_i della base canonica rispettivamente negli e_i : questa è una isometria rispetto ai prodotti scalari fissati, e, nel caso $\varphi(x, x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$, è un isomorfismo. Quindi, in tal caso, e_1, \dots, e_r sono linearmente indipendenti in M e la relazione $m^2 < 0$ è soddisfatta per

costruzione da ogni elemento non nullo $m \in M$.

Consideriamo la funzione $x \mapsto \varphi(x, x)/|x|^2$ definita su $\mathbb{R}^r \setminus 0$: poiché la sfera unitaria è compatta, questa funzione assume un massimo, diciamo λ , in corrispondenza di un vettore non nullo $y = (y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{R}^r$. Allora, come è noto, $y/|y|$ è un autovettore di A con autovalore λ , ovvero $Ay = \lambda y$. Per ogni $i \neq j$, $a_{ij} \geq 0$, allora $\varphi(x, x) = \sum a_{ij}x_i x_j \leq \sum a_{ij}|x_i||x_j| = \varphi(v, v)$, dove $x = (x_1, \dots, x_r)$ e $v = (|x_1|, \dots, |x_r|)$. Dunque posso supporre che le coordinate di y siano positive. Allora $\sum_i y_i m_i > 0$, dove gli m_i sono gli interi dati nell'enunciato. Poiché y è autovettore di A con autovalore λ ,

$$\sum_i \lambda y_i m_i = \sum_{i,j} a_{ij} y_j m_i = \sum_{i,j} (e_i e_j) y_j m_i = \sum_j (de_j) y_j .$$

Per ipotesi $de_j < 0$ per ogni j , allora tutta l'espressione è strettamente minore di zero. Poiché $\sum_i y_i m_i > 0$, allora $\lambda < 0$, il che conclude la dimostrazione, perchè per ogni $x \in \mathbb{R}^r \setminus 0$ si ha $\varphi(x, x) \leq \lambda |x|^2 < 0$. \square

Torniamo alla situazione descritta nella definizione 1.2.8. Sappiamo che la matrice di intersezione $(C_i C_j)$ è definita negativa e che $C_i K_Y = 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Per la formula di aggiunta:

$$2g(C_i) - 2 = C_i(C_i + K_Y) = C_i^2 < 0$$

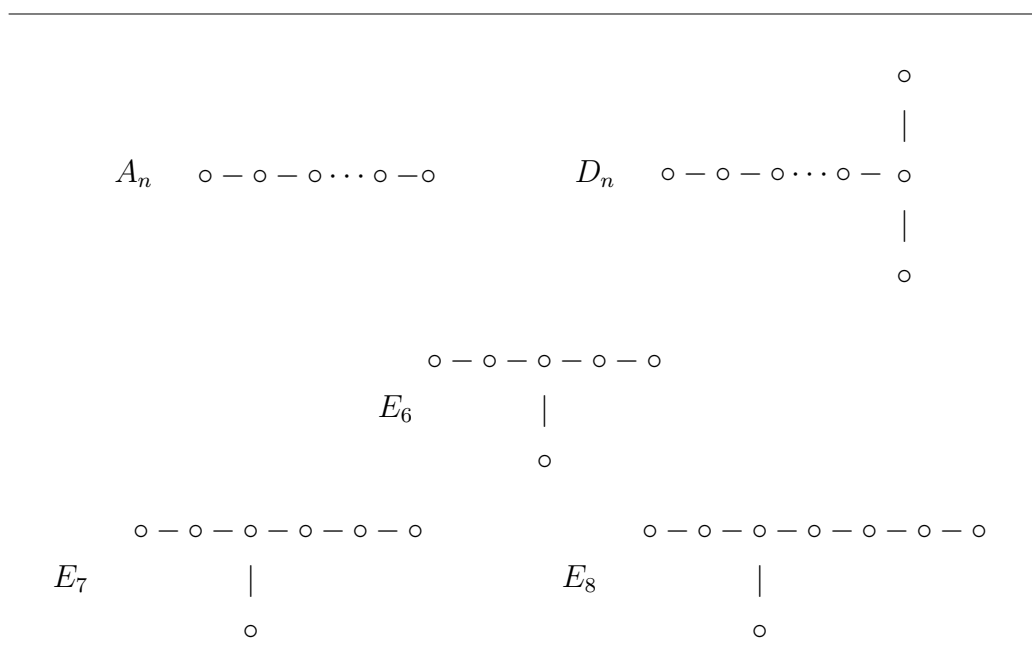
$$g(C_i) \geq 0 \Rightarrow C_i^2 \geq -2$$

C_i^2 è pari, allora $C_i^2 = -2$ e $C_i \cong \mathbb{P}^1$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Sempre per la negatività della matrice di intersezione, $(C_i + C_j)^2 < 0$, per cui $C_i C_j \leq 1$ per ogni $i \neq j$, ovvero: o le curve sono disgiunte o si intersecano trasversalmente.

Possiamo rappresentare la situazione con un grafo, nel quale i vertici indicano le curve che vengono contratte a P e i segmenti da un vertice all'altro le eventuali intersezioni. Sopra ciascun vertice riportiamo l'autointersezione della curva corrispondente e sopra ciascun segmento il numero di intersezione. Otteniamo una rappresentazione visiva delle informazioni contenute nella matrice di intersezione. Per quanto visto sopra, nel caso specifico delle singolarità di Du Val i numeri di intersezione sono superflui: se vogliamo

distinguere delle classi all'interno delle singolarità di Du Val, ciò che interessa è la quantità e la disposizione di vertici e segmenti. Ad ogni tipo di grafo è stato associato un simbolo, costituito da una lettera maiuscola e un indice numerico che indica il numero di curve. I tipi di grafo che si possono presentare per una singolarità di Du Val si chiamano diagrammi di Dynkin e si indicano con: A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6, E_7, E_8 (vedi la figura 1.1).

Figura 1.1: Diagrammi di Dynkin per singolarità di Du Val.



Concludiamo la sezione con la seguente:

Definizione 1.2.11. Una singolarità di Du Val si chiama *nodo* o *punto doppio ordinario* se è di tipo A_1 .

Ciò significa che: data una superficie normale Σ , un punto $P \in \Sigma$ è un nodo se la risoluzione minimale di Y è tale che la controimmagine di P sia un'unica curva liscia razionale con autointersezione -2 (o, equivalentemente, un'unica curva che ha intersezione nulla con la classe canonica).

È evidente che la singolarità del cono analizzata nella sezione precedente è un nodo secondo la definizione appena data.

1.3 Il nodo nella categoria analitica

Le varietà algebriche proiettive su \mathbb{C} possono essere studiate da due punti di vista: quello algebrico e quello analitico. Il collegamento fra le due categorie è stato spiegato da Serre nel suo fondamentale articolo *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique* (1956, [16]), comunemente conosciuto come “GAGA”.

Più precisamente, se X è una varietà algebrica proiettiva su \mathbb{C} , esiste ed è unica su X una struttura di spazio analitico, tale che ogni carta algebrica sia una carta analitica (vedi [16], Proposizione 2): indichiamo con X^h l'insieme X munito della struttura di spazio analitico e con \mathcal{O}_X^h il fascio dei germi di funzioni olomorfe su X^h . Si ha che se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione regolare fra varietà algebriche proiettive su \mathbb{C} , allora $f : X^h \rightarrow Y^h$ è un'applicazione olomorfa. Allora, una mappa razionale fra varietà proiettive è meromorfa. Inoltre, la dimensione algebrica di X e la dimensione analitica di X^h coincidono (vedi [16], Corollario 3).

Il risultato principale dimostrato da Serre è che i fasci coerenti su X ed i fasci coerenti su X^h si corrispondono biunivocamente e la corrispondenza tra queste due categorie di fasci lascia invariati i gruppi di coomologia (vedi [16], Teoremi 1-2-3).

Tutto questo ci assicura che per numerose questioni i due punti di vista, algebrico e analitico, conducono a risultati essenzialmente equivalenti, benché con metodi molto diversi.

Prendiamo di nuovo in considerazione la singolarità del cono quadrico: nella Sezione 1.1 abbiamo esordito dicendo che questa è “il nodo per eccellenza”. Vogliamo ora giustificare questa affermazione.

Definizione 1.3.1. Sia $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ una mappa bimeromorfa fra superfici

proiettive normali su \mathbb{C} . Una curva $C \subset Y$ si dice *eccezionale per η* se η contrae C ad un punto $x \in \Sigma$ ed esistono intorno aperti nella topologia forte U, V rispettivamente di C in Y e di x in Σ , tali che η è un isomorfismo analitico fra $U \setminus C$ e $V \setminus \{x\}$.

Teorema 1.3.2. *Sia Y una superficie algebrica proiettiva liscia su \mathbb{C} . Sia $C \subset Y$ una curva liscia razionale con autointersezione -2 . Sia poi $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ una mappa bimeromorfa da Y in una superficie proiettiva normale Σ , che contrae la curva C ad un punto $x \in \Sigma$ ed è tale che C sia una curva eccezionale per η . Allora, la singolarità $x \in \Sigma$ è analiticamente equivalente all'unica singolarità della superficie $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y^2 = xz\} \subset \mathbb{C}^3$ nell'origine.*

Dim. Vedi [3], Teorema 5.1, Capitolo III. \square

Concludiamo che un nodo su una superficie normale Σ , così come è stato definito nella sezione precedente, è analiticamente equivalente alla singolarità del cono quadrico analizzata nella Sezione 1.1.

A questo punto, vorrei dare un esempio di costruzione di nodo, significativo per quello che farò in seguito.

Consideriamo l'involuzione $\iota : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, data da $i(u, v) := (-u, -v)$, dove (u, v) sono coordinate fissate su \mathbb{C}^2 . Questa definisce un'azione di \mathbb{Z}_2 su \mathbb{C}^2 : sia Σ la varietà quoziente per questa azione e $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \Sigma$ la mappa quoziente.

Ora, consideriamo il sottoanello $B \subset \mathbb{C}[u, v]$ dei polinomi fissati da ι , $B := \{p \in \mathbb{C}[u, v] \mid p = \iota^*p\} \subset \mathbb{C}[u, v]$. Un monomio $u^i v^j$ è fissato da ι se e solo se $i + j$ è pari, ovvero, se e solo se i e j sono o entrambi pari o entrambi dispari. Allora, l'anello B è generato dai monomi u^2, uv e v^2 .

È noto che Σ è affine, B è l'anello delle coordinate di Σ e la mappa quoziente $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \Sigma$ è indotta dall'inclusione $B \hookrightarrow \mathbb{C}[u, v]$ (vedi [17], Esempio 11, Sezione 2.3, Capitolo I). Consideriamo l'omomorfismo surgettivo $\mathbb{C}[x, y, z] \twoheadrightarrow B$, ottenuto mandando x in u^2 , y in uv e z in v^2 . Ad esso

corrisponde una immersione di Σ in \mathbb{C}^3 , indotta dal morfismo:

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x = u^2, y = uv, z = v^2).\end{aligned}$$

È chiaro che l'immagine di Σ attraverso l'immersione indotta da φ è $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y^2 = xz\}$, che, a meno di un cambiamento di base, è il cono quadrico della Sezione 1.1. Allora, Σ è isomorfa al cono quadrico, quindi ha come unica singolarità $\pi(0)$, che, per quanto visto nella Sezione 1.1, è un nodo.

1.4 Contrazione di curve nodali

Definizione 1.4.1. Sia Y una superficie. Una curva C su Y si dice *curva nodale* se è una curva liscia razionale con autointersezione $C^2 = -2$.

Definizione 1.4.2. Una superficie si dice *superficie nodale* se è normale e le sue singolarità sono tutte punti doppi ordinari.

Il prossimo teorema è un caso particolare del *criterio di contrazione delle curve di Artin* (1962, [1]).

Teorema 1.4.3 (Artin). *Sia Y una superficie normale e siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y , tali che Y sia liscia lungo di esse. Allora, esiste un morfismo birazionale $\eta: Y \rightarrow \Sigma$ da Y su una superficie proiettiva normale Σ , che contrae ciascuna curva C_i ad un punto P_i ed è un isomorfismo fra $Y \setminus \bigcup_{i=1}^k C_i$ e $\Sigma \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$.*

Dalle ipotesi del teorema segue che la matrice di intersezione $(C_i C_j)$ è definita negativa. Per il *criterio di Mumford* (Proposizione 1.2.9), ciò non è un caso, ma una condizione necessaria alla contraibilità delle curve.

Vorrei dimostrare il Teorema 1.4.3 e per farlo avrò bisogno del seguente risultato:

Lemma 1.4.4. *La normalizzazione di una varietà proiettiva su un campo k algebricamente chiuso è proiettiva su k .*

Dim. Sia X una varietà proiettiva sul campo k . In particolare, X è uno schema integro, allora dalla teoria degli schemi sappiamo che esiste la normalizzazione di X (vedi [9], Esercizio 3.8, Capitolo II), ovvero esistono uno schema X' integro e normale e un morfismo surgettivo $f : X' \rightarrow X$ con la seguente proprietà universale: per ogni schema integro e normale Z e per ogni morfismo dominante $g : Z \rightarrow X$, g fattorizza in modo unico attraverso f .

Dalla proprietà universale segue subito che la normalizzazione X' di X è unica a meno di isomorfismo canonico.

Per prima cosa, vediamo che X' è di tipo finito su k . Sia $U = \text{Spec}(A)$ un aperto affine di X . La normalizzazione di U è $U' = \text{Spec}(A')$, dove A' è la chiusura integrale di A nel suo campo quoziente; la mappa di normalizzazione $f' : U' \rightarrow U$ è indotta dall'inclusione di A in A' e A' è finitamente generato come A -modulo (per ognuna di queste affermazioni, vedi [17], Teorema 4, Sezione 5.2, Capitolo II). Allora, f' è un morfismo finito, dunque surgettivo.

A questo punto abbiamo il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ & \nearrow & \uparrow i \\ U' & \xrightarrow{f'} & U \end{array}$$

dove $i : U \hookrightarrow X$ è l'inclusione. Per la proprietà universale della normalizzazione, esiste ed è unico un morfismo $i' : U' \rightarrow X'$ che chiude il diagramma. Per commutatività dello stesso, $i'(U') \subset f^{-1}(U)$. Poiché $f^{-1}(U)$ è aperto in X' , si ha che $f^{-1}(U)$ è uno schema integro e normale. Grazie all'esistenza del morfismo i' ed alla proprietà universale delle normalizzazioni di X e di U , si ha che $f^{-1}(U)$ è canonicamente isomorfo a U' . Dato che l'aperto affine $U \subset X$ è stato scelto in modo arbitrario, ciò implica che f è un morfismo finito e surgettivo. Allora, poiché X è uno schema di tipo finito su k , anche X' è di tipo finito su k .

Poiché X è una varietà proiettiva, X è uno schema proprio su k . Ne deriva che anche X' lo è. Infatti, f è un morfismo finito, dunque è proprio e la composizione di morfismi propri è ancora un morfismo proprio (vedi [9], Esercizio 4.1 e Corollario 4.8(b), Capitolo II).

A questo punto, per avere la tesi è sufficiente dimostrare che esiste una immersione di X' in uno spazio proiettivo: l'immagine sarà automaticamente chiusa, perchè X' è proprio (vedi [9], Esercizio 4.4, Capitolo II). Per definizione stessa di fascio molto ampio, questo equivale a dimostrare l'esistenza di un fascio invertibile molto ampio su X' . A tal fine, è sufficiente mostrare l'esistenza di un fascio invertibile ampio su X' : infatti, dato un fascio invertibile \mathcal{L} su X' , se \mathcal{L} è ampio, allora esiste un intero positivo s abbastanza grande, tale che \mathcal{L}^s sia molto ampio (vedi [9], Teorema 7.6, Capitolo II). Poiché X è proiettiva, certamente su di essa esiste un fascio invertibile ampio: per esempio una sezione iperpiana. Per il fatto che f è un morfismo finito e surgettivo, il pull-back di un qualunque fascio invertibile ampio su X è ampio su X' (vedi [9], Esercizio 5.7(d), Capitolo III).

Ciò conclude la dimostrazione. \square

Dim. del teorema 1.4.3. Contrarrò le curve una per volta.

Sia allora $C = C_1$ la curva che voglio contrarre. Dato che la superficie è liscia lungo C , possiamo associare a C un divisore, dunque un elemento di $\text{Pic}(Y)$, che indichiamo ancora con C . Sia G il gruppo libero generato da C . Osserviamo che $\text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ è libero generato dalla $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$, data da $f(C) = 1$. Presa una classe $D \in \text{Pic}(Y)$, possiamo definire $f_D \in \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$ ponendo, per ogni $E \in G$, $f_D(E) := E \cdot D$. In questo modo otteniamo un omomorfismo di gruppi $\tau : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$, dato da $\tau(D) := f_D$, per ogni $D \in \text{Pic}(Y)$. Consideriamo la restrizione di τ a G , che indichiamo con $\iota : G \rightarrow \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$. Poiché $C^2 = -2 \neq 0$, l'omomorfismo ι è iniettivo e, dato che entrambi i gruppi sono liberi di rango 1, il conucleo è finito. Ciò significa che per ogni divisore D su Y , esistono un intero positivo n ed $E \in G$ tali che $nf_D = f_{nD} = -f_E$. Visto che la superficie Y è proiettiva,

possiamo considerare un divisore molto ampio L su di essa. Per le proprietà dei divisori molto ampi su varietà proiettive, possiamo scegliere un intero positivo n abbastanza grande in modo tale che:

- $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(nL)) = 0 \quad \forall i > 0$;
- $f_{nL} = -f_E$ per qualche (unico) $E \in G$;
- nL è molto ampio.

Per esempio, prima scelgo un intero positivo s tale che $f_{sL} = -f_B$ per qualche $B \in G$, poi prendo un multiplo abbastanza grande di s .

Sia $H = nL$ il divisore ottenuto. Le proprietà suddette diventano:

- $H^i(Y, \mathcal{O}_Y(H)) = 0 \quad \forall i > 0$;
- $f_{H+E} = 0$ per qualche (unico) $E \in G$;
- H è molto ampio.

Allora $H \cdot C > 0$, da cui $E \cdot C = -H \cdot C < 0$. E è della forma $E = mC$, con $m \in \mathbb{Z}$, dunque $E \cdot C = mC^2 = -2m < 0$, da cui segue che E è effettivo con supporto C . Inoltre $\deg(H + E)|_C = (H + E) \cdot C = 0$ e, visto che $C \cong \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}_C(H + E) \cong \mathcal{O}_C$.

La successione

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-C) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

è esatta. Tensorizziamo con $\mathcal{O}_Y(H + E)$, ottenendo la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(H + (m - 1)C) \rightarrow \mathcal{O}_Y(H + E) \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Si ha che $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + iC)) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, m$. Ciò si può vedere per induzione. Per $i = 0$ è ovvio dalle ipotesi su H . Osserviamo che, per come è fatta la coomologia di \mathbb{P}^1 , $H^1(C, \mathcal{O}_C(s)) = 0$ per ogni intero $s \geq -1$. Poiché $(H + E) \cdot C = 0$ ed $E = mC$, allora $H \cdot C = 2m$. Ne deriva che per ogni $i \leq m$ si ha $(H + iC) \cdot C = 2(m - i) \geq 0$ e, per quanto appena osservato, $H^1(C, \mathcal{O}_C(H + iC)) = 0$. Dalla successione esatta 1.4 si ottiene, tensorizzando con $\mathcal{O}_Y(H + iC)$, la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(H + (i - 1)C) \rightarrow \mathcal{O}_Y(H + iC) \rightarrow \mathcal{O}_C(H + iC) \rightarrow 0$$

e passando ai gruppi di coomologia

$$\dots \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + (i - 1)C)) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + iC)) \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C(H + iC)) \rightarrow \dots$$

Si è visto che $H^1(C, \mathcal{O}_C(H + iC)) = 0$ per ogni $i \leq m$, quindi la mappa $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + (i - 1)C)) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + iC))$ è surgettiva: ne deriva il passo induttivo.

In particolare, abbiamo dimostrato che $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(H + (m - 1)C)) = 0$.

Consideriamo la successione 1.5 e passiamo alla successione dei gruppi di coomologia. Si ottiene che la mappa $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H + E)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C)$ è surgettiva. Allora, esiste una sezione globale $s \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H + E))$ che viene mandata nella sezione costante $1 \in H^0(C, \mathcal{O}_C)$. Il divisore degli zeri $D = \text{div}(s)$ ha supporto che non interseca C . Poiché H è molto ampio, il sistema $|H + E|$ non ha punti base fuori di E . Mettiamo insieme le due affermazioni e otteniamo che $|H + E|$ non ha punti base. Allora, esiste un morfismo $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{P}^N$ tale che $\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \cong \mathcal{O}_Y(H + E)$. Indichiamo con \bar{Y} l'immagine di Y attraverso φ .

Si ha che $\varphi(C)$ è un singolo punto, diciamo P . Supponiamo per assurdo che $\varphi(C)$ abbia più di un punto e sia $P \in \varphi(C)$. Allora, posso scegliere un iperpiano $T \subset \mathbb{P}^N$ che passi per P e non contenga $\varphi(C)$. Per come ho scelto φ , il pull-back φ^*T è un divisore effettivo su Y linearmente equivalente ad $H + E$, quindi la sua restrizione a C deve essere un divisore principale, in quanto $\text{deg}(H + E)|_C = 0$. Per costruzione φ^*T interseca C , allora l'unica possibilità è che $C \subseteq \varphi^*T$. Ne segue che $\varphi(C) \subseteq T$ e questo contraddice l'ipotesi fatta su T . Dunque $\varphi(C)$ deve essere un singolo punto.

Poiché H è molto ampio, il sistema $|H|$ separa i punti e i vettori tangenti. Dico che il sistema $|H + E|$ separa i punti e i vettori tangenti fuori di C . Infatti, presi $y, y' \in Y \setminus C$, esiste una sezione $s' \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H))$ che si annulla su y e non su y' . Considerata una sezione $s'' \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(E))$ corrispondente al divisore effettivo $E = mC$, ho che il supporto del divisore $\text{div}(s') + \text{div}(s'') \in |H + E|$ contiene y ma non y' , ovvero, la sezione $s \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(H + E))$ ad esso corrispondente si annulla su y e non su y' . Con ragionamento analogo si vede che il sistema $|H + E|$ separa i vettori tangenti fuori di C .

Allora φ è una immersione su $Y \setminus C$. Questo, insieme con il fatto che l'imma-

gine di C è il punto P , dimostra che φ è un isomorfismo fra $Y \setminus C$ e $\bar{Y} \setminus \{P\}$ e che \bar{Y} è una superficie proiettiva. Adesso considero la normalizzazione di \bar{Y} , che chiamo Y_1 . Per il Lemma 1.4.4, Y_1 è proiettiva. Inoltre, poiché $\varphi : Y \rightarrow \bar{Y}$ è surgettiva e Y è normale, per la proprietà universale della normalizzazione, φ fattorizza in modo unico attraverso la mappa di normalizzazione. Quindi, se $f : Y_1 \rightarrow \bar{Y}$ è la mappa di normalizzazione, esiste ed è unico un morfismo $\pi : Y \rightarrow Y_1$ tale che $\varphi = f \circ \pi$. Poiché φ e f sono birazionali, $\pi : Y \rightarrow Y_1$ è birazionale. Sappiamo che f è un morfismo finito, quindi π deve contrarre C ad un punto. Infine, φ è un isomorfismo fuori della curva C , allora π deve essere un isomorfismo fuori di C .

Una volta dimostrato che il teorema vale per una singola curva, è facile estendere il risultato a un numero finito k di curve. In effetti, basta osservare che, esclusa la curva che è stata contratta, in tutti gli altri punti la mappa trovata è un isomorfismo. Allora la nuova superficie Y_1 ha esattamente $(k - 1)$ curve nodali ed è liscia su ognuna di esse. Mantengo la stessa notazione per le curve su Y_1 , che saranno C_2, \dots, C_k . Posso ripetere il ragionamento di prima per la curva C_2 e troverò un morfismo birazionale $\pi_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$, con Y_2 normale e proiettiva, che contrae solo C_2 ed è un isomorfismo fuori da questa. Y_2 soddisfa le ipotesi del teorema ed ha $(k - 2)$ curve nodali: posso applicare ancora lo stesso ragionamento. Dopo k ripetizioni avrò ottenuto un morfismo birazionale $\pi = \pi_k \circ \dots \circ \pi_1 : Y \rightarrow Y_k = \Sigma$ che contrae tutte le curve a punti distinti. Per costruzione, la superficie Σ è proiettiva e normale e π è un isomorfismo fuori dalle curve, dunque il teorema è dimostrato. \square

Osservazione 1.4.5. Data una superficie normale Y con curve nodali disgiunte C_1, \dots, C_k , non solo esiste un morfismo birazionale $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ su una superficie normale Σ che contrae le curve C_1, \dots, C_k ed è un isomorfismo fuori delle curve, ma la coppia (Σ, η) è univocamente determinata a meno di isomorfismo canonico. Questo è una conseguenza immediata del Lemma 1.2.4.

Osservazione 1.4.6. Segue dal Teorema 1.4.3 che se Y è liscia, Σ è una superficie nodale. Infatti, poiché η è un isomorfismo fuori dalle curve, ogni punto diverso dai P_i è liscio e le uniche singularità di Σ sono i P_i stessi. Inoltre, η è un morfismo birazionale che non contrae (-1) -curve, allora, per la Proposizione 1.2.5, η è una risoluzione minimale. Infine, ad ogni P_i corrisponde un'unica curva nodale, per cui i P_i sono nodi.

Da quanto si è visto in questo capitolo, concludiamo che studiare i nodi di una superficie nodale equivale a studiare le curve nodali disgiunte di una superficie liscia.

Allora, anziché una superficie nodale Σ , da ora in avanti prenderemo in considerazione una superficie liscia Y con curve nodali disgiunte C_1, \dots, C_k su di essa.

Capitolo 2

Il codice associato a una famiglia di curve nodali

In questo capitolo parlerò di uno strumento utile allo studio delle curve nodali su una superficie liscia e, di conseguenza, allo studio delle superfici nodali: i codici. In realtà, l'unico tipo di codice di cui farò menzione è il codice lineare binario, e ciò che effettivamente servirà sarà soltanto un po' di linguaggio.

2.1 Codici binari

In questa sezione richiamo tutto ciò che mi serve di teoria dei codici.

Un *codice binario* è un sottospazio vettoriale V di \mathbb{F}_2^n . L'intero n si chiama *lunghezza* del codice e la dimensione di V *dimensione* del codice.

Preso un vettore $x \in \mathbb{F}_2^n$, il numero di coordinate non nulle di x si chiama *peso* di x e si indica con $w(x)$. I pesi dei vettori non nulli di un codice si chiamano pesi del codice.

Due codici in \mathbb{F}_2^n si dicono *isomorfi* se si possono ottenere l'uno dall'altro attraverso una permutazione delle coordinate. In tal caso i due codici hanno la stessa lunghezza, la stessa dimensione e gli stessi pesi.

Indichiamo con (x^1, \dots, x^n) le coordinate di \mathbb{F}_2^n . Un codice $V \subseteq \mathbb{F}_2^n$ si dice

ridotto se per ogni $i = 1, \dots, n$, $V \not\subseteq \{x^i = 0\}$. Ad ogni codice V è possibile associare un codice ridotto V' : basta cambiare lo spazio ambiente \mathbb{F}_2^n con uno spazio ambiente \mathbb{F}_2^s , con $s \leq n$, ottenuto togliendo le coordinate che hanno sempre valore nullo su V . Il nuovo codice avrà la stessa dimensione, gli stessi pesi, ma lunghezza eventualmente minore.

Due codici $V_1 \subseteq \mathbb{F}_2^{m_1}$, $V_2 \subseteq \mathbb{F}_2^{m_2}$ si dicono *essenzialmente isomorfi* se i codici ridotti ad essi associati sono isomorfi. In particolare, i codici ridotti associati a codici essenzialmente isomorfi devono avere la stessa lunghezza.

Esempi:

i) **Codice dei vettori pari.** È semplicemente il sottospazio $V = \{\sum x^i = 0\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ costituito da tutti i vettori di peso pari. È un codice ridotto di dimensione $n - 1$.

ii) **Codice dei vettori doppiamente pari DE(n).** Dato il codice dei vettori pari $V \subseteq \mathbb{F}_2^n$ appena descritto, consideriamo la mappa lineare iniettiva $\mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^{2n}$ definita da $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, x^1, \dots, x^n, x^n)$. Il codice $DE(n)$ è l'immagine di V tramite questa mappa. Come V , è un codice ridotto di dimensione $n - 1$, ma ha lunghezza doppia e anche i pesi sono doppi, quindi divisibili per 4.

iii) **Codice \mathcal{C}_p .** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione p su \mathbb{F}_2 e sia Ω l'insieme delle forme lineari non nulle su V . Consideriamo la mappa lineare iniettiva $V \hookrightarrow \mathbb{F}_2^\Omega$ definita da $x \mapsto (f(x))_{f \in \Omega}$. Il codice \mathcal{C}_p è l'immagine di V attraverso questa mappa. \mathcal{C}_p è ridotto, ha lunghezza $n = 2^p - 1$ e dimensione p . Inoltre, tutti i suoi elementi hanno peso $2^{p-1} = (n + 1)/2$. Infatti, preso $x \in V$, $w(x) = \#\{f \in \Omega | f(x) = 1\}$ e, una volta completato il sistema costituito dal solo x a una base di V , è chiaro che questo numero è 2^{p-1} .

iv) **codice \mathcal{D}_p .** Denotiamo con \mathbb{F}_2^{n-1} il sottospazio di \mathbb{F}_2^n generato dai primi $(n - 1)$ vettori della base canonica. Consideriamo il codice appena definito $\mathcal{C}_{p-1} \subset \mathbb{F}_2^{n-1}$, dove $n = 2^{p-1}$. Sia \mathcal{D}_p il sottospazio di \mathbb{F}_2^n generato da \mathcal{C}_{p-1} e dall'elemento di peso n . Chiaramente questo codice è ridotto, ha dimensione p ed ha pesi $(n/2)$ e n .

Tra questi esempi, l'unico che incontreremo nel corso dello studio dei nodi su una superficie nodale rigata è il codice dei vettori doppiamente pari. Ad ogni modo, ho voluto menzionare i codici \mathcal{C}_p e \mathcal{D}_p per l'importanza storica che hanno avuto: questi sono i codici usati da Beauville nella sua dimostrazione che il numero massimo di nodi su una superficie di grado 5 immersa in \mathbb{P}^3 è $\mu(5) = 31$. Dunque, \mathcal{C}_p e \mathcal{D}_p sono i primi codici ad essere stati usati per lo studio dei nodi di una superficie nodale.

2.2 Il codice associato a una famiglia di curve nodali

Sia Y una superficie liscia e siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y . Sia \mathcal{C} il sottogruppo di $\text{Pic}(Y)$ generato dalle classi di C_1, \dots, C_k . Denotiamo con $\varphi : \mathcal{C}/2\mathcal{C} \rightarrow \text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ l'omomorfismo indotto dall'inclusione. \mathcal{C} è un gruppo abeliano libero di rango k , allora $\mathcal{C}/2\mathcal{C}$ è uno spazio vettoriale di dimensione k su \mathbb{F}_2 e, scelta come base la famiglia delle classi di divisori associate alle curve C_i modulo $2\mathcal{C}$, possiamo identificare questo gruppo con \mathbb{F}_2^k . In tal caso, siano (x^1, \dots, x^k) le coordinate di \mathbb{F}_2^k .

Definizione 2.2.1. Il nucleo V dell'omomorfismo $\varphi : \mathcal{C}/2\mathcal{C} \rightarrow \text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ è il *codice binario associato alle curve* C_1, \dots, C_k .

Definizione 2.2.2. Dato il codice V associato alle curve C_1, \dots, C_k , diciamo che la curva C_i *appare in* V se $V \not\subseteq \{x^i = 0\}$.

Allora, il numero di curve che appaiono in V è uguale alla lunghezza del codice ridotto associato a V .

Lemma 2.2.3. *Sia Y una superficie liscia e siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y . Allora, i pesi del codice V associato alle curve C_1, \dots, C_k sono tutti divisibili per 4.*

Dim. Per come è stato definito V , si ha che un vettore $v = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{F}_2^k$ appartiene a V se e solo se esiste $L_v \in \text{Pic}(Y)$ tale che $\sum_{i=1}^k x^i C_i \equiv 2L_v$: in quest'ultima espressione ho identificato gli elementi di \mathbb{F}_2 con gli interi 0,1. Poiché le curve sono nodali, dalla formula di aggiunzione deriva che $C_i \cdot K_Y = 0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, quindi $L_v \cdot K_Y = 0$. Sempre per la formula di aggiunzione $L_v^2 + L_v \cdot K_Y$ deve essere pari. In realtà, come è possibile vedere dal calcolo che segue, ciò vale qualunque sia il divisore. Prendiamo un divisore $D = \sum_{i=1}^s m_i E_i$, dove le E_i sono curve distinte su Y :

$$\begin{aligned} D^2 + D \cdot K_Y &= \left(\sum_i m_i E_i \right)^2 + \sum_i m_i E_i \cdot K_Y \\ &= \sum_i (m_i)^2 E_i^2 + 2 \sum_{i < j} m_i m_j E_i \cdot E_j + \sum_i m_i E_i \cdot K_Y \\ &= \sum_i (m_i)^2 (E_i^2 + E_i \cdot K_Y) + 2 \sum_{i < j} m_i m_j E_i \cdot E_j \\ &\quad + \sum_i m_i (1 - m_i) E_i \cdot K_Y. \end{aligned}$$

La formula di aggiunzione dice che $E_i^2 + E_i \cdot K_Y = 2(g(E_i) - 1)$, per ogni $i = 1, \dots, s$, ovvero che il primo gruppo di addendi è pari. Allora, tutta la somma è pari.

Tornando al nostro caso particolare, abbiamo ottenuto che L_v^2 è pari. Osserviamo che il peso $w(v)$ è uguale a $-2L_v^2$. Infatti:

$$\begin{aligned} 2L_v \cdot C_j &= \sum_i x^i C_i \cdot C_j = x^j C_j^2 = -2x^j \\ &\Downarrow \\ x^j &= -L_v \cdot C_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ &\Downarrow \\ -2L_v^2 &= -\sum_i x^i C_i \cdot L_v = \sum (x^i)^2 = \sum x^i = w(v) \end{aligned}$$

A questo punto la tesi è immediata. \square

Rimane da fare un'ultima utile osservazione.

Osservazione 2.2.4. Consideriamo il seguente omomorfismo:

$$\begin{aligned}\phi_2 : \text{Pic}(Y) &\rightarrow \text{Pic}(Y) \\ D &\mapsto 2D\end{aligned}$$

Per ogni $v \in V$ si ha che L_v è univocamente determinato da v se e solo se $\ker(\phi_2) = 0$. È facile vedere perché. Prendiamo $v = (x^1, \dots, x^n) \in V$. Supponiamo che $\ker(\phi_2) = 0$ e che esistano $L, L' \in \text{Pic}(Y)$ tali che $2L \equiv 2L' \equiv \sum x^i C_i$. Allora $L - L' \in \ker(\phi_2)$, ovvero $L \equiv L'$. Il viceversa è ancora più banale.

2.3 Il rivestimento associato al codice

Richiamerò brevemente alcuni risultati sulla struttura degli \mathbb{Z}_2^r -rivestimenti con riferimento all'articolo [14].

Nel fare questi richiami, mi riferirò come al solito al caso delle varietà proiettive su \mathbb{C} .

Definizione 2.3.1. Un *rivestimento di grado d* è un morfismo finito $\pi : Z \rightarrow Y$, con Z e Y varietà proiettive normali, tale che la fibra di π su un punto generale di Y abbia cardinalità d .

Definizione 2.3.2. Dato un rivestimento di grado d , $\pi : Z \rightarrow Y$, l'insieme $D = \{y \in Y \mid \#\pi^{-1}(y) < d\} \subset Y$ si chiama *contorno apparente* (“branch locus” in inglese). L'insieme $R \subset Z$ dei punti $z \in Z$ tali che il differenziale di π in z non sia un isomorfismo, si dice *luogo di ramificazione*. Si ha $\pi(R) = D$.

Definizione 2.3.3. Dato un rivestimento $\pi : Z \rightarrow Y$, il gruppo ad esso associato è $G := \{\phi \in \text{Aut}(Z) \mid \pi \circ \phi = \pi\}$.

Dato un rivestimento $\pi : Z \rightarrow Y$, il gruppo G del rivestimento agisce in modo naturale su Z e su ogni singola fibra di π .

Definizione 2.3.4. Un rivestimento di grado d , $\pi : Z \rightarrow Y$, si dice *rivestimento di Galois* se il gruppo G del rivestimento agisce transitivamente sulle

fibre, o, equivalentemente, se G ha ordine d . In tal caso, il gruppo G si chiama *gruppo di Galois del rivestimento*.

Un rivestimento di Galois si dice *abeliano* se il gruppo del rivestimento è abeliano.

Sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un rivestimento di grado d . Visto che π è un morfismo finito, ad esso è associata una estensione finita di campi $\mathbb{C}(Y) \subset \mathbb{C}(Z)$ di grado uguale al grado d del rivestimento. Ovviamente, poiché i campi in questione hanno caratteristica zero, l'estensione è sempre separabile. Posso identificare il gruppo G del rivestimento con il gruppo di automorfismi dell'estensione. L'estensione è di Galois se e solo se lo è il rivestimento e, in tal caso, è abeliana se e solo se il rivestimento è abeliano.

Vale la pena osservare che i rivestimenti si possono descrivere anche topologicamente. Infatti, se indichiamo con Z_0 e Y_0 rispettivamente gli spazi topologici $Z \setminus \pi^{-1}(D)$ e $Y \setminus D$ e consideriamo la restrizione $\pi_0 := \pi|_{Z_0} : Z_0 \rightarrow Y_0$, allora π_0 è un rivestimento topologico di grado d .

Definizione 2.3.5. Sia G un gruppo finito. Un G -*rivestimento* è un rivestimento di Galois con gruppo G . In altre parole, un G -rivestimento è un morfismo finito $\pi : Z \rightarrow Y$ fra varietà proiettive normali, tale che:

- i) il gruppo G agisca fedelmente su Z ;
- ii) π coincida con la mappa quoziente dell'azione di G su Z .

Quando $G = \mathbb{Z}_2$, un G -rivestimento si dice *rivestimento doppio*.

È da notare che se $\pi : Z \rightarrow Y$ è un G -rivestimento, allora R è l'insieme dei punti di Z che hanno stabilizzatore non banale per l'azione di G e si ha $\pi^{-1}(D) = R$.

Supponiamo che G sia un gruppo abeliano finito. Denotiamo con G^* il gruppo dei caratteri di G , ovvero $G^* = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un G -rivestimento, con Z normale e Y liscia. In questa situazione π è piatta e l'azione di G su Z induce una decomposizione di $\pi_*\mathcal{O}_Z$ della forma:

$$\pi_*\mathcal{O}_Z = \bigoplus_{\chi \in G^*} \mathcal{L}_\chi^{-1},$$

dove gli \mathcal{L}_χ sono fasci invertibili su Y sui quali G agisce attraverso il carattere χ . $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{O}_Y$ mentre $\mathcal{L}_\chi \neq \mathcal{O}_Y$ per ogni $\chi \neq 1$.

Vale il seguente:

Teorema 2.3.6 (Teorema di purità di Zariski, [19]). *Sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un morfismo finito, con Z normale e Y liscia. Allora il contorno apparente $D \subset Y$ è un divisore.*

Allora D e $R = \pi^{-1}(D)$ sono entrambi divisori.

Definizione 2.3.7. Sia S una componente di R . Definiamo il *gruppo di inerzia di S* nel modo seguente:

$$I_S = \{g \in G \mid gz = z \quad \forall z \in S\}.$$

Un rivestimento si dice *totalmente ramificato* se i gruppi di inerzia delle componenti di R generano G .

Un fatto essenziale da richiamare è che il sottogruppo di inerzia di una componente S di R è uguale allo stabilizzatore di un qualunque punto $x \in S$, liscio per R , ed è ciclico.

Supponiamo che $G \cong \mathbb{Z}_2^r$, per qualche intero $r \geq 1$. Allora, i sottogruppi di inerzia sono tutti isomorfi a \mathbb{Z}_2 . Ciò significa che, per ogni componente S di R , esiste un unico elemento $g \in G \setminus \{1\}$ che la fissi punto per punto. Per ogni $g \in G \setminus \{1\}$, sia R_g la somma delle componenti di R fissate da g . Posto $R_1 = 0$, si ha:

$$R = \sum_{g \in G} R_g.$$

Osserviamo che R_g è stabile sotto l'azione di G , in quanto G è abeliano. Se, per ogni $g \in G \setminus \{1\}$, definisco $D_g := \pi(R_g)$ e $D_1 := 0$, si ha:

$$D = \sum_{g \in G} D_g.$$

Arrivati a questo punto, possiamo dare la seguente:

Definizione 2.3.8. Sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un G -rivestimento, dove $G \cong \mathbb{Z}_2^r$, Z è normale e Y è liscia. Usando la notazione appena introdotta, i fasci \mathcal{L}_χ , $\chi \in G^*$, e i divisori D_g , $g \in G \setminus \{1\}$, si chiamano *dati di costruzione* del rivestimento π .

Per ogni $\chi \in G^*$ e per ogni $g \in G$ definiamo $\epsilon_\chi(g) \in \{0, 1\}$ ponendo $\chi(g) = (-1)^{\epsilon_\chi(g)}$. Per ogni coppia di caratteri $\chi, \chi' \in G^*$ e per ogni $g \in G$ definiamo:

$$\epsilon_{\chi, \chi'}(g) = \begin{cases} 0, & \text{se } \epsilon_\chi(g) + \epsilon_{\chi'}(g) \in \{0, 1\}, \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vale il seguente:

Teorema 2.3.9 ([14], **Teorema 2.1**). *Sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un G -rivestimento con $G \cong \mathbb{Z}_2^r$, dove Z è normale e Y liscia. Usando la notazione appena introdotta, siano $\{\mathcal{L}_\chi, D_g\}$ i dati di costruzione del rivestimento. Allora, per ogni coppia di caratteri $\chi, \chi' \in G^*$ si ha:*

$$\mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\chi'} \equiv \mathcal{L}_{\chi\chi'} + \sum_{g \in G} \epsilon_{\chi, \chi'}(g) D_g. \quad (2.1)$$

Viceversa, sia Y una superficie liscia e G un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2^r . Dati fasci invertibili \mathcal{L}_χ , $\chi \in G^$, e divisori effettivi D_g , $g \in G \setminus \{1\}$, che soddisfino le relazioni 2.1 e tali che il divisore $D = \sum_g D_g$ sia ridotto e l'insieme dei $g \in G$ con $D_g \neq 0$ generi G , allora esiste un G -rivestimento $\pi : Z \rightarrow Y$, i cui dati di costruzione siano $\{\mathcal{L}_\chi, D_g\}$.*

Tale rivestimento è unico a meno di isomorfismo G -equivariante.

Definizione 2.3.10. Sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un G -rivestimento, dove $G \cong \mathbb{Z}_2^r$, Z è normale e Y è liscia. Sia $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ una base di G^* e indichiamo i fasci \mathcal{L}_{χ_j} con \mathcal{L}_j , per ogni $j = 1, \dots, r$. I fasci $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$ e i divisori D_g , $g \in G \setminus \{1\}$, si dicono *dati di costruzione ridotti* del rivestimento π .

Nella situazione della definizione appena data, per ogni $g \in G$ e per ogni $j = 1, \dots, r$, poniamo $\epsilon_j(g) := \epsilon_{\chi_j}(g)$. Valgono i seguenti risultati:

Teorema 2.3.11 ([14], **Proposizione 2.1**). *Sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un G -rivestimento con $G \cong \mathbb{Z}_2^r$, dove Z è normale e Y liscia. Fissata una base $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ di G^* , siano $\{\mathcal{L}_j, D_g\}$ dati di costruzione ridotti del rivestimento. Allora:*

$$2\mathcal{L}_j \equiv \sum_{g \in G} \epsilon_j(g) D_g \quad \forall j = 1, \dots, r. \quad (2.2)$$

Viceversa, sia Y una superficie liscia e G un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2^r . Dati fasci invertibili $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$ e divisori effettivi D_g , $g \in G \setminus \{1\}$, che soddisfino le relazioni 2.2 e tali che $D = \sum_g D_g$ sia ridotto e l'insieme dei $g \in G$ con $D_g \neq 0$ generi G , allora esiste un G -rivestimento $\pi : Z \rightarrow Y$, che ha dati di costruzione ridotti $\{\mathcal{L}_j, D_g\}$.

Tale rivestimento è unico a meno di isomorfismo G -equivariante.

Teorema 2.3.12 ([14], **Teorema 3.1**). *Sia Y una superficie liscia e sia $\pi : Z \rightarrow Y$ un G -rivestimento con $G \cong \mathbb{Z}_2^r$. Indicato con D il contorno apparente di π , si ha che Z è liscia se e solo se :*

- i) D_g è liscio per ogni $g \in G$;*
- ii) le componenti di D o sono disgiunte o si intersecano trasversalmente;*
- iii) se $D_{g_1} \cap \dots \cap D_{g_s} \neq \emptyset$, allora g_1, \dots, g_s sono indipendenti in G .*

Tutto ciò che ho richiamato fino ad ora sui rivestimenti mi servirà nella dimostrazione del seguente risultato.

Teorema 2.3.13. *Sia Y una superficie liscia. Siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y , V il codice associato ad esse. Sia r la dimensione di V . Fissiamo una base $\{v_1, \dots, v_r\}$ di V e per ogni $j = 1, \dots, r$ un elemento $L_{v_j} \in \text{Pic}(Y)$ tale che, se in coordinate $v_j = (x_j^1, \dots, x_j^k)$, allora $2L_{v_j} \equiv \sum_i x_j^i C_i$. Allora, esiste un rivestimento di Galois liscio $\pi : Z \rightarrow Y$ tale che:*

- i) il gruppo del rivestimento è $G := V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C}^*)$;*
- ii) il contorno apparente D è l'unione delle curve C_i che appaiono in V ;*
- iii) $\pi_* \mathcal{O}_Z = \bigoplus_{v \in V} L_v^{-1}$, dove gli $L_v \in \text{Pic}(Y)$ sono tali che:*
 - a) $L_v = L_{v_j}$ se $v = v_j$;*
 - b) se in coordinate $v = (x_v^1, \dots, x_v^k) \in V$, allora $2L_v \equiv \sum_i x_v^i C_i$;*

c) per ogni $v \in V$, G agisce su L_v^{-1} attraverso v .

Il rivestimento π è unico a meno di isomorfismo G -equivariante.

I rivestimenti che soddisfano la tesi del teorema si dicono *rivestimenti associati al codice V* .

Nella dimostrazione userò, senza richiamarle, le notazioni introdotte nella sezione precedente, oltre a quelle definite sopra.

Dim. Sia $G = V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{F}_2^r$ il gruppo dei caratteri di V . Per il Teorema 2.3.11, al fine di determinare un rivestimento $\pi : Z \rightarrow Y$ è sufficiente dare i dati di costruzione ridotti. Quindi dobbiamo dare:

- per ogni $g \in G$, $g \neq 1$, un divisore effettivo D_g su Y ;
- per ogni $j = 1, \dots, r$ un fascio invertibile M_j su Y ;

tali che siano soddisfatte le relazioni

$$2M_j \equiv \sum_{g \in G} \epsilon_j(g) D_g, \quad j = 1, \dots, r, \quad (2.3)$$

dove $\epsilon_j(g) = \epsilon_{v_j}(g)$. Per ogni $i = 1, \dots, k$ denotiamo con $\psi_i : \mathbb{F}_2^k \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'omomorfismo definito da $(x^1, \dots, x^k) \mapsto (-1)^{x^i}$. Per ogni $g \in G = V^*$, $g \neq 1$, definiamo D_g come la somma delle curve C_s tali che $\psi_{s|V} = g$. È chiaro che i D_g sono disgiunti. Inoltre, $\psi_{s|V} \neq 1$ se e solo se C_s appare in V . Ne segue che $D := \sum_g D_g$ è l'unione delle curve C_s che appaiono in V ed è ridotto. Se identifichiamo gli elementi di \mathbb{F}_2 con gli interi $0, 1$, allora la relazione 2.3 diventa:

$$2M_j \equiv \sum_{i=1}^k x_j^i C_i, \quad j = 1, \dots, r. \quad (2.4)$$

Infatti, se $\psi_{s|V} = g$ allora $x_j^s = \epsilon_j(g)$. Allora, ponendo, per ogni $j = 1, \dots, r$, $M_j := L_{v_j}$ ottengo una soluzione per le equazioni 2.3. Poiché l'insieme dei $g \in G$ con $D_g \neq 0$ genera G , sono nelle ipotesi del Teorema 2.3.11 e quindi esiste un rivestimento $\pi : Z \rightarrow Y$ con Z normale e che soddisfi le proprietà (i) e (ii). È evidente che le condizioni del Teorema 2.3.12 sono soddisfatte, per cui Z è liscia.

Rimane da dimostrare il punto (iii). Per il Teorema 2.3.9, possiamo scrivere $\pi_*\mathcal{O}_Z = \bigoplus_{v \in V} M_v^{-1}$, dove i fasci invertibili M_v soddisfano le relazioni $M_v + M_{v'} \equiv M_{vv'} + \sum_{g \in G} \epsilon_{v,v'}(g)D_g$, per ogni coppia $v, v' \in V$, e G agisce su M_v^{-1} attraverso v . Per costruzione, ho $M_{v_j} = L_{v_j}$. Applicando le relazioni appena richiamate, per ogni $v \in V$ si deve avere $2M_v \equiv \sum_{g \in G} \epsilon_v(g)D_g = \sum_i x_v^i C_i$. Posto $L_v := M_v$ per i rimanenti v che non fanno parte della base $\{v_1, \dots, v_r\}$, ho che il punto (iii) è soddisfatto.

L'unicità del rivestimento deriva direttamente dalle condizioni imposte nell'enunciato, applicando il Teorema 2.3.11. Più precisamente, supponiamo che $\pi : Z \rightarrow Y$ sia un rivestimento che soddisfa le condizioni del teorema. Per ogni $g \in G$ sia R_g la somma delle componenti del luogo di ramificazione R fissate da g e sia $D_g := \pi(R_g)$. Si trova che i D_g sono necessariamente della forma descritta all'inizio della dimostrazione. Infatti, dal punto (iii) segue che i fasci L_{v_j} fanno parte dei dati di costruzione e devono soddisfare le relazioni 2.3 e 2.4. Del resto, dal punto (ii) segue che i D_g sono una somma di curve C_i che appaiono in V e le esauriscono tutte. Si ottengono le uguaglianze $\sum_i x_j^i C_i = \sum_g \epsilon_j(g)D_g$, per ogni $j = 1, \dots, r$. Se C_s appare in V , allora $\psi_{s|V} = h$, per qualche $h \in G$, con $h \neq 1$, per cui $x_j^s = \epsilon_j(h)$, per ogni $j = 1, \dots, r$. Supponiamo per assurdo che per qualche s fissato, con $\psi_{s|V} = h \neq 1$, C_s non sia una componente di D_h . Allora, per il punto (ii), deve essere una componente di un altro D_l , con $l \in G \setminus \{1\}$ e $l \neq h$. Poiché i v_j formano una base di V , esiste j tale che $\epsilon_j(l) \neq \epsilon_j(h) = x_j^s$, il che contraddice l'uguaglianza $\sum_i x_j^i C_i = \sum_g \epsilon_j(g)D_g$. Allora, i divisori D_g devono essere quelli definiti all'inizio. L'insieme di dati di costruzione ridotti è così univocamente determinato. Questo conclude la dimostrazione. \square

Corollario 2.3.14. *Siano Y una superficie liscia, C_1, \dots, C_k curve nodali su Y e V il codice ad esse associato. Se il nucleo dell'omomorfismo $\phi_2 : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ definito nell'osservazione 2.2.4 è nullo, allora il rivestimento associato al codice è unico a meno di isomorfismo G -equivariante.*

Dim. È una conseguenza immediata della Osservazione 2.2.4 e del Teorema 2.3.13. Infatti, per l'Osservazione 2.2.4, i vettori $v \in V$ determinano

univocamente i fasci L_v che soddisfino il punto (iii, b) del Teorema 2.3.13. A questo punto i dati di costruzione sono univocamente determinati, come si evince dall'ultima parte della dimostrazione del Teorema 2.3.13, e posso applicare il Teorema di struttura dei rivestimenti abeliani 2.3.9. \square

2.4 Normalizzazione di uno \mathbb{Z}_2^r -rivestimento

Concludo questo capitolo con un ulteriore richiamo sugli \mathbb{Z}_2^r -rivestimenti, utile per quello che seguirà.

Possiamo estendere la definizione di rivestimento abeliano anche a varietà che non sono normali:

Definizione 2.4.1. Sia Y una varietà proiettiva e G un gruppo abeliano finito. Un *rivestimento abeliano di Y con gruppo G* è un morfismo finito $\pi : X \rightarrow Y$ fra varietà proiettive insieme con un'azione fedele di G su X tale che π coincida con la mappa quoziente dell'azione di G su X .

Vale una versione più generale del Teorema 2.3.9:

Teorema 2.4.2 ([14], Teorema 2.1). *Sia Y una superficie liscia e G un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2^r . Dati fasci invertibili \mathcal{L}_χ , $\chi \in G^*$, e divisori effettivi D_g , $g \in G \setminus \{1\}$, che soddisfino le relazioni 2.1, allora esiste un rivestimento abeliano $\pi : X \rightarrow Y$ con gruppo G , associato in modo naturale a questi dati. Tale rivestimento è unico a meno di isomorfismo G -equivariante.*

Costruzione. Vediamo brevemente qual è il rivestimento abeliano di Y con gruppo G che si costruisce nella dimostrazione del Teorema 2.4.2. Per ogni $g \in G \setminus \{1\}$, sia s_g una sezione globale di $\mathcal{O}_Y(D_g)$ tale che $\text{div}(s_g) = D_g$. Poiché sono soddisfatte le relazioni 2.1, per ogni coppia di elementi $\chi, \chi' \in G^*$ possiamo definire una mappa $\mathcal{L}_\chi^{-1} \otimes \mathcal{L}_{\chi'}^{-1} \rightarrow \mathcal{L}_{\chi\chi'}^{-1}$, attraverso la moltiplicazione per $\prod_g s_g^{\varepsilon_{\chi, \chi'}(g)}$. Queste mappe definiscono su $\mathcal{A} := \mathcal{O}_Y \oplus \left(\bigoplus_{\chi \neq 1} \mathcal{L}_\chi^{-1} \right)$ una struttura di \mathcal{O}_Y -algebra compatibile con la G -azione definita facendo

agire G su \mathcal{L}_χ^{-1} attraverso il carattere χ . Il rivestimento di Y con gruppo G si ottiene prendendo $X := \mathbf{Spec} \mathcal{A}$ e $\pi : X \rightarrow Y$ il morfismo naturale.

Definizione 2.4.3. Sia Y una superficie liscia e G un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2^r . Dati fasci invertibili \mathcal{L}_χ , $\chi \in G^*$, e divisori effettivi D_g , $g \in G \setminus \{1\}$, che soddisfino le relazioni 2.1, chiamiamo il rivestimento $\pi : X \rightarrow Y$ costruito sopra *rivestimento abeliano standard* associato ai dati $\{\mathcal{L}_\chi, D_g\}$. Anche nel caso in cui la varietà X così costruita non sia normale, chiamiamo $\{\mathcal{L}_\chi, D_g\}$ *dati di costruzione* del rivestimento e il divisore $D = \sum_g D_g$ *contorno apparente*.

Nell'enunciato del Teorema 2.4.2 è stata tolta l'ipotesi che $D = \sum_g D_g$ sia ridotto. È proprio questa condizione a determinare la normalità del rivestimento:

Proposizione 2.4.4 ([14], Corollario 3.1). *Sia Y una superficie liscia e sia $\pi : X \rightarrow Y$ un rivestimento abeliano standard con gruppo $G \cong \mathbb{Z}_2^r$ e dati di costruzione $\{\mathcal{L}_\chi, D_g\}$. Allora, X è normale se e solo se ogni divisore primo C di Y appare nel contorno apparente $D = \sum_g D_g$ con molteplicità al massimo 1, ovvero, se e solo se D è ridotto.*

Sia ora Y una superficie liscia e G un gruppo isomorfo a \mathbb{Z}_2^r . Siano \mathcal{L}_χ , $\chi \in G^*$, fasci invertibili su Y e D_g , $g \in G \setminus \{1\}$, divisori effettivi che soddisfano le relazioni 2.1. Consideriamo il rivestimento abeliano standard $\pi : X \rightarrow Y$ associato a questi dati.

Chiamiamo normalizzazione di $\pi : X \rightarrow Y$ il rivestimento $\pi' := \pi \circ \phi : X' \rightarrow Y$, dove $\phi : X' \rightarrow X$ è la normalizzazione di X . Dimosteremo che la normalizzazione di $\pi : X \rightarrow Y$ è un G -rivestimento e ne determineremo i dati di costruzione in termini dei dati di costruzione di π .

Per semplicità, supponiamo che i divisori D_g non abbiano componenti in comune: di fatto, questo è l'unico caso che incontreremo.

Per la Proposizione 2.4.4, se $D = \sum_g D_g$ è ridotto, X è normale e il problema non sussiste. Allora, supponiamo che D non sia ridotto. Avendo supposto che i D_g non abbiano componenti in comune, ciò significa che almeno uno dei D_g non è ridotto.

Per ogni $g \in G$ posso scrivere $D_g = 2A_g + B_g$, con A_g e B_g divisori effettivi e B_g ridotto.

Dalle relazioni 2.1 tra i dati di costruzione si ottiene:

$$2\mathcal{L}_\chi \equiv \sum_{g \in G} \epsilon_\chi(g) D_g \quad \forall \chi \in G^* .$$

Scrivendo i D_g nella forma data sopra, queste relazioni diventano:

$$2 \left(\mathcal{L}_\chi - \sum_{g \in G} \epsilon_\chi(g) A_g \right) \equiv \sum_{g \in G} \epsilon_\chi(g) B_g \quad \forall \chi \in G^* .$$

In base a queste relazioni, definiamo $\mathcal{M}_\chi := \mathcal{L}_\chi - \sum_{g \in G} \epsilon_\chi(g) A_g$. Poiché i dati $\{\mathcal{L}_\chi, D_g\}$ devono soddisfare le relazioni 2.1, si ha che anche i fasci invertibili \mathcal{M}_χ , $\chi \in G^*$, e i divisori effettivi B_g , $g \in G$, soddisfano le medesime relazioni. Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\chi + \mathcal{M}_{\chi'} &= \mathcal{L}_\chi + \mathcal{L}_{\chi'} - \sum_{g \in G} (\epsilon_\chi(g) + \epsilon_{\chi'}(g)) A_g \\ &\equiv \mathcal{L}_{\chi\chi'} + \sum_{g \in G} (2\epsilon_{\chi, \chi'}(g) - \epsilon_\chi(g) - \epsilon_{\chi'}(g)) A_g + \sum_{g \in G} \epsilon_{\chi, \chi'}(g) B_g . \end{aligned}$$

Dalla definizione degli $\epsilon_{\chi, \chi'}(g)$ segue che $2\epsilon_{\chi, \chi'}(g) - \epsilon_\chi(g) - \epsilon_{\chi'}(g) = -\epsilon_{\chi\chi'}(g)$ per ogni $g \in G$, quindi:

$$\mathcal{M}_\chi + \mathcal{M}_{\chi'} \equiv \mathcal{M}_{\chi\chi'} + \sum_{g \in G} \epsilon_{\chi, \chi'}(g) B_g .$$

I dati $\{\mathcal{M}_\chi, B_g\}$ soddisfano le ipotesi del Teorema 2.4.2, quindi abbiamo un rivestimento abeliano standard $\pi' : X' \rightarrow Y$, con dati di costruzione $\{\mathcal{M}_\chi, B_g\}$. Poichè i divisori B_g sono ridotti e non hanno componenti in comune, allora dalla Proposizione 2.4.4 si ha che X' è normale.

Dimostriamo che X' è la normalizzazione di X . Sappiamo che:

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{Spec} \mathcal{O}_Y \oplus \left(\bigoplus_{\chi \neq 1} \mathcal{L}_\chi^{-1} \right) ; \\ X' &= \mathbf{Spec} \mathcal{O}_Y \oplus \left(\bigoplus_{\chi \neq 1} \mathcal{M}_\chi^{-1} \right) ; \\ \mathcal{L}_\chi &= \mathcal{M}_\chi + \sum_{g \in G} \epsilon_\chi(g) A_g \quad \forall \chi \in G^* . \end{aligned}$$

Per ogni $g \in G \setminus \{1\}$, siano s_g, u_g rispettivamente le sezioni globali di $\mathcal{O}_Y(D_g)$, $\mathcal{O}_Y(B_g)$ usate per definire i rivestimenti π e π' .

Per ogni $g \in G \setminus \{1\}$, scegliamo una sezione globale t_g di $\mathcal{O}_Y(A_g)$ tale che $\text{div}(t_g) = A_g$ e $s_g = t_g^2 u_g$. Allora, per ogni $\chi \in G^*$, abbiamo una mappa naturale $\mathcal{L}_\chi^{-1} \rightarrow \mathcal{M}_\chi^{-1}$, definita dalla moltiplicazione per $\prod_g t_g^{\epsilon_\chi(g)}$. Per come ho scelto le sezioni t_g , queste mappe inducono un morfismo di \mathcal{O}_Y -algebre G -equivariante:

$$\phi^* : \mathcal{O}_Y \oplus \left(\bigoplus_{\chi \neq 1} \mathcal{L}_\chi^{-1} \right) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \oplus \left(\bigoplus_{\chi \neq 1} \mathcal{M}_\chi^{-1} \right).$$

ϕ^* induce allora un morfismo $\phi : X' \rightarrow X$ tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\phi} & X \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & Y & \end{array}$$

Dalla commutatività del diagramma segue che ϕ è finito di grado 1, dunque $\phi : X' \rightarrow X$ è la normalizzazione di X .

Capitolo 3

Numero di nodi su una superficie rigata

Il problema che affrontiamo in questo capitolo è quello di determinare il numero massimo di nodi che può avere una superficie nodale rigata e quindi caratterizzare le superfici nodali rigate che hanno massimo numero di nodi. Questo problema è stato affrontato di recente da Dolgachev, Mendes Lopes e Pardini (vedi [7]), che hanno trovato una soluzione nel caso in cui la superficie in questione sia razionale. Estenderò questo risultato al caso di superfici rigate non razionali.

3.1 Superfici rigate

Definizione 3.1.1. Una superficie liscia Y si dice *rigata* se Y è birazionale a $C \times \mathbb{P}^1$, dove C è una curva liscia.

Definizione 3.1.2. Sia C una curva liscia. Una superficie liscia Y si dice *geometricamente rigata su C* se esiste un morfismo liscio $p : Y \rightarrow C$ con fibre isomorfe a \mathbb{P}^1 .

Teorema 3.1.3 (Noether-Enriques). *Sia Y una superficie liscia e sia $p : Y \rightarrow C$ un morfismo da Y in una curva liscia C con fibra generale*

isomorfa a \mathbb{P}^1 . Allora, esiste una mappa birazionale $f : Y \dashrightarrow C \times \mathbb{P}^1$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & C \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & & C \end{array}$$

In particolare, Y è rigata su C .

Dim. Vedi [5], Teorema III.4. \square

Una conseguenza immediata del Teorema 3.1.3 è che una superficie geometricamente rigata è rigata.

Proposizione 3.1.4. *Siano C una curva liscia, Y una superficie liscia minimale e $p : Y \rightarrow C$ un morfismo con fibra generale isomorfa a \mathbb{P}^1 . Allora, Y è geometricamente rigata su C attraverso il morfismo p .*

Per la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 3.1.5 (Lemma di Zariski). *Siano Y una superficie liscia, C una curva liscia e $p : Y \rightarrow C$ una fibrazione con fibre connesse. Sia $F = \sum_{i=1}^s n_i C_i$ una fibra di p , dove indichiamo con C_i , per $i = 1, \dots, s$, le componenti irriducibili di F e dove $n_i > 0$ per ogni $i = 1, \dots, s$. Allora:*

- i) $C_i \cdot F = 0$ per ogni $i = 1, \dots, s$;
- ii) se $D = \sum_{i=1}^s m_i C_i$, con $m_i \in \mathbb{Z}$ per ogni $i = 1, \dots, s$, allora $D^2 \leq 0$;
- iii) se $D = \sum_{i=1}^s m_i C_i$, con $m_i \in \mathbb{Z}$ per ogni $i = 1, \dots, s$, allora $D^2 = 0$ se e solo se esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $D = rF$.

Dim. Vedi [3], Lemma 8.2, Capitolo III. \square

Dim. della proposizione 3.1.4. Sia F una fibra di p . Supponiamo che $F = \sum_i n_i C_i$, dove le C_i sono curve irriducibili su Y . Si ha che $F^2 = 0$ e, poiché la fibra generale di p è isomorfa a \mathbb{P}^1 , $F \cdot K_Y = -2$. Allora, $\sum_i n_i C_i \cdot K_Y = -2$, per cui esiste una curva irriducibile $E \subset F$ tale che

$E \cdot K_Y < 0$. Per il Lemma di Zariski (Lemma 3.1.5), $E^2 \leq 0$. Se avessi $E^2 < 0$, allora per la formula di aggiunzione $g(E) = 0$, quindi E sarebbe una (-1) -curva e, per il teorema di contraibilità di Castelnuovo, Y non sarebbe minimale. Allora si deve avere $E^2 = 0$. Ancora per il Lemma di Zariski, ciò implica che F è irriducibile, per cui $F = mE$, con m intero positivo. Inoltre, $mE \cdot K_Y = F \cdot K_Y = -2$. Allora $m \leq 2$. Se $m = 2$, allora $E \cdot K_Y = -1$ e ciò contraddice la formula di aggiunzione, perché $E^2 = 0$. Dunque, si ha $m = 1$ ed F è isomorfa a \mathbb{P}^1 . \square

Teorema 3.1.6. *Se C è una curva liscia non razionale, i modelli minimali di $C \times \mathbb{P}^1$ sono le superfici geometricamente rigate su C .*

Dim. Dimostriamo intanto che le superfici geometricamente rigate su C sono minimali. Per il teorema di contraibilità di Castelnuovo, una superficie è minimale se e solo se non contiene curve lisce razionali con autointersezione -1 . Dunque, dobbiamo dimostrare che le superfici geometricamente rigate su C non contengono (-1) -curve. Sia Y una superficie geometricamente rigata su C e sia $p : Y \rightarrow C$ il morfismo che la definisce. Supponiamo per assurdo che Y contenga una (-1) -curva, diciamo E . E non può essere una fibra di p , perché $E^2 = -1$. Ma allora $p(E) = C$, il che è assurdo, perché C non è razionale.

Rimane da dimostrare che se Y è un modello minimale di $C \times \mathbb{P}^1$, allora Y è geometricamente rigata. Sia $\phi : Y \dashrightarrow C \times \mathbb{P}^1$ una mappa birazionale e consideriamo la proiezione $q : C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C$. Prendiamo la mappa razionale $q \circ \phi : Y \dashrightarrow C$. Per il teorema di eliminazione dell'indeterminazione (vedi per esempio [5], Teorema II.7), esistono una superficie liscia X , una composizione finita di scoppiamenti $\varepsilon = \varepsilon_1 \circ \cdots \circ \varepsilon_n : X \rightarrow Y$ e un morfismo $f : X \rightarrow C$, tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \varepsilon \swarrow & & \searrow f \\ Y & \dashrightarrow & C \\ & q \circ \phi & \end{array}$$

Possiamo assumere che il numero n di scoppamenti sia minimale. Supponiamo che $n > 0$ e chiamiamo E_n la curva eccezionale di ε_n : dato che la curva C non è razionale, $f(E_n)$ deve essere un punto. Allora, posso applicare il Lemma 1.2.4, da cui ottengo che f fattorizza attraverso ε_n . Ciò contraddice la minimalità di n , per cui $n = 0$ ed $f = q \circ \phi$. Questo significa che $q \circ \phi$ è un morfismo con fibra generale isomorfa a \mathbb{P}^1 . A questo punto la tesi è un corollario immediato della Proposizione 3.1.4. \square

Data l'utilità che avranno in seguito, richiamerò alcuni fatti riguardanti le varietà di Albanese di superfici rigate non razionali.

Teorema 3.1.7. *Sia Y una varietà proiettiva liscia. Allora, esistono una varietà Abelianiana A (ovvero, un toro complesso che ammetta una struttura di varietà proiettiva compatibile con quella di gruppo abeliano) ed un morfismo $\alpha : Y \rightarrow A$, con la seguente proprietà universale:*

per ogni toro complesso T ed ogni morfismo $f : Y \rightarrow T$, esiste un unico morfismo $\tilde{f} : A \rightarrow T$, tale che $\tilde{f} \circ \alpha = f$.

Dim. Vedi [5], Teorema V.13. \square

Definizione 3.1.8. Sia Y una varietà proiettiva liscia. La varietà Abelianiana A , determinata a meno di isomorfismo nel Teorema 3.1.7, si chiama *varietà di Albanese* di Y e si indica con $\text{Alb}(Y)$, mentre il morfismo $\alpha : Y \rightarrow \text{Alb}(Y)$ si dice *mappa di Albanese* di Y .

Teorema 3.1.9. *Sia Y una superficie rigata non razionale e sia $\alpha : Y \rightarrow \text{Alb}(Y)$ la mappa di Albanese. Allora $\alpha(Y)$ è una curva.*

Dim. Vedi [5], Lemma V.18. \square

Proposizione 3.1.10. *Sia Y una superficie liscia e $\alpha : Y \rightarrow \text{Alb}(Y)$ la mappa di Albanese. Supponiamo che $\alpha(Y)$ sia una curva, che chiamiamo C . Allora, C è liscia e le fibre di α sono connesse.*

Dim. Sia \bar{C} la normalizzazione di C . Poiché Y è normale e $\alpha : Y \rightarrow C$ è surgettiva, α fattorizza attraverso la mappa di normalizzazione $\bar{C} \rightarrow C$. Allora, posso scrivere $\alpha = j \circ f$, dove $f : Y \rightarrow \bar{C}$ è un morfismo surgettivo e $j : \bar{C} \rightarrow \text{Alb}(Y)$ è ottenuta componendo la mappa di normalizzazione $\bar{C} \rightarrow C$ con l'immersione $C \hookrightarrow \text{Alb}(Y)$. Indico con $\alpha_{\bar{C}} : \bar{C} \rightarrow \text{Alb}(\bar{C})$ la mappa di Albanese di \bar{C} . Per la proprietà universale delle mappe di Albanese, esistono e sono unici due morfismi $\tilde{f} : \text{Alb}(Y) \rightarrow \text{Alb}(\bar{C})$ e $\tilde{j} : \text{Alb}(\bar{C}) \rightarrow \text{Alb}(Y)$, tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \bar{C} \\ \alpha \downarrow & & \alpha_{\bar{C}} \downarrow \searrow j \\ \text{Alb}(Y) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Alb}(\bar{C}) \xrightarrow{\tilde{j}} \text{Alb}(Y) \end{array}$$

Poiché $j \circ f = \alpha$, per la proprietà universale delle mappe di Albanese, si ha che $\tilde{j} \circ \tilde{f} = \text{Id}$. Allora \tilde{f} è iniettiva. Del resto, la surgettività di f implica la surgettività di \tilde{f} : infatti, $\alpha_{\bar{C}}(\bar{C})$ genera $\text{Alb}(\bar{C})$ come gruppo e \tilde{f} è, a meno di traslazione, un omomorfismo di gruppi. La bigettività di \tilde{f} insieme col fatto che $\tilde{j} \circ \tilde{f} = \text{Id}$ implicano che \tilde{j} è un isomorfismo con inversa \tilde{f} . Sappiamo che $\alpha_{\bar{C}}$ è una immersione e che $j(\bar{C}) = C$, allora \tilde{j} è un isomorfismo fra C e la sua normalizzazione \bar{C} : dunque C è liscia.

Rimane da dimostrare che le fibre di $\alpha : Y \rightarrow C$ sono connesse. Innanzitutto, osserviamo che $\text{Alb}(C) \cong \text{Alb}(Y)$ e la mappa di Albanese $\alpha_C : C \rightarrow \text{Alb}(C)$ coincide, a meno di composizione con questo isomorfismo, con l'inclusione $C \hookrightarrow \text{Alb}(Y)$. Grazie alla "fattorizzazione di Stein" (vedi [9], Corollario 11.5, Capitolo III), posso scrivere $\alpha = g \circ p$, dove $p : Y \rightarrow D$ è un morfismo surgettivo con fibre connesse e $g : D \rightarrow C$ è finito. Per la finitezza di g , D è una curva. Poiché Y è normale e p surgettiva, p fattorizza attraverso la normalizzazione di D . Allora, a meno di passare alla normalizzazione, posso supporre che D sia liscia. Consideriamo il ragionamento fatto sopra a partire dalla fattorizzazione $\alpha = j \circ f$ per ottenere che \tilde{j} è un isomorfismo. Grazie al fatto che D è liscia, posso ripetere quelle argomentazioni a partire da $\alpha = g \circ p$, ottenendo un isomorfismo $\tilde{g} : \text{Alb}(D) \rightarrow \text{Alb}(C)$, tale che il

diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & C \\ \alpha_D \downarrow & & \downarrow \alpha_C \\ \text{Alb}(D) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \text{Alb}(C) \end{array}$$

dove ho indicato con $\alpha_D : D \hookrightarrow \text{Alb}(D)$ la mappa di Albanese di D . Poiché α_C e α_D sono immersioni, concludiamo che g è un isomorfismo. Poiché p ha fibre connesse, allora $\alpha = g \circ p$ ha fibre connesse. \square

Corollario 3.1.11. *Sia Y una superficie liscia birazionale a $C \times \mathbb{P}^1$, dove C è una curva liscia non razionale. Allora, l'immagine della mappa di Albanese $\alpha : Y \rightarrow \text{Alb}(Y)$ è isomorfa a C e la fibra generale di $\alpha : Y \rightarrow C$ è isomorfa a \mathbb{P}^1 .*

Dim. Sia $f : Y \rightarrow W$ un morfismo birazionale, con W minimale. Per il Teorema 3.1.6, W è geometricamente rigata su C . Sia $g : W \rightarrow C$ il morfismo che definisce W . Le fibre di g sono isomorfe a \mathbb{P}^1 . Allora, la fibra generale di $p := g \circ f$ è isomorfa a \mathbb{P}^1 . Sia $\alpha : Y \rightarrow \text{Alb}(Y)$ la mappa di Albanese di Y . Poiché Y è rigata non razionale, dal Teorema 3.1.9 segue che $\alpha(Y)$ è una curva: la indico con D . Per la Proposizione 3.1.10, D è liscia e le fibre di $\alpha : Y \rightarrow D$ sono connesse. Inoltre, la mappa di Albanese $\alpha_C : C \rightarrow \text{Alb}(C)$ è un' immersione. Allora, applicando la proprietà universale delle mappe di Albanese, otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p} & C \\ \alpha \searrow & & \uparrow \varphi \\ & & D \end{array}$$

Essendo un morfismo surgettivo fra curve proiettive nonsingolari, φ è finito. La fibra generale di p è isomorfa a \mathbb{P}^1 , dunque connessa. Dato che le fibre di α sono connesse e il diagramma commuta, l'unica possibilità è che la fibra generale di φ abbia cardinalità 1. Allora φ è birazionale, dunque un isomorfismo. \square

Concludo questa digressione sulle superfici rigate, richiamando alcuni risultati sugli invarianti birazionali e sulla struttura del gruppo di Picard e del gruppo di Néron-Severi.

Proposizione 3.1.12. *Sia C una curva liscia non razionale e sia Y una superficie rigata su C . Allora $NS(Y) = H^2(Y, \mathbb{Z})$.*

Dim. È sufficiente dimostrare che $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. Sia $p : Y \rightarrow C$ la mappa di Albanese. Sia $x \in C$, tale che la fibra $F := p^{-1}(x)$ sia isomorfa a \mathbb{P}^1 . Si ha $F^2 = 0$ e, per la formula di aggiunzione, $F \cdot K_Y = -2$. Supponiamo per assurdo che $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$. Per la dualità di Serre (vedi [9], Corollario 7.7, Capitolo III), si ha $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y)) = h^2(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$. Allora, esiste un divisore effettivo D linearmente equivalente a K_Y . Si ha $F \cdot D = -2$. Poiché D è effettivo, posso scrivere $D = D' + nF$, con D' un divisore effettivo non contenente F . Allora, $D' \cdot F \geq 0$, da cui $D \cdot F \geq nF^2$, ovvero $D \cdot F \geq 0$. Ho ottenuto una contraddizione, quindi $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$. \square

Teorema 3.1.13. *Sia C una curva liscia e Y una superficie geometricamente rigata su C . Sia $p : Y \rightarrow C$ il morfismo che definisce Y . Indico con H la classe di una sezione di iperpiano in $\text{Pic}(Y)$ e con h la classe della stessa sezione di iperpiano in $H^2(Y, \mathbb{Z})$. Allora:*

i) $\text{Pic}(Y) = p^*\text{Pic}(C) \oplus \mathbb{Z}H$;

ii) $H^2(Y, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}f \oplus \mathbb{Z}h$, dove f è la classe di una fibra di p .

In particolare, si ha che $f \cdot h = 1$.

Dim. Vedi [5], Proposizione III.18. \square

Teorema 3.1.14. *Sia C una curva liscia e Y una superficie rigata su C . Allora:*

$$q(Y) = g(C) ; p_g(Y) = p_1(Y) = 0 ; p_n(Y) = 0 \forall n \geq 2 .$$

Se Y è geometricamente rigata su C , allora:

$$K_Y^2 = 8(1 - g(C)) ; \rho(Y) = 2 .$$

Dim. Vedi [5], Proposizione III.21. \square

Nel seguito avremo bisogno di conoscere la struttura di $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$, quando Y è una superficie rigata non razionale. Supponiamo che Y sia birazionale a $C \times \mathbb{P}^1$, dove C è una curva liscia non razionale. Sia $\varepsilon : Y \rightarrow \tilde{Y}$ un morfismo birazionale, con \tilde{Y} minimale. Allora ε fattorizza nella composizione di un isomorfismo e di un numero finito di scoppiamenti. Ne deriva che il gruppo di Picard di Y è della forma $\text{Pic}(Y) = \varepsilon^*\text{Pic}(\tilde{Y}) \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}E_i)$, dove n è il numero di scoppiamenti ed E_1, \dots, E_n sono i divisori eccezionali, mentre il gruppo di Néron-Severi è $\text{NS}(Y) = \varepsilon^*\text{NS}(\tilde{Y}) \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i)$, dove ho indicato con e_1, \dots, e_n le classi dei divisori eccezionali in $H^2(Y, \mathbb{Z})$. Dato che \tilde{Y} è geometricamente rigata su C (vedi Teorema 3.1.6), posso applicare il Teorema 3.1.13, per cui:

$$\text{Pic}(Y) = (p')^*\text{Pic}(C) \oplus \mathbb{Z}H \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}E_i) \quad (3.1)$$

$$H^2(Y, \mathbb{Z}) = \text{NS}(Y) = \mathbb{Z}f \oplus \mathbb{Z}h \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i), \quad (3.2)$$

dove ho usato la seguente notazione: H indica la classe di un iperpiano in $\text{Pic}(Y)$, h la classe dello stesso iperpiano in $H^2(Y, \mathbb{Z})$, $p : \tilde{Y} \rightarrow C$ il morfismo di struttura, p' il morfismo $p \circ \varepsilon$ e f la classe di una fibra di p' in $H^2(Y, \mathbb{Z})$. A questo punto si ha che:

$$\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y) = (p')^* \left(\text{Pic}(C)/2\text{Pic}(C) \right) \oplus \mathbb{Z}_2 H \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_2 E_i) \quad (3.3)$$

$$H^2(Y, \mathbb{Z})/2H^2(Y, \mathbb{Z}) = \text{NS}(Y)/2\text{NS}(Y) = \mathbb{Z}_2 f \oplus \mathbb{Z}_2 h \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_2 e_i) \quad (3.4)$$

La struttura di $\text{NS}(Y)$ e di $\text{NS}(Y)/2\text{NS}(Y)$ è completamente determinata. Per conoscere la struttura di $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ è sufficiente determinare la struttura di $\text{Pic}(C)/2\text{Pic}(C)$. A tale scopo abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 3.1.15. *Sia C una curva liscia. Se D è un divisore su C con grado $\deg D \equiv 0 \pmod{2}$, allora esiste un divisore D' su C tale che $D \equiv 2D'$.*

Dim. Sia $d := \deg D$ e sia $x \in C$ un punto della curva. Il divisore $D - dx$ ha grado zero. Il gruppo $\text{Pic}^0(C)$ delle classi di divisori di grado zero è isomorfo alla varietà di Albanese di C : quindi è un toro complesso. Allora, esiste un divisore \bar{D} su C di grado zero, tale che $D - dx \equiv 2\bar{D}$. Dato che d è pari, ho la tesi. \square

Proposizione 3.1.16. *Sia C una curva liscia e sia $x \in C$. Allora, $\text{Pic}(C)/2\text{Pic}(C) = \mathbb{Z}_2x$.*

Dim. Sia $D \in \text{Pic}(C)$. Se D ha grado pari, allora, grazie al Lemma 3.1.15, posso scrivere $D = 2D'$ in $\text{Pic}(C)$, per qualche $D' \in \text{Pic}(C)$. Per lo stesso motivo, se D ha grado dispari, posso scrivere, per un $D' \in \text{Pic}(C)$ opportuno, $D = x + 2D'$. \square

A questo punto possiamo dire quale è la struttura di $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$:

$$\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}_2F \oplus \mathbb{Z}_2H \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_2E_i) \quad (3.5)$$

dove F indica la classe della fibra di p' su un punto $x \in C$.

3.2 Risultati preliminari

Dopo aver richiamato quanto ci serve sulle superfici rigate, riprendiamo a lavorare al nostro scopo principale: determinare il numero massimo di nodi su una superficie nodale Σ , che sia birazionale a una superficie Y rigata e non razionale.

Per tutta la sezione userò la seguente notazione:

- Y è una superficie liscia;
- C_1, \dots, C_k sono curve nodali disgiunte su Y ;
- V è il codice associato alle curve C_i (vedi la Sezione 2.2);
- r è la dimensione di V ;

- $m \leq k$ è il numero di curve C_i che appaiono in V ;
- $\pi : Z \rightarrow Y$ è un fissato rivestimento abeliano associato al codice (vedi Teorema 2.3.13);
- $G \cong \mathbb{Z}_2^r$ è il gruppo del rivestimento π .

Lemma 3.2.1. *La controimmagine attraverso π di una curva C_i che appare in V è l'unione di 2^{r-1} curve razionali disgiunte con autointersezione -1 .*

Dim. A meno di cambiare l'ordine, possiamo supporre che le curve che appaiono in V siano C_1, \dots, C_m . Fissato arbitrariamente $i \in \{1, \dots, m\}$, consideriamo $\pi^{-1}(C_i)$. Dato che G è abeliano, le componenti di $\pi^{-1}(C_i)$ hanno tutte lo stesso gruppo di inerzia, il quale coincide con lo stabilizzatore di $\pi^{-1}(C_i)$, ovvero con $H_i := \{g \in G \mid g(x) = x \ \forall x \in \pi^{-1}(C_i)\}$. H_i è un sottogruppo ciclico di G , quindi ha ordine 2 ed è banalmente un sottogruppo normale di G . Osserviamo che Y è il quoziente di Z per l'azione di G . Consideriamo l'azione del sottogruppo H_i su Z e sia X il quoziente di Z per l'azione di H_i e $\sigma : Z \rightarrow X$ la mappa quoziente. Per costruzione σ è un rivestimento doppio. Consideriamo ora il gruppo G/H_i . L'azione di G su Z induce in modo naturale un'azione di G/H_i su X , definita ponendo, per ogni $[g] \in G/H_i$ e per ogni $x \in X$, $[g]x := \pi(gz)$, dove $z \in Z$ è tale che $\pi(z) = x$. Il quoziente di X sotto l'azione di G/H_i è proprio Y . Indicata con $\rho : X \rightarrow Y$ la mappa quoziente, si può verificare in modo diretto che $\pi = \rho \circ \sigma$. Dunque abbiamo fattorizzato π nella composizione di due rivestimenti abeliani, ottenendo il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi} & Y \\ \sigma \downarrow & \nearrow \rho & \\ & & X \end{array}$$

In particolare, ρ non è ramificato in un intorno di C_i ed ha grado 2^{r-1} , e poiché C_i è semplicemente connesso, $\rho^*(C_i) = Q_{i,1} + \dots + Q_{i,2^{r-1}}$, dove $Q_{i,j} \cong C_i \cong \mathbb{P}^1$ e le curve $Q_{i,j}$ sono disgiunte. Si ha che $\deg \sigma = 2$ e, per costruzione, σ è ramificato sulle $Q_{i,j}$, allora $\sigma^*Q_{i,j} = 2R_{i,j}$, dove le $R_{i,j}$ sono curve tali che $R_{i,j} \cong Q_{i,j} \cong \mathbb{P}^1$. A questo punto $\pi^*C_i = 2R_{i,1} + \dots + 2R_{i,2^{r-1}}$.

Si ha che $(R_{i,j})^2 = (R_{i,k})^2$, per ogni scelta di $j, k \in \{1, \dots, 2^{r-1}\}$: infatti, per ogni scelta di (j, k) , esiste un automorfismo $g \in G$, tale che $g(R_{i,j}) = R_{i,k}$. Le curve $R_{i,j}$ sono disgiunte, quindi $R_{i,j} \cdot R_{i,k} = 0$ per ogni $j \neq k$. Inoltre, in generale vale la formula $(\pi^* C_i)^2 = (\deg \pi)(C_i^2)$, quindi $(\pi^* C_i)^2 = 2^r(-2)$. Segue che $(\pi^* C_i)(\pi^* C_i) = 4((R_{i,1})^2 + \dots + (R_{i,2^{r-1}})^2) = 4 \cdot 2^{r-1} \cdot (R_{i,1})^2 = 2^r(-2)$, perciò $(R_{i,j})^2 = -1$ per ogni $j = 1, \dots, 2^{r-1}$ e $i = 1, \dots, m$. \square

Manteniamo la notazione usata nella dimostrazione del Lemma 3.2.1. Grazie al teorema di contraibilità di Castelnuovo, possiamo contrarre tutte le curve $R_{i,j}$, ottenendo un morfismo $\mu : Z \rightarrow \bar{Z}$, dove \bar{Z} è una superficie liscia.

Grazie al Teorema 1.4.3 sulla contraibilità delle curve nodali, esiste un morfismo birazionale $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ che contrae le curve C_i che appaiono in V a punti distinti di Σ ed è un isomorfismo fuori dalle curve. Sappiamo dalla Osservazione 1.4.5 che la coppia (Σ, η) è univocamente determinata a meno di isomorfismo. Inoltre, come visto nella Osservazione 1.4.6, i punti a cui sono contratte le curve sono nodi e sono le uniche singolarità di Σ , perciò Σ è una superficie nodale con m nodi, tanti quante le curve che appaiono in V .

Con queste nuove mappe e superfici possiamo costruire il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\mu} & \bar{Z} \\ \pi \downarrow & & \\ Y & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \end{array} \quad (3.6)$$

Ci chiediamo se il diagramma possa essere chiuso. La risposta è affermativa, come si deduce dal Lemma 1.2.4. Inoltre, il morfismo che chiude il diagramma è unico. Allora abbiamo un diagramma commutativo del tipo:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\mu} & \bar{Z} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ Y & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \end{array} \quad (3.7)$$

Osserviamo che $\bar{\pi}$ è un G -rivestimento, ramificato esattamente sui nodi di

Σ . A questo punto, abbiamo una descrizione abbastanza esaustiva della situazione.

Prima di andare avanti, dobbiamo richiamare la nozione di “divisore canonico” nel caso di una superficie normale, insieme con alcune proprietà. Farò riferimento a [15].

Data una superficie normale Σ , il *divisore canonico* K_Σ di Σ è il divisore di Weil $\text{div}(s)$, dove $s \in \Omega_{\mathbb{C}(\Sigma)}^2$ è una 2-forma differenziale razionale. Come dimostrato in [15] (Sezione 4.19), K_Σ è localmente principale in un punto $x \in \Sigma$ se e solo se $\mathcal{O}_{\Sigma,x}$ è Gorenstein: un anello locale Noetheriano A di dimensione n si dice Gorenstein se $\text{Ext}_A^i(k, A) = 0$ per qualche $i > n$ (vedi [12], Sezione 18), dove, se m è l'ideale massimale di A , $k := A/m$.

Usando i risultati del Capitolo 18 di [8], si può verificare che nel caso in cui x sia un nodo $\mathcal{O}_{\Sigma,x}$ è Gorenstein.

Allora, se Σ è una superficie nodale, il divisore canonico K_Σ è un divisore di Cartier.

Torniamo ad analizzare la situazione raffigurata nel diagramma 3.7. Osserviamo che $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ è la risoluzione minimale di Σ . Consideriamo i divisori canonici K_Y e K_Σ . Come conseguenza diretta della definizione di divisore canonico data sopra, si ha che:

$$K_Y = \eta^* K_\Sigma + D,$$

dove D è un divisore su Y , non necessariamente effettivo, supportato sulle curve eccezionali di η , le quali sono curve nodali. Se C è una di queste curve eccezionali, allora, per la formula di aggiunzione, si ha che $C \cdot K_Y = 0$, perché C è nodale. Del resto, C è una curva eccezionale per η , quindi $\eta^* K_\Sigma \cdot C = 0$. Allora, $C \cdot D = 0$, per ogni curva eccezionale C di η . Poiché D è supportato sulle curve eccezionali di η e poiché queste hanno autointersezione -2 , allora $D = 0$. Concludo che:

$$K_Y = \eta^* K_\Sigma.$$

Il calcolo appena fatto sarà utile nella dimostrazione della seguente:

Proposizione 3.2.2. *Manteniamo le notazioni usate fino ad ora.*

- i) $e(Z) = 2^r e(Y) - m2^r$;
- ii) $K_{\bar{Z}}^2 = 2^r K_Y^2$;
- iii) $K_{\bar{Z}}^2 = 2^r K_Y^2 - m2^{r-1}$;
- iv) $\chi(Z) = \chi(\bar{Z}) = 2^r \chi(Y) - m2^{r-3}$.

Dim. Userò la notazione introdotta nella dimostrazione del Lemma 3.2.1.

i) La caratteristica di Eulero-Poincaré è additiva, cioè se A, B sono due spazi topologici disgiunti, allora $e(A \cup B) = e(A) + e(B)$. Inoltre, se $p : X_1 \rightarrow X_2$ è un rivestimento topologico, allora $e(X_1) = (\deg p) \cdot e(X_2)$. Infine, si ha che $e(R_{i,j}) = e(C_i) = e(\mathbb{P}^1) = 2$, per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, 2^{r-1}$. Allora

$$\begin{aligned}
 e(Z) &= e(Z \setminus \cup_{i,j} R_{i,j}) + e(\cup_{i,j} R_{i,j}) \\
 &= e(\pi^{-1}(Y \setminus \cup_{i=1}^m C_i)) + e(\pi^{-1}(\cup_{i=1}^m C_i)) \\
 &= 2^r (e(Y \setminus \cup_{i=1}^m C_i)) + 2^{r-1} e(\cup_{i=1}^m C_i) \\
 &= 2^r e(Y) - 2^r e(\cup_{i=1}^m C_i) + 2^{r-1} e(\cup_{i=1}^m C_i) \\
 &= 2^r e(Y) - 2^{r-1} e(\cup_{i=1}^m C_i) \\
 &= 2^r e(Y) - 2^r m.
 \end{aligned}$$

ii) Consideriamo $\bar{\pi} : \bar{Z} \rightarrow \Sigma$. Il morfismo $\bar{\pi}$ non è ramificato in codimensione 1. Allora si ha $K_{\bar{Z}} = \bar{\pi}^* K_{\Sigma}$. Ne deriva che $(K_{\bar{Z}})^2 = (\bar{\pi}^* K_{\Sigma})^2 = (\deg \bar{\pi}) \cdot K_{\Sigma}^2 = 2^r K_{\Sigma}^2 = 2^r K_Y^2$.

iii) Consideriamo il morfismo $\mu : Z \rightarrow \bar{Z}$. Esso è una composizione di scoppamenti ed isomorfismi. Supponiamo che $\varepsilon : Z' \rightarrow Z''$ sia uno degli scoppamenti intermedi. Allora si ha $K_{Z'} = \varepsilon^* K_{Z''} + E$, dove E è il divisore eccezionale di ε . Da questa formula e da altre proprietà ben note degli scoppamenti segue che $(K_{Z'})^2 = (\varepsilon^* K_{Z''})^2 + 2\varepsilon^* K_{Z''} \cdot E + E^2 = K_{Z''}^2 - 1$. Sappiamo che μ si ottiene contraendo le curve $R_{i,j}$, che sono esattamente $m2^{r-1}$, quindi gli scoppamenti sono esattamente $m2^{r-1}$. Applicando la formula trovata per ognuno di questi, si ottiene $K_{\bar{Z}}^2 = K_{\bar{Z}}^2 - m2^{r-1}$. A questo punto, la tesi segue dal punto (ii).

iv) Per la formula di Noether si ha $\chi(Z) = \frac{1}{12}(K_{\bar{Z}}^2 + e(Z))$ e $\chi(Y) =$

$\frac{1}{12}(K_Y^2 + e(Y))$. A questo punto basta utilizzare i punti (i) e (iii):

$$\begin{aligned}\chi(Z) &= \frac{1}{12}(K_Z^2 + e(Z)) \\ &= \frac{1}{12}(2^r K_Y^2 - m2^{r-1} + 2^r e(Y) - m2^r) \\ &= \frac{2^r}{12}(K_Y^2 + e(Y)) - \frac{m}{12}(2^{r-1} + 2^r) \\ &= 2^r \chi(Y) - m2^{r-3}.\end{aligned}$$

□

Finalmente possiamo enunciare e dimostrare il risultato centrale di questa sezione, nonché di tutto il lavoro, perché, a partire da questo, sarà possibile arrivare alla limitazione del numero di nodi.

Teorema 3.2.3. *Sia Y una superficie rigata non razionale. Supponiamo che Y sia birazionale a $C \times \mathbb{P}^1$, dove C è una curva liscia con genere $g(C) = q(Y) > 0$. Siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y e V il codice associato ad esse. Indichiamo con r la dimensione del codice V e supponiamo che $r > 0$. Sia m il numero di curve che appaiono in V e sia $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ il morfismo che contrae a nodi le curve che appaiono in V . Allora, esiste una fibrazione $\beta : \Sigma \rightarrow C$ tale che:*

- i) la fibra generale di β è isomorfa a \mathbb{P}^1 ;*
- ii) $m = 2n$ è pari e β ha n fibre doppie, ognuna contenente due nodi di Σ ;*
- iii) il codice V è essenzialmente isomorfo a $DE(n)$.*

Dim. Adopererò senza richiamarle le notazioni introdotte all'inizio di questa sezione.

È sufficiente dimostrare che esiste una fibrazione $\alpha : Y \rightarrow C$ tale che:

- i') la fibra generale di α sia isomorfa a \mathbb{P}^1 ;*
 - ii') $m = 2n$ è pari e α ha n fibre della forma $F_i = 2A_i + C_{i_1} + C_{i_2}$, dove $i = 1, \dots, n$ e C_{i_1}, C_{i_2} sono curve distinte che appaiono in V ;*
- e tale che valga il punto (iii) dell'enunciato.

Infatti, una volta dimostrata l'esistenza di una tale α , la mappa β si ottiene

chiudendo il diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ C & & C \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \\ \alpha \downarrow & \swarrow \beta & \\ C & & \end{array}$$

il che si può fare grazie al Lemma 1.2.4. Dato il morfismo β che chiude il diagramma, è chiaro che esso soddisfa i punti (i), (ii) e (iii) dell'enunciato: infatti, η è birazionale, dunque le fibre generali di α e β sono isomorfe, da cui (i') \Rightarrow (i); (ii') \Rightarrow (ii) in modo ovvio e la (iii) è già data.

Dimostriamo allora l'esistenza di una $\alpha : Y \rightarrow C$, tale che valgano le condizioni (i'), (ii') e (iii). Dico che posso prendere come α la mappa di Albanese di Y . Il Corollario 3.1.11 prova che ciò ha senso e che vale la (i').

Dimostriamo la (ii'). Fissiamo un rivestimento $\pi : Z \rightarrow Y$ associato al codice V e sia G il gruppo del rivestimento π . Si ha che la superficie Z è rigata non razionale. Vediamo perché. Consideriamo la mappa $\alpha \circ \pi : Z \rightarrow C$. Grazie alla Fattorizzazione di Stein posso scrivere $\alpha \circ \pi = \tilde{\pi} \circ \gamma$, dove $\gamma : Z \rightarrow D$ è un morfismo surgettivo con fibre connesse e $\tilde{\pi} : D \rightarrow C$ è finito. Per la finitezza di $\tilde{\pi}$, D è una curva. Inoltre, poiché Z è normale e γ è surgettiva, γ fattorizza attraverso la normalizzazione di D . Allora, a meno di sostituire D con la sua normalizzazione, posso supporre che D sia liscia. In questo modo, otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi} & Y \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \alpha \\ D & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C \end{array}$$

Poiché C non è razionale, α deve contrarre le curve nodali di Y . Allora, presa una fibra generale di α , diciamo F , posso supporre che F non intersechi le curve nodali che appaiono in V . Sappiamo dal Teorema 2.3.13 che π ramifica solo sulle curve nodali di Y che appaiono in V , allora π non è ramificato su F . Inoltre, $F \cong \mathbb{P}^1$, quindi $\pi^{-1}(F)$ è una unione disgiunta di $\deg \pi = 2^r$ copie di \mathbb{P}^1 . Poiché γ ha fibre connesse, ciò dimostra che la fibra generale di $\tilde{\pi}$ ha cardinalità 2^r , ovvero che $\tilde{\pi}$ è un rivestimento di grado uguale al grado

di π e che la fibra generale di γ è isomorfa a \mathbb{P}^1 . Poiché C non è razionale, neanche D lo è e per il Teorema 3.1.3, si ha che Z è una superficie rigata su D .

Inoltre, $\gamma : Z \rightarrow D$ è la mappa di Albanese (vedi Corollario 3.1.11). Allora, l'azione di G su Z induce un'azione di G su D tale che, per ogni $g \in G$, il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Z \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ D & \xrightarrow{g} & D \end{array} \quad (3.8)$$

Osserviamo che l'azione di G su D è fedele. Per assurdo, supponiamo che esista un elemento $g \in G$, $g \neq 1$, tale che $g : D \rightarrow D$ sia l'identità. Per commutatività del diagramma 3.8, visto come automorfismo di Z , g manda ogni fibra di γ in se stessa. Poiché la fibra generale di γ è isomorfa a \mathbb{P}^1 , essa ha due punti fissati da g . Ma questo significa che $\pi : Z \rightarrow Y$ è ramificato su un divisore di Y che interseca la fibra generale di α , mentre sappiamo che π è ramificato solo sulle curve nodali che appaiono in V . Dunque, l'azione di G su D è fedele. Se $G' = \{\phi \in \text{Aut}(D) \mid \tilde{\pi} \circ \phi = \tilde{\pi}\}$ è il gruppo del rivestimento $\tilde{\pi}$, si verifica facilmente che $G < G'$. Poiché l'azione di G è fedele, G ha ordine 2^r anche come sottogruppo di G' . Ma $\text{ord}(G') \leq 2^r$, allora $G = G'$ e il rivestimento $\tilde{\pi}$ è un G -rivestimento.

Sia ora ν il numero dei valori critici di $\tilde{\pi}$. La formula di Hurwitz (vedi [9], Corollario 2.4, Capitolo IV) applicata a $\tilde{\pi}$ ci da:

$$2q(Z) - 2 = 2^r(2q(Y) - 2) + \nu 2^{r-1}.$$

Poiché le superfici Y e Z sono rigate, $q(Y) = 1 - \chi(Y)$ e $q(Z) = 1 - \chi(Z)$. Allora, applicando il punto (iv) della Proposizione 3.2.2 abbiamo:

$$\begin{aligned} q(Z) &= 1 - \chi(Z) \\ &= 1 - 2^r \chi(Y) + m 2^{r-3} \\ &= 1 + 2^r(q(Y) - 1) + m 2^{r-3} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Inserendo l'espressione (3.9) appena trovata nella formula di Hurwitz otteniamo $m2^{r-2} = \nu2^{r-1}$, per cui $m = 2\nu$. Allora m è pari e $n := \nu$ è il numero di valori critici di $\tilde{\pi}$. Indicato con W il prodotto fibrato $D \times_C Y$, per definizione stessa di prodotto fibrato, possiamo costruire un diagramma commutativo come segue:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{\pi} & Y \\
 \downarrow \gamma & \searrow \sigma & \nearrow p_Y \\
 & W = D \times_C Y & \\
 & \swarrow p_D & \downarrow \alpha \\
 D & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C
 \end{array}$$

Dalla finitezza di π deriva che le fibre di σ sono finite: allora σ è un morfismo finito. Per le proprietà dei prodotti fibrati, p_Y è finita di grado 2^r , quindi σ ha grado 1. Allora, $\sigma : Z \rightarrow W$ è la normalizzazione di W . Dunque, π è ottenuto da $\tilde{\pi}$ per cambiamento di base e normalizzazione. Indichiamo con $y_1, \dots, y_n \in C$ i valori critici di $\tilde{\pi}$ e con F_1, \dots, F_n le fibre di α su questi punti. Il rivestimento $p_Y : W \rightarrow Y$ è ottenuto da $\tilde{\pi}$ per cambiamento di base, per cui i suoi dati di costruzione si ottengono per pull-back da quelli di $\tilde{\pi}$. In particolare, il contorno apparente di p_Y è la somma delle fibre F_1, \dots, F_n . Consideriamo il calcolo dei dati di costruzione della normalizzazione di uno \mathbb{Z}_2^i -rivestimento fatto nella Sezione 2.4: se, per ogni $i = 1, \dots, n$, scrivo $F_i = 2A_i + B_i$, con A_i, B_i effettivi e B_i ridotto, allora il contorno apparente di π è la somma dei B_i . Sapendo che il contorno apparente di π è la somma delle curve nodali che appaiono in V , si trova che ogni B_i è una somma di curve nodali che appaiono in V , ognuna presa con molteplicità al massimo 1, e la somma dei B_i è uguale alla somma di tutte le curve nodali che appaiono in V . Dico che, per ogni $i = 1, \dots, n$, B_i contiene almeno una curva che appare in V . Se per assurdo avessi $B_i = 0$ per qualche i , allora avrei $F_i = 2A_i$. Poiché F_i è una fibra, $F_i^2 = 0$. So che la fibra generale di α è isomorfa a \mathbb{P}^1 , dunque $F_i \cdot K_Y = -2$. Allora abbiamo $A_i^2 = 0$ e $A_i \cdot K_Y = -1$, e ciò porta ad una contraddizione, perché, come visto nella dimostrazione del Lemma 2.2.3, la formula di aggiunta implica che

$A_i^2 + A_i \cdot K_Y$ è pari. Dunque, ogni B_i contiene almeno una curva che appare in V , ovvero $B_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Poiché C è una curva liscia, grazie al Lemma 3.1.15, per ogni scelta di $i, j \in \{1, \dots, n\}$, esiste un divisore $L_{i,j}$ su C tale che $2L_{i,j} \equiv y_i + y_j$. Allora, per ogni coppia di fibre F_i, F_j si ha $2\alpha^*(L_{i,j}) \equiv F_i + F_j = 2(A_i + A_j) + B_i + B_j$, ovvero $B_i + B_j \in 2\text{Pic}(Y)$. Ma $B_i + B_j$ è una somma di curve che appaiono in V , quindi $B_i + B_j \in V$. Come dimostrato nel Lemma 2.2.3, i pesi di V sono tutti divisibili per 4. Allora, per ogni scelta di i, j , $B_i + B_j$ è la somma di un numero divisibile per 4 di curve che appaiono in V . Tutte queste proprietà dei B_i implicano che ogni B_i è la somma di esattamente 2 curve che appaiono in V . Infatti, poiché il numero di curve che appaiono in V è uguale a $2n$, se uno dei B_i contiene un numero di curve diverso da 2, allora almeno uno dei B_i contiene una sola curva, diciamo B_1 . Se B_1 contiene una sola curva che appare in V , allora, per il Lemma di Zariski (Lemma 3.1.5), $F_1 \cdot B_1 = 0$. Sapendo che $B_1^2 = -2$, si ottiene $A_1 \cdot B_1 = 1$. Ciò implica che $A_1 \cdot (B_1 + B_j) = 1$, per ogni $j = 2, \dots, n$, in contraddizione con il fatto che $B_1 + B_j \in 2\text{Pic}(Y)$. A questo punto, l'unica possibilità è che ogni B_i sia la somma di esattamente due curve che appaiono in V . Ciò implica che ogni fibra F_i contiene esattamente due curve nodali che appaiono in V . Il punto (ii') è dimostrato.

Rimane da dimostrare il punto (iii). A meno di cambiare gli indici, posso supporre che le curve che appaiono in V siano C_1, \dots, C_m e che $B_i = C_{2i-1} + C_{2i}$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Per quanto appena dimostrato, per ogni coppia di indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha che $C_{2i-1} + C_{2i} + C_{2j-1} + C_{2j} \in V$. Se $V' \subset \mathbb{F}_2^m = \mathbb{F}_2^{2n}$ è il codice ridotto associato a V , per ogni coppia di indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha che $C_{2i-1} + C_{2i} + C_{2j-1} + C_{2j} \in V'$. Sia $DE(n) \subset \mathbb{F}_2^m$ il codice dei vettori doppiamente pari: per come abbiamo ordinato le curve, $C_{2i-1} + C_{2i} + C_{2j-1} + C_{2j} \in DE(n)$ per ogni coppia di indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$, anzi, $DE(n)$ è generato da questi vettori e dunque $DE(n) \subset V'$. Sappiamo che $n \geq 2$, perché per ipotesi $V \neq 0$. I pesi di V' e di $DE(n)$ sono divisibili per 4, quindi nel caso in cui $n = 2$ l'unica possibilità è che $V' = DE(n) = \langle C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \rangle_{\mathbb{F}_2}$. Dimostriamo che $V' \subset DE(n)$ anche per $n \geq 3$.

Sia $v = \sum_{i=1}^n (x^{2i-1}C_{2i-1} + x^{2i}C_{2i}) \in V'$, con $x^j \in \mathbb{F}_2$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Se $x^{2i-1} = x^{2i}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora, poiché il peso di v è divisibile per 4, ho che $v \in DE(n)$. Supponiamo allora che esista $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $x^{2j-1} \neq x^{2j}$. Consideriamo la fibra $F_j = 2A_j + C_{2j-1} + C_{2j}$. Per il Lemma di Zariski (Lemma 3.1.5) si ha $0 = F \cdot C_{2j-1} = -2 + 2A_j \cdot C_{2j-1}$ e $0 = F \cdot C_{2j} = -2 + 2A_j \cdot C_{2j}$. Allora, $A_j \cdot C_{2j-1} = A_j \cdot C_{2j} = 1$, da cui segue, vedendo v come elemento di $\text{Pic}(Y)$, che $A_j \cdot v = 1$. Poiché $v \in V'$, allora, abusando di nuovo della notazione, $v \in 2\text{Pic}(Y)$, per cui $A_j \cdot v$ è pari. Ho trovato una contraddizione, per cui $x^{2i-1} = x^{2i}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, ovvero $v \in DE(n)$. Dunque $V' = DE(n)$ e V è essenzialmente isomorfo a $DE(n)$. \square

3.3 Numero di nodi su una superficie rigata

Manterrò la notazione usata nella sezione precedente.

Arrivati a questo punto, trovare un limite al numero di nodi su una superficie rigata non razionale risulta particolarmente semplice:

Proposizione 3.3.1. *Sia Y una superficie rigata non razionale e siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y . Allora $k \leq \rho(Y) - 2$.*

Dim. Ricordo che $NS(Y) = H^2(Y, \mathbb{Z})$ (vedi Proposizione 3.1.12), dunque $\rho(Y)$ è il rango di $H^2(Y, \mathbb{Z})$. Sia C una curva liscia tale che $Y \stackrel{\text{bir}}{\sim} C \times \mathbb{P}^1$. Sia $\alpha : Y \rightarrow C$ la mappa di Albanese (vedi Corollario 3.1.11). Consideriamo le classi di C_1, \dots, C_k e di K_Y in $H^2(Y, \mathbb{Z})$, che indichiamo rispettivamente con c_1, \dots, c_k e k_Y . Allo stesso modo, se F è una fibra generale di α , indico con f la classe di F in $H^2(Y, \mathbb{Z})$. Poiché $F \cong \mathbb{P}^1$, si ha $f \cdot k_Y = -2$. Poiché le curve C_1, \dots, C_k sono nodali, si ha $c_i \cdot k_Y = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Inoltre, tali curve devono essere contratte da α , perché la curva C non è razionale. Allora, C_1, \dots, C_k sono ognuna contenuta in una fibra di α , quindi $c_i \cdot f = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Consideriamo la forma di intersezione ristretta al sottogruppo

di $H^2(Y, \mathbb{Z})$ generato da f, k_Y, c_1, \dots, c_k . Questa ha matrice:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & \\ -2 & k_Y^2 & \\ \hline & & -2I \end{array} \right]$$

Dalla forma di questa matrice deduciamo che il sottogruppo di $H^2(Y, \mathbb{Z})$ generato da f, k_Y, c_1, \dots, c_k è libero di rango $k + 2$, da cui la tesi. \square

Il limite trovato in realtà è un massimo, come si vede dal seguente esempio:

Esempio standard. Sia W una superficie geometricamente rigata su una curva liscia C . Indichiamo con $p : W \rightarrow C$ il morfismo dato dalla struttura di \mathbb{P}^1 -fibrato. Fissato un punto $y \in C$, denotiamo con F la fibra di p su y . Sappiamo che $F \cong \mathbb{P}^1$. Fissato un punto $y_1 \in F$, sia $\varepsilon_1 : W_1 \rightarrow W$ lo scoppimento centrato in y_1 . Dato che $F \cong \mathbb{P}^1$, la molteplicità di F in y_1 è 1. La trasformata totale di F è della forma $\varepsilon_1^*F = \widehat{F} + E_1$, dove \widehat{F} indica la trasformata stretta di F ed E_1 è la curva eccezionale dello scoppimento. Poichè F è una fibra, si ha $F^2 = 0$, allora $\widehat{F}^2 = (\varepsilon_1^*F - E_1)^2 = F^2 - 2\varepsilon_1^*F \cdot E_1 + E_1^2 = -1$. Poiché $\widehat{F} \cong F \cong \mathbb{P}^1$, la curva \widehat{F} è una (-1) -curva. Inoltre, $\widehat{F} \cdot E_1 = (\varepsilon_1^*F - E_1) \cdot E_1 = -E_1^2 = 1$. Abbiamo trovato che la trasformata totale di F è l'unione di due (-1) -curve \widehat{F} ed E_1 , le quali si intersecano trasversalmente in un punto, che indichiamo con y_2 .

Sia $\varepsilon_2 : W_2 \rightarrow W_1$ lo scoppimento con centro in y_2 . Consideriamo le trasformate totali di E_1 e di \widehat{F} : $\varepsilon_2^*E_1 = \widehat{E}_1 + E_2$ e $\varepsilon_2^*\widehat{F} = \widetilde{F} + E_2$, dove ho indicato con E_2 la curva eccezionale dello scoppimento ε_2 e con \widehat{E}_1 e \widetilde{F} rispettivamente le trasformate strette di E_1 e \widehat{F} . Sapendo che E_1 e \widehat{F} sono (-1) -curve, abbiamo:

$$\widehat{E}_1^2 = (\varepsilon_2^*E_1 - E_2)^2 = E_1^2 - 2\varepsilon_2^*E_1 \cdot E_2 + E_2^2 = -2;$$

$$\widetilde{F}^2 = (\varepsilon_2^*\widehat{F} - E_2)^2 = \widehat{F}^2 - 2\varepsilon_2^*\widehat{F} \cdot E_2 + E_2^2 = -2;$$

$$\begin{aligned}\widehat{E}_1 \cdot \widetilde{F} &= (\varepsilon_2^* E_1 - E_2) \cdot (\varepsilon_2^* \widehat{F} - E_2) \\ &= E_1 \cdot \widehat{F} - \varepsilon_2^* E_1 \cdot E_2 - E_2 \cdot \varepsilon_2^* \widehat{F} + E_2^2 = 1 - 1 = 0;\end{aligned}$$

$$\widehat{E}_1 \cdot E_2 = (\varepsilon_2^* E_1 - E_2) \cdot E_2 = -E_2^2 = 1;$$

$$\widetilde{F} \cdot E_2 = (\varepsilon_2^* \widehat{F} - E_2) \cdot E_2 = -E_2^2 = 1.$$

Poiché \widehat{E}_1 e \widetilde{F} sono razionali, concludiamo che, indicato con ε il morfismo $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$, la trasformata totale di F attraverso ε è $\varepsilon^* F = \varepsilon_2^*(\widehat{F} + E_1) = \widetilde{F} + \widehat{E}_1 + 2E_2$, cioè è l'unione di due curve nodali disgiunte e di una (-1) -curva che interseca trasversalmente ognuna di esse.

La superficie W_2 è una superficie rigata su C e contiene due curve nodali disgiunte. Le fibre di $p' := p \circ \varepsilon : W_2 \rightarrow C$ sui punti di C diversi da y sono tutte isomorfe a \mathbb{P}^1 , quindi posso ripetere tutto il procedimento a partire da un punto che appartiene ad una qualunque di queste fibre.

Supponiamo di aver ripetuto la procedura n volte su n punti distinti della curva C e sia $\varepsilon : Y \rightarrow W$ il morfismo birazionale ottenuto. La superficie Y è rigata su C e contiene $2n$ curve nodali disgiunte. Sia V il codice associato a queste curve nodali (vedi la Sezione 2.2). Per come è stata costruita Y , queste $2n$ curve nodali si dividono in esattamente n coppie, contenute ognuna in una fibra della mappa di Albanese di Y . Allora, possiamo ripetere il ragionamento finale della dimostrazione del Teorema 3.2.3, ed otteniamo che tutte le $2n$ curve appaiono in V e che V è isomorfo al codice $DE(n)$. Per quanto richiamato nella Sezione 3.1 sulla struttura del gruppo di Néron-Severi per una superficie rigata (Equazione 3.2), si ha che $\rho(Y) = 2n + 2$. Chiamiamo Y *esempio standard* di superficie rigata con $\rho(Y) - 2$ curve nodali disgiunte.

Lemma 3.3.2. *Sia Y una superficie rigata non razionale e siano C_1, \dots, C_k curve nodali su Y . Sia V il codice associato alle curve C_1, \dots, C_k e sia r la dimensione di V . Allora $k \leq r + [\rho(Y)/2]$.*

Dim. La forma di intersezione su $\text{Pic}(Y)$ induce su $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ una forma bilineare non degenera a valori in \mathbb{F}_2 . Infatti, se D, D' ed E sono divisori su Y , si ha $(D + 2D') \cdot E = D \cdot E + 2D' \cdot E \equiv D \cdot E \pmod{2}$, dunque la forma su $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ è ben definita. La bilinearità segue direttamente dalla bilinearità della forma di intersezione su $\text{Pic}(Y)$. Rimane da vedere che la forma indotta su $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ è non degenera. Ciò deriva dalla struttura del gruppo $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$. Infatti, come visto nella Sezione 3.1, abbiamo:

$$\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}_2F \oplus \mathbb{Z}_2H \oplus (\oplus_{i=1}^s \mathbb{Z}_2E_i)$$

dove F è la classe di una fibra della mappa di Albanese di Y , H è la classe di un iperpiano ed E_1, \dots, E_s sono le classi dei divisori eccezionali di un morfismo birazionale $\varepsilon : Y \rightarrow \tilde{Y}$ da Y in un modello minimale \tilde{Y} . Si ha che la matrice della forma bilineare indotta su $\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ è:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & [H^2] & \\ \hline & & I \end{array} \right]$$

dove $[H^2]$ indica il valore di H^2 modulo 2. Dunque, la forma è non degenera. Consideriamo, come già fatto nella Sezione 2.2, il sottogruppo $\mathcal{C} < \text{Pic}(Y)$ generato dalle curve C_1, \dots, C_k e sia $\varphi : \mathcal{C}/2\mathcal{C} \rightarrow \text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)$ l'omomorfismo naturale indotto dall'inclusione di \mathcal{C} in $\text{Pic}(Y)$. Poiché $C_i^2 = -2$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e le C_i sono disgiunte, l'ortogonale di $\varphi(\mathcal{C}/2\mathcal{C})$ rispetto alla forma bilineare fissata contiene $\varphi(\mathcal{C}/2\mathcal{C})$ stesso. Allora $2 \dim_{\mathbb{F}_2}(\varphi(\mathcal{C}/2\mathcal{C})) \leq \dim_{\mathbb{F}_2}(\text{Pic}(Y)/2\text{Pic}(Y)) = \rho(Y)$, dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che Y è rigata (vedi le equazioni 3.2 e 3.5). Sia V il codice associato alle curve C_i . Se $r = \dim_{\mathbb{F}_2}(V)$, allora si ha $k = r + \dim_{\mathbb{F}_2} \varphi(\mathcal{C}/2\mathcal{C})$. Dunque $2(k - r) \leq \rho(Y)$, da cui $k - r \leq \lceil \rho(Y)/2 \rceil$, ovvero $k \leq r + \lceil \rho(Y)/2 \rceil$. \square

Teorema 3.3.3. *Sia Y una superficie rigata non razionale e siano C_1, \dots, C_k curve nodali disgiunte su Y . Se $k = \rho(Y) - 2$ e $\rho \geq 5$, allora Y è l'esempio standard. In particolare, $k = 2n$ è pari e il codice V è $DE(n)$.*

Dim. Sia V il codice associato a C_1, \dots, C_k , come definito nella Sezione 2.2, sia m il numero di curve nodali che appaiono in V ed r la dimensione del codice. Poiché $\rho \geq 5$, grazie al Lemma 3.3.2, si ha che $r \geq k - [\rho(Y)/2] = [(\rho(Y) + 1)/2] - 2 \geq 1$. Allora, siamo nelle ipotesi del Teorema 3.2.3, quindi, mantenendo la stessa notazione usata in quel teorema, $m = 2n$ è pari ed esiste un morfismo $\beta : \Sigma \rightarrow C$, con fibra generale isomorfa a \mathbb{P}^1 e con n fibre doppie, ognuna contenente due nodi di Σ . Inoltre, il codice V è essenzialmente isomorfo a $DE(n)$. Allora, $r = n - 1$ e dal Lemma 3.3.2 segue che $n - 1 \geq [(\rho(Y) + 1)/2] - 2$. Allora, $\rho(Y) - 2 = k \geq 2n \geq 2[(\rho(Y) + 1)/2] - 2$. L'unica possibilità è che ρ sia pari e $k = m = 2n$. Allora k è pari, tutte le curve C_1, \dots, C_k appaiono in V e $V = DE(n)$.

Consideriamo ora lo spazio vettoriale $N^1(Y) := NS(Y) \otimes \mathbb{R} = H^2(Y, \mathbb{R})$ (vedi la Proposizione 3.1.12). Sia f la classe in $N^1(Y)$ di una fibra generale della mappa $\alpha := \beta \circ \eta$, dove $\eta : Y \rightarrow \Sigma$ è il morfismo birazionale che contrae C_1, \dots, C_k . Sia T il sottospazio di $H^2(Y, \mathbb{R})$ definito da:

$$T := \{l \in N^1(Y) : l \cdot f = 0\}.$$

Chiaramente, $f \in T$. Se c_1, \dots, c_k sono le classi in $N^1(Y)$ delle curve C_1, \dots, C_k , allora $c_1, \dots, c_k \in T$. Consideriamo la forma di intersezione ristretta al sottospazio di T generato da f, c_1, \dots, c_k . Questa ha matrice:

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & -2I \end{array} \right]$$

Allora i vettori f, c_1, \dots, c_k sono indipendenti e, poiché T ha dimensione $\rho(Y) - 1 = k + 1$, essi sono una base di T . Sappiamo dal Teorema 3.2.3 che α ha n fibre F_1, \dots, F_n della forma $F_i = 2A_i + C_{2i-1} + C_{2i}$, per $i = 1, \dots, n$, dove abbiamo opportunamente riordinato le curve C_1, \dots, C_k . Inoltre, poiché le curve C_1, \dots, C_k sono nodali e disgiunte, ogni A_i contiene almeno una componente diversa da C_1, \dots, C_k . Dico che F_1, \dots, F_n sono le uniche fibre riducibili del morfismo α . Infatti, grazie al Lemma di Zariski (Lemma 3.1.5), prese tutte le fibre riducibili di α , se da ognuna tolgo una componente, le

componenti che rimangono sono tutte indipendenti fra loro e in più sono indipendenti da f . Se avessi una fibra riducibile diversa da F_1, \dots, F_n , otterrei con questo procedimento un numero di elementi indipendenti in T strettamente maggiore della sua dimensione. Dunque, F_1, \dots, F_n sono le uniche fibre riducibili di α ed ognuna ha una sola componente diversa dalle curve C_1, \dots, C_k .

Per ogni $i = 1, \dots, n$, possiamo scrivere $F_i = \lambda_i C_{2i-1} + \mu_i C_{2i} + 2\nu_i D_i$, dove λ_i, μ_i, ν_i sono interi positivi non nulli e D_1, \dots, D_n sono curve irriducibili distinte da C_1, \dots, C_k . Poiché la fibra generale di α è isomorfa a \mathbb{P}^1 , si ha $F_i \cdot K_Y = -2$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora, $2\nu_i D_i \cdot K_Y = -2$, da cui $\nu_i = 1$ e $D_i \cdot K_Y = -1$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Dalla formula di aggiunzione si ottiene che $D_i^2 \geq -1$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Per il Lemma di Zariski (Lemma 3.1.5), $D_i^2 < 0$, quindi $D_i^2 = -1$ per ogni $i = 1, \dots, n$, ovvero le D_i sono (-1) -curve. Poiché le fibre di α sono connesse, allora, per ogni $i = 1, \dots, n$, D_i ha intersezione non vuota con C_{2i-1} e con C_{2i} . Per il Lemma di Zariski (Lemma 3.1.5), $D_i \cdot F_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= D_i \cdot F_i \\ &= D_i \cdot (2D_i + \lambda_i C_{2i-1} + \mu_i C_{2i}) \\ &= -2 + \lambda_i D_i \cdot C_{2i-1} + \mu_i D_i \cdot C_{2i} \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

L'unica possibilità è che $\lambda_i = \mu_i = D_i \cdot C_{2i-1} = D_i \cdot C_{2i} = 1$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Questo implica che $F_i = 2D_i + C_{2i-1} + C_{2i}$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Grazie al teorema di contraibilità di Castelnuovo, posso contrarre le curve D_1, \dots, D_n , ottenendo un morfismo birazionale $\varepsilon_1 : Y \rightarrow Y'$, da Y in una superficie liscia Y' . Dato che C è una curva non razionale, il morfismo $\alpha : Y \rightarrow C$, contrae le curve D_1, \dots, D_n . Sono nelle ipotesi del Lemma 1.2.4, quindi esiste una fibrazione $p' : Y' \rightarrow C$, tale che $\alpha = p' \circ \varepsilon_1$. In corrispondenza delle fibre $F_1 = \alpha^{-1}(y_1), \dots, F_n = \alpha^{-1}(y_n)$, p' ha n fibre riducibili $F'_1 = (p')^{-1}(y_1), \dots, F'_n = (p')^{-1}(y_n)$, ognuna delle quali è unione di due (-1) -curve che si intersecano trasversalmente in un punto. Infatti, fissato arbitrariamente $i \in \{1, \dots, n\}$, se C'_{2i-1} e C'_{2i} sono le immagini rispet-

tivamente di C_{2i-1} e C_{2i} attraverso ε_1 , allora queste sono curve isomorfe a \mathbb{P}^1 che si incontrano nel punto a cui è stata contratta la curva D_i . Le curve C_{2i-1} e C_{2i} sono le trasformate strette di C'_{2i-1} e C'_{2i} attraverso ε_1 , allora:

$$\begin{aligned} -2 = (C_{2i-1})^2 &= (\varepsilon_1^*(C'_{2i-1}) - D_i)^2 = (C'_{2i-1})^2 - 1 \\ &\Downarrow \\ (C'_{2i-1})^2 &= -1. \end{aligned}$$

Con un calcolo analogo si trova $(C'_{2i})^2 = -1$. Dunque C'_{2i-1} e C'_{2i} sono due (-1) -curve. Inoltre:

$$0 = C_{2i-1} \cdot C_{2i} = (\varepsilon_1^*(C'_{2i-1}) - D_i) \cdot (\varepsilon_1^*(C'_{2i}) - D_i) = C'_{2i-1} \cdot C'_{2i} - 1,$$

per cui C'_{2i-1} e C'_{2i} si incontrano trasversalmente.

Ora, per ogni fibra F'_1, \dots, F'_n , facciamo la contrazione di una delle (-1) -curve contenute in essa. Chiamiamo il morfismo birazionale ottenuto $\varepsilon_2 : Y' \rightarrow W$, dove W è una superficie liscia. Applicando il Lemma 1.2.4 alla nuova situazione, si trova che esiste una fibrazione $p : W \rightarrow C$, tale che $p' = p \circ \varepsilon_2$. Per costruzione, le fibre di p sui punti y_1, \dots, y_n sono isomorfe a \mathbb{P}^1 . Allora, tutte le fibre di p sono isomorfe a \mathbb{P}^1 e W è una superficie geometricamente rigata su C . Allora Y è l'esempio standard. \square

Conclusione

Con l'ultimo teorema dimostrato abbiamo completamente caratterizzato le superfici nodali rigate non razionali che contengono il numero massimo di nodi: esse sono gli esempi standard e non ce ne sono altre.

Questo è esattamente lo stesso tipo di risultato che si trova in [7], nel caso di superfici razionali.

Allora, mettendo insieme i due risultati, possiamo concludere che il problema della caratterizzazione delle superfici nodali su \mathbb{C} con massimo numero di nodi è completamente risolto nella classe delle superfici rigate.

Bibliografia

- [1] Artin M., *Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces.*, Amer. J. Math., **84** (1962), pp. 485-496.
- [2] Barth W., *Two projective surfaces with many nodes, admitting the symmetries of the icosahedron*, J. Algebraic Geom., **5** (1996), pp. 173-186.
- [3] Barth W., Hulek K., Peters C., Van de Ven A., *Compact Complex Surfaces*, Springer, 2004
- [4] Basset A.B., *The maximum number of double points on a surface*, Nature, **73** (1906), p. 246.
- [5] Beauville A., *Complex Algebraic Surfaces*, Cambridge University Press, 1983.
- [6] Beauville A., *Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans \mathbb{P}^3 ($\mu(5) = 31$)*, In: *Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry*, (Angers, 1979), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1980), pp. 207-215.
- [7] Dolgachev I., Mendes Lopes M., Pardini R., *Rational Surfaces with Many Nodes*, Compositio Math., **132** (2002), pp. 349-363.
- [8] Eisenbud D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1995.
- [9] Hartshorne R., *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [10] Hironaka H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Annals of Math., **79** (1964), I: pp. 109-203; II: pp. 205-326.
- [11] Jaffe D., Ruberman D., *A sextic surface cannot have 66 nodes*, J. Algebraic Geom., **6** (1997), pp. 151-168.
- [12] Matsumura H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1989.

-
- [13] Mumford D., *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, **9** (1961).
- [14] Pardini R., *Abelian Covers of Algebraic Varieties*, J. reine angew. Math., **417** (1991), pp. 191-213.
- [15] Reid M., *Chapters on Algebraic Surfaces*, non pubblicato, manoscritto reperibile in [http:// front.math.ucdavis.edu/](http://front.math.ucdavis.edu/) .
- [16] Serre J.-P., *Géométrie algébrique et géométrie analytique. (GAGA)*, Annales de l'institut Fourier, **6** (1956), pp. 1-42.
- [17] Shafarevich I., *Basic Algebraic Geometry*, Vol. 1-2 , Springer-Verlag, 1994.
- [18] Zariski O., *The reduction of the singularities of an algebraic surface*, Annals of Math., **40** (1939), pp. 639-689.
- [19] Zariski O., *On the purity of the branch locus of algebraic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **44** (1958), pp. 791-796.