UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

SOLUZIONI ANALITICHE PER SISTEMI IPERBOLICI A COEFFICIENTI NON REGOLARI NEL TEMPO

Candidato
Marco Cignarella

Relatore
Prof. S. Spagnolo

Anno Accademico 2003-2004

Indice

Introduzione

Scopo di questa tesi è studiare il problema di Cauchy per sistemi iperbolici a coefficienti analitici nelle variabili spaziali, ma non regolari nel tempo.
Prima di entrare nel vivo nell'argomento, presentiamo nel primo capitolo una breve rassegna dei principali risultati noti per sistemi con coefficienti analitici in *tutte* le variabili.
Il problema dell'esistenza *locale* di una soluzione è risolto positivamente da quello che è forse il risultato più noto di tutta la teoria delle equazioni alle derivate parziali, il teorema di Cauchy-Kovalevsky.
Il problema dell'esistenza di una soluzione *globale* é piú complesso. In generale, l'analiticità dei coefficienti non è sufficiente a garantire l'esistenza di una soluzione globale. In questo caso, infatti, è *necessario* supporre che il sistema sia iperbolico. In questa tesi ci preoccupiamo di mostrare come le ipotesi di iperbolicità siano *sufficienti* per dimostrare l'esistenza di soluzioni globali.
Il primo risultato globale presentato è quello classico di Mizohata, valido per i sistemi *strettamente* iperbolici. C'è da dire che per i sistemi strettamente iperbolici, l'esistenza di una soluzione globale è garantita anche se i coefficienti sono solo C^∞. Il lavoro di Mizohata consiste quindi nel dimostrare la regolarità della soluzione in questo caso, e per fare questo si utilizzano delle stime a priori.
Se abbandoniamo l'ipotesi di stretta iperbolicità per quella di iperbolicità *debole*, il problema di Cauchy per un sistema a coefficienti C^∞ non è più ben posto in C^∞; diventa perciò ancora più interessante studiare il problema dell'esistenza di una soluzione globale quando i coefficienti sono analitici. Il teorema di Bony e Schapira dà risposta positiva a questo problema.

Del teorema di Cauchy-Kovalevsky, oltre alla dimostrazione classica, che utilizza le *serie maggioranti*, presentiamo una dimostrazione, che possiamo far risalire a Nagumo e Ovciannikov, in cui per ottenere l'esistenza di una soluzione si richiede che i coefficienti siano analitici in x ma non in t.
Ci chiediamo allora se anche nei teoremi di esistenza globale per i sistemi iperbolici possiamo indebolire le ipotesi di regolarità nel tempo dei coefficienti. I metodi presentati nel primo capitolo non si applicano a coefficienti molto irregolari. La dimostrazione del teorema di Mizohata utilizza stime a priori per le soluzioni del sistema, per dimostrare le quali è necessario che i coefficienti siano almeno lipschitziani nel tempo. Ancora più esigente la dimostrazione del teorema di Bony e Schapira: è essenziale supporre che i coefficienti si possano estendere a funzioni olomorfe in tutte le variabili, per poi applicare al polinomio

caratteristico un risultato della teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse.
E' allora necessario cambiare radicalmente il metodo della dimostrazione. Nei capitoli successivi della tesi viene illustrata una tecnica che richiede pochissima regolarità in t, ma funziona solo nel caso di iperbolicità stretta. Questa tecnica é una estensione di quella introdotta da Colombini e Spagnolo in [6] per le equazioni strettamente iperboliche simmetriche del secondo ordine.
Per l'esattezza, richiederemo che i coefficienti dei sistemi siano in $L^p([0,T],\mathcal{A})$ con p variabile in $[1,\infty]$ a seconda del caso studiato.

Nel secondo capitolo presentiamo alcuni importanti risultati sui funzionali olomorfi e analitici reali, che ci serviranno successivamente. Dopo aver definito gli spazi dei funzionali olomorfi, ne analizziamo brevemente alcune delle caratteristiche più importanti, mettendo in luce le analogie e le differenze con gli spazi di distribuzioni a supporto compatto. Definiamo la trasformata di Fourier-Laplace per i funzionali olomorfi, e mostriamo la relazione tra la trasformata di un funzionale e il suo supporto, che sarà essenziale nel seguito.

Nel capitolo seguente, infatti, studiamo il problema nell'ambito dei funzionali analitici reali, anziché delle funzioni analitiche.
Anche se la tecnica della dimostrazione è analoga, in questo capitolo trattiamo separatamente due classi di sistemi del primo ordine. La prima è quella dei sistemi che chiameremo simmetrici, cioè della forma

$$\begin{cases} A_0(x,t)\partial_t U = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U, \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

con A_0 matrice hermitiana definita positiva, e le A_h hermitiane.
La seconda é quella dei sistemi "uniformemente iperbolici", cioè della forma

$$\begin{cases} \partial_t U = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U, \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

in cui si suppone che la matrice $\sum_h A_h\xi_h$ abbia tutti gli autovalori reali e distinti, anzi uniformemente distanziati per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| = 1$.

In entrambi i casi dimostreremo che se il dato iniziale è un funzionale analitico reale a supporto in K sottoinsieme compatto di Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, e K é "sufficientemente lontano" dal bordo di Ω (rispetto ai coefficienti del sistema e a T), allora esiste un'unica soluzione in $H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$.
Diamo qui una descrizione molto breve della tecnica utilizzata.
Per prima cosa, si studia il sistema supponendo che il dato iniziale sia un funzionale olomorfo (si considera il complessificato di $\mathbb{R}^n$ e si estendono olomorficamente i coefficienti a un intorno complesso di Ω) portato da una palla di raggio sufficientemente piccolo con centro in un punto di $\mathbb{R}^n$. Utilizzando la trasformata di Fourier e l'analiticità dei coefficienti ci riconduciamo a studiare

un problema del tipo

$$\begin{cases} \partial_t V(\zeta,t) = iA_0(t)\zeta V(\zeta,t) + \sum_{|k|>0} A_k(t)\partial_\zeta^k(\zeta V(\zeta,t)), \\ \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{1}$$

in cui compare un operatore differenziale di ordine infinito. L'ipotesi di iperbolicità ci permette di ottenere una stima sulla soluzione di questo problema, e da questa otteniamo, attraverso il teorema di Paley-Wiener, una stima per la crescita del supporto della soluzione quando il dato iniziale é portato da un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$ che "si allontana poco" da $\mathbb{R}^n$; grazie a questo possiamo infine dimostrare che se il dato iniziale è portato da un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, allora lo stesso vale anche per la soluzione (chiaramente il supporto sarà in generale un insieme più grande).
Per l'efficacia di questo metodo sono essenziali le proprietà dei funzionali olomorfi esposte precedentemente, in particolare risulta cruciale che si possa scomporre un funzionale olomorfo nella somma di funzionali con supporto più piccolo.

Nel quarto capitolo dimostriamo i risultati principali della tesi, ovvero i risultati di esistenza globale per i sistemi iperbolici del primo ordine. Attraverso un procedimento di dualitá, questi risultati seguono da quelli del capitolo precedente. E' importante notare che la tecnica utilizzata nel capitolo precedente non solo permette di dimostrare l'esistenza di una soluzione nella classe dei funzionali analitici, ma permette di dimostrare che, data una famiglia di problemi di Cauchy, con opportune ipotesi di limitatezza sui coefficienti, sul termine noto e sul dato iniziale, allora le soluzioni sono limitate. Questo risultato è essenziale per dimostrare i teoremi di questo capitolo.

Nell'ultimo capitolo mostriamo infine quali risultati sulle equazioni scalari si possono dedurre da quelli sui sistemi del primo ordine dimostrati precedentemente. Facciamo notare che la tecnica di ricondurre le equazioni scalari di ordine superiore al primo a sistemi del primo ordine è in generale molto produttiva. In questo caso, però, non siamo riusciti a estendere alle equazioni tutti i risultati dimostrati sui sistemi. L'ostacolo principale è dato dal fatto che i teoremi dimostrati per i sistemi non si estendono al caso pseudodifferenziale.

Capitolo 1

Sistemi del primo ordine a coefficienti analitici

In questo capitolo mostreremo i principali risultati noti per il problema di Cauchy per sistemi lineari del primo ordine

$$\begin{cases} \partial_t U = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U + F(x,t), \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

nell'ipotesi che i coefficienti, il termine noto e il dato iniziale siano funzioni analitiche reali.

Analizzeremo prima il problema dell'esistenza *locale* di una soluzione, e poi quello dell'esistenza *globale*. In entrambi i casi, dopo aver dimostrato i risultati classici che richiedono l'analiticitá in tutte le variabili, mostreremo come possono essere indebolite le ipotesi sulla regolaritá nel tempo.

Il primo risultato che presentiamo é il teorema di Cauchy-Kovalevsky che afferma l'esistenza (e l'unicitá) locale di una soluzione analitica per il problema (1.1). Di questo teorema presentiamo la dimostrazione classica che utilizza delle *serie maggioranti* per i coefficienti del sistema, e alcune prime osservazioni sul dominio di esistenza della soluzione che permettono di dimostrare il teorema di unicitá di Holmgren. Successivamente, attraverso il teorema di Ovciannikov, dimostriamo alcune versioni del teorema di Cauchy-Kovalevsky che richiedono coefficienti meno regolari in t.

Passiamo poi ad analizzare il problema dell'esistenza globale. Il teorema di Mizohata assicura l'esistenza globale per i sistemi simmetrici e per quelli strettamente iperbolici. La dimostrazione presentata in questo capitolo utilizza il teorema di Friedrichs. Nei prossimi capitoli verrá data una dimostrazione indipendente.

Il teorema di Bony-Schapira riguarda il caso dei sistemi debolmente iperbolici, e per la dimostrazione si utilizzano risultati di analisi complessa.

Nell'ultima sezione del capitolo, consideriamo brevemente, senza dimostrazioni, i risultati noti per operatori analitici nelle variabili spaziali, ma meno regolari nel tempo.

1.1 Il teorema di Cauchy-Kovalevsky

Il teorema di Cauchy-Kovalevsky afferma l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione del problema (1.1). Indichiamo con L l'operatore differenziale

$$L[U] \doteq \partial_t U - \sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U - B(x,t)U. \tag{1.2}$$

Possiamo enunciare questo teorema nella seguente forma:

Teorema 1.1 (di Cauchy-Kovalevsky). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in un intorno V dell'origine in $\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$. Supponiamo che i coefficienti di L siano analitici in V.*
Se $F(x,t)$ é in $(\mathcal{A}(V))^N$, e $\Phi(x)$ in $(\mathcal{A}(V_0))^N$, $V_0 \doteq V \cap \{t=0\} \subset \mathbb{R}^n$,
allora esiste W intorno dell'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} L[U] = F(x,t) \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

ha un'unica soluzione analitica in W.

Dimostrazione. Se U é una soluzione di (1.3) in un intorno dell'origine, e consideriamo lo sviluppo in serie di potenze $U(x,t) = \sum_{\nu,j} U^{\nu,j} x^\nu t^j$, notiamo che i coefficienti $U^{\nu,j}$ sono univocamente determinati da (1.3), e sono funzioni dei coefficienti delle espansioni di L, F e Φ. Se consideriamo il problema (1.3) nell'ambito delle serie formali, abbiamo quindi che esiste un'unica soluzione. Per dimostrare il teorema, ci basta far vedere che questa serie converge in un intorno dell'origine, e dá quindi luogo ad una soluzione analitica (unica nello spazio delle serie formali e quindi in quello delle funzioni analitiche).

Notiamo che possiamo supporre $\Phi = 0$, infatti se $\widetilde{U}$ soddisfa

$$\begin{cases} L[\widetilde{U}] = F - L[\Phi] \\ \widetilde{U}(x,0) = 0, \end{cases}$$

allora $U \doteq \widetilde{U} + \Phi$ soddisfa la (1.3).
Pertanto se U é una soluzione analitica di (1.3), abbiamo $U(x,t) = \sum_{|\nu|+j>0} U^{\nu,j} x^\nu t^j$.
Analogamente le ipotesi sui coefficienti ci permettono di scrivere

$$A_h(x,t) = \sum_{\alpha,k} A_h^{\alpha,k} x^\alpha t^k, \qquad h = 1, \dots, n,$$

$$B(x,t) = \sum_{\alpha,k} B^{\alpha,k} x^\alpha t^k \qquad F(x,t) = \sum_{\alpha,k} F^{\alpha,k} x^\alpha t^k.$$

Sostituendo abbiamo quindi l'equazione

$$\sum_{\nu,j} U^{\nu,j+1} x^\nu t^j = \sum_h \sum_{\alpha,k} \sum_{\nu,j} A_h^{\alpha,k} U^{\nu,j} x^{\alpha+\nu-e_h} t^{k+j} + \\ + \sum_{\alpha,k} \sum_{\nu,j} B^{\alpha,k} U^{\nu,j} x^{\alpha+\nu} t^{k+j} + \sum_{\alpha,k} F^{\alpha,k} x^\alpha t^k.$$

Abbiamo quindi che, per ogni ν, j con $j>0$, $U^{\nu,j}$ é un polinomio a coefficienti positivi nelle $A_h^{\alpha,k}$, $B^{\alpha,k}$, $F^{\alpha,k}$ e nei $U^{\nu,k}$ con $k<j$. Allora, per induzione, ogni $U^{\nu,j}$ é un polinomio a coefficienti positivi nelle $A_h^{\alpha,k}$, $B^{\alpha,k}$, $F^{\alpha,k}$.

Date $f = \sum_\alpha f^\alpha x^\alpha$, $g = \sum_\alpha g^\alpha x^\alpha$ due serie formali (in particolare due funzioni analitiche nell'intorno dell'origine) diremo che f *domina* g se

$$|g^\alpha| \le f^\alpha \qquad \forall \alpha. \tag{1.4}$$

Scriveremo allora $f >> g$. Nel caso in cui f, g siano vettori, o matrici, con $f >> g$ intenderemo che la (1.4) vale per ciascun componente di f, g.

Per le considerazioni precedenti, abbiamo che, se V é la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t V = \sum_{h=1}^n C_h \partial_{x_h} V + DV + G, \\ V(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

con

$$C_h >> A_h, \; D >> B, \; G >> F, \tag{1.6}$$

allora $V >> U$.

Cerchiamo allora di trovare C_h, D, G che soddisfano la (1.6) e tali che la soluzione V converga in un intorno dell'origine.

Ricordiamo che se $f = \sum_\alpha f^\alpha x^\alpha$ ha raggio di convergenza maggiore di r, esiste C tale che $|f^\alpha| < C r^{-|\alpha|}$ per ogni α. Consideriamo la funzione

$$g \doteq \frac{C}{1 - (x_1 + \cdots + x_n)/r},$$

abbiamo allora

$$g = C \sum_k \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{r} \right)^k = C \sum_k \frac{1}{r^k} \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha = C \sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha,$$

che é assolutamente convergente per $|x| < r/\sqrt{n}$, e che domina f, infatti

$$g^\alpha = C \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} \ge f^\alpha.$$

Siano allora r tale che A_h, B, F abbiano raggio di convergenza maggiore di r, e M_1, M_2 tali che $|A_h^{\nu,j} r^{|\nu|+j}| \le M_1$, $|B^{\nu,j} r^{|\nu|+j}| \le M_2$, $|F^{\nu,j} r^{|\nu|+j}| \le M_2$

per ogni h, ν, j. Indichiamo con Δ_1 e Δ_2 rispettivamente il vettore in $\mathbb{R}^N$ e la matrice $N \times N$ con tutte le componenti uguali a 1. Abbiamo allora

$$\frac{M_1}{1-(x_1+\cdots+x_n+t)/r'}\Delta_2 >> A_h$$

per $r' < r\sqrt{n+1}$, e quindi

$$\frac{M_1}{1-(x_1+\cdots+x_n+\rho t)/r'}\Delta_2 >> A_h$$

per $\rho > 1$, $r' < \frac{r}{\rho}\sqrt{n+1}$, e

$$\frac{M_2}{1-(x_1+\cdots+x_n+\rho t)/r'}\Delta_2 >> B,$$
$$\frac{M_2}{1-(x_1+\cdots+x_n+\rho t)/r'}\Delta_1 >> F.$$

Per dimostrare il teorema, facciamo allora vedere che esiste una soluzione analitica in un intorno dell'origine per il sistema (1.5) con

$$C_h \doteq \frac{M_1}{1-(x_1+\cdots+x_n+\rho t)/r'}\Delta_2,$$
$$D \doteq \frac{M_2}{1-(x_1+\cdots+x_n+\rho t)/r'}\Delta_2,$$
$$G \doteq \frac{M_2}{1-(x_1+\cdots+x_n+\rho t)/r'}\Delta_1.$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $V(x,t) = W(x_1+\cdots+x_n+\rho t)$. Ponendo $s \doteq x_1+\cdots+x_n+\rho t$ si tratta di risolvere l'equazione ordinaria

$$W'(s) = \frac{r'}{\rho}((1-s)I - M_1 n\Delta_2\rho^{-1})^{-1}M_2(\Delta_2 W(s)+\Delta_1),$$

che, se ρ é tale che $1 - M_1 nN\rho^{-1} > 0$, ha una soluzione (analitica) per $|s| < 1 - M_1 nN\rho^{-1}$. Abbiamo quindi per il sistema (1.5) una soluzione analitica in un intorno dell'origine della forma

$$\{(x,t) : \sum_h |x_h| + \rho|t| < 1 - MnN\rho^{-1}\}$$

per ρ abbastanza grande.

$\square$

Notiamo che il teorema puó essere riformulato nella seguente forma:

Teorema 1.2 (di Cauchy-Kovalevsky). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in $\Omega \times [-T,T]$. Supponiamo che i coefficienti di L siano analitici in $\Omega \times [-T,T]$.*

Se $F(x,t)$ é un in $\mathcal{A}(\Omega \times [-T,T])^N$, e $\Phi(x)$ in $\mathcal{A}(\Omega)^N$, allora esiste W intorno di $\Omega \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} L[U] = F \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

ha un'unica soluzione analitica in W.

In particolare, se il termine noto é analitico in $\mathbb{R}^{n+1}$, e il dato iniziale é analitico in $\mathbb{R}^n$, esiste una soluzione in un intorno di $\mathbb{R}^n_x$.

Il teorema di Cauchy-Kovalevsky ci garantisce quindi che esiste una soluzione analitica del problema (1.3) con un dominio di esistenza molto piccolo, che dipende dal raggio di analiticitá dei coefficienti, del termine noto e del dato iniziale, e dal modulo dei soli coefficienti. In particolare, se F e Φ sono analitici interi, il dominio di esistenza dipende solo da L.

Il teorema dice inoltre che esiste una sola soluzione analitica, ma non esclude l'esistenza di altre soluzioni meno regolari. Il risultato di unicitá puó essere peró facilmente migliorato, infatti il teorema di Holmgren afferma che non esistono altre soluzioni C^1.

Teorema 1.3 (di Holmgren). *Siano $D_\varepsilon \doteq \{(x,t) : |x|^2 + |t| < \varepsilon\}$, L un operatore differenziale del primo ordine a coefficienti analitici in D_ε.*

Esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni ε con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, se $U(x,t)$ é una funzione $C^1(D_\varepsilon)$ tale che

$$\begin{cases} L[U] = 0 \quad \text{in } D_\varepsilon \\ U \equiv 0 \quad \text{in } D_\varepsilon \cap \{t \le 0\}, \end{cases} \tag{1.7}$$

allora $U \equiv 0$ in D_ε.

Dimostrazione. Possiamo supporre che U sia nulla in $\{t \le |x|^2\}$. Infatti il cambio di variabili $x'_i = x_i$, $t' = t + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ trasforma $\{t \le 0\}$ in $\{t' \le |x'|^2\}$, e il problema trasformato soddisfa le stesse ipotesi del problema di partenza. Consideriamo l'operatore aggiunto ${}^tL$:

$${}^tL[U] \doteq (-1)\partial_t U + \sum_h (-1)\partial_h(A_h U) + BU.$$

L'operatore ${}^tL$ soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy-Kovalevsky. Pertanto, grazie alle considerazioni fatte al termine della dimostrazione, abbiamo che esiste $h_0 > 0$ tale che per ogni $h \in [0, h_0]$ il problema

$$\begin{cases} {}^tL[V] = 0 \\ V(x,h) = P(x), \end{cases} \tag{1.8}$$

ha una soluzione analitica in $G_h \doteq \{|x|^2 \le t \le h\}$ per ogni polinomio $P(x)$. Dalla (1.7) e dalla (1.8) segue

$$\int_{G_h} \big(U \cdot {}^tL[V] - V \cdot L[U]\big) dxdt = 0,$$

ma integrando per parti in t abbiamo

$$\int_{G_h} \big(U\cdot\ {}^tL[V] - V\cdot L[U]\big)dxdt = -\int_{\mathbb{R}^n} U(x,h)\cdot V(x,h)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} U(x,h)\cdot P(x)dx$$

e cioé

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x,h)\cdot P(x)dx = 0$$

per ogni polinomio $P(x)$, e quindi $U(x,h)$ é nulla per ogni $h \leq h_0$.

□

1.2 Il teorema di Ovciannikov

In questa sezione dimostreremo un'altra versione del teorema di Cauchy-Kovalevsky, che risulta essere in un certo senso piú generale, e che fornisce informazioni piú esplicite sul dominio di definizione della soluzione. Le tecniche adoperate permettono inoltre di ottenere risultati di unicitá piú generali del teorema di Holmgren.
In questa versione, estendiamo il problema ad un aperto di $\mathbb{C}^n$, estendendo olomorficamente i coefficienti, e cerchiamo soluzioni olomorfe (localmente) al problema con dato iniziale e termine noto olomorfo. Questa tecnica ricorrerá in altre dimostrazioni che vedremo piú avanti.

Consideriamo allora un operatore differenziale del primo ordine

$$L_z[U] \doteq \partial_t U - \sum_{h=1}^{n} A_h(z,t)\partial_{z_h} U - B(z,t)U \tag{1.9}$$

a coefficienti olomorfi nella variabile $z \in D$ dominio di $\mathbb{C}^n$. Vogliamo studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} L_z[U] = F \\ U(z,0) = \Phi(z), \end{cases} \tag{1.10}$$

in $D \times [0,T]$.
Dimostreremo il seguente teorema:

Teorema 1.4. *Sia L_z un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.9) definito in $D \times [0,T]$, con $D \doteq \{z \in \mathbb{C}^n : |x| < \alpha, |y| < \beta\}$. Supponiamo che i coefficienti di L_z, F siano in $L^1([0,T], \mathscr{H}(D))$, e Φ in $\mathscr{H}(D)$, e che esista $\Lambda(t) \in L^1(0,T)$ tale che*

$$\sum_h |A_h(z,t)| + |B(z,t)| + |F(z,t)| \leq \Lambda(t).$$

Se

$$e\int_0^T \Lambda < min(\alpha,\beta),$$

esiste $D_1 \subset D$ tale che il problema (1.10) ha un'unica soluzione U in $H^{1,1}([0,T],\mathscr{H}(D_1))$.
In particolare, $U \in H^{1,1}([0,t],\mathscr{H}(D_t))$,

$$D_t = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |x| < \alpha - \int_0^t \Lambda, |y| < \beta - \int_0^t \Lambda \right\}$$

per ogni $t \in [0,T]$.

Per dimostrare il teorema 1.4, ridurremo il problema (1.10) ad un problema di Cauchy "astratto", per cui vale il seguente teorema:

Teorema 1.5 (di Ovciannikov). *Sia $\{(X_s, \|\cdot\|_s\}_{0\le s\le \overline{s}}$ una famiglia di spazi di Banach tale che*

$$X_s \subset X_{s'}, \qquad \forall s < s'$$
$$\|x\|_{s'} \le \|x\|_s \quad \forall s < s',\ x \in X_s.$$

Definiamo $X \doteq \cup_s X_s$ con la topologia limite induttivo.
Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{U}'(t) = & F(t,\mathcal{U}(t)) \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}^{(0)} \in X_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

con $\mathcal{F} : [0,T] \times X \to X$ che soddisfa le seguenti ipotesi:

- *$\mathcal{F}$ é fortemente misurabile rispetto a t*
- *$\exists \Lambda(t) \in L^1(0,T)$ tale che per $s' > s$*

$$\|\mathcal{F}(t,x_2) - \mathcal{F}(t,x_1)\|_{s'} \le \frac{\Lambda(t)}{s'-s}\|x_2 - x_1\|_s$$

- *$\|\mathcal{F}(t,0)\|_0 \in L^1(0,T)$.*

Allora, se $\int_0^T \Lambda < \overline{s}/e$, esiste un'unica soluzione $\mathcal{U}$ in $H^{1,1}([0,T],X)$; in particolare, $\mathcal{U} \in H^{1,1}([0,t],X_s)$per ogni $s > e\int_0^t \Lambda$.
Inoltre, $\mathcal{U}$ é $C^1([0,T],X)$ se $\mathcal{F}$ é continua.

Dimostrazione del teorema 1.5. Questo teorema si dimostra con un ragionamento di punto fisso, come il teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza della soluzione per equazioni differenziali ordinarie in $\mathbb{R}$.
Il problema (1.11) é equivalente all'equazione integrale

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}^{(0)} + \int_0^t \mathcal{F}(\tau,\mathcal{U}(\tau))d\tau,$$

definiamo allora

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0(t) &\doteq \mathcal{U}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathcal{U}_n(t) &\doteq \mathcal{U}^{(0)} + \int_0^t \mathcal{F}(\tau,\mathcal{U}_{n-1}(\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Dimostriamo che per ogni n e per ogni $s \in [0, \overline{s}]$ vale la

$$\|\mathcal{U}_n(t) - \mathcal{U}_{n-1}(t)\|_s \leq \left(\frac{e\int_0^t \Lambda}{s}\right)^n \|\mathcal{U}^{(0)}\|_0 + \left(\frac{e\int_0^t \Lambda}{s}\right)^{n-1} \int_0^T \|\mathcal{F}(\tau, 0)\|_0 d\tau. \tag{1.12}$$

Per $n = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}_1(t) - \mathcal{U}_0(t)\|_s &\leq \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau, \mathcal{U}^{(0)})\|_s d\tau \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau, \mathcal{U}^{(0)}) - \mathcal{F}(\tau, 0)\|_s d\tau + \int_0^t \|\mathcal{F}(\tau, 0)\|_s d\tau \\
&\leq \frac{\int_0^t \Lambda}{s} \|\mathcal{U}^{(0)}\|_0 + \int_0^T \|\mathcal{F}(\tau, 0)\|_0 d\tau
\end{aligned}$$

per ogni s.
Per $n > 1$, definendo $s_i \doteq i\dfrac{s}{n}$ per $i = 0, \dots, n$ (quindi $s_n = s$, $s_0 = 0$), abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}_n(t) - \mathcal{U}_{n-1}(t)\|_s &\leq \int_0^t \|\mathcal{F}(t_1, \mathcal{U}_{n-1}(t_1)) - \mathcal{F}(t_1, \mathcal{U}_{n-2}(t_1))\|_s dt_1 \\
&\leq \frac{1}{s - s_{n-1}} \int_0^t \Lambda(t_1) \|\mathcal{U}_{n-1}(t_1) - \mathcal{U}_{n-2}(t_1)\|_{s_{n-1}} dt_1 \\
&= \frac{n}{s} \int_0^t \Lambda(t_1) \|\mathcal{U}_{n-1}(t_1) - \mathcal{U}_{n-2}(t_1)\|_{s_{n-1}} dt_1 \\
&\vdots \\
&\leq \left(\frac{n}{s}\right)^{n-1} \int_0^t \Lambda(t_1) \cdots \int_0^{t_{n-2}} \Lambda(t_{n-1}) \|\mathcal{U}_1(t_{n-1}) - \\
&\quad + \mathcal{U}_0(t_{n-1})\|_{s_1} dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&\leq \left(\frac{n}{s}\right)^{n-1} \int_0^t \Lambda(t_1) \cdots \int_0^{t_{n-2}} \Lambda(t_{n-1}) \int_0^{t_{n-1}} \Big[\Lambda(t_n) \frac{n}{s} \|\mathcal{U}^{(0)}\|_0 + \\
&+ \|\mathcal{F}(t_n, 0)\|_0\Big] dt_1 \dots dt_n \\
&\leq \left(\frac{n}{s}\right)^{n-1} \int_0^t \Lambda(t_1) \cdots \int_0^{t_{n-2}} \Lambda(t_{n-1}) \Big[\int_0^{t_{n-1}} \Lambda(t_n) \frac{n}{s} \|\mathcal{U}^{(0)}\|_0 dt_n \\
&+ \int_0^T \|\mathcal{F}(t_n, 0)\|_0 dt_n\Big] dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&\leq \left(\frac{\int_0^t \Lambda}{s}\right)^n \frac{n^n}{n!} \|\mathcal{U}^{(0)}\|_0 + \\
&\quad + \left(\frac{\int_0^t \Lambda}{s}\right)^{n-1} \frac{(n-1)^{(n-1)}}{(n-1)!} \int_0^T \|\mathcal{F}(\tau, 0)\|_0 d\tau. \\
&\leq \left(\frac{e\int_0^t \Lambda}{s}\right)^n \|\mathcal{U}^{(0)}\|_0 + \left(\frac{e\int_0^t \Lambda}{s}\right)^{n-1} \int_0^T \|\mathcal{F}(\tau, 0)\|_0 d\tau,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la formula di Stirling e la relazione

$$\int_0^t \Lambda(t_1)\cdots\int_0^{t_{n-2}}\Lambda(t_{n-1})\int_0^{t_{n-1}}\Lambda(t_n)dt_1\ldots dt_n = \left[\int_0^t \Lambda(s)ds\right]^n/n!,$$

che si dimostra per induzione.

Dalla (1.12) segue che, per ogni t, $\mathcal{U}_n(t)$ converge in X_s per ogni $s > e\int_0^t \Lambda$ a una $\mathcal{U}(t)$ che soddisfa la (1.11) in t. Dalla (1.12) segue inoltre che le $\mathcal{U}_n$ convergono uniformemente a $\mathcal{U}$ su $[0,T]$, e quindi $\mathcal{U}$ é continua. Dalla (1.11) abbiamo infine che $\mathcal{U} \in H^{1,1}$, C^1 se $\mathcal{F}$ é continua.

Per l'unicitá, se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono due soluzioni di (1.11), si dimostra come la (1.12) che

$$\|\mathcal{U}(t)-\mathcal{V}(t)\|_s \leq \left(\frac{e\int_0^t \Lambda}{s}\right)^n \sup_{0\leq\tau\leq t}\|\mathcal{U}(\tau)-\mathcal{V}(\tau)\|_0$$

per ogni n, e quindi $\|\mathcal{U}(t)-\mathcal{V}(t)\|_s = 0$. $\square$

Dimostrazione del teorema 1.4. Vogliamo ricondurre il sistema (1.10) a un problema del tipo (1.11). Definiamo allora gli spazi X_s. Poniamo $\delta \doteq min(\alpha,\beta)$, allora per ogni $s \in [0,\delta)$ definiamo

$$D_s \doteq \{z \in \mathbb{C}^n : |x| < \alpha - s, |y| < \beta - s\}$$

$$X_s \doteq \mathscr{H}(D_s)\cap C^0(\overline{D}_s), \quad \|F\|_s \doteq \sup_{z\in\Gamma_s}|F(z)|.$$

La famiglia $\{X_s\}_s$ soddisfa allora le ipotesi del teorema 1.5. Definiamo la funzione $\mathcal{F}$: se $t \in [0,T]$, $g = g(z) \in X$,

$$\mathcal{F}(t,g) \doteq \partial_t g - \sum_{h=1}^n A_h(z,t)\partial_{z_h}g - B(z,t)g - F(z,t).$$

Dimostriamo che $\mathcal{F} : [0,T]\times X \to X$ e che soddisfa le ipotesi del teorema 1.5. Dalla formula di Cauchy segue che, se $D_1 \subset\subset D_2$ sono due aperti in $\mathbb{C}^n$, e $d(D_1, D_2^c) > d$, la derivazione in un direzione ∂_{z_j} definisce un operatore lineare continuo da $\mathscr{H}(D_1)$ in $\mathscr{H}(D_2)$, di norma $\leq 1/d$.
Infatti se z é in D_1, dalla formula di Cauchy

$$|\partial_{z_j}f(z)| \leq \frac{1}{d}\sup_{|z_j-w_j|<d}|f(z_1,\ldots,z_{j-1},w_j,z_{j+1},\ldots,z_n)|,$$

e quindi

$$\sup_{z\in D_1}|\partial_{z_j}f| \leq \frac{1}{d}\sup_{z\in D_2}|f|.$$

Abbiamo allora che, per ogni t, $\mathcal{F}(t,\cdot)$ é un operatore lineare limitato da X_s in X_s' per ogni $s' > s$, di norma $\leq \dfrac{\Lambda(t)}{s'-s}$, abbiamo cioé

$$\|\mathcal{F}(t,x_2)-\mathcal{F}(t,x_1)\|_{s'} \leq \frac{\Lambda(t)}{s'-s}\|x_2-x_1\|_s,$$

per ogni $x_1, x_2 \in X_s$. Le altre condizioni richieste dal teorema 1.5 seguono immediatamente dal fatto che i coefficienti sono misurabili, e maggiorati da $\Lambda \in L^1$.

Inoltre $\mathcal{F}$ é continua se A_h, B, F sono continui in t.

Il teorema 1.5 ci garantisce allora l'esistenza di una soluzione U del problema (1.10) tale che U é olomorfa in $\{z \in \mathbb{C}^n : |x| < \alpha - e\int_0^t \Lambda, |y| < \beta - e\int_0^t \Lambda\}$, cioé la tesi del teorema 1.4. □

Dal teorema 1.4 segue la seguente versione del teorema di Cauchy-Kovalevsky:

Teorema 1.6. *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in $\Omega \times [-T, T]$. Supponiamo $A_h, B, F \in L^1([0,T], \mathcal{A}(\Omega))$ e $\Phi(x) \in \mathcal{A}(\Omega))$,*
allora esiste W intorno di Ω in $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ tale che il problema (1.3) ha un'unica soluzione in $H^{1,1}([0,T], \mathcal{A}(W))$, analitica in x.

Dimostrazione. Per ogni $K \subset\subset \Omega' \subset\subset \Omega$, esiste $\rho > 0$ tale che i coefficienti, il dato iniziale e il termine noto si estendono olomorficamente per $x \in \overline{\Omega}, |y| < \rho$. Il teorema 1.4 fornisce una soluzione olomorfa in $x \in K,\ |y| < \frac{\rho}{2},\ |t| < \varepsilon$ per $\varepsilon > 0$, che ristretta a $\mathbb{R}^n$ dá una soluzione analitica per $x \in K,\ |t| < \varepsilon$. In questo modo (grazie all'unicitá della soluzione di (1.10)) si definisce una soluzione in un intorno opportuno di Ω. □

Dal punto di vista dell'esistenza, il teorema 1.6 é piú generale del teorema 1.2: le ipotesi richieste per garantire l'esistenza di una soluzione sono molto piú deboli. Notiamo inoltre, che modificando leggermente la dimostrazione, possiamo riottenere esattamente il teorema 1.2. Possiamo dimostrare una versione "olomorfa" del teorema 1.5, cioé per t variabile complessa in $\{t \in \mathbb{C} : |t| \leq T\}$, e ottenere che, se $\mathcal{F}$ é continua, la soluzione é C^1 in t, cioé olomorfa. Abbiamo allora una soluzione olomorfa in tutte le variabili per il problema (1.10), e quindi la sua restrizione é analitica anche nella variabile t.

Questa dimostrazione del teorema di Cauchy-Kovalevsky non é quindi meno potente della precedente; in piú, ha il vantaggio di esibire chiaramente il dominio di esistenza della soluzione.
Abbiamo infatti che, se i coefficienti, il termine noto e il dato iniziale si estendono a funzioni olomorfe in $\{z \in \mathbb{C}^n : z \in \Omega, |y| < \rho\}$, maggiorate da $\Lambda(t) \in L^1$, la soluzione é analitica in x in $\{(x,t) : d(x, \Omega^c) > e\int_0^t \Lambda\}$ per ogni t tale che $e\int_0^t \Lambda < \rho$. Se in particolare i coefficienti, il termine noto e il dato iniziale sono continui in t, abbiamo una soluzione in

$$\left\{(x,t) : d(x, \Omega^c) > \frac{\rho}{2M}, |t| < \frac{\rho}{2M}\right\}$$

per una costante M che dipende dall'operatore.

Notiamo inoltre che dal teorema 1.5 segue un analogo del teorema 1.4 per i funzionali olomorfi, che utilizzeremo piú avanti:

Teorema 1.7. *Sia L_z un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.9) definito in $D \times [0,T]$, con $D \doteq \{z \in \mathbb{C}^n : |x| < \alpha, |y| < \beta\}$, $\alpha, \beta \in (0, \infty]$. Supponiamo che i coefficienti di L_z siano olomorfi in z e misurabili in t, e che esista $\Lambda(t) \in L^1(0,T)$ tale che*

$$\sum_h |A_h(z,t)| + |B(z,t)| \leq \Lambda(t). \tag{1.13}$$

Se $\Phi \in \mathscr{H}'(K)$, $F \in L^1([0,T], \mathscr{H}'(K))$, $K \subset\subset D$, e $d(K, D^c) > e\int_0^T \Lambda$, esiste $K_1 \subset D$ tale che il problema (1.10) ha un'unica soluzione

$$U \in H^{1,1}([0,T], \mathscr{H}'(K_1)).$$

In particolare, $U \in H^{1,1}([0,t], \mathscr{H}(K_t))$, $K_t = \{z \in \mathbb{C}^n : d(z,K) \leq e\int_0^t \Lambda\}$ per ogni $t \in [0,T]$.

La dimostrazione é identica a quella del teorema 1.4, si definiscono gli spazi X_s come

$$X_s \doteq \mathscr{H}'(\{z \in \mathbb{C}^n : d(z,K) \leq s\}),$$

e utilizzando la formula di Cauchy per i funzionali olomorfi si dimostra che sono soddisfatte le ipotesi del teorema 1.5.

Notiamo che in particolare il teorema precedente vale per $D = \mathbb{C}^n$. Abbiamo cioé:

Sia L_z é un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.9) definito in $\mathbb{C}^n \times [0,T]$, a coefficienti olomorfi in z e misurabili in t, e che soddisfa la (1.13) in $\mathbb{C}^n \times [0,T]$.
Se $\Phi \in \mathscr{H}'$, $F \in L^1([0,T], \mathscr{H}')$, il problema (1.10) ha un'unica soluzione U in $H^{1,1}([0,T], \mathscr{H}')$.
Se $\Phi \in \mathscr{H}$, $F \in L^1([0,T], \mathscr{H})$, il problema (1.10) ha un'unica soluzione U in $H^{1,1}([0,T], \mathscr{H})$.

1.3 Il teorema di Mizohata

Il teorema di Cauchy-Kovalevsky é un risultato locale: fornisce una soluzione al problema di Cauchy in un intorno che dipende dal termine noto e dal dato iniziale, oltre che dall'operatore considerato. Da qui in avanti ci occuperemo invece di risultati globali, vedremo cioé sotto quali ipotesi il problema di Cauchy con dato iniziale e termine noto analitici ha una soluzione analitica, definita in un dominio che dipende solo dall'operatore. L'ipotesi chiave per ottenere questo risultato é che l'operatore sia iperbolico (anche solo debolmente). Il primo risultato che presentiamo é il teorema di Mizohata, che richiede l'iperbolicitá stretta.

Definiamo cosa vuol dire per un sistema essere strettamente o uniformemente iperbolico:

Definizione. *Un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) si dice*

- strettamente iperbolico *se gli autovalori della matrice* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$ *sono reali e distinti per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$
- debolmente iperbolico *se gli autovalori della matrice* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$ *sono reali per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *(ma non necessariamente distinti)*
- uniformemente iperbolico *se é strettamente iperbolico e, indicati con* $\lambda_1(x,t,\xi),\dots,\lambda_n(x,t,\xi)$ *gli autovalori della matrice* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$*, con* $\xi \in \mathbb{R}^n$*, si ha*

$$\inf_{i\neq j} |\lambda_i(x,t,\xi) - \lambda_j(x,t,\xi)| \geq \delta > 0, \quad \forall x,\ t,\ |\xi| = 1.$$

Teorema 1.8 (di Mizohata). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in $\Omega \times [0,T]$. Supponiamo che L sia strettamente iperbolico e che i coefficienti di L siano analitici in un intorno di $\overline{\Omega} \times [0,T]$. Supponiamo*

$$\sup_{|\xi|=1,(x,t),j} |\lambda_j(x,t,\xi)| \leq \lambda.$$

Allora il problema

$$\begin{cases} L[U] = F \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{1.14}$$

con F e Φ analitici, ha un'unica soluzione analitica nel cono

$$C_T \doteq \Big\{(x,t) : d(x,\Omega^c) > \lambda t, \quad t \in [0,T]\Big\}.$$

La dimostrazione del teorema di Mizohata utilizza principalmente due strumenti: l'esistenza di una soluzione globale per il problema di Cauchy con coefficienti, termine noto e dato iniziale analitici interi (una delle versioni del teorema di Cauchy-Kovalevsky del paragrafo precedente), e la validitá di *stime a priori* per le (eventuali) soluzioni di problemi iperbolici.

Il teorema di Mizohata é valido anche nel caso in cui l'operatore L sia simmetrico (e non necessariamente iperbolico), per un certo λ che dipende dai coefficienti di L. Vediamo allora prima la dimostrazione di questo caso, piú semplice di quello iperbolico.

1.3.1 Sistemi simmetrici

Enunciamo il teorema di Mizohata nel caso dei sistemi simmetrici.

Teorema 1.9 (di Mizohata). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in $\Omega \times [0,T]$. Supponiamo che i coefficienti di L siano analitici in un intorno di $\overline{\Omega} \times [0,T]$, e le matrici A_h siano hermitiane. Esiste allora $\lambda > 0$ tale che il problema*

$$\begin{cases} L[U] = F, \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{1.15}$$

ha un'unica soluzione analitica nel cono

$$C_T \doteq \Big\{(x,t) : d(x,\Omega^c) > \lambda t, \quad t \in [0,T]\Big\}$$

per ogni F Φ analitici.

Vediamo prima come si ricavano le stime a priori necessarie per dimostrare questo teorema.

Supponiamo per semplicitá $n = 1$ (il caso generale é assolutamente analogo). Sia U una soluzione in $C^1(\Omega \times [0,T])$ del problema

$$\begin{cases} \partial_t U = A(x,t)\partial_x U + B(x,t)U + F(x,t) \\ \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{1.16}$$

con $A \in C^1$, hermitiana.
Sia $R(t)$ un tronco di cono in $\Omega \times [0,t]$ con asse di simmetria parallelo all'asse t, base nel piano $\{t = 0\}$, e indichiamo con $D(\tau)$ la sua sezione al tempo τ.
Dalla (1.16) abbiamo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{R(t)} \partial_t |U|^2 dxdt &= \int_{R(t)} (\partial_t U, U) dxdt = \\ &= \int_{R(t)} (AU,U)dxdt + \int_{R(t)} (BU,U)dxdt + \int_{R(t)} (F,U)dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_{R(t)} \partial_x (AU,U)dxdt - \frac{1}{2}\int_{R(t)} (A_x U,U) + \\ &\quad + \int_{R(t)} (BU,U)dxdt + \int_{R(t)} (F,U)dxdt. \end{aligned}$$

Indichiamo con $\Gamma(t)$ la superficie laterale di $R(t)$, e con $\nu = (\nu_x, \nu_t)$ la sua normale esterna. Abbiamo allora:

$$\int_{D(t)} |U|^2 - \int_{D(0)} |U|^2 + \int_{\Gamma(t)} |U|^2 \nu_t - \int_{\Gamma(t)} (AU,U)\nu_x =$$
$$- \int_{R(t)} (A_x U,U) + 2\int_{R(t)} (BU,U) + 2\int_{R(t)} (F,U).$$

Fissata la base $D(0)$ del cono, possiamo scegliere la pendenza in modo che sia

$$\int_{\Gamma(t)} |U|^2 \nu_t - \int_{\Gamma(t)} (AU,U)\nu_x \geq 0.$$

Infatti, se $C = sup_{D(0)\times[0,T]}|A(x,t)|$ e $C|\nu_x| \leq \nu_t$, abbiamo

$$|(AU,U)\nu_x| \geq |U|^2.$$

Fissata cosí la pendenza di $R(t)$ abbiamo allora

$$\int_{D(t)} |U|^2 \leq \int_{D(0)} |U|^2 + M \int_{R(t)} |U|^2 + \int_{R(t)} |F|^2,$$

con $M \doteq \sup_{R(t)}(|A| + 2|B|) + 1$, e dal lemma di Gronwall infine

$$\int_{D(t)} |U|^2 dx \leq K e^{Mt} \Big(\int_{D(0)} |\Phi|^2 dx + \int_{R(t)} |F|^2 dx d\tau \Big), \tag{1.17}$$

con la costante K che dipende dai coefficienti dell'operatore.
Se i coefficienti sono limitati su $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\{t\}} |U|^2 dx \leq K e^{Mt} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n\times[0,T]} |F|^2 dx d\tau \Big). \tag{1.18}$$

L'ultima stima si dimostra in maniera piú facile nel caso in cui si supponga U a supporto compatto. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}
\partial_t \|U(t)\|_2 &= \sum_h 2(A_h \partial_h U, U)_{L^2} + 2\mathrm{Re}(BU,U)_{L^2} + \mathrm{Re}(F,U)_{L^2} \\
&= \sum_h 2(\partial_h A_h U, U)_{L^2} + 2\mathrm{Re}(BU,U)_{L^2} + 2\mathrm{Re}(F,U)_{L^2} \\
&\leq \gamma \|U(t)\|^2 + 2\|F(t)\|\|U(t)\|, \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

dai cui segue, grazie al lemma di Gronwall, una stima analoga alla (1.18).

Facciamo una osservazione importante sulla (1.17). Dalla (1.17) segue in particolare che se Φ, F sono nulle rispettivamente in $D(0), R(t)$, allora U é nulla in $R(t)$. Siamo cioé in grado di individuare il *dominio di dipendenza* della soluzione: il valore della soluzione in un punto (x,t) dipende dal valore di Φ e F solo in un cono con vertice in (x,t) e base in $\{t = 0\}$, la cui pendenza dipende dai coefficienti; possiamo cioé modificare a piacimento il termine noto e il dato iniziale fuori da questo cono, e la soluzione non cambia in (x,t). In maniera equivalente, il valore di Φ e F influenza la soluzione solo all'interno di un cono nel futuro.

Supponendo tutte le funzioni C^∞, derivando l'equazione e integrando su $R(t)$ come fatto precedentemente, si ottengono analoghe stime per le derivate di una eventuale soluzione C^∞ del problema (1.16). In particolare, se i coefficienti sono a supporto compatto in $R(t)$, per ogni α esiste K tale che

$$\int_{D(t)} |\partial^\alpha U|^2 dx \leq K \Big[\sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \int_{D(0)} |\partial^\beta \Phi|^2 dx + \int_{R(T)} |\partial^\beta F|^2 dx d\tau \Big],$$

con K che dipende da T, α e dai coefficienti.

Le stime a priori sull'energia permettono di dimostrare il seguente risultato:

Teorema 1.10 (di Friedrichs). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in $\Omega \times [0,T]$. Supponiamo che i coefficienti di L siano in $C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$, e che $A_h = A_h^*$ per ogni h.*
Esiste allora $\lambda > 0$ tale che il problema

$$\begin{cases} L[U] = F, \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{1.20}$$

ha un'unica soluzione C^∞ nel cono

$$C_T \doteq \{(x,t) : d(x,\Omega^c) > \lambda t, \quad t \in [0,T]\}$$

per ogni (F,Φ) in C^∞.

Il teorema 1.10 si dimostra approssimando il termine noto e il dato iniziale con funzioni olomorfe, e considerando il relativo problema di Cauchy. Dal teorema 1.4 sappiamo che questi problemi hanno una soluzione locale olomorfa. Si utilizzano allora le stime dell'energia (e il lemma di Sobolev) per mostrare che dalla famiglia di soluzioni cosí ottenute si puó estrarre una successione convergente in C^∞ ad una soluzione del problema (1.20).

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema 1.9.

Dimostrazione del teorema 1.9. Supponiamo per semplicitá $F = 0$. Vogliamo dimostrare che la soluzione $U(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} L[U] = 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{1.21}$$

(che esiste ed é C^∞ grazie al teorema 1.12) é analitica in ogni punto del cono C_T.
Fissiamo allora (x_0,t_0) in C_T. Indichiamo con $C_{(x_0,t_0)}$ il cono "di pendenza λ" con vertice in (x_0,t_0), e fissiamo un intorno D di $C_{(x_0,t_0)}$ in C_T della forma $\{(x,t) : d(x,x_0) < r - \lambda t + \delta, \quad t \in [0, r/\lambda]\}$. Se modifichiamo i coefficienti e il dato iniziale in modo che restino invariati in D, abbiamo che la soluzione U non viene modificata in un intorno di (x_0,t_0). Utilizzeremo questo fatto per definire una famiglia di funzioni $V_0, \ldots, V_i, \ldots, V_{i_1,\ldots,i_m}, \ldots$ che coincidono con le derivate di U in D, e che soddisfano una stima di analiticitá.

Scegliamo una funzione $\alpha(x,t)$, C^∞ e a supporto compatto in C_T, e che vale identicamente 1 in un intorno di D.
Definiamo V_0 come la soluzione di

$$\begin{cases} L[V_0] = 0 \\ V_0(x,0) = \alpha(x,0)\Phi(x). \end{cases}$$

Allora V_0 é una funzione C^∞ e coincide con U in un intorno di D. Derivando l'equazione $L[U] = 0$ rispetto a x_i otteniamo

$$L[\partial_i U] - \sum_h (\partial_i A_h)\partial_h U - (\partial_i B)U = 0. \tag{1.22}$$

Definiamo pertanto le V_i attraverso il sistema

$$\begin{cases} L[V_i] - \sum_h \alpha(x,t)(\partial_i A_h)V_h = \alpha(x,t)(\partial_i B)V_0 \quad i = 1,\ldots,n, \\ V_i(x,0) = \alpha(x,0)\partial_i \Phi(x). \end{cases} \tag{1.23}$$

Questo sistema ha un'unica soluzione C^∞ in C_T, e chiaramente le V_1 coincidono con le derivate prime di U nell'intorno di D in cui $\alpha = 1$.
Derivando due volte abbiamo invece:

$$L[\partial_i\partial_j U] - \sum_h (\partial_j A_h)\partial_i\partial_h U - \sum_h (\partial_i A_h)\partial_j\partial_h U - \sum_h (\partial_i\partial_j A_h)\partial_h U - \\ +(\partial_i B)\partial_j U - (\partial_j B)\partial_i U = 0,$$

definiamo allora le V_{ij} come le soluzioni di

$$\begin{cases} L[V_{ij}] - \sum_h \alpha\cdot(\partial_j A_h)V_{ij} - \sum_h \alpha\cdot(\partial_i A_h)V_{ij} = \\ = \alpha\cdot\big(\sum_h (\partial_i\partial_j A_h)V_h - (\partial_i B)V_j - (\partial_j B)V_i\big) \\ \\ V_{ij}(x,0) = \alpha(x,0)\partial_i\partial_j\Phi(x) \quad i,j = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{1.24}$$

Analogamente, supponendo definite le $V_{i_1,\ldots,i_{m-1}}$, si definiscono le $V_{i_1,\ldots,i_m}$ come le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} L[V_{i_1,\ldots,i_m}] - \sum_h \sum_{1\le p\le m} \alpha\cdot(\partial_{i_p}A_h)V_{i_1,\ldots,\widehat{i}_p,\ldots,i_m,h} = \\ = \alpha\cdot\big(\sum_h\sum_{p,q}(\partial_{i_p}\partial_{i_q}A_h)V_{i_1,\ldots,\widehat{i}_p,\ldots,\widehat{i}_q,\ldots,i_m,h} + \ldots + \sum_h(\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}A_h)V_h + \\ + \sum_p(\partial_{i_p}B)V_{i_1,\ldots,\widehat{i}_p,\ldots,i_m,h} + \ldots + (\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}B)V_0 \\ \\ V_{i_1,\ldots,i_m}(x,0) = \alpha(x,0)\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}\Phi(x). \end{cases} \tag{1.25}$$

Abbiamo quindi che per ogni m, il vettore $(V_{i_1,\ldots,i_m})_{i_1,\ldots,i_m}$ é soluzione di un problema

$$\begin{cases} L'[(V_{i_1,\ldots,i_m})_{i_1,\ldots,i_m}] = F', \\ (V_{i_1,\ldots,i_m}(x,0))_{i_1,\ldots,i_m} = (\alpha(x,0)\partial_{i_1,\ldots,i_m}\Phi(x))_{i_1,\ldots,i_m}, \end{cases} \tag{1.26}$$

con L' operatore differenziale del primo ordine simmetrico.

Definiamo allora la funzione

$$\psi_m(t) \doteq \sum_{i_1,\ldots,i_m} \|V_{i_1,\ldots,i_m}\|, \tag{1.27}$$

con $\|\cdot\|$ la norma L^2 in $\mathbb{R}^n$.
Dall'ipotesi di analiticitá del dato iniziale segue che

$$\psi_m(0) = \sum_{i_1,\cdots,i_m} \|\alpha(x,0)\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}\Phi\| \le A\frac{m!n^m}{\rho^m}$$

per opportune costanti. Utilizzando le stime per l'energia ricavate precedentemente (in questo caso é sufficiente utilizzare la (1.19)) dimostriamo per induzione che

$$\psi_m(t) \leq e^{(\gamma+mn\gamma_1)t}(c_0 n)^m (1+t)^m \frac{m!}{\rho^m} A, \tag{1.28}$$

per opportune costanti (γ é la stessa della (1.19)).
Ricordiamo che se A é una matrice in L^∞ e U un vettore L^2 , $\|MU\| \leq \sigma \|M\|_\infty \|U\|_2$ con σ che dipende solo da N, n. L'ipotesi di analiticitá dei coefficienti ci permette inoltre di scrivere

$$\|\alpha \partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} A_h\|_\infty \leq \frac{(p-1)!}{\rho^{p-1}} K,$$

$$\|\alpha \partial_{i_1} \dots \partial_{i_p} B\|_\infty \leq \frac{p!}{\rho^p} K.$$

Poniamo $\gamma_1 \doteq \sigma K$, possiamo chiaramente supporre che sia $\gamma_1 > 1$.
Per $m = 0$ la (1.28) segue immediatamente dalla (1.19).
Prima di dimostrare il passo induttivo, vediamo cosa succede per $m = 1, 2$. Le V_i soddisfano il sitema (1.23), e quindi, ponendo $F_i \doteq \sum_h \alpha(\partial_i A_h) V_h + \alpha(\partial_i B) V_0$ abbiamo, grazie alla (1.19),

$$\begin{aligned} \partial_t \|V_i(t)\| &\leq \gamma \|V_i(t)\| + \|F_i(t)\| \\ &\leq \gamma \|V_i(t)\| + \sigma \sum_h \|\alpha \partial_i A_h\|_\infty \|V_k(t)\| + \sigma \|\alpha \partial_i B\|_\infty \|V_0(t)\| \\ &\leq \gamma \|V_i(t)\| + \gamma_1 \sum_h \|V_k(t)\| + \frac{\gamma_1}{\rho} \|V_0(t)\|. \end{aligned}$$

Sommando su i abbiamo

$$\psi_1'(t) \leq (\gamma + n\gamma_1)\psi_1(t) + \frac{n\gamma_1}{\rho}\psi_0(t),$$

e grazie al lemma di Gronwall abbiamo la (1.28) per $m = 1$.
Allo stesso modo, per $m = 2$,

$$\begin{aligned} \partial_t \|V_{ij}(t)\| \leq\ & \gamma \|V_{ij}(t)\| + \gamma_1 \left(\sum_h \|V_{jh}(t)\| + \|V_{ih}(t)\| \right) + \\ +\ & \frac{\gamma_1}{\rho} \left(\sum_h \|V_h(t)\| + \|V_j(t)\| \|V_i(t)\| \right) + \gamma_1 \frac{2!}{\rho^2} \|V_0(t)\|, \end{aligned}$$

e sommando su i, j,

$$\psi_2'(t) \leq (\gamma + 2n\gamma_1)\psi_2(t) + \frac{\gamma_1}{\rho}(n^2 + n)\psi_1(t) + \gamma_1 \frac{2!}{\rho^2} n^2 \psi_0(t).$$

Per il caso generale abbiamo

$$\begin{aligned}
\partial_t \|V_{i_1,\dots,i_m}(t)\| &\leq \gamma \|V_{i_1,\dots,i_m}(t)\| + \gamma_1 \sum_{h,p} \|V_{i_1,\dots,\widehat{i}_p,\dots,i_m,h}(t)\| + \\
&+ \frac{\gamma_1}{\rho} \sum_{h,p,q} \|V_{i_1,\dots,\widehat{i}_p,\dots,\widehat{i}_q,\dots,i_m,h}(t)\| + \\
&+ \gamma_1 \frac{2!}{\rho^2} \sum_{h,p,q,r} \|V_{i_1,\dots,\widehat{i}_p,\dots,\widehat{i}_q,\dots,\widehat{i}_r,\dots,i_m,h}(t)\| + \\
&+ \dots + \gamma_1 \frac{(m-1)!}{\rho^{m-1}} \sum_h \|V_h\| + \\
&+ \frac{\gamma_1}{\rho} \sum_p \|V_{i_1,\dots,\widehat{i}_p,\dots,i_m,}(t)\| + \dots + \gamma_1 \frac{m!}{\rho^m} \|V_0(t)\|,
\end{aligned}$$

che dá, sommando,

$$\psi'_m(t) \leq \gamma \psi_m(t) + mn\gamma_1 \psi_m(t) + \gamma_1 \sum_p \left(\binom{m}{p+1} n + \binom{m}{p} \right) n^p \frac{p!}{\rho^p} \psi_{m-p}(t).$$

Utilizzando il lemma di Gronwall e l'ipotesi induttiva, abbiamo allora

$$\psi_m(t) \quad \leq \quad \frac{m^m m!}{\rho^m} A \left[1 + \gamma_1 (m+1) \sum_p c_0^{m-p} \left((1+t)^{m-p+1} - 1 \right) \right] e^{(\gamma + mn\gamma_1)t},$$

che dá la (1.28), ponendo $c_0 = 2\gamma_1(m+1)$.

La (1.28) implica

$$\sum_{i_1,\dots,i_m} \|V_{i_1,\dots,i_m}(\cdot,t)\|_2 \leq \frac{m!}{\rho_1^m} A_1,$$

per ogni $t \in [0,T]$.
Grazie al lemma di Sobolev, abbiamo infine che se (x,t) appartiene a un intorno sufficientemente piccolo di (x_0,t_0),

$$\sum_{i_1,\dots,i_m} |V_{i_1,\dots,i_m}(x,t)| \leq C \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \\ |\nu| \leq [n/2]+1}} \|\partial^\nu V_{i_1,\dots,i_m}(\cdot,t)\|_2 \leq C \frac{((m+[n/2]+1)!)}{\rho_1^{m+[n/2]+1}} A_1,$$

e quindi U é analitica in tale intorno. $\square$

1.3.2 Sistemi strettamente iperbolici

Nel caso dei sistemi iperbolici non simmetrici, é piú complicato ricavare le stime a priori necessarie per dimostrare il teorema di Mizohata. Noi utilizzeremo gli operatori pseudodifferenziali. L'idea comunque é che, anche se la parte principale dell'operatore L non é simmetrica, l'ipotesi di iperbolicitá ci garantisce che essa é simmetrizzabile, e questo ci permette di operare in maniera simile al caso simmetrico. Vediamo come.

Esattamente, se U é una funzione C^1 che soddisfa l'equazione

$$L[U] = F,$$

e l'operatore L é strettamente iperbolico, dimostriamo che per ogni $t \in [0, T]$ esiste una norma $|||\cdot|||$ equivalente alla norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ (uniformemente in t), e una costante γ, tale che

$$\partial_t |||W|||_t \leq \gamma |||W|||_t + |||F|||_t. \tag{1.29}$$

Per dimostrare la (1.29), consideriamo l'operatore pseudodifferenziale matriciale $\mathscr{H}$ con simbolo

$$\sigma(\mathscr{H}) = \sum_h A_h \frac{\xi_h}{(1 + |\xi|^2)^{1/2}};$$

l'equazione si scrive allora nella forma

$$\partial_t U - i\mathscr{H}\Lambda U - BU = F, \tag{1.30}$$

in cui indichiamo con Λ l'operatore pseudodifferenziale con simbolo

$$\sigma(\Lambda) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$$

L'ipotesi di iperbolicitá garantisce l'esistenza di una matrice $N(x, t, \xi)$ tale che

$$N\sigma(\mathscr{H}) = DN,$$

con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1(x,t,\xi) & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n(x,t,\xi) \end{pmatrix},$$

e quindi, definendo $\mathscr{N} \doteq Op(N)$, $\mathscr{D} \doteq Op(D)$, abbiamo che

$$\mathscr{N}\mathscr{H}\Lambda \equiv \mathscr{D}\mathscr{N}\Lambda \text{ (modulo operatori limitati in } L^2).$$

Dalla (1.14) e dalla (1.30) segue che

$$\partial_t(\mathscr{N}U) - i\mathscr{N}\mathscr{H}\Lambda U - \mathscr{N}BU - \partial_t\mathscr{N}U = \mathscr{N}F.$$

Siccome $\mathscr{N}\mathscr{H}\Lambda \equiv \mathscr{D}\mathscr{N}\Lambda \equiv \mathscr{D}\Lambda\mathscr{N}$ modulo operatori limitati in L^2, e $\partial_t\mathscr{N}$ é limitato, possiamo riscrivere l'equazione precedente nella forma

$$\partial_t(\mathscr{N}U) - i\mathscr{D}\Lambda\mathscr{N}U - \mathscr{B}U = \mathscr{N}F,$$

con $\mathscr{B}$ limitato, e quindi, ponendo $V \doteq \mathscr{N} U$, abbiamo

$$\partial_t V - i\mathscr{D}\Lambda V - \mathscr{B} U = \mathscr{N} F. \tag{1.31}$$

Ricordiamo che la matrice $D = \sigma(\mathscr{D})$ é diagonale (e i coefficienti diversi da zero sono gli autovalori di $\sum_h A_h(x,t)\xi_h/(1+|\xi|^2)^{1/2}$).
Supponiamo di avere una $V \in C^1$ soluzione di (1.31). Abbiamo allora

$$\partial_t(V,V) = -i((\mathscr{D}\Lambda - \Lambda\mathscr{D}^*)V, V) + 2\mathrm{Re}(\mathscr{N} F + \mathscr{B} U, V).$$

Ma $D = D^*$, e quindi $\Lambda\mathscr{D}^* \equiv \Lambda Op(D^*) = \Lambda Op(D) = \Lambda\mathscr{D} \equiv \mathscr{D}\Lambda$, cioé $\mathscr{D}\Lambda - \Lambda\mathscr{D}$ limitato. Abbiamo quindi

$$\partial_t\|V\| \leq \gamma_1\|V\| + \gamma_2\|U\| + \|\mathscr{N} F\|. \tag{1.32}$$

Al secondo membro compare ancora U. Utilizziamo allora il fatto che per β sufficientemente grande

$$\|\mathscr{N} U\|_2 + \beta\|(\Lambda+1)^{-1}U\|_2 \geq c\|U\|_2 \tag{1.33}$$

per ogni $U \in L^2$, con $c > 0$. La regolaritá di $\mathscr{N}(t)$ ci permette di scegliere β, c tale che la (1.33) valga per ogni t. Definiamo quindi

$$|||U||| \doteq \|\mathscr{N} U\|_2 + \beta\|(\Lambda+1)^{-1}U\|_2, \tag{1.34}$$

$|||\cdot|||$ é una norma equivalente a $\|\cdot\|_2$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, uniformemente in t.
Dalla (1.30)

$$\partial_t(\Lambda+1)^{-1}U = i(\Lambda+1)^{-1}\mathscr{H}\Lambda U + (\Lambda+1)^{-1}BU + (\Lambda+1)^{-1}F,$$

ma $(\Lambda+1)^{-1}\mathscr{H}\Lambda \equiv (\Lambda+1)^{-1}\Lambda\mathscr{H}$, e quindi $(\Lambda+1)^{-1}\mathscr{H}\Lambda$ é un operatore limitato in L^2. Abbiamo allora

$$\partial_t\|(\Lambda+1)^{-1}U\| \leq \gamma_3\|U\| + \|(\lambda+1)^{-1}F\|. \tag{1.35}$$

Dalle (1.32), (1.35) segue infine

$$\partial_t|||U||| \leq \gamma|||U||| + |||F|||. \tag{1.36}$$

In particolare, dal lemma di Gronwall:

$$|||U(t)||| \leq e^{\gamma t}|||U(0)||| + \int_0^t e^{\gamma(t-s)}|||F(s)|||ds. \tag{1.37}$$

Notiamo che se l'operatore é simmetrico, basta prendere come N l'identitá e $\beta = 0$, otteniamo cioé la (1.36) con $|||\cdot||| = \|\cdot\|$, ovvero la (1.19) dimostrata precedentemente.

Abbiamo cosí ottenuto una stima analoga a quelle dimostrate nel caso simmetrico. In questo caso, peró, le stime ottenute non ci permettono di ricavare risultati sul dominio di dipendenza della soluzione. Si tratta di un inconveniente naturale, visto che nella dimostrazione abbiamo utilizzato operatori pseudodifferenziali, che non sono locali, ma solo pseudolocali.

Nel caso degli operatori iperbolici, si dimostra comunque con altri strumenti il seguente risultato, per la cui dimostrazione si rimanda al libro di Mizohata:

Teorema 1.11 (Dominio di dipendenza). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2), regolarmente iperbolico e a coefficienti analitici in un intorno di $\overline{\Omega} \times [0,T]$, e sia λ definita come nel teorema 1.8.*
Se U é una soluzione C^1 di

$$\begin{cases} L[U] = F \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

allora $U(x_0, t_0) = 0$ se $F = 0$ in $\{(x,t) : |x - x_0| \leq \lambda|t - t_0|\}$, $\Phi = 0$ in $\{(x,t) : |x - x_0| \leq \lambda t_0\}$.
Lo stesso risultato vale se $U = (U_1, \ldots, U_m)$ é soluzione di

$$\begin{cases} L[U_1] + \sum_j C_{1j} U_j = F_1 \\ \vdots \\ L[U_m] + \sum_j C_{mj} U_j = F_m \\ U_i(x,0) = \Phi_i(x) \quad \forall i. \end{cases}$$

Analogamente al caso precedente si dimostra l'esistenza di soluzioni C^∞:

Teorema 1.12 (di Petrowski). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in $\Omega \times [0,T]$. Supponiamo che L sia strettamente iperbolico (simmetrico) e che i coefficienti di L siano in $C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$.*
Alllora il problema

$$\begin{cases} L[U] = F \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

ha un'unica soluzione C^∞ nel cono

$$C_T \doteq \{(x,t) : d(x, \Omega^c) > \lambda t, \quad t \in [0,T]\}$$

per ogni (F, Φ) in C^∞, con λ definito come nel teorema 1.8.

A questo punto, abbiamo tutti gli strumenti necessari per la dimostrazione del teorema 1.8. Il procedimento é identico a quello utilizzato nel caso simmetrico, si definiscono le funzioni ψ_m utilizzando la norma $||| \cdot |||$ al posto della norma L^2. Facciamo solo notare che in questo caso gli operatori utilizzati per definire le $V_{i_1,\ldots,i_m}$ non sono strettamente iperbolici. La loro parte principale é infatti diagonale a blocchi, e ogni blocco é dato dalla parte principale dell'operatore L, per cui restano validi la stima dell'energia e il risultato sul dominio di dipendenza.

Considerazione finale Abbiamo visto nella dimostrazione come il teorema di Friedrichs si applica in particolare al sistema (1.14), e garantisce l'esistenza di una soluzione (C^∞). Il teorema di Mizohata appare pertanto come un teorema di regolaritá piú che di esistenza: sappiamo giá che esiste una soluzione, dobbiamo solo dimostrare che é analitica. Nel prossimo capitolo daremo una dimostrazione indipendente dal teorema di Friedrichs. Nel seguito di questo capitolo vedremo invece come valgono risultati analoghi al teorema di Mizohata anche in casi in cui non é valido il teorema di Friedrichs (ci riferiamo ai sistemi debolmente iperbolici).

1.4 Sistemi debolmente iperbolici

Il teorema di Bony-Schapira afferma l'esistenza di una soluzione globale analitica nell'ipotesi piú debole che il sistema sia solo *debolmente iperbolico.*
Consideriamo il problema di Cauchy con dato iniziale nella palla $B(0,r)$ in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.13 (di Bony-Schapira). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine debolmente iperbolico della forma (1.2) a coefficienti analitici in un intorno di $\overline{B}(0,r) \times [0,T]$.*
Allora esiste $\delta > 0$ (che dipende da L) tale che il problema

$$\begin{cases} L[U] = F \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

ha un'unica soluzione analitica nel cono

$$\{(x,t) : |x| < r - \delta^{-1}t, t > 0\}$$

per ogni (F, Φ) analitici.

Nota Abbiamo lasciato il teorema di Bony-Schapira nella sua formulazione originale, cioé con dati iniziali analitici in una palla di $\mathbb{R}^n$. E' chiaro che il teorema si estende al caso di dati iniziali analitici in un aperto di $\mathbb{R}^n$, e si puó quindi dare del teorema 1.13 una formulazione analoga a quella degli altri teoremi di questo capitolo.

Il teorema di Bony-Schapira si ottiene utilizzando risultati di prolungamento per soluzioni olomorfe che ora dimostreremo. Nella dimostrazione si utilizza inoltre il seguente risultato di estensione per funzioni olomorfe:

Teorema 1.14 (dei tubi di Bochner). *Sia F olomorfa in un intorno di $E \subset \mathbb{C}^{p+1}$ definito da*

$$E \doteq \{z \in \mathbb{C}^{p+1} : |x| < r, y_1 = \ldots = y_p = 0, 0 < y_{p+1} \leq b\}.$$

Allora, per ogni $a < r$ esiste $C > 0$ tale che F si estende olomorficamente in

$$\widetilde{E} \doteq \{z \in \mathbb{C}^{p+1} : |x| < a, |y_1| + \ldots + |y_p| < C|y_{p+1}|, 0 < y_{p+1} < b\}.$$

Sia P un operatore differenziale matriciale del prim'ordine,

$$P(z, \partial_z) = \sum_h A_h(z)\partial_{z_h} + B(z), \tag{1.38}$$

a coefficienti olomorfi, abbiamo allora come primo risultato di prolungamento il lemma:

Lemma 1.1. *Sia D un aperto convesso di $\mathbb{C}^n$, con frontiera C^1. Supponiamo che la normale ζ a ∂D in un punto $z_0 \in \partial D$ sia non caratteristica per P. Allora, se F é olomorfa in D e $P[F]$ si prolunga olomorficamente in un intorno di z_0, F si prolunga olomorficamente in un intorno di z_0.*

Dimostrazione. Possiamo supporre, grazie al teorema di Cauchy-Kovalevsky, $P[F] = 0$. Prendiamo inoltre il vettore ζ di norma unitaria e diretto verso l'esterno di D.
Definiamo, per ε abbastanza piccolo, $\widetilde{H}_\varepsilon$ l'iperpiano complesso d'equazione $(z-z_0, \zeta) = -\varepsilon$, cioé $(z-z_0+\varepsilon\zeta, \zeta) = 0$. Abbiamo cioé che $\widetilde{H}_0$ é tangente a D in z_0, e gli $\widetilde{H}_\varepsilon$ per $\varepsilon > 0$ sono paralleli a $\widetilde{H}_0$ che tagliano D. Sia $\widetilde{B}_\varepsilon$ la piú grande palla di $\widetilde{H}_\varepsilon$ contenuta in D, indichiamo con r_ε il suo raggio. Dalla versione olomorfa del teorema di Cauchy-Kovalevsky (dal teorema di Ovciannikov), segue che esiste L (che dipende solo da P) tale che esiste una soluzione olomorfa in nel cono di base $\widetilde{B}_\varepsilon$, asse di simmetria parallelo a ζ, altezza r/L; in particolare esiste δ (dipende da L) tale che F si prolunga olomorficamente nella palla (di $\mathbb{C}^n$) $B_{\varepsilon,\delta}$ di centro $z_0 - \varepsilon\zeta$ e raggio δr_ε. Ma siccome D é convesso, e la frontiera é C^1, abbiamo che $\frac{\varepsilon}{r_\varepsilon} \to 0$ quando ε tende a 0, e quindi per ogni ε abbastanza piccolo $r_\varepsilon > 2\delta^{-1}\varepsilon$, e quindi per ε abbastanza piccolo $B_{\varepsilon,\delta}$ é un intorno di z_0. $\square$

Definiamo $Car(D)$, l'insieme caratteristico per P, come la chiusura in S^{2n-1} delle direzioni caratteristiche per P in qualche punto di D.
Dal lemma precedente abbiamo (ricordiamo che, a differenza del lemma precedente, qui per iperpiani si intende iperpiani reali):

Teorema 1.15. *Siano D_1, D_2 due sottoinsiemi convessi di $\mathbb{C}^n$, $D_1 \subset D_2$, D_1 localmente compatto, D_2 aperto, P un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.38) a coefficienti olomorfi in D_2. Si supponga che tutti gli iperpiani reali passanti per D_2 la cui normale é in $Car(D_2)$ passino anche per D_1.*

Allora, se F é olomorfa in un intorno di di D_1 e $P[F]$ si prolunga a una funzione olomorfa in D_2, F si prolunga a una funzione olomorfa in D_2.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in D_1$, $z_1 \in D_2$, dimostreremo allora che esiste un prolungamento olomorfo per F in un intorno del segmento che unisce questi due punti.
Sia $r > 0$ tale che la palla chiusa $\overline{B}(z_1, r)$ sia contenuta in D_2. Siccome $Car(D)$ é compatto, esiste un compatto K di D_1 tale che tutti gli iperpiani passanti per $\overline{B}(z_1, r)$ con normale in $Car(D)$ passino per K. Possiamo supporre che K sia convesso e che contenga z_0. Prendiamo $\varepsilon < r$ tale che $d(K, D_1^c) > 2\varepsilon$, allora F é olomorfa in $K_{2\varepsilon} \doteq \{z : d(z, K) < 2\varepsilon\}$. Per ogni $t \in [0,1]$ definiamo $z_t \doteq z_0 + t(z_1 - z_0)$, e M_t l'inviluppo convesso di K_ε e della palla $B(z_t, \varepsilon)$.
Abbiamo allora che M_t ha frontiera di classe C^1, e nei punti di frontiera che non appartengono a K_ε la normale non appartiene a $Car(D_2)$. Possiamo cioé applicare il lemma precedente a M_t, e otteniamo che se F si estende olomorficamente a M_{t_0}, si estende anche a M_{t_1} per qualche $t_1 > t_0$. Abbiamo cioé che

F si estende olomorficamente a M_1, che é un intorno del segmento che unisce z_0 a z_1. $\square$

Per applicare il teorema 1.15 e dimostrare il teorema di Bony-Schapira, dobbiamo dimostrare una stima sulle direzione caratteristiche di un sistema debolmente iperbolico, che segue dal teorema dei tubi di Bochner:

Lemma 1.2. *Sia $q(z,\tau) \doteq \tau^N + \sum_{j=0}^{N-1} a_j(z)\tau^j$ con a_j funzioni olomorfe in $\{z \in \mathbb{C}^p : |x| < r, |y| < 2\varepsilon\}$, tale che per z reale ($z \in B(0,r) \cap \mathbb{R}^p$) l'equazione $q(z,\tau) = 0$ ha solo soluzioni reali.*
Allora, per ogni $a < r$ esiste C tale che

$$q(z,\tau) = 0, \ |x| < a, |y| < \varepsilon \Rightarrow |\mathrm{Im}\tau| \le C|y|$$

Dimostrazione. Questo risultato segue dal teorema 1.14 applicato alla funzione $\dfrac{1}{q(z,\tau)}$. Fissiamo $a < r$, abbiamo allora che

$$q(z,\tau) = 0, \quad |x| < a, \quad |y| < \varepsilon \Longrightarrow |\tau| < b_a$$

per un qualche $b < \infty$.
Per ipotesi abbiamo che $q(z,\tau) \neq 0$ in

$$E \doteq \{|x| < r, |y| = 0, 0 < \mathrm{Im}\tau \le b_a\},$$

e quindi in un intorno. Allora $\dfrac{1}{q(z,\tau)}$ é olomorfa in un intorno di E, e quindi in

$$\widetilde{E} \doteq \left\{|x| < r, |y| < \varepsilon, \sum_i |y_1| < C|\mathrm{Im}\tau|, 0 < \mathrm{Im}\tau < b_a\right\}.$$

Abbiamo allora che $q(z,\tau)$ non si annulla in $\widetilde{E}$, cioé

$$q(z,\tau) = 0, \quad |x| < a, \quad |y| < \varepsilon, \quad \mathrm{Im}\tau > 0 \Longrightarrow C|\mathrm{Im}\tau| \le \sum_i |y_i|.$$

Lo stesso vale se $\mathrm{Im}\tau < 0$, quindi abbiamo la tesi (la costante C della tesi di questo teorema é l'inverso di quella che compare nella dimostrazione, che é la stessa del teorema precedente). $\square$

Lemma 1.3. *Sia L_z un operatore del primo ordine come in (1.9), iperbolico in $\{(z,t) \in \mathbb{C}^{n+1} : |x|^2 + |\mathrm{Re}t|^2 < r^2, |y|^2 + |\mathrm{Im}t|^2 < 4\varepsilon^2\}$, e sia $p(z,t,\zeta,\tau) = det(\tau I - \sum_h A_h(z,t)\zeta_h)$ il suo polinomio caratteristico (la variabile t é complessa).*

Allora, per ogni $a < r$ esiste C tale che

$$|x|^2 + |\mathrm{Re}t|^2 < a^2, |y|^2 + |\mathrm{Im}t|^2 < \varepsilon^2, p(z,t,\zeta,\tau) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$|\mathrm{Im}\tau| \le C((|y| + |\mathrm{Im}t|)|\xi| + |\eta|)$$

Dimostrazione. Per il lemma precedente, abbiamo che esiste δ tale che

$$p(z,t,\zeta,\tau)=0,\quad |x|^2+|\mathrm{Im}t|^2<a^2,\quad |y|^2+|\mathrm{Re}t|^2<\varepsilon^2,\quad |\xi|\le\delta\quad |\eta|<\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$|\mathrm{Im}\tau|\le C(|y|+|\mathrm{Re}t|+|\eta|).$$

Per omogeneitá, abbiamo allora che se $|\eta|<\varepsilon\delta^{-1}|\xi|$,

$$|\mathrm{Im}\tau|\le C((|y|+|\mathrm{Re}t|)|\xi|+|\eta|).$$

D'altra parte, se $|\eta|\ge\varepsilon\delta^{-1}|\xi|$, abbiamo che

$$|\tau|\le C_1|\zeta|\le C_1(|\xi|+|\eta|)\le C_1(1+\varepsilon^{-1}\delta)|\eta|,$$

e quindi la tesi. □

Supponiamo L_z a coefficienti olomorfi in $\{|x|^2+|\mathrm{Re}t|^2<a^2,|y|^2+|\mathrm{Im}t|^2<\varepsilon^2\}$, e definiamo A_ε la chiusura dell'insieme delle direzioni caratteristiche per L_z in $\{|x|^2+|\mathrm{Re}t|^2<a^2,|y|^2+|\mathrm{Im}t|^2<\varepsilon^2\}$. Il teorema precedente si puó tradurre geometricamente nella forma seguente:

Teorema 1.16. *Esiste $\delta>0$ tale che per ogni $a<r$, tutti gli iperpiani che passano per il punto $(x_0,t_0)=(0,\delta a)$ e con normale in A_ε intersecano l'insieme*

$$\{|x|<a,|y|<\varepsilon,t=0\}.$$

Dimostrazione. Vogliamo far vedere che se $(\zeta,\tau)\in A_\varepsilon$, l'iperpiano definito da $\mathrm{Re}((z,t)-(0,\delta a),(\zeta,\tau))=0$ interseca l'insieme $\{|x|<a,|y|<\varepsilon,t=0\}$, cioé che esiste una soluzione per

$$\mathrm{Re}\big((z,t)-(0,\delta a),(\zeta,\tau)\big),|x|<a,|y|<\varepsilon,t=0.$$

Dal teorema precedente, siccome $i(\zeta,\tau)$ annulla il polinomio caratteristico,

$$|\mathrm{Re}\tau|\le C[\varepsilon|\eta|+|\xi|].$$

Supponiamo ad esempio $\mathrm{Re}\tau\ge 0$ (il caso $\mathrm{Re}\tau\le 0$ é analogo). Vogliamo trovare $|x|<a,|y|<\varepsilon$ tale che

$$(x,\xi)-(y,\eta)=\delta a\mathrm{Re}\tau.$$

Siccome per $x=y=0$ $(x,\xi)-(y,\eta)=0$, per convessitá ci basta trovare x,y tale che $(x,\xi)-(y,\eta)\ge\delta a\mathrm{Re}\tau$. Prendiamo allora

$$x=\frac{a}{2}\frac{\xi}{|\xi|},\quad y=-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{|\eta|},$$

e abbiamo

$$\delta a\mathrm{Re}\tau\le\delta aC[\varepsilon|\eta|+|\xi|]\le\frac{a}{2}|\xi|+\frac{\varepsilon}{2}|\eta|=(x,\xi)-(y,\eta)$$

per ogni $a<r$ se $\delta<\frac{1}{2(r+1)C}$. □

Siamo pronti per dimostrare il teorema 1.13.

Dimostrazione del teorema 1.13. Prendiamo $\delta < \frac{1}{2(r+1)C}$ come nel teorema precedente, e indichiamo con $K(x_0, a)$ il cono

$$\Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| < a - \delta^{-1}t, t > 0\Big\}.$$

Per ottenere la tesi, dimostrariamo che per ogni $a < r$ esiste un'unica soluzione analitica nel cono $K(0, a)$.
Fissato a, esiste $\rho > 0$ tale che i coefficienti si estendono olomorficamente nel rettangolo di $\mathbb{C}^n$ $\{|x| < a, |y| < \rho\}$. Abbiamo allora una soluzione olomorfa in un intorno di $\{|x| < a, |y| < \varepsilon, |t| < \varepsilon\}$ (t é complesso) per un certo $\varepsilon > 0$, vogliamo prolungare questa soluzione utilizzando il teorema 1.15. Consideriamo l'inviluppo convesso (in $\mathbb{C}^n$) dell'insieme $\{|x| < a, |y| < \varepsilon, |t| < \varepsilon\}$ e del punto $(x_0, t_0) = (0, \delta a)$, e indichiamolo con D. Il teorema precedente ci garantisce che ogni iperpiano reale che passa per D e la cui normale é caratteristica in D passa per $\{|x| < a, |y| < \varepsilon, t = 0\}$. Dal teorema 1.15 abbiamo allora che possiamo estendere la soluzione a D. La sua restrizione a $K(0, a)$ (che é contenuto in D) fornisce una soluzione analitica. □

1.5 Coefficienti non analitici in t

I teoremi di Mizohata e di Bony-Shapira garantiscono l'esistenza globale se i coefficienti sono analitici in tutte le variabili. Ci chiediamo se é possibile indebolire le ipotesi sui coefficienti come abbiamo fatto nel caso del teorema di Cauchy-Kovalevsky, cioé richiedendo meno regolaritá in t. In questa sezione enunceremo i risultati principali, senza dimostrarli.

1.5.1 Sistemi simmetrici e strettamente iperbolici

Nella dimostrazione delle stime a priori utilizzate per dimostrare il teorema di Mizohata, abbiamo supposto i coefficienti C^∞. Ma é chiaro dalle dimostrazioni che la regolaritá che puó essere richiesta nella variabile t é molto piú debole. Le stesse stime si possono infatti dimostrare per coefficienti che siano solo C^1 nel tempo. Ricordando che in questo caso valgono le opportune versioni del teorema di Cauchy-Kovalevsky, si dimostra la seguente versione del teorema di Mizohata:

Teorema 1.17 (di Mizohata). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2) definito in $\Omega \times [0, T]$. Supponiamo che L sia regolarmente iperbolico e che i coefficienti di L siano in $C^1([0, T], \mathcal{A}(\Omega))$.*
Supponiamo

$$\sup_{|\xi|=1,(x,t),j} |\lambda_j(x, t, \xi)| \leq \lambda.$$

Allora il problema

$$\begin{cases} L[U] = F \\ U(x, 0) = \Phi(x), \end{cases}$$

ha un'unica soluzione analitica nel cono

$$C_T \doteq \{(x,t) : d(x,\Omega^c) > \lambda t, \quad t \in [0,T]\}$$

per ogni $F \in C^0([0,T], \mathcal{A}(\Omega))$*,* $\Phi \in \mathcal{A}(\Omega)$*.*

Il teorema vale anche nel caso simmetrico, con λ una qualunque costante che maggiora i coefficienti.

Si puó fare di meglio? Nel prossimo capitolo indagheremo a fondo questo problema, e cercheremo di ottenere questo risultato con ipotesi di regolaritá in t molto piú deboli sui coefficienti.

1.5.2 Sistemi debolmente iperbolici

Il problema é piú complicato nel caso dei sistemi debolmente iperbolici. Il risultato principale é dovuto a Bronstein.

Il teorema di Bronstein richiede che i coefficienti dell'operatore L siano in $C^k([0,T], \mathcal{A}(\Omega))$, con k abbastanza grande.
Se G é un aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, diciamo che G é una *lente di tipo spaziale* se esiste una successione G_ν di aperti a chiusura compatta in G, $\cup G_\nu = G$, con bordo di classe C^1, tale che le per ogni ν, $(x,t) \in \partial G_\nu$, la normale esterna al bordo appartiene alla componente connessa dell'insieme delle direzioni caratteristiche per L in (x,t) che contiene la direzione $(x,t) = (0,1)$.

Abbiamo allora il teorema:

Teorema 1.18 (di Bronstein). *Sia L un operatore differenziale del primo ordine della forma (1.2), definito in* $\Omega \times [0,T]$*, debolmente iperbolico. Esiste k (che dipende solo da n e N) tale che, se i coefficienti di L sono in* $C^k([0,T], \mathcal{A}(\Omega))$*, e* $G \subset \Omega \times [0,T]$ *é una lente di tipo spaziale, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} L[U] = 0 \\ U(x,0) = \Phi(x). \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in G, per ogni $\Phi \in \mathcal{A}(\Omega)$*.*

Bronstein ottiene questo risultato dimostrando prima il risultato analogo per le classi di Gevrey, e poi per tutte le classi non-analitiche, la cui intersezione coincide con la classe delle funzioni analitiche.
Notiamo che il k richiesto é molto alto. Dalla dimostrazione si ricava che é sufficiente $k = 4N + 3n + 6$.

Capitolo 2

I funzionali olomorfi

In questo capitolo esponiamo brevemente i risultati sui funzionali olomorfi che saranno necessari nei prossimi capitoli. Le dimostrazioni di questi risultati si possono trovare in [13] e [9].

2.1 Funzioni e funzionali olomorfi

In questa sezione introduciamo i duali degli spazi di funzioni olomorfe, e enunciamo le principali proprietá.

Definizione. *Sia D un aperto di $\mathbb{C}^n$, indichiamo con $\mathscr{H}(D)$ lo spazio delle funzioni olomorfe in D con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di D.*

Definizione. *Sia D un aperto di $\mathbb{C}^n$, indichiamo con $\mathscr{H}'(D)$ il duale topologico di $\mathscr{H}(D)$.*

Se $D = \mathbb{C}^n$, scriveremo $\mathscr{H}$ per $\mathscr{H}(\mathbb{C}^n)$, e $\mathscr{H}'$ per $\mathscr{H}'(\mathbb{C}^n)$.

Definizione. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$, indichiamo con $\mathscr{H}(E)$ il limite induttivo degli spazi $\mathscr{H}(D)$ con D che varia tra gli aperti di $\mathbb{C}^n$ contenenti E.*

Definizione. *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$, indichiamo con $\mathscr{H}'(E)$ il duale topologico di $\mathscr{H}(E)$.*

Se $D \in \mathbb{R}^n$, scriveremo $\mathcal{A}(D)$ per $\mathscr{H}(D)$, e $\mathcal{A}'(D)$ per $\mathscr{H}'(D)$.

Queste definizioni sono poco intuitive, soprattutto se E non é un aperto. Possiamo dare una interpretazione piú concreta dei funzionali olomorfi, seguendo una linea simile a quelle delle distribuzioni.

Se K é un compatto in $\mathbb{R}^n$, una distribuzione a supporto nel compatto K é una forma lineare T sullo spazio $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che, per ogni ω intorno di K in $\mathbb{R}^n$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_\omega \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_\omega |\partial_x^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente, se K é un compatto in $\mathbb{C}^n$, possiamo considerare lo spazio delle T forme lineari su $\mathscr{H}$ tali che, per ogni ω intorno di K in $\mathbb{C}^n$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_\omega \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_\omega |\partial_x^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in \mathscr{H}. \tag{2.1}$$

Ma per la formula di Cauchy, al posto della (2.1) é equivalente richiedere che per ogni ω intorno di K in $\mathbb{C}^n$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_\omega \sup_\omega |\varphi|, \quad \forall \varphi \in \mathscr{H}. \tag{2.2}$$

Se T soddisfa la (2.2) si estende a $\mathscr{H}(K)$, e si dimostra che lo spazio $\mathscr{H}'(K)$ coincide, (anche come topologia) con lo spazio delle $T \in \mathscr{H}'$ che soddisfano la (2.2) (con la topologia data dalla famiglia di seminorme associata alla (2.2)).

Come per le distribuzioni, diremo allora che un funzionale olomorfo $T \in \mathscr{H}'$ ha supporto nel compatto K se $T \in \mathscr{H}'(K)$.

L'utilizzo del termine supporto non deve peró ingannare, facendo credere che valgano le stesse proprietá del supporto per le distribuzioni. In effetti, in altre lingue viene utilizzato un termine diverso (*carrier* in inglese, *porteur* in francese), ma non avendo trovato in letteratura un equivalente italiano abbiamo preferito per comoditá di continuare ad utilizzare il termine supporto.

Diversamente da quanto succede con le distribuzioni,

$$T \in \mathscr{H}'(K_1) \cap \mathscr{H}'(K_2) \not\Rightarrow T \in \mathscr{H}'(K_1 \cap K_2),$$

e quindi non esiste sempre un supporto minimale per il funzionale (per questo sarebbe meglio utilizzare un termine diverso). Se consideriamo ad esempio la δ di Dirac in $\mathbb{C}$,

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0),$$

se φ é una funzione olomorfa la formula di Cauchy dá

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\varphi(z)}{z} dz$$

per ogni $r > 0$. Allora δ ha supporto in $\{0\}$ e in $S^1 \subset \mathbb{C}$, ma non puó avere supporto in $\{0\} \cap S^1 = \emptyset$, perché vorrebbe dire che é nulla.
Vedremo peró che nei casi che ci interessano le cose non vanno cosí male.

Definizione. *Sia K un compatto di $\mathbb{C}^n$. Definiamo $\widetilde{K}$, l'inviluppo di olomorfia di K, l'insieme*

$$\widetilde{K} \doteq \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |\varphi(z)| \leq \sup_{w \in K} |\varphi(w)|, \ \forall \varphi \in \mathscr{H} \right\}.$$

$\widetilde{K}$ é ancora un compatto.

Definizione. *Sia K un compatto di $\mathbb{C}^n$. Diremo che K é olomorficamente convesso se*

$$K = \widetilde{K}$$

Teorema 2.1. *Se K é convesso, oppure contenuto in $\mathbb{R}^n$, allora é olomorficamente convesso.*

Valgono allora i due seguenti teoremi fondamentali per ottenere i risultati di questa tesi:

Teorema 2.2. *Se K_1, K_2 sono due compatti di $\mathbb{C}^n$, e $K_1 \cup K_2$ é olomorficamente convesso,*
allora ogni T che ha supporto in K_1 e in K_2, ha supporto in $K_1 \cap K_2$.

Teorema 2.3. *Se T é un funzionale olomorfo in $\mathscr{H}'$, e ha supporto in ogni intorno di K, con K compatto olomorficamente convesso, allora ha supporto in K.*

Se T é una distribuzione, é facile scomporla nella somma di distribuzioni a supporto piú piccolo, utilizzando una partizione dell'unitá C^∞. Nel caso dei funzionali olomorfi non si puó applicare questa tecnica, visto che non esistono partizioni dell'unitá olomorfe. Ciononostante, é vero il seguente risultato:

Teorema 2.4. *Se $T \in \mathscr{H}'(D)$ e $\{\omega_i\}_{i \le l}$ é un ricoprimento aperto di D, allora esistono $T_1, \ldots, T_l$ tali che*

$$T = T_1 + \ldots + T_l, \quad T_i \textit{ ha supporto in } \omega_i \textit{ per ogni } i.$$

2.2 La trasformata di Fourier e il teorema di Paley-Wiener

La trasformata di Fourier si estende in maniera naturale ai funzionali olomorfi. Valgono dei teoremi di tipo Paley-Wiener che mettono in relazione il tipo esponenziale della trasformata con il supporto del funzionale.

Definizione. *Se T é un funzionale olomorfo in $\mathscr{H}'$, definiamo $\widehat{T}$ la trasformata di Fourier-Laplace di T*

$$\widehat{T}(\zeta) \doteq \langle T(z), e^{-i(\zeta,z)} \rangle.$$

$\widehat{T}$ é una funzione intera, di tipo esponenziale.
Se $T = T(t,z) \in L^1([0,T], \mathscr{H}')$, scriveremo $\widehat{T}(\zeta, t)$ per $\langle T(t,z), e^{-i(\zeta,z)} \rangle$.

Teorema 2.5 (di Paley-Wiener per funzionali olomorfi). *Sia T in $\mathscr{H}'$. T ha supporto in*

$$\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \le r\}$$

se e solo se la sua trasformata di Fourier soddisfa la stima

$$|\widehat{T}(\zeta)| \le C_\varepsilon e^{(r+\varepsilon)|\zeta|} \tag{2.3}$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

T ha supporto in

$$\Big\{z \in \mathbb{C}^n : |x| \leq \alpha,\ |y| \leq \beta\Big\}$$

se e solo se la sua trasformata di Fourier soddisfa la stima

$$|\widehat{T}(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)|\xi|+(\beta+\varepsilon)|\eta|}$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Sia $\{T_\nu\}$ *in* $\mathscr{H}'$. $\{T_\nu\}$ *é limitata in* $\mathscr{H}'$ *se e solo se esistono* α *e* β *tali che*

$$|\widehat{T}_\nu(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)|\xi|+(\beta+\varepsilon)|\eta|}$$

per ogni ν *(le costanti sono indipendenti da* ν*).*

Questo teorema vale in particolare se i supporti sono reali. Per comoditá riscriviamo il teorema in questo caso:

Teorema 2.6 (di Paley-Wiener per funzionali analitici reali). *Sia* T *in* $\mathcal{A}'$. T *ha supporto in*

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\Big\}$$

se e solo se la sua trasformata di Fourier soddisfa la stima

$$|\widehat{T}(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{(r+\varepsilon)|\xi|+\varepsilon|\eta|}$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Sia $\{T_\nu\}$ *in* $\mathcal{A}'$. $\{T_\nu\}$ *é limitata in* $\mathcal{A}'$ *se e solo se esiste* r *tale che*

$$|\widehat{T}_\nu(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{(r+\varepsilon)|\xi|+\varepsilon|\eta|}$$

per ogni ν *(le costanti sono indipendenti da* ν*).*

2.3 Funzioni integrabili in $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}'$

Sia X uno spazio completo localmente convesso. Indichiamo con $L^1([0,T],X)$ lo spazio delle funzioni $u : [0,T] \longrightarrow X$ *assolutamente integrabili*, cioé tali che esiste una successione $u_\nu(t)$ di funzioni semplici a valori in X tali che

$$u_\nu(t) \xrightarrow{X} u(t) \quad q.o. \text{ in } [0,T],$$

per $\nu \to \infty$, e che, per ogni seminorma p di X,

$$\int_0^T p(u_\nu - u)dt \to 0.$$

Allora la successione

$$\left\{ \int_0^T u_\nu(t)dt \right\}_\nu$$

converge in X, e poniamo

$$\int_0^T u_\nu(t)dt \doteq \lim \nu \int_0^T u_\nu(t)dt.$$

Questa definizione é indipendente dalla scelta della successione $\{u_\nu\}$.

$L^1([0,T],X)$ é uno spazio localmente convesso con la topologia data dalle seminorme

$$\tilde{p} : u \mapsto \int_0^T p(u(t))dt,$$

dove le p sono le seminorme di X.

Analogamente si definiscono gli spazi $L^p([0,T],X)$, con $p \in [1,\infty]$.
Se u appartiene allo spazio $L^1([0,T],X)$, possiamo considerare le derivate rispetto al tempo nel senso delle distribuzioni, e definire gli spazi

$$H^{1,p}([0,T],X) \doteq \{u \in L^p([0,T],X) : \partial_t u \in L^p([0,T],X)\}.$$

Lo spazio

$$C([0,T],X)$$

munito delle seminorme

$$\tilde{p} : u \mapsto \sup_{0 \le t \le T} p(u(t))$$

(p sono le seminorme di X) si immerge con continuitá in $L^1([0,T],X)$.

In questa tesi utilizzeremo queste nozioni con X uno spazio di funzioni o di funzionali olomorfi.

Nel caso in cui $X = \mathcal{A}(\Omega)$, abbiamo la seguente caratterizzazione per le funzioni in $L^1([0,T],X)$:

Teorema 2.7. *Se $T(x,t)$ appartiene a $L^1([0,T],\mathcal{A}(\Omega))$, allora*

$$sup_{x \in K} |\partial_x^h T(x,t)| \le \tilde{\Lambda}_K(t) a_K^{|h|} h! \tag{2.4}$$

per ogni $h \in \mathbb{N}^n$, $K \subset\subset \Omega$, con $a_K > 0$, $\tilde{\Lambda}_K \in L^1(0,T)$.

Viceversa, se $T(x,t)$ é una funzione che soddisfa la (2.4),

$$T \in L^1([0,T],\mathscr{H}(D)),$$

con D un intorno di Ω in $\mathbb{C}^n$, e quindi in particolare

$$T \in L^1([0,T],\mathcal{A}(\Omega)).$$

Vale il seguente teorema (di tipo Paley-Wiener):

Teorema 2.8. *Sia* T *in* $L^1([0,T],\mathscr{H}')$. *Esistono allora* α *e* β *tali che*

$$\int_0^T |\widehat{T}(\zeta,t)|dt \leq C_\varepsilon e^{(\alpha+\varepsilon)|\xi|+(\beta+\varepsilon)|\eta|}.$$

Sia T *in* $L^1([0,T],\mathcal{A}')$. *Esiste allora* r *tale che*

$$\int_0^T |\widehat{T}(\zeta,t)|dt \leq C_\varepsilon e^{(r+\varepsilon)|\xi|+\varepsilon|\eta|}.$$

Capitolo 3

Sistemi del primo ordine e funzionali analitici

In questo capitolo dimostreremo i risultati di esistenza e di unicitá della soluzione (globale) del problema di Cauchy per alcune classi di sistemi del primo ordine nell'ambito dei funzionali analitici reali. Nei capitoli successivi vedremo come da questi si possono far discendere gli analoghi risultati nell'ambito delle funzioni analitiche reali, e per alcune classi di equazioni di ordine superiore al primo.

I risultati che dimostreremo richiedono l'analiticitá dei coefficienti in x, ma pochissima regolaritá in t. Richiederemo infatti che i coefficienti dei sistemi siano in $L^p([0,T],\mathcal{A})$ con p variabile in $[1,\infty]$ a seconda del caso studiato.

Due sono le classi di sistemi del primo ordine di cui ci occuperemo. La prima é quella dei sistemi che chiameremo simmetrici, cioé della forma

$$\begin{cases} A_0(x,t)\partial_t U = \sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U, \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

con A_0 hermitiana e definita positiva, e le A_h hermitiane.
La seconda é quella dei sistemi "regolarmente iperbolici", cioé della forma

$$\begin{cases} \partial_t U = \sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U, \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

nel caso in cui la matrice $\sum_h A_h \xi_h$ ha tutti gli autovalori reali e distinti, anzi uniformemente distanziati per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$.

In entrambi i casi dimostreremo che se il dato iniziale é un funzionale analitico reale in $\mathcal{A}'(K)$, $K \subset\subset \Omega$, e K é "sufficientemente lontano" dal bordo di Ω (rispetto ai coefficienti del sistema e a T), allora esiste (ed é unica) una soluzione in $H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$.

Riportiamo la breve spiegazione della tecnica utilizzata giá fatta nell'introduzione.
Per prima cosa, si studia il sistema supponendo che il dato iniziale sia un funzionale olomorfo (si considera il complessificato di $\mathbb{R}^n$ e si estendono olomorficamente i coefficienti a un intorno complesso di Ω) portato da una palla di raggio sufficientemente piccolo con centro in un punto di $\mathbb{R}^n$. Utilizzando la trasformata di Fourier e l'analiticità dei coefficienti ci riconduciamo a studiare un problema del tipo

$$\begin{cases} \partial_t V(\zeta,t) = iA_0(t)\zeta V(\zeta,t) + \sum_{|k|>0} A_k(t)\partial_\zeta^k(\zeta V(\zeta,t)), \\ \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.1}$$

in cui compare un operatore differenziale di ordine infinito. L'ipotesi di iperbolicità ci permette di ottenere una stima sulla soluzione di questo problema, e da questa otteniamo, attraverso il teorema di Paley-Wiener, una stima per la crescita del supporto della soluzione quando il dato iniziale é portato da un sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$ che "si allontana poco" da $\mathbb{R}^n$; grazie a questo possiamo infine dimostrare che se il dato iniziale è portato da un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, allora lo stesso vale anche per la soluzione (chiaramente il supporto sarà in generale un insieme più grande).

Nella prima sezione utilizzeremo questo metodo in un caso molto semplice. Nelle sezioni successive lo applicheremo ai casi che ci interessano.

3.1 I sistemi simmetrici I

Analizziamo dapprima un caso molto particolare di sistema simmetrico. Per semplificare ulteriormente ci mettiamo nel caso di una sola variabile spaziale.

Il risultato che vogliamo dimostrare é il seguente:

Teorema 3.1. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = A(x,t)\partial_x U(x,t) \\ \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{3.2}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.
Supponiamo che A *sia una matrice hermitiana, in* $L^1([0,T], \mathcal{A}(\Omega))$*, e sia* $\Lambda(t)$ *una funzione in* $L^1(0,T)$ *tale che*

$$|A(x,t)| \leq \Lambda(t).$$

Se $\Phi(x)$ *é un funzionale analitico reale con supporto nel compatto* $K \subset \Omega$ *tale che*

$$\int_0^T \Lambda(s)ds < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$$

allora esiste un'unica soluzione U *in* $H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$, *e per ogni* $t \in [0,T]$ *abbiamo*

$$U \in H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \leq \int_0^t \Lambda(s)ds \right\}.$$

Per ottenere questo risultato, prima analizziamo il problema (3.2) nell'ambito dei funzionali olomorfi (mantenendo le stesse ipotesi sui coefficienti). Le ipotesi ci permettono infatti di estendere olomorficamente i coefficienti a un intorno di Ω in $\mathbb{C}$.
Siamo quindi portati a studiare il problema

$$\begin{cases} \partial_t U(z,t) = A(z,t)U(z,t) \\ \\ U(z,0) = \Phi(z), \end{cases} \tag{3.3}$$

in $D \times [0,T]$, D un aperto di $\mathbb{C}$, a coefficienti olomorfi nella variabile z.
Per fare questo utilizzeremo la trasformata di Fourier.
Se $A(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)(z-z_0)$ in un intorno di z_0, sostituendo nel sistema (3.3), effettuando la traslazione $\tau_{z_0} : z \to z - z_0$ e poi applicando la trasformata di Fourier rispetto alla variabile z, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \partial_t V(\zeta,t) = iA_0(t)\zeta V(\zeta,t) + \sum_{k>0} i^{k+1} A_k(t)\partial_\zeta^k(\zeta V(\zeta,t)), \\ \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.4}$$

dove abbiamo posto $V = \widehat{\tau_{z_0}U}$, $V^{(0)} = \widehat{\tau_{z_0}\Phi}$.

Chiariamo il senso della (3.4). Vi compare l'operatore differenziale di ordine infinito

$$\sum_{k>0} i^{k+1} A_k(t)\partial_\zeta^k,$$

che non é in generale definito sulle funzioni intere. Abbiamo peró che se i coefficienti verificano la stima

$$|A_k(t)| \leq C_1 a^k,$$

l'operatore é definito sullo spazio delle funzioni intere $w(\zeta)$ che soddisfano $|w(\zeta)| \leq C_2 e^{b|\zeta|}$ per qualche $b < 1/ea$, ed é esattamente questo il caso che andremo a studiare.

Cominciamo allora col dimostrare il seguente lemma (che utilizzeremo nel caso in cui gli A_k gli stessi che compaiono nella (3.4) a meno del fattore i^{k+1} per $k > 0$):

Lemma 3.1. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t V(\zeta,t) = iA_0(t)\zeta V(\zeta,t) + \sum_{k>0} A_k(t)\partial_\zeta^k(\zeta V(\zeta,t)), \\ \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta) \end{cases} \tag{3.5}$$

in $\mathbb{C}\times[0,T]$, *con* $A_k(t)$ *funzioni misurabili nello spazio delle matrici* $(N\times N)$ *e che soddisfano le seguenti ipotesi:*

$$A_0 = A_0^*, \tag{3.6}$$

$$|A_0(t)| \leq \Lambda(t), \tag{3.7}$$

$$|A_k(t)| \leq \tilde{\Lambda}(t)a^k, \tag{3.8}$$

per qualche $a>0$, Λ *e* $\tilde{\Lambda}$ *in* $L^1(0,T)$.
Se $V^{(0)}(\zeta)\in\mathscr{H}$ *e esistono* M *e* ρ *tali che*

$$|\zeta V^{(0)}(\zeta)| \leq Me^{\rho|\zeta|}, \tag{3.9}$$

$$0<\rho\leq\frac{1}{4ea}, \tag{3.10}$$

allora esiste $\tau(\rho)>0$ *tale che il problema ha una soluzione* V *appartenente a* $H^{1,1}([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$, *e vale la stima*

$$\big|\zeta V(\zeta,t)\big| \leq 2Me^{\rho|\zeta|}\exp\bigg(8ea\rho\int_0^t\tilde{\Lambda}(s)ds|\zeta| + \int_0^t\Lambda(s)ds|\eta|\bigg) \tag{3.11}$$

per ogni $t<\tau(\rho)$.

Osservazione Notiamo che se $\tau(\rho)$ é tale che

$$\rho + 8ea\rho\int_0^{\tau(\rho)}\tilde{\Lambda}(s)ds + \int_0^{\tau(\rho)}\Lambda(s)ds < \frac{1}{ea},$$

e V é una funzione che soddisfa la (3.11), allora $\sum_{k>0}A_k\partial_\zeta^k(\zeta V)$ é definito per $t<\tau(\rho)$.

Dimostrazione. Otterremo la soluzione del sistema (3.5) come limite di una opportuna serie di funzioni, ciascuna definita come la soluzione di un particolare problema di Cauchy.

Definiamo V_1 come la soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t V_1 = iA_0\zeta V_1 \\ \\ V_1(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.12}$$

e, definite $V_1, \dots, V_l$, sia V_{l+1} la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t V_{l+1} = iA_0(t)\zeta V_{l+1} + \sum_{k>0} A_k(t)\partial_\zeta^k(\zeta V_{l+1}) \\ \\ V_{l+1}(\zeta, 0) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Mostreremo che $\sum_l V_l$ converge in $C^0([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$ per un opportuno $\tau(\rho)$; sommando le equazioni dei sistemi che definiscono le V_l si vede quindi che questo procedimento fornisce una soluzione di (3.5).

A questo scopo cerchiamo delle stime per le soluzioni di (3.12) e (3.13). Notiamo che ciascuno di questi sistemi puó essere visto come una famiglia, dipendente dal parametro $\zeta \in \mathbb{C}$, di problemi di Cauchy per sistemi ordinari (non alle derivate parziali) della forma

$$\begin{cases} V'(t) = iA_0(t)\zeta V(t) + F_\zeta(t), \\ \\ V(0) = V_\zeta^{(0)}, \end{cases}$$

Per queste equazioni, sappiamo che esiste per ogni ζ esiste un'unica soluzione in $H^{1,1}(0,T)$. Vogliamo peró stimare la crescita di queste soluzioni quando $|\zeta| \to \infty$.
Cerchiamo allora una stima, in termini dei coefficienti, del termine noto e del dato iniziale, delle soluzioni di equazioni del tipo

$$V'(t) = iA_0(t)\zeta V(t) + F(t),$$

con A_0 che soddisfa le ipotesi del lemma 3.1.
Derivando $|V|^2$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \partial_t |V|^2 &= (V, V') + (V', V) \\ &= (V, iA_0\zeta V) + (V, F) + (iA_0\zeta V, V) + (F, V) \\ &= ((iA_0\zeta + iA_0\zeta^*)V, V) + 2\mathrm{Re}(V, F) \\ &= -(((A_0 + (A_0)^*)\eta)V, V) + 2\mathrm{Re}(V, F) \\ &\leq 2|A_0||\eta||V|^2 + 2|F||V| \\ &\leq 2\Lambda|\eta||V|^2 + 2|F||V| \end{aligned}$$

cioé

$$\partial_t |V| \leq \Lambda|\eta||V| + |F|$$

che implica

$$e^{-\int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|}|V(t)| \leq |V(0)| + \int_0^t e^{-\int_0^s \Lambda(s)d\sigma|\eta|}|F(s)|ds. \tag{3.14}$$

Utilizzeremo questa stima per dimostrare per induzione che per ogni l vale

$$|\zeta V_l(\zeta, t)| \leq 2^{-(l-1)} M e^{\rho|\zeta|} \exp\left(8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds)|\zeta| + \int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|\right) \tag{3.15}$$

per ogni $t < \tau(\rho)$ con $\tau(\rho)$ che definiremo piú avanti.

l = 1 Dalla (3.14)

$$|\zeta V_1(\zeta,t)| \leq |\zeta V_1(\zeta,0)| e^{\int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|}$$

perché $F=0$, e quindi utilizzando l'ipotesi (3.9) su $V_\zeta^{(0)}$

$$|\zeta V_1(\zeta,t)| \leq M e^{\rho|\zeta|} e^{\int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|},$$

che implica la (3.15) per $l=1$.

l → l + 1 Vogliamo utilizzare la (3.14), con

$$F = F_l \doteq \sum_{k>0} A_k(t) \partial_\zeta^k (\zeta V_l).$$

L'ipotesi sugli A_k implica

$$|F_l(\zeta,t)| \leq \sum_{k>0} |A_k(t)| |\partial_\zeta^k \zeta V_l| \leq \sum_{k>0} \tilde{\Lambda}(t) a^k |\partial_\zeta^k \zeta V_l|,$$

ci interessa pertanto una stima per le derivate di ζV_l.

Per ottenere questa stima utilizzeremo che il fatto che se $f(\zeta)$ é una funzione intera su $\mathbb{C}^n$ tale che

$$|f(\zeta)| \leq M e^{\alpha|\zeta|+\beta|\eta|}, \tag{3.16}$$

allora per ogni $k \in \mathscr{N}^n$ vale

$$|\partial_\zeta^k f(\zeta)| \leq M e^{\alpha|\zeta|+\beta|\eta|} e^{|k|} (\alpha+\beta)^{|k|}. \tag{3.17}$$

Dalla formula di Cauchy abbiamo infatti,

$$\partial_{\zeta_j} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r)} \frac{f(\zeta_1,\ldots,z_j,\ldots,\zeta_n)}{(z_j-\zeta_j)^2} dz_j,$$

con $\Gamma(r) \doteq \{z_j \in \mathbb{C} : |z_j - \zeta_j| = r\}$, per qualunque $r>0$. Dalla (3.16) allora

$$|\partial_{\zeta_j} f(\zeta)| \leq |\partial_\zeta^k f(\zeta)| \leq \frac{M}{r} e^{\alpha|\zeta|+\beta|\eta|+(\alpha+\beta)r},$$

in particolare per $r = (\alpha+\beta)^{-1}$

$$|\partial_{\zeta_j} f(\zeta)| \leq M e^{\alpha|\zeta|+\beta|\eta|} e(\alpha+\beta),$$

cioé la (3.17) per le derivate prime, che implica il caso generale.
Siccome per ipotesi induttiva

$$|\zeta V_l(\zeta,t)| \leq 2^{-(l-1)} M e^{\rho|\zeta|} \exp\left(8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds|\zeta| + \int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|\right)$$

la (3.17) dice che

$$
\begin{aligned}
|\partial_\zeta^k \zeta V_l(\zeta,t)| &\leq 2^{-(l-1)} M e^{\rho|\zeta|} \exp\Bigg(8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds|\zeta| + \int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|\Bigg) \\
&\times e^k \Bigg(\rho + 8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds + \int_0^t \Lambda(s)ds\Bigg)^k.
\end{aligned}
$$

Definiamo allora $\tau(\rho)$ tale che

$$
\Bigg(\rho + 8ea\rho \int_0^{\tau(\rho)} \tilde{\Lambda}(s)ds + \int_0^{\tau(\rho)} \Lambda(s)ds\Bigg) < 2\rho
$$

in modo da avere per ogni $t < \tau(\rho)$

$$
\begin{aligned}
|\partial_\zeta^k \zeta V_l(\zeta,t)| &\leq 2^{-(l-1)} M e^{\rho|\zeta|} e^{8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds|\zeta| + \int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|} \\
&\times (2e\rho)^k. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
e^{-\int_0^t \Lambda|\eta|}|F_l| &\leq 2^{-(l-1)} M e^{\rho|\zeta|} e^{8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}|\zeta|} \sum_{k>0} \tilde{\Lambda}(t)(2ea\rho)^k \\
&\leq 2^{-(l-1)} M e^{\rho|\zeta|} e^{8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}|\zeta|} \tilde{\Lambda}(t) 4ea\rho \\
&= 2^{-l} M e^{\rho|\zeta|} e^{8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}|\zeta|} 8ea\rho\tilde{\Lambda}(t),
\end{aligned}
$$

poiché $2ea\rho \leq 1/2$ grazie alla (3.10), e quindi dalla (3.14)

$$
\begin{aligned}
e^{-\int_0^t \Lambda|\eta|}|\zeta||V_{l+1}(\zeta,t)| &\leq \int_0^t e^{-\int_0^s \Lambda|\eta|}|\zeta||F_l| \\
&\leq 2^{-l} M e^{\rho|\zeta|} \int_0^t e^{8ea\rho \int_0^s \tilde{\Lambda}|\zeta|} 8ea\rho\tilde{\Lambda}|\zeta| \\
&\leq 2^{-l} M e^{\rho|\zeta|} e^{8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}|\zeta|}
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza

$$
\int_0^t g(s) e^{\int_0^s g(\sigma)d\sigma} ds = e^{\int_0^t g(s)ds} - 1 < e^{\int_0^t g(s)ds},
$$

con

$$
g(t) = 8ea\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}|\zeta|.
$$

Dimostrata la (3.15) per ogni l, abbiamo allora che la serie $\sum_l V_l$ converge in C^0 ad una funzione V , e sommando le (3.15) su l abbiamo la (3.11).

Grazie a (3.5) abbiamo infine che $V \in H^{1,1}$.

□

Torniamo ora al problema (3.3). Dal lemma segue il teorema :

Teorema 3.2. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t U(z,t) = A(z,t)U(z,t) \\ \\ U(z,0) = \Phi(z), \end{cases} \tag{3.19}$$

per (z,t) in un intorno di $(z_0, 0)$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, con A matrice hermitiana, $A(\cdot, t)$ analitica per ogni t e

$$\left|\partial_z^k A(z_0,t)\right| \le \tilde{\Lambda}(t) a^k k!, \qquad \forall k, \tag{3.20}$$

per qualche $a > 0$, $\tilde{\Lambda} \in L^1(0,T)$.

Supponiamo inoltre

$$|A(z_0,t)| \le \Lambda(t),$$

con Λ in $L^1(0,T)$.

Sia poi $\Phi(z)$ un funzionale olomorfo con supporto contenuto nell'aperto $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$, con $\rho < 1/4ea$.

Allora esiste $\tau(\rho) > 0$ tale che per ogni $t < \tau(\rho)$ esiste un'unica soluzione $U(t) \in H^{1,1}([0,t], \mathscr{H}'(B_t^\rho))$, dove

$$B_t^\rho = \left\{ z : |x - x_0| \le \rho\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda} ds\right) + \int_0^t \Lambda ds, \quad |y - y_0| \le \rho\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda} ds\right)\right\},$$

e $C = 8ea$.

Nota Possiamo supporre che $\tau(\rho)$ sia una funzione crescente.

Dimostrazione. Per il teorema di Ovciannikov sappiamo giá che, per tempi piccoli, esiste ed é unica una soluzione in $\mathscr{H}'$. Per ottenere questo risultato non serve che A sia hermitiana. Utilizzando questa ipotesi aggiuntiva, peró, possiamo ottenere una stima sul supporto della soluzione.

L'ipotesi (3.20) ci permette di scrivere

$$A(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k(t)(z - z_0),$$

in un intorno di z_0 con

$$A_k(t) \doteq (k!)^{-1} \partial_z^k A(z_0, t),$$

$$|A_k(t)| \le \tilde{\Lambda}(t) a^k.$$

Sostituiamo nel sistema (3.1), poi effettuiamo la traslazione $\tau_{z_0} : z \to z - z_0$ e poi la trasformata di Fourier rispetto alla variabile z. Il sistema diventa allora della forma

$$\begin{cases} \partial_t V(\zeta,t) = iA_0(t)\zeta V(\zeta,t) + \sum_{k>0} i^{k+1} A_k(t) \partial_\zeta^k (\zeta V(\zeta,t)), \\ \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases}$$

ponendo $V = \widehat{\tau_{z_0}U}$, $V^{(0)} = \widehat{\tau_{z_0}\Phi}$.
L'ipotesi su Φ implica che $|\zeta V^{(0)}(\zeta)| \le M_\rho e^{\rho|\zeta|}$, ci troviamo cioé nella condizione di applicare il lemma 3.1 (gli A_k sono gli stessi, a meno di moltiplicazione per un fattore di modulo 1 se $k > 0$).
Da questo lemma abbiamo

$$|V(\zeta,t)| \le 2Me^{\rho|\zeta|}\exp\left(C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds|\zeta| + \int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|\right),$$

e quindi per il teorema di Paley-Wiener il problema (3.19) ha una soluzione U (definita da $\widehat{\tau_{z_0}U} = V$) in $L^1([0,\tau(\rho_1)],\mathscr{H}')$ tale che, per ogni t, $U(t)$ é a supporto in

$$\left\{z : |x-x_0| \le \rho\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right) + \int_0^t \Lambda,\ \ |y-y_0| \le \rho\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right)\right\}.$$

Dalla prima equazione del sistema (3.19) segue infine che U appartiene a $H^{1,1}([0,\tau(\rho)],\mathscr{H}'(B^\rho_{\tau(\rho)}))$, e a $H^{1,1}([0,t],\mathscr{H}'(B^\rho_t))$ per ogni $t \le \tau(\rho)$. □

Dimostrazione del teorema 3.1. Dall'ipotesi che $a \in L^1([0,T],\mathcal{A}(\Omega)))$, segue che per ogni compatto K di Ω

$$|\partial_x^k A(x,t)| \le \tilde{\Lambda}_K(t)a_K^k k! \quad \forall (x,t) \in K \times [0,T], \tag{3.21}$$

con $a_K > 0$, $\int_0^t \tilde{\Lambda}_K < \infty$.
Supponiamo per il momento che a_K, $\tilde{\Lambda}_K$ non dipendano dal compatto K, cioé che

$$|\partial_x^k A(x,t)| \le \tilde{\Lambda}(t)a^k k! \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{3.22}$$

con $a > 0$, $\int_0^t \tilde{\Lambda} < \infty$.

La (3.22) ci permette di estendere olomorficamente i coefficienti all'aperto di $\mathbb{C}$

$$\Gamma_{1/2a} = \{z \in \mathbb{C} : d(z,\Omega) < 1/2a\}.$$

Cerchiamo allora di estendere il risultato del Teorema 3.2 al caso di dati iniziali che siano funzionali olomorfi con supporto in insiemi della forma

$$\left\{z : x \in K, |y| \le \rho\right\} = D_K^\rho,$$

con K compatto di $\mathbb{R}$.

Per fare questo, utilizzeremo il fatto che un funzionale olomorfo si puó scomporre nella somma di funzionali con supporto piú piccolo.

Precisamente, se il dato iniziale $\Phi(z)$ é in $\mathscr{H}'(D_K^\rho)$, e $B_1^\sigma, \ldots, B_m^\sigma$ sono palle di $\mathbb{C}$ con centro in K e raggio σ, tali da formare un ricoprimento aperto di K, allora esistono $\Phi_1^\sigma, \ldots, \Phi_m^\sigma$ funzionali olomorfi tali che, per ogni j, Φ_j^σ ha supporto in

$$\left\{z \in \mathbb{C} : x \in \overline{B}_j^\sigma, |y| \leq \rho\right\}$$

e che

$$\Phi = \Phi_1^\sigma + \ldots + \Phi_m^\sigma.$$

Se ρ e σ sono sufficientemente piccoli possiamo applicare il Teorema 3.2 al problema (3.2) con dato iniziale Φ_j^σ. Per ciascuno di questi problemi abbiamo una soluzione U_j^σ, che per ogni t ha supporto in

$$\left\{z : d(x, B_j) \leq \sqrt{\rho^2+\sigma^2}\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right) + \int_0^t \Lambda, |y| \leq \sqrt{\rho^2+\sigma^2}\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right)\right\}$$

per ogni $t < \tau(\rho) \leq \tau(\sqrt{\rho^2+\sigma^2})$.

Per l'unicitá della soluzione, abbiamo che $U^\sigma = \sum_j U_j^\sigma$ é la soluzione del problema (3.2) con dato iniziale in $\mathscr{H}'(D_K^\rho)$, e per ogni $t < \tau(\rho)$ $U_j^\sigma(t)$ ha supporto in

$$G_t^{\rho,\sigma} = \left\{z : d(x, K) \leq \sqrt{\rho^2+\sigma^2}\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right) + \int_0^t \Lambda,\right.$$
$$\left. |y| \leq \sqrt{\rho^2+\sigma^2}\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right)\right\}.$$

Sempre per l'unicitá della soluzione, le U^σ coincidono, quindi abbiamo che la (unica) soluzione di (3.2) ha supporto nell'intersezione dei $G_t^{\rho,\sigma}$ per ogni $t < \tau(\rho)$, e cioé in

$$G_t^\rho = \left\{z \in \mathbb{C} : d(x, K) \leq \rho\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right) + \int_0^t \Lambda,\ |y| \leq \rho\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right)\right\}.$$

Riassumendo:

Se $U^{(0)}$ é un funzionale olomorfo a supporto in $\{z \in \mathbb{C} : x \in K, |y| \leq \rho\}$, il problema (3.2) ha una (unica) soluzione U per $0 < t < \tau(\rho)$ tale che, per ogni t, $U(t)$ ha supporto in $C^0([0,t], \mathscr{H}'(G_t^\rho))$.

Ora supponiamo che ρ sia abbastanza piccolo da avere

$$\rho e^{C\int_0^T \tilde{\Lambda}} < \min\left(\frac{1}{4ea},\ \ d(K, \Omega^c) - \int_0^T \tilde{\Lambda}\right).$$

Prendiamo m tale che $T/m < \tau(\rho)$ e poniamo $t_j = jT/m$ per ogni $j \leq m$. Abbiamo allora una soluzione U tale che, per ogni $t \leq t_1$, $U(t)$ ha supporto in

$$\left\{z \in \mathbb{C} : d(x, K) \leq \int_0^t \Lambda + \rho C\int_0^t \tilde{\Lambda},\ \ |y| \leq \rho\left(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\right)\right\},$$

e quindi

$$U(t) \in C^0([0,t], \mathscr{H}'(K_t^\rho)), \tag{3.23}$$

$$K_t^\rho \doteq \left\{ z \in \mathbb{C} : d(x,K) \leq \int_0^t \Lambda + \rho C \int_0^t \tilde{\Lambda}, \quad |y| \leq \rho e^{C \int_0^t \tilde{\Lambda}} \right\}.$$

Possiamo allora considerare il problema con dato iniziale $U(t_1)$, e riusciamo cosí a estendere la soluzione fino al tempo t_2, e abbiamo che la (3.23) é valida per $t \leq t_2$. Iterando il procedimento, otteniamo una soluzione U per il problema (3.2), definita su $[0,T]$, tale che, per ogni t, $U \in C^0([0,t], \mathscr{H}'(K_t^\rho))$ per ogni $t \leq T$.

A questo punto siamo pronti per terminare la dimostrazione del teorema.

Se Φ é in $\mathcal{A}'(K)$, allora é in $\mathscr{H}'(D_K^\rho)$, $D_K^\rho = \{z \in \mathbb{C} : x \in K, |y| \leq \rho\}$ per ogni $\rho > 0$. Per quanto abbiamo appena dimostrato, allora esiste una soluzione U definita per tutti i tempi tale che $U(t)$ é un funzionale olomorfo con supporto in

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : d(x,K) \leq \int_0^T \Lambda + \rho C \int_0^T \tilde{\Lambda}, \quad |y| \leq \rho e^{C \int_0^T \tilde{\Lambda}} \right\}$$

per ogni ρ positivo abbastanza piccolo, e quindi $U(t)$ é un funzionale olomorfo con supporto nell'intersezione di questi insiemi, che é contenuta in $\mathbb{R}$, e cioé un funzionale analitico reale a supporto in

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \leq \int_0^t \Lambda(s) ds \right\}.$$

Piú esattamente abbiamo che per ogni t U appartiene a $C^0([0,t], \mathcal{A}'(K_t))$, e quindi, grazie alla (3.19), a $H^{1,1}([0,t], \mathcal{A}'(K_t))$.

Ci resta solo da verificare che il teorema resta vero se assumiamo la (3.21) al posto della (3.22).
Se K_1 é tale che

$$d(K, K_1^c) < \int_0^T \Lambda(s) ds,$$

per quanto dimostrato finora, abbiamo una soluzione in $H^{1,1}([0,T], \mathcal{A}'(K_1))$, e quindi in $H^{1,1}([0,T], \mathcal{A}'(\Omega))$.
Inoltre, questa soluzione é unica in $H^{1,1}([0,T], \mathcal{A}'(K'))$ per ogni $K' \supset K$, e quindi in $H^{1,1}([0,T], \mathcal{A}'(\Omega))$. □

3.2 I sistemi simmetrici II

Analizzeremo ora una classe piú ampia di sistemi simmetrici. Vedremo poi come i risultati ottenuti implicano i risultati sulle equazioni del secondo ordine.

Vogliamo studiare sistemi della forma

$$\begin{cases} A_0(x,t)\partial_t U = \sum_{h=1}^n A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U + F(x,t), \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{3.24}$$

con A_h hermitiana per $h = 0, \dots, n$, e A_0 definita positiva.

Utilizzeremo la stessa tecnica illustrata nel paragrafo precedente. Analizziamo prima il caso in cui A_0 non dipenda da x, e cioé che il sistema sia della forma

$$\begin{cases} A_0(t)\partial_t U = \sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U + F(x,t), \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{3.25}$$

con $A_0 \in L^\infty(0,T)$.

Supponiamo per semplicitá $F = 0$.

Come diventa il sistema (3.25) (con $F = 0$) se sviluppiamo i coefficienti in serie nell'intorno di un punto e utilizziamo la trasformata di Fourier rispetto alle variabili spaziali?

Il sistema che otteniamo é della forma seguente:

$$\begin{cases} A_0(t)\partial_t V(\zeta,t) = \sum_{h=1}^{n} i A_h^0(t)\zeta_h V(\zeta,t) + \sum_k i^{|k|} B^k(t)\partial_\zeta^k V(\zeta,t) + \\ \qquad\qquad + \sum_{|k|\neq 0} \sum_{h=1}^{n} i^{|k|+1} A_h^k(t)\partial_\zeta^k(\zeta_h V(\zeta,t)), \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.26}$$

Vogliamo allora dimostrare un analogo del lemma 3.1 per il sistema (3.26).

La dimostrazione risulterá piú complicata per la presenza del coefficiente A_0, soprattutto per la sua irregolaritá.

Lemma 3.2. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} A_0(t)\partial_t V(\zeta,t) = \sum_{h=1}^{n} i A_h^0(t)\zeta_h V(\zeta,t) + \sum_k B^k(t)\partial_\zeta^k V(\zeta,t) + \\ \qquad\qquad + \sum_{|k|\neq 0} \sum_{h=1}^{n} A_h^k(t)\partial_\zeta^k(\zeta_h V(\zeta,t)), \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.27}$$

in $\mathbb{C}^n \times [0,T]$ *con* $A^0(t), A_h^k(t), B^k(t)$ *funzioni misurabili nello spazio delle matrici* $(N \times N)$ *e che soddisfano le seguenti ipotesi:*

$$A_0 = A_0^* \tag{3.28}$$

$$A_h^0 = \left(A_h^0\right)^*, \tag{3.29}$$

$$\lambda|\zeta|^2 \leq (A_0(t)\zeta,\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n \tag{3.30}$$

$$A_0 \in L^\infty \tag{3.31}$$

$$\sum_{h=1}^{n} |A_h^k(t)| + B^k(t) \leq \tilde{\Lambda}(t) a^{|k|}, \qquad k \in N^n, \tag{3.32}$$

con $\lambda > 0, \quad a > 0, \quad \tilde{\Lambda} \in L^\infty(0,T)$.
Se $V^{(0)}(\zeta) \in \mathscr{H}$ *e esistono* M *e* ρ *tali che*

$$(1+|\zeta|)|V^{(0)}(\zeta)| \leq M e^{\rho|\zeta|}, \qquad \zeta \in C^n,$$

$$0 < \rho \leq \frac{1}{4ea},$$

allora esistono $\tau(\rho) > 0, \overline{\varepsilon}(\rho) > 0$ *tale che il problema ha una soluzione* V *appartenente a* $H^{1,1}([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$*, e vale la stima*

$$\big|V(\zeta,t)\big| \leq M_\varepsilon e^{\rho|\zeta|}\exp\bigg(C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda} ds(|\zeta|+1) + \frac{1}{\lambda}\sum_h \int_0^t |A_h^0| ds|\eta| + \varepsilon|\zeta|\bigg) \quad (3.33)$$

per ogni $0 < t < \tau(\rho), 0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$*, con*

$$C = 8e\frac{a}{\lambda}(1+2\|A_0\|_\infty \lambda^{-1}).$$

Dimostrazione. Analogamente a come abbiamo fatto per il lemma 3.1, definiamo V_1 la soluzione del problema

$$\begin{cases} A_0 \partial_t V_1 = \displaystyle\sum_{h=1}^n i A_h^0 \zeta_h V_1 + B^0 V_1, \\ \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \quad (3.34)$$

e, definite $V_1, \ldots, V_l$, V_{l+1} la soluzione di

$$\begin{cases} A_0 \partial_t V_{l+1} & = \displaystyle\sum_{h=1}^n i A_h^0 \zeta_h V_{l+1} + B^0 V + \\ & \quad + \displaystyle\sum_{|k|\neq 0} B^k \partial_\zeta^k V_l + \sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^n B_h^k \partial_\zeta^k (\zeta_h V_l), \\ \\ V_{l+1}(\zeta,0) & = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Mostreremo che $\sum_l V_l$ converge, e quindi otterremo una soluzione di (3.27). Consideriamo una equazione ordinaria del tipo

$$A_0 V'(t) = \sum_{h=1}^n i A_h^0 \zeta_h V + B^0 V + F, \quad (3.36)$$

dove $\zeta \in C^n$ appare solo come un parametro, con A_0, A_h^0, B^0 che soddisfano le ipotesi (3.28)-(3.32).

Qual é l'energia che prendiamo in considerazione in questo caso? La forma dell'equazione ci suggerirebbe di prendere come energia $\big(A_0(t)V(t), V(t)\big)$. Effettivamente abbiamo

$$\lambda |V(t)|^2 \leq \big(A_0(t)V(t), V(t)\big) \leq \|A_0\|_\infty |V(t)|^2$$

per ogni t. In questo caso, peró, non possiamo procedere come abbiamo fatto nella dimostrazione del lemma 3.1. Infatti le ipotesi su A_0, che é solo L^∞, non ci permettono di derivare $\big(A_0(t)V(t), V(t)\big)$.

Proviamo allora ad utilizzare delle "energie approssimate", che otterremo approssimando A_0 attraverso la convoluzione con una famiglia di mollificatori $\{\rho_\sigma\}_\sigma$.
Precisamente, scegliamo una funzione regolare $\rho(t)$ tale che $\rho(t) = 0$ per $|t| \geq 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(t)dt = 1, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad |\rho'| \leq 4,$$

e definiamo, per ogni $\sigma \geq 0$, $\rho_\sigma(t) := \sigma^{-1}\rho(\frac{t}{\sigma})$, e

$$B_\sigma(t) := \int_0^{T-\sigma} A_0(t+s)\rho_\sigma(s)ds, \quad C_\sigma(t) := A_0(t) - B_\sigma(t).$$

La matrice B_σ é hermitiana, C^1,e verifica

$$\lambda|\xi|^2 \leq (B_\sigma(t)\xi, \xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre abbiamo

$$\lim_{\sigma\to 0} \int_0^T |C_\sigma(t)|dt = 0 \ \ e \ \ \|C_\sigma\|_\infty \leq 2\|A_0\|_\infty$$

Definiamo dunque l' "energia approssimata"

$$E_\sigma(t) = \big(B_\sigma(t)V(t), V(t)\big),$$

e cerchiamo una stima. $E_\sigma(t)$ é derivabile, e otteniamo dalla (3.36):

$$\begin{aligned}
E'_\sigma(t) &= (B'_\sigma V, V) + 2\mathrm{Re}(B_\sigma V', V) = \\
&= (B'_\sigma V, V) + 2\mathrm{Re}(A_0 V', V) + 2\mathrm{Re}(C_\sigma V', V) = \\
&= (B'_\sigma V, V) + 2\mathrm{Re}\sum_h (iA_h^0\zeta_h V, V) + 2\mathrm{Re}(B^0V, V) + 2\mathrm{Re}(F, V) + \\
&\quad -2\mathrm{Re}\sum_h (iC_\sigma A_0^{-1}A_h^0\zeta_h V, V) + 2\mathrm{Re}(C_\sigma A_0^{-1}B^0V, V) + \\
&\quad +2\mathrm{Re}(C_\sigma A_0^{-1}F, V) \leq \\
&\leq |B'_\sigma||V|^2 + 2\sum_h |A_h^0||\eta_h||V|^2 + 2|B^0||V|^2 + 2|F||V| + \\
&\quad +2\sum_h |C_\sigma A_0^{-1}A_h^0||\zeta_h|V|^2 + 2|C_\sigma A_0^{-1}B^0||V|^2 + 2|C_\sigma A_0^{-1}F||V|,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
E'_\sigma \leq \frac{2}{\lambda}\bigg(\frac{|B'_\sigma|}{2} + \sum_h |A_h^0||\eta| + \sum_h |C_\sigma A_0^{-1}A_h^0||\zeta| + (1 + |C_\sigma A_0^{-1}|)|B^0|\bigg)E_\sigma + \\
+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}(1 + |C_\sigma A_0^{-1}|)|F|\sqrt{E_\sigma}.
\end{aligned}$$

Definiamo K_σ

$$K_\sigma = \frac{1}{\lambda}\Big[\int_0^t \frac{|B'_\sigma|}{2} + \int_0^t \sum_h |A_h^0||\eta| + \int_0^t \sum_h |C_\sigma A_0^{-1} A_h^0||\zeta| + \int_0^t (1+|C_\sigma A_0^{-1}|)|B^0|\Big]. \tag{3.37}$$

Abbiamo allora

$$e^{-K_\sigma(\zeta,t)}[E_\sigma(\zeta,t)]^{1/2} \le [E_\sigma(\zeta,0)]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t e^{-K_\sigma(\zeta,s)}(1+|C_\sigma A_0^{-1}|)|F(\zeta,s)|ds. \tag{3.38}$$

Siamo ora pronti per formulare l'ipotesi sulle V_l. Dimostreremo per induzione che

$$(1+|\zeta|)|V_l(\zeta,t)| \le 2^{-l} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(\zeta,t) + C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)}, \tag{3.39}$$

per ogni $t < \tau(\rho)$ che definiremo piú avanti.

$\mathbf{l = 1}$ Abbiamo

$$\sqrt{\lambda}|V_1| \le \sqrt{E_\sigma},$$

quindi, utilizzando la (3.38)

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}(1+|\zeta|)|V_1(\zeta,t)| &\le e^{K_\sigma(\zeta,t)}(1+|\zeta|)\sqrt{E_\sigma(0)} \le \\ &\le \sqrt{B_\sigma(0)} M e^{\rho|\zeta|} e^{K_\sigma(\zeta,t)} \end{aligned}$$

che dá la (3.39) per $l = 1$, ponendo

$$N_\sigma = 2M\frac{\sqrt{B_\sigma(0)}}{\sqrt{\lambda}}.$$

$\mathbf{l \to l+1}$ La (3.38) ci dá

$$\sqrt{\lambda}|V_{l+1}(t)| \le e^{K_\sigma(t)}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t e^{-K_\sigma(s)}(1+|C_\sigma(s)A_0^{-1}(s)|)|F_l(s)|ds, \tag{3.40}$$

con

$$F_l = \sum_{|k|\neq 0} B^k \partial_\zeta^k V_l + \sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^n A_h^k \partial_\zeta^k(\zeta_h V_l).$$

Cerchiamo allora una stima per le derivate di V_l e ζV_l.

Dall'ipotesi induttiva segue

$$\begin{aligned} |\partial_\zeta^k V_l(t,\zeta)| &\le 2^{-l} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(t,\zeta) + C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)} \qquad (3.41) \\ &\times e^{|k|}\Big[\rho + C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda} + \frac{1}{\lambda}\Big(\int_0^t \sum_h |A_h^0| + \sum_h \|C_\sigma A_0^{-1} A_h^0\|_1\Big)\Big]^{|k|}, \end{aligned}$$

e lo stesso per ζV_l. Definiamo $\tau(\rho)$ tale che

$$\left(\rho + C\rho \int_0^{\tau(\rho)} \tilde{\Lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\tau(\rho)} \sum_h |A_h^0|\right) < 2\rho \left(< \frac{1}{2ea}\right). \tag{3.42}$$

Siccome

$$\|C_\sigma A_0^{-1} A_h^0\|_1 \leq \|C_\sigma\|_1 \|A_0^{-1}\|_\infty \|A_h^0\|_\infty,$$
$$\lim_{\sigma \to 0} \|C_\sigma\|_1 = 0,$$

allora

$$\lim_{\sigma \to 0} \sum_h \|C_\sigma A_0^{-1} A_h^0\|_1 = 0 \tag{3.43}$$

e quindi possiamo prendere $\overline{\sigma}(\rho)$ tale che per ogni $\sigma < \overline{\sigma}(\rho)$

$$\left(\rho + C\rho \int_0^{\tau(\rho)} \tilde{\Lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\tau(\rho)} \sum_h |B_h^0| + \sum_h \|C_\sigma A_0^{-1} B_h^0\|_1\right) < 2\rho < \frac{1}{2ea}.$$

Abbiamo allora per ogni k

$$\begin{aligned}
|\partial_\zeta^k V_l| &\leq (2e\rho)^{|k|} \times 2^{-l} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(t,\zeta) + C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)} \\
|\partial_\zeta^k \zeta V_l| &\leq (2e\rho)^{|k|} \times 2^{-l} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(t,\zeta) + C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)}.
\end{aligned}$$

Possiamo allora stimare F_l:

$$\begin{aligned}
|F_l| &\leq 2^{-l} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(t,\zeta) + C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)} \\
&\times \sum_{|k| \neq 0} \tilde{\Lambda}(t) a^{|k|} (2e\rho)^{|k|} \\
&\leq 2^{-l} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(t,\zeta) + C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)} \\
&\times 4ea\rho \\
&\leq 2^{-l-1} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(t,\zeta) + C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)} \\
&\times \tilde{\Lambda}(t) \frac{C\rho\lambda}{1 + \|C_\sigma A_0^{-1}\|_\infty},
\end{aligned}$$

ricordando che

$$C = 8e\frac{a}{\lambda}(1 + 2\|A_0\|_\infty \lambda^{-1})$$

Sostituendo nella (3.40) abbiamo infine

$$\begin{aligned}
(1 + |\zeta|) e^{-K_\sigma(t)} |V_{l+1}(t)| &\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-K_\sigma(s)} (1 + |\zeta|)(1 + |C_\sigma(s) A_0^{-1}(s)|) |F_l(s)| ds \\
&\leq 2^{-l-1} N_\sigma e^{\rho|\zeta|} \\
&\times \int_0^t \tilde{\Lambda}(t)(1 + |\zeta|) C\rho e^{C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)} \\
&\leq 2^{-l-1} N_\sigma e^{\rho|\zeta|} e^{C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)},
\end{aligned}$$

cioé la (3.39).

Abbiamo allora che $\sum_l V_l$ converge in $C^0([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$, e $V \doteq \sum_l V_l$ é soluzione del sistema (3.27); dalla prima equazione del sistema segue che $V \in H^{1,1}([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$.

Sommando le (3.39) su l abbiamo inoltre che

$$|V(\zeta,t)| \le N_\sigma e^{\rho|\zeta|+K_\sigma(\zeta,t)+C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(|\zeta|+1)}. \tag{3.44}$$

Poniamo

$$\overline{\varepsilon}(\rho) = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \sum_h |C_{\overline{\sigma}(\rho)} A_0^{-1} A_h^0|,$$

per ogni $\varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$ esiste $\sigma(\varepsilon) < \overline{\sigma}(\rho)$ tale che

$$\int_0^T \sum_h |C_{\sigma(\varepsilon)} A_0^{-1} A_h^0| < \varepsilon.$$

La (3.33) segue allora dalla (3.44), ponendo

$$M_\varepsilon = N_{\sigma(\varepsilon)} \exp\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^t \frac{\left|B'_{\sigma(\varepsilon)}\right|}{2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t (1+|C_{\sigma(\varepsilon)}A_0^{-1}|)|B^0|\right].$$

□

Torniamo ora al caso generale, in cui $A_0 = A_0(x,t)$ dipende anche dalla x. Procedendo come nel caso precedente, siamo portati a studiare il sistema:

$$\begin{cases} A_0^0(t)\partial_t V(\zeta,t) + \displaystyle\sum_{|k|\neq 0} i^k A_0^k(t)\partial_\zeta^k \partial_t V(\zeta,t) = \sum_{h=1}^n i A_h^0(t)\zeta_h V(\zeta,t) + \\ \qquad + \displaystyle\sum_k i^k B^k(t)\partial_\zeta^k V(\zeta,t) + \sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^n i^{k+1} A_h^k(t)\partial_\zeta^k(\zeta_h V(\zeta,t)), \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.45}$$

Lemma 3.3. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} A_0^0(t)\partial_t V(\zeta,t) = \displaystyle\sum_{h=1}^n i A_h^0(t)\zeta_h V(\zeta,t) + B^0(t)V(\zeta,t) + \sum_{|k|\neq 0} B^k(t)\partial_\zeta^k V(\zeta,t) + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^n A_h^k(t)\partial_\zeta^k(\zeta_h V(\zeta,t)) + \sum_{|k|\neq 0} A_0^k(t)\partial_\zeta^k \partial_t V(\zeta,t), \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.46}$$

in $\mathbb{C}^n \times [0,T]$ *con* $A_0^k(t), A_h^k(t), B^k(t)$ *funzioni misurabili nello spazio delle matrici* $(N \times N)$ *e che soddisfano le seguenti ipotesi:*

$$A_0^0 = (A_0^0)^* \tag{3.47}$$

$$A_h^0 = \left(A_h^0\right)^*, \tag{3.48}$$

$$\lambda|\zeta|^2 \leq (A_0^0(t)\zeta, \zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n \tag{3.49}$$

$$|A_0^k(t)| + \sum_{h=1}^n |A_h^k(t)| + |B^k(t)| \leq \tilde{\Lambda}(t) a^{|k|}, \qquad k \in N^n, \tag{3.50}$$

con $\lambda > 0, \quad a > 0, \quad \tilde{\Lambda} \in L^\infty(0,T)$.

Se $V^{(0)}(\zeta) \in \mathscr{H}$ *e esistono* M, ρ *tali che*

$$(1 + |\zeta|)|V^{(0)}(\zeta)| \leq M e^{\rho|\zeta|}, \qquad \zeta \in C^n,$$

$$0 < \rho < \overline{\rho} \leq \frac{1}{4ea},$$

allora esistono $\tau(\rho) > 0, \overline{\varepsilon}(\rho) > 0$ *tale che il problema ha una soluzione* V *appartenente a* $H^{1,1}([0, \tau(\rho)], \mathscr{H})$,
e tale che per ogni $0 < t < \tau(\rho), 0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$ *vale la seguente stima:*

$$\left|V(\zeta,t)\right| \leq 2M_\varepsilon e^{\rho|\zeta|} \exp\left(C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda} ds(|\zeta|+1) + \frac{1}{\lambda} \sum_h \int_0^t |A_h^0| ds |\eta| + \varepsilon|\zeta| \right) \tag{3.51}$$

per una costante C *che dipende dai coefficienti.*

Dimostrazione. Come nel lemma precedente, definiamo V_1 la soluzione del problema

$$\begin{cases} A_0^0 \partial_t V_1 = \displaystyle\sum_{h=1}^n i A_h^0 \zeta_h V_1 + B^0 V_1, \\ \\ V(\zeta, 0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases} \tag{3.52}$$

e, definite $V_1, \ldots, V_l$, V_{l+1} la soluzione di

$$\begin{cases} A_0^0 \partial_t V_{l+1} & = \displaystyle\sum_{h=1}^n i A_h^0 \zeta_h V_{l+1} + B^0 V_{l+1} + \\ & + \displaystyle\sum_{|k| \neq 0} B^k \partial_\zeta^k V_l + \sum_{|k| \neq 0} \sum_{h=1}^n A_h^k \partial_\zeta^k (\zeta_h V_l) + \sum_{|k| \neq 0} A_0^k \partial_\zeta^k \partial_t V_l, \\ \\ V_{l+1}(\zeta, 0) & = 0. \end{cases} \tag{3.53}$$

Si tratta ancora di equazioni della forma

$$A_0^0 V'(t) = \sum_{h=1}^n i A_h^0 \zeta_h V + B^0 V + F,$$

quindi possiamo utilizzare ancora la (3.38).

Prima di presentare la stima per le V_l, vediamo cosa succede per $l = 1, 2$.

l = 1 Abbiamo, come nel caso precedente,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\lambda}(1+|\zeta|)|V_1(\zeta,t)| &\leq e^{K_\sigma(\zeta,t)}(1+|\zeta|)\sqrt{E_\sigma(0)} \\
&\leq \sqrt{B_\sigma(0)}Me^{\rho|\zeta|}e^{K_\sigma(\zeta,t)} \\
&\leq \frac{N_\sigma}{2}e^{\rho|\zeta|}e^{K_\sigma(\zeta,t)}. \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

l = 2 Vogliamo utilizzare ancora la (3.38), in questo caso con

$$
F_1 = \sum_{|k|\neq 0} B^k \partial_\zeta^k V_1 + \sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^{n} A_h^k \partial_\zeta^k(\zeta_h V_1) + \sum_{|k|\neq 0} A_0^k \partial_\zeta^k \partial_t V_1.
$$

Questa volta nella F compare anche $\partial_t V_1$. Per stimarla, utilizziamo la (3.52). Abbiamo

$$
|\partial_t V_1| \leq \sum_{h=1}^{n} |A_h^0||\zeta_h V_1| + |B^0||V_1|,
$$

quindi dalla (3.54)

$$
|\partial_t V_1| \leq \tilde{\Lambda}\frac{1}{\lambda}\frac{N_\sigma}{2}e^{\rho|\zeta|}e^{K_\sigma}.
$$

Scegliendo $\tau(\rho)$, $\overline{\sigma}(\rho)$ come nel lemma precedente, abbiamo

$$
\sum_{|k|\neq 0} |A_0^k||\partial_\zeta^k \partial_t V_1| \leq 4ea\rho\frac{\tilde{\Lambda}^2}{\lambda}\frac{N_\sigma}{2}e^{\rho|\zeta|}e^{K_\sigma}
$$

per ogni $0 < t < \tau(\rho), 0 < \sigma < \overline{\sigma}(\rho)$.
Allora possiamo stimare F_1:

$$
\begin{aligned}
|F_1| &\leq \sum_{|k|\neq 0} |B^k||\partial_\zeta^k V_1| + \sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^{n} |A_h^k||\partial_\zeta^k(\zeta_h V_1)| + \sum_{|k|\neq 0} |A_0^k||\partial_\zeta^k \partial_t V_1| \\
&\leq 2^{-l}N_\sigma 4ea\rho\tilde{\Lambda}\left(1+\frac{\tilde{\Lambda}}{\lambda}\right)e^{\rho|\zeta|+K_\sigma(t,\zeta)},
\end{aligned}
$$

che insieme alla (3.38) ci permette di dimostrare una stima simile alla (3.39).

Abbiamo visto che per stimare V_2 ci é servita questa volta una stima su $\partial_t V_1$, e per stimare $\partial_t V_1$ abbiamo utilizzato la (3.52) e la stima su V_1.
Per trattare il caso generale, dobbiamo allora dimostrare per induzione una doppia stima, per V_l e $\partial_t V_l$.

Esattamente, dimostriamo per induzione che

$$
(1+|\zeta|)|V_l(\zeta,t)| \leq 2^{-l}N_\sigma e^{\rho|\zeta|+K_\sigma(\zeta,t)+C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)}, \qquad (3.55)
$$

$$
|\partial_t V_l(\zeta,t)| \leq 2^{-l}N'_\sigma e^{\rho|\zeta|+K_\sigma(\zeta,t)+C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)}, \qquad (3.56)
$$

per ogni $t < \tau(\rho)$, con N_σ, N'_σ che definiremo piú avanti.

l = 1 La (3.55) per $l = 1$ l'abbiamo dimostrata poc'anzi, é la (3.54). Dalla (3.52),

$$|\partial_t V_1| \leq \frac{1}{\lambda}\tilde{\Lambda}(1+|\zeta|)|V_1|$$

da cui segue la (3.56) per $l = 1$, se $N'_\sigma \geq N_\sigma \dfrac{\tilde{\Lambda}}{\lambda}$.

l → l + 1 La (3.38) ci dá

$$\sqrt{\lambda}|V_{l+1}(t)| \leq e^{K_\sigma(t)} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t e^{-K_\sigma(s)}(1+|C_\sigma(s)(A_0^0)^{-1}(s)|)|F_l(s)|ds,$$

con

$$F_l = \sum_{|k|\neq 0} B^k \partial_\zeta^k V_l + \sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^n A_h^k \partial_\zeta^k(\zeta_h V_l) + \sum_{|k|\neq 0} A_0^k \partial_\zeta^k \partial_t V_l.$$

Abbiamo allora (utilizzando l'ipotesi induttiva)

$$\begin{aligned} |F_l| &\leq 4ea\rho\tilde{\Lambda}2^{-l}(N_\sigma + N'_\sigma)e^{\rho|\zeta|+K_\sigma(t,\zeta)+C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)} \\ &\leq 2^{-l-1}N_\sigma e^{\rho|\zeta|+K_\sigma(t,\zeta)+C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)} \\ &\times \tilde{\Lambda}\frac{C\rho\lambda}{1+\|C_\sigma(A_0^0)^{-1}\|_\infty}, \end{aligned}$$

prendendo

$$C = 8ea\frac{N_\sigma + N'_\sigma}{N_\sigma}\frac{1+2\|A_0^0\|_\infty\lambda^{-1}}{\lambda}.$$

Utilizzando il fatto che

$$\int_0^t g(s)e^{\int_0^s g(\sigma)d\sigma}ds < e^{\int_0^t g(s)ds}$$

e quindi

$$\begin{aligned} e^{-K_\sigma(t)}|V_{l+1}(t)| &\leq \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-K_\sigma(s)}(1+|C_\sigma(s)A_0^{-1}(s)|)|F_l(s)|ds \\ &\leq 2^{-l-1}N_\sigma e^{\rho|\zeta|}C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(t)(1+|\zeta|)e^{C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)} \\ &\leq 2^{-l-1}N_\sigma e^{\rho|\zeta|}e^{C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)}, \end{aligned}$$

che é la (3.55).

Dalla prima equazione di (3.53) infine

$$|\partial_t V_{l+1}| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\tilde{\Lambda} + 4ea\rho\tilde{\Lambda} + 8ea\rho\tilde{\Lambda}\frac{N'_\sigma}{N_\sigma}\right)2^{-l}N_\sigma e^{\rho|\zeta|}e^{C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)},$$

che implica la (3.56) se $N' = 2\dfrac{\tilde{\Lambda}}{\lambda}N$ e ρ é abbastanza piccolo.

Abbiamo allora che $\sum_l V_l$ converge in $C^0([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$, e $V := \sum_l V_l$ é soluzione del sistema (3.46); dalla prima equazione del sistema segue che $V \in H^{1,1}([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$.

Sommando le (3.55) su l abbiamo inoltre che

$$|V(\zeta,t)| \leq N_\sigma e^{\rho|\zeta|+K_\sigma(\zeta,t)+C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds(1+|\zeta|)}. \tag{3.57}$$

Poniamo

$$\overline{\varepsilon}(\rho) = \frac{1}{\lambda}\int_0^T \sum_h |C_{\overline{\sigma}(\rho)}(A_0^0)^{-1}A_h^0|,$$

per ogni $\varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$ esiste $\sigma(\varepsilon) < \overline{\sigma}(\rho)$ tale che

$$\int_0^T \sum_h |C_{\sigma(\varepsilon)}(A_0^0)^{-1}A_h^0| < \varepsilon.$$

La (3.51) segue allora dalla (3.57), ponendo

$$M_\varepsilon = N_{\sigma(\varepsilon)}\exp\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^t \frac{\left|B'_{\sigma(\varepsilon)}\right|}{2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t (1+|C_{\sigma(\varepsilon)}A_0^{-1}|)|B^0|\right].$$

□

Con dimostrazione analoga a quella utilizzata nella sezione precedente, abbiamo allora il seguente risultato:

Teorema 3.3. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} A_0(x,t)\partial_t U(x,t) = \displaystyle\sum_{h=1}^n A_h(x,t)\partial_{x_h}U(x,t) + B(x,t)U(x,t), \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N \times N$ *che soddisfino le seguenti ipotesi*

$$A_0 = A_0^*,$$
$$A_h = A_h^*, \quad h = 1,\ldots,n$$
$$A_0, A_h, B \in L^\infty([0,T],\mathcal{A}(\Omega)),$$
$$\lambda|\zeta|^2 \leq (A_0(t)\zeta,\zeta) \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n$$
$$|A_h(x,t)| \leq \Lambda(t)$$

con $\lambda > 0$, $\int_0^T \Lambda < \infty$.

Se $\Phi(x)$ *é un funzionale analitico reale con supporto nel compatto* $K \subset \Omega$ *tale che*

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^T \Lambda(s)ds < \operatorname{dist}(K,\Omega^c)$$

allora esiste ed é unica la soluzione U in $H^{1,\infty}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$, e per ogni $t\in[0,T]$ abbiamo

$$U \in H^{1,\infty}([0,T],\mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t = \left\{ x\in\Omega : d(x,K) \le \frac{1}{\lambda}\int_0^t \Lambda(s)ds \right\}.$$

3.2.1 Coefficienti L^1

Vogliamo ora dimostrare che nel caso in cui A_0 non dipenda da x, per ottenere la tesi del Teorema 3.3 é sufficiente supporre che i coefficienti siano solo integrabili, anziché limitati.

Per fare questo, prima dimostriamo un lemma sulle matrici in L^1, poi ripercorriamo la dimostrazione del caso precedente, con alcune modifiche.

Lemma 3.4. *Siano $A_0(t), A_1(t), \ldots, A_n(t)$ matrici quadrate $N\times N$ in L^1, con A_0 hermitiana e tale che*

$$(A_0(t)\zeta,\zeta) \ge \lambda|\zeta|^2 \qquad \forall\zeta\in\mathbb{C}^n,$$

allora, per ogni $\sigma>0$, esistono due matrici B_σ, C_σ in L^1 tali che

$$A_0 = B_\sigma + C_\sigma \tag{3.58}$$

$$B_\sigma \in C^\infty, \quad (B_\sigma\xi,\xi) \ge \lambda|\xi|^2 \tag{3.59}$$

$$C_\sigma A_0^{-1} \in L^\infty, \tag{3.60}$$

$$\sum_{h=1}^{n} \|C_\sigma A_0^{-1} A_h\|_1 < \sigma. \tag{3.61}$$

Osservazione Notiamo che la norma $\|C_\sigma A_0^{-1}\|_\infty$ non é necessariamente limitata quando σ tende a zero , mentre nel caso precedente, con $A_0\in L^\infty$, avevamo $\|C_\sigma A_0^{-1}\|_\infty \le 2\|A_0\|_\infty\lambda^{-1}$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima il caso particolare $N=1$, e poi il lemma.

$\mathbf{N=1}$ Abbiamo allora $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_m(t)$ funzioni (scalari) in $L^1(0,T)$, con a_0 reale, $a_0(t)\ge\lambda$ per ogni t; possiamo supporre inoltre $a_h,\ h=1,\ldots,n$ reali, non negative. Prolunghiamo a_0 fuori da $[0,T]$ ponendo $a_0(t)=\lambda$, per $t\in\mathbb{R}\backslash[0,T]$ e, prese le $\rho_\nu(t)$ definite nel lemma 3.1, definiamo

$$b_{\nu,m}(t) = (a_0\wedge m) * \rho_\nu\ (t),$$

$$c_{\nu,m}(t) = a_0(t) - b_{\nu,m}(t),$$

per ogni $\nu>0, m>\lambda$. Abbiamo allora

$$c_{\nu,m} = (a_0 - a_0\wedge m) + (a_0\wedge m - b_{\nu,m}),$$

che implica

$$\|c_{\nu,m}a_0^{-1}\|_\infty \le \frac{2m}{\lambda}.$$

Infatti,

$$a_0(t) \geq m \Rightarrow c_{\nu,m}(t) = a_0(t) - m + m - b_{\nu,m}(t) = a_0(t) - b_{\nu,m}(t) \leq a_0(t)$$

e quindi

$$|c_{\nu,m} a_0^{-1}(t)| \leq 1 \leq \frac{2m}{\lambda},$$

mentre

$$a_0(t) \leq m \Rightarrow c_{\nu,m}(t) = a_0(t) - b_{\nu,m}(t) \leq 2m$$

e quindi

$$|c_{\nu,m} a_0^{-1}(t)| \leq \frac{2m}{\lambda}.$$

Cerchiamo ora di stimare $\sum_h \int_0^T c_{\nu,m} a_0^{-1} a_h$.

Abbiamo

$$\int_0^T c_{\nu,m} a_0^{-1} a_h = \int_0^T (a_0 - a_0 \wedge m) a_0^{-1} a_h + \int_0^T (a_0 \wedge m - b_{\nu,m}) a_0^{-1} a_h.$$

Per il primo di questi due integrali

$$\int_0^T (a_0 - a_0 \wedge m) a_0^{-1} a_h = \int_{\{a_0 > m\}} (a_0 - a_0 \wedge m) a_0^{-1} a_h \leq \int_{\{a_0 > m\}} a_h.$$

Siccome a_0 é in L^1, $\{a_0 > m\} \downarrow \emptyset$ quando $m \uparrow \infty$. Ma anche le a_h é in L^1, quindi possiamo prendere $m(\sigma)$ abbastanza grande da avere

$$\int_0^T (a_0 - a_0 \wedge m(\sigma)) a_0^{-1} a_h \leq \int_{\{a_0 > m(\sigma)\}} a_h \leq \frac{\sigma}{2}$$

per ogni h. Fissato $m(\sigma)$, cerchiamo ora di trovare $\nu(\sigma)$ tale che

$$\int_0^T (a_0 \wedge m(\sigma) - b_{\nu(\sigma),m(\sigma)}) a_0^{-1} a_h \leq \frac{\sigma}{2}$$

per ogni h. Prendiamo una successione $\nu_n \to 0$, e definiamo

$$f_{\nu_n} = [a_0 \wedge m(\sigma) - (a_0 \wedge m(\sigma)) * \rho_{\nu_n}] a_0^{-1}.$$

Abbiamo allora

$$\|f_{\nu_n}\|_\infty \leq \frac{2m(\sigma)}{\lambda}, \quad f_{\nu_n} \to 0 \text{ in } L^1,$$

e possiamo quindi supporre (a meno di estrarre una sottosuccessione) che $f_{\nu_n} \to 0$ q.o.

Riassumendo, per ogni h

$$f_{\nu_n} a_h \to 0 \ \ q.o., \quad |f_{\nu_n} a_h| \leq \|f_{\nu_n}\|_\infty a_h \leq \frac{2m(\sigma)}{\lambda} a_h \in L^1,$$

e quindi per il teorema di convergenza dominata $f_{\nu_n} a_h \to 0$ in L^1, cioé esiste $n(\sigma)$ tale che

$$\int_0^T (a_0 \wedge m(\sigma) - b_{\nu_{n_\sigma}, m(\sigma)}) a_0^{-1} a_h \leq \frac{\sigma}{2}$$

per ogni h. Basta porre

$$b_\sigma = b_{\nu_{n_\sigma}, m(\sigma)}, \quad c_\sigma = c_{\nu_{n_\sigma}, m(\sigma)}$$

per avere

$$c_\sigma a_0^{-1} \in L^\infty, \quad \|c_\sigma a_0^{-1} a_h\|_1 < \sigma.$$

$\mathbf{N > 1}$ $A_0(t)$ é una matrice hermitiana per ogni t, quindi esiste una matrice unitaria $P(t)$, $\|P(t)\|_\infty \leq 1$ tale che $P(t)A_0(t)P(t)^{-1}$ é una matrice diagonale. Applicando il risultato precedente ai coefficienti della diagonale di PA_0P^{-1} possiamo trovare per ogni $\sigma > 0$ due matrici H_σ, K_σ tali che

$$PA_0P^{-1} = H_\sigma + K_\sigma, \quad H_\sigma \in C^\infty, K_\sigma \in L^\infty,$$

$$\sum_h \|K_\sigma P A_0^{-1} P^{-1} P A_h\|_1 = \|K_\sigma P A_0^{-1} A_h\|_1 < \frac{\sigma}{2}.$$

Abbiamo allora $A_0 = P^{-1}H_\sigma P + P^{-1}K_\sigma P$ con $P^{-1}H_\sigma P$ limitata. Siccome $P^{-1}H_\sigma P$ é limitata, possiamo prendere B_σ, M_σ tali che

$$P^{-1}H_\sigma P = B_\sigma + M_\sigma, \quad B_\sigma \in C^\infty,$$

$$\sum_h \|M_\sigma A_0^{-1} A\|_1 < \frac{\sigma}{2}.$$

Ponendo $C_\sigma \doteq M_\sigma + P^{-1}K_\sigma P$ abbiamo la tesi. □

Nota Analogamente possiamo richiedere, al posto della (3.61), che $\sum_{h=1}^n \int_0^T |C_\sigma A_0^{-1}| f_h < \sigma$ con f_h funzioni scalari L^1.

Siamo ora pronti per riformulare e ridimostrare il lemma 3.2 nel caso di coefficienti integrabili.

Lemma 3.5. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} A_0(t)\partial_t V(\zeta, t) = \displaystyle\sum_{h=1}^n i A_h^0(t) \zeta_h V(\zeta, t) + \sum_k B^k(t) \partial_\zeta^k V(\zeta, t) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\sum_{|k| \neq 0} \sum_{h=1}^n A_h^k(t) \partial_\zeta^k (\zeta_h V(\zeta, t)), \\ V(\zeta, 0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases}$$

in $\mathbb{C}^n \times [0,T]$, *con* $A_0(t), A_h^k(t), B^k(t)$ *funzioni misurabili nello spazio delle matrici* $(N \times N)$ *e che soddisfino le seguenti ipotesi:*

$$A_0 = A_0^*$$

$$A_h^0 = \left(A_h^0\right)^*,$$

$$\lambda|\zeta|^2 \leq (A_0(t)\zeta, \zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n$$

$$A_0 \in L^1(0,T)$$

$$B^k(t) + \sum_{h=1}^{n} |A_h^k(t)| \leq \tilde{\Lambda}(t) a^{|k|}, \qquad k \in N^n,$$

con $\lambda > 0, \quad a > 0, \quad \int_0^T \tilde{\Lambda}(t)dt < \infty.$
Se $V^{(0)}(\zeta) \in \mathscr{H}$ *e esistono* M, ρ *tali che*

$$(1 + |\zeta|)|V^{(0)}(\zeta)| \leq M e^{\rho|\zeta|},$$

$$0 < \rho \leq \frac{1}{4ea},$$

allora esistono $\tau(\rho) > 0$, $\overline{\varepsilon}(\rho) > 0$ *tale che il problema ha una soluzione* V *appartenente a* $H^{1,1}([0, \tau(\rho)], \mathscr{H})$
e tale che per ogni $0 < t < \tau(\rho), 0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$ *vale la seguente stima:*

$$\left|V(\zeta, t)\right| \leq M_\varepsilon e^{\rho|\zeta|} e^{(C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda} ds)(|\zeta|+1) + \frac{1}{\lambda} \sum_h \int_0^t |A_h^0| ds |\eta| + \varepsilon|\zeta|}$$

con C *una costante che dipende dai coefficienti.*

Dimostrazione. La dimostrazione é analoga a quella del lemma 3.2, ma fa uso del lemma 3.4 per definire B_σ, C_σ.

Si definiscono ancora le V_l per mezzo dei sistemi (3.34), (3.35).

Si definiscono poi, utilizzando il lemma 3.4, B_σ e C_σ in modo che

$$\sum_h \int_0^T |C_\sigma A_0^{-1} A_h^0| + \int_0^T |C_\sigma A_0^{-1}| \tilde{\Lambda} < \sigma.$$

Allora l'energia $E_\sigma = (B_\sigma V, V)$ soddisfa ancora la (3.38) con K_σ definita come nella (3.37).

Utilizzeremo questa stima per dimostrare che, al posto della (3.39) vale

$$(1 + |\zeta|)|V_l(\zeta, t)| \leq 2^{-l} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(\zeta,t) + C\rho \int_0^t (1+|C_\sigma A_0^{-1}|)\tilde{\Lambda} ds (|\zeta|+1)}, \tag{3.62}$$

per ogni l e per ogni $t < \tau(\rho)$.

$\mathbf{l = 1}$ É identico al caso dei coefficienti limitati.

$\mathbf{l \to l+1}$ Ripercorriamo la dimostrazione del lemma 3.2.

Definito $\tau(\rho)$ come nella (3.42), possiamo ancora prendere $\overline{\sigma}(\rho)$ tale che per ogni $\sigma < \overline{\sigma}(\rho)$

$$\left(\rho + C\rho \int_0^{\tau(\rho)} \tilde{\Lambda}(s)ds + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\tau(\rho)} \sum_h |A_h^0| + \sum_h \|C_\sigma A_0^{-1} A_h^0\|_1 \right) < 2\rho < \frac{1}{2ea}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} |F_l| &\leq 2^{-l-1} N_\sigma e^{\rho|\zeta| + K_\sigma(t,\zeta) + C\rho \int_0^t (1+|C_\sigma A_0^{-1}|)\tilde{\Lambda} ds(|\zeta|+1)} \\ &\times \tilde{\Lambda}(t)(1+|\zeta|) \frac{C\rho\lambda}{1+|C_\sigma A_0^{-1}|}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} e^{-K_\sigma(t)} |V_{l+1}(t)| &\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-K_\sigma(s)} (1 + |C_\sigma(s) A_0^{-1}(s)|) |F(s)| ds \\ &\leq 2^{-l-1} N_\sigma e^{\rho|\zeta|} e^{C\rho \int_0^t (1+|C_\sigma A_0^{-1}|)\tilde{\Lambda} ds(|\zeta|+1)}. \end{aligned}$$

Siccome $\int_0^T |C_\sigma A_0^{-1}| < \sigma$, ragionando come nel lemma 3.2 si ottiene la tesi. □

Dal lemma segue allora il teorema:

Teorema 3.4. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} A_0(t)\partial_t U(x,t) = \sum_{h=1}^n A_h(x,t)\partial_{x_h} U(x,t) + B(x,t)U(x,t), \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{3.63}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N \times N$ *che soddisfano le seguenti ipotesi*

$$A_0 = A_0^*,$$
$$A_h = A_h^*, \quad h = 1, \ldots, n$$
$$A_0 \in L^1(0,T), \quad A_h, B \in L^1([0,T], \mathcal{A}(\Omega)),$$
$$\lambda|\xi|^2 \leq (A_0(t)\xi, \xi) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$
$$\sum_h |A_h(x,t)| \leq \Lambda(t)$$

con $\lambda > 0$, $\int_0^T \Lambda < \infty$.

Se $\Phi(x)$ *é un funzionale analitico reale con supporto nel compatto* $K \subset \Omega$ *tale che*

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^T \Lambda(s)ds < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$$

allora esiste ed é unica la soluzione U in $H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$, e per ogni $t\in[0,T]$ abbiamo

$$U \in H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^t \Lambda(s)ds \right\}.$$

Il teorema che segue non é altro che un caso particolare del precedente:

Teorema 3.5. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U(x,t) + B(x,t)U(x,t), \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{3.64}$$

per $(x,t)\in\Omega\times[0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N\times N$ che soddisfano le seguenti ipotesi

$$A_h = A_h^*, \quad h = 1,\dots,n$$
$$A_h, B \in L^1([0,T],\mathcal{A}(\Omega)),$$
$$\sum_h |A_h(x,t)| \leq \Lambda(t)$$

con $\int_0^T \Lambda < \infty$.

Se $\Phi(x)$ é un funzionale analitico reale con supporto nel compatto $K\subset\Omega$ tale che

$$\int_0^T \Lambda(s)ds < \mathrm{dist}(K,\Omega^c)$$

allora esiste ed é unica la soluzione U in $H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$, e per ogni $t\in[0,T]$ abbiamo

$$U \in H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \leq \int_0^t \Lambda(s)ds \right\}.$$

3.3 Sistemi uniformemente iperbolici

Passiamo ora alla seconda classe di sistemi che intendiamo studiare. Abbandoniamo quindi l'ipotesi di simmetria per sostituirla con quella di regolare iperbolicitá.
Vedremo come questa ipotesi permette di "simmetrizzare" in modo regolare il sistema, e quindi di ottenere stime dell'energia per la soluzione del sistema trasformato come nel caso precedente.

3.3.1 Coefficienti regolari

Per semplicitá consideriamo prima il caso in cui i coefficienti siano C^1. Utilizzeremo il seguente lemma:

Lemma 3.6 (Esistenza del simmetrizzatore). *Sia $A(t)$ una matrice $N \times N$ in $L^1(0,T)$ che abbia per ogni t autovalori reali e distinti e tale che, indicati con $\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)$ gli autovalori di $A(t)$, si abbia*

$$\inf_{i \neq j} |\lambda_i(t) - \lambda_j(t)| \geq \delta > 0 \qquad \forall t.$$

Allora, esiste una matrice $Q(t)$ misurabile tale che

- $Q = Q^*$
- $QA = A^*Q = (QA)^*$
- $\delta^{2(N-1)}|v|^2 \leq (Qv, v) \leq C_N |A|^{2(N-1)}|v|^2$

e che é $C^1([0,T])$ se lo é A.

Dimostrazione. Siano $\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)$ N funzioni in $L^1(0,T)$ che rappresentano gli autovalori di A (cioé tali che per ogni t $\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)\}$ é l'insieme degli autovalori di $A(t)$), e supponiamo che siano C^1 se lo é A (é sempre possibile scegliere le λ_j in questo modo, grazie al teorema della funzione implicita).

Per ogni j, $1 \leq j \leq N$, sia $\Gamma_j(t)$ la circonferenza nel piano complesso di centro $\lambda_j(t)$ e raggio $\delta/2$.
Definiamo

$$P_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j(t)} (zI - A(t))^{-1} dz, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.65}$$

$P_j(t)$ é un operatore lineare con le seguenti proprietá:

$$P_j^2 = P_j, \qquad AP_j = P_jA = \lambda_j P_j,$$

$$\textstyle\sum_j P_j = I, \qquad |P_j| \leq 4N^4(|A|/\delta)^{2(N-1)}.$$

Questo significa che per ogni j P_j é il proiettore sull'autospazio (di dimensione 1) relativo all'autovalore λ_j. Il vantaggio di scriverlo nella forma (3.65) é che, se $A(t)$ é C^k, e scegliamo le funzioni λ_j in modo che siano C^k, allora si dimostra facilmente che anche le $P_j(t)$ hanno la stessa regolaritá.

Verifichiamo ora le proprietá delle P_j.
La prima segue dall'*equazione del risolvente*:

$$(zI - A)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1} = (z - \lambda)^{-1}(zI - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}.$$

Sia $\Gamma'_j(t)$ la circonferenza di centro $\lambda_j(t)$ e raggio $\frac{\delta}{4}$, allora abbiamo:

$$\begin{aligned}
P_j^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(zI-A)^{-1}dz\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\right)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(zI-A)^{-1}dz\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_j}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\right)\\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_j\times\Gamma'_j}(zI-A)^{-1}(\lambda I-A)^{-1}dzd\lambda.
\end{aligned}$$

Utilizzando l'equazione del risolvente abbiamo

$$\begin{aligned}
P_j^2 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_j\times\Gamma'_j}(z-\lambda)^{-1}\big((zI-A)^{-1}-(\lambda I-A)^{-1}\big)dzd\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(zI-A)^{-1}dz\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_j}(z-\lambda)^{-1}d\lambda\right)\\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_j}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(z-\lambda)^{-1}dz\right).
\end{aligned}$$

Il primo integrale si annulla, per come abbiamo scelto Γ'_j. Infatti, l'indice di Γ'_j rispetto ad ogni punto di Γ_j é 0, cioé

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_j}(z-\lambda)^{-1}d\lambda = 0$$

per ogni z in Γ_j, mentre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(z-\lambda)^{-1}d\lambda = -1.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
P_j^2 &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_j}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(z-\lambda)^{-1}dz\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_j}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\\
&= P_j(t).
\end{aligned}$$

$P_jA = AP_j$ segue dal fatto che, per ogni z in $\mathbb{C}$, $A = zI-(zI-A)$ commuta con $(zI-A)^{-1}$, allora

$$P_jA = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(zI-A)^{-1}Adz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}A(zI-A)^{-1}dz = AP_j.$$

Per dimostrare che $AP_j = \lambda_j P_j$, scegliamo $\{v_1, \ldots, v_N\}$ una base di autovettori di A, $Av_k = \lambda_k v_k$ per ogni k. Abbiamo allora

$$
\begin{aligned}
P_j v_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(zI-A)^{-1}v_k dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(zI-A)^{-1}\frac{(zI-A)}{z-\lambda_k}v_k dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{v_k}{z-\lambda_k}dz \\
&= v_k\delta^{jk}.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$AP_j v = AP_j\Big(\sum_k c_k v_k\Big) = A\sum_k c_k P_j v_k = Ac_j v_j = c_j\lambda_j v_j = \lambda_j P_j v.$$

Analogamente

$$\sum_j P_j v = \sum_j P_j\Big(\sum_k c_k v_k\Big) = \sum_j c_j v_j = v,$$

cioé $\sum_j P_j = I$.

Stimiamo ora la norma dei P_j. Per avere una stima uniforme, é essenziale l'ipotesi che la distanza tra gli autovalori sia minorata uniformemente. Abbiamo chiaramente

$$|P_j| \leq \frac{\delta}{2} sup_{z\in\Gamma_j}|(zI-A)^{-1}|.$$

Cerchiamo allora di stimare $|(zI-A)^{-1}|$,utilizzando il fatto che

$$|(zI-A)^{-1}| = \Big(inf_{|v|=1}|(zI-A)v|\Big)^{-1}.$$

Ricordiamo che abbiamo $|z-\lambda_j| = \frac{\delta}{2}$ per ogni $z \in \Gamma_j$. Prendiamo $\{v_1, \ldots, v_N\}$ una base di autovettori di A di norma unitaria. Se v é un vettore di norma unitaria, abbiamo $v = \sum_j c_j v_j$ e

$$1 = |v| = \sum_j c_j^2 + \sum_{i\neq j} c_i c_j (v_i, v_j) \leq \sum_{i,j}|c_i||c_j|,$$

e quindi esiste h tale che $|c_h| > N^{-4}$. Supponiamo sia $h = 1$. Consideriamo

$$B = (A-\lambda_2 I)\cdot\ldots\cdot(A-\lambda_N I),$$

abbiamo allora

$$B\big((zI-A)v\big) = \prod_{j=2}^{N}(\lambda_1-\lambda_j)(z-\lambda_1)c_1 v_1,$$

quindi
$$|B(zI-A)v| \geq \frac{\delta^N}{2N^4}.$$
Siccome $|B| \leq 2|A|^{N-1}$,
$$\frac{\delta^N}{2N^4} \leq |B(zI-A)v| \leq 2|A|^{N-1}|(zI-A)v|,$$
cioé
$$|(zI-A)^{-1}| \leq \frac{4N^4}{\delta^N}|A|^{N-1}$$
da cui segue
$$|P_j| \leq \frac{2N^4}{\delta^{N-1}}|A|^{N-1}.$$
Ora definiamo
$$H = \sum_j P_j^* P_j.$$
H ha la stessa regolaritá delle P_j, e quindi di A.
Abbiamo allora, grazie alle proprietá delle P_j,
$$H^* = \Big(\sum_j P_j^* P_j\Big)^* = \sum_j P_j^* P_j = H,$$
$$HA = \sum_j P_j^* P_j A = \sum_j P_j^* \lambda_j P_j = \sum_j P_j^* \overline{\lambda}_j P_j$$
perché i λ_j sono reali, e quindi
$$HA = \sum_j P_j^* \overline{\lambda}_j P_j = \sum_j (\lambda_j P_j)^* P_j = \sum_j (P_j A)^* P_j = \sum_j A^* P_j^* P_j = A^* H.$$

Infine
$$(Hv,v) = \sum_j |P_j v|^2 \geq c_N \Big(\sum_j |P_j v|\Big)^2 \geq c_N \Big|\sum_j P_j v\Big|^2 \geq c_N |v|^2,$$
e
$$|H| \leq \sum_j |P_j|^2 \leq 4N^5 \delta^{2(1-N)} |A|^{2(N-1)}.$$
Basta allora porre
$$Q = c_N^{-1} \delta^{2(N-1)} H$$
per avere la tesi. $\square$

Utilizzeremo il simmetrizzatore appena costruito per dimostrare il risultato sui sistemi uniformemente iperbolici.

Lemma 3.7. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t V = \sum_{h=1}^{n} iA_h^0(t)\zeta_h V + B^0(t)V + \sum_{|k|\neq 0} B^k(t)\partial_\zeta^k V(\zeta,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^{n} A_h^k(t)\partial_\zeta^k(\zeta_h V(\zeta,t)) \\ V(\zeta,0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases}$$

con $A_h^k(t), B_h^k(t)$ *funzioni misurabili nello spazio delle matrici* $(N \times N)$ *e che soddisfano le seguenti ipotesi:*

$$A_h^0 \in C^1 \quad \forall h$$

$$\sum_{h=1}^{n} |A_h^0(t)| \leq \Lambda(t)$$

$$\sum_{h=1}^{n} |A_h^k(t)| + |B^k(t)| \leq \tilde{\Lambda}(t)a^{|k|}, \qquad k \in N^n,$$

con $a > 0$, Λ *e* $\tilde{\Lambda}$ *in* $L^{2N-1}(0,T)$.
Supponiamo inoltre che sia soddisfatta la seguente condizione di iperbolicitá:

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, *la matrice* $\sum_h A_h^0(t)\xi_h$ *ha per ogni* t *autovalori reali e distinti e tali che, indicati con* $\lambda_1(\xi,t), \ldots, \lambda_n(\xi,t)$ *gli autovalori di* $\sum_h A_h^0(t)\xi_h$, *si ha*

$$\inf_{i\neq j} |\lambda_i(\xi,t) - \lambda_j(\xi,t)| \geq \delta > 0, \quad \forall t \in [0,T], |\xi| = 1.$$

Se $V^{(0)}(\zeta) \in \mathscr{H}$ *e esistono* M, ρ *tali che*

$$(1 + |\zeta|)|V^{(0)}(\zeta)| \leq Me^{\rho|\zeta|},$$

$$0 < \rho \leq \frac{1}{4ea},$$

allora esiste $\tau(\rho) > 0$ *tale che il problema ha una soluzione* V *appartenente a* $H^{1,1}([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$, *e tale che per ogni* $t < \tau(\rho)$ *vale la seguente stima:*

$$\left|V(\zeta,t)\right| \leq M'e^{\rho|\zeta|}\exp\biggl(C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}^{2N-1}ds(|\zeta|+1) + \int_0^t C_N\delta^{2(1-N)}\Lambda^{2N-1}ds|\eta|\biggr)$$

con C, M' *opportune costanti che dipendono dalle* A_h^0, C_N *come nel lemma precedente.*

Dimostrazione. Definiamo V_1 la soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t V_1 = \sum_{h=1}^{n} iA_h^0 \zeta_h V_1 + B^0 V_1, \\ \\ V(\zeta, 0) = V^{(0)}(\zeta), \end{cases}$$

e, definite $V_1, \ldots, V_l$, V_{l+1} la soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t V_{l+1} = \sum_{h=1}^{n} iA_h^0 \zeta_h V_{l+1} + B^0 V_{l+1} + \sum_{|k|\neq 0} B^k \partial_\zeta^k V_l + \sum_{|k|\neq 0} \sum_{h=1}^{n} A_h^k \partial_\zeta^k (\zeta_h V_l), \\ \\ V_{l+1}(\zeta, 0) = 0. \end{cases}$$

Per mostrare che $\sum_l V_l$ converge, cerchiamo una stima a priori per un problema del tipo

$$\begin{cases} \partial_t V = \sum_{h=1}^{n} iA_h^0(t) \zeta_h V + B^0 V + F, \\ \\ V_\zeta(0) = V^{(0)}(\zeta). \end{cases}$$

Per fare questo utilizzeremo il precedente risultato sull'esistenza del simmetrizzatore. Definiamo per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, $Q(\xi, t)$ come il simmetrizzatore di $A_\xi(t) = \sum_h A_0^h(t) \frac{\xi_h}{|\xi|}$. Abbiamo

$$Q(\xi, t) \leq C_N \tilde{\Lambda}^{2(N-1)}(t), \quad Q(\xi, t) \leq C_N \Lambda^{2(N-1)}(t).$$

Definiamo l'energia

$$E(\zeta, t) = (Q(\xi, t) V(\zeta, t), V(\zeta, t)).$$

Derivando abbiamo:

$$\begin{aligned} E' &= (Q'V, V) + (QV', V) + (QV, V') \\ &= (Q'V, V) + \Big(Q \sum iA_h^0 \zeta_h V, V\Big) + (QBV, V) + (QF, V) \\ &\quad + \Big(QV, \sum iA_h^0 \zeta_h V\Big) + (QV, BV) + (QV, F) \\ &= (Q'V, V) + i\Big(\Big(Q \sum A_h^0 \xi_h - (\sum A_h^0 \xi_h)^* Q\Big) V, V\Big) \\ &\quad - \Big(\Big(Q \sum A_h^0 \eta_h + \Big(\sum A_h^0 \eta_h\Big)^* Q\Big) V, V\Big) \\ &\quad + ((QB + B^* Q) V, V) + (QF, V) + (QV, F) \\ &= (Q'V, V) + 2|Q| \sum |A_h^0||\eta_h||V|^2 + 2|Q||B||V|^2 + |Q||V||F| \\ &\leq |Q'||V|^2 + 2C_N \Lambda^{2N-1} |\eta||V|^2 + 2C_N \tilde{\Lambda}^{2N-1} |V|^2 \\ &\quad + 2C_N \tilde{\Lambda}^{2(N-1)} |F||V| \\ &\leq |Q'| \delta^{2(1_N)} E + 2C_N \delta^{2(1-N)} \Lambda^{2N-1} |\eta| E + 2C_N \delta^{2(1-N)} \tilde{\Lambda}^{2N-1} E \\ &\quad + 2C_N \delta^{2(1-N)} \tilde{\Lambda}^{2(N-1)} |F| \sqrt{E}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$e^{-K(\zeta,t)}[E(\zeta,t)]^{1/2} \leq [E(\zeta,0)]^{1/2} + \int_0^t C_N \delta^{2(1-N)} \tilde{\Lambda}^{2(N-1)} e^{-K(\zeta,s)} |F(\zeta,s)| ds.$$

con

$$K(\zeta,t) = \delta^{2(1-N)} \int_0^t \frac{|Q'|}{2} + C_N \delta^{2(1-N)} \int_0^t \Lambda^{2N-1}|\eta| + C_N \delta^{2(1-N)} \int_0^t \tilde{\Lambda}^{2(N-1)}.$$

Si dimostra quindi per induzione che per ogni l vale

$$(1+|\zeta|)|V_l(\zeta,t)| \leq 2^{-l} M' e^{\rho|\zeta|} e^{K(\zeta,t)} \exp\Big(C\rho \int_0^t \tilde{\Lambda}^{2N-1}(|\zeta|+1) \Big), \qquad (3.66)$$

con C costante che dipende dalle A_h^0, per ogni $t < \tau(\rho)$ opportunamente scelto.
$\square$

Dal lemma segue allora il teorema:

Teorema 3.6. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \sum_{h=1}^n A_h(x,t) \partial_{x_h} U(x,t) + B(x,t) U(x,t) \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \qquad (3.67)$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N \times N$ *che soddisfano le seguenti ipotesi*

$$A_h, B \in L^{2N-1}([0,T], \mathcal{A}(\Omega)),$$
$$A_h(x,\cdot) \in C^1([0,T]) \qquad \forall x \in \Omega$$
$$\sum_h |A_h(t,x)| \leq \Lambda(t)$$

con $\int_0^T \Lambda^{2N-1} < \infty$.
Supponiamo inoltre che sia soddisfatta la seguente condizione di iperbolicitá:

per ogni $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, *la matrice* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$ *ha autovalori reali e distinti e, indicati con* $\lambda_1(x,t,\xi), \ldots, \lambda_n(x,t,\xi)$ *gli autovalori di* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$, *si ha*

$$\inf_{i \neq j} |\lambda_i(x,t,\xi) - \lambda_j(x,t,\xi)| \geq \delta > 0, \quad \forall x,\ t,\ |\xi| = 1.$$

Esiste allora una costante C_N*, dipendente solo da* N*, tale che,*
se $\Phi(x)$ *é un funzionale analitico reale con supporto nel compatto* $K \subset \Omega$ *tale che*

$$C_N \delta^{2(1-N)} \int_0^T \Lambda^{2N-1} < \mathrm{dist}(K, \Omega^c),$$

esiste ed é unica la soluzione U in $H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$, e per ogni $t\in[0,T]$ abbiamo

$$U\in H^{1,1}([0,T],\mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t=\left\{x\in\Omega : d(x,K)\le C_N\delta^{2(1-N)}\int_0^t\lambda^{2N-1}\right\}.$$

3.3.2 Coefficienti irregolari nel tempo

Per ottenere la stima dell'energia nel lemma 3.7 abbiamo utilizzato la regolaritá di Q, che come abbiamo visto segue dall'ipotesi di regolaritá dei coefficienti A_h. Cosa possiamo fare se eliminiamo questa ipotesi?

Il problema é analogo a quello affrontato nella sezione 3.2.1. Lí consideravamo, al posto dell'energia "naturale" (A_0V,V), le energie "approssimate" $(B_\sigma V,V)$, con B_σ approssimanti regolari di A_0. In questa sezione ci comporteremo in modo analogo, definendo delle approssimanti regolari del simmetrizzatore, e considerando le energie associate.

Lemma 3.8. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} V'=\displaystyle\sum_{h=1}^{n} iA_h^0(t)\zeta_h V+B^0(t)V++\sum_{|k|\neq 0}B^k(t)\partial_\zeta^k V(\zeta,t)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\displaystyle\sum_{|k|\neq 0}\sum_{h=1}^{n}A_h^k(t)\partial_\zeta^k(\zeta_h V(\zeta,t))\\ V(\zeta,0)=V^{(0)}(\zeta),\end{cases}$$

con $A_h^k(t),B_h^k(t)$ funzioni misurabili nello spazio delle matrici $(N\times N)$ e che soddisfano la seguente ipotesi:

$$\sum_{h=1}^{n}|A_h^k(t)|+|B^k(t)|\le\tilde\Lambda(t)a^{|k|},\qquad k\in N^n,$$

$$\sum_h|A_h^0(t)|\le\Lambda(t)$$

con $a>0$, Λ e $\tilde\Lambda$ in $L^{2N-1}(0,T)$.
Supponiamo inoltre che sia soddisfatta la seguente condizione di iperbolicitá:

per ogni $\xi\in\mathbb{R}^n$, $|\xi|=1$, la matrice $\sum_h A_h^0(t)\xi_h$ ha per ogni t autovalori reali e distinti e tale che, indicati con $\lambda_1(\xi,t),\dots,\lambda_n(\xi,t)$ gli autovalori di $\sum_h A_h^0(t)\xi_h$, si abbia

$$\inf_{i\neq j}|\lambda_i(\xi,t)-\lambda_j(\xi,t)|\ge\delta>0,\quad\forall t\in[0,T],|\xi|=1.$$

Se $V^{(0)}(\zeta) \in \mathscr{H}$ e esistono M, ρ tali che

$$(1+|\zeta|)|V^{(0)}(\zeta)| \leq Me^{\rho|\zeta|},$$

$$0 < \rho \leq \frac{1}{4ea},$$

allora esistono $\tau(\rho)$, $\overline{\varepsilon}(\rho) > 0$ tali che il problema ha una soluzione V appartenente a $H^{1,1}([0,\tau(\rho)],\mathscr{H})$, e tale che per ogni $t < \tau(\rho)$, $\varepsilon < \overline{\varepsilon}(\rho)$, vale la seguente stima:

$$\left|V(\zeta,t)\right| \leq 2M_\varepsilon e^{\rho|\zeta|}\exp\left(C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}^{2N-1}ds(|\zeta|+1) + \varepsilon|\zeta| + C_N\int_0^t \Lambda^{2N-1}ds|\eta|\right)$$

con C, M_ε opportune costanti che dipendono rispettivamente solo dalle A_h^0, e dalle A_h^0 e da ε .

Dimostrazione. Definiamo le V_l come nel lemma 3.7.

Per ottenere una stima analoga alla (3.66), utilizzeremo, come nel lemma 3.5, delle energie approssimate.

Consideriamo $Q(\xi,t)$ definita come nel lemma 3.7. In questo caso Q non é regolare in t, perció nel definire l'energia dovremo sostituirla con delle approssimanti regolari. Fissato $\overline{\xi}$ di norma 1, grazie al lemma 3.4 possiamo trovare per ogni $\sigma > 0$ due matrici $G_\sigma(\overline{\xi},t)$ e $D_\sigma(\overline{\xi},t)$ tale che

$$Q(\overline{\xi},t) = G_\sigma(\overline{\xi},t) + D_\sigma(\overline{\xi},t)$$

$$G_\sigma(\overline{\xi},t) \in C^\infty([0,T])$$

$$(G_\sigma(\overline{\xi},t)\zeta,\zeta) \geq \delta^{2(N-1)}|\zeta|^2$$

$$\|D_\sigma(\overline{\xi},t)\tilde{\Lambda}(t)\|_1 = \left\|D_\sigma(\overline{\xi},t)Q^{-1}(\overline{\xi},t)\big(Q(\overline{\xi},t)\tilde{\Lambda}(t)\big)\right\|_1 < \sigma$$

Siccome la matrice Q dipende in maniera regolare da ξ, possiamo trovare un intorno $\Gamma_{\overline{\xi}}$ di $\overline{\xi}$ in S^{n-1} tale che

$$Q(\xi,t) = G_\sigma(\overline{\xi},t) + D'_\sigma(\xi,t),$$

$$\|D'_\sigma(\overline{\xi},t)\tilde{\Lambda}(t)\|_1 < \sigma$$

per ogni ξ in $\Gamma_{\overline{\xi}}$.

Possiamo allora trovare $\overline{\xi}_1,\ldots,\overline{\xi}_m$ in modo che i $\Gamma_{\overline{\xi}_j}$ (che possiamo supporre disgiunti) ricoprono la sfera unitaria.

Definendo allora

$$Q_\sigma(\xi,t) = G_\sigma(\overline{\xi}_j,t), \quad \forall\xi : \frac{\xi}{|\xi|} \in \Gamma_{\overline{\xi}_j},$$

$$C_\sigma(\xi,t) = Q(\xi,t) - Q_\sigma(\xi,t),$$

abbiamo che

$$Q(\xi,t) = Q_\sigma(\xi,t) + C_\sigma(\xi,t)$$

$$Q_\sigma(\xi,t) \in C^\infty([0,T]) \quad \forall \xi \in S^{n-1}$$
$$(Q_\sigma(\xi,t)\zeta,\zeta) \geq \delta^{2(N-1)}|\zeta|^2$$
$$\|C_\sigma(\xi,t)\tilde{\Lambda}(t)\|_1 < \sigma C_N^{-1}\delta^{2(N-1)}$$

e che per ogni $\sigma > 0$ $\int_0^T |Q'_\sigma(\xi,t)|$ é controllato da una costante che non dipende da ξ.

Definiamo allora l'energia approssimata

$$E_\sigma(\zeta,t) = (Q_\sigma(\xi,t)V(\zeta,t), V(\zeta,t),$$

e derivando abbiamo:

$$\begin{aligned} E'_\sigma &= (Q'_\sigma V,V) + (Q_\sigma V',V) + (Q_\sigma V,V') = \\ &= (Q'_\sigma V,V) + (QV',V) + (QV,V') + (C_\sigma V',V) + (C_\sigma V,V'). \end{aligned}$$

Come nella dimostrazione del lemma 3.7

$$\begin{aligned} (Q'_\sigma V,V) + 2\mathrm{Re}(QV',V) &\leq |Q'_\sigma|\delta^{2(1-N)}E_\sigma + 2C_N\delta^{2(1-N)}\Lambda^{2N-1}|\eta|E_\sigma + \\ &\quad +2C_N\delta^{2(1-N)}\tilde{\Lambda}^{2N-1}E_\sigma + \\ &\quad +2C_N\delta^{2(1-N)}\tilde{\Lambda}^{2(N-1)}|F|\sqrt{E}_\sigma, \end{aligned}$$

mentre da come abbiamo definito Q_σ e C_σ segue che

$$\begin{aligned} (C_\sigma V',V) + (C_\sigma V,V') &\leq 2\tilde{\Lambda}|C_\sigma||\zeta||V|^2 + 2\tilde{\Lambda}|C_\sigma||V|^2 + |C_\sigma||F||V| \\ &\leq C_N\delta^{2(1-N)}|\zeta|E_\sigma + C_N\delta^{2(1-N)}E_\sigma + \\ &\quad +|C_\sigma|\delta^{2(1-N)}|F|\sqrt{E}_\sigma \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} e^{-K_\sigma(\zeta,t)}[E(\zeta,t)]^{1/2} &\leq [E_\sigma(\zeta,0)]^{1/2} + \\ &\quad +\frac{C_N}{\delta^{2(N-1)}}\int_0^t (\tilde{\Lambda}^{2(N-1)} + |C_\sigma|)e^{-K_\sigma(\zeta,s)}|F(\zeta,s)|ds. \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} K_\sigma(\zeta,t) &= \delta^{2(1-N)}\int_0^t \frac{|Q'_\sigma|}{2} + C_N\delta^{2(1-N)}\int_0^t \Lambda^{2N-1}|\eta| + \\ &\quad +C_N\delta^{2(1-N)}\int_0^t \tilde{\Lambda}^{2(N-1)} + 2\sigma C_N\delta^{2(1-N)}(|\zeta|+1). \end{aligned}$$

Si dimostra quindi per induzione che per ogni l vale

$$(1+|\zeta|)|V_l(\zeta,t)| \leq 2^{-l}M'e^{\rho|\zeta|}e^{K_\sigma(\zeta,t)}\exp\Big(C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(\tilde{\Lambda}^{2(N-1)} + |C_\sigma|)(|\zeta|+1)\Big),$$

con C costante che dipende dalle A_h^0, per ogni $t < \tau(\rho)$ opportunamente scelto, e si porta a termine la dimostrazione come per il lemma 3.5.

$\square$

Abbiamo quindi il teorema:

Teorema 3.7. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U(x,t) + B(x,t)U(x,t) \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N \times N$ *che soddisfano le seguenti ipotesi*

$$A_h, B \in L^{2N-1}([0,T], \mathcal{A}(\Omega)),$$

$$\sum_h |A_h(x,t)| \le \Lambda(t),$$

con $\Lambda \in L^{2N-1}$

Supponiamo inoltre che sia soddisfatta la seguente condizione di iperbolicitá:

per ogni $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, *la matrice* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$ *ha autovalori reali e distinti e, indicati con* $\lambda_1(x,t,\xi), \ldots, \lambda_n(x,t,\xi)$ *gli autovalori di* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$, *si ha*

$$\inf_{i \ne j} |\lambda_i(x,t,\xi) - \lambda_j(x,t,\xi)| \ge \delta > 0, \quad \forall x,\ t,\ |\xi| = 1.$$

Esiste allora una costante C_N, *dipendente solo da* N, *tale che,*
se $\Phi(x)$ *é un funzionale analitico reale con supporto nel compatto* $K \subset \Omega$ *tale che*

$$C_N \delta^{2(1-N)} \int_0^T \Lambda^{2N-1} < \mathrm{dist}(K, \Omega^c)$$

esiste ed é unica la soluzione U *in* $H^{1,1}([0,T], \mathcal{A}'(\Omega))$, *e per ogni* $t \in [0,T]$ *abbiamo*

$$U \in H^{1,1}([0,T], \mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \le C_N \delta^{2(1-N)} \int_0^t \Lambda^{2N-1} \right\}.$$

Capitolo 4

Sistemi del primo ordine e funzioni analitiche

In questo capitolo utilizzeremo i risultati del capitolo precedente per dimostrare analoghi risultati per problemi di Cauchy con dato iniziale analitico reale.

4.1 La tecnica della dimostrazione

Analizzeremo dapprima un caso molto semplice, analogo a quello della sezione 3.1.

Vogliamo dimostrare il teorema di esistenza e unicitá globale della soluzione per sistemi della forma

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = A(x,t)\partial_x U(x,t) \\ \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

per nell'ambito delle funzioni analitiche reali. Esattamente vogliamo dimostrare il teorema ("duale" del teorema 3.1):

Teorema 4.1. *Si consideri un problema di Cauchy della forma (4.1).*

Si supponga che la matrice A sia hermitiana e in $L^1([0,T],\mathcal{A}(\Omega))$, e che inoltre $|A(x,t)| \leq \Lambda(t)$, $\Lambda \in L^1(0,T)$.

Se il dato iniziale Φ é una funzione analitica reale in Ω, esiste una unica soluzione U in $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$ per ogni $t \in [0,T]$,

$$\Omega^t = \left\{ x \in \Omega : d(x,\Omega^c) > \int_0^t \Lambda \right\}.$$

In particolare, U é continua in (x,t) e analitica reale in x per ogni t sul conoide

$$C_T = \left\{ (x,t) : x \in \Omega^t, 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Per dimostrare questo teorema, considereremo una successione di problemi "approssimanti" il problema (4.1), per i quali l'esistenza della soluzione é garantita dal teorema di Ovciannikov, e mostreremo che dalla famiglia delle soluzioni di questi problemi si puó estrarre una successione convergente a una soluzione di (4.1).

Ci servirá allora un risultato di compattezza per le soluzioni di una famiglia di problemi della forma

$$\begin{cases} \partial_t U_\nu(x,t) = A_\nu(x,t)\partial_x U_\nu(x,t) \\ \\ U_\nu(x,0) = \Phi_\nu(x), \end{cases} \tag{4.2}$$

con opportune ipotesi di limitatezza dei coefficienti e dei dati iniziali, che otterremo attraverso un procedimento di dualitá dai risultati del capitolo precedente sulle soluzioni funzionali analitici.

Consideriamo $\{P^\nu\}_\nu$ una famiglia di problemi di Cauchy della forma

$$\begin{cases} \partial_t U_\nu(x,t) = A_\nu(x,t)\partial_x U_\nu(x,t) + B_\nu(x,t)U_\nu(x,t) \\ \\ U_\nu(x,0) = \Phi_\nu(x), \end{cases} \tag{4.3}$$

con A_ν hermitiana, A_ν, B_ν in $L^1([0,T],\mathcal{A}(\Omega))$. Per i risultati dimostrati nel capitolo precedente, per ogni Φ_ν funzionale analitico reale abbiamo una soluzione U_ν, funzionale analitico reale, per un certo tempo. Vogliamo ora dimostrare che se i coefficienti e il dato iniziale soddisfano opportune ipotesi di limitatezza, anche le soluzioni sono limitate. Esattamente:

Lemma 4.1. *Si consideri la famiglia $\{U_\nu\}_\nu$ delle soluzioni dei problemi $\{P^\nu\}_\nu$ definiti dalla (4.3), con le matrici A_ν, B_ν che soddisfano le seguenti condizioni:*

$$A_\nu = A_\nu^*$$

$$|\partial_x^k A_\nu(x,t)| + |\partial_x^k B_\nu(x,t)| \leq \tilde{\Lambda}(t)a^k k!$$

$$|A_\nu(x,t)| \leq \Lambda(t)$$

con $a > 0$, Λ e $\tilde{\Lambda} \in L^1(0,T)$.

Se $\{\Phi_\nu\}_\nu$ é limitata in $\mathcal{A}'(K_0)$, con $K_0 \subset\subset \Omega$ tale che

$$\mathrm{d}(K_0, \Omega) > \int_0^T \Lambda dt,$$

allora per ogni ν la famiglia $\{U_\nu\}_\nu$ é limitata in $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}'(K_t))$,

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \leq \int_0^t \Lambda ds \right\}.$$

In particolare, $\{U_\nu(T)\}_\nu$ é limitata in $\mathcal{A}'(K_T)$.

Dimostrazione. Per dimostrare questo lemma, ripercorriamo la dimostrazione dei teoremi 3.2 e 3.1.
Se consideriamo i relativi problemi olomorfi con dati iniziali $\{\Phi_\nu\}$ limitati in $\mathscr{H}'(B(z_0,\rho))$, abbiamo che le soluzioni U_ν soddisfano la stima

$$\widehat{\tau_{z_0}U_\nu} \leq 2Me^{\rho|\zeta|}\exp\bigg(C\rho\int_0^t \tilde{\Lambda}(s)ds|\zeta| + \int_0^t \Lambda(s)ds|\eta|\bigg), \tag{4.4}$$

con $C = 8ea$, per ogni $t < \tau(\rho)$ con $\tau(\rho)$ tale che

$$C\rho\int_0^{\tau(\rho)} \tilde{\Lambda}(s)ds + \int_0^{\tau(\rho)} \Lambda(s)ds < \rho.$$

La (4.4) fornisce pertanto una stima uniforme in ν.
Supponiamo dapprima che i problemi P^ν abbiano dati iniziali Φ_ν limitati in $\mathscr{H}'(B(z_0,\rho))$. Abbiamo allora, grazie al teorema di Paley-Wiener, che le soluzioni sono limitate in $L^1([0,t],\mathscr{H}'(B^t_\rho))$, e quindi in $H^{1,1}([0,t],\mathscr{H}'(B^t_\rho))$, per ogni $t < \tau(\rho)$,

$$B^t_\rho = \bigg\{z : |x-x_0| \leq \rho\bigg(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\bigg) + \int_0^t \Lambda,\ \ |y-y_0| \leq \rho\bigg(1 + C\int_0^t\bigg)\bigg\}.$$

Da questo segue che se, piú in generale la famiglia $\{\Phi_\nu\}$ é limitata in $\mathscr{H}'(D^\rho_K)$,

$$D^\rho_K = \bigg\{z : x \in K, |y| \leq \rho\bigg\},$$

le soluzioni lo sono in $H^{1,1}([0,t],\mathscr{H}'(G^\rho_t))$,

$$G^\rho_t = \bigg\{z \in \mathbb{C} : d(x,K) \leq \rho\bigg(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\bigg) + \int_0^t \Lambda,\ |y| \leq \rho\bigg(1 + C\int_0^t \tilde{\Lambda}\bigg)\bigg\},$$

per ogni $t < \tau(\rho)$.

Abbiamo allora che la famiglia $\{U_\nu(\tau(\rho))\}_\nu$ é limitata, possiamo quindi riapplicare il risultato all'intervallo di tempo $[\tau(\rho), 2\tau(\rho)]$ e iterando abbiamo che la famiglia $\{U_\nu\}$ é limitata in $H^{1,1}([0,T],\mathscr{H}'(K^\rho_T))$, e in $H^{1,1}([0,t],\mathscr{H}'(K^\rho_t))$ per ogni t, con

$$K^\rho_t = \bigg\{z \in \mathbb{C} : d(x,K) \leq \int_0^t \Lambda + \rho C\int_0^t \tilde{\Lambda},\ \ |y| \leq \rho e^{C\int_0^t \tilde{\Lambda}}\bigg\}.$$

Da questo risultato segue infine che, per ogni t, la famiglia $\{U_\nu\}$ é limitata in $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}'(K_t))$. $\square$

Per dimostrare il teorema 4.1, ci serve un analogo del lemma 4.1 per le funzioni analitiche, che dimostriamo a partire dal lemma precedente attraverso un procedimento di dualitá.

Lemma 4.2. *Si consideri la famiglia di problemi* $\{P^\nu\}$

$$\begin{cases} \partial_t U_\nu(x,t) = A_\nu(x,t)\partial_x U_\nu(x,t) \\ \\ U_\nu(x,0) = \Phi_\nu(x), \end{cases} \tag{4.5}$$

con $\{A_\nu\}_\nu$ *che soddisfa le ipotesi del lemma precedente e* $\{\Phi_\nu\}_\nu$ *limitata in* $\mathcal{A}(\Omega)$*.*

Si supponga che per ogni ν*,* U_ν *sia una soluzione del problema* P^ν*, appartenente allo spazio* $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$ *per ogni* t*, con*

$$\Omega^t = \left\{ x \in \Omega : d(x,\Omega^c) > \int_0^t \Lambda \right\}$$

(con $\Omega^T \neq \emptyset$*).*
Allora la successione $\{U_\nu\}$ *é limitata in* $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$ *per ogni* t*.*

Dimostrazione. Fissiamo τ in $]0,T]$ e un funzionale g in $\mathcal{A}'(\Omega^\tau)$.

Per ogni s in $]0,\tau]$, introduciamo il "problema duale", cioé il problema $P_*^{s,g}$

$$\begin{cases} \partial_t W^{s,g}(x,t) = -\partial_x\big(A(x,t)W^{s,g}(x,t)\big) \\ \\ W^{s,g}(x,s) = g(x), \end{cases}$$

per $x \in \Omega$, $t \in [0,s]$.

Attraverso il cambio di variabili $t \mapsto s-t$, possiamo trasformare la famiglia $\{P_*^{s,g}\}_{s,g}$ in una famiglia analoga a quella del lemma 4.1.
g é in $\mathcal{A}'(\Omega^\tau)$), e quindi in $\mathcal{A}'(K)$ con $K \subset\subset \Omega^\tau$.
Possiamo applicare al problema $P_*^{s,g}$ il lemma 4.1, e abbiamo per ogni s,g una (unica) soluzione $W^{s,g}$ in $H^{1,1}([0,s],\mathcal{A}'(\Omega))$, e in $H^{1,1}([t,s],\mathcal{A}'(K^t))$, con

$$K^t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \leq \int_t^\tau \Lambda \right\}.$$

A questo punto quello che vogliamo fare é accoppiare il problema P^ν con il problema duale $P_*^{s,g}$, cioé moltiplicare la prima equazione di (4.3) per $W^{s,g}$, e la prima equazione di (4.5) per U_ν, utilizzando l'accoppiamento di dualitá tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$. A questo scopo, dividiamo l'intervallo $[0,s]$ in un numero finito di intervalli $[t_0,t_1],\ldots,[t_{l-1},t_l]$ in modo che $W^{s,g} \in H^{1,1}([t_i,t_{i+1}],\mathcal{A}'(\Omega^{t_{i+1}}))$ per ogni i. D'altra parte, sappiamo per ipotesi che U_ν appartiene a $H^{1,1}([t_i,t_{i+1}],\mathcal{A}(\Omega^{t_{i+1}}))$ per ogni t.

Allora, da (4.3) e (4.5) segue

$$\begin{aligned} \langle \partial_t U_\nu, W^{s,g} \rangle &= \langle A\partial_x U_\nu, W^{s,g} \rangle \\ \langle U_\nu, \partial_t W^{s,g} \rangle &= \langle U_\nu, \partial_x(AW^{s,g}) \rangle. \end{aligned}$$

I secondi membri sono uguali, perché $A = A^*$, quindi abbiamo

$$\langle \partial_t U_\nu, W^{s,g} \rangle = \langle U_\nu, \partial_t W^{s,g} \rangle.$$

Integrando tra t_1 e t_{i+1}

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \partial_t U_\nu(t), W^{s,g}(t)\rangle dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle U_\nu(t), \partial_t W^{s,g}(t)\rangle dt = 0,$$

cioé

$$\langle U_\nu(t_{i+1}), W^{s,g}(t_{i+1})\rangle = \langle U_\nu(t_i), W^{s,g}(t_i)\rangle.$$

Sommando su i otteniamo infine

$$\langle U_\nu(s), W^{s,g}(s)\rangle = \langle U_\nu(0), W^{s,g}(0)\rangle,$$

e cioé

$$\langle U_\nu(s), g\rangle = \langle \Phi_\nu, W^{s,g}(0)\rangle.$$

Dal lemma 4.1 segue che la famiglia $\{W^{s,g}(0)\}_s$ é limitata, e $\{\Phi_\nu\}_\nu$ é limitata per ipotesi.
Abbiamo quindi

$$|\langle U_\nu(s), g\rangle| \leq M_g,$$

per ogni $s \in [0,\tau]$, con la costante M_g che dipende solo da g.
Abbiamo cioé che per ogni s la famiglia $\{U_\nu(s)\}$ é limitata, uniformemente in s. Questo ci dice che le U_ν sono limitate in $C^0([0,\tau], \mathcal{A}(\Omega^\tau))$, e quindi in $H^{1,1}([0,\tau], \mathcal{A}(\Omega^\tau))$. □

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema 4.1.

Dimostrazione del teorema 4.1. Per dimostrare l'unicitá, supponiamo che U sia una soluzione per il problema (4.1) con dato iniziale 0. Applicando il lemma 4.3 alla successione $\{\nu \cdot U\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, otteniamo che questa é limitata, e quindi U é nulla.

Per dimostrare l'esistenza, facciamo notare che, grazie all'unicitá della soluzione, ci basta dimostrare che, presa una successione di aperti $\{\Omega_i\}$ relativamente compatti in Ω tale che $\cup_i \Omega_i = \Omega$, allora per ogni i esiste una soluzione sul conoide

$$\Big\{(x,t) : x \in \Omega_i^t, 0 \leq t \leq T\Big\}.$$

Possiamo pertanto supporre che A soddisfi la condizione

$$|\partial_x^k A(x,t)| \leq \tilde{\Lambda}(t) a^k k! \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

per cui A puó essere estesa olomorficamente a $\widetilde{A}$ definita sull'aperto di $\mathbb{C}$

$$D_{1/2a} = \Big\{z \in \mathbb{C} : d(x,\Omega) < 1/2a, |y| < 1/2a\Big\},$$

e tale che

$$|\widetilde{A}(z,t)| \leq c_n \tilde{\Lambda}(t) \quad \forall z \in D_{1/2a} \forall t \in [0,T].$$

Sia ora $\{\Phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{H}$ tale che

$$\Phi_\nu \to \Phi \quad \text{in } \mathcal{A}(\Omega),$$

e consideriamo la famiglia di problemi

$$\begin{cases} \partial_t U_\nu(z,t) = \widetilde{A}(z,t)\partial_z U_\nu(z,t) \\ \\ U_\nu(z,0) = \Phi_\nu(z), \end{cases} \tag{4.6}$$

in $D_{1/2a} \times [0,T]$.
Per il teorema 1.4, abbiamo una (unica) soluzione $U_\nu(z,t)$, olomorfa in z su $D_{1/4a}$ per $0 \le t \le \tau$, con

$$\int_0^\tau \tilde{\Lambda} ds \le c_n' \frac{1}{a}.$$

In particolare U_ν appartiene a $H^{1,1}([0,\tau],\mathcal{A}(\Omega))$.
Possiamo allora applicare il lemma 4.2 alla successione $\{U_\nu\}_\nu$ e abbiamo che é limitata in $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$ per ogni $t \le \tau$.
Grazie al fatto che l'immersione di $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$ in $L^1([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$ é compatta, la famiglia $\{U_\nu\}_\nu$ é relativamente compatta in $L^1([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$, e quindi in $H^{1,1}([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$, per ogni $t \le \tau$.
Possiamo quindi estrarre una successione convergente, e otteniamo la tesi. □

4.2 I risultati

Con il procedimento illustrato nella sezione precedente si ottengono i risultati analoghi per i sistemi della forma (3.24), (3.64) e (3.67).

Valgono i seguenti teoremi di esistenza e unicitá nella classe delle funzioni analitiche.

Teorema 4.2. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} A_0(x,t)\partial_t U = \displaystyle\sum_{h=1}^n A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U, \\ \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N \times N$ *che soddisfano le seguenti ipotesi*

$$A_0 = A_0^*,$$

$$A_h = A_h^* \quad \forall h,$$

$$A_0, A_h, B \in L^\infty([0,T],\mathcal{A}(\Omega)),$$

$$\lambda|\zeta|^2 \le (A_0(t)\zeta,\zeta) \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

$$\sum_{h=1}^{n} |A_h(x,t)| \leq \Lambda(t),$$

con $\lambda > 0$, $\Lambda \in L^1(0,T)$.

Se il dato iniziale Φ *é una funzione analitica reale in* Ω, *esiste una unica soluzione* U *in* $H^{1,1}([0,t]), \mathcal{A}(\Omega^t))$ *per ogni* $t \in [0,T]$,

$$\Omega^t = \left\{ x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{\lambda} \int_0^t \Lambda \right\}.$$

In particolare, U *é continua in* (x,t) *e analitica reale in* x *per ogni* t *sul conoide*

$$C_T = \left\{ (x,t) : x \in \Omega^t, 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Teorema 4.3. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t U = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} A_h(x,t) \partial_{x_h} U + B(x,t) U, \\ \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N \times N$ *che soddisfano le seguenti ipotesi*

$$A_h = A_h^* \quad \forall h,$$

$$A_h, B \in L^1([0,T], \mathcal{A}(\Omega)),$$

$$\sum_{h=1}^{n} |A_h(x,t)| \leq \Lambda(t),$$

con $\Lambda \in L^1(0,T)$.

Se il dato iniziale Φ *é una funzione analitica reale in* Ω, *esiste una unica soluzione* U *in* $H^{1,1}([0,t]), \mathcal{A}(\Omega^t))$ *per ogni* $t \in [0,T]$,

$$\Omega^t = \left\{ x \in \Omega : d(x, \Omega^c) > \int_0^t \Lambda \right\}$$

In particolare, U *é continua in* (x,t) *e analitica reale in* x *per ogni* t *sul conoide*

$$C_T = \left\{ (x,t) : x \in \Omega^t, 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Teorema 4.4. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t U = \displaystyle\sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U \\ \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano matrici $N \times N$ *che soddisfino le seguenti ipotesi*

$$A_h, B \in L^{2N-1}([0,T], \mathcal{A}(\Omega)),$$
$$\sum_{h=1}^{n} |A_h(x,t)| \leq \Lambda(t),$$

con $\Lambda \in L^{2N-1}(0,T)$.

Supponiamo inoltre che sia soddisfatta la seguente condizione di iperbolicitá:

per ogni $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, *la matrice* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$ *ha autovalori reali e distinti e, indicati con* $\lambda_1(x,t,\xi), \ldots, \lambda_n(x,t,\xi)$ *gli autovalori di* $\sum_h A_h(x,t)\xi_h$, *si ha*

$$\inf_{i \neq j} |\lambda_i(x,t,\xi) - \lambda_j(x,t,\xi)| \geq \delta > 0, \quad \forall x,\ t,\ |\xi| = 1.$$

Esiste una costante C_N, *dipendente solo da* N *tale che, se* Φ *é una funzione analitica reale in* Ω, *esiste una unica soluzione* U *in* $H^{1,1}([0,t]), \mathcal{A}(\Omega^t))$ *per ogni* $t \in [0,T]$,

$$\Omega^t = \left\{ x \in \Omega : d(x,\Omega^c) > C_N \delta^{2N-2} \int_0^t \Lambda^{2N-1} \right\}$$

In particolare, U *é continua in* (x,t) *e analitica reale in* x *per ogni* t *sul conoide*

$$C_T = \left\{ (x,t) : x \in \Omega^t, 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Capitolo 5

Equazioni di ordine superiore al primo

In questo capitolo utilizziamo i risultati ottenuti nei capitoli precedenti per studiare i problemi di Cauchy per singole equazioni iperboliche. Studieremo casi in cui si puó ricondurre una tale equazione a un sistema del primo ordine a cui possiamo applicare i risultati giá dimostrati. Otteniamo cosí i risultati di esistenza e unicitá globale della soluzione nelle classi dei funzionali e delle funzioni analitiche per le equazioni simmetriche del secondo ordine della forma

$$\partial_t^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_t\partial_{x_i} u + l.o.t.$$

con la matrice (a_{ij}) hermitiana e definita positiva in maniera uniforme, e per le equazioni uniformemente strettamente iperboliche in una variabile spaziale.

5.1 Equazioni iperboliche simmetriche del secondo ordine

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_t\partial_{x_i} u + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)\partial_{x_i} u + d(x,t)\partial_t u + e(x,t)u \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{5.1}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Supponiamo che tutti i coefficienti siano in $L^\infty([0,T],\mathcal{A}(\Omega))$, e che valgano le ipotesi

$$a_{ij} = a_{ji}^*,$$

$$\sum a_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq \lambda|\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Allora il problema (5.1) é equivalente al sistema simmetrico

$$\begin{cases} A_0(x,t)\partial_t U = \sum_{h=1}^{n} A_h(x,t)\partial_{x_h} U + B(x,t)U, \\ U(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{5.2}$$

dove abbiamo posto

$$V = \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \varphi_{x_1} \\ \vdots \\ \varphi_{x_n} \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_h & a_{1h} & \dots & a_{nh} \\ \vdots & a_{h1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{hn} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ e & d & c_1 & \dots & c_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e i coefficienti del sistema (5.2) soddisfano le ipotesi del Teorema 3.3.

Come conseguenza dei risultati dimostrati per i sistemi del primo ordine, otteniamo allora risultati analoghi per il problema (5.1),che riassumiamo nel seguente teorema:

Teorema 5.1. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_t\partial_{x_i} u + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)\partial_{x_i} u + d(x,t)\partial_t u + e(x,t)u \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano in $L^\infty([0,T],\mathcal{A}(\Omega))$ e soddisfino le seguenti ipotesi

$$a_{ij} = a_{ji}^*$$

$$\lambda|\zeta|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}\zeta_i\zeta_j \le \Lambda(t)|\zeta|^2$$

con $\lambda > 0$, $\Lambda \in L^1(0,T)$.

Se i dati iniziali $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono funzionali analitici reali con supporto nel compatto $K \subset \Omega$ tale che

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^T \Lambda(s)ds < \mathrm{dist}(K,\Omega^c)$$

allora esiste ed é unica la soluzione u in $H^{2,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$, e per ogni $t \in [0,T]$ abbiamo

$$u \in H^{2,1}([0,t],\mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \le \frac{1}{\lambda}\int_0^t \Lambda(s)ds \right\}.$$

Se i dati iniziali $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono funzioni analitiche reali in Ω, esiste una unica soluzione u in $H^{2,1}([0,t]),\mathcal{A}(\Omega^t))$ per ogni $t \in [0,T]$, con

$$\Omega^t = \left\{ x \in \Omega : d(x,\Omega^c) > \frac{1}{\lambda}\int_0^t \Lambda(s)ds \right\}.$$

In particolare, u é continua in (x,t) e analitica reale in x per ogni t sul conoide

$$C_T = \left\{ (x,t) : x \in \Omega^t, 0 \le t \le T \right\}.$$

5.2 Equazioni iperboliche di ordine superiore

In questa sezione vogliamo considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^m u(x,t) = \displaystyle\sum_{j<m}\sum_{|\nu|\le m-j} a_{\nu,j}(x,t)\partial_x^\nu \partial_t^j u(x,t) \\ \partial_t^j u(x,0) = \varphi_j(x), \quad j = 0,\dots,m-1, \end{cases}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$, con l'ipotesi di *uniforme iperbolicitá.*
Supporremo cioé che, indicate con $\lambda_1(x,\xi,t),\dots,\lambda_n(x,\xi,t)$ le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^m - \sum_{|\nu|+j=m} a_{\nu,j}(x,t)\xi^\nu\lambda^j = 0,$$

le λ_i siano reali e distinte e

$$\inf_{i\ne j} |\lambda_i(x,\xi,t) - \lambda_j(x,\xi,t)| \ge \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega, t \in [0,T], \xi \in S^{n-1}.$$

In molti casi, é conveniente trasformare queste equazioni in sistemi pseudo-differenziali del prim'ordine, che possono essere studiati con tecniche analoghe a quelle utilizzate per i sistemi differenziali. In particolare, si possono dimostrare ancora le stime dell'energia utilizzate nel capitolo 3. Ciononostante, si incontrano delle difficoltá dovute al fatto che, nonostante la validitá delle stime, non riusciamo a ripetere il processo di induzione utilizzato nei lemmi sui problemi trasformati. Infatti in questo caso le V_k non sono olomorfe, e quindi non siamo in grado di stimare le loro derivate. Non siamo pertanto in grado di dimostrare i risultati analoghi per le equazioni, eccetto che nel caso di una variabile spaziale.

Nel caso in cui $n = 1$, infatti, é facile trasformare l'equazione in un sistema differenziale della forma (3.67), e quindi applicare i risultati del capitolo precedente per ottenere teoremi analoghi per questa equazione.

Analizziamo l'equazione omogenea per $n = 1$; é della forma

$$\partial_t^m u(x,t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}(x,t)\partial_x^{m-j}\partial_t^j u(x,t). \tag{5.3}$$

Poniamo allora

$$U = \begin{pmatrix} \partial_x^{m-1}u \\ \partial_x^{m-2}\partial_t u \\ \vdots \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1}u \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_m & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{m-1} \end{pmatrix}$$

e abbiamo il problema equivalente

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = A(x,t)\partial_x U(x,t) \\ \\ U(x,0) = \Phi(x). \end{cases}$$

La matrice $A(x,t)$ ha la stessa regolaritá dei coefficienti dell'equazione. Abbiamo inoltre che $det(\lambda I - A) = \lambda^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}\lambda^j$ cioé che gli autovalori di A coincidono (anche come molteplicitá) con le radici dell'equazione caratteristica dell'equazione.

Abbiamo quindi che dai risultati dei capitoli precedenti seguono per l'equazione (5.3) i risultati di esistenza e unicitá nelle classi delle funzioni e dei funzionali analitici.

Se l'equazione non é omogenea, la presenza di termini di ordine inferiore non modifica A, ma comporta la comparsa di un termine di ordine 0 nel sistema, per cui possiamo ancora applicare i risultati precedenti.

Precisamente abbiamo il teorema:

Teorema 5.2. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t^m u(x,t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-j} a_{j,l}(x,t)\partial_x^l \partial_t^j u(x,t) \\ \\ \partial_t^j u(x,0) = \varphi_j(x), \quad j=0,\dots,m-1, \end{cases} \tag{5.4}$$

per $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$.

Si supponga che i coefficienti siano funzioni in $L^{2m-1}([0,T],\mathcal{A}(\Omega))$ *e che sia soddisfatta la seguente condizione di iperbolicitá:*

per ogni $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$*, le radici* $\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_n(x,t)$ *dell'equazione caratteristica* $\lambda^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}\lambda^j = 0$ *sono reali e distinte e esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\inf_{i\neq j} |\lambda_i(x,t) - \lambda_j(x,t)| \geq \delta, \quad \forall x,t.$$

Sia Λ *una funzione in* $L^{2m-1}(0,T)$ *tale che*

$$\sum_{j=0}^{m-1} |a_{j+1}(x,t)| \leq \Lambda(t) \quad \forall x.$$

Esiste allora una costante C_m*, dipendente solo da* m*, tale che,*

se i dati iniziali $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ *sono funzionali analitici reali in* $\mathcal{A}'(\Omega)$*, con supporto nel compatto* $K \subset \Omega$ *tale che*

$$C_m \delta^{2(1-m)} \int_0^T \Lambda^{2m-1} < \mathrm{dist}(K,\Omega^c)$$

allora esiste ed é unica la soluzione u *in* $H^{m,1}([0,T],\mathcal{A}'(\Omega))$*, e per ogni* $t \in [0,T]$ *abbiamo*

$$u \in H^{m,1}([0,T],\mathcal{A}'(K_t))$$

con

$$K_t = \left\{ x \in \Omega : d(x,K) \leq C_m \delta^{2(1-m)} \int_0^t \Lambda^{2m-1} \right\}.$$

se i dati iniziali $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ *sono funzioni analitiche reali in* Ω*, esiste una unica soluzione* u *in* $H^{m,1}([0,t],\mathcal{A}(\Omega^t))$ *per ogni* $t \in [0,T]$*,*

$$\Omega^t = \left\{ x \in \Omega : d(x,\Omega^c) > C_m \delta^{2m-2} \int_0^t \Lambda^{2m-1} \right\}.$$

In particolare, u *é continua in* (x,t) *e analitica reale in* x *per ogni* t *sul conoide*

$$C_T = \left\{ (x,t) : x \in \Omega^t, 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Mostriamo ora un altro metodo di arrivare al teorema 5.2. Partiamo dall'equazione

$$\partial_t^m u(x,t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}(x,t)\partial_x^{m-j}\partial_t^j u(x,t),$$

e utilizziamo lo stesso procedimento utilizzato per i sistemi nella sezione 3.3. Sviluppando i coefficienti in un punto x_0, traslando e applicando la trasformata rispetto alle variabili spaziali, l'equazione diventa

$$\partial_t^m v(x,\zeta,t) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j+1}^k(t) i^k \partial_\zeta^k\big((i\zeta)^{m-j}\partial_t^j v(x,\zeta,t)\big), \tag{5.5}$$

dove abbiamo posto $v = \widehat{\tau_{x_0} u}$. Poniamo

$$V(x,\zeta,t) = \big(i^{m-j}\zeta^{m-j}\partial_t^{j-1} v(x,\zeta,t)\big)_{j=1,\ldots,m}, \tag{5.6}$$

possiamo allora riscrivere la (5.5) nella forma

$$\begin{aligned} \partial_t^m v &= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_{j+1}^k i^k \partial_\zeta^k (i\zeta V_j) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}^0 i\zeta V_j + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}^k i^k \partial_\zeta^k (i\zeta V_j). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Definiamo la matrice

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_1^0(t) & a_2^0(t) & \ldots & \ldots & a_m^0(t) \end{pmatrix}$$

dalla (5.7) e dal fatto che, per definizione,

$$\partial_t V_j = i\zeta V_{j+1}, \quad j = 1,\ldots,m-1,$$

abbiamo che la (5.5) é equivalente a un sistema della forma

$$\partial_t V = A^0(t) i\zeta V + \sum_{|k|\neq 0} F_k(t,\zeta,V,\ldots,\partial_\zeta^k V) \tag{5.8}$$

con

$$A^0(t) \le \Lambda(t),$$

e

$$F_k(t,\zeta,V,\ldots,\partial_\zeta^k V) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}^k i^k \partial_\zeta^k (i\zeta V_j).$$

Gli autovalori di $A^0(t)\xi$ sono reali e distinti se lo sono le radici dell'equazione caratteristica.
Possiamo allora costruire, come nel lemma 3.8, una famiglia di quasi-simmetrizzatori per $A_0(\xi, t) = A^0(t)\xi$, e ottenere la stessa stima per V.

Diamo ora un'idea di cosa succede nel caso $n > 1$.
Se definiamo

$$U(t,x) \doteq (\Lambda^{m-j}\partial_t^{j-1}u)_{j=1,\dots,m}$$

otteniamo un sistema pseudodifferenziale del primo ordine

$$\partial_t U = i\mathcal{A}(t,x,\partial_x)U + \mathcal{B}(t,x,\partial_x)U,$$

per il quale peró non funzionano le tecniche utilizzate per i sistemi differenziali.

Potremmo allora provare a prendere

$$U(t,x) \doteq (\partial_x^l \partial_t^j u)_{j=0,\dots,m-1}^{l=0,\dots,j-1}.$$

In questo caso otteniamo un sistema molto grande, che non é iperbolico. Gli autovalori caratteristici del sistema sono gli stessi dell'equazione, con la stessa molteplicitá, e 0. Pertanto i teoremi dimostrati non si possono applicare al sistema ottenuto. Non escludiamo peró che la forma particolare del sistema permetta di costruire comunque i simmetrizzatori, e ottenere lo stesso il risultato.

Bibliografia

[1] J. M. Bony, P. Schapira, Solutions hyperfonctions du problme de Cauchy. Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of Andr Martineau), pp. 82–98, Lecture Notes in Math., Vol. 287, Springer, Berlin, 1973.

[2] J. M. Bony, P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des quations aux drives partielles, Colloque International CNRS sur les quations aux Drives Partielles Linaires (Univ. Paris-Sud, Orsay, 1972), pp. 117–127, Asterisque, 2 et 3, Soc. Math. France, Paris, 1973.

[3] J.M. Bony, P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des quations aux drives partielles, Invent. Math. 17 (1972), 95–105.

[4] M. D. Bronstein, The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity, Trudy Moskov. Mat. Obshch. 41 (1980), 83–99.

[5] F. Colombini, E. De Giorgi, S. Spagnolo, Sur les quations hyperboliques avec des coefficients qui ne dpendent que du temps. (French) Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 6 (1979), no. 3, 511–559.

[6] F. Colombini, S. Spagnolo, Second order hyperbolic equations with coefficients real analytic in space variables and discontinuous in time. J. Analyse Math. 38 (1980), 1–33.

[7] N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators. I. General Theory. With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle, Pure and Applied Mathematics, Vol. 7 Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London 1958.

[8] L. Evans, Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[9] L. Hormander, The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 256. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[10] E. Jannelli, Symmetric hyperbolic systems with coefficients depending only on time, Boll. Un. Mat. Ital. Suppl. 1980, no. 1, 153–175.

[11] E. Jannelli, Weakly hyperbolic equations of second order with coefficients real analytic in space variables, Comm. Partial Differential Equations 7 (1982), no. 5, 537–558.

[12] E. Jannelli, Linear Kovalevskian systems with time-dependent coefficients, Comm. Partial Differential Equations 9 (1984), no. 14, 1373–1406.

[13] A. Martineau, Sur les fonctionnnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Analyse Math. 11 1963 1–164.

[14] S. Mizohata, Analyticity of solutions of hyperbolic systems with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 14 1961 547–559.

[15] S. Mizohata, The theory of partial differential equations, Cambridge University Press, New York, 1973.

[16] F. Trèves, Basic linear partial differential equations, Pure and Applied Mathematics, Vol. 62, Academic Press, New York-London, 1975.

[17] K. Yosida, Functional analysis, Fifth edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.