

*A mia madre,
per la costanza e l'amore profusi
in tutti questi anni.*

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

**Costruzione di un Simulatore Orbitale in
ambiente Matlab**



Relatori:
Prof. Giovanni Mengali

Laureando:
Francesco DI SOMMA

Prof. Carlo Casarosa

Correlatore:
Ing. Alessandro Quarta

04 MV 02 713

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

Sommario

Nel presente lavoro ci siamo proposti di creare un simulatore di volo satellitare. Per fare ciò è stato necessario affrontare e risolvere il problema della determinazione e quantificazione delle perturbazioni a cui è soggetto un satellite operante in atmosfera terrestre.

Da queste, per integrazione, si è ottenuta la traiettoria reale e si è valutato di quanto la stessa si discosta da quella Kepleriana ideale, basata su un semplice modello a due corpi (Terra e satellite) in cui l'unica forza agente è quella dovuta all'attrazione gravitazionale. La stima del *discostamento* dalla situazione ideale è stata fatta in termini di variazione dei sei elementi orbitali classici:

- semiasse maggiore
- eccentricità
- inclinazione
- argomento del perigeo
- ascensione retta del nodo ascendente
- anomalia vera

Infine tra le configurazioni possibili ne sono state scelte tre, più significative, sulle quali abbiamo testato il nostro simulatore:

Orbita bassa (LEO, *Low Earth Orbit*)

Orbita di tipo Molnya

Orbita Geostazionaria (GEO, *Geostationary Earth Orbit*)

Ringraziamenti

Un sincero ringraziamento è rivolto al Prof. Giovanni Mengali, titolare della cattedra di Meccanica del Volo Spaziale, per avermi dato la possibilità di svolgere tale lavoro all'interno del Flight Mechanic Group.

Un ringraziamento particolare è diretto anche all' Ing. Alessandro Quarta per la disponibilità ad aiutarmi che mai durante la stesura della mia tesi è mancata.

Ringrazio la mia famiglia, per l'appoggio e le motivazioni che mi hanno saputo dare.

Un profondo e sincero ringraziamento va ai miei zii, Carlo e Albertina, per avermi aiutato in ogni modo a raggiungere questo importante traguardo. Grazie davvero.

Non posso certo dimenticarmi di Adriana, con la quale ho condiviso gioie e delusioni degli ultimi due anni e che ha avuto sempre la pazienza di sopportarmi ed incoraggiarmi.

L'ultimo ringraziamento va agli amici, in particolare Benedetto e Daniele, per gli importanti suggerimenti che mi hanno permesso di velocizzare l'apprendimento dei programmi utilizzati in tale tesi, e soprattutto per l'amicizia dimostratami durante tutta la mia carriera universitaria.

Indice

Sommario	I
Ringraziamenti	II
Elenco dei simboli	VI
I Prima Parte	1
1 L'ambiente spaziale	2
1.1 Introduzione	2
1.2 L'atmosfera terrestre	3
1.2.1 Struttura generale dell'atmosfera	3
1.2.2 Modello di Omosfera	6
1.2.3 Modello di Eterosfera o <i>Upper Atmosphere</i>	7
1.3 Il campo gravitazionale terrestre	17
1.3.1 Introduzione	17
1.3.2 Rappresentazione del potenziale gravitazionale	17
1.3.3 Modello matematico	20
1.4 Il ciclo solare	23
1.5 Il campo magnetico terrestre	26
1.5.1 Modello di campo magnetico interno	26
1.5.2 Campo magnetico ad alte quote	30
1.5.3 Coordinate geomagnetiche (B,L)	31
1.6 Le fasce di Van Allen	33
1.6.1 Introduzione	33

1.6.2	Magnetosfera	33
1.6.3	Struttura delle fasce di Van Allen	36
1.6.4	I modelli standard	37
2	Le perturbazioni orbitali	44
2.1	Introduzione	44
2.2	Formulazione di Cowell	45
2.3	Effetti dello schiacciamento ai poli terrestri	46
2.4	Effetti dell'attrazione solare e lunare	53
2.4.1	Il modello a 3 corpi	53
2.4.2	Calcolo delle accelerazioni perturbative	54
2.5	Pressione di radiazione solare	61
2.5.1	Introduzione	61
2.5.2	Modello matematico	61
2.5.3	Condizioni di Eclissi	64
2.6	Effetti della resistenza atmosferica	70
2.6.1	Introduzione	70
2.6.2	Effetti della resistenza atmosferica	70
II	Seconda Parte	76
3	Simulazioni di missione	77
3.1	Introduzione	77
3.2	Descrizione della Simulazione	77
3.3	Simulazione n°1-Orbita di tipo LEO	79
3.3.1	Introduzione	79
3.3.2	Risultati della Simulazione	79
3.4	Simulazione n°2-Orbita di tipo Molnya	85
3.4.1	Introduzione	85
3.4.2	Risultati della Simulazione	85
3.5	Simulazione n°3-Orbita Geostazionaria	91
3.5.1	Introduzione	91
3.5.2	Risultati della Simulazione	92

4 Conclusioni e sviluppi futuri	97
4.1 Commenti e conclusioni	97
4.2 Sviluppi futuri	99
A Unità canoniche	100
B Utilities	102
B.1 Misura del tempo - Data Giuliana	102
B.2 Costanti Astrodinamiche	104
B.3 Effemeridi	105
B.3.1 Effemeridi del Sole	105
B.3.2 Effemeridi della Luna	108
Bibliografia	110
Elenco delle figure	112
Elenco delle tabelle	118
Elenco degli acronimi	119

Elenco dei Simboli

Parte I

Prima Parte

1

L'ambiente spaziale

1.1 Introduzione

Un'accurata conoscenza dell'ambiente spaziale è sicuramente il punto di partenza per una buona analisi di missione.

L'ambiente, infatti, influenza notevolmente sia il funzionamento che la vita operativa del veicolo che vi opera. L'ambiente viene convenzionalmente chiamato *naturale* se l'insieme delle condizioni ambientali è dettato dal mondo fisico esterno, come nel caso dell'atmosfera residua, delle radiazioni particellari, dei micrometeoriti, mentre viene detto *indotto* se le condizioni ambientali sono create o modificate dalla presenza del veicolo spaziale, come ad esempio nel caso delle radiazioni secondarie o del caricamento elettrostatico delle componenti del sistema.

L'ambiente spaziale può inoltre contenere elementi che sono generati dall'esercizio di altre attività spaziali come ad esempio detriti e contaminazioni di varia natura. Nel presente lavoro analizzeremo nel dettaglio sia le caratteristiche fisiche dell'atmosfera in cui il satellite andrà ad operare, sia gli effetti perturbativi a cui sarà soggetto.

Le perturbazioni che saranno trattate sono le seguenti:

- effetto del campo gravitazionale terrestre
- effetto della presenza del Sole
- effetto della presenza della Luna
- pressione di radiazione solare

- effetto della resistenza atmosferica
- campo magnetico terrestre
- effetto della permanenza del satellite all'interno delle cosiddette *fasce di Van Allen*

Sfruttando le diverse fonti disponibili in letteratura sull'argomento sono stati ricavati ed implementati i modelli matematici capaci di simulare sia l'ambiente esterno che l'entità di tali perturbazioni.

1.2 L'atmosfera terrestre

1.2.1 Struttura generale dell'atmosfera

Le condizioni atmosferiche incontrate da un satellite in orbita intorno alla Terra sono fattori molto importanti nel progetto del veicolo spaziale e nelle scelte di missione. La densità è la principale proprietà atmosferica che influenza la quota dell'orbita, il tempo di vita e il moto del satellite; la stessa, insieme alla composizione chimica e alla temperatura, sono necessarie per il calcolo accurato del coefficiente di resistenza.

L'atmosfera terrestre è convenzionalmente suddivisa in base alla quota in tre diverse regioni, che sono caratterizzate da una differente stratificazione termica (si veda [1] pag. 55):

Omosfera che comprende

Troposfera da 0 a 12 km di quota

Stratosfera dai 12 ai 50 km di quota

Mesosfera dai 50 ai 90 km di quota

Termosfera o Ionosfera che si estende da 90 a 250 o 400 km di quota, a seconda dell'attività solare e geomagnetica

Esosfera che inizia alla sommità della Termosfera e che si estende fin nello spazio.

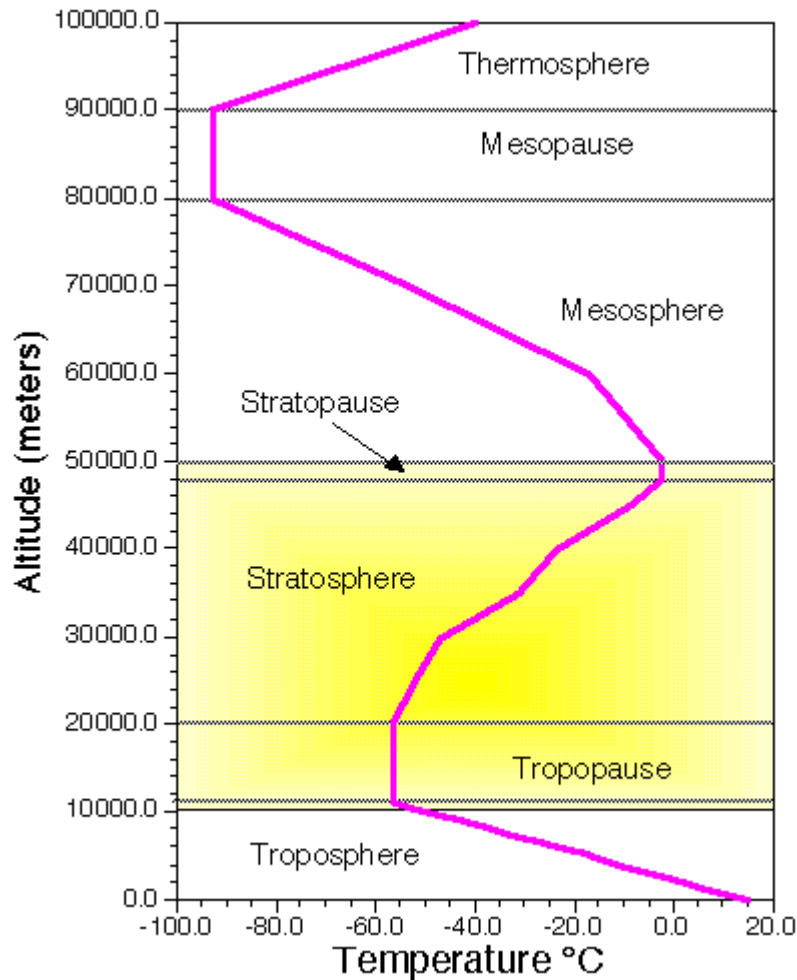


Figura 1.1: Suddivisione convenzionale dell'atmosfera in fasce

Nell'atmosfera la miscela di gas è distribuita verticalmente in equilibrio quasi-idrostatico, e il suo combinarsi in modo turbolento fa sì che la composizione dell'atmosfera rimanga all'incirca uniforme (78.1 per cento di N_2 , 20.9 di O_2 , 0.9 di Ar , 0.1 di CO_2).

Il suo profilo di temperatura presenta gradienti alternati, con due minimi locali in corrispondenza rispettivamente della **Tropopausa** (218 K) e della **Mesopausa** (circa 150 K), e un massimo locale in corrispondenza della **Stratopausa** (280 K).

Intorno ai 90 km di quota comincia la **Termosfera**; qui i processi di fotodissociazione determinano grossi cambiamenti nella composizione in termini di diminuzione della massa molecolare delle specie presenti e della presenza dell'ossigeno atomico al posto di quello molecolare.

A quote maggiori la separazione per diffusione diventa dominante e ogni costituente è distribuito individualmente rispetto alla quota in accordo con il proprio peso molecolare; sopra certe quote i gas più leggeri (ossigeno atomico, elio, idrogeno atomico) predominano su quelli più pesanti e risulta molto complicato riuscire a determinare una distribuzione di massa molecolare media. In figura (1.2) è riportata la variazione della densità delle specie presenti in atmosfera al variare della quota.

La Termosfera si estende fino ad una altezza media di 500 km. Il limite superiore (*Termopausa*) varia con il livello di attività solare; durante i periodi di minima attività tale limite si verifica intorno ai 350 km, mentre in attività massima può raggiungere anche i 700 km.

Il profilo di temperatura *termosferica* si mantiene inizialmente pressoché costante, per poi aumentare notevolmente e infine tendere ad un valore limite asintotico T_e in corrispondenza proprio della *Termopausa*. Valori tipici di T_e si aggirano intorno ai 600 K e ai 2000 K rispettivamente per livelli di attività solare estremamente bassa ed estremamente alta.

Infine, al di sopra della Termopausa, inizia la regione che va sotto il nome di **Esosfera**; qui gli atomi di idrogeno ed elio, grazie alla loro leggerezza ed energia, possono liberarsi dell'azione del campo gravitazionale terrestre e

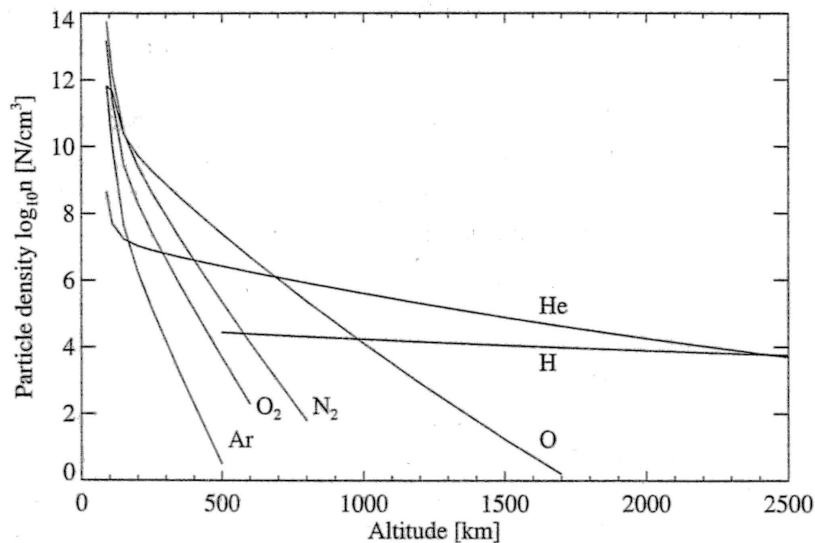


Figura 1.2: Variazione del *Number Density* nei principali costituenti dell'atmosfera in base alla quota, per un valore della temperatura esosferica fissato a 1000 K.

fuggire nello spazio esterno.

1.2.2 Modello di Omosfera

Come detto in precedenza, per quote al di sotto degli 85 km l'atmosfera terrestre può essere assunta di uniforme composizione e con proprietà di gas perfetto. Per ogni costituente i la pressione parziale p_i evolve con la quota in accordo con la legge di equilibrio idrostatico:

$$\frac{dp_i}{p_i} = -\frac{g M_i}{RT} dh \quad (1.1)$$

dove:

p_i	pressione parziale, in N/m^2
g	accelerazione gravitazionale di riferimento (9.806 m/s^2)
M_i	massa molecolare dell' i -esimo costituente in kg/kmol
R	costante universale dei gas, pari a $8314 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$
T	temperatura (K)
h	quota (km)

In accordo con la *US Standard Atmosphere 1976* (USSA-76) si definisce la temperatura omosferica partendo da un valore

$$T_0 = T(h = 0) = 288.15 \text{ K} \quad (1.2)$$

Il suo profilo, secondo il modello MSISE-90 (rif.[1]), può essere schematizzato nel modo seguente:

$$\frac{dT}{dh} = \begin{cases} -6.5 \text{ K/km} & \text{per } h \in [0, 11 \text{ km}] \\ +0.0 \text{ K/km} & \text{per } h \in [11 \text{ km}, 20 \text{ km}] \\ +1.0 \text{ K/km} & \text{per } h \in [20 \text{ km}, 32 \text{ km}] \\ +2.8 \text{ K/km} & \text{per } h \in [32 \text{ km}, 47 \text{ km}] \\ +0.0 \text{ K/km} & \text{per } h \in [47 \text{ km}, 51 \text{ km}] \\ -2.8 \text{ K/km} & \text{per } h \in [51 \text{ km}, 71 \text{ km}] \\ -2.0 \text{ K/km} & \text{per } h \in [71 \text{ km}, 85 \text{ km}] \end{cases}$$

Per una data temperatura $T(h)$ la pressione parziale p_i può essere scritta in termini di *number density*:

$$n_i = \frac{p_i}{K T} \quad (1.3)$$

dove

n_i concentrazione di particelle della specie *i-esima* ($1/\text{m}^3$)
 K costante di Boltzmann ($= 1.3807 \times 10^{-16}$ erg/Kelvin)

Quindi conoscendo le quantità (p_i, n_i, T) si ricavano facilmente sia la pressione totale p che la densità ρ dalle seguenti leggi:

$$p = \sum_{i=1}^7 (p_i) = K T \sum_{i=1}^7 (n_i) \quad (1.4)$$

$$\rho = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^7 (n_i M_i) \quad (1.5)$$

dove

N_A numero di Avogadro ($= 6.022 \times 10^{23}$ mol $^{-1}$)

1.2.3 Modello di Eterosfera o *Upper Atmosphere*

Con il termine Eterosfera si intende quel *range* di quote che va dalla fine dell'Omosfera fino a circa 2500 km, e perciò comprende Termosfera ed Esosfera.

La Termosfera è caratterizzata dall'aumento repentino della temperatura con la quota tra i 90 e i 200 km. Ciò avviene a causa dell'assorbimento delle radiazioni solari, in particolare quelle con lunghezze d'onda superiori a 2000Å nella porzione estrema dello spettro UV (rif.[2]). Tale radiazione causa la dissociazione e la ionizzazione delle particelle, con conseguente rilascio di calore.

Sopra i 200 km il calore depositato nell'atmosfera diminuisce con la quota e si tende ad una situazione di *isotermicità* se non vi è una quantità apprezzabile

di calore in ingresso dalla Magnetosfera.

Variazioni dovute all'attività solare

La radiazione solare ultravioletta urta l'atmosfera terrestre continuamente, ma con distribuzione di intensità spettrale variabile in base al ciclo solare. Nella Termosfera la densità è fortemente condizionata da tali cambiamenti, e le sue corrispondenti variazioni influenzano in primo luogo la resistenza atmosferica.

Nel 1958 Jacchia, da studi condotti sulle orbite di alcuni satelliti, trovò che la resistenza d'attrito dell'aria cresceva considerevolmente nei periodi di alta attività solare (rif.[3]); questo a causa dell'aumento della radiazione in ingresso e del progressivo riscaldamento dell'Eterosfera. Una curiosità interessante è che la reazione dell'atmosfera alle variazioni del ciclo solare non è istantanea; esiste un certo intervallo temporale, detto *time lag*, che da studi condotti recentemente da Roemer [4,5] risulta essere dell'ordine di poco più di un giorno.

Variazioni giornaliere

Le variazioni *day-night* della densità e della temperatura in atmosfera alta sono state osservate da alcune misurazioni di resistenza sui satelliti. Per quanto riguarda la densità la situazione è la seguente (rif.[6]):

- fino ai 200 km di quota le densità diurne e notturne in prima stima coincidono;
- per quote superiori, l'eccesso di densità diurna rispetto a quella notturna aumenta con la quota e risulta maggiore nelle zone con latitudini più basse.

L'ampiezza della variazione diurna della temperatura non è, invece, costante. Studi svolti da Jacchia e Slowey (rif.[7]) hanno mostrato che il rapporto della temperatura esosferica tra il giorno e la notte dipende dal ciclo solare (aumenta in attività alta) e soprattutto dall'attività geomagnetica; risulta invece indipendente dalla latitudine.

Variazioni dovute all'attività geomagnetica

Le tempeste geomagnetiche solitamente hanno luogo quando nuvole di particelle cariche entrano in collisione con la magnetosfera terrestre; si sostiene che queste particelle siano emesse dal Sole durante quel fenomeno di corto periodo che va sotto il nome di *Solar Flare*. Il risultato è un notevole surriscaldamento della atmosfera terrestre.

Anche in questo caso la risposta dell'atmosfera in termini di variazioni di densità non è immediata, ma studi condotti a tal proposito (rif.[4]) dimostrano che il *time lag* è di circa 6.7 ore.

Variazione semi-annuale

Le cause e i meccanismi della variazione semiannuale della densità non sono ancora pienamente compresi. Le peculiarità sono:

- un minimo principale nel mese di Luglio
- un massimo elevato in Ottobre
- un minimo secondario in Gennaio
- un massimo secondario in Aprile.

Studi recenti (rif.[8]) mostrano che la semiannuale variazione della densità nella regione tra i 150 e i 180 km si ripete anche a quote maggiori.

Variazione stagionale-latitudinale

Studi molto attuali mostrano che la bassa Termosfera è soggetta a variazioni stagionale-latitudinali in temperatura e densità (rif.[9]). L'ampiezza di tali variazioni aumenta molto rapidamente a partire dai 90 km, con un picco da qualche parte tra i 105 e i 120 km; poi diminuisce con la quota fino ai 200 km, altitudine in corrispondenza della quale non si ha più alcuna variazione apprezzabile.

Modello matematico

A partire dal 1965 numerosi modelli di atmosfera furono pubblicati da Jacchia (1965, 1970, 1971, 1977, 1981). Il primo, chiamato *J65*, era basato soltanto sui parametri principali, quota e temperatura, determinando alla fine la densità. Quando dall'analisi delle accelerazioni di alcuni satelliti dovute alla resistenza atmosferica divennero disponibili dati più precisi, tale modello fu migliorato e nacque il cosiddetto *J71*, di cui ci serviamo per la messa a punto del nostro simulatore (vedi [10] pag.91).

Esso tiene conto delle variazioni di densità come funzioni del tempo e copre un intervallo di quote che va dai 90 ai 2500 km; la computazione avviene in tre passi:

- Si computa la temperatura esosferica T_∞ a partire dai dati a disposizione sulla attività solare e geomagnetica, in combinazione con un modello appropriato sulle variazioni diurne dell'atmosfera;
- Noto T_∞ si fa uso dei coefficienti di una opportuna rappresentazione polinomiale per ottenere i valori standard della densità;
- Si inseriscono dei termini correttivi per tenere conto delle variazioni di densità descritte in precedenza.

Temperatura esosferica

Nel nostro modello (*J71*) il valore minimo della temperatura esosferica che non tiene conto della radiazione solare e dell'attività geomagnetica è $T_{min} = 379$ K.

Mettendo in conto l'effetto della radiazione solare si ottiene

$$T_C = 379 + 3.24\tilde{F}_{10.7} + 1.3(F_{10.7} - \tilde{F}_{10.7}) \quad (1.6)$$

dove

$F_{10.7}$ flusso solare in 10^{-22} W/(m² Hz)

$\tilde{F}_{10.7}$ valore medio di $F_{10.7}$

Il valore di $F_{10.7}$ si calcola come media tra la data in esame e il giorno precedente; il valore medio, invece, si ottiene mediando su tre rotazioni solari di

27 giorni (vedi fig1.3).

La temperatura esosferica dipende inoltre da fattori quali l'angolo orario

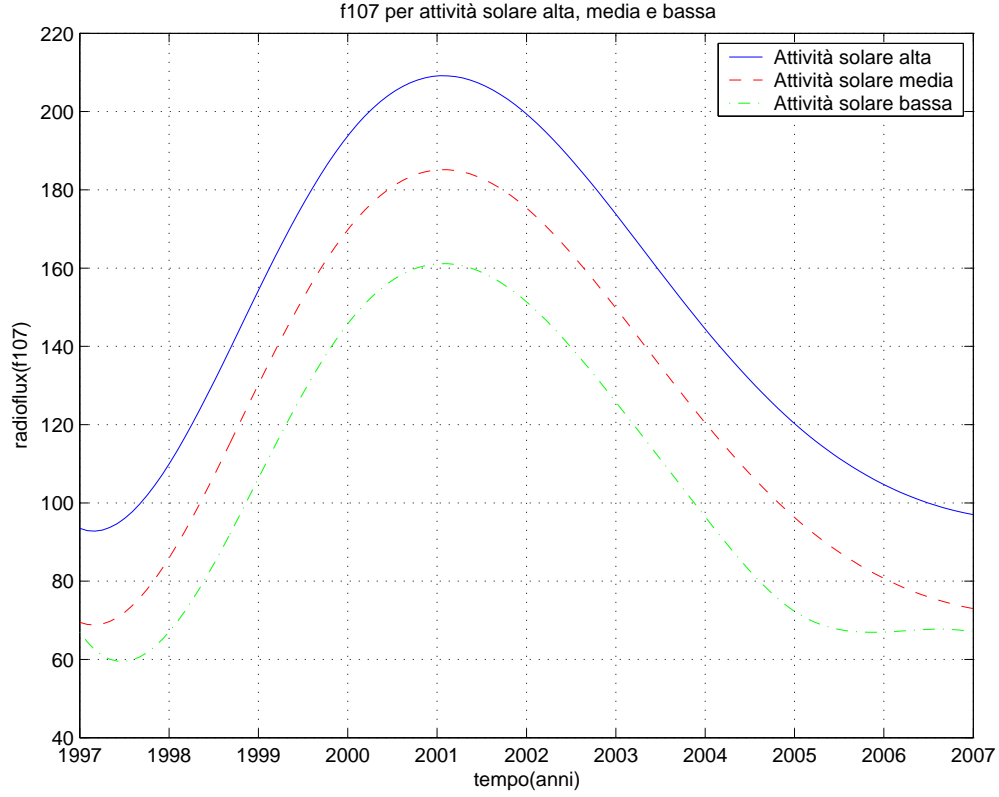


Figura 1.3: Variazione di $F_{10.7}$ con il ciclo solare

del Sole rispetto al satellite, la declinazione del Sole e la latitudine geografica del satellite. Se ne tiene conto con la seguente espressione:

$$T_1 = T_C [1 + 0.3(\sin^{2.2} |\theta| + (\cos^{2.2} |\eta| - \sin^{2.2} |\theta|) \cos^3(\frac{\tau}{2}))] \quad (1.7)$$

dove gli angoli τ ($-180 < \tau < 180$), θ ed η sono dati da

$$\tau = H - 37 + 6 \sin(H + 43) \quad (1.8)$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\varphi + \delta_{\odot}) \quad (1.9)$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\varphi - \delta_{\odot}) \quad (1.10)$$

$$H = \alpha_{SAT} - \alpha_{\odot} \quad (1.11)$$

In queste espressioni δ_{\odot} indica la declinazione solare, φ è la latitudine geografica e H l'angolo orario; α_{SAT} e α_{\odot} sono rispettivamente l'ascensione retta del satellite e del Sole.

L'ultimo effetto da prendere in considerazione è quello dell'attività geomagnetica; la correzione di temperatura dovuta a tale causa si può esprimere così:

$$\Delta T_{\infty} = f\Delta T_{\infty}^H + (1 - f)\Delta T_{\infty}^L \quad (1.12)$$

dove

$$\Delta T_{\infty}^H = 28K_p + 0.03e^{K_p} \quad (1.13)$$

$$\Delta T_{\infty}^L = 14K_p + 0.02e^{K_p} \quad (1.14)$$

$$f = \frac{1}{2}(\tanh(0.04(h - 350)) + 1) \quad (1.15)$$

in cui

K_p indice di attività geomagnetica

h quota in km

Nella figura (1.4) sono riportati i valori consigliati dell'indice di attività geomagnetica ($A_p = \log K_p$) e del flusso solare $F_{10.7}$.

Quindi l'espressione finale per la temperatura esosferica, che tiene conto di

	Long-term			Short-term
	Low	Mean	High	High
$F_{10.7}$	70	140	250	380
A_p	0	15	25	300

Figura 1.4: Valori di riferimento degli indici di flusso solare e geomagnetico

tutti gli effetti, sarà

$$T_{\infty} = T_1 + \Delta T_{\infty} \quad (1.16)$$

da cui, entrando con la quota, determino T_{∞} .

Computazione Densità Standard

Una sofisticata rappresentazione bi-polinomiale per il calcolo della densità è la seguente:

$$\log \rho(h, T_\infty) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^4 c_{ij} \left(\frac{h}{1000 \text{ km}} \right)^i \left(\frac{T_\infty}{1000 \text{ K}} \right)^j \quad (1.17)$$

dove

ρ densità standard in kg/m^3

I coefficienti c_{ij} utilizzati nel modello sono riportati in fig(1.5).

Correzioni

Alcune correzioni devono essere apportate per tenere conto anche dei vari fenomeni che portano a non trascurabili variazioni della densità. Ad esempio sotto i 350 km vi è un addizionale termine geomagnetico:

$$\Delta \log \rho_{GM} = (0.012 K_p + 1.2 \cdot 10^{-5} e^{K_p})(1 - f) \quad (1.18)$$

La variazione semi-annuale, invece, produce la seguente espressione:

$$\Delta \log \rho_{SA} = m(h)n(t) \quad (1.19)$$

dove

$$m(h) = (5.876 \cdot 10^{-7} (h/km)^{2.331} + 0.06328 e^{-0.002868h/km}) \quad (1.20)$$

$$n(t) = 0.02835 + (0.3817 + 0.17829 \sin(2\pi\tau_{SA} + 4.137)) \cdot \sin(4\pi\tau_{SA} + 4.259) \quad (1.21)$$

$$\tau_{SA} = \Phi + 0.09544 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\pi\Phi + 6.035) \right)^{1.65} - \frac{1}{2} \right] \quad (1.22)$$

con

$$\Phi = \frac{t - 36204}{365.2422} \quad (1.23)$$

Nell'equazione (1.23) t è il tempo espresso in data Giuliana modificata ($MJD = JD - 2400000.5$); quindi Φ è il numero di anni tropicali a partire dal 1 Gennaio 1958.

90 km < Z < 180 km					500 K < T _∞ < 850 K						
i/j	0	1	2	3	4	i/j	0	1	2	3	4
0	-0.3520856·10 ²	+0.3912622·10 ³	-0.8649259·10 ²	+0.1504119·10 ³	-0.7109428·10 ²	0	-0.1815722·10 ⁴	+0.9792972·10 ⁴	-0.1831374·10 ⁵	+0.1385255·10 ⁵	-0.3451234·10 ⁴
1	+0.1129210·10 ⁴	+0.1198158·10 ⁴	+0.8633794·10 ³	-0.3577091·10 ⁴	+0.1970558·10 ⁴	1	+0.9851221·10 ⁴	-0.5397525·10 ⁵	+0.9993169·10 ⁵	-0.7259456·10 ⁵	+0.1622553·10 ⁵
2	-0.1527475·10 ⁵	-0.3558481·10 ⁵	+0.1899243·10 ⁵	+0.2508241·10 ⁵	-0.1968253·10 ⁵	2	-0.1822932·10 ⁵	+0.1002430·10 ⁶	-0.1784481·10 ⁶	+0.1145178·10 ⁶	-0.1641934·10 ⁵
3	+0.9302042·10 ⁵	+0.3646554·10 ⁶	-0.3290364·10 ⁶	-0.1209631·10 ⁵	+0.8438137·10 ⁵	3	+0.1298113·10 ⁵	-0.7113430·10 ⁵	+0.1106375·10 ⁶	-0.3825777·10 ⁵	-0.1666915·10 ⁵
4	-0.2734394·10 ⁶	-0.1576097·10 ⁷	+0.1685831·10 ⁷	-0.4282943·10 ⁶	-0.1345593·10 ⁶	4	-0.1533510·10 ⁴	+0.7815537·10 ⁴	+0.7037562·10 ⁴	-0.4674636·10 ⁵	+0.3516949·10 ⁵
5	+0.3149696·10 ⁶	+0.2487723·10 ⁷	-0.2899124·10 ⁷	+0.1111904·10 ⁷	+0.3294095·10 ⁴	5	-0.1263680·10 ⁴	+0.7265792·10 ⁴	-0.2092909·10 ⁵	+0.2936094·10 ⁵	-0.1491676·10 ⁵
90 km < Z < 180 km					850 K < T _∞ < 1900 K						
i/j	0	1	2	3	4	i/j	0	1	2	3	4
0	-0.5335412·10 ²	+0.2900557·10 ²	-0.2046439·10 ²	+0.7977149·10 ¹	-0.1335853·10 ¹	0	-0.4021335·10 ²	-0.1326983·10 ³	+0.3778864·10 ³	-0.2808660·10 ³	+0.6513531·10 ²
1	+0.1977533·10 ⁴	-0.7091478·10 ³	+0.4398538·10 ³	-0.1568720·10 ³	+0.2615466·10 ²	1	+0.4255789·10 ³	+0.3528126·10 ³	-0.2077888·10 ⁴	+0.1726543·10 ⁴	-0.4191477·10 ³
2	-0.2993620·10 ⁵	+0.5187286·10 ⁵	-0.1989795·10 ⁴	+0.3643166·10 ³	-0.5700669·10 ²	2	-0.1821662·10 ⁴	+0.7905357·10 ³	+0.3934271·10 ⁴	-0.3969334·10 ⁴	+0.1027991·10 ⁴
3	+0.2112068·10 ⁶	-0.4483029·10 ⁴	-0.1349971·10 ⁵	+0.9510012·10 ⁴	-0.1653725·10 ⁴	3	+0.3070231·10 ⁴	-0.2941540·10 ⁴	-0.3276639·10 ⁴	+0.4420217·10 ⁴	-0.1230778·10 ⁴
4	-0.7209722·10 ⁶	-0.7684101·10 ⁵	+0.1256236·10 ⁶	-0.6805699·10 ⁵	+0.1181257·10 ⁵	4	-0.2196848·10 ⁴	+0.2585118·10 ⁴	+0.1382776·10 ⁴	-0.2533006·10 ⁴	+0.7451387·10 ³
5	+0.9625966·10 ⁶	+0.2123127·10 ⁶	-0.2622793·10 ⁶	+0.1337130·10 ⁶	-0.2329995·10 ⁵	5	+0.5494959·10 ³	-0.6604225·10 ³	-0.3328077·10 ³	+0.6335703·10 ³	-0.1879812·10 ³
180 km < Z < 500 km					500 K < T _∞ < 850 K						
i/j	0	1	2	3	4	i/j	0	1	2	3	4
0	+0.2311910·10 ²	+0.1355298·10 ³	-0.8424310·10 ³	+0.1287331·10 ⁴	-0.6181209·10 ³	0	+0.3548698·10 ³	-0.2508685·10 ⁴	+0.6252742·10 ⁴	-0.6755376·10 ⁴	+0.2675763·10 ⁴
1	-0.1057776·10 ⁴	+0.6087973·10 ³	+0.8690566·10 ⁴	-0.1715922·10 ⁵	+0.9052671·10 ⁴	1	-0.5370852·10 ³	+0.4182586·10 ⁴	-0.1151114·10 ⁵	+0.1338915·10 ⁵	-0.5610580·10 ⁴
2	+0.1177230·10 ⁵	-0.3164132·10 ⁵	-0.1076323·10 ⁴	+0.6302629·10 ⁵	-0.4312459·10 ⁵	2	-0.2349586·10 ²	-0.8941841·10 ³	+0.4417927·10 ⁴	-0.6732817·10 ⁴	+0.3312608·10 ⁴
3	-0.5827663·10 ⁵	+0.2188167·10 ⁶	-0.2422912·10 ⁶	+0.2461286·10 ⁵	+0.6044096·10 ⁵	3	+0.3407073·10 ³	-0.1531588·10 ⁴	+0.2179045·10 ⁴	-0.8841341·10 ³	-0.1369769·10 ³
4	+0.1254589·10 ⁶	-0.5434710·10 ⁶	+0.8123016·10 ⁶	-0.4490438·10 ⁶	+0.5007458·10 ⁵	4	-0.1698471·10 ³	+0.8985697·10 ³	-0.1704797·10 ⁴	+0.1363098·10 ⁴	-0.3812417·10 ³
5	-0.9452922·10 ⁵	+0.4408026·10 ⁶	-0.7379410·10 ⁶	+0.5095273·10 ⁶	-0.1154192·10 ⁶	5	+0.2497973·10 ²	-0.1389618·10 ³	+0.2820058·10 ³	-0.2472862·10 ³	+0.7896439·10 ²
180 km < Z < 500 km					850 K < T _∞ < 1900 K						
i/j	0	1	2	3	4	i/j	0	1	2	3	4
0	+0.4041761·10 ²	-0.1305719·10 ³	+0.1466809·10 ³	-0.7120296·10 ²	+0.1269605·10 ²	0	+0.1281061·10 ²	-0.3389179·10 ³	+0.6861935·10 ³	-0.4667627·10 ³	+0.1029662·10 ³
1	-0.8127720·10 ³	+0.2273565·10 ⁴	-0.2577261·10 ⁴	+0.1259045·10 ⁴	-0.2254978·10 ³	1	+0.2024251·10 ³	+0.1668302·10 ³	-0.1147876·10 ⁴	+0.9918940·10 ³	-0.2430215·10 ³
2	+0.5130043·10 ⁴	-0.1501308·10 ⁵	+0.1717142·10 ⁵	-0.8441698·10 ⁴	+0.1518796·10 ⁴	2	-0.5750743·10 ³	+0.8259823·10 ³	+0.2329832·10 ³	-0.6503359·10 ³	+0.1997989·10 ³
3	-0.1600170·10 ⁵	+0.4770469·10 ⁵	-0.5473492·10 ⁵	+0.2699668·10 ⁵	-0.4870306·10 ⁴	3	+0.5106207·10 ³	-0.1032012·10 ⁴	+0.4851874·10 ³	+0.8214097·10 ²	-0.6527048·10 ²
4	+0.2384718·10 ⁵	-0.7199064·10 ⁵	+0.8284653·10 ⁵	-0.4098358·10 ⁵	+0.7411926·10 ⁴	4	-0.1898953·10 ³	+0.4347501·10 ³	-0.2986011·10 ³	+0.5423180·10 ²	+0.5039459·10 ¹
5	-0.1363104·10 ⁵	+0.4153499·10 ⁵	-0.4793581·10 ⁵	+0.2377854·10 ⁵	-0.4310233·10 ⁴	5	+0.2569577·10 ²	-0.6282710·10 ²	+0.4971077·10 ²	-0.1404385·10 ²	+0.8450500·10 ⁰

Figura 1.5: Coefficienti polinomiali (c_{ij}) del modello atmosferico Jacchia 1971

Cercando di valutare anche la variazione *stagionale-latitudinale*, si ottiene:

$$\Delta \log \rho_{SL} = 0.014(h - 90)e^{(-0.0013(h-90)^2)} \sin(2\pi\Phi + 1.72) \frac{\sin^3 \varphi}{|\sin \varphi|} \quad (1.24)$$

dove

φ latitudine geocentrica

In definitiva la densità è data dalla somma dei seguenti contributi nelle varie fasce di quota in cui tali effetti hanno luogo.

$$\log \rho_{tot}(h, T_{\infty}) = \begin{cases} \log \rho + \Delta \log \rho_{GM} + \Delta \log \rho_{SA} + \Delta \log \rho_{SL} & [90 \leq h \leq 180 \text{ km}] \\ \log \rho + \Delta \log \rho_{GM} + \Delta \log \rho_{SA} & [180 \leq h \leq 350 \text{ km}] \\ \log \rho + \Delta \log \rho_{SA} & [h > 350 \text{ km}] \end{cases}$$

I risultati ottenuti dal modello *J71* sono riportati nelle figure 1.6, 1.7, 1.8 qui di seguito.

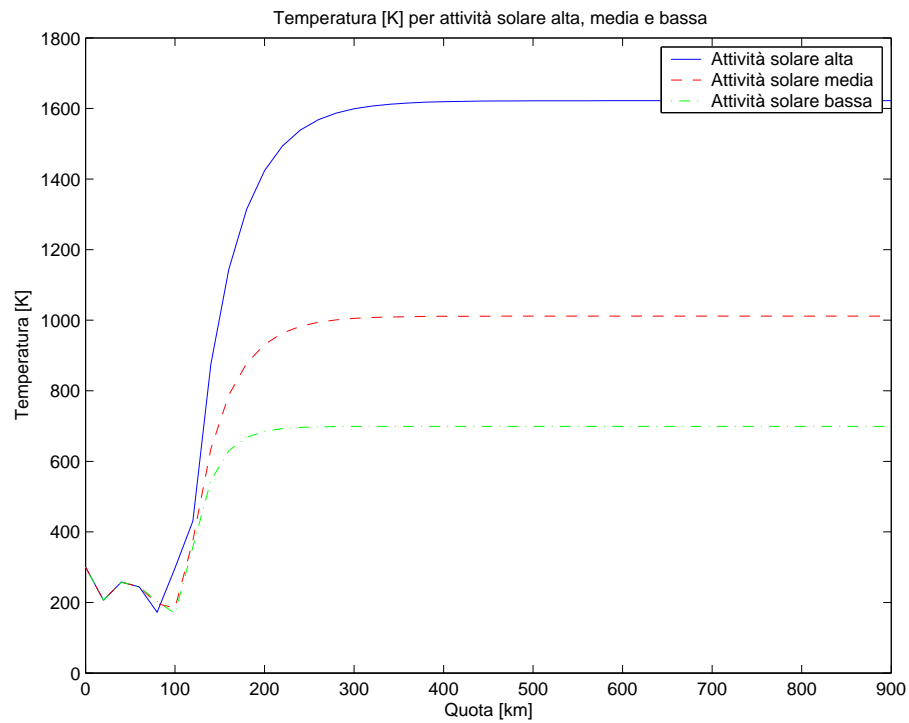


Figura 1.6: Temperatura atmosferica in funzione della quota e del ciclo solare

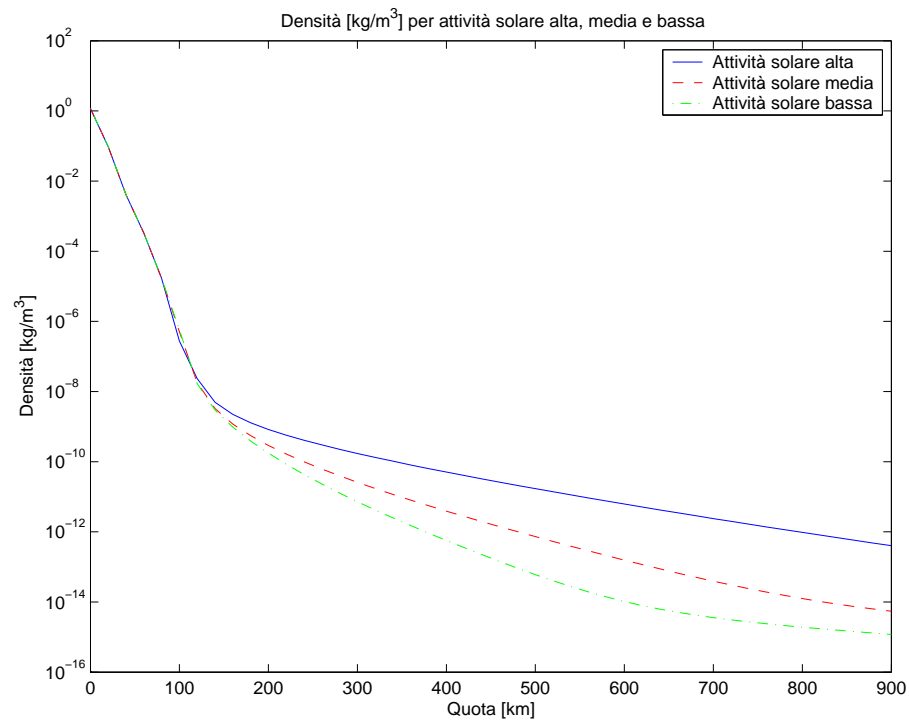


Figura 1.7: Densità atmosferica in funzione della quota e del ciclo solare

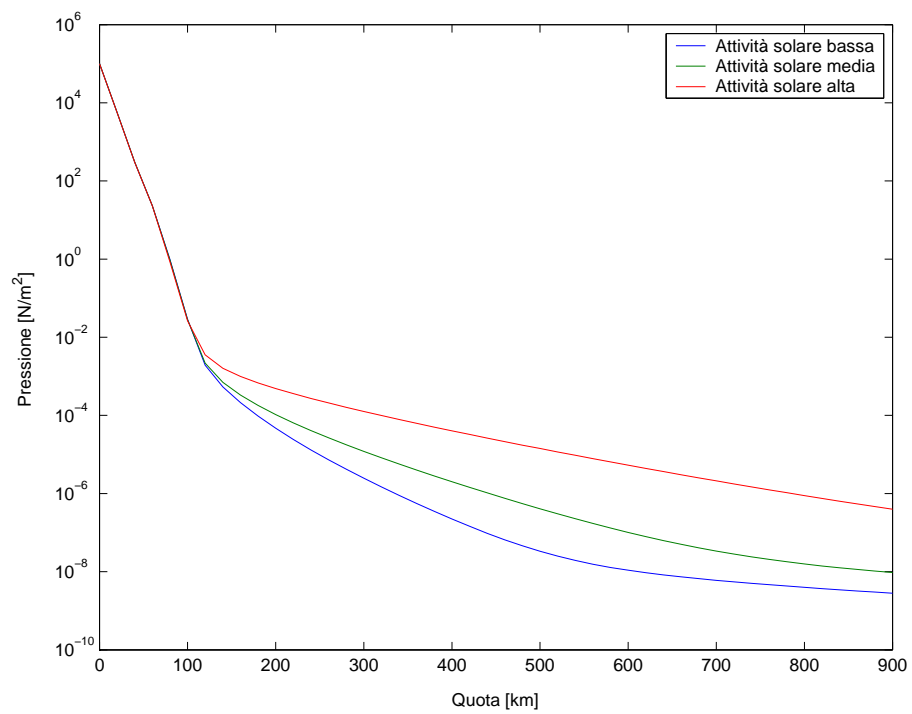


Figura 1.8: Pressione atmosferica in funzione della quota e del ciclo solare

1.3 Il campo gravitazionale terrestre

1.3.1 Introduzione

Un modello gravitazionale di buona precisione è necessario per definire il moto di un satellite in orbita intorno ad un corpo centrale; il campo gravitazionale influenza sia il moto del centro di massa (traiettoria), sia quello intorno al centro di massa stesso (assetto).

La legge di gravitazione universale di Newton afferma che due corpi qualsiasi si attraggono l'un l'altro con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

La forza che un corpo centrale (Terra) esercita su un satellite, e viceversa, può essere espressa così:

$$\mathbf{F} = -\frac{G M m}{r^3} \mathbf{r} \quad (1.25)$$

dove

\mathbf{F}	forza gravitazionale, in N
G	costante gravitazionale ($= 6.67259 \times 10^{-20} \text{ km}^3/\text{kg sec}^2$)
M	massa del corpo centrale, in kg
\mathbf{r}	distanza tra i due centri di massa, in km
m	massa del satellite, in kg

Se il corpo centrale è sferico e isolato da altri corpi, allora in assenza di atmosfera, l'orbita di un satellite attorno ad esso è un'ellisse di forma e dimensioni costanti, in un piano la cui direzione rimane fissa nello spazio, con il corpo centrale che occupa uno dei due fuochi.

1.3.2 Rappresentazione del potenziale gravitazionale

La Terra, tuttavia, non è perfettamente sferica, e non è nemmeno isolata nello spazio; quindi il moto di un satellite rispetto alla Terra si discosta dal semplice comportamento descritto sopra.

Per la predizione dell'orbita o la determinazione della traiettoria di un satellite è necessaria una accurata rappresentazione del campo gravitazionale terrestre. Esso, a causa della non perfetta sfericità della Terra, deve essere

espresso in termini di una forza centrale perturbata da una serie di armoniche sferiche che soddisfano l'equazione di Laplace nel vuoto ($\nabla^2 U = 0$). Il potenziale gravitazionale viene perciò espresso come:

$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{G M_{\oplus}}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi) [C_{nm} \cos(m \lambda) + S_{nm} \sin(m \lambda)] \right) \quad (1.26)$$

dove

G	costante gravitazionale
a	semiasse maggiore dell'ellissoide di riferimento
M_{\oplus}	massa della Terra
r	distanza del satellite dal centro di massa della Terra
n	grado dei termini armonici
m	ordine dei termini armonici
φ	latitudine geocentrica
λ	longitudine geocentrica
C_{nm}, S_{nm}	coefficienti delle armoniche sferiche
$P_{nm}(\sin \varphi)$	funzioni associate di Legendre del primo tipo

Normalmente al parametro a si attribuisce il valore del raggio equatoriale della Terra ($a = R_{\oplus} = 6378.1363$ km).

Le suddette funzioni di Legendre sono del tipo:

$$P_{nm}(\sin \varphi) = \frac{(\cos \varphi)^m}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(\sin^2 \varphi - 1)^n}{d^{n+m}(\sin \varphi)} \quad (1.27)$$

Per i nostri scopi, che sono quelli computazionali, queste espressioni e i loro corrispondenti coefficienti vengono usati nella loro forma normalizzata ($\bar{P}_{nm}, \bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$), che è la seguente:

$$\bar{P}_{nm} = \left[\frac{(2n+1)k(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{nm} \quad (1.28)$$

$$\bar{C}_{nm} = \left[\frac{(n+m)!}{(2n+1)k(n-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} C_{nm} \quad (1.29)$$

$$\bar{S}_{nm} = \left[\frac{(n+m)!}{(2n+1)k(n-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} S_{nm} \quad (1.30)$$

dove $k = 1$ quando $m = 0$, $k = 2$ quando $m \neq 0$.

In base al grado e all'ordine, una funzione di Legendre si riferisce a:

- una armonica *zonale* quando $m = 0$
- una armonica *settoriale* quando $m = n$
- una armonica *tesserale* quando $m \neq n$

Una armonica zonale corrisponde geometricamente ad una particolare forma della superficie geopotenziale. La seconda armonica zonale ($m = 0, n = 2$) esprime il principale effetto dello schiacciamento della Terra ai poli; la terza armonica zonale ($m = 0, n = 3$) provvede ad un profilo con tendenza triangolare; la quarta armonica lo fa tendere ad un quadrato, la quinta ad un pentagono, e così via (vedi figure 1.9–1.11).

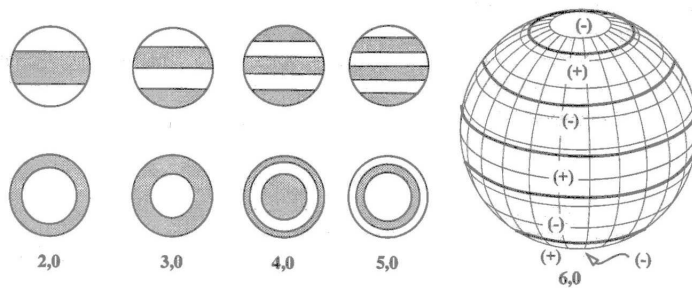


Figura 1.9: Armoniche zonali

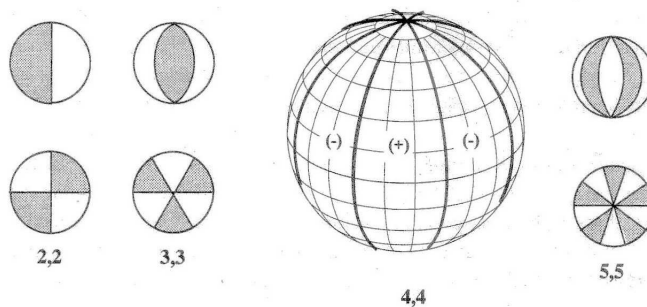


Figura 1.10: Armoniche settoriali

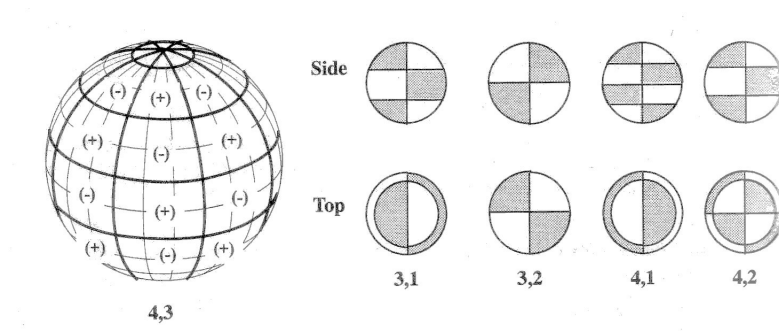


Figura 1.11: Armoniche tesserali

1.3.3 Modello matematico

Al momento esistono ben cinque modelli di campo gravitazionale che vengono utilizzati in Astrodinamica; essi sono (vedi [1] pag.31):

WGS-84 sviluppato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti d'America

TEG-2B sviluppato dall'Università del Texas (UT)

OSU-91A sviluppato dall'Università dell'Ohio (OSU)

GRIM4 sviluppato dalla Comunità Europea

JGM-2 sviluppato dalla collaborazione di NASA, UT, OSU, CNES

Il modello scelto per il nostro simulatore è il **JGM – 2** (*Joint Gravity Model*); l'uso di tale modello è raccomandato perchè esprime la migliore rappresentazione della Terra al momento disponibile. Tale modello è completo fino al grado e all'ordine 70.

La figure seguenti (1.12–1.14) mostrano utilizzati i valori dei coefficienti delle armoniche sferiche normalizzati fino al grado e ordine 9, che è anche la nostra approssimazione, e di alcune grandezze in gioco.

Parameter	Value	Units
Constant of Gravitation, G	$6,67259 \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Earth equatorial radius, R_{\oplus}	6378136,3	m
Geocentric Mass, M_{\oplus}	$5,97370 \times 10^{24}$	kg
$G M_{\oplus}$	398600,4415	$\text{km}^3 \text{s}^{-2}$

Figura 1.12: Parametri vincolanti del modello

		n							
		2	3	4	5	6	7	8	9
m	0	-484,1654663	0,9571224	0,5401433	0,0684645	-0,1500030	0,0909460	0,0493049	0,0267036
	1	-0,0001870	2,0283997	-0,5363680	-0,0591214	-0,0761294	0,2758256	0,0232834	0,1462664
	2	2,4390838	0,9044086	0,3503493	0,6533875	0,0486483	0,3278766	0,0787560	0,0245294
	3		0,7211539	0,9902582	-0,4519017	0,0579537	0,2508965	-0,0208114	-0,1619243
	4			-0,1884885	-0,2950801	-0,0862993	-0,2755462	-0,2448369	-0,0085254
	5				0,1749710	-0,2671890	0,0018128	-0,0251488	-0,0166623
	6					0,0098855	-0,3590382	-0,0651558	0,0626750
	7						0,0012547	0,0671575	-0,1184886
	8							-0,1238923	0,1884251
	9								-0,0481248

Units of 10^{-6}

Figura 1.13: Valori dei coefficienti normalizzati \bar{C}_{nm} fino ad $n = 9$

		n							
		2	3	4	5	6	7	8	9
m	1	0,0011953	0,2488066	-0,4734226	-0,0955327	0,0265588	0,0967770	0,0591996	0,0206503
	2	-1,4001093	-0,6192306	0,6628689	-0,3237786	-0,3737880	0,0940337	0,0662488	-0,0337777
	3		1,4140369	-0,2010099	-0,2150966	0,0090304	-0,2166254	-0,0866613	-0,0751423
	4			0,3088453	0,0496700	-0,4716700	-0,1238634	0,0702875	0,0192064
	5				-0,6696502	-0,5865234	0,0177164	0,0892490	-0,0543111
	6					-0,2370946	0,1517702	0,3092402	0,2224258
	7						0,0244337	0,0746269	-0,0965854
	8							0,1204626	-0,0031477
	9								0,0966002

Units of 10^{-6}

Figura 1.14: Valori dei coefficienti normalizzati \bar{S}_{nm} fino ad $n = 9$

La figura 1.15 fornisce l'andamento del potenziale gravitazionale al variare della quota come *output* del modello considerato.

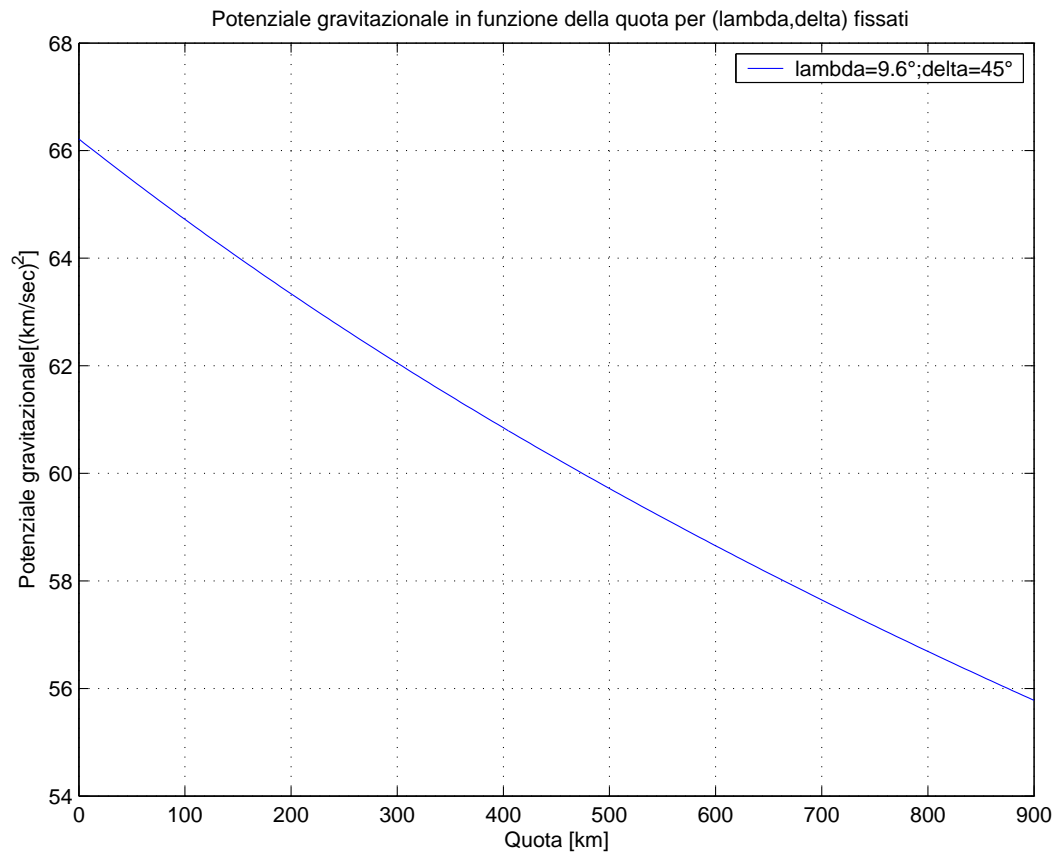


Figura 1.15: Potenziale gravitazionale in funzione della quota

1.4 Il ciclo solare

Il ciclo solare è il periodo che intercorre tra due minimi di attività solare: dura mediamente 11 anni, anche se può variare tra 8 e 14 anni (si veda la Figura 1.16). I campi interplanetari sono influenzati dall'attività solare, e in particolare dal numero e dal tipo di macchie presenti sulla superficie del Sole; la loro variazione ciclica fu osservata per la prima volta da Heinrich Schwabe intorno al 1840. Tali macchie sono presenti sia in forma isolata che in raggruppamenti, secondo la legge

$$R = k(10b + f) \quad (1.31)$$

dove

b	numero di macchie solari individuali
f	numero di raggruppamenti
k	coefficiente sperimentale che dipende dal sito di osservazione

Il ciclo di 22 anni comincia con una componente del campo di dipolo ben precisa, e allineata con l'asse di rotazione del Sole; le linee di campo tendono ad essere mantenute in quella direzione dal plasma, altamente conduttore, della superficie solare.

La velocità di rotazione del plasma varia al variare della latitudine sulla superficie del Sole, e, all'equatore, è il 20 per cento circa rispetto ai poli (una rotazione ogni 27 giorni). Di conseguenza le linee di campo magnetico si avvolgono attorno al Sole del 20 per cento ogni 27 giorni.

Dopo molte rotazioni le linee di campo creano quasi un fascio compatto, aumentando la loro intensità e con una tendenza a sfilarsi dalla superficie solare, formando un campo bipolare che appare all'osservatore come due macchie scure; questo perchè i forti campi magnetici locali escludono l'emissione di luce da parte del plasma solare (vedi [11] a pag.15).

La macchia principale ha la stessa polarità dell'emisfero solare e tende a migrare verso l'equatore, mentre l'altra ha polarità opposta e tende al polo del rispettivo emisfero, con la risultante riduzione del momento di dipolo solare. Questo processo di formazione e migrazione di macchie continua fino a quando il momento di dipolo si inverte, cioè dopo circa 11 anni.

Il dipolo solare cambierà nuovamente verso, attraverso processi analoghi, dopo altri 11 anni, e il ciclo si chiude. Il ciclo attuale è il 23° essendo il primo quello verificatosi tra il 1754 e il 1766.

Non è possibile proseguire nell'analisi dell'ambiente spaziale senza fare riferimento al ciclo solare in quanto esiste un'alta correlazione statistica tra la comparsa di macchie solari e la variazione di parametri ambientali quali: la densità e la temperatura atmosferica, le perturbazioni della ionosfera e la densità e l'energia delle particelle cariche nella magnetosfera, come si evince dalle Figure 1.6–1.8. L'attività solare comprende l'emissione di ra-

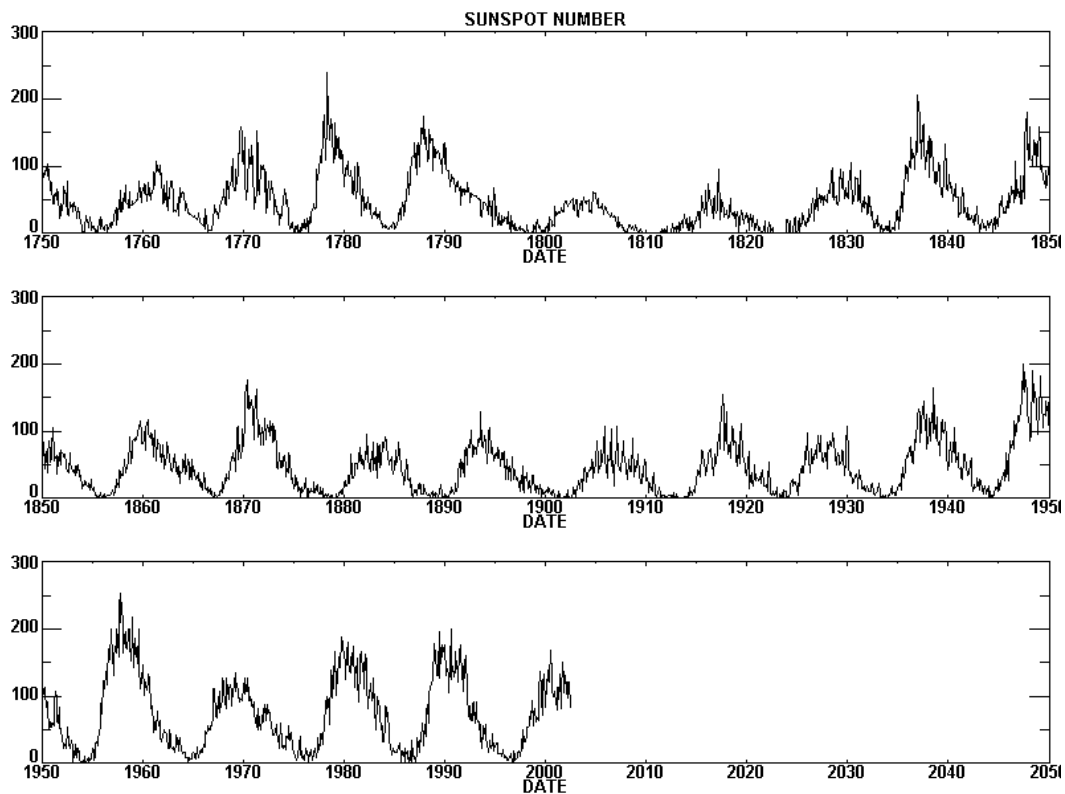


Figura 1.16: Cicli solari

diazione elettromagnetica e la formazione del *vento solare*, costituito da un flusso di particelle di bassa energia con una velocità media di circa 400 km/s, accoppiato ad un flusso di elettroni, protoni e ioni pesanti ad alta energia che viaggiano a velocità prossime a quella della luce. Entrambe queste componenti mostrano un comportamento ciclico con aumenti e diminuzioni nel periodo globale di 11 anni sopracitato.

Predire a lungo termine (decine di anni) e con una certa precisione un ciclo

solare è molto difficile e sinora i risultati ottenuti sono stati piuttosto deludenti. Chiaramente si può calcolare facilmente il periodo in cui si presenterà il massimo o il minimo dell'attività solare, ma è azzardato prevedere di quale entità (numero di brillamenti) sarà quest'ultima. Nonostante questo esistono dei modelli molto interessanti [11] basati su osservazioni statistiche che permettono a breve termine (3-5 anni) e per cicli già in atto di prevedere l'evoluzione del ciclo stesso con una precisione sufficiente alla pianificazione di una missione spaziale (vedi Figura 1.17).

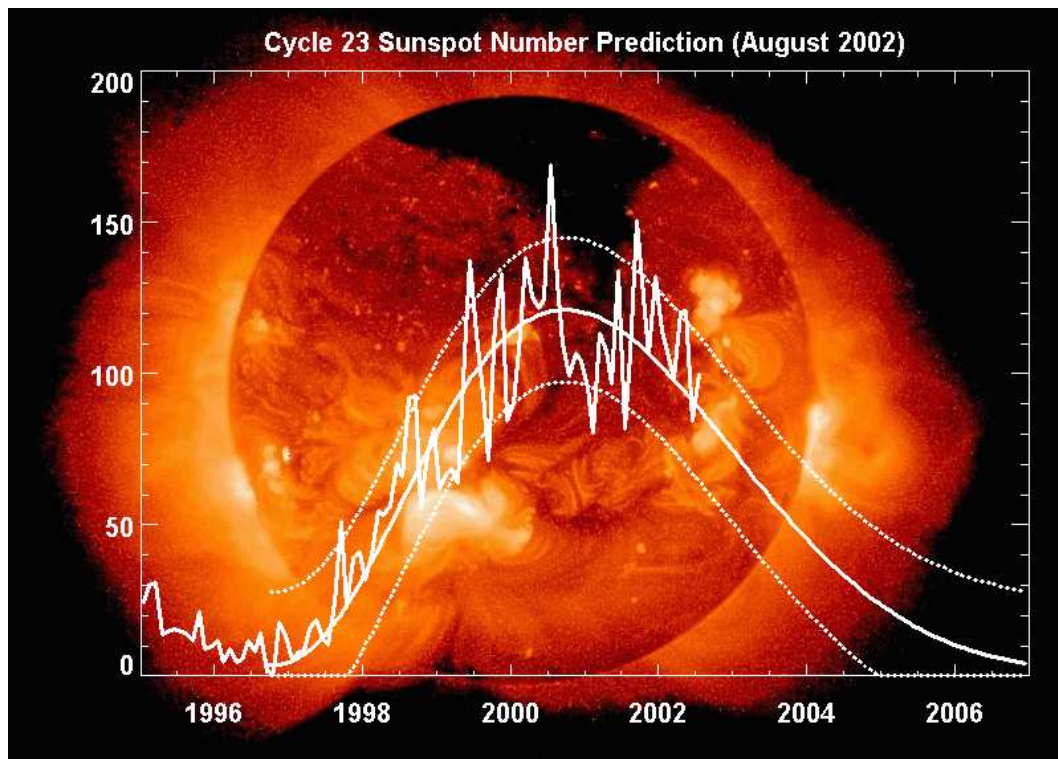


Figura 1.17: Predizione del ciclo solare attuale

1.5 Il campo magnetico terrestre

1.5.1 Modello di campo magnetico interno

I campi magnetici naturali, così come quelli indotti, sono molto importanti nella progettazione di un veicolo spaziale perché possono influenzare la strumentazione e l'equipaggiamento di bordo, e possono cambiare la resistenza, l'assetto e la direzione del moto di un satellite in orbita.

A basse quote il campo magnetico terrestre è assimilabile in prima approssimazione a quello di un dipolo e si estende per tutta la *Magnetosfera*; l'asse del dipolo passa attraverso la parte nord della Groenlandia a 78.5°N e 69°W , ed ha una inclinazione di circa 11.5° rispetto all'asse di rotazione della Terra; ad alte quote esso è fortemente distorto a causa delle interazioni con il vento solare.

La *Magnetosfera* (vedi §1.6.2) è un sistema dinamico e, specialmente nelle parti esterne, è caratterizzata da grandi fluttuazioni in termini di popolazione di plasma, campi elettrici ed elettro-magnetici. Modelli precisi di campo magnetico terrestre sono necessari per descrivere fenomeni molto importanti e complessi quali le fasce di Van Allen, i raggi cosmici e le radiazioni solari.

Per tali ragioni nella nostra trattazione si è deciso di non utilizzare il modello

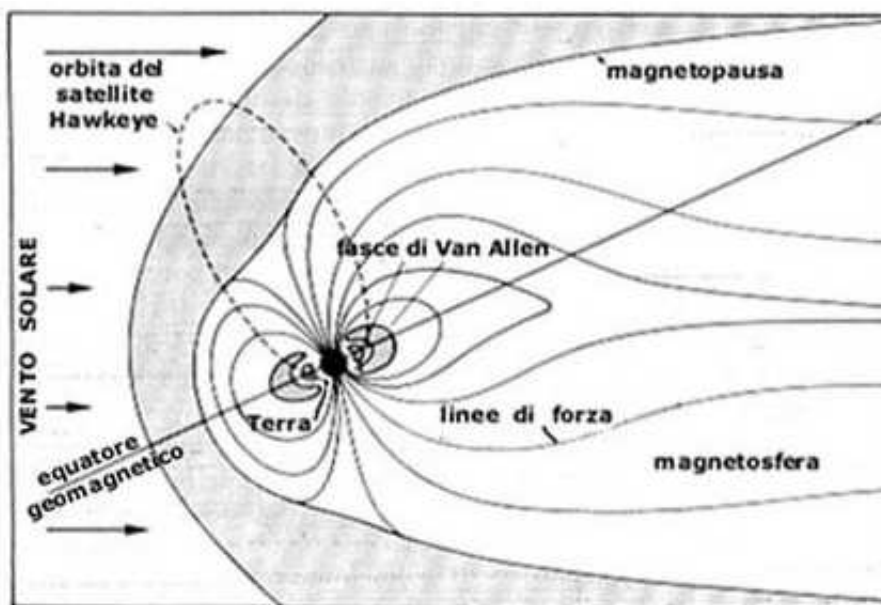


Figura 1.18: Il campo geomagnetico

dipolare (troppo approssimativo), bensì di esprimere il campo geomagnetico in termini di gradiente di una funzione potenziale scalare V , scritta come espansione ortogonale di armoniche sferiche secondo il modello IGRF-95; tale potenziale soddisfa le equazioni di Maxwell e Laplace. In un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) può essere così espresso (si veda [1] pag. 35):

$$V(r, \theta, \phi) = R_{\oplus} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+1} (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (1.32)$$

dove

R_{\oplus}	raggio terrestre di riferimento (= 6371.2 km)
r	distanza geocentrica
θ	co-latitudine (misurata dal polo nord geografico)
λ	longitudine geocentrica
g_n^m, h_n^m	coefficienti armonici sferici del modello
P_n^m	funzioni normalizzate di Schmidt associate a quelle di Legendre

I coefficienti (g_n^m, h_n^m) sono dipendenti dal tempo e i loro valori e variazioni secolari sono mostrati nella tabella 1.1; l'approssimazione del modello usato per il nostro simulatore arriva fino al 6° grado e ordine.

È da notare che i primi tre termini rappresentano il contributo dell'inclinazione del dipolo magnetico rispetto a quello della Terra, mentre i primi otto descrivono un dipolo eccentrico.

Le tre componenti del campo magnetico \mathbf{B} in un riferimento geocentrico-equatoriale sono date da

$$B_x = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (1.33)$$

$$B_y = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \quad (1.34)$$

$$B_z = \frac{\partial V}{\partial r} \quad (1.35)$$

$$(1.36)$$

La figure 1.19 e 1.20 mostrano l'intensità del campo magnetico e il potenziale geomagnetico al variare della quota in *output* dal modello descritto, con l'ascensione retta e la declinazione del satellite fissati.

	m	n	coefficiente (nT)	variazione secolare (nT/anno)
g	0	1	-29682	+17.6
g	1	1	-1789	+13
h	1	1	+5318	-18.3
g	0	2	-2197	-13.2
g	1	2	+3074	+3.7
h	1	2	-2356	-15
g	2	2	+1685	-0.8
h	2	2	-425	-8.8
g	0	3	+1329	+1.5
g	1	3	-2268	-6.4
h	1	3	-263	+4.1
g	2	3	+1249	-0.2
h	2	3	+302	+2.2
g	3	3	+769	-8.1
h	3	3	-406	-12.1

Tabella 1.1: Coefficienti delle armoniche geomagnetiche e loro variazione secolare

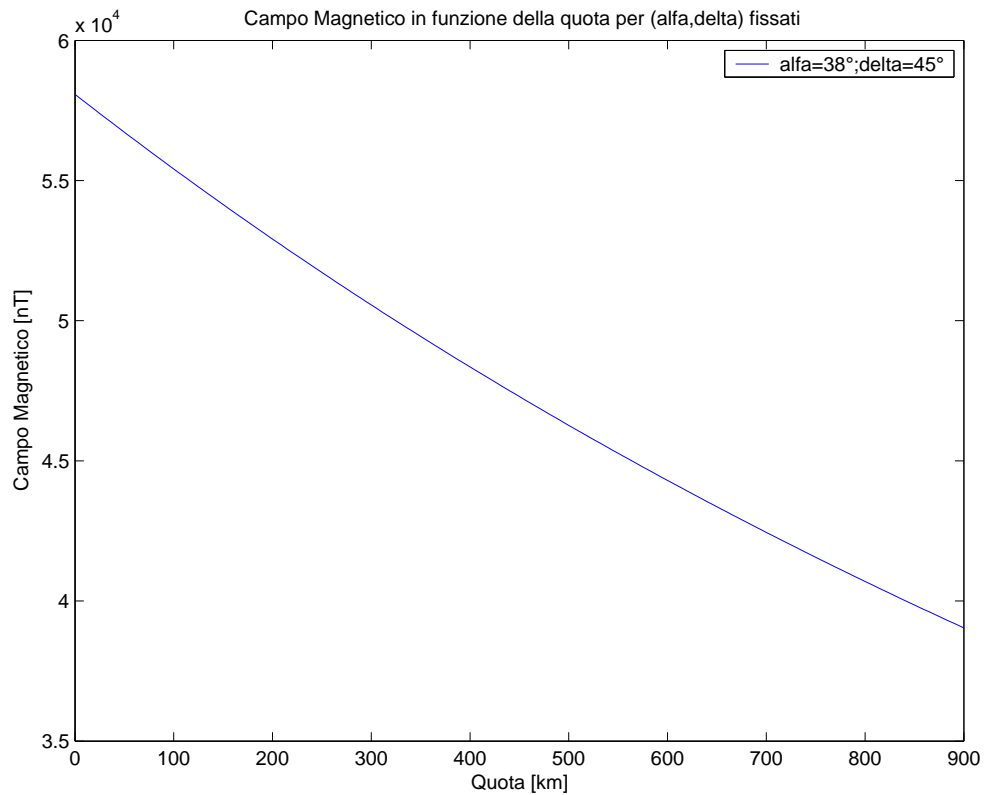


Figura 1.19: Intensità del campo magnetico in funzione della quota con (α_{sat} e δ_{sat}) fissati

1.5.2 Campo magnetico ad alte quote

Il modello di cui sopra descrive soltanto il campo generato dai processi che avvengono all'interno della Magnetosfera. Ad alte quote la maggior parte dei coefficienti delle armoniche di grado elevato diventano trascurabili e l'approssimazione di dipolo è spesso inadeguata per descrivere questi contributi. Il vento solare causa distorsioni diurne del campo di grossa entità; questo effetto ed altri portano variazioni del campo magnetico in base al ciclo solare e all'indice di attività geomagnetica ($K_p, F_{10.7}$).

Non esiste al momento nessun modello riconosciuto a livello internazionale, ma si stanno facendo molti progressi in questa direzione. Vari modelli che tengono conto dei contributi esterni sono stati sviluppati da Tsyganenko ([12] e [13]), Olsen e Pfitzer ([14]).

In figura 1.22 viene evidenziata la distorsione diurna del campo e la variazione stagionale di tali distorsioni.

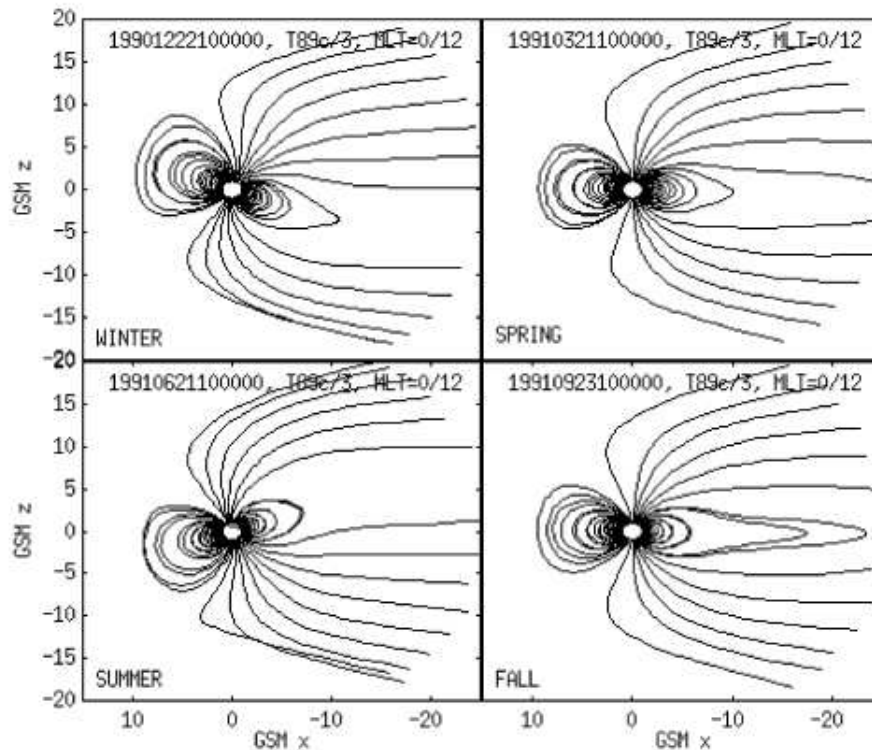


Figura 1.22: Risultati dei modelli di alta quota che mostrano la variazione stagionale della diurna distorsione del campo geomagnetico

1.5.3 Coordinate geomagnetiche (B,L)

Le coordinate geomagnetiche sono necessarie per un certo numero di applicazioni in cui occorre descrivere la morfologia o il comportamento delle particelle cariche all'interno della magnetosfera.

L'impiego più importante consiste nella modellizzazione delle *fasce di Van Allen*; questi modelli danno il flusso di particelle energetiche in funzione dell'energia della particella stessa e delle cosiddette *coordinate di McIlwain* ($L, B/B_0$).

Il parametro L di McIlwain rappresenta la distanza radiale dell'intersezione di una linea di campo di un dipolo ideale con l'equatore geomagnetico, mentre l'altro parametro è il rapporto tra l'intensità del campo magnetico nel punto in questione, B , ed il valore minimo assunto all'equatore geomagnetico, B_0 . Per la maggior parte delle applicazioni la coppia ($L, B/B_0$) è sufficiente a definire una posizione nel campo grazie alla simmetria azimutale del campo generato da un dipolo.

Il sistema di coordinate di McIlwain è descritto in Figura 1.23.

Il legame tra B_0 e L è il seguente:

$$B_0 = ML^{-3}$$

dove

M momento di dipolo geomagnetico (= $31165.3 \text{ nT} \cdot R_{\oplus}^3$)

Le coordinate polari nello spazio idealizzato del dipolo sono collegate a B ed L in questo modo:

$$r = L \cos^2(\lambda)$$

$$B = \frac{M}{r^3} (1 + 3 \sin^2(\lambda))^{1/2}$$

dove

λ latitudine magnetica

r distanza dal centro del dipolo

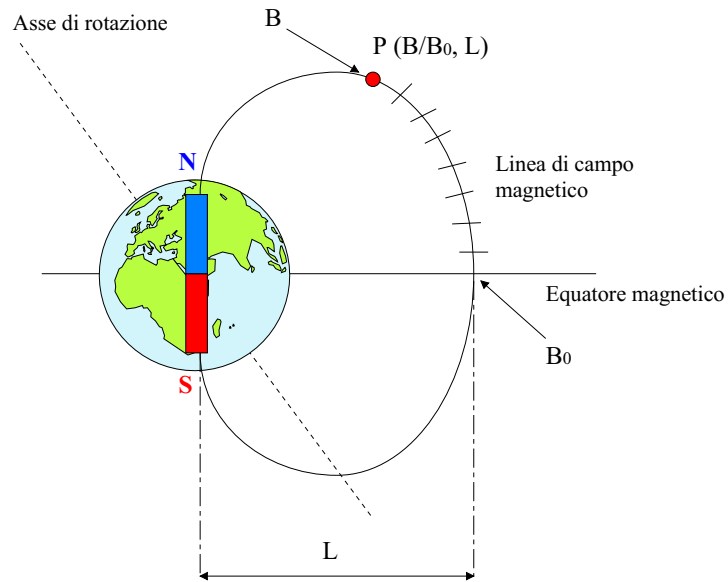


Figura 1.23: Schema delle coordinate di McIlwain

Notare che $r_0 = r(\lambda = 0) = L$.

Per tutti i parametri e le funzioni dipendenti dal tempo (come l'inclinazione dell'asse magnetico) sono stati presi i valori relativi all'anno 2000.

1.6 Le fasce di Van Allen

1.6.1 Introduzione

La scoperta delle fasce di Van Allen fu fatta all'inizio dell'era spaziale, nel 1958, da James Van Allen, da cui hanno preso il nome, grazie a dei rivelatori di particelle posti a bordo dei satelliti Explorer 1 e 2.

I satelliti che si trovano ad operare all'interno delle fasce di Van Allen sono soggetti all'azione danneggiante di particelle cariche, principalmente elettroni, protoni, particelle *alfa* (nuclei di elio), e nuclei più pesanti.

Gli elettroni poco energetici contribuiscono al caricamento della superficie del satellite; i protoni altamente energetici della fascia interna sono i principali responsabili della deposizione di ioni su componenti schermati. Inoltre gli elettroni di entrambe le fasce contribuiscono alla ionizzazione attraverso la deposizione diretta di energia e l'effetto *Bremsstrahlung*.

Gli effetti includono la degradazione delle proprietà dei materiali e la riduzione delle prestazioni dei vari sottosistemi del satellite; questi danni possono essere ridotti in modo significativo se il satellite è progettato in modo tale che l'equipaggio e i componenti più sensibili alle radiazioni vengano alloggiati all'interno di un'area in cui un'adeguata struttura provveda alla schermatura dalle radiazioni in tutte le direzioni.

1.6.2 Magnetosfera

Le particelle cariche a contatto con la Terra sono all'interno della Magnetosfera, che si forma quando il supersonico vento solare (plasma elettricamente neutro costituito per lo più da elettroni e protoni che fluisce continuamente dalla superficie solare) sbatte contro le linee di campo magnetico terrestre (vedi Fig1.25). Il risultato dell'interazione è la formazione di un'onda d'urto che comprime il campo magnetico sul lato del Sole e deflette il flusso solare intorno alla Magnetosfera. Nelle vicinanze della Terra il campo magnetico assomiglia molto a quello di un dipolo (vedi paragrafo 1.5), cioè le linee di campo sono ravvicinate e le particelle cariche possono essere magneticamente intrappolate.

La situazione è comunque molto dinamica ed hanno luogo ripetute variazioni

della configurazione a causa del cambio di orientamento dell'asse geomagnetico rispetto alla direzione del vento solare, dipendente dalla rotazione della Terra intorno al Sole.

Il moto delle particelle cariche nella Magnetosfera consta sostanzialmente di tre componenti:

1. rotazione intorno alle linee di campo magnetico
2. moto sinusoidale del centro di rotazione rispetto alla linea di campo magnetico
3. lenta deriva longitudinale del centro di rotazione attorno alla Terra (verso Ovest per i protoni, e verso Est per gli elettroni)

La figura 1.26 mostra questa situazione.

Le traiettorie risultanti giacciono su superfici toroidali, dette *drift shells*, centrate sul centro di dipolo terrestre; le particelle confinate a una di queste superficie possono rimanere lì per lunghi periodi (si parla di anni per protoni, a quote di poche migliaia di chilometri).

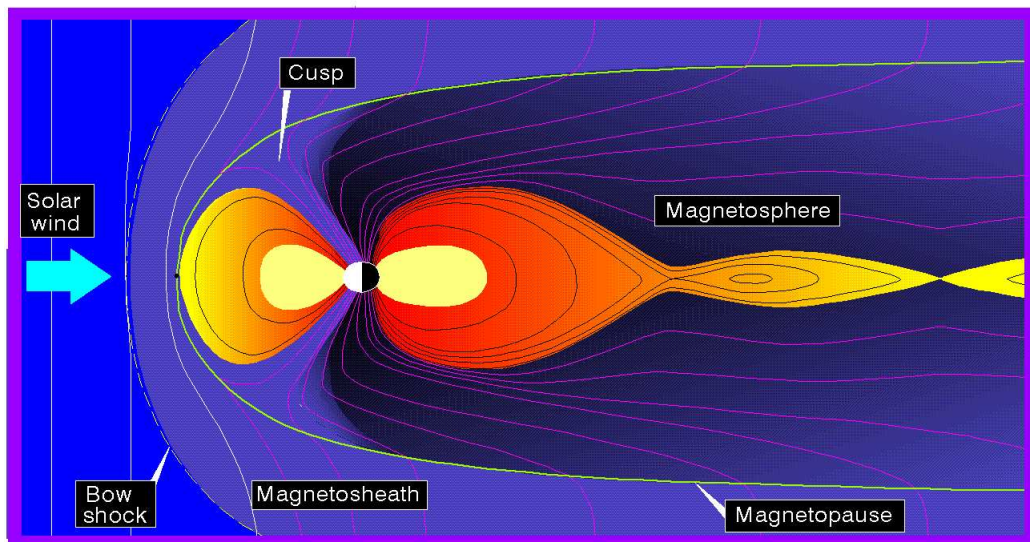


Figura 1.24: Regioni della Magnetosfera

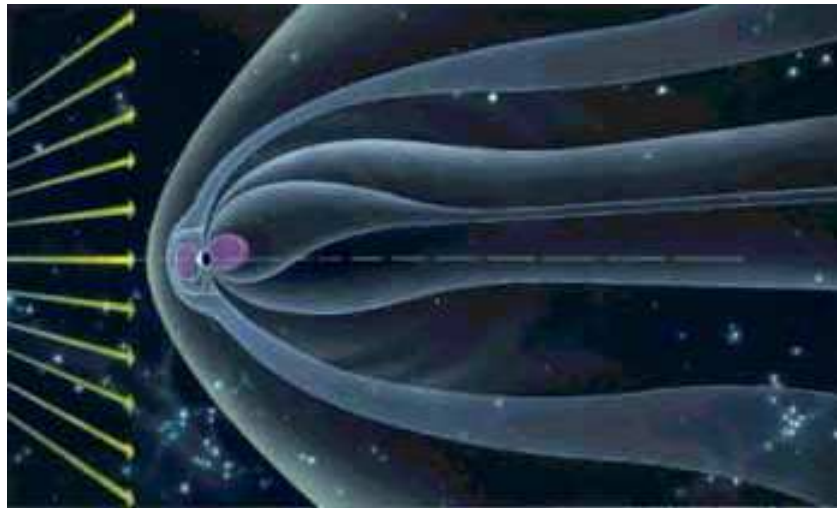


Figura 1.25: Influenza del vento solare sulla Magnetosfera terrestre

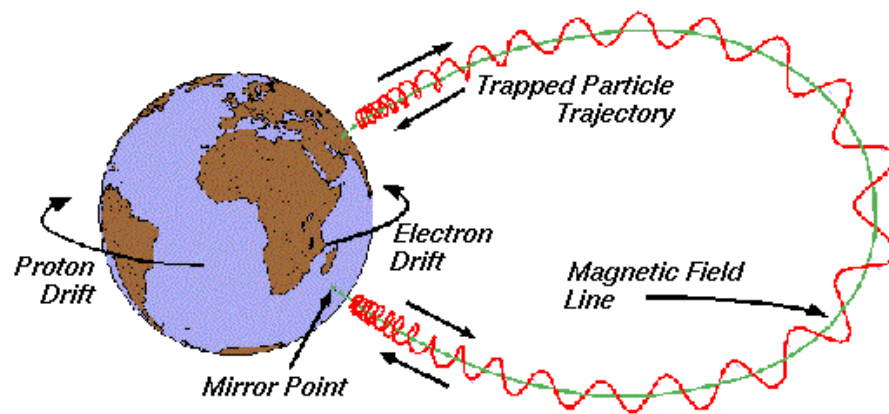


Figura 1.26: Rappresentazione del moto composto delle particelle cariche intrappolate nel campo magnetico terrestre

1.6.3 Struttura delle fasce di Van Allen

Le Fasce di Van Allen sono una componente importante della magnetosfera terrestre. Le due fasce, sostanzialmente di forma toroidale (vedi fig1.27), sono formate da particelle cariche, per lo più di origine cosmica e solare, intrappolate nel campo magnetico; sono per lo più elettroni e protoni con energie cinetiche che vanno dal keV fino ai GeV.

La distribuzione spaziale delle particelle è molto complessa e variabile nel

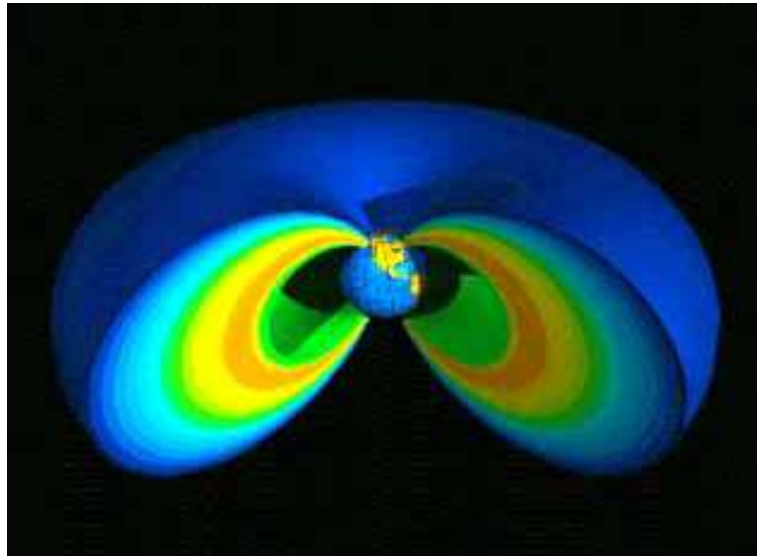


Figura 1.27: Le due fasce di Van Allen

tempo, soprattutto per la fascia più esterna, che è anche quella più sensibile alle variazioni del ciclo solare (§1.4). Le particelle si muovono lungo le linee di forza del campo magnetico terrestre seguendo traiettorie a spirale e oscillando in latitudine tra i punti coniugati di riflessione negli emisferi boreale e australe. C'è anche un moto delle cariche in longitudine che forma una corrente di tipo anulare attorno alla Terra (vedi paragrafo1.6.2).

La distribuzione approssimata è la seguente:

- $2.5 \leq R_{\oplus} \leq 5.8$: protoni poco energetici (circa 3 Mev)
- $1.5 \leq R_{\oplus} \leq 1.7$: protoni energetici (> 30 Mev)
- $3 \leq R_{\oplus} \leq 4.3$: elettroni poco energetici (circa 2 Mev)
- $1.6 \leq R_{\oplus} \leq 8.5$: elettroni molto energetici (> 40 Mev)

La fascia interna deve la sua esistenza alla straordinaria stabilità delle orbite attorno alla Terra. Il moto e la configurazione delle particelle cariche che caratterizzano tale fascia è legato alla natura di dipolo del campo magnetico, che fa sì che l'intensità del campo vari con la quota in funzione della longitudine e della latitudine del punto considerato.

Ad esempio si ha un minimo del campo magnetico a 30°S del Sud Atlantico, e in corrispondenza si trova una depressione della fascia interna; tale depressione va sotto il nome di *South Atlantic Anomaly*.

Qui la vita media delle particelle è di circa 10 anni, dopo i quali le stesse si disperdono per cattura atmosferica.

Nella fascia esterna invece, soggetta a forti perturbazioni a causa dei brillamenti solari, la vita media non ha un valore ben definito. Addirittura, recentemente la NASA ha individuato l'esistenza di una terza fascia, poi scomparsa, formatasi durante un periodo di elevatissima attività solare.

1.6.4 I modelli standard

I modelli utilizzati (ricavati da [15]) per la descrizione delle fasce di Van Allen prendono il nome di AE-8 per la fascia elettronica e AP-8 per quella protonica, e presentano ciascuno due versioni, una per attività solare massima e l'altra per quella minima. Il loro sviluppo è stato effettuato dalla NASA sulla base dei dati satellitari negli anni sessanta e settanta.

La missione CRRES (*Combined Release and Radiation Effects Satellite*) ha dimostrato che l'ambiente delle fasce di Van Allen è molto più complesso di quello descritto dai vecchi modelli statici, e le variazioni spaziali e soprattutto temporali richiedono modelli sempre più complicati ed eterogenei.

Il grosso limite riscontrato in questi lavori è la copertura temporale, ed è perciò vitale coordinare i futuri sforzi nella modellizzazione, al fine di poter usufruire di dati sempre più aggiornati e approfonditi.

I modelli forniscono il flusso omnidirezionale come numero di particelle su centimetro quadrato al secondo, integrato dal valore minimo di energia dello spettro al valore selezionato. In particolare il modello AP-8 genera il flusso di protoni aventi energie comprese tra 0.1 e 400 MeV, mentre l'AE-8 quello di elettroni con energie da 0.04 a 7 MeV. Le figure seguenti illustrano i risultati

prodotti da questi modelli ed implementati in un codice di calcolo scritto in ambiente Matlab.

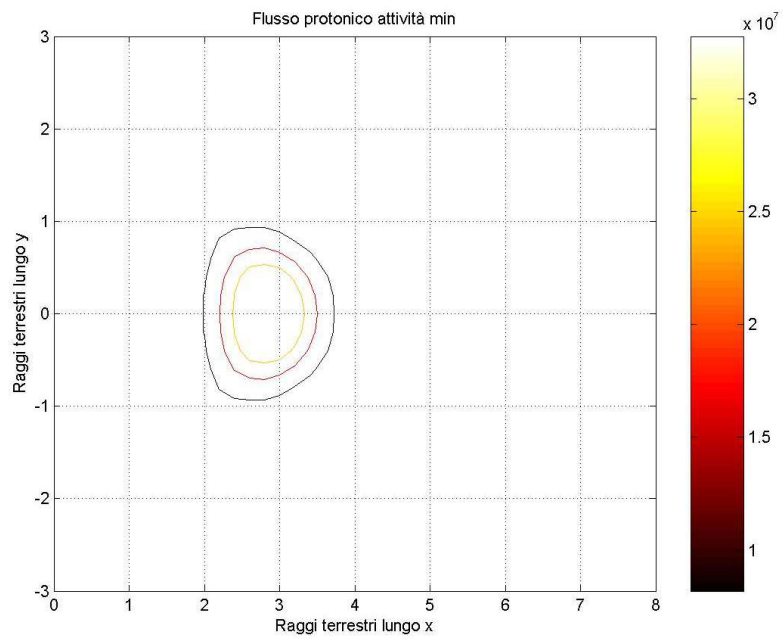


Figura 1.28: Curve di livello del flusso di protoni in attività solare minima

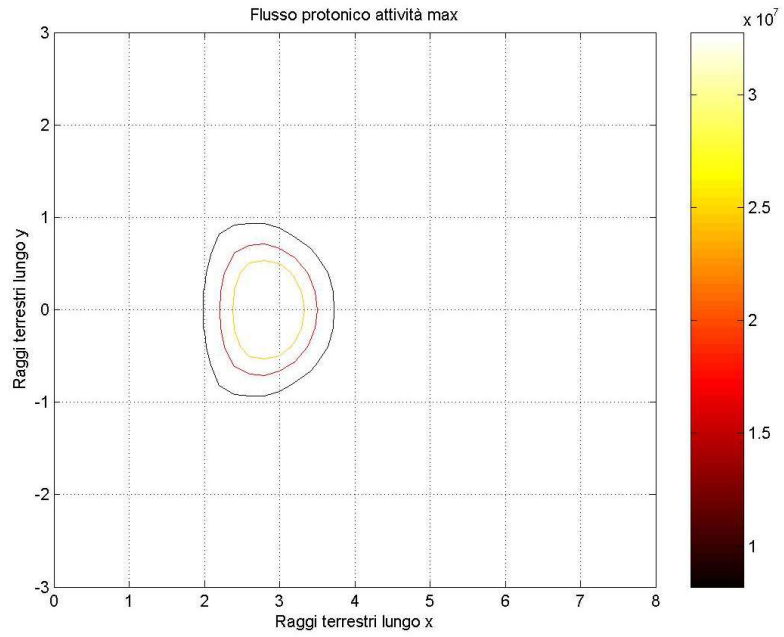


Figura 1.29: Curve di livello del flusso di protoni in attività solare massima

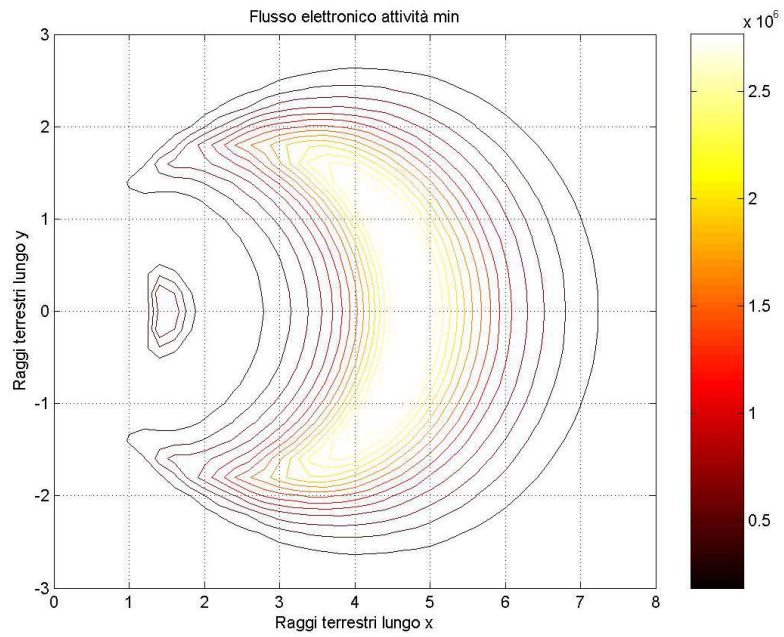


Figura 1.30: Curve di livello del flusso di elettroni in attività solare minima

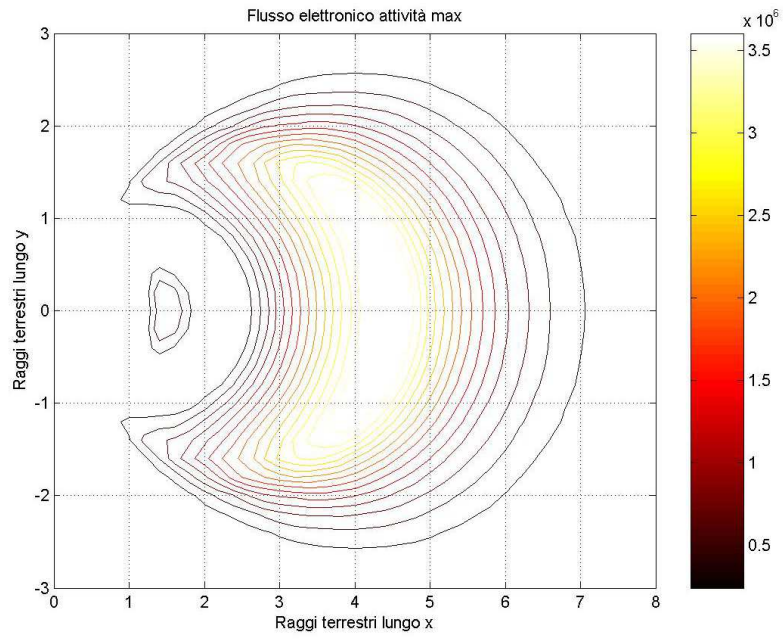


Figura 1.31: Curve di livello del flusso di elettroni in attività solare massima

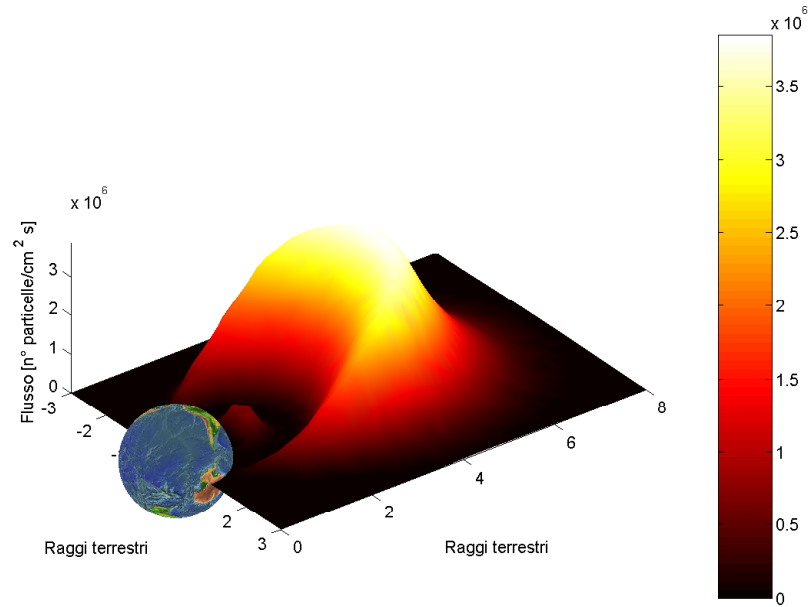


Figura 1.32: Flusso di elettroni generato dal modello AE-8

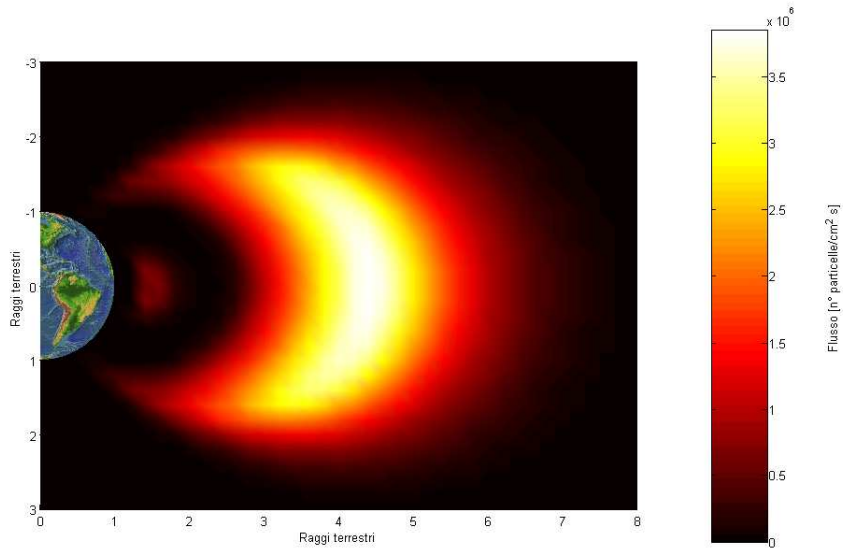


Figura 1.33: Flusso di elettroni generato dal modello AE-8

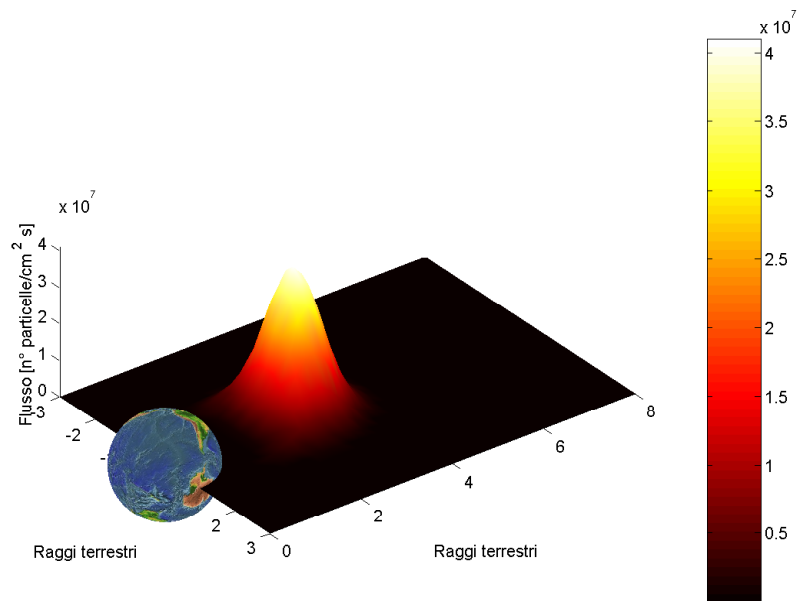


Figura 1.34: Flusso di protoni generato dal modello AP-8

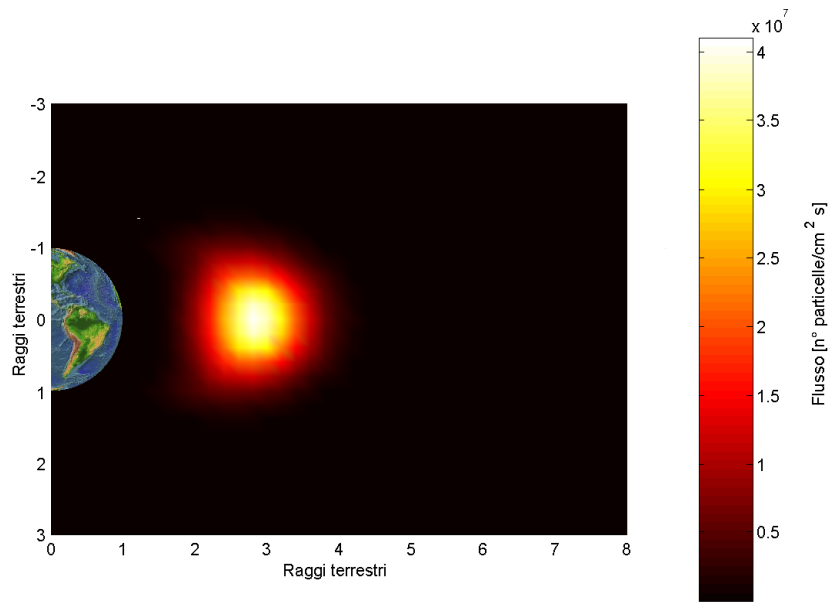


Figura 1.35: Flusso di protoni generato dal modello AP-8

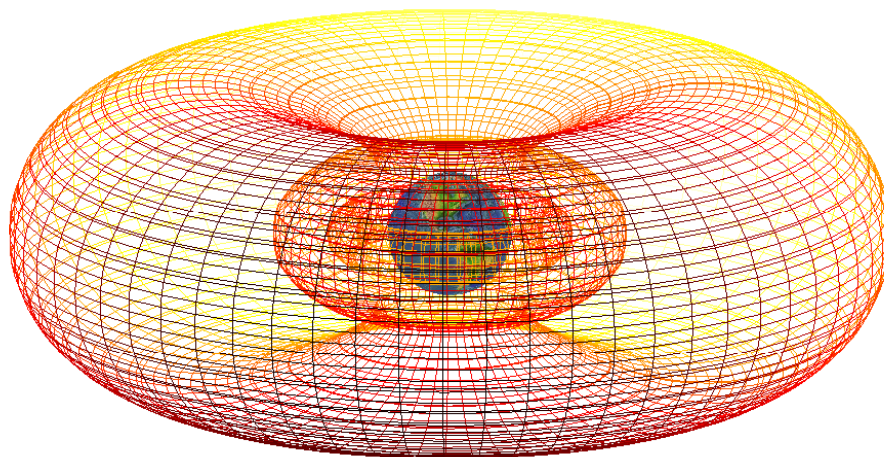


Figura 1.36: Estensione nello spazio della fascia elettronica di Van Allen

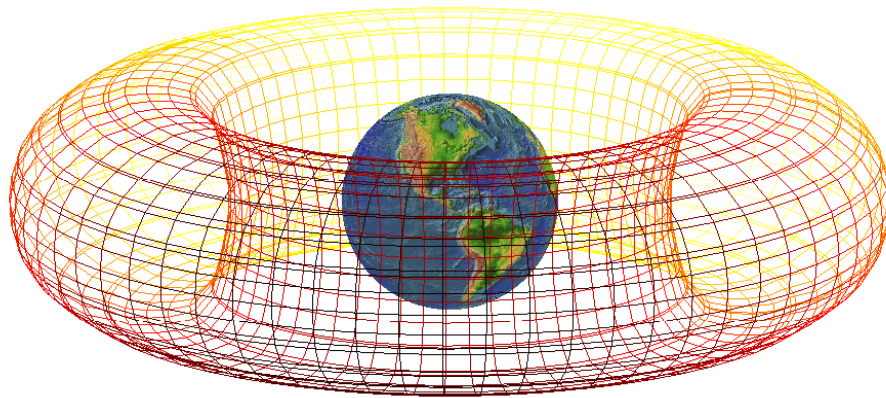


Figura 1.37: Estensione nello spazio della fascia protonica di Van Allen

2

Le perturbazioni orbitali

2.1 Introduzione

Lo studio e la modellizzazione delle perturbazioni è estremamente importante per l'Astrodinamica, e la letteratura ha solo da poco cominciato a presentare modelli precisi di cui si necessita per un approccio soddisfacente a queste problematiche.

Le perturbazioni sono deviazioni da una ideale traiettoria di moto kepleriano e sono dovute all'interazione del satellite con altri corpi (Sole e Luna) e a contributi addizionali non considerati nel moto Kepleriano (ad esempio la non sfericità della Terra e la resistenza dell'atmosfera), in cui avevamo supposto il corpo principale (Terra) avente una distribuzione di massa uniforme, o comunque a simmetria sferica, in modo tale da considerare tutta la massa stessa concentrata nel baricentro.

Esistono tre principali metodi per esaminare gli effetti perturbativi (vedi [16] a pag.467):

- **Tecniche di Perturbazione Speciali**, che integrano numericamente le equazioni di moto includendo tutte le accelerazioni perturbative in gioco;
- **Tecniche di Perturbazione Generali**, che sostituiscono le equazioni generali di moto con una approssimazione analitica che tiene conto delle caratteristiche essenziali del moto su intervalli di tempo limitati;
- **Tecniche Semi-analitiche**, che combinano i migliori aspetti delle due

tecniche precedenti ottenendo un buon compromesso di accuratezza ed efficienza.

Nel nostro lavoro abbiamo scelto la via numerica integrando l'equazione di moto completa (perturbata) con piccoli passi di integrazione e un'ottima tolleranza sull'errore.

Per fare ciò abbiamo dovuto prendere in esame le forze agenti sul satellite, di natura *Conservativa* e *Non-conservativa*; l'energia meccanica nel primo caso rimane costante, mentre nell'altro potrebbe aumentare o diminuire a causa principalmente dell'attrito o dell'azione di disturbi esterni.

Nei successivi paragrafi andremo ad illustrare nel dettaglio quali sono le forze di disturbo e come si arriva al calcolo delle componenti accelerative di perturbazione da inserire nell'equazione di moto.

2.2 Formulazione di Cowell

Una delle caratteristiche più interessanti dell'approccio numerico è la possibilità di inserire qualsivoglia accelerazione di disturbo. Come detto in precedenza il modello a due corpi di fatto trascura gli effetti delle reali perturbazioni. Una strada percorribile per tenere conto di questi effetti è quella di aggiungere le accelerazioni di disturbo all'equazione di moto dei due corpi, in modo da produrre una più accurata espressione del moto stesso.

Scriverò dunque:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_{pert} \quad (2.1)$$

in cui

μ_{\oplus} parametro gravitazionale della Terra ($= G M_{\oplus} = 398600.4415 \text{ km}^3/\text{s}^2$)
 \mathbf{a}_{pert} risultante delle accelerazioni perturbative

D'ora in poi useremo la notazione μ per indicare μ_{\oplus} . L'equazione (2.1) prende il nome di **formulazione di Cowell**, nella quale esprimiamo equazioni differenziali del 2° ordine e le integriamo numericamente.

2.3 Effetti dello schiacciamento ai poli terrestri

Nel primo capitolo abbiamo esaminato, tra le altre cose, il modello di campo gravitazionale terrestre, sviluppando un'espressione alquanto complessa per il potenziale (vedi paragrafo 1.3).

Per comodità viene nel seguito riscritta:

$$U(r, \phi, \lambda) = \frac{G M_{\oplus}}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) [C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \sin m \lambda] \right)$$

L'accelerazione in coordinate sferiche nel sistema di riferimento geocentrico-equatoriale è data da:

$$\mathbf{a}(r, \phi, \lambda) = \frac{\partial U}{\partial r} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}}\right)^T + \frac{\partial U}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}\right)^T + \frac{\partial U}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}}\right)^T \quad (2.2)$$

Le derivate parziali di U hanno la forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^n (n+1) P_{nm}(\sin \phi) \times [C_{nm} \cos(m \lambda) \\ &\quad + S_{nm} \sin(m \lambda)] \\ \frac{\partial U}{\partial \phi} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^n [P_{n,m+1}(\sin \phi) - m \tan(\phi) P_{nm}(\sin \phi)] \\ &\quad \times [C_{nm} \cos(m \lambda) + S_{nm} \sin(m \lambda)] \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^n m P_{nm}(\sin \phi) \times [S_{nm} \cos(m \lambda) \\ &\quad - C_{nm} \sin(m \lambda)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

con il noto significato dei simboli.

Le derivate del vettore posizione si esprimono così:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\mathbf{r}^T}{r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{1}{\sqrt{r_I^2 + r_J^2}} \left(-\frac{\mathbf{r}^T r_K}{r^2} + \frac{\partial r_K}{\partial \mathbf{r}} \right) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{1}{r_I^2 + r_J^2} \left(r_I \frac{\partial r_J}{\partial \mathbf{r}} - r_J \frac{\partial r_I}{\partial \mathbf{r}} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove (r_I, r_J, r_K) sono le componenti di \mathbf{r} rispetto agli assi cartesiani; notare che tali derivate (2.4) sono versori.

Sostituendo le (2.3) e le (2.4) nella (2.2) si trova l'espressione delle tre componenti accelerative di disturbo rispetto agli assi cartesiani (x, y, z) .

$$\begin{aligned}
 a_I &= \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{r_K}{r^2 \sqrt{r_I^2 + r_J^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right] r_I \\
 &\quad - \left[\frac{1}{r_I^2 + r_J^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) \right] r_J \\
 a_J &= \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{r_K}{r^2 \sqrt{r_I^2 + r_J^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right] r_J \\
 &\quad + \left[\frac{1}{r_I^2 + r_J^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) \right] r_I \\
 a_K &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) r_K + \frac{\sqrt{r_I^2 + r_J^2}}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nelle figure (2.1–2.4) si mostrano i risultati ottenuti dalla simulazione, evidenziando gli effetti del solo campo gravitazionale su un satellite in termini di variazione degli elementi orbitali classici.

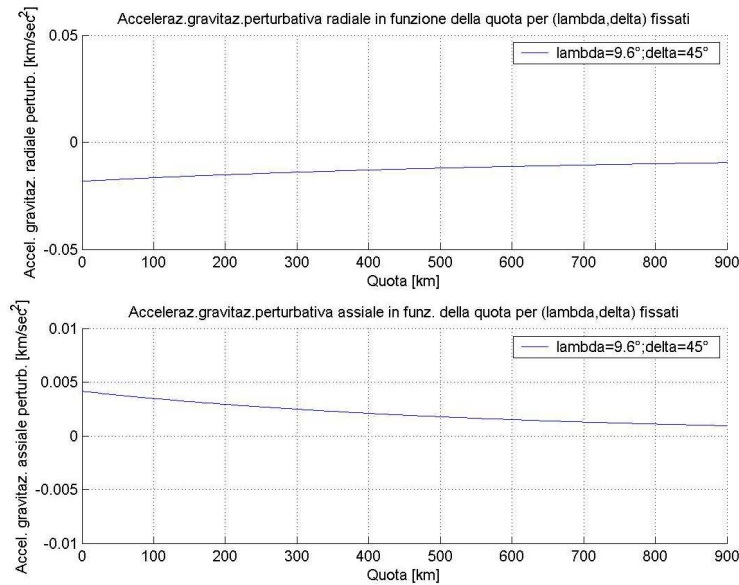


Figura 2.1: Componenti dell'accelerazione gravitazionale perturbativa al variare della quota con (λ, δ) fissati. [δ = declinazione del satellite]

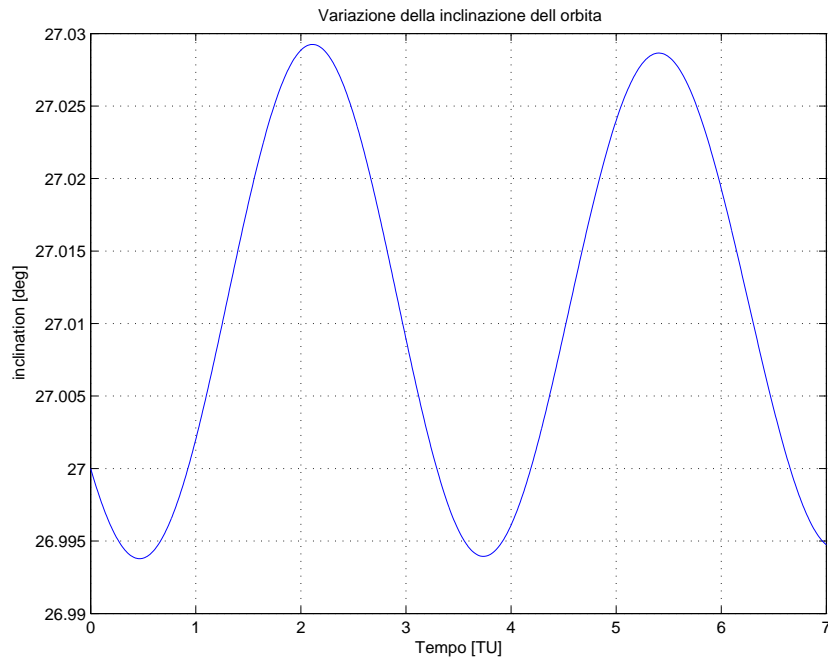


Figura 2.2: Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale

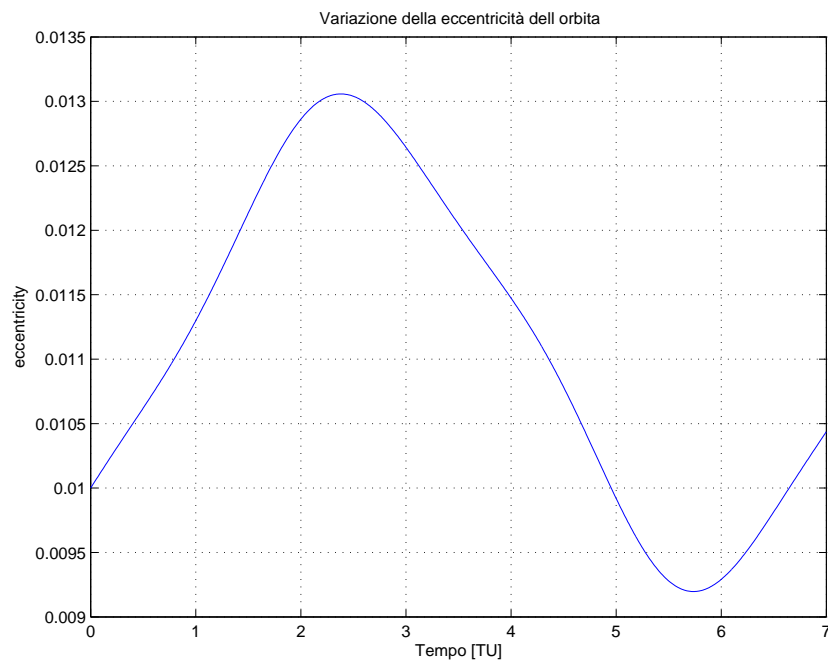


Figura 2.3: Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale

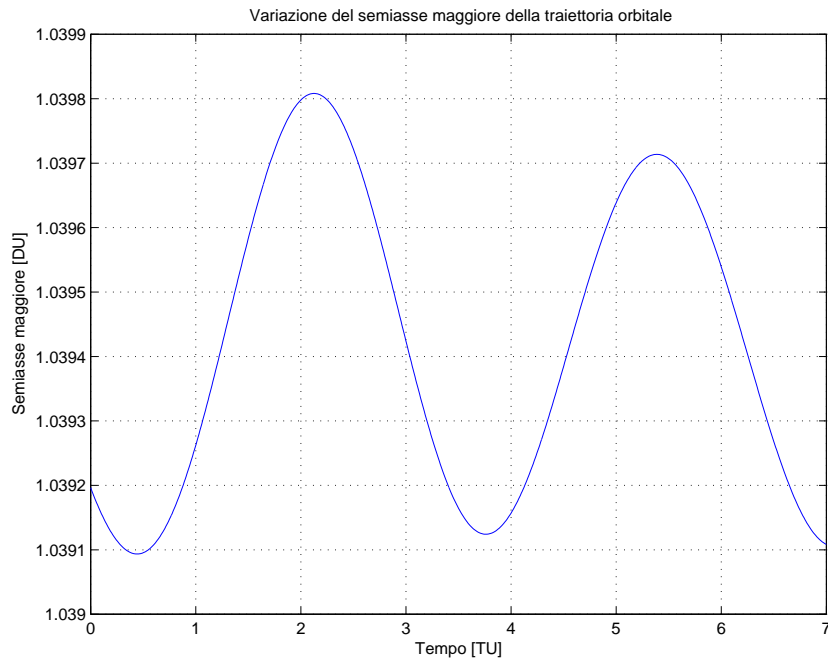


Figura 2.4: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale

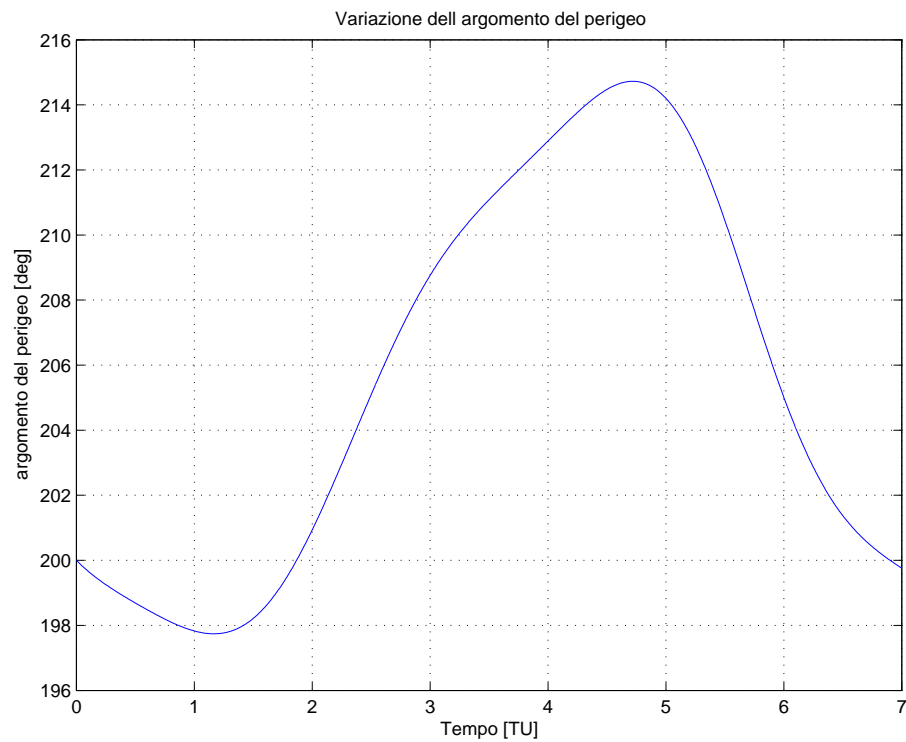


Figura 2.5: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale

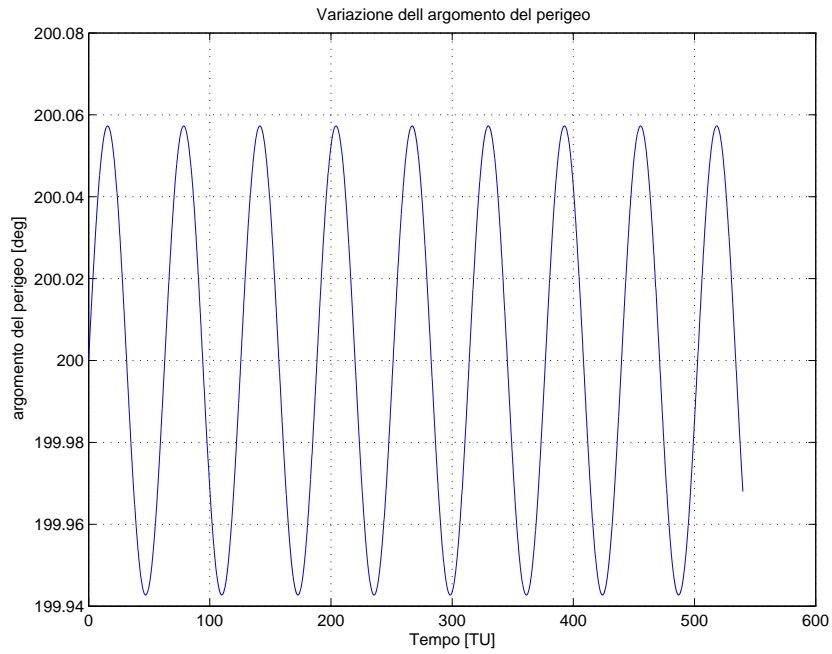


Figura 2.6: Variazione dell'argomento del perigeo per effetto del solo campo gravitazionale su un'orbita di tipo Molnya ($i_{crit} = 63.43^\circ$)

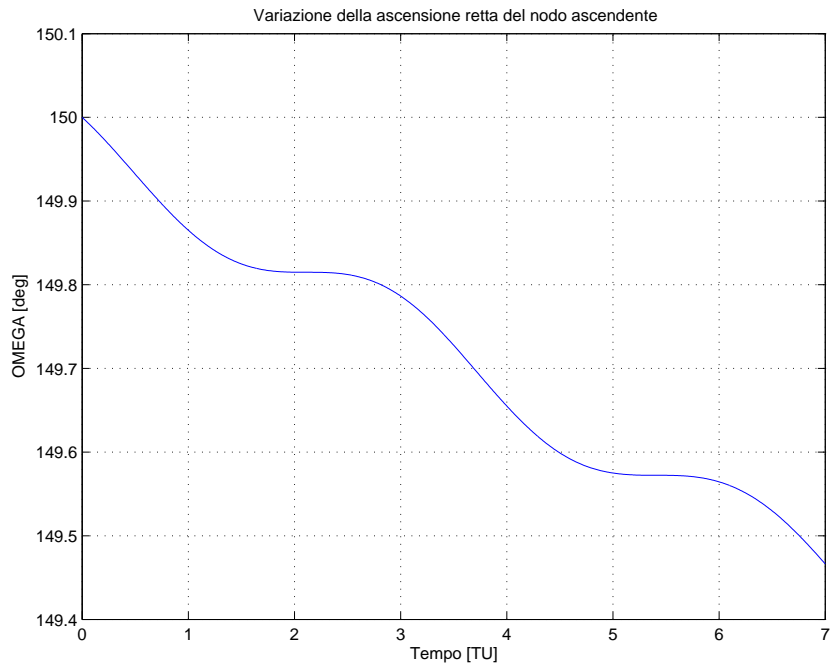


Figura 2.7: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale

È opportuno notare il riscontro con la teoria (rif.[17]) per quel che riguarda la variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente Ω (fig2.7) e quella dell'argomento del perigeo ω (fig2.6).

Per un'orbita posigrada ($0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$) si ha $\dot{\Omega} < 0$, cioè la linea dei nodi

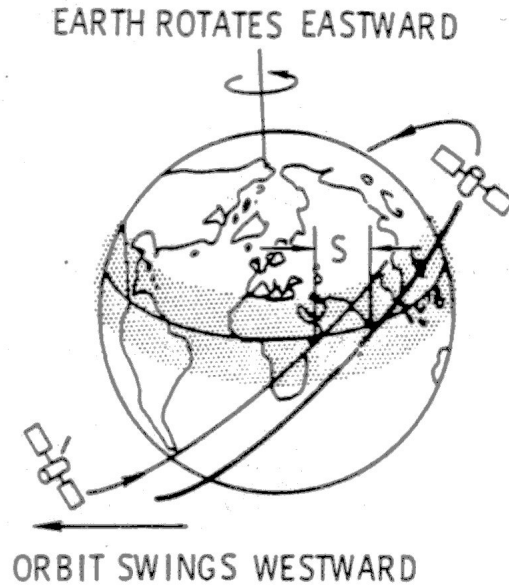


Figura 2.8: Arretamento verso Est della linea dei nodi a causa dello schiacciamento ai poli terrestri

arretra rispetto alla direzione del moto del satellite (vedi fig 2.8). È utile valutare la velocità media con cui si muovono sia Ω che ω , nell'approssimazione di considerare soltanto l'effetto della prima armonica zonale (J_2); sostituisco il tempo t con l'argomento della latitudine u come variabile indipendente, e si ottiene:

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{\dot{\Omega}}{\dot{u}} \simeq \frac{\dot{\Omega}}{h/r^2} = -3 J_2 \cos(i) \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 \sin^2 u [1 + e \cos(u - \omega)] \quad (2.6)$$

$$\overline{\frac{d\Omega}{du}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} du = -\frac{3}{2} J_2 \cos(i) \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 \quad (2.7)$$

Poichè la velocità angolare media del satellite è $n = 2\pi/T$ (dove T è il periodo orbitale), allora sarà:

$$\overline{\dot{u}} = \overline{n}$$

e di conseguenza

$$\overline{\dot{\Omega}} = \left(\frac{d\overline{\Omega}}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dt}\right) = -\frac{3}{2} \bar{n} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 \cos i \quad (2.8)$$

dove

$\overline{\dot{\Omega}}$ variazione media di Ω , in (deg/day)
 i inclinazione dell'orbita (deg)
 p semilato retto

Analogamente si procede al calcolo di $\overline{\dot{\omega}}$ (variazione media di ω , in deg/day) ottenendo la seguente espressione:

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{3}{2} \bar{n} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{p}\right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) \quad (2.9)$$

Si può osservare come la (2.9) indichi che la rotazione del semiasse maggiore di un'orbita, a causa degli effetti di J_2 , è nulla quando:

$$2 - 5 \sin^2 i = 0 \longrightarrow i = \begin{cases} 63.43^\circ \\ 115.57^\circ \end{cases}$$

Le due suddette inclinazioni sono definite critiche e non dipendono nè da J_2 nè da altri elementi orbitali. L'applicazione di tale proprietà viene messa in atto nelle cosiddette orbite di tipo Molnya.

2.4 Effetti dell'attrazione solare e lunare

2.4.1 Il modello a 3 corpi

Analizziamo il moto di un corpo, nel caso specifico un satellite, in presenza di altri due corpi di masse M_1 e M_2 , che immaginiamo essere due pianeti. Per un sistema a tre corpi (ad esempio Sole, Terra, satellite), in riferimento alla figura (2.9) le relazioni tra i vettori rispetto ad un riferimento inerziale sono:

$$\mathbf{r}_{\oplus sat} = \mathbf{r}_{sat} - \mathbf{r}_{\oplus} \quad (2.10)$$

e successive differenziazioni portano a:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\oplus sat} = \ddot{\mathbf{r}}_{sat} - \ddot{\mathbf{r}}_{\oplus} \quad (2.11)$$

In base alla legge di Newton ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) e a quella di gravitazione la risultante delle forze agenti sulla Terra è

$$\sum \mathbf{F}_{g\oplus} = M_{\oplus} \ddot{\mathbf{r}}_{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}M_{sat}\mathbf{r}_{\oplus sat}}{r_{\oplus sat}^3} + \frac{GM_{\oplus}M_{\odot}\mathbf{r}_{\oplus\odot}}{r_{\oplus\odot}^3} \quad (2.12)$$

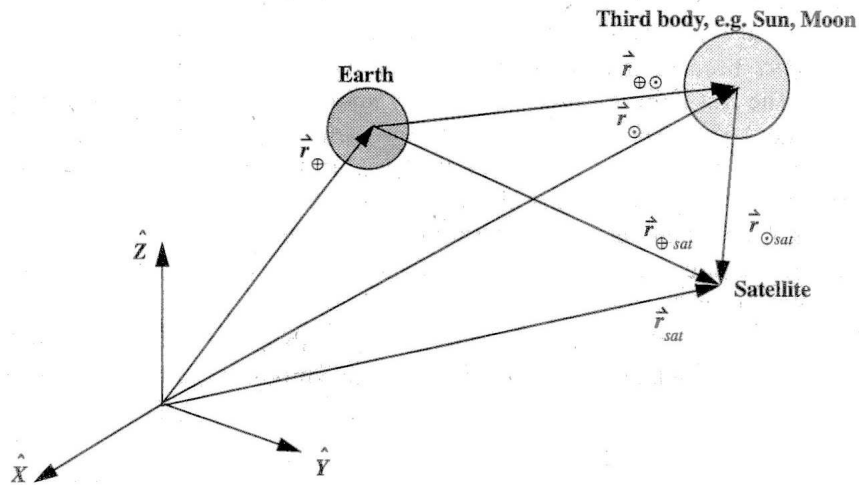


Figura 2.9: Geometria del modello a 3 corpi

Tale risultato è la somma degli effetti combinati di Sole e satellite. Per il satellite, invece, la somma delle forze gravitazionali agenti è:

$$\sum \mathbf{F}_{g\ sat} = M_{sat} \ddot{\mathbf{r}}_{sat} = -\frac{GM_{\oplus} M_{sat} \mathbf{r}_{\oplus sat}}{r_{\oplus sat}^3} - \frac{GM_{\odot} M_{sat} \mathbf{r}_{\odot sat}}{r_{\odot sat}^3} \quad (2.13)$$

Notare che entrambe le forze sono negative perchè sono in direzione opposta a quella che punta verso il satellite.

2.4.2 Calcolo delle accelerazioni perturbative

La finalità è quella di ricavare un'espressione delle accelerazioni del satellite dovute all'effetto rispettivamente dell'attrazione gravitazione del Sole e della Luna.

Va sottolineato che le distanze Terra-Sole e Terra-Luna necessarie al calcolo delle suddette accelerazioni sono ricavate direttamente dalle **Effemeridi**, rispettivamente del Sole e della Luna (vedi Appendice B.3).

Perturbazione dovuta alla presenza del Sole

Appropriate sostituzioni nella (2.13) producono il seguente risultato:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\oplus sat} = -\frac{GM_{\oplus} \mathbf{r}_{\oplus sat}}{r_{\oplus sat}^3} - \frac{GM_{\odot} \mathbf{r}_{\odot sat}}{r_{\odot sat}^3} - \frac{GM_{sat} \mathbf{r}_{\oplus sat}}{r_{\oplus sat}^3} - \frac{GM_{\odot} \mathbf{r}_{\oplus \odot}}{r_{\oplus \odot}^3} \quad (2.14)$$

e il risultato finale è perciò:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\oplus sat} = -\frac{G(M_{\oplus} + M_{sat}) \mathbf{r}_{\oplus sat}}{r_{\oplus sat}^3} + GM_{\odot} \left(\frac{\mathbf{r}_{sat \odot}}{r_{sat \odot}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\oplus \odot}}{r_{\oplus \odot}^3} \right) \quad (2.15)$$

Il I° termine rappresenta l'accelerazione della Terra sul satellite nel modello a due corpi (Terra, satellite), mentre il II° termine è proprio quello cercato, che indicherò con:

$$\mathbf{a}_{pert}^{(sun)} = GM_{\odot} \left(\frac{\mathbf{r}_{sat \odot}}{r_{sat \odot}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\oplus \odot}}{r_{\oplus \odot}^3} \right) \quad (2.16)$$

Come si può notare tale accelerazione perturbativa consta di due parti: il termine a sinistra è detto **effetto diretto**, e rappresenta l'effetto del Sole direttamente sul satellite; quello a destra, invece, è chiamato **effetto indiretto**, ed esprime l'azione del Sole sulla Terra; questo significa che non

appena la posizione della Terra cambia, l'accelerazione fa lo stesso di conseguenza.

Nelle figure (2.10)–(2.14) si mostrano gli effetti della sola presenza del Sole su un satellite in orbita quasi-circolare a 250 km di quota sulla superficie terrestre.

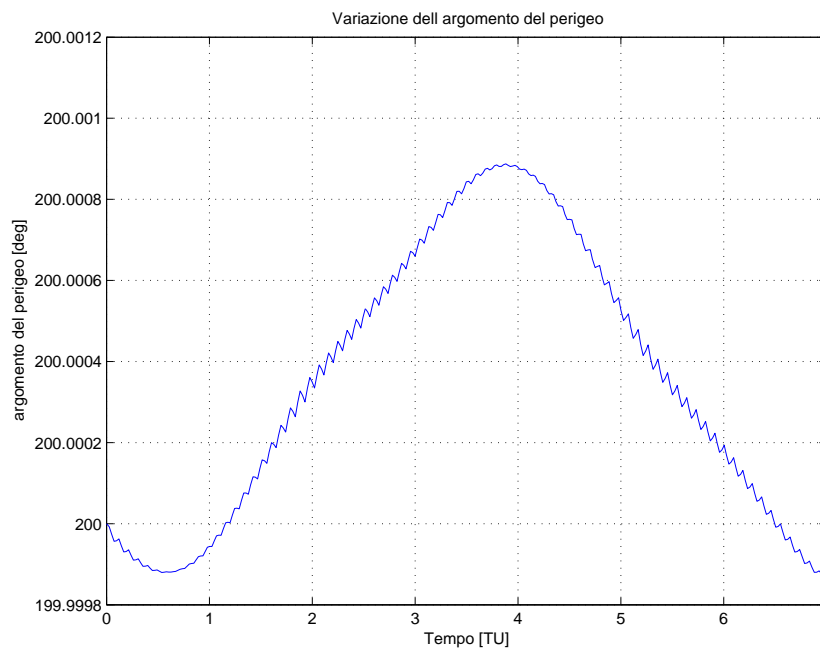


Figura 2.10: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare

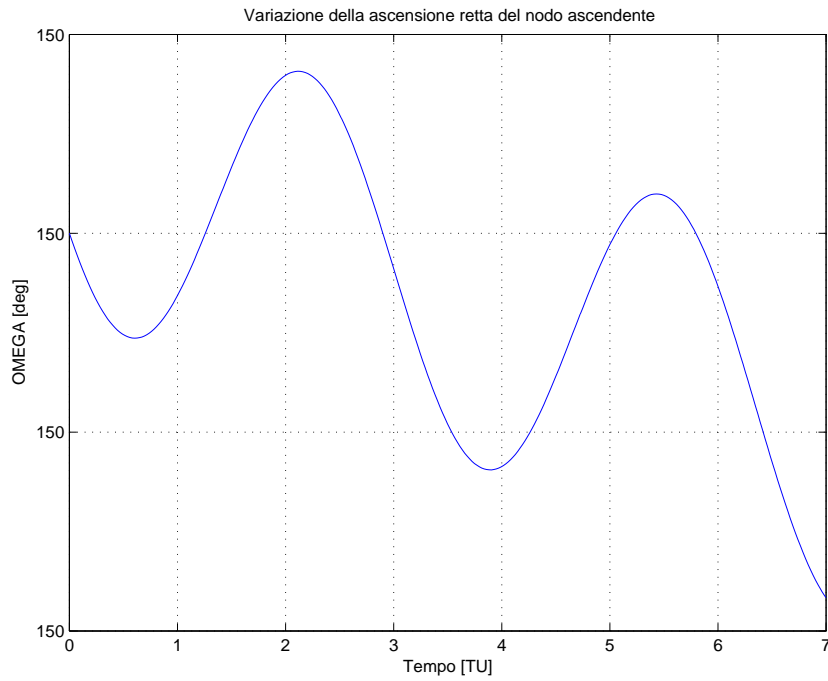


Figura 2.11: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare

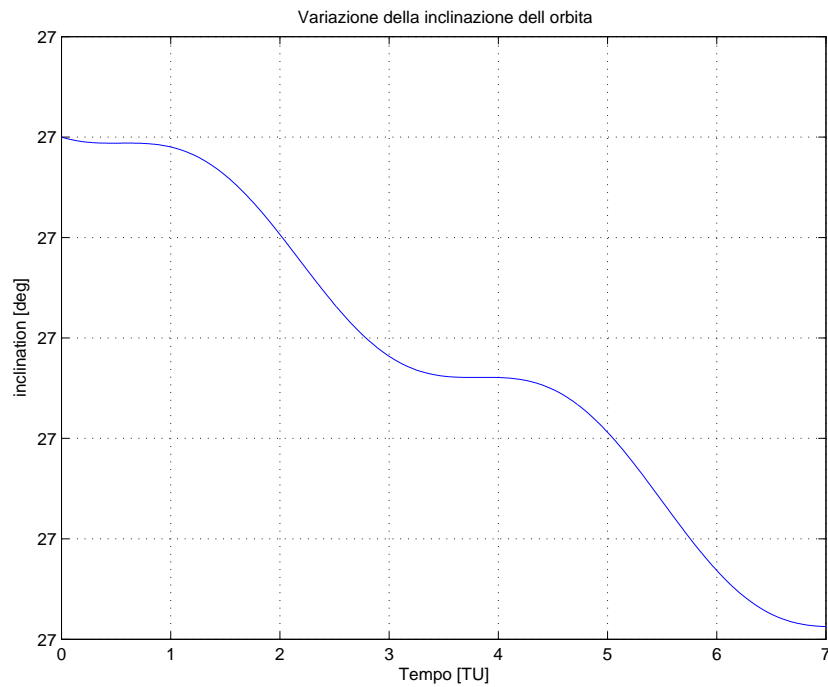


Figura 2.12: Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare

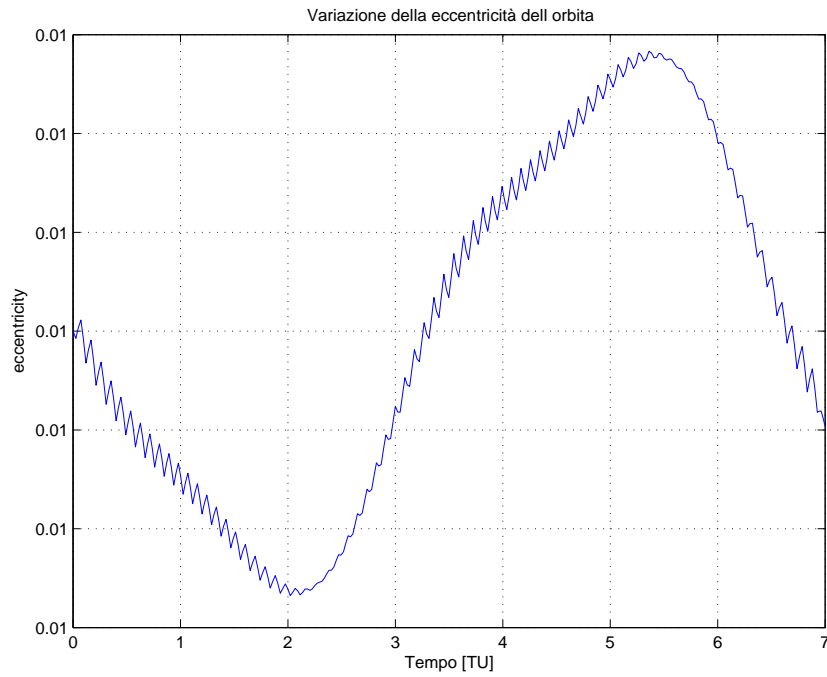


Figura 2.13: Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare

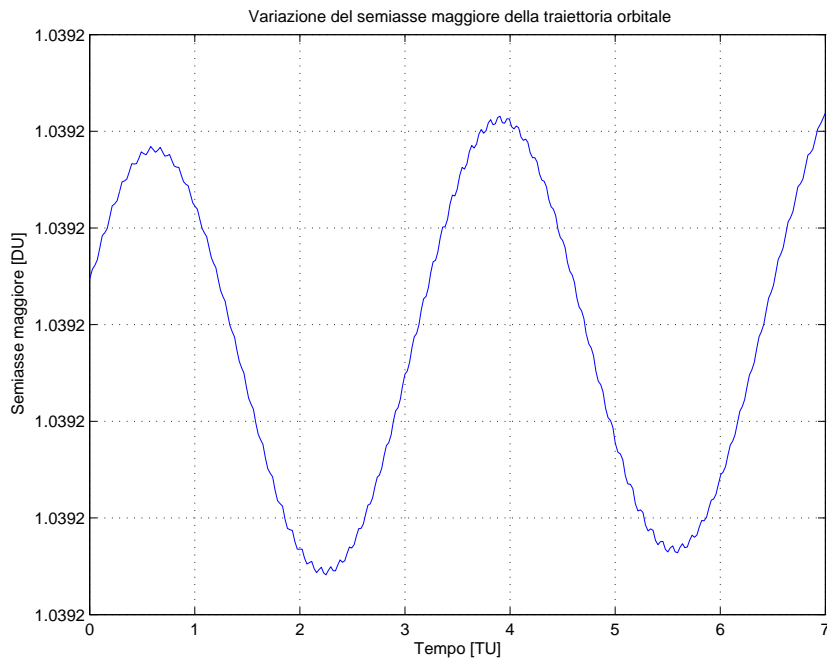


Figura 2.14: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare

Perturbazione dovuta alla presenza della Luna

Analogamente si procede per il calcolo della perturbazione dovuta alla Luna, e si ottiene la seguente espressione:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\oplus sat} = -\frac{G(M_{\oplus} + M_{sat})\mathbf{r}_{\oplus sat}}{r_{\oplus sat}^3} + GM_{\zeta} \left(\frac{\mathbf{r}_{sat \zeta}}{r_{sat \zeta}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\oplus \zeta}}{r_{\oplus \zeta}^3} \right) \quad (2.17)$$

da cui

$$\mathbf{a}_{pert}^{(moon)} = GM_{\zeta} \left(\frac{\mathbf{r}_{sat \zeta}}{r_{sat \zeta}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\oplus \zeta}}{r_{\oplus \zeta}^3} \right) \quad (2.18)$$

Le stesse considerazioni fatte per il Sole valgono ora per la Luna; le figure (2.15)–(2.19) descrivono gli effetti di tale disturbo.

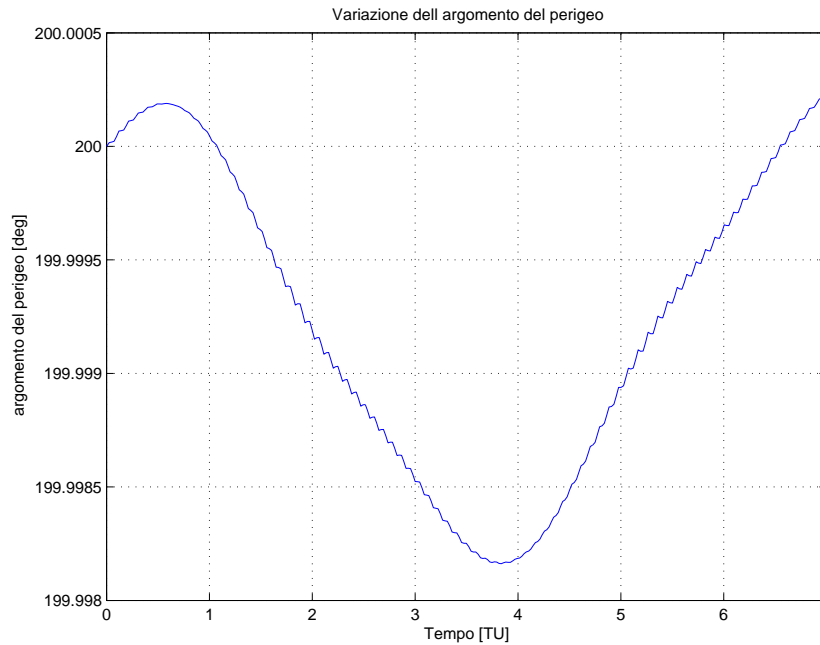


Figura 2.15: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare

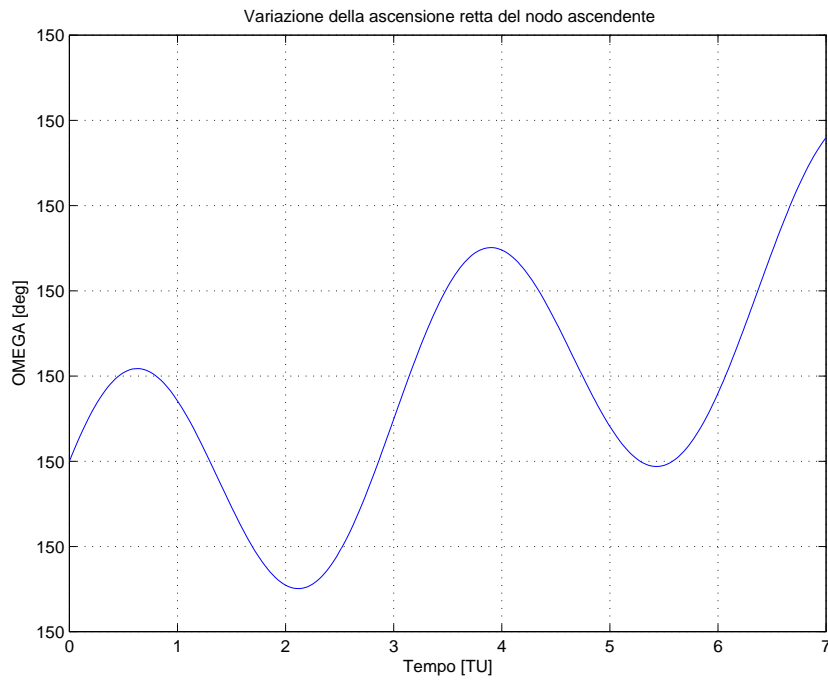


Figura 2.16: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare

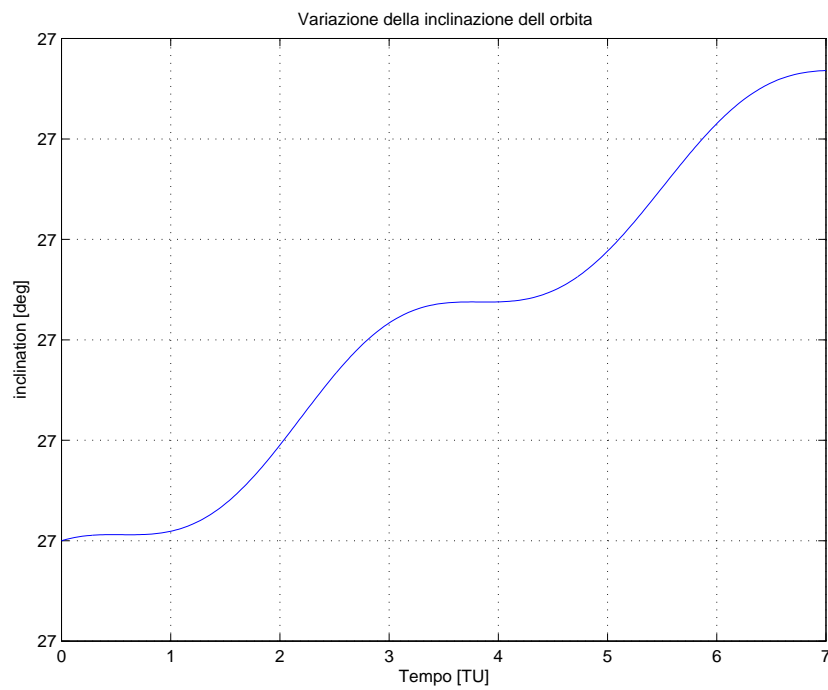


Figura 2.17: Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare

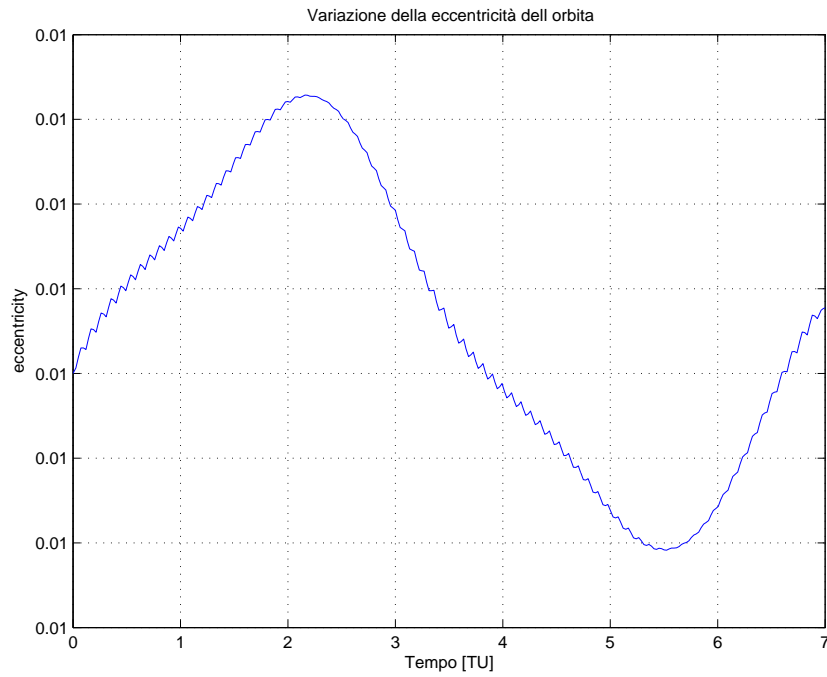


Figura 2.18: Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare

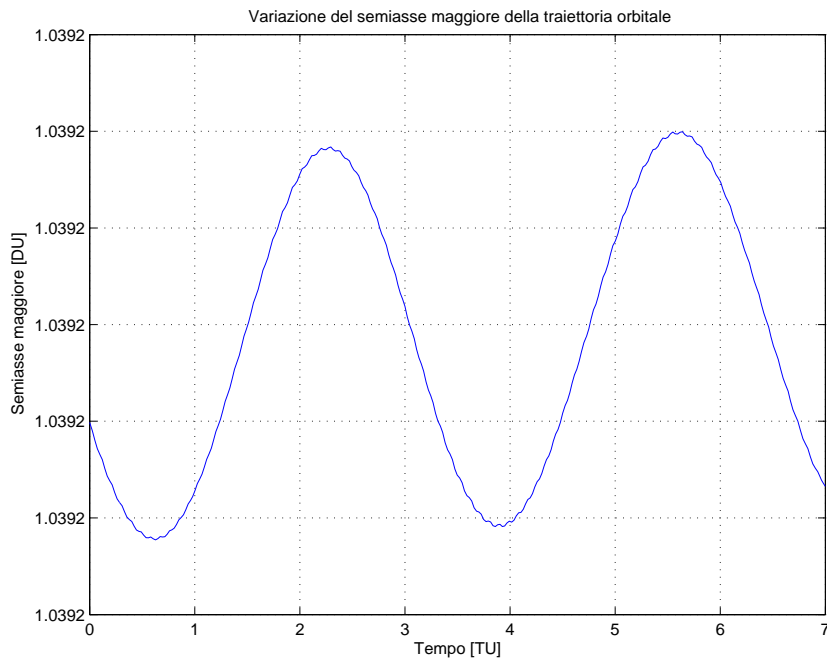


Figura 2.19: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare

2.5 Pressione di radiazione solare

2.5.1 Introduzione

Un satellite esposto alla radiazione solare risente di una piccola forza che nasce dall'assorbimento o dalla riflessione dei fotoni irradiati dal Sole; essi, urtando la superficie dello stesso, esercitano una pressione il cui valore approssimato, per un corpo perfettamente assorbente, è

$$P_{\odot} \approx 4.56 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (2.19)$$

In generale una frazione ε dei fotoni che colpiscono la superficie del satellite viene riflessa (una parte in modo speculare, una parte in modo diffuso), e la rimanente frazione $(1 - \varepsilon)$ viene totalmente assorbita [vedi fig(2.20)].

2.5.2 Modello matematico

A differenza della perturbazione gravitazionale discussa in precedenza, l'accelerazione dovuta alla radiazione solare dipende dalla massa del satellite e dalla superficie esposta alla radiazione stessa.

Si sceglie come modello di prima stima il cosiddetto **Cannonball model**, con le seguenti ipotesi di lavoro:

- il satellite viene assunto essere una sfera uniforme
- le proprietà ottiche della superficie sono uniformi
- la porzione di satellite affacciata al Sole è un rettangolo di area pari a 2 m^2
- gli effetti d'ombra sono messi in conto mediante una *funzione d'ombra*
- la normale alla superficie del satellite punta nella direzione del Sole ($\theta = 0$)

Per trovare un'espressione analitica di tale accelerazione perturbativa occorre precisare qual è l'esatta posizione del Sole al momento della simulazione, e per fare ciò si devono estrapolare i dati provenienti dalle cosiddette **Effemeridi**

del Sole (vedi Appendice B.3).

Per calcolare precisamente la pressione di radiazione solare bisogna conoscere quanto vale l'anomalia vera del Sole ad un dato giorno, cioè:

$$\nu_{\oplus} = | mna + c_{\odot} |_{\text{mod}360} \quad (2.20)$$

in cui

$$\begin{aligned} c_{\odot} = & (1.919460 - 0.004789t - 0.000014t^2) \sin(mna) \\ & + (0.020094 - 0.000100t) \sin(2 \cdot mna) \\ & + 0.000293 \sin(3 \cdot mna) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} mna = & | 358.47583 + 35999.04975t - 0.000150t^2 \\ & - 0.0000033t^3 |_{\text{mod}360} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$t = \frac{(JD - 2415020)}{36525} \quad (2.23)$$

Tutto dipende quindi da JD , che è la data giuliana.

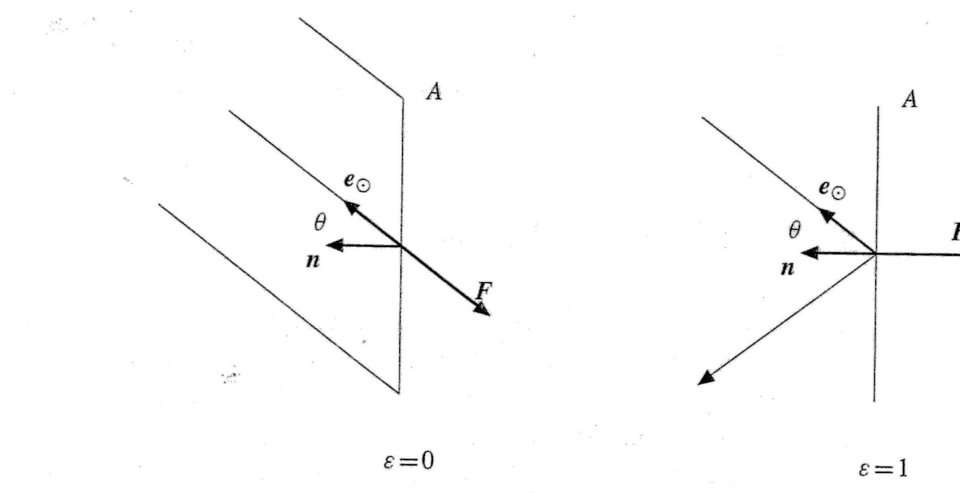


Figura 2.20: Forza dovuta alla pressione di radiazione solare per elementi di superficie perfettamente assorbenti ($\varepsilon = 0$) e perfettamente riflettenti ($\varepsilon = 1$)

Alla distanza di 1AU (*Astronomical Unit*) dal Sole (ad esempio nelle vicinanze della Terra) il flusso solare vale

$$\Phi = \frac{1358}{1.0004 + 0.0334 \cos(D)} \quad (2.24)$$

dove

$$D = \nu_{\oplus} - \pi \quad (2.25)$$

rappresenta la fase dell'anno in cui ci troviamo.

Il valore della pressione di radiazione solare per un corpo nero diventa perciò:

$$P_{\odot} = \frac{\Phi}{c} \quad (2.26)$$

dove c è la velocità della luce ($c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s).

Il versore normale alla superficie (\mathbf{n}) mi dà l'orientamento della superficie stessa rispetto alla direzione del Sole (\mathbf{e}_{\odot}) (vedi fig 2.20); l'angolo tra i due versori è indicato con (θ).

Nel caso più generale dovrei tenere conto di diversi aspetti:

- le quantità di fotoni assorbiti e riflessi
- i cambi di orientamento della superficie del satellite rispetto al Sole
- la variazione di distanza tra il satellite e il Sole lungo l'orbita (a causa dell'eccentricità dell'orbita terrestre intorno al Sole stesso).

Comunque per molte applicazioni (ad esempio satelliti con grossi pannelli solari) è sufficiente assumere le ipotesi di cui sopra, e dire che:

$$\mathbf{a}_{PRS} = -P_{\odot} C_R \frac{A}{m} \frac{\mathbf{r}_{\odot sat}}{r_{\odot sat}} \quad (2.27)$$

dove

A area della superficie soggetta a pressione di radiazione, in (m^2)

m massa del satellite, in (kg)

$\mathbf{r}_{\odot sat}$ vettore che va dal Sole al satellite, in (km)

Il coefficiente di pressione di radiazione C_R vale

$$C_R = 1 + \varepsilon \quad (2.28)$$

Materiale	ε	$1 - \varepsilon$	$C_R \approx 1 + \varepsilon$
Pannelli solari	0.21	0.79	1.21
Antenne	0.30	0.70	1.30
Vele solari rivestite in alluminio	0.88	0.12	1.88

Tabella 2.1: Coefficienti di riflettività, assorbimento e pressione di radiazione di alcuni componenti dei satelliti

dove ε è il coefficiente di riflettività del materiale. Per tipici materiali usati nella costruzione dei satelliti ε varia nell'intervallo [0.2-0.9] (vedi tabella 2.1).

Per applicazioni di alta precisione questo modello non è sufficiente, e devono essere trattate in modo approfondito sia le proprietà superficiali dei materiali, sia la complessa struttura del satellite.

2.5.3 Condizioni di Eclissi

L'espressione dell'accelerazione dovuta alla pressione di radiazione solare è stata ricavata partendo dall'ipotesi implicita di piena illuminazione da parte del Sole; tuttavia, per la maggior parte dei satelliti orbitanti intorno alla Terra, si verificano delle eclissi parziali o totali di cui occorre naturalmente tener conto.

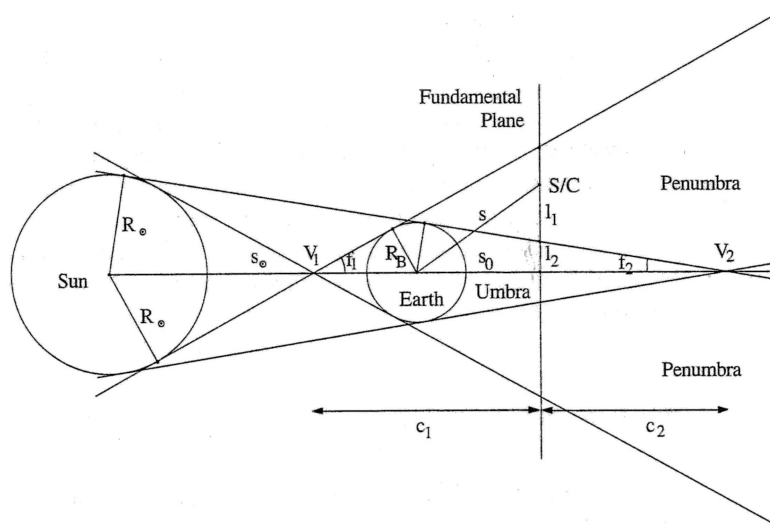


Figura 2.21: Modello d'ombra canonico

Il modello di calcolo seguente (rif.[10]) è applicabile a qualsiasi corpo occultatore (ad esempio la Luna), sebbene la computazione delle condizioni di eclisse sia generalmente applicata alla Terra.

Trascurando l'atmosfera e lo schiacciamento ai poli del corpo occultatore, in riferimento alla figura (2.21) posso scrivere:

$$\vec{s}_\odot = \vec{r}_\odot - \vec{r}_B \quad (2.29)$$

e

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_B \quad (2.30)$$

che sono le coordinate rispettivamente del Sole e del satellite rispetto al corpo occultatore in \mathbf{r}_B . Il *piano fondamentale*, che è perpendicolare all'asse d'ombra e passa per il centro di massa del satellite, intercetta l'asse d'ombra ad una distanza pari a

$$s_0 = (-\vec{s}^T \vec{s}_\odot) / |\vec{s}_\odot| \quad (2.31)$$

dal centro del corpo occultatore in direzione opposta al Sole.

Di conseguenza

$$l = \sqrt{s^2 - s_0^2} \quad (2.32)$$

sarà la distanza del satellite dall'asse d'ombra.

Facendo uso del raggio del Sole R_\odot e di quello del corpo occultatore R_B (nel nostro caso la Terra) gli angoli dei coni d'ombra sono dati da:

$$\sin f_1 = (R_\odot + R_B) / s_\odot \quad (2.33)$$

$$\sin f_2 = (R_\odot - R_B) / s_\odot \quad (2.34)$$

Di qui in avanti il pedice (1) indicherà il cono di *penombra*, mentre il pedice (2) quello d'*ombra*. Quando il corpo occultatore è la Terra la situazione è la seguente:

$$\begin{cases} f_1 = 0.269^\circ \\ f_2 = 0.264^\circ \end{cases} \quad (2.35)$$

Perciò le distanze del piano fondamentale (misurate in direzione anti-Sole)

dai vertici V_1 e V_2 dei coni d'ombra saranno

$$c_1 = s_0 + R_B / \sin f_1 \quad (2.36)$$

$$c_2 = s_0 - R_B / \sin f_2 \quad (2.37)$$

mentre i raggi di tali coni sul piano fondamentale si possono esprimere come

$$l_1 = c_1 \cdot \tan f_1 \quad (2.38)$$

$$l_2 = c_2 \cdot \tan f_2 \quad (2.39)$$

Si può notare che l_2 è negativo tra il corpo occultatore e il vertice del cono d'ombra (regione di totale eclisse); dietro il vertice V_2 ($c_2 > 0, l_2 > 0$).

Per tenere conto di tali periodi di eclisse si introduce un coefficiente correttivo alla (2.27), e in definitiva si ottiene:

$$\mathbf{a}_{PRS} = -\nu P_{\odot} C_R \frac{A}{m} \frac{\mathbf{r}_{\odot sat}}{r_{\odot sat}} \quad (2.40)$$

dove la funzione d'ombra ν vale

$\nu = 0$ per il satellite in ombra

$\nu = 1$ per il satellite in luce

$0 < \nu < 1$ per il satellite in penombra

Nelle figure (2.22–2.26) sono graficati gli effetti della pressione di radiazione solare su un satellite in orbita quasi circolare a 250 km di quota.

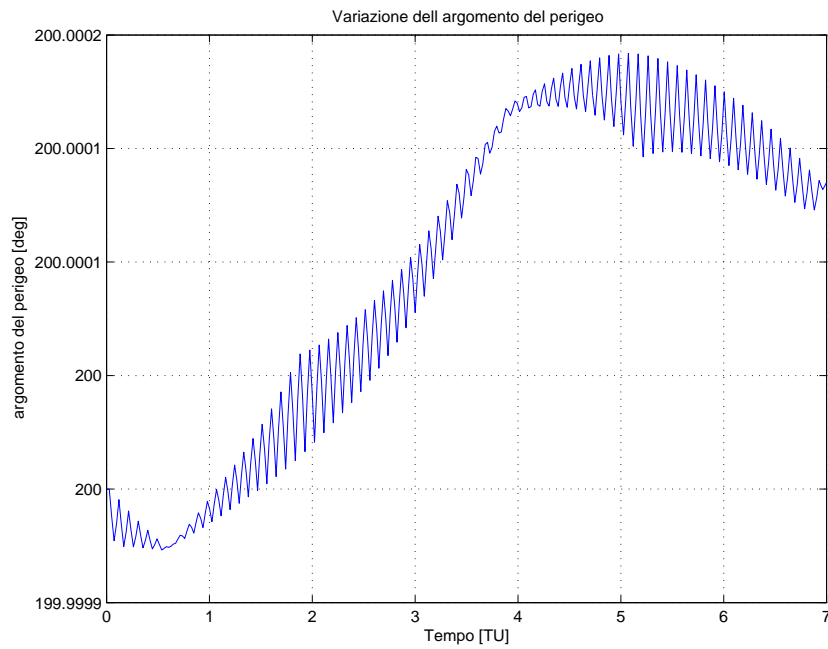


Figura 2.22: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare

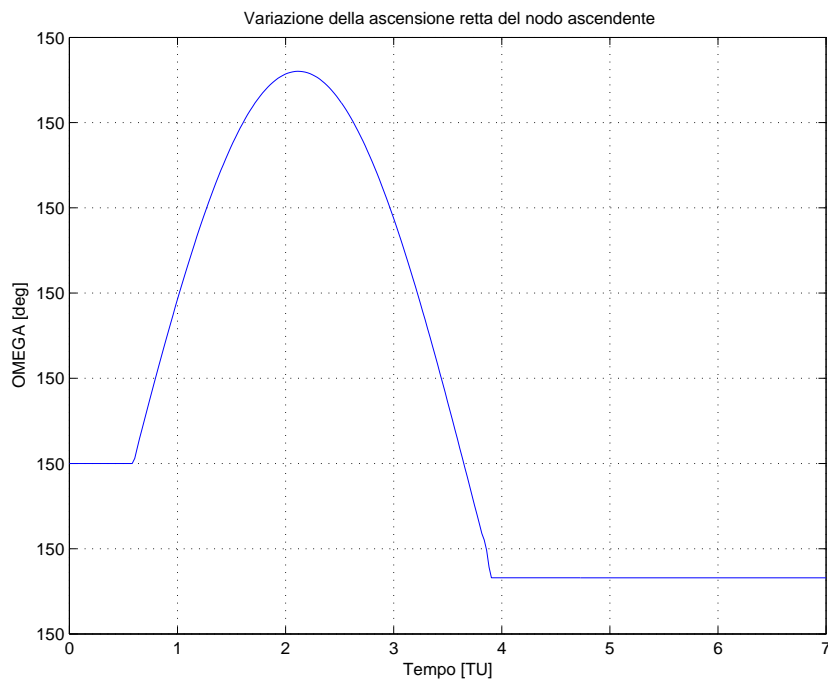


Figura 2.23: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare

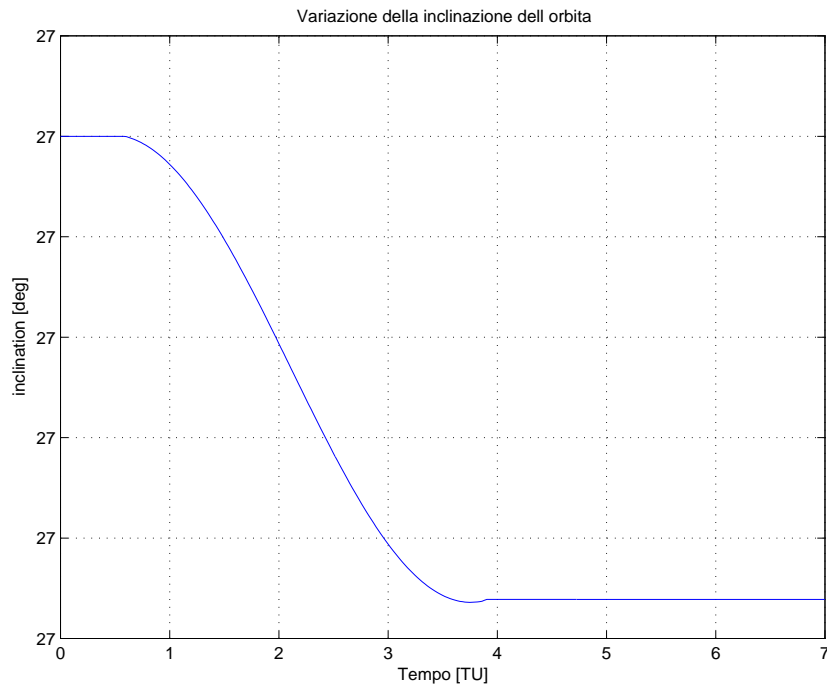


Figura 2.24: Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare

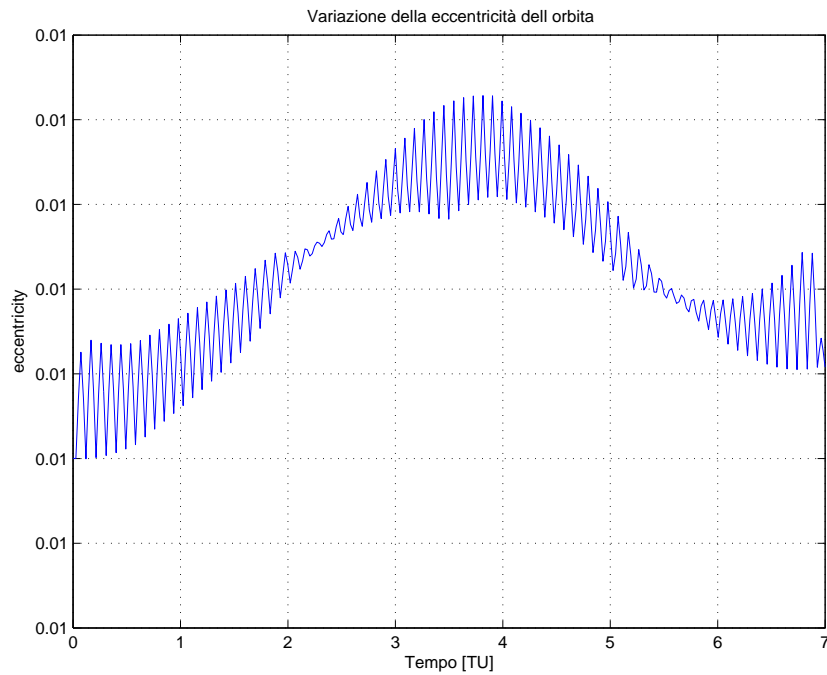


Figura 2.25: Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare

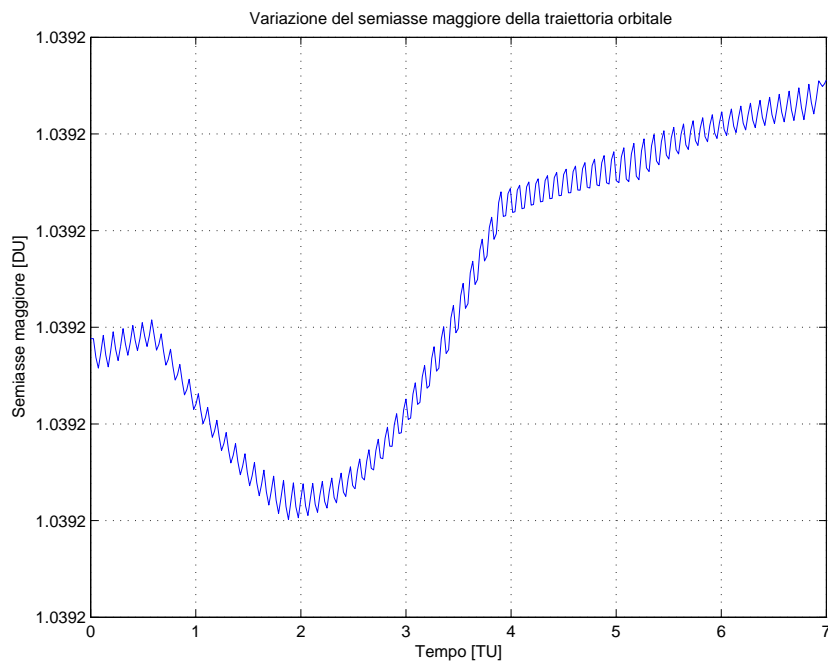


Figura 2.26: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare

2.6 Effetti della resistenza atmosferica

2.6.1 Introduzione

Le azioni atmosferiche rappresentano le maggiori perturbazioni di tipo non-gravitazionale agenti su satelliti in orbita bassa intorno alla Terra; a quote maggiori, invece, le perturbazioni dovute alla presenza di un terzo corpo (vedi paragrafo 2.4) e alla radiazione solare (vedi paragrafo 2.5) risultano predominanti.

Tuttavia una accurata modellizzazione di queste forze risulta molto difficoltosa, soprattutto per due ragioni :

1. le proprietà atmosferiche, in primo luogo la densità, non sono conosciute in modo così preciso;
2. si rende necessaria una accurata conoscenza delle interazioni tra le molecole che compongono l'atmosfera e le differenti superficie del satellite.

2.6.2 Effetti della resistenza atmosferica

La resistenza atmosferica ha un effetto secolare sull'orbita, sottraendo energia al satellite e causando quel tipico moto a spirale verso la Terra.

La forma del satellite è un parametro molto importante, così come la sua massa; in generale un velivolo spaziale di forma arbitraria in moto con velocità v in una atmosfera di densità ρ è soggetto ad una forza di resistenza D (diretta in verso opposto alla velocità relativa v_R del satellite rispetto all'atmosfera) e ad una di portanza L (diretta perpendicolarmente a v_R); in prima stima, tuttavia, è abbastanza ragionevole trascurare la portanza, e considerare una sezione trasversale media per la stima della resistenza (vedi fig2.27). L'equazione base che descrive la resistenza aerodinamica è:

$$\mathbf{a}_{drag} = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v_{rel}^2 \mathbf{e}_v \quad (2.41)$$

dove

A	superficie normale alla velocità relativa del satellite, in m^2
C_D	coefficiente di resistenza, adimensionale
m	massa del satellite, in kg

ρ	densità atmosferica, in kg/m^3
v_{rel}	velocità relativa del satellite, in m/s
\mathbf{e}_v	versore della velocità relativa

Il **coefficiente di resistenza** C_D riflette la suscettibilità del satellite alle forze di resistenza, descrivendo l'interazione dell'atmosfera con il materiale della superficie dello stesso; tipici valori di C_D vanno da [1.5-3.0], e sono generalmente stimati come parametri liberi nei programmi di simulazione orbitale (nel presente lavoro è stato preso un valore di C_D pari a 2).

In un regime a *free molecular flow*, in cui generalmente si muove il satellite, le particelle riemesse dallo stesso non interferiscono con le molecole incidenti (vale $C_D \approx 2 - 2.3$); questo regime è caratterizzato da un numero di Knudsen $K_n = \lambda/l \geq 10$ (dove λ è il cammino libero medio e l è dimensione caratteristica del satellite); a quote più basse λ diminuisce fino a raggiungere la condizione di flusso ipersonico continuo in cui $K_n < 0.1$, e il valore di C_D passa da 2.3 a 1.

In figura (2.28) è illustrata la dipendenza del numero di Knudsen dalle dimensioni del satellite e dalla quota.

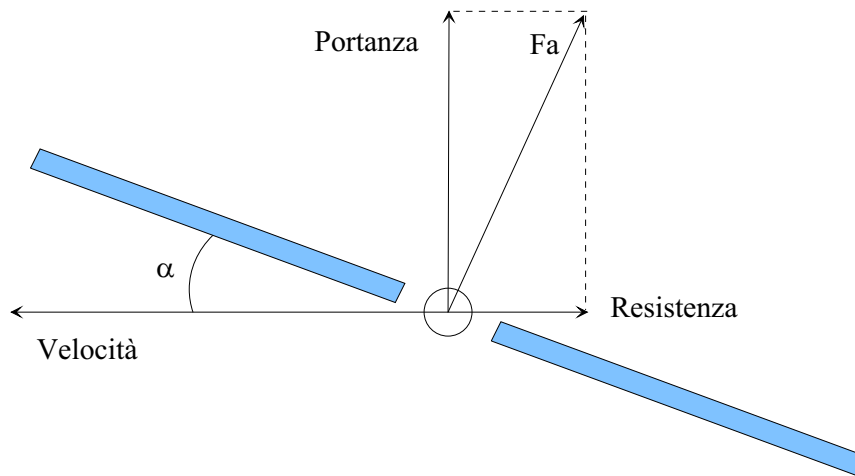


Figura 2.27: Schema delle forze aerodinamiche agenti sulla sonda

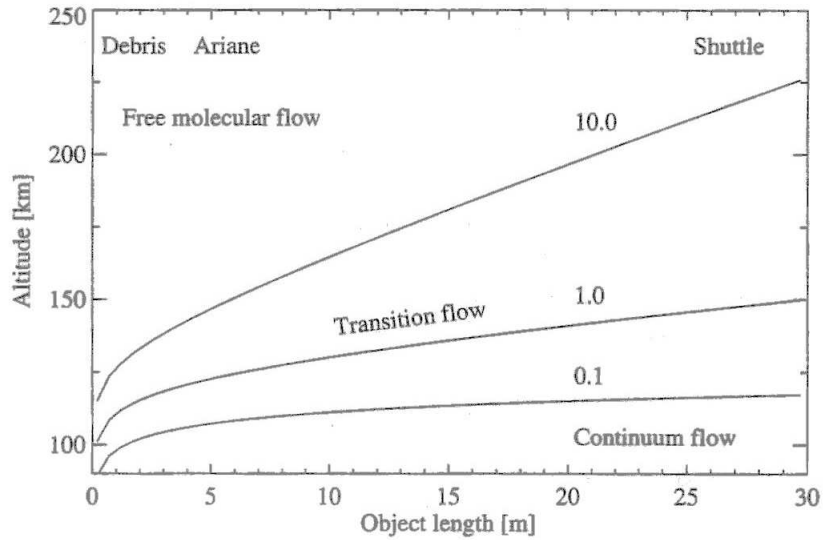


Figura 2.28: Variazione del numero di Knudsen con la quota e le dimensioni del satellite

La perturbazione introdotta dalla resistenza atmosferica viene descritta nelle figure (2.29)–(2.33).

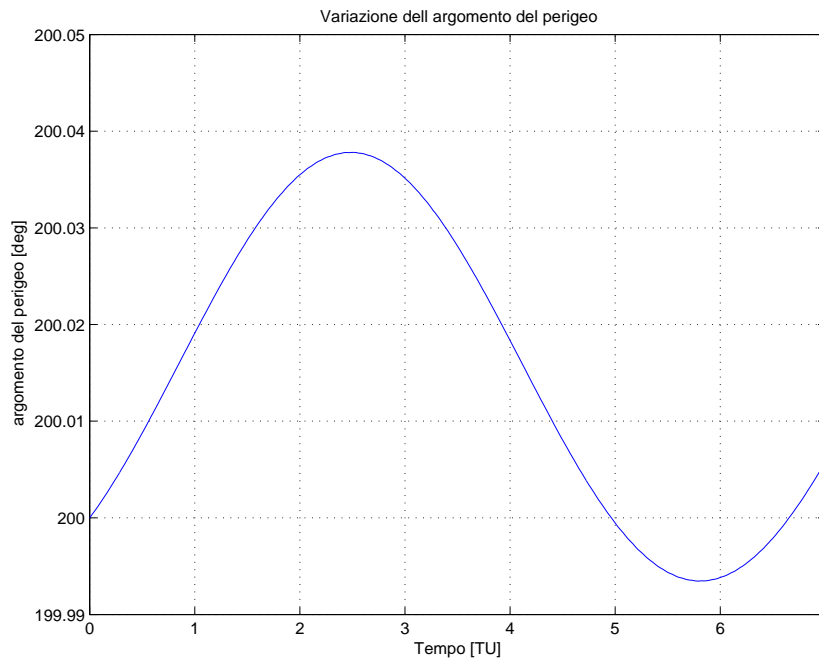


Figura 2.29: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica

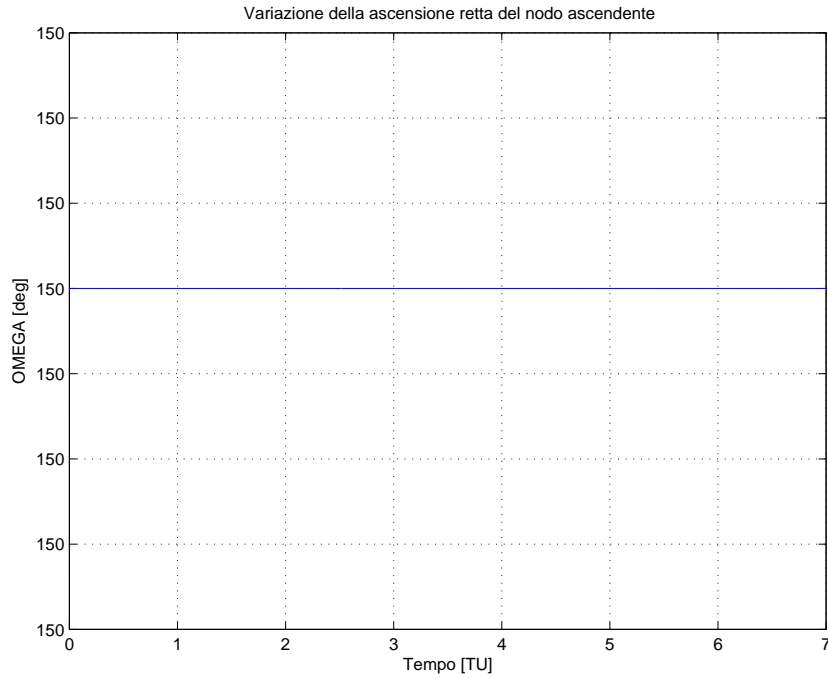


Figura 2.30: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica

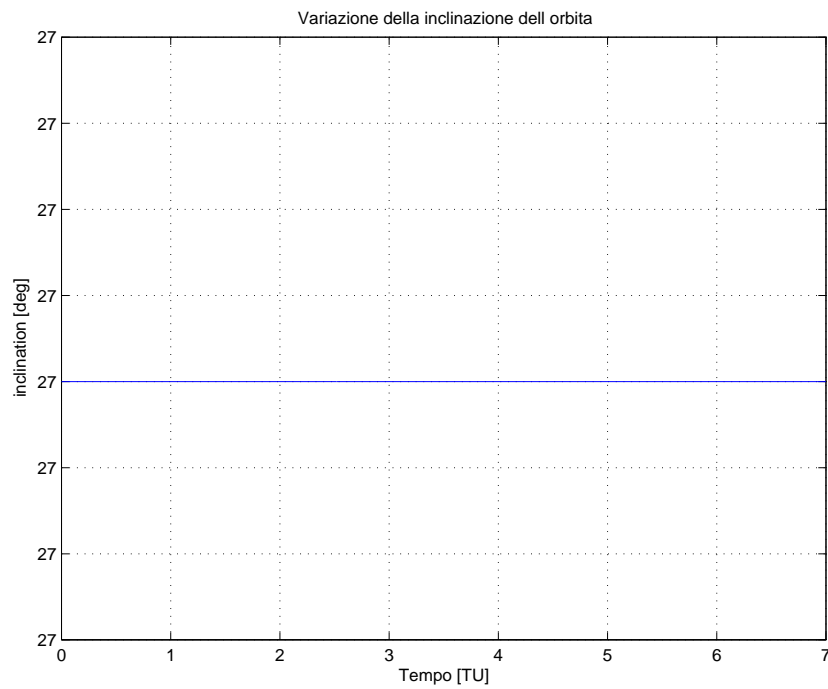


Figura 2.31: Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica

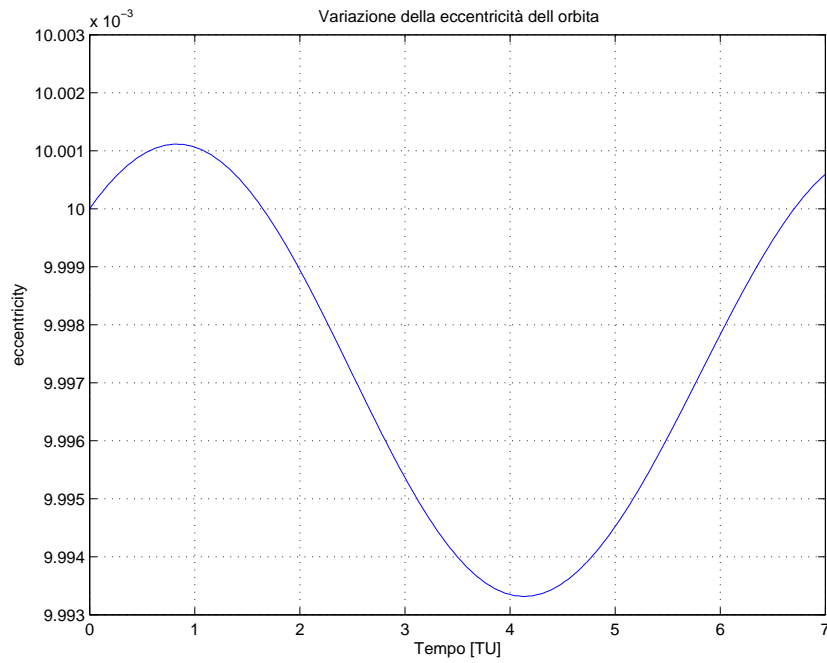


Figura 2.32: Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica

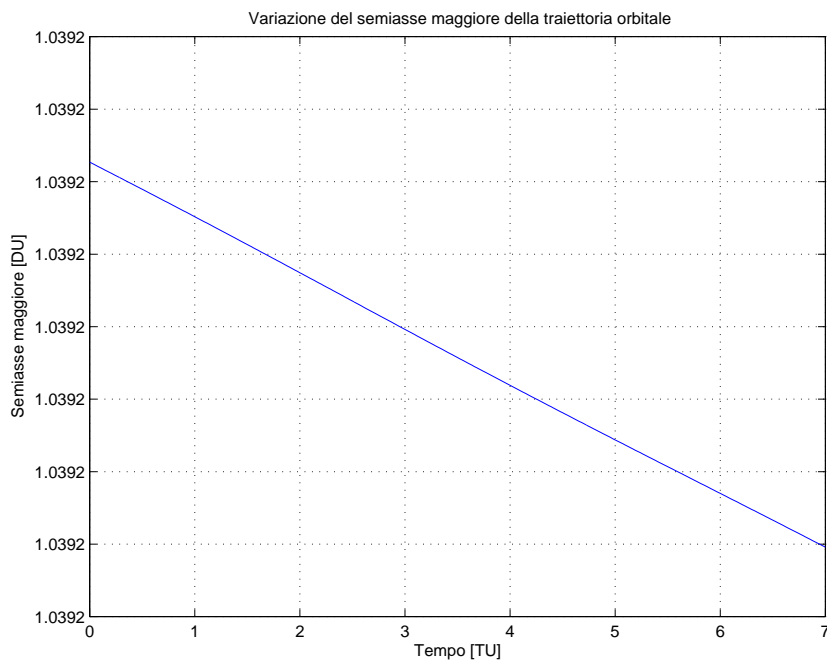


Figura 2.33: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica

Si noti anche in questo caso il riscontro con la teoria (vedi [17]); risulta infatti

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} < 0 \quad (2.42)$$

cioè il semiasse maggiore dell'orbita tende a diminuire a causa di D ; se ho a che fare con un'orbita ellittica risulta anche $\dot{e} = de/dt < 0$ (diminuzione dell'eccentricità).

In definitiva l'effetto della resistenza aerodinamica è quello di circularizzare l'orbita sottraendole energia.

Parte II

Seconda Parte

3

Simulazioni di missione

3.1 Introduzione

Dopo aver eseguito un'analisi approfondita e una descrizione dettagliata dell'ambiente spaziale in cui andremo ad operare, e aver creato dei modelli matematici atti alla valutazione dei vari effetti perturbativi, è ora il momento di mettere insieme i tutti i pezzi e verificare qual è l'effettivo comportamento del satellite.

3.2 Descrizione della Simulazione

La simulazione in ambiente Matlab si svolge in questo modo:

1. si caricano in memoria tutte le costanti fisiche inserite nel programma (velocità della luce c , costante gravitazionale G , parametro gravitazionale terrestre μ_{\oplus}, \dots) e le caratteristiche del satellite (massa m_{sat} , coefficiente di resistenza C_D , area della sezione trasversale A_{sat}, \dots);
2. si fissano il tempo di inizio simulazione, trasformando tutto in data *Giuliana*, e la durata della stessa;
3. si passa alle unità adimensionali di tempo, di spazio e velocità (vedi Appendice A);
4. si assegnano le condizioni iniziali in termini di elementi orbitali classici ($a_0; i_0; e_0; \Omega_0; \omega_0$);

5. si effettua il passaggio dagli elementi orbitali al sistema di coordinate cartesiane *geocentrico-equatoriali*;
6. si procede all'integrazione dell'equazione di moto, espressa nella formulazione di **Cowell** (vedi cap.2), ottenendo come *output* i vettori posizione e velocità perturbati ad ogni istante;
7. con questi si va a graficare la traiettoria perturbata e si confronta con quella Kepleriana ideale;
8. infine si passa nuovamente agli elementi orbitali classici, e si grafica l'entità della variazione degli stessi lungo l'orbita.

Le equazioni di moto sono le seguenti:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} = -\mu_{\oplus}/r^3\mathbf{r} + \mathbf{a}_{pert} & \text{traiettoria perturbata} \\ \ddot{\mathbf{r}} = -\mu_{\oplus}/r^3\mathbf{r} & \text{traiettoria kepleriana ideale} \end{cases}$$

Per testare il nostro simulatore abbiamo scelto, tra le infinite orbite possibili, quelle che a nostro parere potrebbero essere le più interessanti, e vale a dire:

1. Orbita bassa (LEO, *Low Earth Orbit*)
2. Orbita di tipo Molnya
3. Orbita Geostazionaria (GEO, *Geostationary Earth Orbit*)

3.3 Simulazione n°1-Orbita di tipo LEO

3.3.1 Introduzione

La stragrande maggioranza di questi satelliti viene lanciata in orbite quasi-circolari con quote che variano tra i 300 e i 1500 km.

Sotto quella quota l'orbita decadrebbe in breve tempo a causa della resistenza atmosferica; altitudini maggiori, d'altra parte, non sono richieste nè desiderabili per molte missioni.

Il grande vantaggio di questa tipologia di satelliti è il fatto che sono piccoli ed economici da realizzare e mandare in orbita.

3.3.2 Risultati della Simulazione

Nella tabella 3.1 vengono indicate le condizioni iniziali e tutti i dati in *input* al sistema.

I risultati della simulazione sono riportati nelle figure (3.1–3.9).

Notare che la curva in rosso nelle figure 3.1–3.4 rappresenta la traiettoria kepleriana ideale (non perturbata).

Data (gregoriana) di partenza	12/07/2004
Data Giuliana di partenza	2,453,200
Attività solare	Bassa
Durata della simulazione [giorni]	6
Quota iniziale dell'orbita [km]	250
Periodo orbitale [TU]	6.65
Numero di rivoluzioni	96
Semiasse maggiore iniziale [km]	6628.2
Eccentricità iniziale	0.0062
Inclinazione iniziale [deg]	27
Argomento del perigeo iniziale [deg]	200
Nodo ascendente iniziale [deg]	150
Densità atmosferica [kg/m^3]	2.8549×10^{-11}
Massa satellite [kg]	215
C_D	2.2
Area sezione trasversale [m^2]	2

Tabella 3.1: Parametri d'ingresso

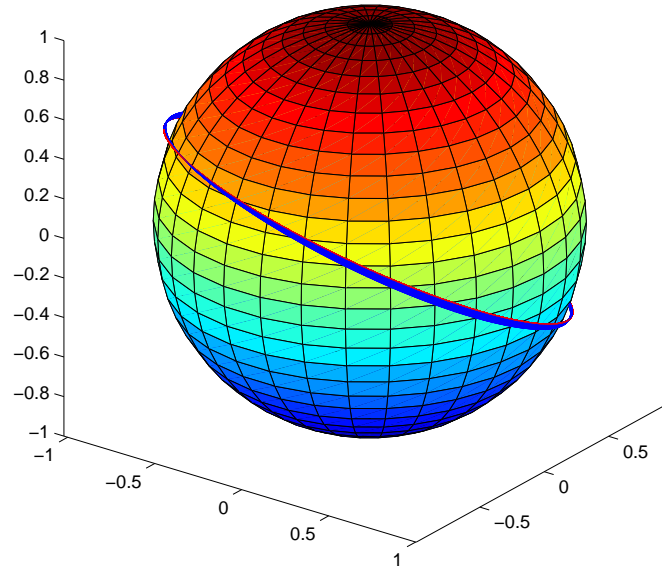


Figura 3.1: Particolare n°1 della traiettoria

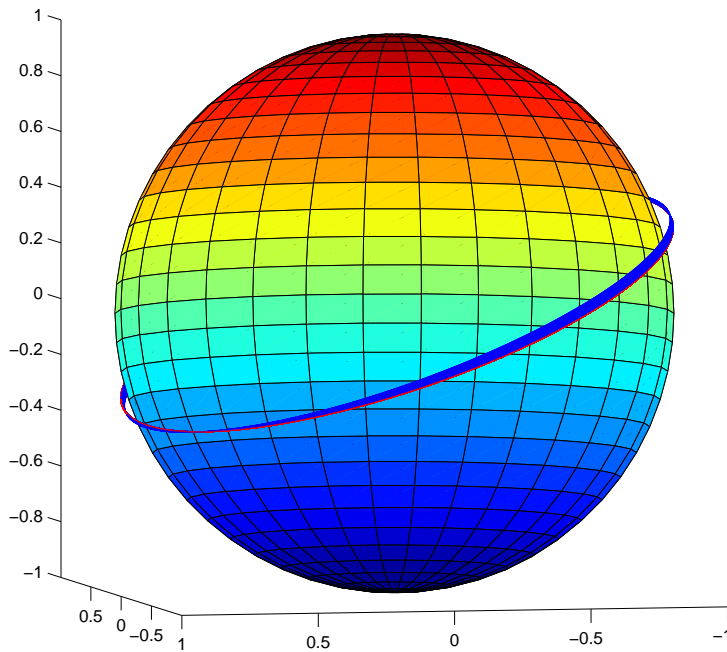


Figura 3.2: Particolare n°2 della traiettoria

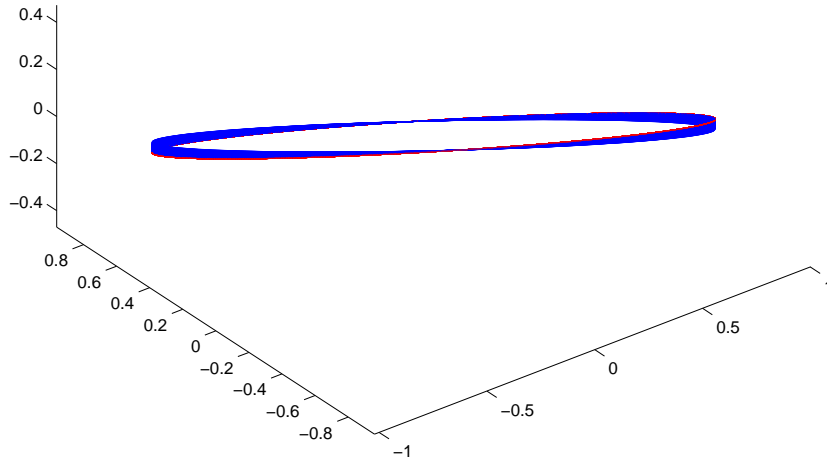


Figura 3.3: Particolare n°3 della traiettoria

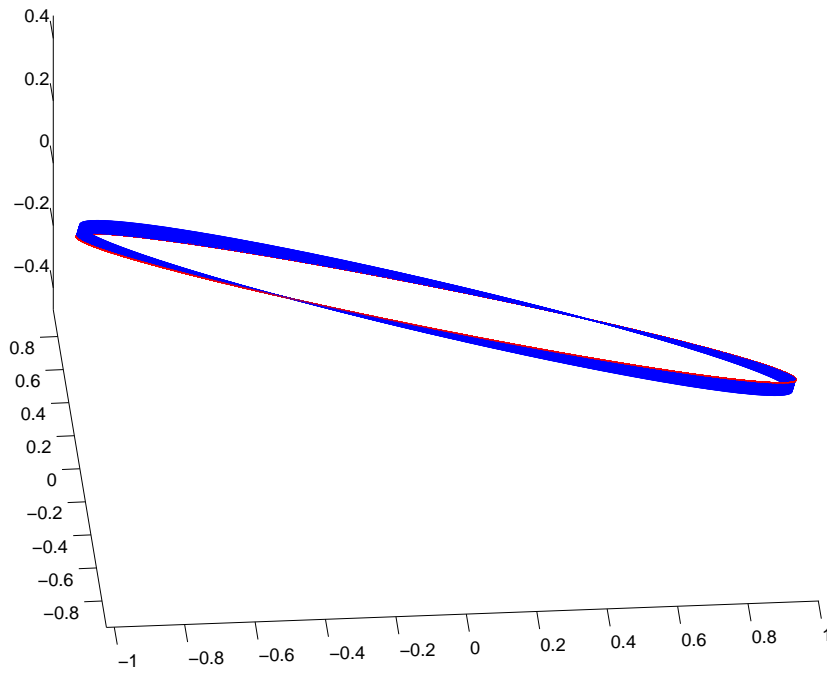


Figura 3.4: Particolare n°4 della traiettoria

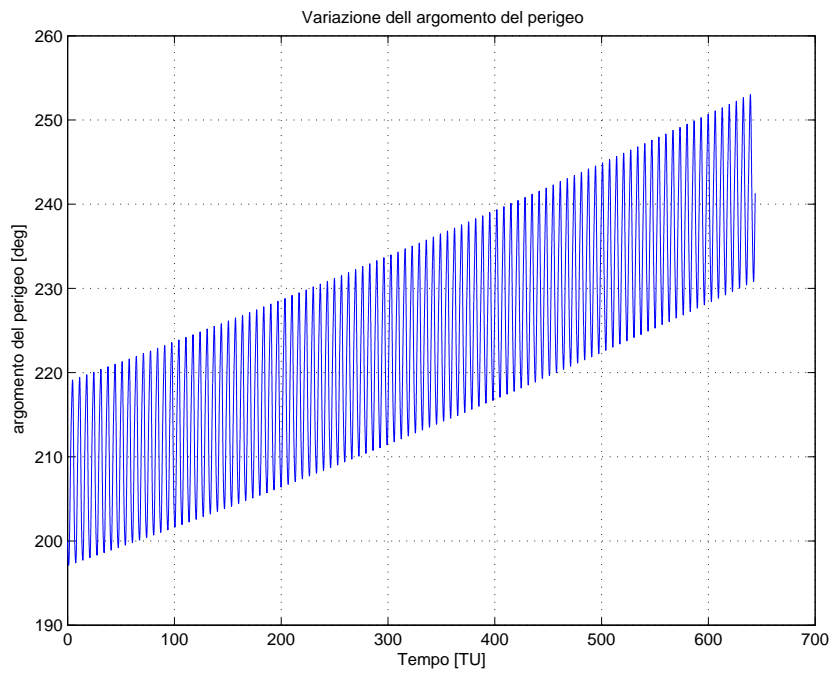


Figura 3.5: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

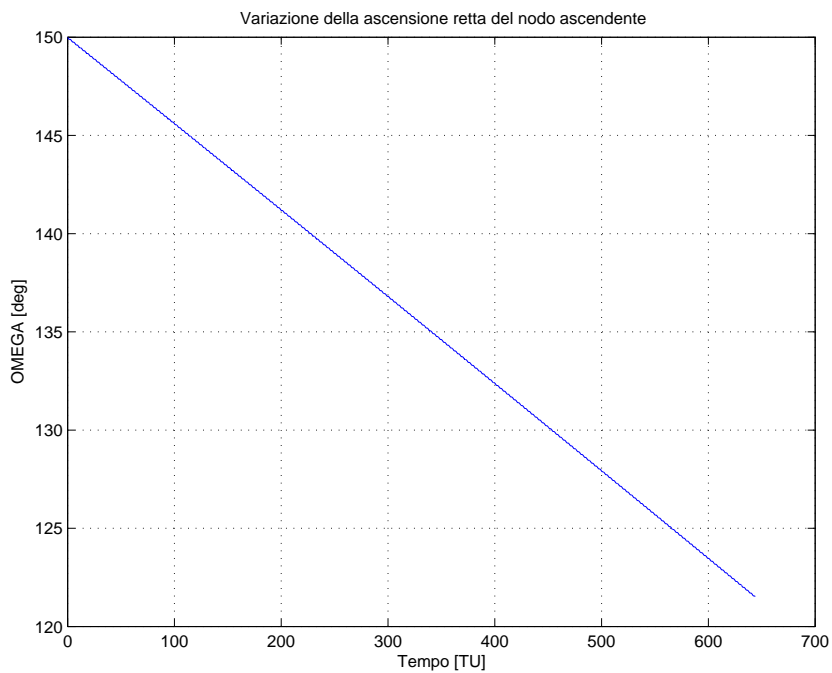


Figura 3.6: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

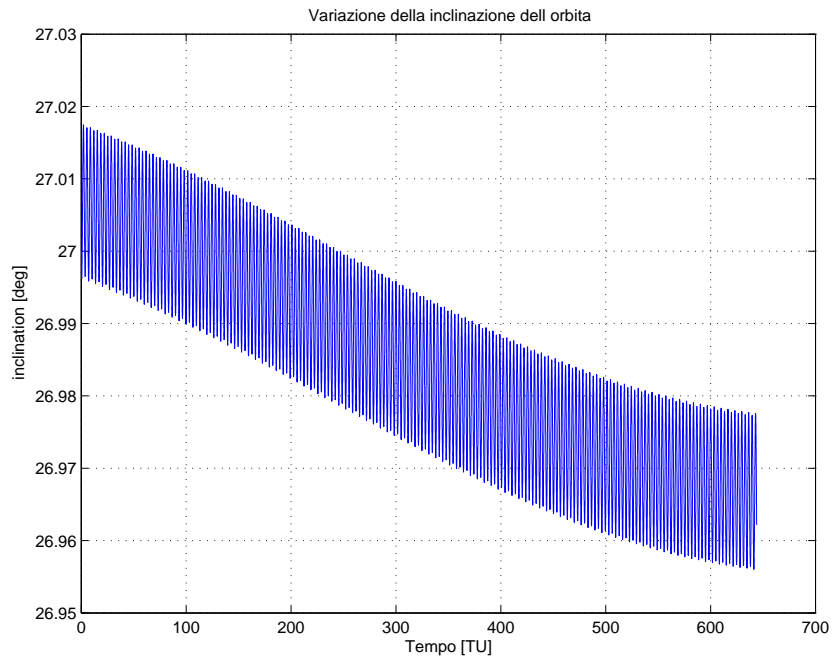


Figura 3.7: Variazione dell'inclinazione su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

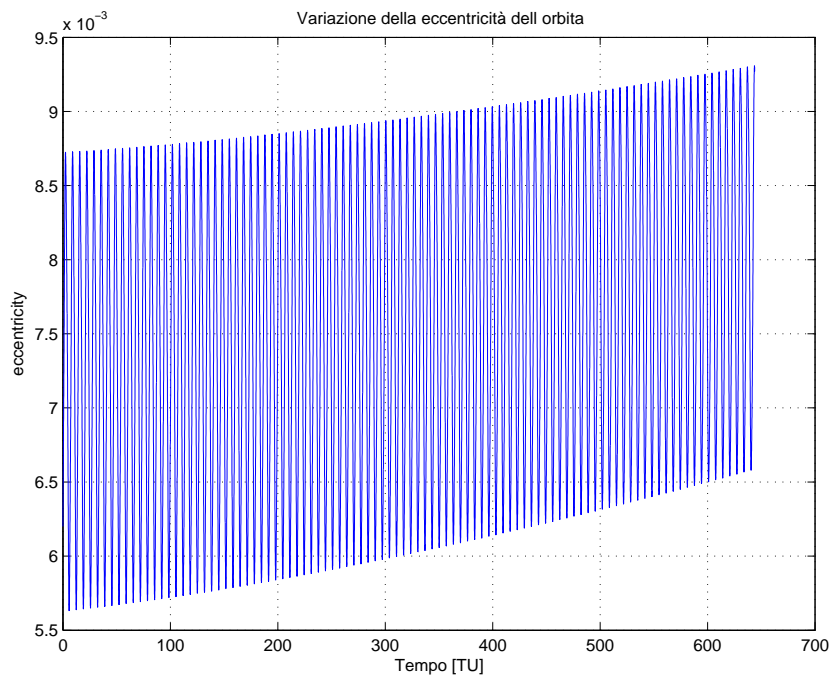


Figura 3.8: Variazione dell'eccentricità su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

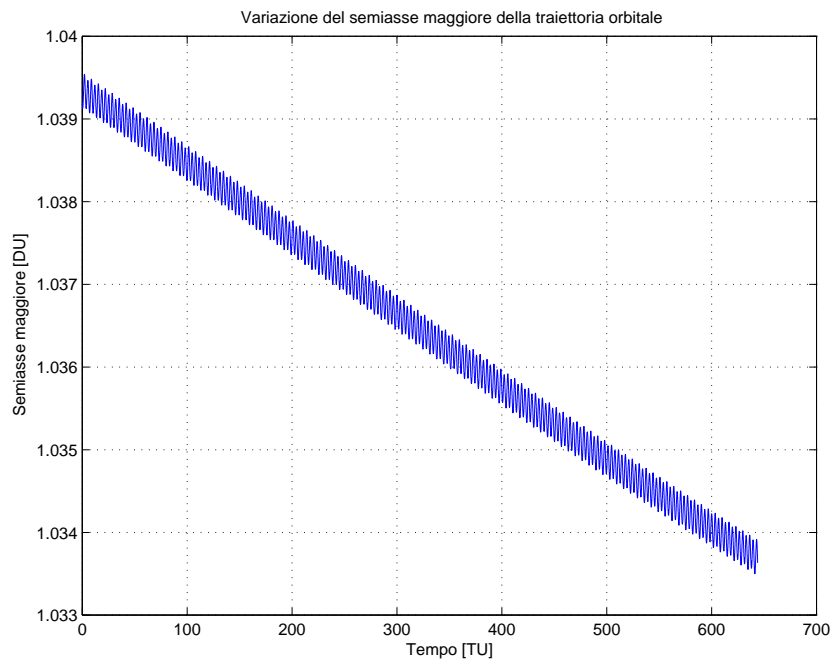


Figura 3.9: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

3.4 Simulazione n°2-Orbita di tipo Molnya

3.4.1 Introduzione

Il primo prototipo di satellite Molnya fu lanciato nel 1964, e da quella data più di 150 esemplari sono stati messi a punto.

I 16 satelliti operativi al momento sono suddivisi in due tipi e quattro gruppi distinti. Otto satelliti Molnya 1 sono divisi in due costellazioni di quattro veicoli ciascuna; entrambe le costellazioni consistono di quattro piani orbitali spazati di 90° , ma il nodo ascendente è anch'esso spostato di 90° .

Sebbene tale sistema supporti il *Russian Orbita Television network*, la funzione principale di questi satelliti è puramente militare.

3.4.2 Risultati della Simulazione

Nella tabella 3.2 vengono indicate le condizioni iniziali e tutti i dati in *input* al sistema.

Data (gregoriana) di partenza	12/07/2004
Data Giuliana di partenza	2,453,200
Attività solare	Bassa
Durata della simulazione [giorni]	23
Quota iniziale dell'orbita [km]	20178
Periodo orbitale [TU]	53.38
Numero di rivoluzioni	46
Semiasse maggiore iniziale [km]	26556
Eccentricità iniziale	0.74
Inclinazione iniziale [deg]	63.43
Argomento del perigeo iniziale [deg]	270
Nodo ascendente iniziale [deg]	189.96
Massa satellite [kg]	215
C_D	2.2
Area sezione trasversale [m^2]	2

Tabella 3.2: Parametri d'ingresso

I risultati della simulazione sono riportati nelle figure (3.10–3.16).
 Notare che la curva in rosso nelle figure 3.10–3.11 rappresenta la traiettoria kepleriana ideale (non perturbata).

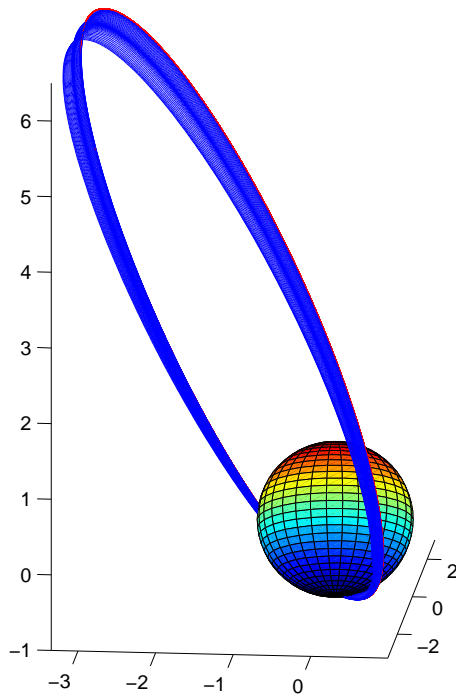


Figura 3.10: Particolare n°1 della traiettoria

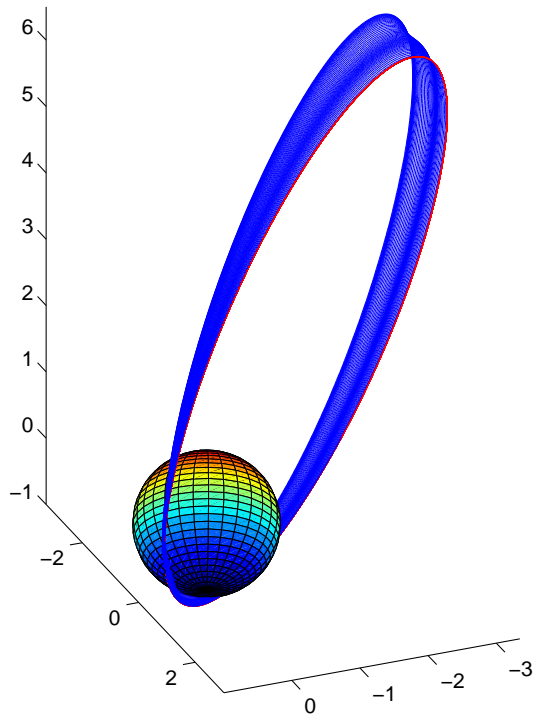


Figura 3.11: Particolare n°2 della traiettoria

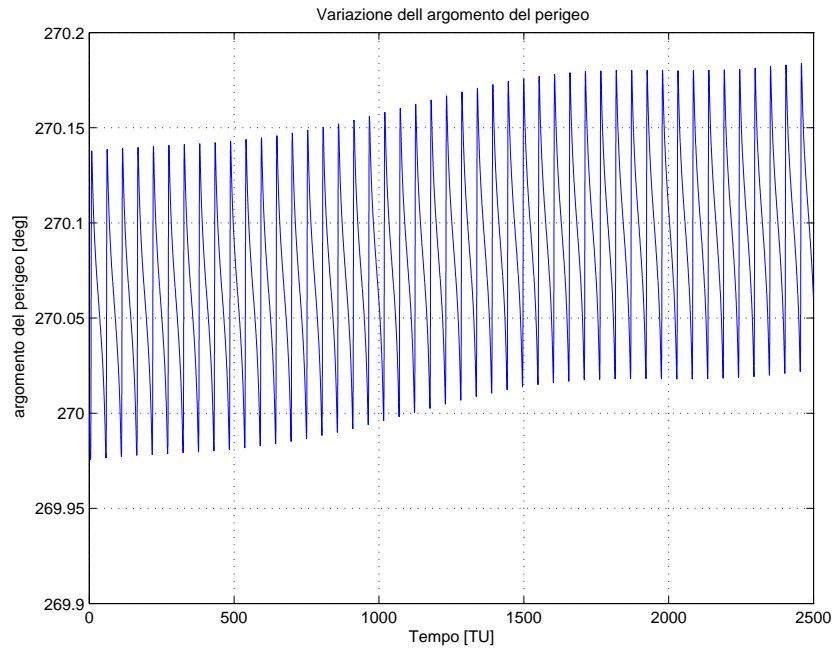


Figura 3.12: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

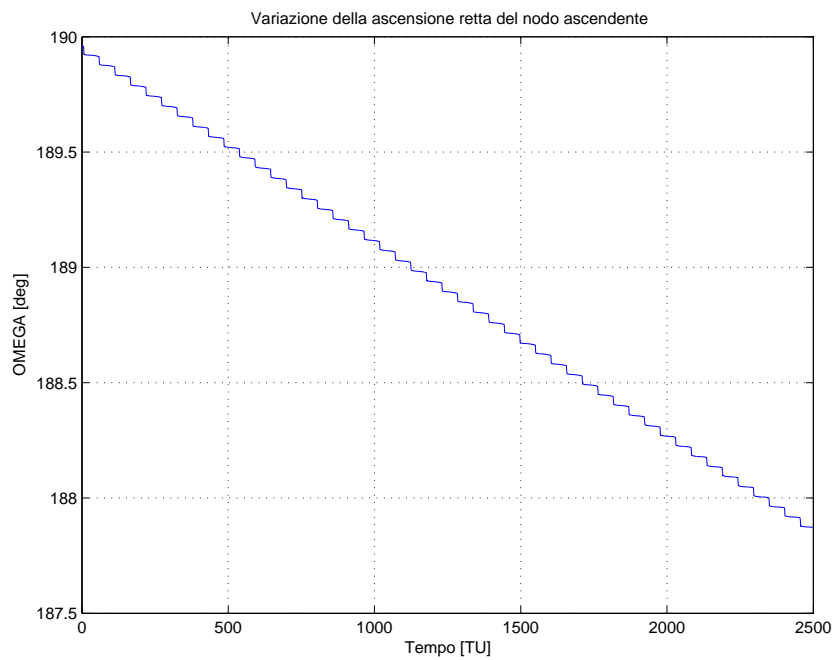


Figura 3.13: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

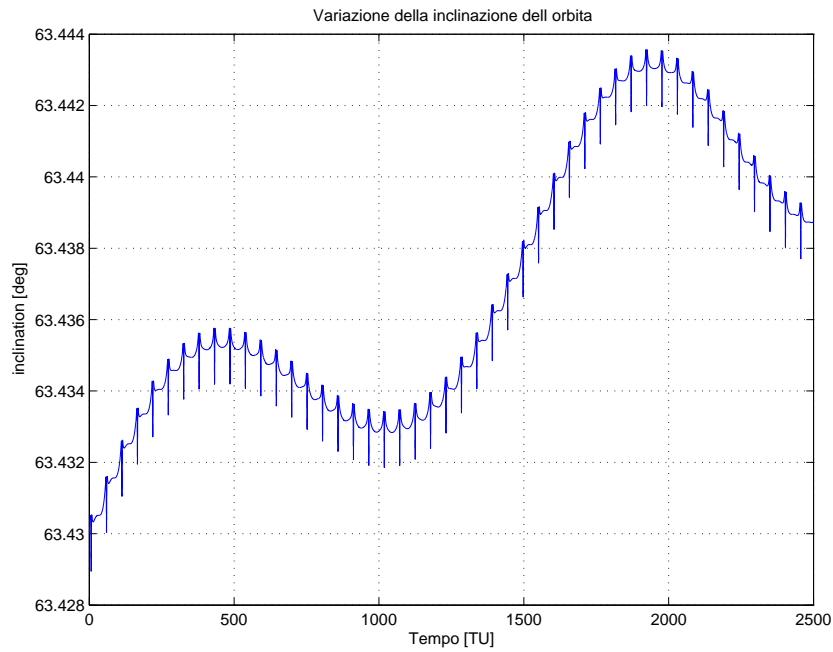


Figura 3.14: Variazione dell'inclinazione su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

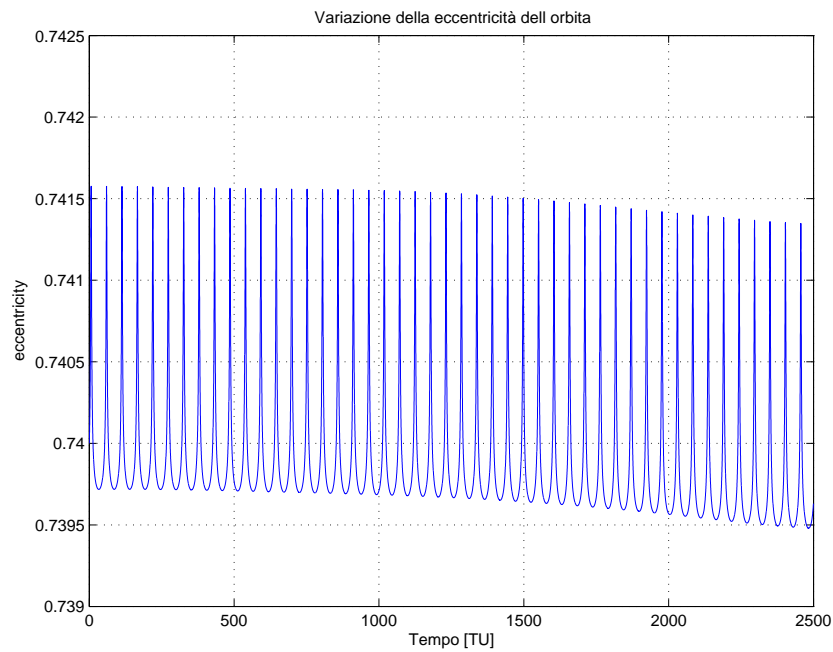


Figura 3.15: Variazione dell'eccentricità su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

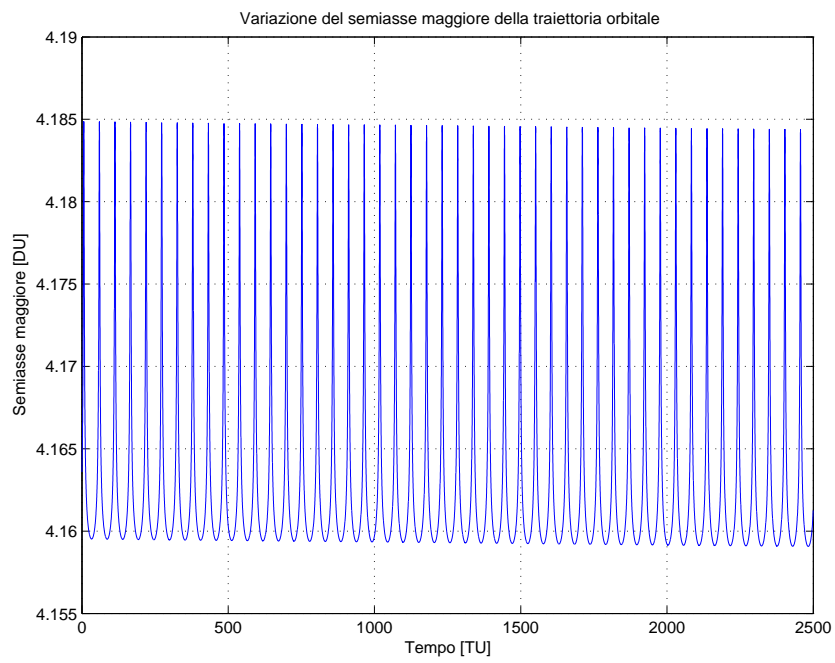


Figura 3.16: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

3.5 Simulazione n°3-Orbita Geostazionaria

3.5.1 Introduzione

L'idea dei satelliti per telecomunicazioni geosincroni fu attribuita ad Arthur C. Clark nel suo articolo sui *Extra-Terrestrial Relays* (1945). Il primo satellite Geostazionario fu il Syncom 2, lanciato nel 1963; oggi circa 300 satelliti di questo tipo vengono utilizzati come piattaforme per ogni genere di telecomunicazioni.

Tali satelliti hanno la particolarità di avere il proprio periodo orbitale pari a quello di rotazione della Terra, perciò ne vedono sempre la stessa faccia.

Le eccezionali caratteristiche di questa tipologia di orbite e le associate limitazioni di spazio, fanno sì che ci sia una regolamentazione a livello internazionale sull'assegnamento di longitudini individuali a paesi e agenzie interessate. Le finestre assegnate in genere coprono un *range* di $\pm 0.1^\circ$ in longitudine, che devono essere rispettate per evitare interferenze di segnale. Per fare ciò sono richieste periodiche manovre di *station-keeping*, tipicamente una alla settimana, per contrastare l'effetto delle perturbazioni dovute al Sole, alla Luna e alla Terra (vedi figure 3.17 e 3.18).

3.5.2 Risultati della Simulazione

Nella tabella 3.3 vengono indicate le condizioni iniziali e tutti i dati in *input* al sistema. I risultati della simulazione sono riportati nelle figure (3.17–3.23).

Data (gregoriana) di partenza	12/07/2004
Data Giuliana di partenza	2,453,200
Attività solare	Bassa
Durata della simulazione [giorni]	49.86
Quota iniziale dell'orbita [km]	35786
Periodo orbitale [TU]	106.78
Numero di rivoluzioni	50
Semiassa maggiore iniziale [km]	42164.145
Eccentricità iniziale	0.01
Inclinazione iniziale [deg]	0
Argomento del perigeo iniziale [deg]	200
Nodo ascendente iniziale [deg]	150
Massa satellite [kg]	215
C_D	2.2
Area sezione trasversale [m^2]	2

Tabella 3.3: Parametri d'ingresso

Notare che la curva in rosso nelle figure 3.17–3.18 rappresenta la traiettoria kepleriana ideale (non perturbata).

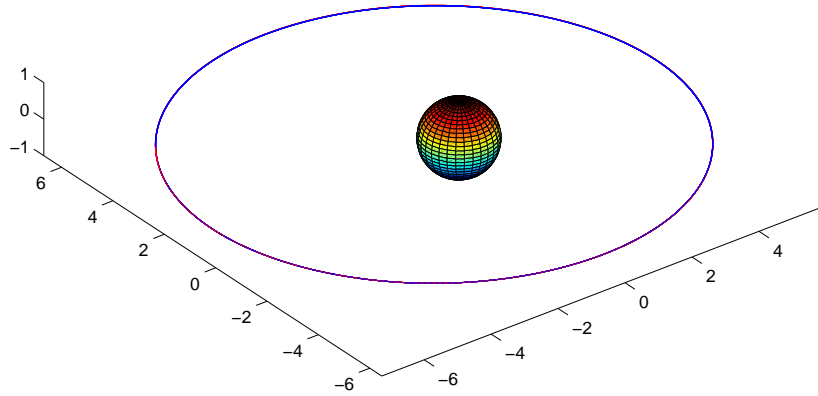


Figura 3.17: Particolare n°1 della traiettoria

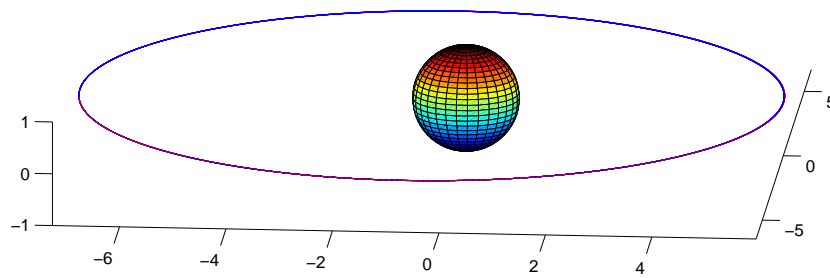


Figura 3.18: Particolare n°2 della traiettoria

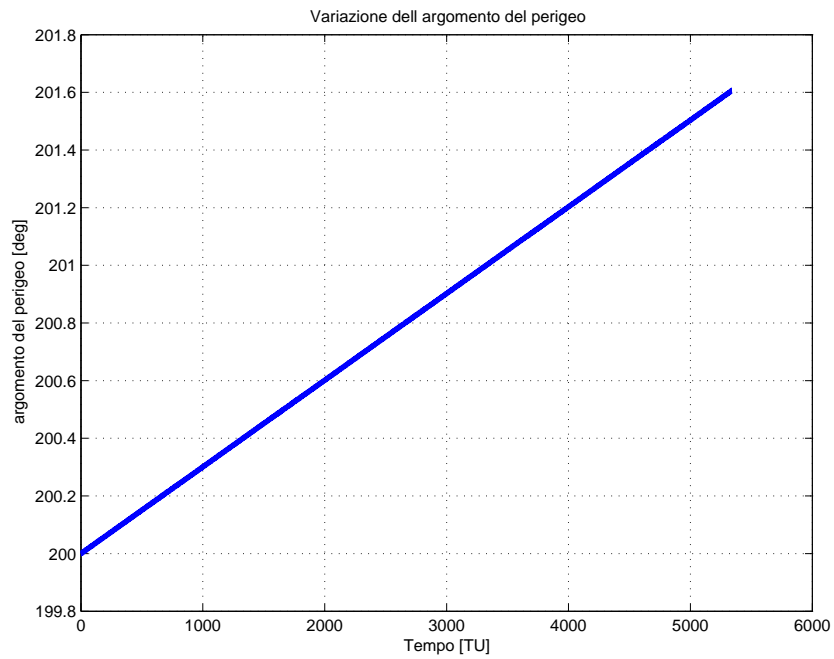


Figura 3.19: Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

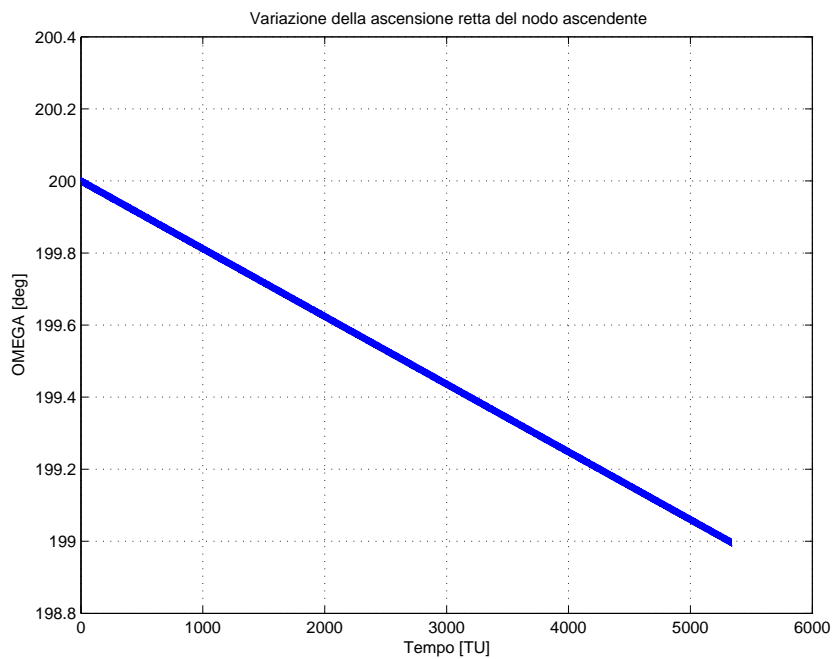


Figura 3.20: Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

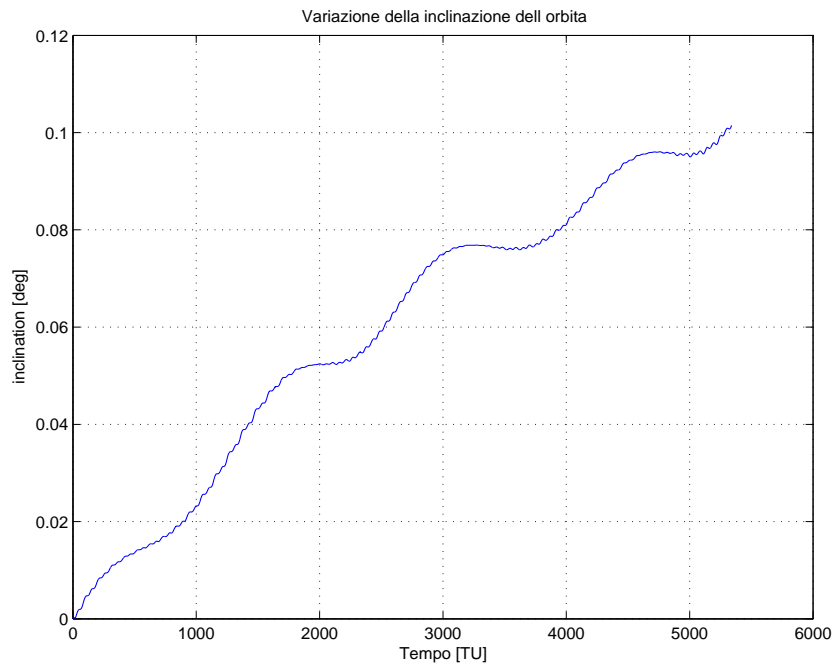


Figura 3.21: Variazione dell'inclinazione su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

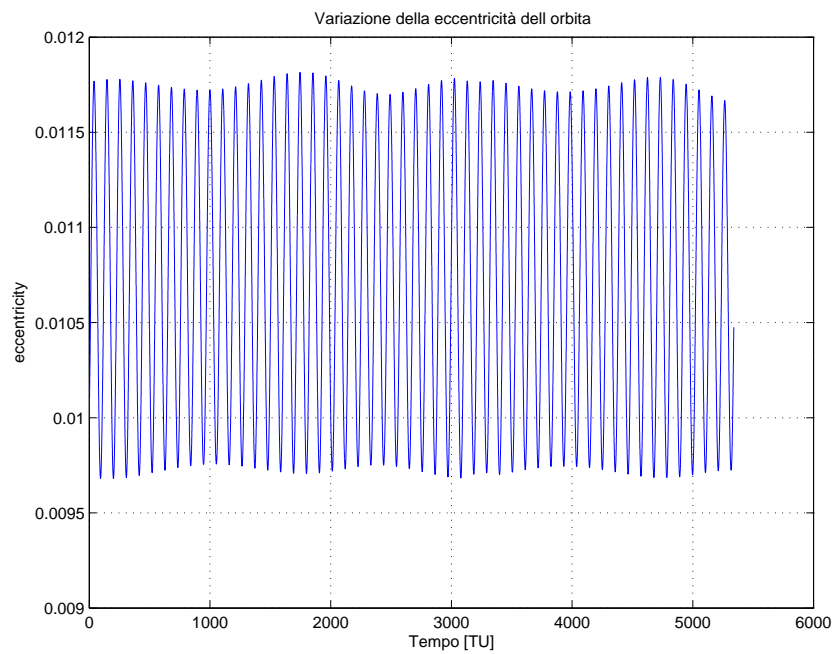


Figura 3.22: Variazione dell'eccentricità su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

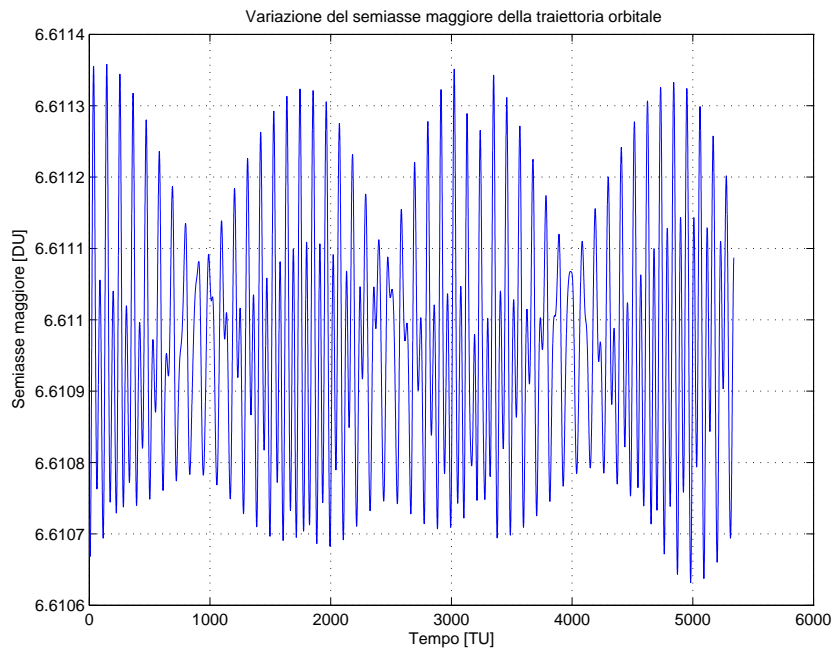


Figura 3.23: Variazione del semiasse maggiore su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali

4

Conclusioni e sviluppi futuri

4.1 Commenti e conclusioni

Procediamo al confronto dei risultati ottenuti con fonti autorevoli della letteratura. Analizziamo una ad una le tre configurazioni:

1. Orbita di tipo LEO.

Le perturbazioni che influenzano maggiormente l'orbita sono quelle dovute al campo gravitazionale terrestre e alla resistenza atmosferica; esse causano variazioni secolari importanti rispettivamente su (Ω, ω) ed (a) . Secondo [16] gli effetti secolari dovrebbero ammontare a:

$$\Delta\Omega_{grav} \approx -5.7^\circ/\text{day}$$

$$\Delta\omega_{grav} \approx 6.5^\circ/\text{day}$$

$$\Delta a_{atm} \approx -5 \text{ km/day}$$

Per contro, i risultati in *output* dal simulatore sono (vedi fig 3.5-3.6-3.9):

$$\Delta\Omega_{sim} \approx -4.7^\circ/\text{day}$$

$$\Delta\omega_{sim} \approx 6.82^\circ/\text{day}$$

$$\Delta a_{sim} \approx -5.86 \text{ km/day}$$

2. Orbita di tipo Molnya.

In questo caso i disturbi maggiori derivano dal campo gravitazionale terrestre e dalla presenza del Sole e della Luna; ognuna di esse comporta variazioni secolari rilevanti solo di Ω .

Sempre secondo [16] tale effetto secolare risulta:

$$\Delta\Omega \approx -0.2^\circ/\text{day}$$

Il risultato complessivamente ottenuto dal simulatore è (vedi fig 3.13):

$$\Delta\Omega_{Sim} \approx -0.13^\circ/\text{day}$$

che è leggermente inferiore, ma comunque decisamente accettabile.

3. Orbita GEO.

All'aumentare della quota le perturbazioni dovute allo schiacciamento dei poli terrestri diventano meno importanti rispetto all'attrazione di Sole e Luna; il risultato risulta in variazioni secolari di inclinazione, nodo ascendente e argomento del perigeo.

I riferimenti [18] e [19] affermano che:

$$\Delta\Omega \approx -0.018^\circ/\text{day}$$

$$\Delta\omega \approx 0.035^\circ/\text{day}$$

$$|\Delta i| \approx 1^\circ/\text{year}$$

I risultati ottenuti con il simulatore sono i seguenti(vedi fig 3.19–3.21):

$$\Delta\Omega_{Sim} \approx -0.0118^\circ/\text{day}$$

$$\Delta\omega_{Sim} \approx -0.0237^\circ/\text{day}$$

$$|\Delta i_{Sim}| \approx 0.75^\circ/\text{year}$$

che differiscono davvero di pochissimo rispetto a quelli provenienti dalla letteratura.

4.2 Sviluppi futuri

I risultati estrapolati da questo lavoro, abbastanza in linea con i dati disponibili in letteratura, saranno una buona base di partenza per chi, dopo di me, continuerà a sviluppare il simulatore orbitale, analizzando questa volta il moto del satellite intorno al suo centro di massa e cercando possibili soluzioni al problema del controllo d'assetto.

Unità canoniche

Il concetto di *canonical units* è particolarmente importante; esse servono a scalare le unità di un problema rispetto ad un determinato sistema di coordinate, al fine di evitare l'appesantimento dei calcoli. L'effetto complessivo sta nel fatto che i programmi sono più veloci e più accurati, ed inoltre permette ad enti differenti di utilizzare valori standard perchè le conversioni sono indipendenti dagli algoritmi matematici.

Le costanti che ci permettono di normalizzare le unità di misura sono i parametri fisici della Terra.

Definiamo per cominciare una unità di raggio terrestre, ER (*Earth Radius*), pari al raggio equatoriale R_{\oplus} della Terra, cioè:

$$ER \equiv R_{\oplus} \tag{A.1}$$

Il parametro gravitazionale è definito anch'esso come unità:

$$\frac{ER^3}{TU^2} \equiv \mu_{\oplus} \tag{A.2}$$

Queste definizioni forniscono solo due dei tre elementi necessari per completare un set di unità canoniche; l'ingrediente mancante è dato dall'unità di tempo, TU (*Time Unit*), che è definita come

$$TU \equiv \sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{\mu_{\oplus}}} \tag{A.3}$$

cioè il tempo impiegato da un ipotetico satellite per descrivere un angolo di un radiante su un'orbita sferica di raggio $r = R_{\oplus}$.

Se prendiamo i II membri delle (A.1) e (A.2) rispettivamente in (km^3) e (km^3/s^2) , possiamo definire TU in secondi.

Appendice **B**

Utilities

B.1 Misura del tempo - Data Giuliana

Il calendario civile, che misura il tempo in anni, mesi e giorni, è una conveniente scala di tempo per la vita quotidiana; non si presta tuttavia granchè bene a calcolare le differenze tra due date oppure una data dopo un certo intervallo di tempo.

Per questa ragione in Astrodinamica si usa la cosiddetta *Data Giuliana*.

La Data Giuliana (JD) rappresenta il numero di giorni a partire dal mezzogiorno del 1 Gennaio 4713 AC, includendo le frazioni di giorno, fornendo una scala temporale continua.

Per evitare di maneggiare numeri troppo elevati, spesso si fa ricorso alla *Data Giuliana Modificata* (MJD), che è legata alla precedente dalla relazione:

$$MJD = JD - 2,400,000.5 \quad (\text{B.1})$$

Notare che la MJD, a differenza della Data Giuliana, comincia a mezzanotte. La MJD è legata al nostro calendario civile dalla formula seguente:

$$MJD = B + DAY + \text{int}[30.6001(M + 12D + 1)] + \text{int}[365.25(YR - D)] - 679,006$$

in cui

$$D = \begin{cases} 0 & \text{se } M \geq 3 \\ 1 & \text{se } M < 3 \end{cases}$$

$$B = 2 + \text{int}[A/4] - A$$

$$A = \text{int}[(YR - D)/100]$$

dove YR è l'anno, M è il mese (da 1 – 12) e DAY è chiaramente il giorno. Notare che *int* rappresenta la parte intera. La figura (B.1) riporta la MJD del primo giorno di ogni mese fino al 2020.

Year	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
1975	42412	42443	42471	42502	42532	42563	42593	42624	42655	42685	42716	42746
1976	42777	42808	42837	42868	42898	42929	42959	42990	43021	43051	43082	43112
1977	43143	43174	43202	43233	43263	43294	43324	43355	43386	43416	43447	43477
1978	43508	43539	43567	43598	43628	43659	43689	43720	43751	43781	43812	43842
1979	43873	43904	43932	43963	43993	44024	44054	44085	44116	44146	44177	44207
1980	44238	44269	44298	44329	44359	44390	44420	44451	44482	44512	44543	44573
1981	44604	44635	44663	44694	44724	44755	44785	44816	44847	44877	44908	44938
1982	44969	45000	45028	45059	45089	45120	45150	45181	45212	45242	45273	45303
1983	45334	45365	45393	45424	45454	45485	45515	45546	45577	45607	45638	45668
1984	45699	45730	45759	45790	45820	45851	45881	45912	45943	45973	46004	46034
1985	46065	46096	46124	46155	46185	46216	46246	46277	46308	46338	46369	46399
1986	46430	46461	46489	46520	46550	46581	46611	46642	46673	46703	46734	46764
1987	46795	46826	46854	46885	46915	46946	46976	47007	47038	47068	47099	47129
1988	47160	47191	47220	47251	47281	47312	47342	47373	47404	47434	47465	47495
1989	47526	47557	47585	47616	47646	47677	47707	47738	47769	47799	47830	47860
1990	47891	47922	47950	47981	48011	48042	48072	48103	48134	48164	48195	48225
1991	48256	48287	48315	48346	48376	48407	48437	48468	48499	48529	48560	48590
1992	48621	48652	48681	48712	48742	48773	48803	48834	48865	48895	48926	48956
1993	48987	49018	49046	49077	49107	49138	49168	49199	49230	49260	49291	49321
1994	49352	49383	49411	49442	49472	49503	49533	49564	49595	49625	49656	49686
1995	49717	49748	49776	49807	49837	49868	49898	49929	49960	49990	50021	50051
1996	50082	50113	50142	50173	50203	50234	50264	50295	50326	50356	50387	50417
1997	50448	50479	50507	50538	50568	50599	50629	50660	50691	50721	50752	50782
1998	50813	50844	50872	50903	50933	50964	50994	51025	51056	51086	51117	51147
1999	51178	51209	51237	51268	51298	51329	51359	51390	51421	51451	51482	51512
2000	51543	51574	51603	51634	51664	51695	51725	51756	51787	51817	51848	51878
2001	51909	51940	51968	51999	52029	52060	52090	52121	52152	52182	52213	52243
2002	52274	52305	52333	52364	52394	52425	52455	52486	52517	52547	52578	52608
2003	52639	52670	52698	52729	52759	52790	52820	52851	52882	52912	52943	52973
2004	53004	53035	53064	53095	53125	53156	53186	53217	53248	53278	53309	53339
2005	53370	53401	53429	53460	53490	53521	53551	53582	53613	53643	53674	53704
2006	53735	53766	53794	53825	53855	53886	53916	53947	53978	54008	54039	54069
2007	54100	54131	54159	54190	54220	54251	54281	54312	54343	54373	54404	54434
2008	54465	54496	54525	54556	54586	54617	54647	54678	54709	54739	54770	54800
2009	54831	54862	54890	54921	54951	54982	55012	55043	55074	55104	55135	55165
2010	55196	55227	55255	55286	55316	55347	55377	55408	55439	55469	55500	55530
2011	55561	55592	55620	55651	55681	55712	55742	55773	55804	55834	55865	55895
2012	55926	55957	55986	56017	56047	56078	56108	56139	56170	56200	56231	56261
2013	56292	56323	56351	56382	56412	56443	56473	56504	56535	56565	56596	56626
2014	56657	56688	56716	56747	56777	56808	56838	56869	56900	56930	56961	56991
2015	57022	57053	57081	57112	57142	57173	57203	57234	57265	57295	57326	57356
2016	57387	57418	57447	57478	57508	57539	57569	57600	57631	57661	57692	57722
2017	57753	57784	57812	57843	57873	57904	57934	57965	57996	58026	58057	58087
2018	58118	58149	58177	58208	58238	58269	58299	58330	58361	58391	58422	58452
2019	58483	58514	58542	58573	58603	58634	58664	58695	58726	58756	58787	58817
2020	58848	58879	58908	58939	58969	59000	59030	59061	59092	59122	59153	59183

Figura B.1: Data Giuliana Modificata al giorno 0.0 di ogni mese dal 1975 al 2020

B.2 Costanti Astrodinamiche

La figura B.2 e la tabella C.1 riportano molte grandezze che possono risultare utili ai fini computazionali.

	Moon	Mercury	Venus	Earth	Mars
Semimajor axis, AU*	60.27 ER	0.387 098 309	0.723 329 82	1.000 001 017 8	1.523 679 34
km	384,400	57,909,083	108,208,601	149,598,023	227,939,186
Eccentricity	0.054 90	0.205 631 752	0.006 771 882	0.016 708 617	0.093 400 620
Inclination (°)	5.145 396	7.004 986 25	3.394 466 19	0.000 000 00	1.849 726 48
Longitude of ascending node (°)	0.0	48.330 893 04	76.679 920 19	0.000 000 00	49.558 093 21
Longitude of perihelion (°)	0.0	77.456 119 04	131.563 707 24	102.937 348 08	336.060 233 98
True longitude (°)	0.0	252.250 905 51	181.979 800 84	100.466 448 51	355.433 274 63
Orbital period (yrs)	0.0	0.240 844 45	0.615 182 57	0.999 978 62	1.880 711 05
Orbital velocity(km/s)	0.0	47.8725	35.0214	29.7859	24.1309
Equatorial radius (km)	1738.	2439.	6052.	6378.1363	3397.2
Reciprocal flattening				0.003 353 813 1	0.006 476 30
Gravitational parameter (km ³ /s ²)	4902.799	2.2032×10 ⁴	3.257×10 ⁵	3.986 004 415 ×10 ⁵	4.305×10 ⁴
Mass ($m_{\oplus}=1$)	0.012 30	0.055 274 3	0.8150	1.0	0.107 44
Mass (kg)	7.3483×10 ²²	3.3022×10 ²³	4.869×10 ²⁴	5.9742×10 ²⁴	6.4191×10 ²³
Rotation (days)	27.321 66	58.6462	-243.01	0.997 269 68	1.025 956 75
Inclination of Equator to orbit (°)	6.68	0.0	177.3	23.45	25.19
J_2	0.000 202 7	0.000 06	0.000 027	0.001 082 626 9	0.001 964
J_3				-0.000 002 532 3	0.000 036
J_4				-0.000 001 620 4	
Density (gm/cm ³)	3.34	5.43	5.24	5.515	3.94

*1 AU = 149,597,870 km.

Figura B.2: Costanti Planetarie medie per l'Epoca J2000

Quantità	Valore	Riferimenti
<i>Time</i>		
MJD(J2000)	51544.5	IAU 1976 (Seidelmann 1992)
TT-TAI	32.184s	IAU 1991 (Seidelmann 1992)
GPS-TAI	-19s	Hofmann-Wellenhof 1997
<i>Universal</i>		
c	299792458 m/s	IAU 1976 (Seidelmann 1992)
G	$6.673 \cdot 10^{-20} \text{ km}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$	Cohen e Taylor 1987
<i>Earth</i>		
GM_{\oplus}	$398600.4415 \text{ km}^3/\text{s}^2$	JGM-3
J_2	0.00108263	JGM-3
R_{\oplus}	6378.137 km	WGS-84 (NIMA 1997)
f	$1/298.257223563$	WGS-84 (NIMA 1997)
ω_{\oplus}	$0.7292115 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$	Moritz 1980
<i>Sun</i>		
GM_{\odot}	$1.32712440018 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$	DE405 (Standish 1998)
AU	149597870.691 km	DE405 (Standish 1998)
R_{\odot}	$6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$	Seidelmann 1992
P_{\odot}	$4.560 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$	IERS 1996 (McCarthy 1996)
<i>Moon</i>		
GM_{ζ}	$4902.801 \text{ km}^3/\text{s}^2$	DE405 (Standish 1998)
a_{ζ}	384400 km	Seidelmann 1992
R_{ζ}	1738 km	Seidelmann 1992
<i>Satellites</i>		
r_{GEO}	4902.801 km	$23^h 56^m 04^s$ orbital period
v_{GEO}	384400 km/s	
r_{GPS}	1738 km	$11^h 58^m 02^s$ orbital period
v_{GPS}	4902.801 km/s	
r_{LEO}	384400 km	300...1500 km altitude
v_{LEO}	1738 km/s	

Tabella B.1: Costanti Astrodinamiche

B.3 Effemeridi

B.3.1 Effemeridi del Sole

In molte applicazioni si richiede la conoscenza del vettore posizione che va dalla Terra al Sole.

Effemeridi molto precise sono disponibili nei *Database* dei maggiori enti spaziali; tuttavia, spesso risulta più conveniente creare degli algoritmi da inserire

nei programmi di calcolo usando formule un pò meno precise prese dagli Almanacchi di Astrodinamica.

La figura B.3 mostra la geometria necessaria per inquadrare il problema (vedi [16]). Per cominciare si trova il numero di secoli *giuliani* T_{UT1} a partire dal 1 Gennaio 2000 (J2000) con la seguente relazione:

$$T_{UT1} = \frac{JD_{UT1} - 2,451,545}{36525} \quad (\text{B.2})$$

dove JD_{UT1} è la data giuliana standard.

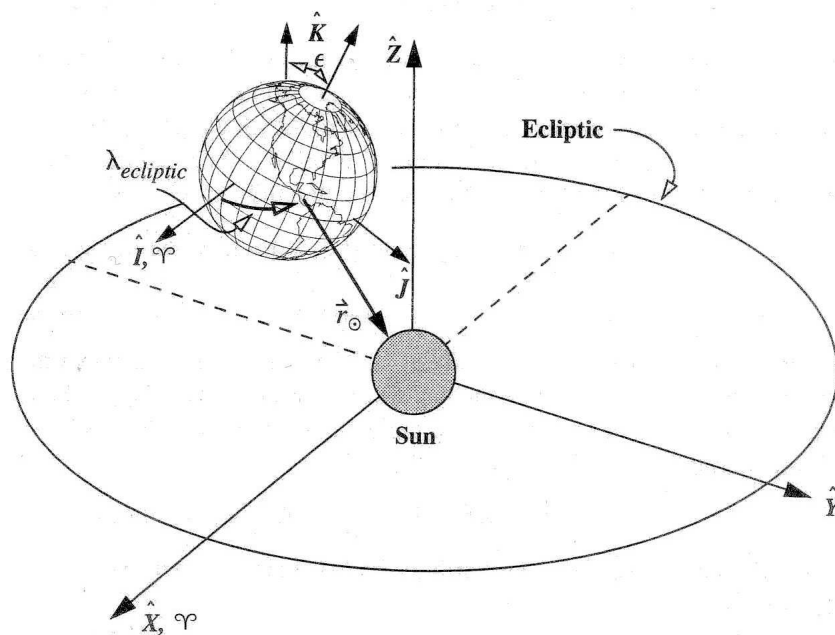


Figura B.3: Geometria per il vettore posizione del Sole

Dopo di chè si calcola la longitudine media del Sole $\lambda_{M_{\odot}}$ in questo modo:

$$\lambda_{M_{\odot}} = | 280.4606184^{\circ} + 36,000.77005361 T_{UT1} |_{mod360} \quad (B.3)$$

Si pone in prima stima $T_{TDB} \cong T_{UT1}$ ($T_{TDB} = \text{Barycentric Dynamical Time}$) e si calcola l'anomalia media del Sole:

$$M_{\odot} = | 357.5277233^{\circ} + 35,999.05034 T_{TDB} |_{mod360} \quad (B.4)$$

La longitudine e l'obliquità dell'eclittica, rispettivamente λ_{ecl} e ϵ , e il modulo del vettore posizione cercato r_{\odot} risultano pari a

$$\lambda_{ecl} = \lambda_{M_{\odot}} + 1.914666471^{\circ} \sin(M_{\odot}) + 0.019994643 \sin(2M_{\odot}) \quad (B.5)$$

$$\epsilon = 23.439291^{\circ} - 0.0130042 T_{TDB} \quad (B.6)$$

$$r_{\odot} = 1.000140612 - 0.016708617 \cos(M_{\odot}) - 0.000139589 \cos(2M_{\odot}) \quad (B.7)$$

Perciò il vettore posizione del Sole è il seguente:

$$\vec{r}_{\odot} = \begin{bmatrix} r_{\odot} \cos(\lambda_{ecl}) \\ r_{\odot} \sin(\lambda_{ecl}) \cos(\epsilon) \\ r_{\odot} \sin(\lambda_{ecl}) \sin(\epsilon) \end{bmatrix}$$

B.3.2 Effemeridi della Luna

Analogamente a quanto fatto per il Sole, si cerca di trovare un'algoritmo di prima stima per il calcolo del vettore posizione che va dalla Terra alla Luna.

La figura B.4 mostra la geometria del problema (vedi [16]).

Le formule sono le seguenti:

$$T_{TDB} \approx T_{UT1} = \frac{JD_{UT1} - 2,451,545}{36525} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ecl} = & 218.32^\circ + 481,267.8813T_{TDB} + 6.29 \sin(134.9 + 477,198.85T_{TDB}) \\ & - 1.27 \sin(259.2 - 413,335.38T_{TDB}) + 0.66 \sin(235.7 + 890,534.23T_{TDB}) \\ & + 0.21 \sin(269.9 + 954,397.70T_{TDB}) - 0.19 \sin(357.5 + 35,999.05T_{TDB}) \\ & - 0.11 \sin(186.6 + 966,404.05T_{TDB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{ecl} = & 5.13^\circ \sin(93.3 + 483,202.03T_{TDB}) + 0.28 \sin(228.2 + 960,400.87T_{TDB}) \\ & - 0.28^\circ \sin(318.3 + 6003.18T_{TDB}) - 0.17 \sin(217.6 - 407,332.20T_{TDB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho = & 0.9508^\circ + 0.0518 \cos(134.9 + 477,198.85T_{TDB}) \\ & + 0.0095 \cos(259.2 - 413,335.38T_{TDB}) + 0.0078 \cos(235.7 + 890,534.23T_{TDB}) \\ & + 0.0028 \cos(269.9 + 954,397.70T_{TDB}) \end{aligned}$$

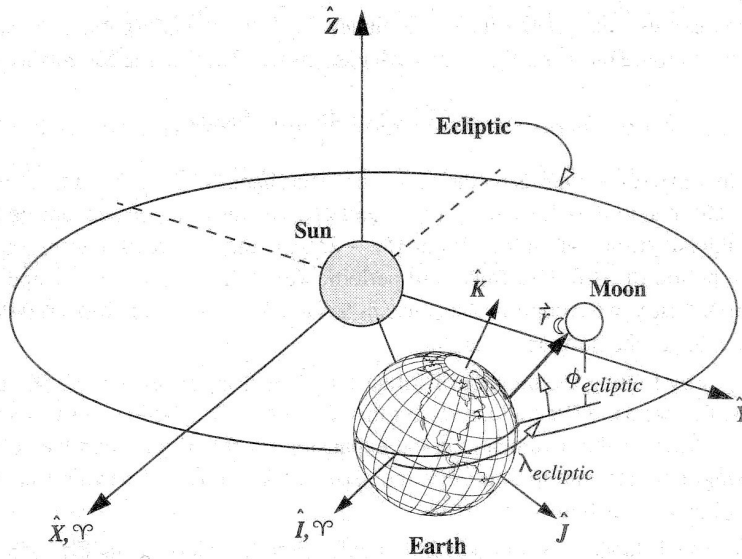


Figura B.4: Geometria per il vettore posizione della Luna

dove

ϕ_{ecl} latitudine dell'eclittica
 φ angolo di parallasse
 λ_{ecl} longitudine dell'eclittica

In definitiva il vettore posizione cercato è il seguente:

$$\vec{r}_{\zeta} = r_{\zeta} \begin{bmatrix} \cos(\lambda_{ecl}) \cos(\phi_{ecl}) \\ \sin(\lambda_{ecl}) \cos(\epsilon) \cos(\phi_{ecl}) - \sin(\epsilon) \sin(\phi_{ecl}) \\ \sin(\lambda_{ecl}) \sin(\epsilon) \cos(\phi_{ecl}) + \cos(\epsilon) \sin(\phi_{ecl}) \end{bmatrix}$$

dove

$$r_{\zeta} = \frac{1}{\sin \varphi} \tag{B.9}$$

Bibliografia

- [1] AA.VV., “Space Engineering,” Tech. Rep. ECSS-E-10-04A, ECSS European Cooperation for Space Standardization, ESA Publication Division 2200 AG Noordwijk (The Netherlands), 21 January 2000.
- [2] Hinteregger, H. e et alii, “Solar XUV Radiation and Neutral Particle Distribution in July 1963 Thermosphere,” *Space Research V*, 1965, pp. 1175–1190.
- [3] Jacchia, L., “Solar Effects on the Acceleration of Artificial Satellites,” *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report*, , No. 29, 1959.
- [4] Roemer, M., “Geomagnetic Activity Effects and 27-day Variation. Response Time of the Thermosphere and Lower Exosphere,” *Space Research VII*, 1967, pp. 1091–1099.
- [5] Roemer, M., “Reaction Time of the Upper Atmosphere within the 27-day Variation,” Tech. Rep. 68-08, Forschungsberichte der Astronomischen Institute, Bonn, 1968.
- [6] Newton, G., “Latitudinal Dependence of the Diurnal Density Variation,” *J. Geophys. Res.*, Vol. 75, 1970, pp. 5510–5516.
- [7] Jacchia, L. e Slowey, J., “Diurnal and Seasonal-Latitudinal Variations in the Upper Atmosphere Density and Temperature,” *Planet. Space Sci.*, Vol. 16, 1968, pp. 509–524.
- [8] King-Hele, D. e Walker, D., “Air Density at Heights Near 180 km in 1968 and 1969, From the Orbit of 1967-31A,” Tech. Rep. 70084, Royal Aircraft Establishment, 1970.
- [9] Champion, K., “Variations with Season and Latitude of Density, Temperature and Composition in the Lower Thermosphere,” *Space Research VII*, 1967, pp. 1101–1118.

- [10] Montenbruck, O. e Gill, E., *Satellite Orbits*, Springer, 2001.
- [11] Wilson, J. e et alii, "Solar Cycle Variation and Application to the Space Radiation Environment," Tech. Rep. TP-1999-209369, NASA, September 1999.
- [12] Tsyganenko, N., "A Magnetospheric Magnetic Field Model with a Warped Tail Current Sheet," *Planet. Space Sci.*, Vol. 37, 1989, pp. 5–20.
- [13] Tsyganenko, N. e Stern, D., "Modeling the Global Magnetic Field of the Large-Scale Birkeland Current Systems," *J. Geophys. Res.*, Vol. 101, 1996, pp. 27187–27198.
- [14] Olsen, W. e Pfitzer, K., "A Quantitative Model of the Magnetospheric Magnetic Field," *J. Geophys. Res.*, Vol. 79, 1974, pp. 3739.
- [15] Vette, J., "The AE-8 Trapped Electron Model Environment," Tech. Rep. 91-24, NSSDC/WDC-A-R&S, 1991.
- [16] Vallado, A., *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, McGraw-Hill, 1997.
- [17] Mengali, G., *Meccanica del Volo Spaziale*, Edizioni Plus, Lungarno Pacinotti 43, 2001.
- [18] Chobotov, V., *Orbital Mechanics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., July 1996.
- [19] Larson, W. e Wertz, J., *Space Mission Analysis and Design*, Microcosm, Inc., September 1999.

Elenco delle figure

1.1	Suddivisione convenzionale dell'atmosfera in fasce	4
1.2	Variazione del <i>Number Density</i> nei principali costituenti dell'atmosfera in base alla quota, per un valore della temperatura esosferica fissato a 1000 K.	5
1.3	Variazione di $F_{10.7}$ con il ciclo solare	11
1.4	Valori di riferimento degli indici di flusso solare e geomagnetico	12
1.5	Coefficienti polinomiali (c_{ij}) del modello atmosferico Jacchia 1971	14
1.6	Temperatura atmosferica in funzione della quota e del ciclo solare	15
1.7	Densità atmosferica in funzione della quota e del ciclo solare .	15
1.8	Pressione atmosferica in funzione della quota e del ciclo solare	16
1.9	Armoniche zonali	19
1.10	Armoniche settoriali	19
1.11	Armoniche tesserali	20
1.12	Parametri vincolanti del modello	21
1.13	Valori dei coefficienti normalizzati \bar{C}_{nm} fino ad $n = 9$	21
1.14	Valori dei coefficienti normalizzati \bar{S}_{nm} fino ad $n = 9$	21
1.15	Potenziale gravitazionale in funzione della quota	22
1.16	Cicli solari	24
1.17	Predizione del ciclo solare attuale	25
1.18	Il campo geomagnetico	26
1.19	Intensità del campo magnetico in funzione della quota con (α_{sat} e δ_{sat}) fissati	28

1.20	Potenziale geomagnetico in funzione della quota con (α_{sat} e δ_{sat}) fissati	29
1.21	Intensità del campo geomagnetico a 400 km di quota secondo il modello IGRF-95	29
1.22	Risultati dei modelli di alta quota che mostrano la variazione stagionale della diurna distorsione del campo geomagnetico . .	30
1.23	Schema delle coordinate di McIlwain	32
1.24	Regioni della Magnetosfera	34
1.25	Influenza del vento solare sulla Magnetosfera terrestre	35
1.26	Rappresentazione del moto composto delle particelle cariche intrappolate nel campo magnetico terrestre	35
1.27	Le due fasce di Van Allen	36
1.28	Curve di livello del flusso di protoni in attività solare minima .	38
1.29	Curve di livello del flusso di protoni in attività solare massima	39
1.30	Curve di livello del flusso di elettroni in attività solare minima	39
1.31	Curve di livello del flusso di elettroni in attività solare massima	40
1.32	Flusso di elettroni generato dal modello AE-8	40
1.33	Flusso di elettroni generato dal modello AE-8	41
1.34	Flusso di protoni generato dal modello AP-8	41
1.35	Flusso di protoni generato dal modello AP-8	42
1.36	Estensione nello spazio della fascia elettronica di Van Allen . .	42
1.37	Estensione nello spazio della fascia protonica di Van Allen . .	43
2.1	Componenti dell'accelerazione gravitazionale perturbativa al variare della quota con (λ, δ) fissati. [δ = declinazione del satellite]	47
2.2	Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale	48
2.3	Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale	48
2.4	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale . .	49
2.5	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale . .	49

2.6	Variazione dell'argomento del perigeo per effetto del solo campo gravitazionale su un'orbita di tipo Molnya ($i_{crit} = 63.43^\circ$)	50
2.7	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto del solo campo gravitazionale	50
2.8	Arretramento verso Est della linea dei nodi a causa dello schiacciamento ai poli terrestri	51
2.9	Geometria del modello a 3 corpi	53
2.10	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare	55
2.11	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare	56
2.12	Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare	56
2.13	Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare	57
2.14	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione solare	57
2.15	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare	58
2.16	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare	59
2.17	Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare	59
2.18	Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare	60
2.19	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto dell'attrazione lunare	60
2.20	Forza dovuta alla pressione di radiazione solare per elementi di superficie perfettamente assorbenti ($\varepsilon = 0$) e perfettamente riflettenti ($\varepsilon = 1$)	62
2.21	Modello d'ombra canonico	64

2.22	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare	67
2.23	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare	67
2.24	Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare	68
2.25	Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare	68
2.26	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della pressione di radiazione solare	69
2.27	Schema delle forze aerodinamiche agenti sulla sonda	71
2.28	Variazione del numero di Knudsen con la quota e le dimensioni del satellite	72
2.29	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica .	72
2.30	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica	73
2.31	Variazione dell'inclinazione su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica	73
2.32	Variazione dell'eccentricità su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica	74
2.33	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita quasi-circolare a 250 km di quota per effetto della sola resistenza atmosferica .	74
3.1	Particolare n°1 della traiettoria	80
3.2	Particolare n°2 della traiettoria	80
3.3	Particolare n°3 della traiettoria	81
3.4	Particolare n°4 della traiettoria	81
3.5	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	82
3.6	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	82

3.7	Variazione dell'inclinazione su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	83
3.8	Variazione dell'eccentricità su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	83
3.9	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita LEO a 250 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	84
3.10	Particolare n°1 della traiettoria	86
3.11	Particolare n°2 della traiettoria	87
3.12	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	88
3.13	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	88
3.14	Variazione dell'inclinazione su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	89
3.15	Variazione dell'eccentricità su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	89
3.16	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita di tipo Molnya per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	90
3.17	Particolare n°1 della traiettoria	93
3.18	Particolare n°2 della traiettoria	93
3.19	Variazione dell'argomento del perigeo su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	94
3.20	Variazione dell'ascensione retta del nodo ascendente su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	94
3.21	Variazione dell'inclinazione su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	95
3.22	Variazione dell'eccentricità su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	95
3.23	Variazione del semiasse maggiore su un'orbita GEO a circa 36000 km di quota per effetto di tutte le perturbazioni orbitali	96
B.1	Data Giuliana Modificata al giorno 0.0 di ogni mese dal 1975 al 2020	103

B.2	Costanti Planetarie medie per l'Epoca J2000	104
B.3	Geometria per il vettore posizione del Sole	106
B.4	Geometria per il vettore posizione della Luna	108

Elenco delle tabelle

1.1	Coefficienti delle armoniche geomagnetiche e loro variazione secolare	28
2.1	Coefficienti di riflettività, assorbimento e pressione di radiazione di alcuni componenti dei satelliti	64
3.1	Parametri d'ingresso	79
3.2	Parametri d'ingresso	85
3.3	Parametri d'ingresso	92
B.1	Costanti Astrodinamiche	105

Elenco degli acronimi

ER *Earth Radius*

CIRA *CONSPAR International Reference*

JGM-2 *Joint Gravity Model*

IGRF *International Geomagnetic Reference Field*

CRRES *Combined Release and Radiation Effects Satellite*

TU *Time Unit*

AU *Astronomical Unit*

TDB *Barycentric Dynamical Time*

LEO *Low Earth Orbit*

GEO *Geostationary Earth Orbit*