

Università di Pisa



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2003-2004

Tesi di Laurea Specialistica

# Gravità bidimensionale e Teoria Quantistica di Liouville

Candidato  
**Gabriele Vajente**

Relatore  
**Prof. Pietro Menotti**



*Il mio più sincero ringraziamento va al prof. Menotti, che ha saputo essere una guida attenta, sempre disponibile alla discussione e ad aiutarmi nel risolvere i problemi che si sono presentati nella preparazione di questa tesi.*

Pisa, 19 maggio 2004



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Preliminari</b>	<b>17</b>
1.1 Azione ed equazioni del moto . . . . .	17
1.2 Simmetria conforme . . . . .	19
1.3 Tensore energia-impulso . . . . .	20
<b>2 Quantizzazione canonica</b>	<b>23</b>
2.1 Impostazione del problema . . . . .	23
2.2 Sviluppo in modi normali . . . . .	24
2.3 Quantizzazione . . . . .	25
<b>3 Teoria di Liouville sulla sfera</b>	<b>31</b>
3.1 Definizioni . . . . .	31
3.2 Disuguaglianza sulle sorgenti . . . . .	33
3.3 Funzioni a $n$ punti sulla sfera . . . . .	34
3.4 Regolarizzazione dell'azione classica . . . . .	36
3.5 Teorema di Picard . . . . .	39
<b>4 Soluzione classica per <math>n</math> sorgenti</b>	<b>41</b>
4.1 Connessione con un'equazione differenziale ordinaria . . . . .	41
4.2 Proprietà dell'equazione differenziale . . . . .	44
4.3 Parametri accessori . . . . .	46
4.4 Monodromia $SU(1,1)$ . . . . .	48
4.5 Proprietà di $SU(1,1)$ . . . . .	49
4.6 Imposizione della monodromia . . . . .	51

<b>5</b>	<b>Soluzione classica per 3 sorgenti</b>	<b>55</b>
5.1	Equazione differenziale . . . . .	55
5.2	Soluzione dell'equazione . . . . .	56
5.3	Monodromie . . . . .	58
5.4	Mappa conforme . . . . .	60
5.5	Azione classica . . . . .	65
5.6	Dimensione conforme semiclassica dei campi . . . . .	68
5.7	Confronto con la congettura DOZZ . . . . .	69
5.8	Sorgenti in punti generici . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Soluzione classica con sorgente infinitesima</b>	<b>75</b>
6.1	Impostazione del problema . . . . .	75
6.2	Soluzione perturbativa dell'equazione . . . . .	77
6.3	Matrici di monodromia . . . . .	78
6.3.1	Monodromia in 0 . . . . .	78
6.3.2	Monodromia in 1 . . . . .	79
6.3.3	Monodromia in $t$ . . . . .	80
6.4	Ricerca della monodromia $SU(1,1)$ . . . . .	81
6.5	Discussione dei risultati . . . . .	84
6.5.1	Fattore conforme . . . . .	84
6.5.2	Parametro accessorio e azione classica . . . . .	85
6.6	Generalizzazioni dei risultati . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Teoria quantistica</b>	<b>91</b>
7.1	Separazione del background classico . . . . .	91
7.2	Studio dell'azione quantistica . . . . .	93
7.3	Sviluppo perturbativo . . . . .	94
7.4	Funzione di Green . . . . .	95
7.5	Proprietà della funzione di Green . . . . .	97
7.5.1	Generalità . . . . .	97
7.5.2	Invarianza conforme . . . . .	97
7.5.3	Limite a punti coincidenti . . . . .	98
7.5.4	Comportamento sulle sorgenti . . . . .	100
7.5.5	Simmetria . . . . .	101
7.6	Correzioni alle dimensioni conformi . . . . .	102
7.7	Determinante funzionale . . . . .	103
7.7.1	Heat kernel e funzione zeta . . . . .	104

7.7.2	Laplaciano su superfici piatte . . . . .	106
7.7.3	Laplaciano su superfici curve . . . . .	108
<b>Conclusioni</b>		<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Calcolo dei commutatori per la quantizzazione canonica</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografia</b>		<b>120</b>





# Introduzione

La teoria di Liouville ha ricevuto un notevole interesse a partire dall'inizio degli anni '80 quando è stata riconosciuta, principalmente grazie al lavoro di Polyakov [44], come una teoria efficace per la gravità bidimensionale in gauge conforme e per la teoria delle stringhe in dimensione non critica. Discutiamo questo legame nella seconda parte di questa introduzione.

Al livello classico la teoria di Liouville è definita dall'azione

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[ (\partial_a \phi)^2 + 4\pi\mu e^{2b\phi} \right] + \text{B.T.}$$

dove abbiamo genericamente indicato con B.T. dei termini di bordo necessari per definire correttamente la teoria. L'azione è invariante conforme se si assume che per trasformazioni analitiche delle coordinate il campo non sia uno scalare ma trasformi con legge

$$\phi'(w, \bar{w}) = \phi(z, \bar{z}) - \frac{Q}{2} \log \left| \frac{dw}{dz} \right|^2$$

posto classicamente  $Q = 1/b$ . In particolare gli esponenziali del campo di Liouville  $V_\alpha = e^{2\alpha\phi}$  (*operatori di vertice*) trasformano come campi conformi primari con dimensione classica  $\Delta_\alpha^{cl} = \alpha/b$ . Ci si può attendere in maniera ingenua che la quantizzazione preservi la simmetria conforme della teoria, ma questo non succede.

Infatti un notevole progresso nella comprensione della teoria quantistica del campo di Liouville è dovuto a Curtright e Thorn [17, 10], con la quantizzazione canonica sul cilindro, ovvero con coordinata spaziale compattificata in un cerchio  $\sigma \in [0, 2\pi]$  e coordinata temporale  $-\infty < \tau < \infty$ . Discutiamo questo approccio nel secondo capitolo. I principali risultati sono che il parametro  $Q$  a livello quantistico deve essere modificato prendendo

$$Q = \frac{1}{b} + b$$

e inoltre gli operatori di vertice hanno una dimensione conforme anomala data da

$$\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha)$$

In seguito si è cercato di formulare la quantizzazione covariante basata sull'integrale funzionale. La principale difficoltà è che, a causa dell'interazione esponenziale, il campo nullo non è soluzione dell'equazione classica di Liouville. Infatti questa equazione descrive naturalmente superfici a curvatura costante negativa. Se si lavora su una superficie con la topologia della pseudosfera si ha che la soluzione classica descrive un campo di background che dà la metrica di Poincaré sul disco unitario. Zamolodchikov e Zamolodchikov [66] hanno sviluppato una teoria perturbativa attorno a questo background, ottenendo conferma della dimensione anomala degli operatori di vertice.

Per quanto riguarda la teoria sulla sfera, il principale risultato è la cosiddetta *congettura DOZZ* avanzata indipendentemente da Dorn e Otto [25, 26] e da Zamolodchikov e Zamolodchikov [65]. Questa congettura fornisce un'espressione non perturbativa per la funzione a tre punti di operatori di vertice, supponendo che la loro dimensione conforme sia quella trovata da Curtright e Thorn con la quantizzazione canonica. Il risultato predetto è stato confrontato con successo con lo sviluppo perturbativo hamiltoniano calcolato da Braaten, Curtright, Ghandour e Thorn [10, 11, 58].

Lo scopo di questo lavoro di tesi è studiare la teoria di Liouville definita sulla sfera, in particolare la formulazione attraverso l'integrale funzionale. Il principale problema che sorge con la topologia sferica è che a causa del teorema di Gauss-Bonnet non possono esistere metriche regolari ovunque con curvatura costante negativa. Quindi la soluzione classica più semplice che si può considerare nel caso della sfera è quella con tre singolarità nella metrica (disuguaglianza di Picard o limite di Seiberg [49]), corrispondenti a tre sorgenti puntiformi per il campo di Liouville, ovvero a delta di Dirac positive per la curvatura scalare della superficie. Questo complica notevolmente lo studio della teoria.

Nel capitolo 3 introduciamo il problema che ci interessa più da vicino, ovvero definiamo la teoria di Liouville sulla sfera di Riemann, richiedendo che il campo  $\phi$  soddisfi la condizione al contorno per  $|z| \rightarrow \infty$ :

$$\phi(z, \bar{z}) \longrightarrow -Q \log(z\bar{z}) + \mathcal{O}(1)$$

che garantisce la regolarità nel punto all'infinito. Siamo interessati al calcolo delle funzioni a  $n$  punti di operatori di vertice sulla sfera:

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)\dots V_{\alpha_n}(z_n)\rangle$$

che corrisponde all'introduzione nell'azione di corrispondenti cariche puntiformi di valore  $2\alpha_i$ . Il teorema di Gauss-Bonnet impone che le cariche soddisfino la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j > \frac{1}{b}$$

Inoltre la richiesta che l'area della sfera sia finita comporta l'ulteriore restrizione

$$\alpha_i < \frac{1}{2b}$$

La presenza di sorgenti puntiformi rende il campo di Liouville singolare nei corrispondenti punti e l'azione classica calcolata sulle soluzioni dell'equazione di Liouville è divergente. Si può regolarizzare l'azione classica, escludendo le sorgenti dalla regione di integrazione e introducendo degli opportuni termini di bordo [65, 51].

In seguito nel capitolo 4 discutiamo la soluzione dell'equazione classica per il campo di Liouville. Seguendo argomentazioni standard, simili a quelle che si utilizzano nella teoria dell'uniformizzazione delle superfici di Riemann, mostriamo che il fattore conforme si può scrivere nella forma seguente

$$e^{2b\phi} = \frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{|w_{12}|^2}{(y_2\bar{y}_2 - y_1\bar{y}_1)^2}$$

dove  $y_1$  e  $y_2$  sono due soluzioni opportunamente scelte dell'equazione differenziale ordinaria fuchsiana

$$y''(z) + Q(z)y(z) = 0$$

dove  $Q(z)$  è la componente olomorfa del tensore energia impulso. Nel caso di sorgenti puntiformi  $Q(z)$  può avere solamente poli al più di secondo ordine nei corrispondenti punti. I residui dei poli di secondo ordine sono determinati completamente dalle cariche, mentre quelli dei poli di primo ordine sono i cosiddetti *parametri accessori* che si determinano dalla richiesta che il fattore conforme sia una funzione monodroma su tutta la sfera. La ricerca della

monodromia della soluzione è una variante del XXI problema di Hilbert (problema di Riemann-Hilbert).

Il caso di tre sorgenti si può risolvere esplicitamente per mezzo di funzioni ipergeometriche (cap. 5). In questo caso possiamo calcolare un'espressione per l'azione classica regolarizzata, che corrisponde al limite semiclassico  $b \rightarrow 0$  della funzione a tre punti. In particolare mostriamo che la dimensione conforme degli operatori di vertice a livello semiclassico è data da

$$\Delta_\alpha^{sc} = \alpha \left( \frac{1}{b} - \alpha \right)$$

Il caso di quattro sorgenti non è esattamente risolubile, in quanto tra le altre difficoltà non è nota un'espressione esplicita per i parametri accessori. Consideriamo quindi il caso di tre sorgenti finite e di una infinitesima e risolviamo l'equazione di Liouville perturbando la soluzione nota con tre sorgenti (cap. 6). Imponendo che il fattore conforme sia globalmente monodromo riusciamo ad esprimere il parametro accessorio corrispondente alla sorgente infinitesima in funzione del background imperturbato, trovando

$$\beta_4 = 2\varepsilon \partial_z \varphi_0(z)|_{z=t}$$

dove  $\varepsilon/b$  è la carica della sorgente infinitesima. Questo risultato ci permette di calcolare l'azione classica con quattro sorgenti, ovvero il limite semiclassico della funzione a quattro punti quando una delle sorgenti è piccola. Come ulteriore risultato dimostriamo che la parte finita del campo di Liouville in corrispondenza della sorgente infinitesima è uguale al campo imperturbato in presenza delle tre sole sorgenti finite.

I risultati ottenuti si generalizzano al caso di  $n$  sorgenti finite e  $m$  sorgenti infinitesime.

Questo conclude il nostro studio della teoria classica di Liouville. Procediamo quindi nel capitolo 7 alla definizione della funzione a 3 punti quantistica attraverso un integrale funzionale, che sviluppiamo attorno alla soluzione classica trovata. L'azione risultante per il campo di fluttuazione quantistica è definita su una metrica di background che ha come fattore conforme la soluzione classica a tre sorgenti e contiene un termine di interazione esponenziale, ovvero con vertici di interazione a tutti gli ordini  $n \geq 3$ .

Il primo problema è ricavare un'espressione esplicita per la funzione di Green  $g(z, z')$  della teoria quantistica; questa si ottiene sfruttando la soluzione classica per tre sorgenti più una infinitesima ricavata precedentemente.

Tale funzione di Green è data da integrali di opportune combinazioni di funzioni ipergeometriche. Studiamo quindi le proprietà di  $g(z, z')$ , che risulta correttamente regolare in corrispondenza delle sorgenti e divergente logaritmicamente per punti coincidenti. Mostriamo anche che la funzione di Green è invariante conforme. La simmetria  $g(z, z') = g(z', z)$  è dedotta da argomenti generali.

L'espressione ottenuta per la funzione di Green si generalizza, trovando un'espressione valida per un background generico che sia soluzione dell'equazione di Liouville per un qualsiasi insieme di sorgenti, anche se per  $n > 3$  non si ha un'espressione esplicita come accade per  $n = 3$ , eccetto che per distribuzioni particolarmente simmetriche delle sorgenti.

Questo pone le basi per il calcolo dell'integrale funzionale. Si può distinguere in questo un primo contributo, di carattere non perturbativo, dato dal determinante dell'operatore differenziale che definisce la parte quadratica dell'azione

$$D = -\Delta_{LB} + 1$$

dove  $\Delta_{LB}$  è l'operatore di Laplace-Beltrami per la metrica data dal fattore conforme a tre sorgenti. Questo determinante dovrebbe fornire il contributo  $b\alpha$  della dimensione anomala quantistica degli operatori di vertice. L'operatore differenziale  $D$  è definito su di una metrica a curvatura costante negativa con tre difetti conici.

La tecnica standard per il calcolo di determinanti di operatori su spazi curvi è il cosiddetto metodo del nucleo del calore, noto pure come metodo della funzione zeta. Un notevole lavoro è stato fatto per estendere questo metodo al caso di superfici di Riemann singolari [27, 16, 3, 37] dove si riescono ad ottenere risultati espliciti in alcuni casi. L'operatore in questione non rientra nei casi già studiati e nel cap. 7 viene analizzata la nuova situazione. Il fatto che ora oltre ai difetti conici compare anche una curvatura su tutta la superficie viene superato con un opportuno procedimento di limite, mentre resta il fatto che il "termine di massa" che compare nell'operatore differenziale impone un'estensione tecnica del metodo della funzione zeta (contributi ad argomento 1 oltre che 0) che non è ancora stata risolta. Si esegue un calcolo di prova per un operatore differenziale simile, ma più semplice, mostrando che il risultato ha la struttura fattorizzata corretta.

Il calcolo del determinante dell'operatore completo resta da eseguire ed è di particolare importanza per la teoria quantistica di Liouville.

## Gravità bidimensionale e teoria di Liouville

La gravità in dimensione due può essere descritta attraverso l'usuale azione di Einstein-Hilbert

$$S_E[g] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2z \sqrt{g} (R_g + \lambda)$$

dove  $g_{ab}$  è una metrica sulla superficie  $\Sigma$ ,  $R_g$  è il corrispondente scalare di curvatura e  $\lambda$  la costante cosmologica. Tuttavia per il teorema di Gauss-Bonnet la parte di curvatura di  $S_E[g]$  si riduce alla caratteristica di Eulero  $\chi$  della superficie. Di conseguenza la pura gravità classica in dimensione due non ha dinamica, in quanto l'azione si riduce ad un invariante topologico.

È interessante invece considerare la gravità bidimensionale accoppiata con  $D$  campi scalari che indicheremo con  $X^\mu$ . L'azione corrispondente, ignorando il termine di Einstein, è

$$S_P[g, X] = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2z \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (1)$$

Questa è l'azione di Polyakov [44], che descrive la dinamica di una superficie bidimensionale immersa in uno spazio  $D$ -dimensionale, ovvero di una stringa che si muove in uno spazio-tempo piatto con coordinate  $X^\mu$ .

L'azione (1) è invariante sotto il gruppo dei diffeomorfismi della superficie bidimensionale  $\Sigma$  e sotto il gruppo delle trasformazioni di Weyl, ovvero riscalamenti della metrica del tipo

$$g_{ab} \rightarrow e^{2\tau(z)} g_{ab} \quad (2)$$

Questa invarianza conforme implica, come noto [23], che classicamente la traccia del tensore energia impulso è identicamente nulla. A livello quantistico questo non è più vero, in quanto la simmetria di Weyl è anomala.

Vediamo ora per grandi linee come procede la quantizzazione dell'azione di Polyakov<sup>1</sup>. La funzione di partizione per la superficie  $\Sigma$  è definita formalmente dall'integrale funzionale

$$Z[\Sigma] = \int [DX][Dg] \exp(-S[X, g]) \quad (3)$$

Dobbiamo definire cosa intendiamo con le misure di integrazione  $[DX]$  e  $[Dg]$ . Seguendo l'approccio di Polyakov definiamo una metrica sullo spazio

---

<sup>1</sup>Seguiremo principalmente le notazioni di [2]. Cfr. anche [44, 42, 43].

delle deformazioni dei campi  $X^\mu$  (che indichiamo con lettere minuscole) ponendo

$$\|x\|^2 = \int d^2z \sqrt{g} x^\mu(z) x_\mu(z) \quad (4)$$

In modo analogo si procede con le deformazioni della metrica. La forma più generale in questo caso è data dalla metrica di DeWitt:

$$\|\delta g\|^2 = \int d^2z \sqrt{g} \left( G^{abcd} + u g^{ab} g^{cd} \right) \delta g_{ab}(z) \delta g_{cd}(z) \quad (5)$$

dove  $G^{abcd}$  è l'operatore identità sullo spazio dei tensori simmetrici a traccia nulla:

$$G_{ab}{}^{cd} = \frac{1}{2} \left( \delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c - g_{ab} g^{cd} \right) \quad (6)$$

Il coefficiente  $u$  è un numero positivo arbitrario, che non conta ai fini del risultato finale.

Poiché l'azione ha una simmetria di gauge data dal gruppo dei diffeomorfismi e delle trasformazioni di Weyl, l'integrale funzionale (3) va definito fissando la gauge, ad esempio con il metodo di Fadeev-Popov [63]. Per fare questo iniziamo con una decomposizione ortogonale della variazione della metrica

$$\delta g_{ab} = 2g_{ab} \delta\tau + \delta h_{ab} \quad (7)$$

dove  $dh_{ab}$  è simmetrico e a traccia nulla.

Procediamo quindi prendendo una metrica  $\hat{g}_{ab}$  di riferimento ammissibile su  $\Sigma$ . Fissiamo la gauge scegliendo per  $g_{ab}$  una metrica che si ottiene da  $\hat{g}_{ab}$  con un riscaldamento di Weyl, ovvero  $g_{ab} = e^{2\sigma(z)} \hat{g}_{ab}$  e consideriamo l'effetto del gruppo di gauge sulla scelta della metrica. In generale bisogna tenere conto dell'esistenza di deformazioni della metrica che non sono riconducibili a diffeomorfismi o trasformazioni di Weyl. Infatti sebbene ogni metrica si può sempre scrivere localmente come un fattore conforme per una metrica di riferimento fissata, questo può non essere vero globalmente, a causa di restrizioni topologiche. È quindi necessario utilizzare una famiglia di metriche di riferimento, descritte da un numero finito di *parametri di Teichmüller*. Sulla sfera tuttavia non esistono parametri di Teichmüller, quindi nel seguito trascureremo questo contributo.

Per azione di un diffeomorfismo con parametro infinitesimo  $v_a$  la variazione della metrica è data dalla derivata di Lie [62]:

$$\delta g_{ab} = \nabla_a(v_b) + \nabla_b(v_a)$$

dove abbiamo introdotto la derivata covariante rispetto alla metrica  $g$ . Per trasformazioni di Weyl la metrica si trasforma nel modo seguente

$$\delta g_{ab} = 2(\delta\sigma) g_{ab}$$

Considerando la scomposizione ortogonale (7) si ottiene

$$2(\delta\tau) = 2(\delta\sigma) + g^{ab}\nabla_a(v_b) \quad (8)$$

$$\delta h_{ab} = 2G_{ab}{}^{cd}\nabla_c(v_d) \equiv (P_1 v)_{ab} \quad (9)$$

dove  $P_1$  è un operatore che mappa vettori in tensori simmetrici a traccia nulla. A questo punto la misura funzionale di integrazione si riscrive

$$[Dg] = [D\tau][Dh] = [D\sigma][DV] \left[ \det(P_1^\dagger P_1) \right]^{1/2}$$

La misura  $[DV]$  si dimostra essere indipendente dal fattore conforme, come si vede studiando qual'è la metrica indotta su  $v_a$  dalla (5). Quindi l'integrale in  $[DV]$  dà semplicemente un fattore pari al volume del gruppo dei diffeomorfismi. Si ottiene allora la seguente espressione per la funzione di partizione:

$$Z[\Sigma] = V_{diff} \int [D\sigma] \left[ \det(P_1^\dagger P_1) \right]^{1/2} \exp(-S[X, g]) \quad (10)$$

In realtà questa espressione non è del tutto corretta, perché non tiene conto della possibilità che esistano modi zero dell'operatore  $P_1$ , ovvero diffeomorfismi la cui azione è equivalente ad una trasformazione di Weyl. Questi corrispondono ai cosiddetti *vettori di Killing conformi*. Il determinante dell'operatore  $P_1^\dagger P_1$  va quindi preso escludendo i modi zero. Indicheremo con un apice i determinanti e le tracce calcolate escludendo i modi zero.

L'operatore  $P_1^\dagger P_1$  è legato ad un caso particolare di laplaciani che operano su campi tensoriali di rango qualsiasi definiti su superfici di Riemann<sup>2</sup>. Lavorando in coordinate complesse, un tensore di rango  $n$  è un oggetto che per mappe analitiche della superficie trasforma come

$$T \rightarrow T' = \left( \frac{dz'}{dz} \right)^n T$$

---

<sup>2</sup>Cfr. [2] per una discussione dettagliata di questi operatori.



Si definiscono due tipi di derivata covariante e di laplaciano

$$\begin{aligned}\nabla_n^z T &= g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T \\ \nabla_z^n T &= (g^{z\bar{z}})^n \partial_z [(g_{z\bar{z}})^n T] \\ \Delta_n^{(+)} &= -2\nabla_z^{n+1} \nabla_n^z \\ \Delta_n^{(-)} &= -2\nabla_{n-1}^z \nabla_z^n\end{aligned}$$

Allora si può mostrare che i tensori simmetrici a traccia nulla appartengono alla somma diretta dello spazio di tensori di rango  $n$  e di quello dei tensori di rango  $-n$  e inoltre si ha  $P_n = \nabla_n^z \oplus \nabla_z^{-n}$  e  $D_n^{(+)} = P_n^\dagger P_n = 2\Delta_n^{(+)} \oplus \Delta_{-n}^{(-)}$ . Quindi il determinante che ci interessa è legato a quello dell'operatore  $D_1^{(+)}$ . Per calcolarlo si utilizza il metodo di regolarizzazione mediante la funzione zeta:

$$\log \det' D_n^{(+)} = - \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} \text{Tr}' \left[ \exp(-tD_n^{(+)}) \right]$$

A partire da questa definizione si può ricavare un'equazione differenziale funzionale, considerando come variano gli autovalori dell'operatore  $D_n^{(+)}$  per una variazione del fattore conforme. Si ottiene

$$\begin{aligned}\delta \log \det' D_n^{(+)} &= -2(n+1) \text{Tr} \left[ \delta\sigma \exp\left(-\varepsilon D_n^{(+)}\right) \right] \\ &\quad + 2n \text{Tr} \left[ \delta\sigma \exp\left(-\varepsilon D_{n+1}^{(-)}\right) \right]\end{aligned}$$

Il comportamento asintotico dell'heat kernel si ottiene con metodi standard [61, 2]. Usando questi risultati l'equazione funzionale si può integrare ottenendo infine

$$\begin{aligned}\log \det' D_n^{(+)} &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_\Sigma d^2z \sqrt{\hat{g}} e^{2\sigma} + \frac{3n+1}{3} \chi \log \varepsilon \\ &\quad - \frac{1+6n(n+1)}{6\pi} \int_\Sigma d^2z \sqrt{\hat{g}} \left[ \hat{g}^{ab} \partial_a \sigma \partial_b \sigma + \hat{R}\sigma \right] \\ &\quad + F_{finita}[\hat{g}]\end{aligned}\tag{11}$$

È importante notare la presenza della divergenza  $\varepsilon^{-1}$  proporzionale all'area della superficie, in quanto questa implica la necessità di prevedere un corrispondente controtermine da aggiungere all'azione originale. Lo stesso ragionamento vale per la divergenza logaritmica, ma in questo caso il controtermine è puramente topologico e non è particolarmente rilevante.

L'integrazione in  $[DX]$  si può effettuare immediatamente in quanto l'azione è quadratica. Il risultato è il determinante dell'operatore laplaciano definito dalla metrica di riferimento  $\hat{g}$ . Questo si ottiene in modo del tutto analogo a quanto fatto per  $D_n^{(+)}$  [2].

In conclusione la funzione di partizione (3) diventa

$$Z[\Sigma] = V_{diff} \int [D\sigma] \exp \left[ -S_0[\hat{X}, \hat{g}] - S_{conf}[\sigma, \hat{g}] \right] \quad (12)$$

dove  $S_0[\hat{X}, \hat{g}]$  è essenzialmente l'azione originale rinormalizzata calcolata su una soluzione classica  $\hat{X}$ . Questa azione non dipende dal fattore conforme  $\sigma$ . Invece il nuovo contributo derivante dall'anomalia di Weyl è

$$S_{conf}[\sigma, \hat{g}] = \frac{26 - D}{12\pi} \left[ \int_{\Sigma} d^2z \sqrt{\hat{g}} \left( \hat{g}^{ab} \partial_a \sigma \partial_b \sigma + \hat{R} \sigma + \mu e^{2\sigma} \right) \right] \quad (13)$$

Vediamo che se la gravità bidimensionale è accoppiata con  $D = 26$  campi scalari, l'anomalia di Weyl si cancella. Si tratta della cosiddetta condizione di *stringa critica*. Invece se  $D \neq 26$ , ovvero per stringa non critica, rimane un termine dinamico nel cosiddetto *modo di Liouville* legato al fattore conforme  $\sigma$ . L'azione  $S_{conf}$  è appunto l'azione per la teoria di Liouville su un background generico. Se lavoriamo ad esempio sulla sfera, o comunque in una superficie in cui possiamo scegliere la metrica piatta  $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ , otteniamo

$$S_{conf}[\sigma] \propto \int_{\Sigma} d^2z \left[ \partial_a \sigma \partial^a \sigma + \mu e^{2\sigma} \right] \quad (14)$$

Bisogna notare che nell'integrale funzionale (12) la misura di integrazione per il fattore conforme  $\sigma$  non è quella invariante per traslazione solitamente considerata

$$\|\delta\sigma\|^2 = \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{g}} (\delta\sigma)^2 \quad (15)$$

ma bensì

$$\|\delta\sigma\|^2 = \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{g}} e^{2\sigma} (\delta\sigma)^2 \quad (16)$$

Questa è una difficoltà per la quantizzazione funzionale della teoria. È stato congetturato e argomentato che lo jacobiano per il cambiamento di misura ha la stessa forma dell'azione di Liouville, con diverse costanti di accoppiamento<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Cfr. [19] per una discussione del problema.

L'azione della teoria di Liouville mantiene una simmetria residua, che è tutto quello che rimane dell'invarianza per diffeomorfismi una volta fissata la gauge conforme:

$$\sigma(z) \rightarrow \sigma(w) + \frac{1}{2} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \quad (17)$$

Questi calcoli mostrano quindi che la teoria di Liouville può essere vista come una teoria efficace per la gravità bidimensionale accoppiata a materia bosonica, o anche per la descrizione della dinamica della stringa in dimensione non critica.



# Capitolo 1

## Preliminari

In questo capitolo definiamo la teoria classica del campo di Liouville attraverso l'espressione dell'azione. Analizziamo quindi le proprietà di simmetria, in particolare mostrando che l'azione è invariante per il gruppo conforme bidimensionale, definendo opportunamente le proprietà di trasformazione del campo di Liouville. Ricaviamo infine un'espressione per il tensore energia impulso della teoria.

### 1.1 Azione ed equazioni del moto

La dinamica classica del campo di Liouville è definita dall'azione:

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[ (\partial_a \phi)^2 + 4\pi\mu e^{2b\phi} \right] + \text{B.T.} \quad (1.1)$$

dove  $b$  è una costante di accoppiamento adimensionale che caratterizza l'intensità delle interazioni nella teoria e B.T. indica termini di bordo necessari per una corretta definizione della teoria che saranno introdotti più avanti. La costante  $\mu$  non è particolarmente significativa, in quanto può essere riassorbita con un riscalamento del campo  $\phi \rightarrow \phi - \log(\mu/2b)$ .

Dall'azione (1.1) si ricava l'equazione classica che deve essere soddisfatta dal campo  $\phi$ :

$$-\Delta\phi + 4\pi\mu b e^{2b\phi} = 0 \quad (1.2)$$

A questo punto è interessante notare una connessione con la geometria differenziale delle superfici bidimensionali. È noto che in dimensione 2 ogni

metrica è equivalente ad una metrica conformemente piatta, ovvero può essere scritta localmente nella forma

$$g_{ab} = e^\varphi \delta_{ab}$$

dove  $\delta_{ab}$  è la metrica piatta euclidea. Per una tale metrica il tensore di Ricci è dato da

$$R_{mn} = -\frac{1}{2} g_{mn} \Delta \varphi = -\frac{1}{2} g_{mn} g^{ab} \partial_a \partial_b \varphi$$

ovvero la curvatura scalare è

$$R = -e^{-\varphi} \delta^{mn} \partial_m \partial_n \varphi$$

Quindi se si interpreta il campo di Liouville come fattore conforme di una superficie bidimensionale vediamo che l'equazione (1.2) equivale alla richiesta che la curvatura sia costante e negativa, con valore  $-8\pi\mu b^2$ . Per questo motivo ci si riferisce spesso al campo di Liouville come *fattore conforme*.

Si può considerare la dinamica classica in presenza di sorgenti esterne, in particolare come vedremo è utile il caso di sorgenti con supporto puntiforme. L'azione si modifica conseguentemente:

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[ (\partial_a \phi)^2 + 4\pi\mu e^{2b\phi} + 4\pi J(x)\phi \right] + \text{B.T.} \quad (1.3)$$

e la corrispondente equazione del moto risulta

$$-\Delta\phi + 4\pi\mu b e^{2b\phi} + 2\pi J = 0 \quad (1.4)$$

In generale per definire completamente la teoria di Liouville è necessario specificare la topologia della superficie bidimensionale su cui il campo è definito, ovvero il comportamento asintotico di  $\phi$ . Questo verrà fatto nel seguito della tesi, considerando la teoria definita sulla sfera. Per quanto riguarda questo capitolo ricaveremo proprietà locali della teoria che non dipendono dalla scelta della topologia.

Poiché la teoria di Liouville è definita su uno spazio euclideo bidimensionale, è spesso conveniente utilizzare coordinate complesse, in analogia a quanto si fa per le teorie conformi classiche. Invece delle coordinate  $(x, y)$  sul piano possiamo utilizzare le coordinate complesse  $(z, \bar{z})$  viste come variabili indipendenti:

$$\begin{cases} z & \equiv x + iy \\ \bar{z} & \equiv x - iy \end{cases}$$

Introduciamo anche le corrispondenti derivate complesse

$$\begin{cases} \partial & \equiv \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \\ \bar{\partial} & \equiv \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \end{cases}$$

Si ottengono facilmente le seguenti relazioni:

$$d^2x = \frac{1}{2} dzd\bar{z} \equiv \frac{1}{2} d^2z$$

$$\Delta \equiv \partial_a \partial^a = 4 \partial \bar{\partial}$$

Sotto trasformazioni analitiche del piano in se stesso abbiamo le regole di trasformazione

$$dzd\bar{z} = \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 dwd\bar{w}$$

$$\Delta_z = \left| \frac{dz}{dw} \right|^{-2} \Delta_w$$

Nel seguito utilizzeremo entrambe le notazioni, a seconda di quale risulta più comoda nel caso particolare.

## 1.2 Simmetria conforme

L'azione (1.1) è invariante sotto il gruppo delle trasformazioni conformi bidimensionali se il campo  $\phi$  non è uno scalare ma trasforma con legge:

$$\phi'(w, \bar{w}) = \phi(z, \bar{z}) - \frac{Q}{2} \log \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \quad (1.5)$$

dove la mappa analitica delle coordinate è  $z \rightarrow w(z)$  e  $Q$  è un parametro che va scelto opportunamente in modo da rendere l'azione invariante. Al livello classico risulta  $Q = \frac{1}{b}$ . Questo si vede facilmente considerando come trasformano i vari termini dell'azione. La legge (1.5) implica infatti che

$$e^{2b\phi} \longrightarrow e^{2b\phi} \left| \frac{dw}{dz} \right|^{2Qb}$$

Invece

$$(\partial_a \phi)^2 \longrightarrow \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 (\partial_a \phi)^2$$

Poiché  $d^2x \longrightarrow \left| \frac{dw}{dz} \right|^{-2} d^2x$  si ha invarianza dell'azione se  $Qb = 1$  ovvero come anticipato

$$Q_{class} = \frac{1}{b} \quad (1.6)$$

La legge di trasformazione (1.5) per il campo  $\phi$  implica che gli operatori di vertice

$$V_\alpha(z, \bar{z}) \equiv e^{2\alpha\phi(z, \bar{z})} \quad (1.7)$$

sono campi conformi primari [23] con dimensione classica  $\Delta_\alpha^{cl} = \alpha/b$ . Vedremo che un risultato importante della quantizzazione della teoria di Liouville è che questi campi, pur rimanendo primari, acquistano una dimensione anomala data da

$$\Delta_\alpha = \alpha \left( \frac{1}{b} + b - \alpha \right)$$

### 1.3 Tensore energia-impulso

Il tensore energia-impulso per un campo scalare è dato come noto da

$$T_{ab} = \mathcal{L} g_{ab} - \frac{1}{2\pi} \partial_a \phi \partial_b \phi \quad (1.8)$$

La traccia di  $T_{ab}$  si calcola facilmente e risulta

$$T_a^a = 2\mu e^{2b\phi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{b} \partial_a \partial^a \phi$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato l'equazione del moto. In analogia con quanto si fa solitamente nelle teorie conformi [23], vogliamo introdurre un tensore energia-impulso migliorato che sia conservato e a traccia nulla [12]. Aggiungiamo quindi a  $T_{ab}$  un termine con la corretta traccia e che sia cinematicamente conservato:

$$T_{ab} = \mathcal{L} g_{ab} - \frac{1}{2\pi} \partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{b} (\partial_a \partial_b \phi - g_{ab} \partial^2 \phi) \quad (1.9)$$

Si vede immediatamente che questo nuovo tensore energia impulso è ancora conservato ed è a traccia nulla sulle soluzioni dell'equazione classica del moto.

Per completezza ne riportiamo l'espressione in coordinate complesse. Con le convenzioni solitamente adottate nella teoria conforme dei campi



[23] si ha

$$\begin{aligned}
 T(z) &\equiv 2\pi T_{zz} = -(\partial\phi)^2 + Q \partial^2\phi \\
 \bar{T}(\bar{z}) &\equiv 2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} = -(\bar{\partial}\phi)^2 + Q \bar{\partial}^2\phi \\
 T_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) &= T_{\bar{z}z}(z, \bar{z}) = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

L'ultima equazione è equivalente alla condizione di annullamento della traccia di  $T_{ab}$ .

L'equazione del moto per il campo di Liouville implica che  $T(z)$ , come già indicato dalla notazione, è una funzione analitica delle coordinate fuori dalle sorgenti<sup>1</sup>, mentre  $\bar{T}(\bar{z})$  è antianalitica. Questo è un risultato comune a tutte le teorie conformi.

---

<sup>1</sup>Questa affermazione verrà provata nel capitolo 5 quando esplicheremo la connessione tra l'equazione di Liouville e certi tipi di equazioni fuchsiane.



## Capitolo 2

# Quantizzazione canonica

In questo capitolo rivediamo la quantizzazione canonica della teoria di Liouville sul cilindro, seguendo nelle linee generali il lavoro originale di Curtright e Thorn [17]<sup>1</sup>. Calcoliamo esplicitamente l'algebra di Virasoro della teoria e in particolare la carica centrale e le dimensioni anomale degli operatori di vertice.

### 2.1 Impostazione del problema

Consideriamo la teoria di Liouville definita sul cilindro (figura 2.1), ovvero su uno spazio con metrica minkowskiana  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$  in cui la coordinata spaziale  $\sigma$  varia in  $[0, 2\pi]$  con condizioni di periodicità e la coordinata temporale  $\tau$  varia invece da  $-\infty$  a  $+\infty$ . La lagrangiana che descrive questa teoria è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} (\partial_\mu \Phi)^2 + \mu e^{2b\Phi} \quad (2.1)$$

Prendiamo come variabile canonica il campo  $\Phi(\sigma, \tau)$  e quindi il corrispondente momento canonico coniugato è

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi)} = \frac{\dot{\Phi}}{2\pi}$$

dove con un punto indichiamo la derivata temporale e con un apice la derivata spaziale. Definiamo per comodità

$$\Pi = 2\pi p = \dot{\Phi} \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>La nostra normalizzazione della lagrangiana e del campo di Liouville è diversa da quella utilizzata da Curtright e Thorn.

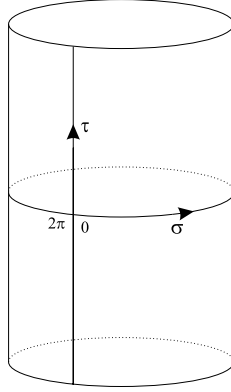


Figura 2.1: Quantizzazione sul cilindro

Allora le parentesi di Poisson classiche per i campi  $\Phi$  e  $\Pi$  sono

$$\{\Phi(\sigma, \tau), \Pi(\sigma', \tau)\} = 2\pi\delta(\sigma - \sigma') \quad (2.3)$$

Come tensore energia-impulso prendiamo quello definito dall'equazione (1.9), in cui tuttavia ci riserviamo la possibilità di modificare il coefficiente  $1/b$  del termine aggiuntivo, come risulterà necessario per la quantizzazione della teoria:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \eta_{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{Q}{2\pi}(\partial_\mu\partial_\nu\Phi - \eta_{\mu\nu}\partial^2\Phi) \quad (2.4)$$

Al livello classico il parametro  $Q$  deve essere scelto in modo da rendere il tensore energia-impulso a traccia nulla e come già visto questo implica  $Q = 1/b$ . Il risultato principale della quantizzazione canonica è che a livello quantistico questa identificazione non è più valida e per recuperare l'invarianza conforme è necessario porre  $Q = 1/b + b$ .

Definiamo l'equivalente delle componenti complesse del tensore energia-impulso nel seguente modo

$$L^\pm = -\frac{T_{00} \pm T_{01}}{2} = \frac{(\Pi \pm \Phi')^2}{2\pi} - \frac{\mu}{2}e^{2b\Phi} - \frac{Q}{4\pi}(\Phi' \pm \Pi)' \quad (2.5)$$

## 2.2 Sviluppo in modi normali

Già al livello classico possiamo introdurre uno sviluppo in modi delle variabili canoniche, rispetto alla coordinata spaziale che è compattificata su una

circonferenza:

$$\Phi(\sigma, \tau) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ a_0 - a_0^\dagger + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (a_n e^{-in\sigma} + b_n e^{in\sigma}) \right] \quad (2.6)$$

$$\Pi(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ a_0 + a_0^\dagger + \sum_{n \neq 0} (a_n e^{-in\sigma} + b_n e^{in\sigma}) \right] \quad (2.7)$$

Per ottenere le parentesi di Poisson canoniche (2.3) basta richiedere che

$$i\{a_n, a_m\} = i\{b_n, b_m\} = n \delta_{n+m} \quad (2.8)$$

$$i\{a_0, a_0^\dagger\} = 1 \quad (2.9)$$

$$\{a_0, a_n\} = \{a_0, b_n\} = \{a_n, b_m\} = 0 \quad (2.10)$$

In modo analogo definiamo la scomposizione in modi del tensore energia-impulso

$$L_k^\pm = \int_0^{2\pi} e^{\pm ik\sigma} L^\pm(\sigma) \quad (2.11)$$

Con questa definizione si può verificare che classicamente gli  $L_k^\pm$  formano l'algebra

$$\begin{aligned} i\{L_k^\pm, L_m^\pm\} &= (k-m)L_{k+m}^\pm + \frac{Q^2}{2} k^3 \delta_{k+m} \\ i\{L_k^\pm, L_m^\mp\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

## 2.3 Quantizzazione

Procediamo quindi alla quantizzazione della teoria, assumendo che le parentesi di Poisson (2.8), (2.9) e (2.10) si traducano in commutatori per i corrispondenti operatori. Il tensore energia-impulso contiene termini in cui compare il prodotto di due o più operatori, che va chiaramente regolarizzato. Lo facciamo introducendo un ordinamento normale dei modi, in analogia con quanto si fa nel caso di un campo libero. Ovvero poniamo

$$L^\pm = \frac{:(\Phi' \pm \Pi)^2:}{8\pi} - \frac{\mu}{2} : e^{2b\phi} : + \frac{Q}{2\pi} (\Phi' \pm \Pi)' \quad (2.13)$$

Per evitare ogni ambiguità prendiamo come definizione dell'ordinamento normale dell'esponenziale la formula seguente:

$$: \exp \left[ f_0 + \sum_{n < 0} f_n + \sum_{m > 0} f_m \right] : \equiv \exp [f_0] \exp \left[ \sum_{n < 0} f_n \right] \exp \left[ \sum_{m > 0} f_m \right] \quad (2.14)$$

dove indichiamo con  $f_i$  un generico modo di ordine  $i$ .

Esplicitando la scomposizione in modi delle variabili canoniche abbiamo

$$\begin{aligned} L^\pm &= \frac{(a_0 + a_0^\dagger)^2}{16\pi} + \frac{a_0 + a_0^\dagger}{4\pi} \sum_{n \neq 0} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} e^{\mp i n \sigma} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{n, m \neq 0} \begin{pmatrix} : a_n a_m : \\ : b_n b_m : \end{pmatrix} e^{\mp i(n+m)\sigma} \\ &+ \frac{\mu}{2} : e^{2b\Phi} : + i \frac{Q\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{n \neq 0} n \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} e^{\mp i n \sigma} \end{aligned}$$

Con la notazione  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$  indichiamo schematicamente che al segno  $+$  corrisponde l'operatore  $a_n$  e viceversa al segno  $-$  corrisponde  $b_n$ .

A questo punto scomponiamo in modi  $L^\pm$  come già fatto prima. Ponendo  $L_k^\pm = J_k^\pm + K_{\pm k}$  abbiamo

$$\begin{aligned} J_0^\pm &= \frac{(a_0 + a_0^\dagger)^2}{8} + \sum_{n > 0} \begin{pmatrix} a_{-n} a_n \\ b_{-n} b_n \end{pmatrix} \\ J_k^\pm &= \left( \frac{a_0 + a_0^\dagger}{2} + i\gamma k \right) \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0, k} \begin{pmatrix} : a_n a_{k-n} : \\ : b_n b_{k-n} : \end{pmatrix} \\ K_m &= \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma : e^{2b\Phi} : e^{im\sigma} \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove abbiamo posto  $\gamma = Q/\sqrt{2}$ .

Ora vogliamo capire quale algebra formano gli operatori  $L_k^\pm$ . Per fare questo dobbiamo calcolare tutti i commutatori degli operatori (2.15). Qui diamo solo le linee generali di questi calcoli, i dettagli si trovano nell'appendice A.

Abbiamo intanto

$$[J_k^\pm, J_m^\mp] = 0 \quad (2.16)$$

poiché il primo  $J$  contiene solo operatori  $a$ , mentre il secondo solo operatori  $b$  o viceversa.

Nel calcolo di  $[J_k^\pm, J_m^\pm]$  bisogna prestare attenzione ai prodotti normali ordinati. I commutatori di questi oggetti in generale si calcolano spezzando opportunamente le somme in modo da poter togliere l'ordinamento. Riscrivendo il risultato utilizzando ancora i prodotti normalmente ordinati abbiamo infine il risultato

$$[J_k^\pm, J_m^\pm] = (k - m) \left( J_{k+m}^\pm - \frac{1}{24} \delta_{m+n} \right) + k^3 \left( \gamma^2 + \frac{1}{12} \right) \delta_{k+m} \quad (2.17)$$

Ora dobbiamo calcolare il commutatore  $[K_k, K_m]$ . Per fare questo consideriamo il prodotto  $K(\sigma)K(\sigma')$ , utilizzando l'identità [23]:

$$: e^{2b\Phi(\sigma)} : : e^{2b\Phi(\sigma')} :=: e^{2b\Phi(\sigma)} e^{2b\Phi(\sigma')} : \exp \langle 4b^2 \Phi(\sigma) \Phi(\sigma') \rangle$$

Usando le regole di commutazione si ottiene

$$\langle \Phi(\sigma) \Phi(\sigma') \rangle = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n>0} \frac{\cos n(\sigma - \sigma')}{n} \right)$$

Si vede quindi che il prodotto  $K(\sigma)K(\sigma')$  è simmetrico per scambio di  $\sigma$  con  $\sigma'$ , ovvero in conclusione

$$[K_m, K_n] = 0 \tag{2.18}$$

Il commutatore di  $J_k^\pm$  con  $K_m$  si calcola esplicitando l'integrale che definisce  $K_m$

$$[J_k^\pm, K_m] = \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} [J_k^\pm, : e^{2b\Phi(\sigma)} :] \tag{2.19}$$

e operando in modo analogo a quanto fatto in precedenza. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} [J_k^\pm, : e^{2b\Phi} :] &= -ib\sqrt{2} \left\{ \frac{a_0 + a_0^\dagger}{2} e^{2b\Phi} : e^{\pm ik\sigma} + i\gamma k : e^{2b\Phi} : e^{\pm ik\sigma} \right. \\ &\quad \left. + e^{\pm ik\sigma} \sum_{n \neq 0} : e^{2b\Phi} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} : e^{\mp in\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{ib\sqrt{2}}{2} e^{\pm ik\sigma} \left( \sum_{n>0} : e^{2b\Phi} : - \sum_{n>k} : e^{2b\Phi} : \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Da questa segue, integrando in  $\sigma$  come nell'equazione (2.19)

$$\begin{aligned} [J_k^\pm, K_m] &= b\sqrt{2} \left( \gamma - \frac{b}{\sqrt{2}} \right) k K_{m \pm k} \\ &\quad - ib\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m \pm k)\sigma} : e^{2b\Phi} \left( \frac{a_0 + a_0^\dagger}{2} + \sum_{n \neq 0} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} e^{\mp in\sigma} \right) : \end{aligned} \tag{2.21}$$

Quindi dalle equazioni (2.17), (2.18) e (2.21) seguono le regole di commutazione per gli operatori  $L_k^\pm$ . Intanto si ha

$$\begin{aligned} [L_m^+, L_k^-] &= b\sqrt{2}(m-k) \left( \gamma - \frac{b}{\sqrt{2}} \right) K_{m-k} - i \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m-k)\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} K(\sigma) \\ &= b\sqrt{2}(m-k) \left( \gamma - \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{1}{b\sqrt{2}} \right) K_{m-k} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo integrato per parti e sfruttato la periodicità in  $\sigma$ . Si vede che questo commutatore si annulla se poniamo

$$\gamma = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{1}{b\sqrt{2}} \quad (2.22)$$

Analogamente abbiamo

$$\begin{aligned} [L_m^\pm, L_k^\pm] &= (m-k) \left( L_{m+k}^\pm - \frac{1}{24} \delta_{k+m} \right) + k^3 \left( \gamma^2 + \frac{1}{12} \right) \delta_{k+m} \\ &\quad + b\sqrt{2}(m-k) \left( \gamma - \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{1}{b\sqrt{2}} \right) K_{\pm(k+m)} \end{aligned}$$

e di nuovo imponendo la condizione (2.22) otteniamo che l'algebra degli operatori  $L_k^\pm$  si chiude.

Abbiamo quindi dimostrato che la simmetria conforme della teoria si ristabilisce al livello quantistico se prendiamo

$$Q = \frac{1}{b} + b \quad (2.23)$$

In questo caso gli operatori  $L_m^\pm$  generano l'algebra di Virasoro

$$[L_k^\pm, L_m^\pm] = (k-m) \left( L_{k+m}^\pm - \frac{1}{24} \delta_{m+n} \right) + \frac{c}{12} k^3 \delta_{m+n} \quad (2.24)$$

$$[L_k^\pm, L_m^\mp] = 0 \quad (2.25)$$

con carica centrale data da

$$c = 1 + 6Q^2 \quad (2.26)$$

Per concludere vogliamo calcolare la dimensione conforme degli operatori di vertice  $V_\alpha =: e^{2\alpha\Phi} :$ . A questo scopo, basta guardare la forma del commutatore di  $V_\alpha$  con gli operatori di Virasoro<sup>2</sup>. Il ragionamento che ha portato all'equazione (2.18) mostra che  $[K_k, V_\alpha] = 0$ . Riconsideriamo invece l'equazione (2.20), che sostituendo  $b$  con  $\alpha$  fornisce il commutatore di  $J_k^+$  con  $V_\alpha$ . Ricordando gli sviluppi in modi di  $\Phi$  e  $\Pi = \dot{\Phi}$  si vede che

$$[L_k^+, : e^{2\alpha\Phi} :] =: e^{2\alpha\Phi} : e^{ik\sigma} k \alpha \sqrt{2} \left( \gamma - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) + e^{ik\sigma} i \frac{\partial_\sigma - \partial_\tau}{2} : e^{2\alpha\Phi} : \quad (2.27)$$

Da qui si legge la dimensione conforme dell'operatore  $V$ :

$$\Delta_\alpha = \alpha \sqrt{2} \left( \gamma - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) = \alpha(Q - \alpha) \quad (2.28)$$

---

<sup>2</sup>Cfr. ad esempio [23] per una discussione generale sull'algebra di Virasoro e campi primari.



Quindi vediamo che la dimensione degli operatori  $V_\alpha$  non è più quella classica  $\alpha/b$  ma compare un contributo in più dovuto essenzialmente alla regolarizzazione del termine di interazione della lagrangiana e degli operatori di vertice.



## Capitolo 3

# Teoria di Liouville sulla sfera

In questo capitolo introduciamo la teoria di Liouville sulla sfera, definendo le proprietà che devono essere soddisfatte dal campo  $\phi$  e dalle sorgenti affinché la teoria sia ben definita. Sviluppiamo anche il formalismo per calcolare le funzioni a  $n$  punti sulla sfera, collegandole all'introduzione di opportune sorgenti esterne [65, 51].

### 3.1 Definizioni

Come già visto il comportamento locale del campo di Liouville è determinato dall'azione (1.3). Tuttavia è necessario specificare anche la topologia della superficie su cui il campo è definito. In questo capitolo e nel seguito della tesi considereremo la teoria di Liouville definita sulla sfera di Riemann, con opportune condizioni di regolarità nel punto all'infinito per il campo  $\phi(z, \bar{z})$ .

Supporremo che questo sia un punto regolare per il campo  $\phi$ . Questa richiesta, assieme alla legge di trasformazione (1.5) implica che il comportamento asintotico del campo deve essere

$$\phi(z, \bar{z}) \longrightarrow -Q \log(z\bar{z}) + \mathcal{O}(1) \quad (3.1)$$

Infatti per vedere qual è il comportamento attorno all'infinito, è sufficiente operare con una mappa conforme che porti questo punto al finito, ad esempio con  $z' \equiv 1/z$ . Allora il campo vicino a  $z' = 0$  è

$$\phi' = \phi - \frac{Q}{2} \log \left( \frac{1}{(z\bar{z})^2} \right) = -Q \log(z\bar{z}) + \mathcal{O}(1) - \frac{Q}{2} \log \left( \frac{1}{(z\bar{z})^2} \right) = \mathcal{O}(1)$$

ovvero  $\phi$  è regolare all'infinito.

Seguendo Zamolodchikov e Zamolodchikov [65] questo comportamento asintotico si può ottenere considerando la teoria di Liouville non su tutto il piano complesso  $\mathbb{C}$  ma su un disco  $\Gamma$  di raggio  $R$ , aggiungendo un termine di bordo all'azione:

$$S[\phi] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d^2x \left[ (\partial_a \phi)^2 + 4\pi\mu e^{2b\phi} \right] + \frac{Q}{\pi R} \int_{\partial\Gamma} \phi dl + 2Q^2 \log R \quad (3.2)$$

e prendendo il limite per  $R \rightarrow \infty$ . L'ultimo termine dell'equazione si introduce per rendere l'azione finita nel limite suddetto.

Questa espressione per l'azione si può anche ricavare formalmente partendo dall'azione di Curtright-Thorne (2.1), attraverso una mappa del cilindro su  $\mathbb{C}$  [30]. Infatti posto  $w = \tau + i\sigma$ , l'azione si può scrivere in coordinate complesse

$$S_{cil}[\phi] = \int_{-T}^T d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \left( \frac{1}{\pi} \partial\phi \bar{\partial}\phi + \mu e^{2b\phi} \right)$$

La striscia si mappa su tutto il piano complesso attraverso la funzione esponenziale<sup>1</sup>:

$$z = e^w \quad (3.3)$$

Il campo di Liouville si trasforma in

$$\phi'(z, \bar{z}) = \phi(w, \bar{w}) - \frac{Q}{2} \log z \bar{z}$$

Il termine esponenziale dell'azione trasforma con uno jacobiano che cancella esattamente quello che compare nella misura di integrazione. Il termine cinetico invece dà origine a nuovi termini, infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \partial_w \phi \bar{\partial}_w \phi &= \frac{1}{\pi} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \partial_z \left( \phi'(z, \bar{z}) + \frac{Q}{2} \log z \bar{z} \right) \bar{\partial}_z \left( \phi'(z, \bar{z}) + \frac{Q}{2} \log z \bar{z} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \left[ \partial_z \phi' \bar{\partial}_z \phi' + \frac{Q}{2\bar{z}} \partial_z \phi' + \frac{Q}{2z} \bar{\partial}_z \phi' + \frac{Q^2}{4z\bar{z}} \right] \end{aligned}$$

Quindi mettendo tutto assieme otteniamo

$$\begin{aligned} S[\phi'] &= \int_{\Gamma} d^2z \frac{1}{\pi} \left( \partial_z \phi' \bar{\partial}_z \phi' + \pi\mu e^{2b\phi'} \right) + \frac{Q}{2\pi} \int_{\Gamma} d^2z \left( \frac{\partial\phi'}{\bar{z}} + \frac{\bar{\partial}\phi'}{z} \right) \\ &\quad + \frac{Q}{4\pi} \int_{\Gamma} d^2z \frac{1}{z\bar{z}} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Questa è una costruzione tipica delle teorie conformi, attraverso cui si introduce l'ordinamento radiale nella funzioni di correlazione. Cfr [23].

dove  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : 1/R < |z| < R\}$ . Gli ultimi due integrali si calcolano esplicitamente passando in coordinate polari  $z = \rho e^{i\theta}$ . Si ha

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{e^{-i\theta}}{2} (\partial_\rho - i\rho^{-1}\partial_\theta) \\ \int_\Gamma d^2z \left( \frac{\partial\phi'}{\bar{z}} + \frac{\bar{\partial}\phi'}{z} \right) &= \int_{1/R}^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \partial_\rho\phi = \frac{2}{R} \oint_R \phi dl - \frac{2}{1/R} \oint_{1/R} \phi dl \\ \int_\Gamma d^2z \frac{1}{z\bar{z}} &= 8\pi \log R \end{aligned}$$

In conclusione l'azione risulta

$$S[\phi'] = \int_\Gamma d^2z \frac{1}{\pi} \left( \partial_z\phi' \bar{\partial}_z\phi' + \pi\mu e^{2b\phi'} \right) + \frac{Q}{\pi R} \oint_R \phi' dl - \frac{QR}{\pi} \oint_{1/R} \phi' dl + 2Q^2 \log R$$

Se il campo è regolare per  $z \rightarrow 0$  il termine proporzionale a  $R$  si annulla nel limite  $R \rightarrow \infty$  e si recupera esattamente l'azione (3.2).

### 3.2 Disuguaglianza sulle sorgenti

Come notato in [49, 19], quando si considera la teoria di Liouville classica sulla sfera in presenza di sorgenti esterne, il fatto che lo spazio è compatto, ovvero in ultima analisi la scelta (3.1) per il comportamento asintotico del campo, comporta l'esistenza di una restrizione sui possibili valori della sorgente. Se infatti si parte dall'equazione del moto

$$-\Delta\phi + 4\pi\mu b e^{2b\phi} + 2\pi J = 0$$

e la si integra su tutto  $\mathbb{C}$  si ottiene

$$-\int d^2x \Delta\phi + 8\pi\mu b \int d^2x e^{2b\phi} + 2\pi \int d^2x J(x) = 0$$

Il secondo integrale è sicuramente positivo, mentre il primo si può riscrivere come integrale di bordo. Considerando il comportamento asintotico del campo attorno al punto all'infinito si ottiene

$$\int_\Gamma d^2x \Delta\phi = \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial\phi}{\partial r} dl = -4\pi Q$$

Di conseguenza si ha la seguente importante disuguaglianza che coinvolge le sorgenti:

$$\int d^2x J(x) < -2Q = -\frac{2}{b} \quad (3.4)$$

Questo risultato fissa un limite sul valore delle sorgenti che possono essere presenti per avere una teoria effettivamente definita sulla sfera. In particolare il caso  $J = 0$  non è permesso. La disuguaglianza (3.4) afferma essenzialmente che affinché lo spazio si possa chiudere a dare una sfera è necessaria la presenza di una quantità sufficientemente grande di carica, in modo da permettere al campo di assumere il giusto comportamento asintotico.

In particolare si vede che sulla sfera, in assenza di cariche, non esiste una soluzione classica per l'equazione di Liouville, ovvero l'azione non ammette un punto stazionario. Questo risultato ha importanti conseguenze quando si vuole descrivere la quantizzazione della teoria di Liouville mediante un integrale funzionale. Questo si fa generalmente sviluppando il campo attorno ad una soluzione classica. Nel nostro caso non sarà possibile scegliere come si fa solitamente un background nullo, perché questo non risolve l'equazione classica di Liouville. Dovremo quindi introdurre delle sorgenti, risolvere il corrispondente problema classico e quindi procedere con un approccio perturbativo attorno al background trovato.

### 3.3 Funzioni a $n$ punti sulla sfera

Come anticipato, nella teoria di Liouville i campi primari conformi sono gli esponenziali del campo  $\phi$ . Definiamo quindi

$$V_\alpha(z, \bar{z}) \equiv e^{2\alpha\phi(z, \bar{z})} \quad (3.5)$$

Siamo interessati alle funzioni di correlazione di questi operatori, che definiamo attraverso l'integrale funzionale

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1, \bar{z}_1) \dots V_{\alpha_n}(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \int [D\phi] e^{-S[\phi]} \prod_{j=1}^n V_{\alpha_j}(z_j, \bar{z}_j) \quad (3.6)$$

dove  $[D\phi]$  è la misura invariante per traslazioni. In questa definizione non dividiamo come si fa solitamente per il valore di aspettazione del vuoto, quindi lasciamo indeterminata la normalizzazione della funzione a  $n$  punti. Quindi per essere precisi sono solo i rapporti tra funzioni a  $n$  punti ad avere un significato assoluto.

Come è noto [23, 6] in un teoria invariante conforme l'interesse sta principalmente nelle funzioni a tre punti. Infatti grazie alla simmetria conforme dalla conoscenza di queste funzioni si possono in linea di principio ricostruire

tutte le altre funzioni di correlazione. Nel seguito ci concentreremo quindi sul calcolo delle funzioni a 3 e 4 punti.

Le inserzioni degli operatori  $V_\alpha$  si possono riscrivere come un termine di sorgente singolare:

$$J = - \sum_{j=1}^n 2\alpha_j \delta^2(z - z_j) \quad (3.7)$$

La disuguaglianza (3.4) implica la seguente relazione tra i pesi degli operatori  $V_\alpha$ :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j > \frac{1}{b} \quad (3.8)$$

Questo risultato ha delle conseguenze estremamente importanti quando si considera lo sviluppo perturbativo in  $b$  delle funzioni di correlazione. Infatti si vede che se  $b \rightarrow 0$  mantenendo costanti gli  $\alpha_i$ , per  $b$  abbastanza piccolo la disuguaglianza (3.8) non è più verificata, ovvero non esiste più una soluzione classica per il campo  $\phi$ . In altri termini l'azione di Liouville non ha più punti stazionari e quindi ci possiamo aspettare che l'integrale funzionale (3.6) sia mal definito.

Se richiediamo che l'area della sfera, data dall'integrale

$$\mathcal{A} = \int d^2x e^{2b\phi(x)}$$

sia finita, otteniamo delle ulteriori restrizioni sulle sorgenti ammissibili. Infatti vicino ad una delle sorgenti abbiamo:

$$\mathcal{A} \equiv \int e^{2b\phi} d^2x \sim 2\pi \int_\epsilon^\Lambda \rho d\rho \rho^{-4b\alpha_i} = 2\pi \int_\epsilon^\Lambda d\rho \rho^{1-4b\alpha_i}$$

e questo integrale è convergente per  $\epsilon \rightarrow 0$  solo se è soddisfatta l'ulteriore condizione

$$\alpha_i < \frac{1}{2b} \quad (3.9)$$

È quindi necessario operare il limite  $b \rightarrow 0$  in modo più accorto, facendo contemporaneamente sì che  $\alpha_i \rightarrow \infty$  tenendo il prodotto  $b\alpha_i$  costante. Introduciamo quindi degli operatori di vertice "pesanti" ponendo [65]:

$$\alpha_i = \frac{\eta_i}{b} \quad (3.10)$$

con gli  $\eta_i$  finiti e costanti per  $b \rightarrow 0$ , da cui segue la disuguaglianza per gli  $\eta_i$

$$\sum_{i=1}^n \eta_i > 1 \quad (3.11)$$

In questo modo nel limite perturbativo  $b \rightarrow 0$  la disuguaglianza rimane verificata ed è nuovamente possibile trovare una soluzione classica che fornisca il background attorno a cui sviluppare il campo di Liouville.

In conclusione, la generica funzione a  $n$  punti può essere calcolata con un integrale funzionale, nel limite di piccola costante di accoppiamento  $b$ , considerando una sorgente composta dalla somma di  $n$  funzioni delta che soddisfi la disuguaglianza (3.8) e sviluppando perturbativamente attorno al corrispondente background soluzione dell'equazione classica di Liouville.

### 3.4 Regolarizzazione dell'azione classica

Consideriamo ora l'azione classica con  $n$  sorgenti puntiformi pesanti, che come visto è legata alla corrispondente funzione a  $n$  punti. L'equazione per il campo di Liouville è in questo caso:

$$-\Delta\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi} = 4\pi \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta^2(z - z_i) = \frac{4\pi}{b} \sum_{i=1}^n \eta_i \delta^2(z - z_i)$$

Utilizzando la nota identità (valida in dimensione due)

$$\Delta \log |z| = 2\pi \delta^2(z) \quad (3.12)$$

si ricava immediatamente che il campo  $\phi$  deve avere il seguente comportamento asintotico attorno alle sorgenti:

$$\phi(z, \bar{z}) \sim -\alpha_i \log |z - z_i|^2 + \mathcal{O}(1) \quad \text{per } z \rightarrow z_i \quad (3.13)$$

In particolare si vede che il campo di Liouville è singolare vicino alle sorgenti. Di conseguenza l'espressione ingenua dell'azione (1.1) è mal definita sulle soluzioni classiche, in quanto il termine di sorgente è il prodotto di delta di Dirac per funzioni singolari nei punti corrispondenti. Quindi è necessario capire come regolarizzare il funzionale d'azione, in modo analogo a quanto fatto attorno al punto all'infinito.



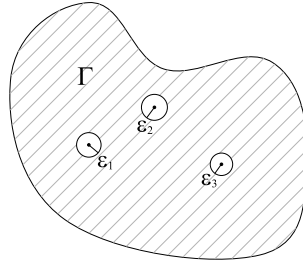


Figura 3.1: Regione di integrazione per l'azione regolarizzata

Quando si tratta con l'azione classica nel limite  $b \rightarrow 0$  è conveniente [65] utilizzare un campo riscaldato

$$\varphi \equiv 2b\phi$$

In termini di questo campo l'azione si riscrive

$$S[\phi] = \frac{1}{b^2} S_{cl}[\varphi]$$

dove

$$S_{cl}[\varphi] = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\partial_a \varphi)^2 + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi} + 4\pi b J \varphi \right] d^2x + \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial\Gamma} \varphi dl + 2 \log R \quad (3.14)$$

Il campo  $\varphi$  risolve l'equazione classica

$$-\Delta\varphi + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi} = 8\pi \sum_{i=1}^n \eta_i \delta(z - z_i) \quad (3.15)$$

e il suo comportamento asintotico è

$$\varphi(z, \bar{z}) \sim -2\eta_i \log |z - z_i|^2 + \mathcal{O}(1) \quad \text{per } z \rightarrow z_i \quad (3.16)$$

Studiamo ora come regolarizzare l'azione per il campo  $\varphi$ , dato il comportamento asintotico (3.16). Il metodo più semplice per fare questo è escludere dal dominio di integrazione dei dischetti di raggio  $\varepsilon_i$  attorno alle sorgenti  $z_i$  (figura 3.1). È però necessario sottrarre degli opportuni termini di bordo all'azione in modo da renderla finita nel limite in cui gli  $\varepsilon_i$  vanno a zero. Il modo standard di fare questa operazione è [65] mediante l'aggiunta del termine

$$-\sum_{i=1}^n (\eta_i \varphi_i + 2\eta_i^2 \log \varepsilon_i) \quad (3.17)$$

avendo definito

$$\varphi_i \equiv \frac{1}{2\pi\varepsilon_i} \int_{\partial\Gamma_i} \varphi dl$$

dove l'integrale è fatto lungo il bordo del dischetto attorno all' $i$ -esima sorgente. Infatti il primo addendo della (3.17) cancella il termine di bordo che si genera dal laplaciano del campo  $\varphi$ , mentre il secondo termine, proporzionale al logaritmo di  $\varepsilon_i$  si aggiunge per rendere finita l'azione nel limite  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  in cui la regolarizzazione è rimossa.

In conclusione la teoria classica di Liouville per  $n$  sorgenti puntiformi è definita dalle condizioni asintotiche (3.16) e dall'azione

$$\begin{aligned} S_{cl}[\varphi] = & \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\partial_a \varphi)^2 + 8\pi\mu b^2 e^\varphi \right] d^2x + \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial\Gamma_R} \varphi dl \\ & + 2 \log R - \sum_{i=1}^n (\eta_i \varphi_i + 2\eta_i^2 \log \varepsilon_i) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Questa espressione possiede importanti proprietà, che risulteranno estremamente utili nel seguito della tesi. Una di queste è collegata alla cosiddetta *congettura di Polyakov*, di cui parleremo nel capitolo 5, dopo aver definito i parametri accessori.

Qui possiamo dimostrare che l'azione classica (3.18) soddisfa il seguente sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\frac{\partial S_{cl}[\varphi]}{\partial \eta_i} = -X_i \quad (3.19)$$

dove  $X_i$  è la parte finita del campo  $\varphi$  per  $z \rightarrow z_i$ , definita da

$$\varphi(z, \bar{z}) \sim -2\eta_i \log |z - z_i|^2 + X_i + o(1) \quad \text{per } z \rightarrow z_i \quad (3.20)$$

e l'azione è calcolata su una soluzione dell'equazione del moto. La dimostrazione è semplice. Il contributo alla derivata da calcolare può venire dall'integrale su  $\Gamma$  oppure dai termini di bordo. Per il primo contributo, l'unica dipendenza dagli  $\eta_i$  può comparire attraverso il comportamento asintotico del campo. Tuttavia l'azione è calcolata su una soluzione dell'equazione classica, quindi la derivata del primo termine rispetto al campo è nulla. Rimane allora solo il contributo dal secondo termine:

$$\frac{\partial S_{cl}[\varphi]}{\partial \eta_i} = -\varphi_i - 4\eta_i \log \varepsilon_i$$

Ma dalla (3.20) si ha

$$\varphi_i = \frac{1}{2\pi\varepsilon_i} \int_{\partial\Gamma_i} \varphi dl = -4\eta_i \log \varepsilon_i + X_i$$

da cui segue immediatamente la tesi.

### 3.5 Teorema di Picard

Un risultato fondamentale per la teoria classica di Liouville, che sfrutteremo ampiamente nel seguito della tesi è dovuto a Picard [41, 60, 36], che dimostrò l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione

$$\Delta\phi = e^\phi + 4\pi \sum_n g_n \delta(z - z_n)$$

per  $\phi$  reale e comportamento asintotico all'infinito dato da

$$\phi(z, \bar{z}) = -g_\infty \log z\bar{z} + \mathcal{O}(1)$$

se le cariche  $g_i$  soddisfano le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{cases} -1 < g_n \\ 1 < g_\infty \\ \sum_n g_n + g_\infty < 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso possiamo considerare l'equazione (3.15) per il campo  $\varphi$ . Il coefficiente del termine esponenziale si può riassorbire in una ridefinizione del campo  $\varphi \rightarrow \varphi + \log(8\pi\mu b^2)$  e così otteniamo esattamente l'equazione considerata da Picard, dove

$$g_n = -2\eta_n$$

Quindi il teorema di Picard ci garantisce esistenza ed unicità della soluzione classica per il campo di Liouville quando le cariche soddisfano la condizione già trovata (3.11) e in più

$$2\eta_n < 1 \quad \forall n \tag{3.21}$$

che corrisponde esattamente alla (3.9).

Riassumendo, nel seguito della tesi considereremo il calcolo di funzioni a  $n$  punti con pesi delle sorgenti che soddisfino le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} 2\eta_i < 1 & \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \eta_i > 1 \end{cases} \tag{3.22}$$

Notiamo che, compatibilmente con le (3.22), il numero minimo di sorgenti che possiamo introdurre è tre.

## Capitolo 4

# Soluzione classica per $n$ sorgenti

In questo capitolo discutiamo un metodo di risoluzione dell'equazione di Liouville in presenza di un numero arbitrario  $n \geq 3$  di sorgenti, attraverso una connessione con certe equazioni differenziali fuchsiane. Questo è un metodo classico, utilizzato in geometria algebrica per lo studio del problema dell'uniformizzazione delle superfici di Riemann [9]. Discutiamo nel dettaglio l'applicazione alla teoria di Liouville come fatto da Bilal e Gervais [7, 8].

### 4.1 Connessione con un'equazione differenziale ordinaria

Abbiamo già visto come l'equazione di Liouville si può riscrivere in termini di un campo riscaldato  $\varphi$  come

$$-\Delta\varphi + 8\pi\mu b^2 e^\varphi = 8\pi \sum_i \eta_i \delta^2(z - z_i)$$

È conveniente riassorbire il coefficiente del termine esponenziale con una ridefinizione del campo:

$$\varphi = \tilde{\varphi} - \log(8\pi\mu b^2)$$

riducendosi all'equazione differenziale

$$-\Delta\tilde{\varphi} + e^{\tilde{\varphi}} = 4\pi \sum_i 2\eta_i \delta(z - z_i) \tag{4.1}$$

In particolare siamo interessati al calcolo del fattore conforme  $e^{2b\phi}$  che in termini del nuovo campo introdotto si scrive semplicemente

$$e^{2b\phi} = \frac{1}{8\pi\mu b^2} e^{\tilde{\varphi}} \quad (4.2)$$

Mostreremo ora una importante connessione tra la soluzione del problema di Liouville (che sappiamo essere unica) e le soluzioni di una particolare equazione differenziale ordinaria [7, 8, 13, 14].

Si verifica intanto facilmente che il tensore energia impulso della teoria, in componenti complesse (1.10), si può riscrivere come

$$Q(z, \bar{z}) \equiv -e^{\frac{\tilde{\varphi}}{2}} \partial^2 e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}} = -\frac{1}{2} \partial^2 \tilde{\varphi} + \frac{1}{4} (\partial \tilde{\varphi})^2$$

L'equazione di Liouville, fuori dalle sorgenti, è semplicemente  $4\partial\bar{\partial}\tilde{\varphi} = e^{\tilde{\varphi}}$ . Questa equazione implica che  $Q(z, \bar{z})$  è una funzione analitica di  $z$ , con singolarità solo nei punti corrispondenti alle sorgenti. Infatti

$$\begin{aligned} \bar{\partial}Q &= -\bar{\partial} \left( e^{\frac{\tilde{\varphi}}{2}} \partial^2 e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \bar{\partial} \partial^2 \tilde{\varphi} + \frac{1}{4} \bar{\partial} (\partial \tilde{\varphi})^2 \\ &= -\frac{1}{2} \partial \left( \frac{e^{\tilde{\varphi}}}{4} \right) + \frac{1}{2} (\partial \tilde{\varphi}) \left( \frac{e^{\tilde{\varphi}}}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial \tilde{\varphi}) \left( \frac{e^{\tilde{\varphi}}}{4} \right) + \frac{1}{2} (\partial \tilde{\varphi}) \left( \frac{e^{\tilde{\varphi}}}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

In modo analogo si può dimostrare che  $\bar{Q} \equiv -e^{\frac{\tilde{\varphi}}{2}} \bar{\partial}^2 e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}}$  è una funzione antianalitica.

Dalla definizione di  $Q(z)$  segue immediatamente che  $e^{-\tilde{\varphi}/2}$  risolve l'equazione differenziale ordinaria con coefficienti analitici:

$$[\partial^2 + Q(z)] e^{-\tilde{\varphi}/2} = 0 \quad (4.3)$$

Similmente dalla definizione di  $\bar{Q}(\bar{z})$  segue che  $e^{-\tilde{\varphi}/2}$  risolve anche l'equazione coniugata complessa

$$[\bar{\partial}^2 + \bar{Q}(\bar{z})] e^{-\tilde{\varphi}/2} = 0 \quad (4.4)$$

Di conseguenza, affinché entrambe le equazioni siano soddisfatte è sufficiente porre

$$e^{-\tilde{\varphi}/2} = \frac{1}{\sqrt{8}} (\psi_2(z) \bar{\chi}_2(\bar{z}) - \psi_1(z) \bar{\chi}_1(\bar{z})) \quad (4.5)$$

dove  $\{\psi_1(z), \psi_2(z)\}$  sono due soluzioni indipendenti dell'equazione (4.3) e  $\{\bar{\chi}_1(\bar{z}), \bar{\chi}_2(\bar{z})\}$  sono viceversa soluzioni indipendenti dell'equazione coniugata (4.4).

Poiché l'equazione di Liouville, a differenza dell'equazione ordinaria (4.3), non è omogenea in  $\varphi$ , è necessario controllare quale sia la giusta normalizzazione delle soluzioni da utilizzare. Per fare questo consideriamo

$$\partial\bar{\partial}e^{-\tilde{\varphi}/2} = \partial\left(-\frac{1}{2}(\bar{\partial}\tilde{\varphi})e^{-\tilde{\varphi}/2}\right) = -\frac{1}{8}e^{\tilde{\varphi}/2} + \frac{1}{4}\bar{\partial}\tilde{\varphi}\partial\tilde{\varphi}e^{-\tilde{\varphi}/2}$$

Usando le identità

$$\begin{aligned}\partial\tilde{\varphi} &= -2e^{\tilde{\varphi}/2}\partial e^{-\tilde{\varphi}/2} \\ \bar{\partial}\tilde{\varphi} &= -2e^{\tilde{\varphi}/2}\bar{\partial} e^{-\tilde{\varphi}/2}\end{aligned}$$

si trova un'equazione che deve essere soddisfatta da  $e^{-\tilde{\varphi}/2}$ , ovvero:

$$e^{-\tilde{\varphi}/2}\partial\bar{\partial}e^{-\tilde{\varphi}/2} - \left(\partial e^{-\tilde{\varphi}/2}\right)\left(\bar{\partial}e^{-\tilde{\varphi}/2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Inserendo l'espressione (4.5) si ottiene:

$$\begin{aligned}-1 &= [\psi_2(z)\bar{\chi}_2(\bar{z}) - \psi_1(z)\bar{\chi}_1(\bar{z})][\psi_2'(z)\bar{\chi}_2'(\bar{z}) - \psi_1'(z)\bar{\chi}_1'(\bar{z})] \\ &\quad - [\psi_2'(z)\bar{\chi}_2(\bar{z}) - \psi_1'(z)\bar{\chi}_1(\bar{z})][\psi_2(z)\bar{\chi}_2(\bar{z}) - \psi_1(z)\bar{\chi}_1(\bar{z})] \\ &= -[\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2][\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2' - \bar{\chi}_1'\bar{\chi}_2] = -W[\psi]W[\bar{\chi}]\end{aligned}$$

da cui segue che è sufficiente richiedere che le coppie di soluzioni abbiano wronskiano unitario.

Inoltre le soluzioni  $\chi_i(z)$  saranno combinazioni lineari delle  $\psi_i(z)$  e quindi l'equazione (4.5) si può riscrivere in forma compatta come:

$$e^{-\tilde{\varphi}/2} = \frac{1}{\sqrt{8}}\psi_i\zeta_{ij}M_{jk}\bar{\psi}_k \equiv \frac{1}{\sqrt{8}}\psi_i H_{jk}\bar{\psi}_k$$

dove  $M_{jk}$  è la coniugata della matrice di cambiamento di base che connette le  $\psi$  con le  $\chi$  e  $\zeta$  è definita da

$$\zeta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché entrambe le coppie di soluzioni hanno wronskiano unitario, la matrice  $M$  deve avere determinante 1 e  $H$  determinante  $-1$ . La richiesta che il campo  $\tilde{\varphi}$  sia reale implica che  $H$  è hermitiana. Quindi è possibile

scegliere una opportuna base per le soluzioni in cui  $H$  assume una forma diagonale

$$H = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

e attraverso un riscaldamento si può infine ottenere la forma canonica

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero si riscrive  $e^{-\bar{\varphi}/2}$  in termini di una coppia  $\{y_1, y_2\}$  di soluzioni dell'equazione  $y'' + Qy = 0$  con wronskiano unitario

$$e^{-\bar{\varphi}/2} = \frac{1}{\sqrt{8}} (y_2 \bar{y}_2 - y_1 \bar{y}_1)$$

In conclusione la più generale forma del fattore conforme che risolva l'equazione di Liouville si ottiene considerando due soluzioni indipendenti  $\{y_1, y_2\}$  dell'equazione differenziale

$$y''(z) + Q(z)y(z) = 0 \tag{4.6}$$

e costruendo la quantità

$$e^{2b\phi} = \frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{|w_{12}|^2}{(y_2 \bar{y}_2 - y_1 \bar{y}_1)^2} \tag{4.7}$$

dove si è indicato con  $w_{12} \equiv y_1 y_2' - y_1' y_2$  il wronskiano delle due soluzioni. Come noto  $w_{12}$  è costante poiché l'equazione differenziale (4.6) non contiene termini proporzionali a  $y'$  [46].

## 4.2 Proprietà dell'equazione differenziale

Poiché abbiamo ricondotto il problema della risoluzione dell'equazione di Liouville ad un'equazione ordinaria con coefficiente analitico, è opportuno riassumere le principali proprietà di questo tipo di equazioni (un testo classico in cui tutti i risultati citati nel seguito sono dimostrati è ad esempio [46]).

Il coefficiente  $Q(z)$  come visto è analitico e monodromo, essendo il tensore energia-impulso della teoria. Quindi potrà avere solamente singolarità



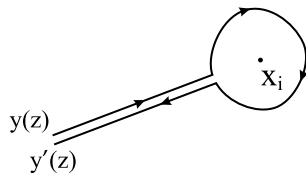


Figura 4.1: Circuito attorno ad una delle singolarità

isolate in corrispondenza delle sorgenti. In generale le soluzioni  $y_i$  non saranno monodrome, ma è noto che se si parte da una coppia di soluzioni indipendenti in un punto  $x_0$  e si esegue un circuito attorno ad una delle singolarità  $x_i$  ritornando quindi al punto iniziale (figura 4.1), le due soluzioni si saranno trasformate in una combinazione lineare delle originali. La matrice di cambiamento di base è detta anche *matrice di monodromia* attorno alla singolarità  $i$ -esima. Poiché il wronskiano è costante, le matrici di monodromia appartengono a  $SL(2, \mathbb{C})$ , ovvero sono matrici complesse  $2 \times 2$  con determinante uguale a 1.

In generale  $Q(z)$  potrà avere poli semplici di ordine qualsiasi. Un risultato importante dovuto a Fuchs è che se i poli sono al più di secondo ordine (*singolarità regolari*) allora nell'intorno di ogni singolarità le soluzioni si comportano come potenze complesse di  $z$ . Se invece i poli sono di ordine superiore il comportamento delle soluzioni non è di potenza e quindi non si potrebbe riprodurre il corretto comportamento asintotico (3.16) del fattore conforme<sup>1</sup>. Un'equazione le cui singolarità siano tutte regolari è detta *fuchsiana*. Sappiamo già che  $Q(z)$  è analitico su tutto il piano complesso a meno delle posizioni delle sorgenti. Questo determina completamente la forma di  $Q(z)$  a meno del valore dei residui dei poli:

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1 - \lambda_i^2}{4(z - z_i)^2} + \frac{\beta_i}{2(z - z_i)} \quad (4.8)$$

Il valore dei coefficienti  $\lambda_i$  sarà determinato completamente dalla richiesta (3.13) per il comportamento asintotico del campo. Invece la determinazione dei *parametri accessori*  $\beta_i$  è più complessa e ne discuteremo in seguito.

Dato  $Q(z)$  come sopra, il comportamento delle soluzioni attorno ad una delle singolarità si ricava come noto con uno sviluppo in serie di potenze ed

<sup>1</sup>Una discussione dettagliata di questo punto in nel contesto del problema dell'uniformizzazione delle superfici di Riemann si può trovare ad esempio in [34].

è della forma

$$y_{1,2}(z) \sim (z - z_i)^{\rho_{\pm}}$$

dove  $\rho_{\pm}$  sono detti *indici* della singolarità e valgono nel nostro caso

$$\rho_{\pm} = \frac{1 \pm \lambda_i}{2} \quad (4.9)$$

Da questo risultato ricaviamo immediatamente il comportamento attorno alla singolarità (che per semplicità assumeremo trovarsi in 0) del campo di Liouville. Infatti dall'equazione

$$e^{\varphi} = \frac{1}{\pi \mu b^2} \frac{|w_{12}|^2}{(y_2 \bar{y}_2 - y_1 \bar{y}_1)^2} \quad (4.10)$$

si ricava che la parte singolare del campo si comporta come

$$\begin{aligned} \varphi &\sim -2 \log (y_2 \bar{y}_2 - y_1 \bar{y}_1) \\ &\sim -2 \log ((z \bar{z})^{\rho_-} - (z \bar{z})^{\rho_+}) \\ &\sim -2 \log (z \bar{z})^{\rho_-} = -4 \rho_- \log |z| \end{aligned} \quad (4.11)$$

dove si è scelto come indice  $\rho_-$  quello minore tra i due. Da questa equazione e dalla (3.16) segue l'identificazione  $-4 \rho_- = -4 \eta_i$  ovvero considerando l'equazione (4.9)

$$\lambda_i = \pm(1 - 2 \eta_i) \quad (4.12)$$

Il segno è irrilevante poiché nell'equazione differenziale compaiono solo i quadrati dei  $\lambda_i$ .

Dalla condizione sugli  $\eta_i$  equazione (3.11) si ricava l'equivalente per i  $\lambda_i$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i < n - 2 \\ \lambda_i > 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

### 4.3 Parametri accessori

A partire dalle condizioni asintotiche per il campo  $\varphi$  abbiamo determinato completamente i residui dei poli di secondo ordine di  $Q(z)$ . Ora vogliamo analizzare cosa si può dire dei poli di primo ordine, ovvero dei parametri accessori  $\beta_i$ .

Senza perdere generalità possiamo supporre che tutte le sorgenti, ovvero tutte le singolarità di  $Q(z)$ , siano al finito. Se questo non fosse il caso

basterebbe operare una trasformazione conforme per portare la singolarità nel punto all'infinito in un punto al finito. Supponiamo quindi che il punto all'infinito sia un punto regolare per l'equazione differenziale (4.6). Di conseguenza è necessario che  $Q(z)$  non sia singolare per  $z \rightarrow \infty$ . Per studiare il comportamento in questo limite è conveniente operare la trasformazione di coordinate  $\zeta = \frac{1}{z}$ . L'equazione differenziale risultante è

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-2} \frac{d^2 \zeta}{dz^2} \frac{dy}{d\zeta} + \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-2} Q(z(\zeta)) y = 0$$

ovvero

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta} \frac{dy}{d\zeta} + \frac{1}{\zeta^4} Q(z(\zeta)) y = 0$$

Affinché il punto all'infinito sia regolare è necessario che il nuovo coefficiente del termine non derivativo sia regolare in  $\zeta = 0$ . Sostituendo la variabile  $\zeta$  in  $Q(z)$  e operando uno sviluppo in serie si ottiene

$$\begin{aligned} \zeta^{-4} Q(\zeta) &= \frac{1}{2\zeta^3} \sum_{i=1}^n \beta_i + \frac{1}{2\zeta^2} \sum_{i=1}^n \left[ \beta_i \zeta_i - \frac{1}{2}(1 - \lambda_i^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\zeta} \sum_{i=1}^n [z_i(1 - \lambda_i^2) + \beta_i z_i^2] + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Quindi la condizione di regolarità all'infinito fornisce il seguente sistema lineare di tre equazioni per  $n$  variabili:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \beta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n [2\beta_i \zeta_i - (1 - \lambda_i^2)] = 0 \\ \sum_{i=1}^n [\beta_i z_i^2 + \zeta_i(1 - \lambda_i^2)] = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Vediamo in particolare che nel caso di tre sole singolarità il sistema (4.14) determina completamente anche i residui dei poli di primo ordine, e quindi la forma di  $Q(z)$  è univocamente determinata dalla posizione e dalla carica delle sorgenti. Nel caso di  $n > 3$  singolarità invece rimangono  $n-3$  parametri liberi nell'espressione di  $Q(z)$ .

Prima di ritornare direttamente al problema della soluzione dell'equazione di Liouville è opportuno citare un importante risultato noto come *congettura di Polyakov* [14, 15, 13]. Questo risultato connette i parametri accessori all'azione regolarizzata (3.18) della teoria classica di Liouville. Vale infatti il seguente sistema di equazioni alle derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial z_n} S_{cl}[\varphi(z_1, \dots, z_n; \eta_1, \dots, \eta_m)] = -\frac{\beta_n}{2} \quad (4.15)$$

dove l'azione è calcolata sulla soluzione classica. Questo risultato è dimostrato rigorosamente in [52, 53, 13]. La nostra azione differisce da quella di [13] per una diversa definizione del campo  $\varphi$  e per un fattore moltiplicativo  $1/4\pi$ , di cui abbiamo tenuto conto nella normalizzazione dell'equazione (4.15).

#### 4.4 Monodromia $SU(1, 1)$

Come già detto in generale le due soluzioni  $\{y_1, y_2\}$  non saranno monodrome su tutto il piano complesso, ma presenteranno tagli e matrici di monodromia non banali attorno alle sorgenti. Tuttavia la soluzione (4.7) per il campo di Liouville deve essere monodroma per essere accettabile. Il termine che conta è il denominatore, ovvero essenzialmente

$$(y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2) = Y^\dagger \zeta Y$$

dove si è indicato con  $Y$  il vettore colonna delle due soluzioni e con  $\zeta$  la matrice

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Quando si considera un circuito attorno alla  $i$ -esima singolarità si ha  $Y \rightarrow M_i Y$  e quindi

$$Y^\dagger \zeta Y \rightarrow Y^\dagger \left( M_i^\dagger \zeta M_i \right) Y$$

Quindi affinché la soluzione per il campo di Liouville sia monodroma è necessario che  $M_i^\dagger \zeta M_i = \zeta$ . Ovvero, poiché sappiamo già che  $M_i \in SL(2, \mathbb{C})$ , deve accadere che  $M_i \in SU(1, 1)$ .

La coppia di soluzioni  $y_i$  va quindi scelta opportunamente in modo che le matrici di monodromia attorno ad ognuna delle sorgenti siano elementi di  $SU(1, 1)$ .

Abbiamo già notato che vicino ad ogni singolarità si può scegliere una coppia di soluzioni canoniche con andamento di potenza:

$$\begin{cases} y_1 \sim (z - z_i)^{\frac{1-\lambda_i}{2}} \\ y_2 \sim (z - z_i)^{\frac{1+\lambda_i}{2}} \end{cases}$$

La matrice di monodromia attorno a  $z_i$  di questa coppia di soluzioni è evidentemente

$$M_i = \begin{pmatrix} -e^{-i\pi\lambda_i} & 0 \\ 0 & -e^{+i\pi\lambda_i} \end{pmatrix}$$

Segue che gli autovalori delle matrici di monodromia sono diversi e che la traccia delle matrici (*classe della monodromia*) è data da

$$\text{tr } M_i = -2 \cos \pi \lambda_i$$

## 4.5 Proprietà di $SU(1, 1)$

Prima di procedere è opportuno studiare alcune proprietà del gruppo  $SU(1, 1)$  che ci saranno utili nel seguito. Se  $U \in SU(1, 1)$  allora per definizione

$$U^\dagger \zeta U = \zeta \tag{4.17}$$

$$\det U = 1 \tag{4.18}$$

In particolare se indichiamo con  $(\cdot, \cdot)$  il prodotto hermitiano standard in  $\mathbb{C}^2$  si ha che la trasformazione  $U$  preserva la forma quadratica  $(\cdot, \zeta \cdot)$ .

Studiamo qual è la forma più generale di una matrice di  $SU(1, 1)$ . Una generica matrice  $2 \times 2$  si può scrivere in una base completa formata dalle matrici  $\sigma$ :

$$U = a_0 \sigma_0 + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$$

Come noto si ha

$$\det U = a_0^2 - \vec{b}^2$$

$$U^{-1} = a_0 \sigma_0 - \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$$

Ma dall'equazione (4.17) si ricava  $U^{-1} = \zeta U^\dagger \zeta$  ovvero

$$a_0 \sigma_0 - \vec{b} \cdot \vec{\sigma} = a_0 \sigma_0 + \zeta \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \zeta$$

Poiché  $\zeta \sigma_3 \zeta = \sigma_3$ ,  $\zeta \sigma_2 \zeta = -\sigma_2$ ,  $\zeta \sigma_1 \zeta = -\sigma_1$  si ottengono le condizioni:

$$\begin{cases} a_0 = \bar{a}_0 \\ b_1 = \bar{b}_1 \\ b_2 = \bar{b}_2 \\ b_3 = -\bar{b}_3 \end{cases}$$

In conclusione, ridefinendo  $b_3 \rightarrow ib_3$ , la forma di  $U$  risulta

$$U = \begin{pmatrix} a_0 + ib_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a_0 - ib_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

con la condizione  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ .

Studiamo ora gli autovalori di  $U$ . Sia  $y \in \mathbb{C}^2$  tale che  $Uy = \lambda y$ . Allora

$$(y, \zeta y) = (Uy, \zeta Uy) = \bar{\lambda}\lambda(y, \zeta y)$$

ovvero se  $(y, \zeta y) \neq 0$  l'autovalore ha modulo unitario. Siano ora  $y_1$  e  $y_2$  due autovettori con autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Allora

$$(y_2, \zeta y_1) = \bar{\lambda}_2\lambda_1(y_2, \zeta y_1)$$

cioè se  $\bar{\lambda}_2\lambda_1 \neq 1$  allora i due autovettori sono  $\zeta$ -ortogonali. Dall'equazione (4.19) si ricava l'equazione secolare per gli autovalori

$$\lambda^2 - \lambda(a + \bar{a}) + 1 = 0$$

ovvero  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 = a + \bar{a} \in \mathbb{R}$ . Quindi si hanno le nuove condizioni

$$\begin{cases} \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \\ |\lambda_1| = |\lambda_2| \end{cases} \quad (4.20)$$

Se i due autovalori fossero uguali si avrebbe  $\lambda_1^2 = 1$  ovvero  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ . Se sono diversi si deve avere  $\lambda_1 = e^{i\alpha}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\alpha}$ , da cui segue  $\bar{\lambda}_2\lambda_1 = e^{2i\alpha} \neq 1$ . Quindi per quanto detto prima i due autovalori sono  $\zeta$ -ortogonali. In conclusione, come visto nel nostro caso gli autovalori sono sempre diversi e di conseguenza considereremo solo il caso in cui i due autovettori sono  $\zeta$ -ortogonali e quindi indipendenti.

Rimangono solo da studiare le proprietà di diagonalizzazione delle matrici di  $SU(1, 1)$ . Poiché il prodotto scalare definito da  $\zeta$  è non degenere, l'insieme  $\{(y, \zeta y) \neq 0\}$  è una varietà bidimensionale in  $\mathbb{C}^2$ . Questo implica che  $(y_1, \zeta y_1) \neq 0$  e  $(y_2, \zeta y_2) \neq 0$  perché altrimenti la varietà diventerebbe unidimensionale. Inoltre poiché  $\zeta$  è hermitiana questi prodotti scalari sono reali. Allora in generale posso scrivere la matrice  $U$  attraverso i proiettori sugli autospazi:

$$U = \left[ \lambda_1 \frac{y_1 \circ y_1}{(y_1, \zeta y_1)} + \lambda_2 \frac{y_2 \circ y_2}{(y_2, \zeta y_2)} \right] \zeta$$

Poiché  $y_1$  e  $y_2$  sono ortogonali posso scegliere la normalizzazione in modo che  $(y_1, \zeta y_1) = -(y_2, \zeta y_2) = 1$ . Allora

$$\zeta = \zeta y_1 \circ y_1 \zeta - \zeta y_2 \circ y_2 \zeta \quad (4.21)$$

$$U = \lambda_1 y_1 \circ y_1 \zeta - \lambda_2 y_2 \circ y_2 \zeta \quad (4.22)$$

La trasformazione che diagonalizza  $U$  si può scrivere in forma matriciale, scegliendo una base canonica di  $\mathbb{C}^2$  tale che  $(u_1, \zeta u_1) = -(u_2, \zeta u_2) = 1$  e  $(u_1, \zeta u_2) = 0$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (y_1, \zeta u_1) & (y_1, \zeta u_2) \\ (y_2, \zeta u_1) & (y_2, \zeta u_2) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

A questo punto è facile verificare che  $\Lambda^\dagger \zeta \Lambda = \zeta$ , utilizzando l'equazione (4.21) calcolata tra le coppie di vettori canonici  $u_i$ .

Di conseguenza abbiamo dimostrato un risultato importante, ovvero che una matrice  $SU(1, 1)$  con autovalori diversi può essere diagonalizzata con una matrice ancora di  $SU(1, 1)$ .

## 4.6 Imposizione della monodromia

In generale avremo  $n$  singolarità nel piano complesso, e una coppia di soluzioni indipendenti  $\{y_1, y_2\}$  dell'equazione differenziale fuchsiana (4.6) non monodrome ma con delle matrici di monodromia fissate  $M_i$  attorno alle sorgenti. Il problema consiste nel cercare una nuova coppia di soluzioni tali che le corrispondenti matrici di monodromia siano elementi di  $SU(1, 1)$ . In questo modo è garantito che il fattore conforme risultante è monodromo.

Per ottenere questo risultato possiamo operare su due tipi di parametri. In primo luogo possiamo fare una trasformazione lineare delle soluzioni. In questo modo posto

$$X = AY \quad (4.24)$$

si ottiene con un circuito attorno all' $i$ -esima singolarità:

$$X' = AY' = AM_i Y = AM_i A^{-1} Y \quad (4.25)$$

ovvero la matrice di monodromia attorno a  $z_i$  delle nuove soluzioni risulta essere

$$M_i(Y) = A M_i(X) A^{-1} \quad (4.26)$$

In secondo luogo nel caso di  $n > 3$  singolarità abbiamo anche  $n - 3$  parametri accessori nell'equazione differenziale che devono essere aggiustati per permettere alle soluzioni di dare le giuste monodromie.

Il nostro problema è sostanzialmente una variante del classico problema di Riemann-Hilbert [9]. In quest'ultimo si fissa il gruppo di monodromia attorno alle singolarità e si vuole determinare l'equazione differenziale fuchsiana che realizza queste monodromie. Nel nostro caso invece abbiamo fissato la classe della monodromia attorno ad ogni singolarità (ovvero la carica della corrispondente sorgente) e richiediamo che la monodromia sia globalmente  $SU(1,1)$ . Quindi non possiamo applicare direttamente il teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Riemann-Hilbert. Il teorema di Picard entra ora in gioco pesantemente, in quanto garantisce esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione di Liouville. Ovvero ci dice che è sempre possibile trovare una opportuna matrice  $A$  di cambiamento di base per le soluzioni e un insieme unico di parametri accessori che realizza monodromie  $SU(1,1)$  attorno a tutte le singolarità.

Specifichiamo ora meglio come si procede operativamente per imporre che le monodromie siano in  $SU(1,1)$ .

Intanto è evidente che le soluzioni cercate saranno determinate a meno di trasformazioni ancora di  $SU(1,1)$ . Infatti come visto in questo caso le matrici di monodromia trasformano per coniugazione, ovvero rimangono in  $SU(1,1)$ . Per fissare questa arbitrarietà possiamo scegliere una forma canonica per la monodromia attorno ad una delle singolarità, che supponiamo essere posta ad esempio in  $z = 0$ . L'osservazione cruciale è che le matrici di  $SU(1,1)$  si possono diagonalizzare per coniugazione con un elemento ancora nel gruppo. Poiché sappiamo che gli autovalori delle monodromie sono diversi, possiamo in tutta generalità supporre che la matrice in 0 sia diagonale, ovvero della forma

$$M_0 = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

La coppia di soluzioni corrispondenti a questa trasformazione è detta *canonica in 0*. A questo punto l'arbitrarietà rimanente è ristretta all'operare trasformazioni di  $SL(2, \mathbb{C})$  che lascino invariata la forma (4.27). Si vede facilmente che, a parte i casi particolari in cui  $e^{i\alpha} \in \{\pm i, \pm 1\}$ , le uniche



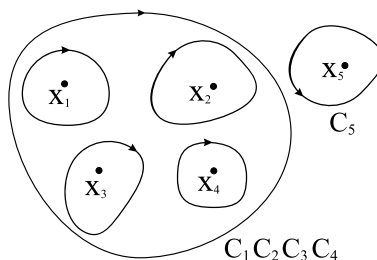


Figura 4.2: Composizione di circuiti attorno alle singolarità.

trasformazioni permesse sono del tipo

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

In realtà la fase di  $k$  non è importante, in quanto può essere riassorbita da una trasformazione diagonale di  $SU(1, 1)$ . Possiamo quindi assumere che  $k$  sia reale. Questo semplifica notevolmente il problema, in quanto riduce ad un solo parametro la trasformazione più generale delle soluzioni.

In conclusione, nel caso generale di  $n$  sorgenti, è necessario imporre la monodromia  $SU(1, 1)$  di  $n$  matrici. Tuttavia una di queste si può scrivere come prodotto dell'inverso di tutte le altre, infatti un circuito chiuso attorno ad una singolarità è equivalente alla composizione di circuiti inversi attorno a tutte le altre (figura 4.2). In più una delle matrici si impone essere in forma diagonale. Rimangono cioè  $n - 2$  condizioni di monodromia, equivalenti per la (4.19) a  $2(n - 2)$  condizioni complesse, poiché sappiamo già che le matrici di monodromia sono in  $SL(2, \mathbb{C})$ . I parametri arbitrari sono invece il  $k$  della trasformazione lineare delle soluzioni e gli  $n - 3$  parametri accessori. Ovvero in tutto rimangono  $n - 2$  parametri liberi.

Evidentemente le  $2(n - 2)$  condizioni di monodromia non possono essere tutte indipendenti, in quanto il teorema di Picard come già citato garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione di Liouville, ovvero in ultima analisi del problema delle monodromie.



## Capitolo 5

# Soluzione classica per 3 sorgenti

In questo capitolo specializziamo la discussione del capitolo precedente al caso esattamente risolubile di tre sorgenti [7, 8], ricavando nel dettaglio i risultati citati da Zamolodchikov e Zamolodchikov [65]. Discutiamo la forma delle soluzioni, del fattore conforme e dell'azione classica.

### 5.1 Equazione differenziale

Per iniziare supponiamo che le tre sorgenti siano poste nei punti  $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ . In generale possiamo sempre operare con una trasformazione di  $SL(2, \mathbb{C})$  per ricondurci a questa situazione:

$$z \longrightarrow w = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z)(z_2 - z_1)} \quad (5.1)$$

dove  $z_1, z_2, z_3$  sono le posizioni originarie delle sorgenti.

Notiamo che la disuguaglianza sulle sorgenti (4.13) in questo caso diventa

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 1 \quad (5.2)$$

L'equazione differenziale fuchsiana (4.6) è completamente determinata, infatti i tre parametri accessori devono soddisfare il sistema (4.14) di tre equazioni. In seguito ci servirà conoscere la forma dei parametri accessori per posizioni arbitrarie delle sorgenti. Il sistema si riscrive quindi nel seguente

modo:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ 2z_1\beta_1 + 2z_2\beta_2 + 2z_3\beta_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \\ z_1^2\beta_1 + z_2^2\beta_2 + z_3^2\beta_3 = -(1 - \lambda_1^2)z_1 - (1 - \lambda_2^2)z_2 - (1 - \lambda_3^2)z_3 \end{cases} \quad (5.3)$$

e si trova facilmente che le soluzioni sono:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 1}{2(z_1 - z_2)} + \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1}{2(z_1 - z_3)} \\ \beta_2 = \frac{-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1}{2(z_2 - z_3)} - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - 1}{2(z_1 - z_2)} \\ \beta_3 = -\frac{-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1}{2(z_2 - z_3)} - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1}{2(z_1 - z_3)} \end{cases} \quad (5.4)$$

Il coefficiente  $Q(z)$  dell'equazione differenziale si scrive come già visto

$$Q(z) = \sum_{i=1}^3 \frac{1 - \lambda_i^2}{4(z - z_i)^2} + \frac{\beta_i}{2(z - z_i)}$$

In particolare la parte di poli di primo ordine, se si pone  $z_1 = 0$  e  $z_2 = 1$ , diventa

$$\frac{1 - 3z + z\lambda_1^2 + z\lambda_2^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_2^2 - z_3(-1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2)}{4(z - 1)z(z - z_3)}$$

Quindi nel limite  $z_3 \rightarrow \infty$  si ottiene la forma finale di  $Q(z)$ :

$$Q(z) = \frac{1 - \lambda_1^2}{4z^2} + \frac{1 - \lambda_2^2}{4(z - 1)^2} + \frac{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{4z(1 - z)} \quad (5.5)$$

Questo risultato si poteva anche ottenere per altra via considerando che per sorgenti in  $0, 1, \infty$  il coefficiente  $Q(z)$  deve essere analitico ovunque tranne che nei punti corrispondenti alle sorgenti. La forma più generale allora è una funzione con poli di primo e secondo ordine in  $0$  e in  $1$ . I residui di secondo ordine sono fissati come già visto. Quelli di primo ordine si fissano sempre passando alla variabile  $1/z$  e chiedendo che in  $0$  la singolarità sia regolare con corretto residuo del polo di secondo ordine.

## 5.2 Soluzione dell'equazione

L'equazione differenziale da risolvere è quindi

$$y'' + \left[ \frac{1 - \lambda_1^2}{4z^2} + \frac{1 - \lambda_2^2}{4(z - 1)^2} + \frac{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{4z(1 - z)} \right] y = 0 \quad (5.6)$$

Essendo un'equazione fuchsiana con tre singolarità, è riconducibile all'equazione ipergeometrica [46]. Introducendo la notazione della funzione  $P$  di Riemann, lo schema delle soluzioni della nostra equazione è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc|c} \frac{1-\lambda_1}{2} & -\frac{1+\lambda_3}{2} & \frac{1-\lambda_2}{2} & x \\ \frac{1+\lambda_1}{2} & -\frac{1-\lambda_3}{2} & \frac{1+\lambda_2}{2} & \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

Con questa notazione si indicano in ogni colonna i due indici caratteristici dell'equazione rispettivamente nei punti  $0, \infty, 1$ .

L'equazione ipergeometrica nella sua forma canonica si può ottenere ricordando una proprietà di trasformazione della funzione  $P$  di Riemann:

$$x^\delta (1-x)^\epsilon P \left\{ \begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{ccc|c} \alpha + \delta & \beta - \delta - \epsilon & \gamma + \epsilon & x \\ \alpha' + \delta & \beta' - \delta - \epsilon & \gamma' + \epsilon & \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

Ponendo allora  $\delta = \frac{1-\lambda_1}{2}$  e  $\epsilon = \frac{1-\lambda_2}{2}$  lo schema (5.7) diventa

$$P \left\{ \begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}{2} & 0 & x \\ \lambda_1 & \frac{1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{2} & \lambda_2 & \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

Confrontando con lo schema dell'equazione ipergeometrica in forma canonica

$$P \left\{ \begin{array}{ccc|c} 0 & a & 0 & x \\ 1-c & b & c-a-b & \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} a = \frac{1-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}{2} \\ b = \frac{1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{2} \\ c = 1 - \lambda_1 \end{cases} \quad (5.11)$$

e la corrispondente equazione ipergeometrica

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad (5.12)$$

Due soluzioni linearmente indipendenti di questa equazione si possono ottenere in un intorno dell'origine attraverso uno sviluppo in serie di potenze [46]:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= {}_2F_1(a, b, c; x) \\ u_2(x) &= x^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; x) \end{aligned}$$

dove  ${}_2F_1(a, b, c; x)$  è la funzione ipergeometrica definita in un intorno dell'origine [64] da

$${}_2F_1(a, b, c; x) \equiv 1 + \frac{ab}{1!c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \dots \quad (5.13)$$

Le funzioni ipergeometriche soddisfano un certo numero di proprietà ed identità che saranno utili nel seguito della discussione [64, 28].

In conclusione le due soluzioni dell'equazione fuchsiana (5.6) con cui costruiremo il campo classico di Liouville per tre sorgenti sono:

$$\begin{cases} y_1(x) = x^{\frac{1-\lambda_1}{2}} (1-x)^{\frac{1-\lambda_2}{2}} {}_2F_1(a, b, c; x) \\ y_2(x) = x^{\frac{1+\lambda_1}{2}} (1-x)^{\frac{1-\lambda_2}{2}} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; x) \end{cases} \quad (5.14)$$

### 5.3 Monodromie

Dobbiamo ora studiare le proprietà di monodromia delle due soluzioni. La funzione ipergeometrica, come appare chiaro dalla sua definizione (5.13), è analitica in un intorno dell'origine, ovvero della prima sorgente. Le due soluzioni hanno quindi un andamento di potenza per  $z \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} y_1(z) \sim z^{\frac{1-\lambda_1}{2}} \\ y_2(z) \sim z^{\frac{1+\lambda_1}{2}} \end{cases} \quad (5.15)$$

La trasformazione di queste soluzioni dopo un circuito attorno a 0 è molto semplice. La corrispondente matrice di monodromia è già in forma diagonale:

$$M_0 = \begin{pmatrix} -e^{-i\pi\lambda_1} & 0 \\ 0 & -e^{i\pi\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

In particolare questa matrice è un elemento di  $SU(1,1)$  e quindi le due soluzioni  $y_1, y_2$  sono canoniche in 0.

Il passo successivo è il calcolo della matrice di monodromia attorno alla sorgente in 1. Questo è un calcolo standard che si può trovare ad esempio in [28]. Tuttavia è utile riprodurlo in maniera leggermente diversa, in quanto questa sarà simile ai metodi che utilizzeremo nel seguito per problemi più complessi. Per fare questo occorre utilizzare le note formule di prolungamento analitico della funzione ipergeometrica [64, 28]:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= A_{11} {}_2F_1(a, b, a+b-c+1; 1-z) \\ &\quad + A_{12} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b-1; 1-z) \end{aligned}$$

$$z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z) = A_{21} {}_2F_1(a, b, a+b-c+1; 1-z) \\ + A_{22} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z)$$

dove la matrice  $A_{ij}$  è definita da

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

e  $\Gamma(x)$  è la funzione gamma di Eulero.

Per trovare come le soluzioni  $y_1, y_2$  trasformano tra di loro dopo un circuito attorno al punto 1 è sufficiente studiare lo sviluppo delle stesse all'ordine più basso in  $\zeta \equiv 1-z$ :

$$y_1(z) \sim A_{11}\zeta^{\frac{1-\lambda_2}{2}} + A_{12}\zeta^{\frac{1+\lambda_2}{2}} \\ y_2(z) \sim A_{21}\zeta^{\frac{1-\lambda_2}{2}} + A_{22}\zeta^{\frac{1+\lambda_2}{2}}$$

Dopo un circuito attorno a 1 le due soluzioni non trasformano in modo diagonale, ovvero non sono canoniche anche attorno a 1. Tuttavia le seguenti combinazioni lineari lo sono:

$$A_{22}y_1 - A_{12}y_2 = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\zeta^{\frac{1-\lambda_2}{2}} \\ A_{11}y_2 - A_{21}y_1 = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\zeta^{\frac{1+\lambda_2}{2}}$$

La matrice di monodromia di questa coppia di soluzioni canoniche è diagonale e ha la stessa forma di quella in zero (5.16), sostituendo  $\lambda_1$  con  $\lambda_2$ . Ricordando come cambiano le matrici di monodromia per una trasformazione lineare delle soluzioni, equazione (4.26), si ottiene facilmente:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2 A_{12} A_{21} - A_{11} A_{22}}{A_{22} A_{11} - A_{12} A_{21}} & - \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \frac{A_{11} A_{12}}{A_{22} A_{11} - A_{12} A_{21}} \\ \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \frac{A_{21} A_{22}}{A_{22} A_{11} - A_{12} A_{21}} & \frac{1}{\rho} \frac{A_{12} A_{21} - \rho^2 A_{11} A_{22}}{A_{22} A_{11} - A_{12} A_{21}} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

posto  $\rho = e^{i\pi\lambda_2}$ . Usando alcune identità che coinvolgono la funzione gamma [28, 64] si può semplificare ancora il risultato ottenendo:

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\pi\lambda_2} - 2i \frac{\sin \pi a \sin \pi b}{\sin \pi c} & -2\pi i \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(b)\Gamma(a)} \\ 2\pi i \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+b-c)} & e^{-i\pi\lambda_2} + 2i \frac{\sin \pi(c-a) \sin \pi(c-b)}{\sin \pi c} \end{pmatrix}$$

Per cercare le soluzioni che danno la corretta monodromia in  $SU(1,1)$  possiamo ancora moltiplicare per una matrice

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ai fini della monodromia è equivalente a quella dell'equazione (4.28), in quanto si ottiene da questa moltiplicando entrambe le soluzioni per uno stesso fattore. Quindi bisogna imporre che la matrice trasformata

$$K M_1 K^{-1} = \begin{pmatrix} M_{11} & kM_{12} \\ M_{21}/k & M_{22} \end{pmatrix}$$

sia della forma (4.19). Otteniamo le due condizioni:

$$M_{11} = \overline{M_{22}} \quad (5.19)$$

$$kM_{12} = \frac{\overline{M_{21}}}{\bar{k}} \quad (5.20)$$

La prima deve essere automaticamente soddisfatta data la forma della matrice  $M_1$ . Si verifica facilmente che è vero. La seconda fissa il valore di  $k$ , che assumiamo essere reale e positivo:

$$k^2 = \frac{\overline{M_{21}}}{M_{12}} = \Delta$$

ovvero introducendo la notazione  $\gamma(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$  abbiamo:

$$\Delta = |\gamma(a)\gamma(b)\gamma(2-c)\gamma(1-c)\gamma(c-a)\gamma(c-b)| \quad (5.21)$$

Questo fissa completamente la monodromia e la forma della soluzioni:

$$\begin{cases} y_1^{SU(1,1)} = \sqrt{\Delta} y_1 \\ y_2^{SU(1,1)} = y_2 \end{cases} \quad (5.22)$$

La soluzione dell'equazione di Liouville in presenza di tre sorgenti puntiformi è quindi

$$e^{2b\phi_c(z, \bar{z})} = \frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{\Delta |w_{12}|^2}{[\Delta y_1(z)\bar{y}_1(\bar{z}) - y_2(z)\bar{y}_2(\bar{z})]^2} \quad (5.23)$$

Poiché il wronskiano delle due soluzioni è costante, possiamo calcolarlo facilmente nell'intorno dell'origine usando lo sviluppo asintotico (5.15). Si trova  $w_{12} = \lambda_1$ .

## 5.4 Mappa conforme

L'equazione (5.23) si può riscrivere in una forma molto interessante introducendo la funzione analitica  $f(z)$  definita da

$$f(z) \equiv \frac{y_2(z)}{\sqrt{\Delta} y_1(z)} \quad (5.24)$$



da cui segue

$$e^{2b\phi_c(z)} = \frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{f' \bar{f}'}{(1 - f \bar{f})^2}$$

Se ora pensiamo a questa soluzione come ad un fattore conforme per la metrica sulla sfera, vediamo che  $f(z)$  definisce una mappa dalla sfera stessa su un sottoinsieme del piano complesso in cui la metrica risultante è quella standard a curvatura costante negativa della pseudosfera. Posto  $w = f(z)$  infatti si ottiene

$$g_{ab}(w, \bar{w}) = \frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{1}{(1 - w \bar{w})^2} \delta_{ab} \quad (5.25)$$

Siamo ora interessati a studiare più in dettaglio le proprietà della *mappa conforme*  $z \rightarrow w = f(z)$ . A questo scopo notiamo che l'equazione (5.6) ha la stessa forma di quella con cui si risolve il problema di trovare una mappa conforme dal semipiano superiore complesso in una regione triangolare limitata da archi di circonferenza. Infatti<sup>1</sup> se sono noti i tre angoli con cui si intersecano gli archi circolari la mappa è completamente definita a meno di trasformazioni di  $SL(2, \mathbb{C})$  che determinano sostanzialmente posizione e dimensione della regione triangolare. Il coefficiente  $Q(z)$  dell'equazione differenziale che abbiamo risolto si identifica con la derivata di Schwarz della mappa  $f$ :

$$\{f(z), z\} \equiv \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

che risulta essere invariante sotto trasformazioni di  $SL(2, \mathbb{C})$ . La mappa si costruisce proprio come rapporto di due soluzioni indipendenti dell'equazione fuchsiana corrispondente a questo  $Q(z)$ , ponendo convenzionalmente le singolarità, ovvero i punti che saranno mappati nei tre vertici, in  $0, 1, \infty$ . Gli angoli della regione triangolare sono proprio i coefficienti  $\pi\lambda_1, \pi\lambda_2, \pi\lambda_3$ , rispettivamente in  $f(0), f(1), f(\infty)$ . Notiamo che la disuguaglianza sulle sorgenti riscritta come in (5.2) corrisponde alla richiesta che la somma degli angoli del triangolo curvilineo sia minore di  $\pi$ .

Si tratta quindi di capire come è fatta la regione triangolare in cui viene mappato il semipiano complesso superiore attraverso la  $f(z)$ . Per fare questo basta determinare la posizione dei tre vertici. Nel rapporto tra le due

<sup>1</sup>Cfr. [40] per una discussione dettagliata degli argomenti seguenti.

soluzioni  $y_1, y_2$  il fattore moltiplicativo  $(1-z)^{(1-\lambda_2)/2}$  si semplifica e rimane solamente

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} z^{\lambda_1} \frac{{}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)}{{}_2F_1(a, b, c; z)} \quad (5.26)$$

Utilizzando le già citate formule di prolungamento analitico della funzione ipergeometrica [64, 28]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b, a+b-c+1; 1-z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} \cdot \\ &\quad \cdot {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-z) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, 1-c+a, 1-b+a; \frac{1}{z}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} \cdot \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(b, 1-c+b, 1-a+b; \frac{1}{z}\right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

e ricordando che  ${}_2F_1(a, b, c; 0) = 1$  si possono ottenere tutti i limiti cercati. Intanto, poiché deve essere  $\lambda_1 > 0$ , si trova immediatamente che

$$f(0) = 0 \quad (5.29)$$

Per  $z$  attorno a 1 si ha

$$f(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{A_{21} + A_{22} (1-z)^{c-a-b}}{A_{11} + A_{12} (1-z)^{c-a-b}}$$

e dal fatto che  $c-a-b = \lambda_2 > 0$  si vede che per  $z \rightarrow 1$  i secondi termini a numeratore e denominatore si annullano e quindi contribuisce solamente il rapporto dei primi termini:

$$f(1) = \left[ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)} \right] \frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(1-b)} \quad (5.30)$$

La situazione è leggermente più complessa attorno al punto all'infinito. Qui infatti si ha

$$\begin{aligned} f(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{[B_{21}(-z)^{-a+c-1} + B_{22}(-z)^{-b+c-1}] z^{1-c}}{B_{11}(-z)^{-a} + B_{12}(-z)^{-b}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (-1)^{c-1} \frac{B_{21} + B_{22}(-z)^{a-b}}{B_{11} + B_{12}(-z)^{a-b}} \end{aligned}$$

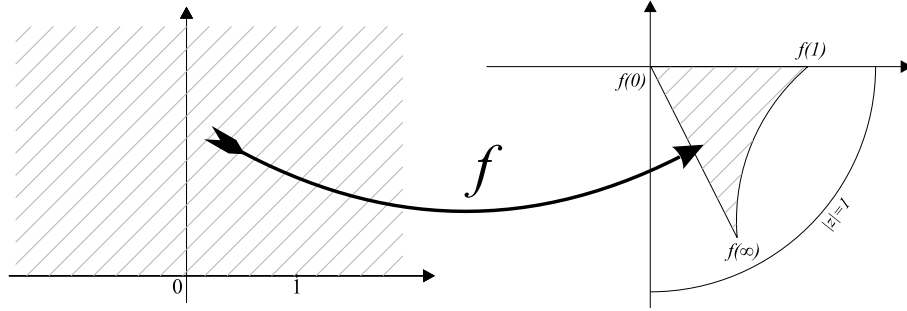


Figura 5.1: Mappa conforme.

Ma  $a - b = -\lambda_3 < 0$  da cui segue per  $z \rightarrow \infty$  che contano solo i primi termini. Inoltre si ha  $c - 1 = -\lambda_1$  ovvero in conclusione si ottiene

$$f(\infty) = e^{-i\pi\lambda_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-a)} \right] \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-c+1)} \quad (5.31)$$

Quindi i tre vertici si trovano in 0, in un punto sull'asse reale positivo e in un punto sul semipiano inferiore con fase  $e^{-i\pi\lambda_1}$ . Inoltre sappiamo che la funzione ipergeometrica assume valori reali nel segmento  $[0, 1]$ . Di conseguenza questo segmento è mappato in un segmento  $[0, R_1]$  dell'asse reale. L'angolo che questo deve formare con l'arco di cerchio che termina in  $f(\infty)$  è proprio  $\pi\lambda_1$ . Quindi anche l'arco che unisce  $f(0)$  e  $f(\infty)$  è in realtà un segmento. A questo punto è evidente la forma della regione di piano in cui la mappa  $f$  manda il semipiano complesso superiore, cfr. figura 5.1.

Poniamo  $|f(\infty)| = R$  e  $f(1) = \eta R$ , da cui segue, sostituendo i valori di  $a, b, c$  in funzione degli angoli:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\Gamma(1+\lambda_1)}{\Gamma(1-\lambda_1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)} \quad (5.32)$$

$$\eta = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)} \quad (5.33)$$

L'espressione per  $\eta$  si può semplificare ulteriormente sfruttando note relazioni che coinvolgono le funzioni gamma, ottenendo

$$\eta = \frac{\cos\left(\pi \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{2}\right)}{\cos\left(\pi \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{2}\right)} \quad (5.34)$$

Questi risultati si possono anche confermare studiando geometricamente la forma della regione triangolare. Dati gli angoli e la dimensione  $R$ , è determinata la posizione del punto  $A$  corrispondente a  $f(\infty)$ . Il punto  $B$  sull'asse reale corrisponde invece a  $f(1)$ . Per  $A$  e  $B$  deve passare una circonferenza con tangenti che formino un angolo  $\pi\lambda_2$  con il segmento  $OB$  e un angolo  $\pi\lambda_3$  con il segmento  $OA$ . Con semplici calcoli di geometria analitica si trova la posizione del centro  $C$  di una tale circonferenza, determinando contemporaneamente la posizione del punto  $B$ . Risulta

$$C \equiv \left( R \frac{\cos \pi\lambda_3 \sin \pi\lambda_1}{\cos \pi\lambda_3 + \cos \pi(\lambda_1 + \lambda_2)}, R \frac{\cos \pi\lambda_1 \cos \pi\lambda_3 + \cos \pi\lambda_2}{\cos \pi\lambda_3 + \cos \pi(\lambda_1 + \lambda_2)} \right)$$

e anche

$$\eta = \frac{\cos \pi(\lambda_1 + \lambda_3) + \cos \pi\lambda_2}{\cos \pi\lambda_3 + \cos \pi(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

In particolare si vede che se  $\lambda_3 > \lambda_2$  si ha  $\eta < 1$ . Supporremo allora nel seguito che  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ , senza perdere generalità. Allora l'immagine di  $f$  è tutta contenuta nel cerchio di raggio  $R$ . Evidentemente deve essere vero che  $R < 1$ , altrimenti il fattore conforme avrebbe una singolarità lungo tutta la circonferenza  $|z| = 1$ , che sappiamo non avere corrispettivo sulla sfera di Riemann. Analiticamente risulta difficile dimostrare che  $R < 1$ , tuttavia abbiamo verificato numericamente questa relazione utilizzando il software *Mathematica*<sup>TM</sup>. In particolare si vede che il valore  $R = 1$  si ottiene nel caso singolare in cui  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

L'ultimo passo per completare la descrizione della mappa conforme è capire dove viene mappato il semipiano complesso inferiore. Per questo è utile un risultato noto come *principio di riflessione di Schwarz* [40]. Siano  $D_z$  e  $D_w$  due domini il cui bordo comprenda due archi circolari  $\alpha_z$  e  $\alpha_w$ . Sia  $f$  una mappa conforme da  $D_z$  a  $D_w$  tale da mandare  $\alpha_z$  in  $\alpha_w$ , allora  $f$  si può continuare analiticamente attraverso  $\alpha_z$  sul dominio  $D_z^*$  ottenuto da  $D_z$  per inversione rispetto alla circonferenza di cui  $\alpha_z$  è un arco. Inoltre se  $z \in D_z$  e  $z^* \in D_z^*$  sono due punti legati da questa relazione di inversione, allora i punti  $f(z)$  e  $f(z^*)$  sono legati da un'inversione rispetto alla circonferenza contenente  $\alpha_w$ .

Nel nostro caso la situazione è più semplice. Infatti il segmento di bordo  $[0, 1]$  viene mandato in  $[0, \eta R]$ . Quindi la mappa  $f$  si può estendere per simmetria rispetto all'asse reale. Questa continuazione analitica è precisamente quella che si usa solitamente per definire il prolungamento della funzione

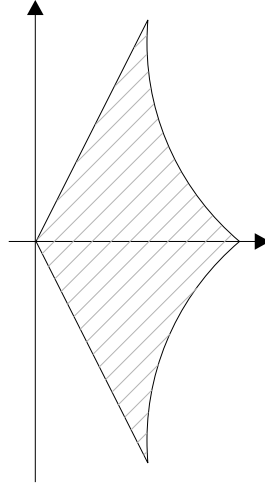


Figura 5.2: Regione del piano in cui viene mappata la sfera di Riemann.

ipergeometrica per  $|z| > 1$ . Allora possiamo concludere che l'intero piano complesso viene mappato attraverso  $f$  in una regione (*vela*) con due segmenti di bordo che vanno identificati e due archi anch'essi da identificare, cfr. figura 5.2.

Operando una trasformazione lineare non singolare delle due soluzioni dell'equazione differenziale che determina la mappa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

la regione triangolare subisce una trasformazione di  $SL(2, \mathbb{C})$ :

$$f \rightarrow \frac{df + c}{bf + a}$$

Nel nostro caso la richiesta di monodromia del fattore conforme fissa la forma di questa mappa a meno di trasformazioni di  $SU(1, 1)$ .

## 5.5 Azione classica

Il limite semiclassico  $b \rightarrow 0$  della funzione a tre punti sulla sfera è determinato dal valore dell'azione classica calcolata sulla soluzione trovata in precedenza. Con la definizione data nel capitolo 3 si ha

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) \rangle \sim e^{-S[\phi_c]} = e^{-\frac{1}{b^2} S_{cl}[\varphi_c]} \quad (5.35)$$

dove l'azione per il campo  $\varphi$  è data dall'equazione (3.18). Il prossimo passo è quindi quello di calcolare il valore di questa azione per la soluzione (5.23). Il calcolo diretto a partire dall'espressione esplicita è alquanto complesso, tuttavia diventa molto più semplice, seguendo Zamolodchikov e Zamolodchikov [65], se utilizziamo quanto discusso nel capitolo 3 e in particolare l'equazione (3.19) che riportiamo:

$$\frac{\partial S_{cl}[\varphi]}{\partial \eta_i} = -X_i \quad (5.36)$$

È necessario quindi calcolare il comportamento asintotico del campo di Liouville attorno alle sorgenti fino al termine di ordine zero. Iniziamo a considerare il caso in cui le sorgenti si trovano in  $0, 1, \infty$ . Prendendo il logaritmo della formula (5.23) si ottiene attorno al punto  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi(z, \bar{z}) &= -\log(\pi\mu b^2) + \log(\Delta|w_{12}|^2) - 2\log(\Delta y_1\bar{y}_1 - y_2\bar{y}_2) \\ &\simeq -\log\frac{\pi\mu b^2}{\Delta\lambda_1^2} - 2\log\left(\Delta(z\bar{z})^{\frac{1-\lambda_1}{2}} - (z\bar{z})^{\frac{1+\lambda_1}{2}}\right) \\ &\simeq -\log\frac{\pi\mu b^2}{\Delta\lambda_1^2} - 2\log\Delta - 2(1-\lambda_1)\log|z| \\ &= -\log(\pi\mu b^2) - \log\frac{\Delta}{(1-2\eta_1)^2} - 4\eta_1\log|z| \end{aligned}$$

L'argomento del secondo logaritmo si può riscrivere usando l'espressione esplicita per  $\Delta$ , equazione (5.21) e utilizzando alcune proprietà delle funzioni  $\gamma(x)$  e  $\Gamma(x)$ :

$$\begin{aligned} \gamma(1-x) &= \frac{1}{\gamma(x)} \\ x\Gamma(x) &= \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{(1-2\eta_1)^2} &= -\frac{\gamma(1-2\eta_1)\gamma(2-2\eta_1)}{(1-2\eta_1)^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\gamma(\eta_1+\eta_2+\eta_3-1)\gamma(\eta_1-\eta_2+\eta_3)\gamma(\eta_1+\eta_2-\eta_3)}{\gamma(\eta_2+\eta_3-\eta_1)} \end{aligned}$$

e la prima frazione si può semplificare ottenendo  $-1/\gamma^2(2\eta_1)$ . Quindi il *fattore di normalizzazione asintotico* del campo  $\varphi$  è

$$X_1 = -\log(\pi\mu b^2) - \log\frac{\gamma(\eta_1+\eta_2+\eta_3-1)\gamma(\eta_1-\eta_2+\eta_3)\gamma(\eta_1+\eta_2-\eta_3)}{\gamma^2(2\eta_1)\gamma(\eta_2+\eta_3-\eta_1)} \quad (5.37)$$

Chiaramente  $X_2$  e  $X_3$  si ottengono da questa formula permutando ciclicamente gli indici. Ora dobbiamo integrare la forma esatta

$$dS_{cl} = - \sum_{i=1}^3 X_i d\eta_i$$

Incidentalmente si verifica subito che i coefficienti  $X_i$  soddisfano la corretta richiesta di integrabilità della forma  $dS_{cl}$ , infatti  $\partial_i X_j = \partial_j X_i$  dove le derivate sono fatte rispetto ai parametri  $\eta_i$ . Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} S_{cl}[\eta_1, \eta_2, \eta_3] &= S_0 - \int_{1/2}^{\eta_1} X_1(t, 1/2, 1/2) dt \\ &\quad - \int_{1/2}^{\eta_2} X_2(\eta_1, t, 1/2) dt - \int_{1/2}^{\eta_3} X_3(\eta_1, \eta_2, t) dt \end{aligned} \quad (5.38)$$

Introduciamo la funzione

$$F(x) \equiv \int_{1/2}^x \gamma(s) ds \quad (5.39)$$

che ha le proprietà  $F(1/2) = 0$  e  $F(x) = F(1-x)$  in quanto  $\gamma(1-x) = -\gamma(x)$ . Calcolando gli integrali dell'equazione (5.38) otteniamo ad esempio

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{\eta_1} X_1(t, 1/2, 1/2) dt &= - \left( \eta_1 - \frac{1}{2} \right) \log(\pi \mu b^2) \\ &\quad - 3F(\eta_1) - F(1) + F(2\eta_1) - F(1 - \eta_1) \end{aligned}$$

e risultati analoghi per gli altri due integrali. In conclusione l'azione classica è data da

$$\begin{aligned} S_{cl}^{0,1,\infty}[\eta_1, \eta_2, \eta_3] &= S_0 + \left( \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \frac{3}{2} \right) \log(\pi \mu b^2) + 3F(1) \\ &\quad - F(2\eta_1) - F(2\eta_2) - F(2\eta_3) + F(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - 1) \\ &\quad + F(\eta_3 + \eta_2 - \eta_1) + F(\eta_2 + \eta_1 - \eta_3) + F(\eta_3 + \eta_1 - \eta_2) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Chiaramente non è possibile con questo metodo determinare il valore del termine costante, cioè indipendente dagli  $\eta_i$ . Tuttavia, come notato nel capitolo 3, stiamo calcolando la funzione a tre punti senza dividere per il valore di aspettazione del vuoto, come si fa solitamente. In generale nelle teorie conformi quello che ha significato assoluto [23] è il rapporto tra le funzioni a tre punti e quelle a due punti. Infatti la simmetria conforme fissa la forma di quest'ultime a meno di una costante, che può essere vista come un fattore di normalizzazione dei campi primari. Nel nostro caso la normalizzazione non è importante, in quanto siamo principalmente interessati alla dipendenza delle funzioni a tre punti dalle coordinate degli operatori di vertice.

## 5.6 Dimensione conforme semiclassica dei campi

Per completare lo studio semiclassico della funzione a tre punti, è necessario reintrodurre la dipendenza dalla posizione delle sorgenti nell'espressione dell'azione classica. Un modo potrebbe essere quello di trovare le soluzioni dell'equazione differenziale fuchsiana (4.6) nel caso generale [65]. In realtà si può procedere in un modo più semplice sfruttando la relazione di Polyakov (4.15). I parametri accessori (5.4) si riscrivono in un modo più comodo definendo le quantità

$$\delta_i = \eta_i(1 - \eta_i) \quad (5.41)$$

Infatti con questa notazione si ottiene

$$\beta_1 = -2 \frac{\delta_1 + \delta_2 - \delta_3}{z_1 - z_2} - 2 \frac{\delta_1 - \delta_2 + \delta_3}{z_1 - z_3} \quad (5.42)$$

$$\beta_2 = -2 \frac{-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{z_2 - z_3} - 2 \frac{\delta_1 + \delta_2 - \delta_3}{z_2 - z_1} \quad (5.43)$$

$$\beta_3 = -2 \frac{\delta_1 - \delta_2 + \delta_3}{z_3 - z_1} - 2 \frac{-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{z_3 - z_2} \quad (5.44)$$

La relazione di Polyakov ci dice che l'azione classica soddisfa il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{cl}}{\partial z_i} = -\frac{\beta_i}{2} \\ \frac{\partial S_{cl}}{\partial \bar{z}_I} = -\frac{\beta_i}{2} \end{cases} \quad (5.45)$$

I valori dei  $\beta_i$  soddisfano le condizioni di integrabilità di questo sistema, e la soluzione si trova facilmente integrando ripetutamente, in modo analogo a quanto fatto nella sezione precedente:

$$\begin{aligned} S_{cl}[z_1, z_2, z_3] &= 2(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3) \log |z_1 - z_2|^2 + 2(\delta_2 + \delta_3 - \delta_1) \log |z_2 - z_3|^2 \\ &\quad + 2(\delta_3 + \delta_1 - \delta_2) \log |z_3 - z_1|^2 + S_0[\eta_1, \eta_2, \eta_3] \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ora utilizzando il risultato del paragrafo precedente vogliamo connettere la costante arbitraria di questa integrazione con l'azione  $S_{cl}^{0,1,\infty}$ . Per fare questo consideriamo il limite per  $z_1 \rightarrow 0$ ,  $z_2 \rightarrow 1$ ,  $z_3 \rightarrow \infty$  dell'espressione (5.46):

$$S_{cl} \sim 4\delta_3 \log |z_3|^2 + S_0[\eta_1, \eta_2, \eta_3]$$



Sappiamo che in questo limite  $S_{cl}$  soddisfa il sistema di equazioni differenziali risolto nella sezione precedente, e quindi otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial S_0}{\partial \eta_i} = \frac{\partial S_{cl}^{0,1,\infty}}{\partial \eta_i} - 4 \log |z_3|^2 \frac{\partial \delta_3}{\partial \eta_i}$$

che si risolve ponendo

$$S_0 = S_{cl}^{0,1,\infty} - 4\delta_3 \log |z_3|^2$$

Quest'ultima equazione ci permette di determinare completamente la forma della funzione a tre punti semiclassica, come prima a meno di una costante:

$$\begin{aligned} \langle V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) \rangle \propto C(\eta_1, \eta_2, \eta_3) & |z_1 - z_2|^{-2(\Delta_1^{sc} + \Delta_2^{sc} - \Delta_3^{sc})} \\ & |z_2 - z_3|^{-2(\Delta_2^{sc} + \delta_3^{sc} - \Delta_1^{sc})} |z_3 - z_1|^{-2(\Delta_3^{sc} + \Delta_1^{sc} - \Delta_2^{sc})} \end{aligned} \quad (5.47)$$

dove

$$C(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \exp \left( -\frac{1}{b^2} S_{cl}^{0,1,\infty}[\eta_1, \eta_2, \eta_3] \right) \quad (5.48)$$

$$\Delta_i^{sc} = \alpha_i \left( \frac{1}{b} - \alpha_i \right) \quad (5.49)$$

Si vede immediatamente che la dimensione conforme degli operatori di vertice non è quella classica  $\alpha/b$  ma contiene anche un termine correttivo  $-\alpha^2$ . Questo compare a causa del modo in cui si è regolarizzata l'azione classica, equazione (3.18). Questa particolare regolarizzazione non rispetta l'invarianza conforme ingenua della teoria. Infatti quando operiamo con una trasformazione di  $SL(2, \mathbb{C})$ , i dischetti ritagliati attorno alle sorgenti vengono mappati ancora in altri dischetti, ma il loro centro non coincide più con il trasformato della sorgente. Il modo più semplice e rigoroso per trattare questo comportamento è attraverso l'approccio geometrico alla teoria di Liouville [13, 59]. Quindi la funzione a tre punti trasforma correttamente per azione del gruppo conforme, ma con dimensioni diverse da quelle classiche.

In particolare già a livello semiclassico i campi assumono una dimensione conforme anomala, in accordo all'ordine più basso in  $b$  con quanto si ricava dalla quantizzazione canonica di Curtright e Thorn.

## 5.7 Confronto con la congettura DOZZ

Come citato in [65], il risultato ottenuto si può confrontare con la congettura sulla forma della funzione a tre punti avanzata da Dorn e Otto [25, 26] e

indipendentemente da Zamolodchikov e Zamolodchikov [65]. Usando le notazioni di Zamolodchikov e Zamolodchikov introduciamo la funzione speciale  $\Upsilon(x)$  definita dall'integrale

$$\log \Upsilon(x) \equiv \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[ \left( \frac{Q}{2} - x \right)^2 e^{-t} - \frac{\sinh^2 \left( \frac{Q}{2} - x \right) \frac{t}{2}}{\sinh \frac{bt}{2} \sinh \frac{t}{2b}} \right] \quad (5.50)$$

dove il parametro  $Q$  quantistico esatto si prende dal risultato di Curtright e Thorn [17]:

$$Q = \frac{1}{b} + b \quad (5.51)$$

Si dimostra che la funzione  $\Upsilon(x)$  ha le seguenti proprietà:

$$\Upsilon(x) = \Upsilon(Q - x) \quad (5.52)$$

$$\Upsilon(Q/2) = 1 \quad (5.53)$$

$$\Upsilon(x + b) = \gamma(bx) b^{1-2bx} \Upsilon(x) \quad (5.54)$$

$$\Upsilon(x + 1/b) = \gamma(x/b) b^{2x/b-1} \Upsilon(x) \quad (5.55)$$

Definiamo inoltre

$$\Upsilon_0 \equiv \left. \frac{d\Upsilon(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (5.56)$$

Con queste notazioni la congettura DOZZ propone come forma per la costante di struttura della funzione a tre punti la seguente espressione

$$\begin{aligned} C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left[ \pi \mu (b^2) b^{2-2b^2} \right]^{(Q - \sum_i \alpha_i)/b} \cdot \\ &\cdot \frac{\Upsilon_0 \Upsilon(2\alpha_1) \Upsilon(2\alpha_2) \Upsilon(2\alpha_3)}{\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - Q)} \cdot \\ &\cdot \frac{1}{\Upsilon(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \Upsilon(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1) \Upsilon(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned} \quad (5.57)$$

La forma delle funzioni a tre punti è completamente determinata assumendo che la dimensione conforme degli operatori di vertice  $e^{2\alpha\phi}$  sia proprio quella che si ottiene dalla quantizzazione canonica alla Curtright e Thorn, ovvero

$$\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha) = \alpha \left( \frac{1}{b} + b - \alpha \right) \quad (5.58)$$

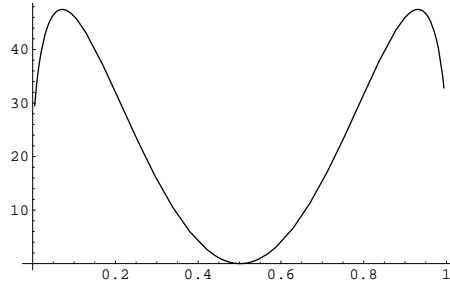


Figura 5.3: Grafico della funzione  $\Upsilon(x)$  per  $b = 0.05$ .

Vogliamo studiare qual è il limite semiclassico  $b \rightarrow 0$  della formula (5.57) per confrontarla con il risultato ottenuto attraverso il calcolo dell'azione classica (5.40). La prima cosa da fare è vedere come si comporta la funzione  $\Upsilon(x)$  in questo limite, ricordando che  $\eta_i = \alpha_i/b$  rimane finito.

Dalla proprietà (5.54) si ottiene

$$\frac{\log \Upsilon(x+b) - \log \Upsilon(x)}{b} = \frac{1}{b} [\log \gamma(bx) + (1 - 2bx) \log b]$$

ovvero nel limite in cui  $b \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dx} \log \Upsilon(x) \simeq \frac{1}{b} [\log \gamma(bx) + (1 - 2bx) \log b]$$

Integrando e considerando che  $Q \simeq 1/b$  si ottiene

$$\log \Upsilon(x) \simeq \frac{1}{b^2} \left[ F(bx) + \left( bx(1 - bx) - \frac{1}{4} \right) \log b \right] \quad (5.59)$$

In modo analogo si calcola quanto vale  $\Upsilon_0$ . Infatti si ha

$$\begin{aligned} \log \Upsilon(0) &\simeq \frac{1}{b^2} \left( F(0) - \frac{1}{4} \log b \right) \\ \frac{d}{dx} \log \Upsilon(x) \Big|_{x=0} &= \frac{1}{b} (\gamma(0) + \log b) \\ \log \Upsilon_0 &= \log \Upsilon(0) + \log \left( \frac{d}{dx} \log \Upsilon(x) \Big|_{x=0} \right) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\log \Upsilon_0 \simeq \frac{1}{b^2} \left( F(0) - \frac{1}{4} \log b \right) \quad (5.60)$$

Con queste formule per il limite  $b \rightarrow 0$  e considerando che

$$\log \left[ \pi \mu (b^2) b^{2-2b^2} \right]^{(Q - \sum_i \alpha_i)/b} \simeq \frac{1}{b^2} \left( 1 - \sum_i \eta_i \right) \log \pi \mu$$

si ottiene infine la seguente espressione per il limite semiclassico della funzione a tre punti

$$\begin{aligned}
 -b^2 \log C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &\simeq \left( \sum \eta_i \right) \log(\pi \mu b^2) + F(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - 1) \\
 &\quad + F(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3) + F(\eta_2 + \eta_3 - \eta_1) \\
 &\quad + F(\eta_3 + \eta_1 - \eta_2) - F(2\eta_1) - F(2\eta_2) \\
 &\quad - F(2\eta_3) - F(0)
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Notiamo che questa espressione è uguale al limite semiclassico trovato in precedenza per la funzione a tre punti, a meno di una costante che come già detto non è significativa.

Possiamo concludere quindi che c'è perfetto accordo tra la congettura DOZZ e il calcolo semiclassico.

## 5.8 Sorgenti in punti generici

Concludiamo questo capitolo ricavando la forma della soluzione  $\varphi(z_1, z_2, z_3; z)$  nel caso di sorgenti in tre punti qualsiasi  $z_1, z_2, z_3$ . Possiamo ricondurci al caso già analizzato attraverso la trasformazione conforme che porta i tre punti  $z_1, z_2, z_3$  rispettivamente in  $0, 1, \infty$ , data da

$$w = f(z) = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z)(z_2 - z_1)} \tag{5.62}$$

$$z = f^{-1}(w) = \frac{z_3 w + z_1 \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2}}{w + \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2}} \tag{5.63}$$

Il campo di Liouville trasforma secondo la legge (1.5) da cui si ricava

$$\varphi(z_1, z_2, z_3; z) = \varphi(0, 1, \infty; f(z)) + 2 \log \frac{|z_1 - z_3| |z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2| |z - z_3|^2} \tag{5.64}$$

In particolare si modifica la parte finita del campo quando  $z$  si avvicina ad una delle sorgenti. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
 \varphi(z_1, z_2, z_3; z \rightarrow z_1) &\simeq \varphi(0, 1, \infty; w \rightarrow 0) + 2 \log \frac{|z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2| |z_1 - z_3|} \\
 &\simeq -2\eta_1 \log |w|^2 + X_1 + 2 \log \frac{|z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2| |z_1 - z_3|} \\
 &\simeq -2\eta_1 \log |z - z_1|^2 + X_1 + \\
 &\quad + 2(1 - 2\eta_1) \log \frac{|z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2| |z_1 - z_3|}
 \end{aligned}$$

Quindi la parte finita contiene una dipendenza esplicita dalle posizioni delle tre sorgenti:

$$X_1(z_1, z_2, z_3) = X_1(0, 1, \infty) + 2(1 - 2\eta_1) \log \frac{|z_3 - z_2|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} \quad (5.65)$$

Permutando gli indici si ottengono le corrispondenti espressioni per  $X_2$  e  $X_3$ .



## Capitolo 6

# Soluzione classica con sorgente infinitesima

In questo capitolo affrontiamo il problema di trovare la soluzione classica per tre sorgenti finite più una sorgente infinitesima. Attraverso uno sviluppo perturbativo ricaviamo la soluzione dell'equazione di Liouville e il valore del parametro accessorio corrispondente alla singolarità infinitesima. Discutiamo quindi la corrispondente funzione a quattro punti semiclassica.

### 6.1 Impostazione del problema

Consideriamo come nel capitolo precedente tre sorgenti finite con parametri  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  per semplicità poste nei punti  $0, 1, \infty$ . Aggiungiamo quindi una quarta singolarità di valore infinitesimo in un punto  $t$ . Vogliamo cioè risolvere la seguente equazione di Liouville

$$-\Delta\varphi + 8\pi\mu b^2 e^\varphi = 8\pi \sum_{i=1}^3 \eta_i \delta(z - z_i) + 8\pi\varepsilon\delta(z - t) \quad (6.1)$$

dove abbiamo posto  $\eta_4 = \varepsilon$ .

Come già discusso questo problema si può ridurre alla soluzione di una equazione fuchsiana, il cui coefficiente analitico in questo caso avrà la forma seguente

$$Q(z) = \frac{1 - \lambda_1^2}{4z^2} + \frac{1 - \lambda_2^2}{4(z-1)^2} + \frac{1 - \lambda_4^2}{4(z-t)^2} + \frac{\beta_1}{2z} + \frac{\beta_2}{2(z-1)} + \frac{\beta_4}{2(z-t)} \quad (6.2)$$

In questo caso i parametri accessori non possono essere completamente determinati dal sistema (4.14), quindi esprimeremo  $\beta_1$  e  $\beta_2$  in funzione del

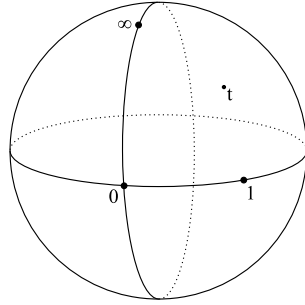


Figura 6.1: Sfera con tre sorgenti finite e una infinitesima.

parametro accessorio  $\beta_4$  corrispondente alla sorgente infinitesima. Invece di specializzare il sistema già trovato alle particolari posizioni delle sorgenti è conveniente ripetere l'argomentazione con cui l'abbiamo ricavato, ovvero passare alla variabile  $\zeta = 1/z$  nell'equazione differenziale e considerare il comportamento attorno a zero del trasformato di  $Q(z)$ :

$$\begin{aligned} Q'(\zeta) &= \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2 Q(z(\zeta)) \sim \frac{1}{2\zeta^3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_4) \\ &\quad - \frac{1}{4\zeta^2}(-3 - 2\beta_2 - 2t\beta_4 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_4^2) + \dots \end{aligned}$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 = 0 \\ -3 - 2\beta_2 - 2t\beta_4 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_4^2 = -1 + \lambda_3^2 \end{cases} \quad (6.3)$$

La soluzione generale, per sorgenti finite, è

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{2 + 2(t-1)\beta_4 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_4^2 + \lambda_3^2}{2} \\ \beta_2 &= -\frac{2 + t\beta_4 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_4^2 + \lambda_3^2}{2} \end{aligned}$$

Consideriamo ora cosa succede quando la quarta sorgente è infinitesima. In accordo con l'equazione (6.1) poniamo  $\lambda_4 = 1 - 2\varepsilon$ . Inoltre avremo  $\beta_4 = \varepsilon\beta$  in quanto questo si deve annullare nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Con queste precisazioni si ottiene

$$\beta_1 = \frac{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{2} + \varepsilon [(t-1)\beta + 2] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (6.4)$$

$$\beta_2 = -\frac{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{2} - \varepsilon [2 + t\beta] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (6.5)$$



Come ci potevamo aspettare i parametri accessori in questo caso sono quelli per tre sorgenti finite più una perturbazione di ordine  $\varepsilon$ . Di conseguenza il coefficiente  $Q(z)$  diventa

$$Q(z) = Q_0(z) + \varepsilon q(z)$$

dove  $Q_0(z)$  indica il coefficiente nel caso di tre sole singolarità, equazione (5.5), mentre  $q(z)$  è la perturbazione:

$$q(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(t-1)\beta - 2}{z} - \frac{2+t\beta}{z-1} + \frac{\beta}{z-t} + \frac{2}{(z-t)^2} \right] \quad (6.6)$$

## 6.2 Soluzione perturbativa dell'equazione

Vogliamo cercare di risolvere perturbativamente la seguente equazione differenziale ordinaria

$$y'' + (Q + \varepsilon q) y = 0 \quad (6.7)$$

Posto  $y = y_0 + \varepsilon \delta y$ , dove  $y_0$  è una soluzione dell'equazione imperturbata, otteniamo al primo ordine in  $\varepsilon$ :

$$(\delta y)'' + Q \delta y = -q y_0 \quad (6.8)$$

Abbiamo ricondotto il problema alla soluzione di un'equazione inomogenea, di cui però conosciamo già le soluzioni della corrispondente equazione omogenea. La soluzione di un tale problema è un risultato classico [35] e nel nostro caso la perturbazione all' $i$ -esima soluzione è data da

$$\delta y_i = -\frac{1}{w_{12}} \int_{z_0}^z dx [y_1(x)y_2(z) - y_1(z)y_2(x)] q(x)y_i(x) \quad (6.9)$$

Definendo i seguenti integrali, dipendenti implicitamente dal punto base  $z_0$  che per ora non specificheremo:

$$I_{ij}(z) \equiv \int_{z_0}^z dx y_i(x)y_j(x) q(x) \quad (6.10)$$

abbiamo che le due soluzioni indipendenti dell'equazione fuchsiana (6.7) sono

$$Y_1(z) = \left[ 1 + \varepsilon \frac{I_{12}(z)}{w_{12}} \right] y_1(z) - \varepsilon \frac{I_{11}(z)}{w_{12}} y_2(z) \quad (6.11)$$

$$Y_2(z) = \varepsilon \frac{I_{22}(z)}{w_{12}} y_1(z) + \left[ 1 - \varepsilon \frac{I_{12}(z)}{w_{12}} \right] y_2(z) \quad (6.12)$$

Nel seguito indicheremo con lettere minuscole  $y_1, y_2$  soluzioni dell'equazione non perturbata e con lettere maiuscole  $Y_1, Y_2$  soluzioni dell'equazione perturbata.

### 6.3 Matrici di monodromia

Dobbiamo ora calcolare la matrici di monodromia di queste soluzioni attorno alle sorgenti, ovvero in  $0, 1, t$  e imporre che siano elementi di  $SU(1, 1)$ . Questo ci permetterà di determinare la perturbazione al fattore conforme e il valore del parametro accessorio  $\beta$ . Analogamente a quanto fatto per il caso di tre sorgenti, svilupperemo le soluzioni in un intorno del punto singolare per studiarne le proprietà di trasformazione.

#### 6.3.1 Monodromia in 0

In un intorno del punto  $z = 0$  si ha intanto

$$y_1(z) \simeq z^{\frac{1-\lambda_1}{2}} \quad y_2(z) \simeq z^{\frac{1+\lambda_1}{2}} \quad q(z) \simeq \frac{(t-1)\beta-2}{2z} + \mathcal{O}(1) \quad (6.13)$$

Calcoliamo lo sviluppo degli integrali  $I_{ij}(z)$ . Abbiamo ad esempio

$$\begin{aligned} I_{11}(z) &\simeq I_{11}(0) + \int_0^z dx x^{2\frac{1-\lambda_1}{2}} \frac{(t-1)\beta-2}{2} x^{-1} \\ &= I_{11}(0) + \frac{(t-1)\beta-2}{2(1-\lambda_1)} z^{1-\lambda_1} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} I_{12}(z) &\simeq I_{12}(0) + \frac{(t-1)\beta-1}{2} z \\ I_{22}(z) &\simeq I_{22}(0) + \frac{(t-1)\beta-1}{2(1+\lambda_1)} z^{1+\lambda_1} \end{aligned}$$

Quindi tenendo solamente gli ordini dominanti nello sviluppo delle soluzioni (6.11) e (6.12) otteniamo

$$Y_1(z) \simeq \left[ 1 + \varepsilon \frac{I_{12}(0)}{w_{12}} \right] z^{(1-\lambda_1)/2} - \varepsilon \frac{I_{11}(0)}{w_{12}} z^{(1+\lambda_1)/2} \quad (6.14)$$

$$Y_2(z) \simeq \varepsilon \frac{I_{22}(0)}{w_{12}} z^{(1-\lambda_1)/2} + \left[ 1 - \varepsilon \frac{I_{12}(0)}{w_{12}} \right] z^{(1+\lambda_1)/2} \quad (6.15)$$

Una coppia di soluzioni canoniche attorno a zero è allora

$$U_1 = \left[ 1 - \varepsilon \frac{I_{12}(0)}{w_{12}} \right] Y_1 + \varepsilon \frac{I_{11}(0)}{w_{12}} Y_2 \simeq z^{\frac{1-\lambda_1}{2}} \quad (6.16)$$

$$U_2 = -\varepsilon \frac{I_{22}(0)}{w_{12}} Y_1 + \left[ 1 + \varepsilon \frac{I_{12}(0)}{w_{12}} \right] Y_2 \simeq z^{\frac{1+\lambda_1}{2}} \quad (6.17)$$

Seguendo la strategia già utilizzata in precedenza, lavoreremo in seguito sempre con questa coppia di soluzioni, restringendoci a cercare una monodromia

$SU(1,1)$  attraverso trasformazioni lineari delle  $U_i$  che lascino invariata la forma diagonale della matrice di monodromia in zero:

$$M_0 = \begin{pmatrix} -e^{-i\pi\lambda_1} & 0 \\ 0 & -e^{i\pi\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

È comodo introdurre una notazione matriciale per indicare le coppie di soluzioni

$$\begin{aligned} Y &= [1 + \varepsilon N(z)] y \\ U &= (1 - \varepsilon P) Y = \Lambda Y \\ N(z) &= \frac{1}{w_{12}} \begin{pmatrix} I_{12}(z) & -I_{11}(z) \\ I_{22}(z) & -I_{12}(z) \end{pmatrix} \\ P &= \frac{1}{w_{12}} \begin{pmatrix} I_{12}(0) & -I_{11}(0) \\ I_{22}(0) & -I_{12}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.19)$$

### 6.3.2 Monodromia in 1

Nell'intorno del punto  $z = 1$ , posto  $\zeta = 1 - z$ , le soluzioni imperturbate si comportano come

$$\begin{aligned} y_1(z) &\simeq A_{11} \zeta^{(1-\lambda_2)/2} + A_{12} \zeta^{(1+\lambda_2)/2} \\ y_2(z) &\simeq A_{21} \zeta^{(1-\lambda_2)/2} + A_{22} \zeta^{(1+\lambda_2)/2} \end{aligned}$$

dove la matrice  $A_{ij}$  è quella definita dall'equazione (5.17). In modo analogo a quanto fatto attorno a 0 possiamo sviluppare gli integrali  $I_{ij}(z)$  in serie, ottenendo

$$\begin{aligned} I_{11}(z) &\simeq I_{11}(1) - \frac{2 + \beta t}{2} \left[ \frac{A_{11}^2}{1 - \lambda_2} \zeta^{1-\lambda_2} + 2A_{11}A_{12} \zeta + \frac{A_{12}^2}{1 + \lambda_2} \zeta^{1+\lambda_2} \right] \\ I_{12}(z) &\simeq I_{12}(1) - \frac{2 + \beta t}{2} \left[ \frac{A_{11}A_{21}}{1 - \lambda_2} \zeta^{1-\lambda_2} + (A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}) \zeta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_{12}A_{22}}{1 + \lambda_2} \zeta^{1+\lambda_2} \right] \\ I_{22}(z) &\simeq I_{22}(1) - \frac{2 + \beta t}{2} \left[ \frac{A_{21}^2}{1 - \lambda_2} \zeta^{1-\lambda_2} + 2A_{21}A_{22} \zeta + \frac{A_{22}^2}{1 + \lambda_2} \zeta^{1+\lambda_2} \right] \end{aligned}$$

Come succedeva già attorno a 0, gli unici termini che contano agli ordini più bassi per la forma delle soluzioni sono quelli di ordine zero in  $\zeta$ . Ovvero si ha  $Y = y + \varepsilon N y$ , dove

$$N = N(1) = \begin{pmatrix} I_{12}(1) & -I_{11}(1) \\ I_{22}(1) & -I_{12}(1) \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

La relazione inversa è chiaramente  $y = Y - \varepsilon NY$  al primo ordine in  $\varepsilon$ . Indicando con  $M_1^{(0)}$  la matrice di monodromia attorno a 1 delle soluzioni imperturbate  $y$  otteniamo, dopo un circuito attorno a 1:

$$\begin{aligned} Y' &= M_1^{(0)}y + \varepsilon NM_1^{(0)}y = M_1^{(0)}(1 - \varepsilon N)Y + \varepsilon NM_1^{(0)}Y \\ &= \left( M_1^{(0)} + \varepsilon [N, M_1^{(0)}] \right) Y \end{aligned}$$

La matrice di monodromia per le soluzioni canoniche è quindi data da

$$\begin{aligned} M_1 &= (1 - \varepsilon P) \left( M_1^{(0)} + \varepsilon [N, M_1^{(0)}] \right) (1 + \varepsilon P) \\ &= M_1^{(0)} + \varepsilon [N - P, M_1^{(0)}] \end{aligned} \quad (6.21)$$

### 6.3.3 Monodromia in $t$

In un intorno del punto  $t$  generico le soluzioni  $y_i$  sono olomorfe. Di conseguenza l'unico contributo alla matrice di monodromia viene dal comportamento degli integrali  $I_{ij}(z)$ :

$$I_{ij}(z) \rightarrow I_{ij}(z) + \oint_t y_i(x)y_j(x)q(x) dx \quad (6.22)$$

dove l'integrale è fatto lungo un circuito chiuso attorno al punto  $t$ . Il calcolo si sviluppa facilmente con il teorema dei residui e si ottiene

$$\begin{aligned} \delta I_{ij} &= \frac{1}{2} \oint_t y_i(x)y_j(x) \left[ \frac{\beta}{z-t} + \frac{2}{(z-t)^2} \right] dx \\ &= i\pi \left[ \beta y_i(x)y_j(x) + 2(y_i(x)y_j(x))' \right]_{x=t} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ovvero otteniamo per le  $Y$  le trasformazioni

$$\begin{aligned} Y_1 &\rightarrow Y_1 + \frac{\varepsilon}{w_{12}} [\delta I_{12} y_1 - \delta I_{11} y_2] \\ Y_2 &\rightarrow Y_2 + \frac{\varepsilon}{w_{12}} [\delta I_{22} y_1 - \delta I_{12} y_2] \end{aligned}$$

ma all'ordine necessario in  $\varepsilon$  possiamo identificare  $y_i = Y_i + \mathcal{O}(\varepsilon)$  e quindi infine otteniamo che la matrice di monodromia in  $t$  per le  $Y$  è

$$M_t(Y) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\delta I_{12}}{w_{12}} & -\varepsilon \frac{\delta I_{11}}{w_{12}} \\ \varepsilon \frac{\delta I_{22}}{w_{12}} & 1 - \varepsilon \frac{\delta I_{12}}{w_{12}} \end{pmatrix}$$

In realtà siamo interessati alla matrice di monodromia delle soluzioni canoniche  $U = \Lambda Y$ , legata alla  $M_t(Y)$  dall'equazione (4.26):

$$M_t = \Lambda M_t(Y) \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\delta I_{12}}{w_{12}} & \varepsilon \frac{\delta I_{11}}{w_{12}} \\ -\varepsilon \frac{\delta I_{22}}{w_{12}} & 1 - \varepsilon \frac{\delta I_{12}}{w_{12}} \end{pmatrix} = M_t(Y) \quad (6.24)$$

## 6.4 Ricerca della monodromia $SU(1,1)$

Per come abbiamo costruito le soluzioni canoniche, la matrice di monodromia  $M_0$  in 0 è già un elemento di  $SU(1,1)$ . L'unica arbitrarietà rimanente è la coniugazione con una matrice della forma

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Cominciamo imponendo la monodromia in  $t$ . Allora bisogna richiedere che la matrice

$$\tilde{M}_t \equiv K M_t K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \frac{\delta I_{12}}{w_{12}} & k^2 \varepsilon \frac{\delta I_{11}}{w_{12}} \\ -\frac{1}{k^2} \varepsilon \frac{\delta I_{22}}{w_{12}} & 1 - \varepsilon \frac{\delta I_{12}}{w_{12}} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

sia in  $SU(1,1)$ , ovvero poiché sappiamo già che è in  $SL(2, \mathbb{C})$ , basta imporre che

$$(\tilde{M}_t)_{11} = \overline{(\tilde{M}_t)_{22}} \quad (6.27)$$

$$(\tilde{M}_t)_{12} = \overline{(\tilde{M}_t)_{21}} \quad (6.28)$$

La prima condizione (6.27) fornisce

$$\varepsilon \frac{\delta I_{12}}{w_{12}} = -\varepsilon \frac{\overline{\delta I_{12}}}{w_{12}}$$

ovvero un'equazione che coinvolge il parametro  $\beta$

$$\beta y_1 y_2 + 2(y_1 y_2)' = \bar{\beta} \bar{y}_1 \bar{y}_2 + 2(\bar{y}_1 \bar{y}_2)' \quad (6.29)$$

dove tutte le  $y_i$  sono calcolate nel punto  $t$ .

La seconda condizione (6.28) fissa il valore di  $k$  in funzione degli altri parametri

$$|k|^4 = -\frac{\overline{\delta I_{22}}}{\delta I_{11}} = \frac{\bar{\beta} \bar{y}_2 \bar{y}_2' + 4 \bar{y}_2 \bar{y}_2'}{\beta y_1 y_1' + 4 y_1 y_1'} \quad (6.30)$$

In particolare questa equazione richiede che  $\delta I_{11} \delta I_{22}$  sia reale e negativo, ovvero

$$y_1 y_2 (\beta y_1 + 4 y_1') (\beta y_2 + 4 y_2') > 0$$

Utilizzando l'equazione (6.29) si ottiene

$$[\bar{\beta} \bar{y}_1 \bar{y}_2 + 2(\bar{y}_1 \bar{y}_2)']^2 - 4 w_{12}^2 > 0 \quad (6.31)$$

Ancora per la (6.29) questa quantità è reale. Dovremo solo verificare, una volta determinato  $\beta$  che la disuguaglianza (6.31) è soddisfatta.

Imponiamo ora la monodromia  $SU(1,1)$  nel punto 1. Conviene lavorare in notazione matriciale. In generale  $K$  avrà un termine di ordine zero e un termine di ordine  $\varepsilon$ . Il termine di ordine zero sarà ovviamente lo stesso che abbiamo già calcolato nel caso di tre sole singolarità. Poniamo quindi:

$$K = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \frac{h}{w_{12}} & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon \frac{h}{w_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & 1/k_0 \end{pmatrix} = (1 + \varepsilon H) K_0 \quad (6.32)$$

La matrice di monodromia delle nuove soluzioni sarà allora

$$\begin{aligned} K M_1 K^{-1} &= (1 + \varepsilon H) K_0 \left( M_1^{(0)} + \varepsilon [N - P, M_1^{(0)}] \right) K_0^{-1} (1 - \varepsilon H) \\ &= K_0 M_1^{(0)} K_0^{-1} + \varepsilon [H, K_0 M_1^{(0)} K_0^{-1}] + \varepsilon K_0 [N - P, M_1^{(0)}] K_0^{-1} \\ &= K_0 M_1^{(0)} K_0^{-1} + \varepsilon \left[ H + K_0 (N - P) K_0^{-1}, K_0 M_1^{(0)} K_0^{-1} \right] \end{aligned}$$

Posto  $D \equiv K_0 M_1^{(0)} K_0^{-1}$ , dobbiamo richiedere che la matrice

$$\tilde{M}_1 = D + \varepsilon [H + K_0 (N - P) K_0^{-1}, D] \equiv D + \varepsilon [B, D] \quad (6.33)$$

sia un elemento di  $SU(1,1)$ . Questo equivale a richiedere che il termine di ordine zero e quello di ordine uno siano separatamente della forma (4.19) e che il determinante della loro somma sia uno. Cominciamo da quest'ultima condizione:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{M}_1) &= \det(D + \varepsilon [B, D]) = \det(D) [1 + \varepsilon \text{Tr}(D^{-1} [B, D])] \\ &= \det(D) [1 + \varepsilon \text{Tr}(D^{-1} B D - D^{-1} D B)] = \det(D) \end{aligned}$$

per la ciclicità della traccia. Quindi se  $D \in SU(1,1)$  la condizione è verificata, in quanto si avrebbe  $\det(D) = 1$ .

La richiesta che il termine di ordine zero  $D$  sia un elemento di  $SU(1,1)$  è, come anticipato, esattamente il problema che abbiamo risolto nel caso di tre sole sorgenti. Questo fissa il valore di  $k_0$ :

$$|k_0|^4 = \frac{\overline{M_{21}^{(0)}}}{M_{12}^{(0)}} = \Delta \quad (6.34)$$

Per quanto riguarda il termine di ordine uno, intanto esplicitando la forma della matrice  $B$  otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h}{w_{12}} + \frac{I_{12}(1) - I_{12}(0)}{w_{12}} & -k_0^2 \frac{I_{11}(1) - I_{11}(0)}{w_{12}} \\ \frac{I_{22}(1) - I_{22}(0)}{w_{12}} / k_0^2 & -\frac{h}{w_{12}} - \frac{I_{12}(1) - I_{12}(0)}{w_{12}} \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

L'espressione trovata è correttamente indipendente dal punto base  $z_0$  da cui calcoliamo gli integrali  $I_{ij}(z)$ . Fissiamo quindi per comodità  $z_0 = 0$ , in modo che  $I_{ij}(0) = 0$ .

La matrice  $[B, D]$  ha la forma

$$C = [B, D] = \left( \begin{array}{c|c} D_{21}B_{12} - D_{12}B_{21} & (B_{11} - B_{22})D_{12} \\ & + B_{12}(D_{22} - D_{11}) \\ \hline -(B_{11} - B_{22})D_{21} & \\ -B_{21}(D_{22} - D_{11}) & -D_{21}B_{12} + D_{12}B_{21} \end{array} \right) \quad (6.36)$$

Vanno imposte le due condizioni  $C_{11} = \bar{C}_{22}$  e  $C_{12} = \bar{C}_{21}$ . Poiché la matrice  $D$  è in  $SU(1, 1)$ , sappiamo che  $D_{11} = \bar{D}_{22}$  e  $D_{12} = \bar{D}_{21}$  e quindi possiamo esprimere tutti gli elementi di  $C$  usando ad esempio solo  $D_{11}, D_{12}, \bar{D}_{11}, \bar{D}_{12}$ . Allora la prima condizione sulla matrice  $C$  equivale a richiedere

$$\bar{D}_{12}(B_{12} - \bar{B}_{21}) + D_{12}(\bar{B}_{12} - B_{21}) = 0 \quad (6.37)$$

mentre la seconda, notando che  $D_{12}$  è immaginario, fornisce la condizione

$$B_{11} + \bar{B}_{11} - B_{22} - \bar{B}_{22} = \frac{D_{11} - \bar{D}_{11}}{D_{12}} (B_{12} - \bar{B}_{21}) \quad (6.38)$$

La condizione (6.37) impone che

$$-\Delta I_{11}(1) + I_{22}(1) \in \mathbb{R} \quad (6.39)$$

che, usando le formule (5.17) e (5.18), si riscrive anche come

$$A_{21}A_{22} I_{11}(1) - A_{11}A_{12} I_{22}(1) \in \mathbb{R}$$

Questa equazione fornisce una relazione notevole tra questi particolari integrali di funzioni ipergeometriche, che non abbiamo trovato in alcuna tavola di funzioni speciali [32]. Abbiamo controllato numericamente questa relazione, utilizzando il software *Mathematica*<sup>TM</sup>, che risulta corretta entro almeno una parte su  $10^{12}$ .

La seconda condizione (6.38) fissa il valore del parametro  $h$ , ovvero esplicitando  $k_0$  e la forma della matrice  $D$  otteniamo

$$h + \bar{h} = -I_{12}(1) - \bar{I}_{12}(1) + \frac{A_{12}A_{21} + A_{11}A_{22}}{2} \left( \frac{I_{11}(1)}{A_{11}A_{12}} + \frac{\bar{I}_{22}(1)}{A_{21}A_{22}} \right) \quad (6.40)$$

La prima condizione (6.39) ci garantisce tra le altre cose la realtà del secondo addendo del membro di destra.

Le equazioni (6.29), (6.30), (6.34) ci permettono di determinare il parametro accessorio  $\beta$  all'ordine zero in  $\varepsilon$ . Infatti abbiamo le due equazioni simultanee per  $\beta$  e  $\bar{\beta}$ :

$$\begin{cases} \Delta \bar{y}_1(\bar{\beta}\bar{y}_1 + 4\bar{y}'_1) = y_2(\beta y_2 + 4y'_2) \\ \beta y_1 y_2 + 2(y_1 y_2)' = \bar{\beta}\bar{y}_1 \bar{y}_2 + 2(\bar{y}_1 \bar{y}_2)' \end{cases} \quad (6.41)$$

La soluzione di questo sistema lineare si trova facilmente

$$\beta = -2 \frac{-\Delta \bar{y}_1^2 \bar{y}'_2 - 2|y_2|^2 y'_2 + \Delta \bar{y}_1(\bar{y}_2 \bar{y}'_1 + y_2 y'_1 + y_1 y'_2)}{y_2(\Delta |y_1|^2 - |y_2|^2)}$$

Usando il fatto che il wronskiano delle due soluzioni è costante e reale questa espressione si può notevolmente semplificare, ottenendo

$$\beta = -4 \frac{\Delta \bar{y}_1 y'_1 - \bar{y}_2 y'_2}{\Delta \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2} \quad (6.42)$$

In conclusione abbiamo costruito la seguente coppia di soluzioni

$$Z_1(z) = k_0 \left[ \left( 1 + \varepsilon \frac{I_{12}(z) + h}{w_{12}} \right) y_1(z) - \varepsilon \frac{I_{11}(z)}{w_{12}} y_2(z) \right] \quad (6.43)$$

$$Z_2(z) = \frac{1}{k_0} \left[ \varepsilon \frac{I_{22}(z)}{w_{12}} y_1(z) + \left( 1 - \varepsilon \frac{I_{12}(z) + h}{w_{12}} \right) y_2(z) \right] \quad (6.44)$$

che hanno matrici di monodromia  $SU(1,1)$  attorno a tutte le quattro sorgenti, ovvero determinano un corretto fattore conforme globalmente monodromo

$$e^{2b\phi_c} = \frac{1}{\pi\mu b^2} \frac{|W[Z_1, Z_2]|^2}{(Z_1 \bar{Z}_1 - Z_2 \bar{Z}_2)^2} \quad (6.45)$$

Prima di passare alla discussione dei risultati ottenuti, dobbiamo verificare che la disuguaglianza (6.31) è effettivamente soddisfatta dal parametro  $\beta$  trovato. Sostituendo il coniugato dell'equazione (6.42) si trova che

$$[\bar{\beta}\bar{y}_1 \bar{y}_2 + 2(\bar{y}_1 \bar{y}_2)']^2 - 4w_{12}^2 = 16 \frac{\Delta |y_1|^2 |y_2|^2 w_{12}^2}{(\Delta |y_1|^2 - |y_2|^2)^2} > 0$$

con cui si conclude la verifica della (6.31).

## 6.5 Discussione dei risultati

### 6.5.1 Fattore conforme

Inserendo le due soluzioni (6.43) e (6.44) nell'espressione (6.45) e tenendo solo i termini di ordine uno in  $\varepsilon$  possiamo calcolare la perturbazione al fattore



conforme per tre sorgenti  $e^{2b\phi_c^0}$ :

$$e^{2b\phi_c} = e^{2b\phi_c^0} \left\{ 1 + \varepsilon \frac{4}{w_{12} (\Delta y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2)} \right. \\ \left. [(\Delta y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2) (I_{12} + \bar{I}_{12} + h + \bar{h}) \right. \\ \left. - y_1 \bar{y}_2 (I_{22} + \Delta \bar{I}_{11}) - \bar{y}_1 y_2 (\bar{I}_{22} + \Delta I_{11})] \right\} \quad (6.46)$$

$$\equiv e^{2b\phi_c^0} (1 + \varepsilon \chi) \quad (6.47)$$

Prendendo il logaritmo di questa soluzione si ottiene, al primo ordine in  $\varepsilon$ :

$$2b\phi_c(z, \bar{z}) = 2b\phi_c^0(z, \bar{z}) + \varepsilon \chi(z, \bar{z}) \quad (6.48)$$

Ci aspettiamo che la perturbazione  $\chi$  sia regolare nei punti  $0, 1, \infty$  in quanto delle singolarità in questi punti modificherebbero le corrispondenti sorgenti, che non sono state cambiate. Invece  $\chi$  dovrà avere una singolarità logaritmica in  $t$ , per rendere conto della sorgente infinitesima che abbiamo aggiunto:

$$\chi(z, \bar{z}) \sim -4 \log |z - t| + \mathcal{O}(1) \quad \text{per } z \rightarrow t \quad (6.49)$$

Posticipiamo la verifica esplicita di queste affermazioni al capitolo seguente, in cui mostreremo il legame che esiste tra  $\chi$  e la funzione di Green della teoria quantistica.

### 6.5.2 Parametro accessorio e azione classica

La formula (6.42) fornisce esplicitamente il parametro accessorio  $\beta_4$  al prim'ordine in  $\varepsilon$ . Infatti si ha

$$\beta_4 = \varepsilon \beta = -4\varepsilon \frac{\Delta \bar{y}_1 y_1' - \bar{y}_2 y_2'}{\Delta \bar{y}_1 y_1 - \bar{y}_2 y_2} \quad (6.50)$$

Ricordando che il fattore conforme non perturbato  $e^{\varphi_0}$  per tre sole sorgenti ha la forma (5.23) si vede che il parametro accessorio si può anche scrivere come

$$\beta_4 = -4\varepsilon e^{\varphi_0/2} \partial_z e^{-\varphi_0/2} \Big|_{z=t} = 2\varepsilon \partial_z \varphi_0(z) \Big|_{z=t} \quad (6.51)$$

Abbiamo trovato quindi una relazione tra il valore del parametro accessorio corrispondente alla sorgente infinitesima e il valore nel punto  $t$  del campo di Liouville in assenza della sorgente perturbante.

Utilizzando questo risultato e la relazione di Polyakov (4.15) possiamo calcolare l'azione classica per la soluzione trovata. Infatti si ha

$$\frac{\partial S[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \varepsilon]}{\partial t} = -\frac{\beta_4}{2} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi_c^0}{\partial t}$$

Da questa segue che

$$\frac{\partial}{\partial t} [S[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \varepsilon] + \varepsilon \varphi_c^0] = 0$$

ovvero, poiché per  $\varepsilon = 0$  ritroviamo l'azione per tre sole sorgenti, otteniamo la forma finale dell'azione classica per tre sorgenti pesanti e una infinitesima:

$$\begin{aligned} S_{cl}[0, 1, \infty, t; \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4] &= S_{cl}[0, 1, \infty; \eta_1, \eta_2, \eta_3] \\ &\quad - \eta_4 \varphi_c^0(t) + \mathcal{O}(\eta_4^2) \end{aligned} \quad (6.52)$$

Quindi la funzione a quattro punti semiclassica, per una sorgente infinitesima si fattorizza nel seguente modo:

$$\langle V_{\alpha_1}(0) \dots V_{\alpha_4}(z_4) \rangle \simeq \langle V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(\infty) \rangle \cdot e^{2\alpha_4 \phi_c(z_4)} \quad (6.53)$$

In particolare possiamo vedere che questa espressione ha le giuste proprietà di trasformazione conforme. Infatti se consideriamo solamente la variazione dovuta alla coordinata  $z_4$  si ha

$$\phi_c(z'_4) = \phi_c(z_4) - \frac{1}{2b} \left| \frac{dz'_4}{dz_4} \right|^2$$

ovvero la funzione a quattro punti si modifica per un fattore moltiplicativo

$$\left| \frac{dz'_4}{dz_4} \right|^{2\frac{\alpha_4}{b}} \quad (6.54)$$

da cui possiamo leggere la corretta dimensione conforme degli operatori di vertice. Infatti in approssimazione semiclassica ci aspettiamo una dimensione  $\alpha_4(1/b - \alpha_4)$ , ma il secondo termine è quadratico nella sorgente infinitesima, e quindi non è ottenibile con il nostro calcolo.

Utilizzando l'equazione (3.19) possiamo ricavare un risultato interessante riguardo la parte finita del campo di Liouville nel limite di piccola sorgente. Infatti si ha

$$\lim_{\eta_4 \rightarrow 0} X_4 = - \lim_{\eta_4 \rightarrow 0} \frac{\partial S_{cl}}{\partial \eta_4} = \varphi_c^0(z_4) \quad (6.55)$$

Questo risultato è intuitivo, ma non banale, in quanto la definizione della parte finita del campo nel punto in cui aggiungiamo una singolarità comporta la sottrazione di una divergenza logaritmica, e quindi va gestita con cura. Il nostro risultato afferma che per piccole sorgenti l'unica modificazione al fattore conforme di background è l'aggiunta della divergenza logaritmica, a meno di termini di ordine superiore.

Il confronto diretto di questo risultato per la funzione a 4 punti semi-classica con la congettura DOZZ non è facilmente attuabile. In linea teorica le funzioni a quattro punti sono completamente determinate una volta note la costante di struttura per la funzione a tre punti e le dimensioni conformi dei campi. Tuttavia la costruzione delle funzioni a quattro punti passa attraverso la conoscenza di particolari funzioni, dette *blocchi conformi* [23, 6], che pur essendo completamente determinate dalla simmetria conforme, non sono note in forma chiusa. Si conoscono formule ricorsive per il calcolo di queste funzioni, ma per il nostro caso servirebbe studiarne il limite semi-classico. Non siamo a conoscenza di nessun studio simile in letteratura. Di conseguenza non è possibile per il momento un confronto diretto.

Esistono risultati esatti riguardo la funzione a quattro punti di particolari operatori di vertice  $e^{-(b/2)\phi}$  [66] che nel nostro formalismo sarebbero descritti da un  $\eta = -b^2/4$  che non rimane chiaramente finito nel limite  $b \rightarrow 0$ . Quindi non è possibile nemmeno in questo caso un confronto diretto.

## 6.6 Generalizzazioni dei risultati

In questa sezione vogliamo mostrare come i ragionamenti fatti in questo capitolo si possono estendere senza difficoltà al caso di  $n$  sorgenti finite più una sorgente infinitesima e di  $n$  sorgenti finite più  $m$  sorgenti infinitesime.

Cominciamo dal caso di  $n$  sorgenti finite, a cui aggiungiamo una sola sorgente infinitesima. Supponiamo di conoscere la soluzione dell'equazione di Liouville in presenza delle sole sorgenti finite, ovvero abbiamo a disposizione una coppia di soluzioni  $y_i$  che forniscono un fattore conforme monodromo e con  $n$  singolarità. La discussione fatta nel caso di 3 sole sorgenti, che ha portato all'introduzione dell'equazione differenziale inomogenea (6.8) e alle soluzioni perturbate (6.11) e (6.12), rimane valida se si prendono per  $y_i$  le corrette soluzioni per il background a  $n$  sorgenti. Scegliendo una delle sorgenti come riferimento e supponendo che si trovi per semplicità in 0, pos-

siamo procedere esattamente come nel caso di 3 punti scegliendo una coppia di soluzioni canoniche in 0. Queste saranno date ancora dalle formule (6.16) e (6.17). Similmente attorno alla singolarità infinitesima, posta in  $t$ , rimane valido quanto già fatto. Attorno ad un'altra della singolarità, che poniamo in 1, avremo di nuovo una matrice di monodromia data all'ordine zero da quella per  $n$  singolarità finite, più una perturbazione di ordine  $\epsilon$ . Imponendo ora che le monodromie siano in  $SU(1,1)$  otteniamo ancora le condizioni (6.29) e (6.30) dalla sorgente infinitesima. L'imposizione della monodromia in 1 lega il parametro accessorio alla costante  $k_0$  del caso di  $n$  sorgenti. Supponiamo che questa sia nota. Allora il parametro accessorio è dato ancora dalla formula (6.42) e in particolare è di nuovo vero che

$$\beta = 2\partial_z \varphi_c^{(n)}(z) \Big|_{z=t} \quad (6.56)$$

dove ora  $\varphi_c^{(n)}$  è il campo di background che risolve il problema di  $n$  sorgenti finite. Quindi abbiamo trovato un legame del tutto generale tra il valore del parametro accessorio per sorgente infinitesima e il fattore conforme di background non perturbato. Segue facilmente che anche la formula (6.47) che fornisce la perturbazione al fattore conforme rimane valida nel caso generale. Ritorniamo su questo punto anche più avanti, discutendo la forma della funzione di Green quantistica.

Inoltre anche la formula (6.53) rimane valida, ovvero la funzione a  $n+1$  punti semiclassica si fattorizza nella funzione a  $n$  punti per il fattore conforme di background calcolato nella sorgente infinitesima.

Infine anche la formula (6.55) riguardante la parte finita del campo è valida nel caso generale.

Per concludere, notiamo che finché ci limitiamo a considerare sorgenti infinitesime, la perturbazione all'equazione differenziale è lineare nelle sorgenti, ovvero le perturbazioni si sommano pesate con le relative sorgenti. Questo ci permette di generalizzare immediatamente il risultato discusso fino a qui al caso di  $n$  sorgenti finite e  $m$  sorgenti infinitesime. Avremo infatti  $m$  parametri accessori infinitesimi della forma (6.56) e basterà aggiungere al fattore conforme di background  $m$  perturbazioni della forma (6.47). L'azione classica avrà  $m$  contributi:

$$S[\eta_1, \dots, \eta_m, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m] = S[\eta_1, \dots, \eta_m] - \sum_{j=1}^m \epsilon_m \varphi_c^0(t_j) \quad (6.57)$$

ovvero la funzione a  $n + m$  punti si fattorizza nella funzione a  $n$  punti per il prodotto di  $m$  fattori conformi calcolati nei punti corrispondenti alle  $m$  sorgenti infinitesime

$$\langle V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_n} V_{\gamma_1} \dots V_{\gamma_m} \rangle = \langle V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_n} \rangle \prod_{j=0}^m e^{2\gamma_j \phi_c^0(t_j)} \quad (6.58)$$



# Capitolo 7

## Teoria quantistica

In questo capitolo affrontiamo la quantizzazione della teoria di Liouville sulla sfera mediante un approccio perturbativo basato sull'integrale funzionale. Descriviamo il calcolo della funzione a tre punti per mezzo dello sviluppo attorno alla soluzione classica con tre sorgenti puntiformi. Ricaviamo la forma della funzione di Green e dei vertici di interazione. Infine iniziamo il calcolo della prima correzione quantistica alle dimensioni anomale degli operatori di vertice, discutendo le difficoltà che si incontrano.

### 7.1 Separazione del background classico

Partiamo dalla definizione della funzione a 3 punti attraverso l'integrale funzionale:

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3) \rangle = \int [D\phi] e^{-S_3[\phi]} \quad (7.1)$$

dove con  $S_3[\phi]$  abbiamo indicato l'azione del campo di Liouville con l'aggiunta di tre sorgenti puntiformi corrispondenti all'inserzione dei tre operatori di vertice, come discusso nel capitolo 3.

Vogliamo sviluppare una teoria delle perturbazioni a partire da questo integrale funzionale. Come noto si procede separando il campo  $\phi$  in un background classico che sia un punto stazionario dell'azione più un campo di fluttuazione quantistica regolare. Come già discusso il background più semplice che possiamo scegliere per la sfera è quello con tre sorgenti, calcolato esplicitamente nel capitolo 5. Indichiamo con  $\phi_B(z)$  questa particolare soluzione e procediamo a separare il contributo classico e quello quantistico all'azione del campo di Liouville.

Per fare questo partiamo dall'azione classica regolarizzata per il campo riscaldato  $\varphi$ , equazione (3.18):

$$S_{cl}[\varphi] = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} (\partial_a \varphi)^2 + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi} \right) d^2x - \sum_{i=1}^3 (\eta_i \varphi_i + 2\eta_i^2 \log \varepsilon_i)$$

Separando il campo nel seguente modo  $\varphi = \varphi_B + \psi$  l'azione diventa

$$\begin{aligned} S_{cl}[\varphi] &= \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} (\partial_a \varphi_B)^2 + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B} \right) d^2x \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\partial_a \psi)^2 + \partial^a \varphi_B \partial_a \psi + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B} (e^{\psi} - 1) \right] \\ &- \sum_{i=1}^3 (\eta_i \varphi_i + 2\eta_i^2 \log \varepsilon_i) \end{aligned}$$

Il secondo termine nel secondo integrale si può calcolare per parti, tenendo conto del termine di bordo che compare a causa della regolarizzazione dell'azione:

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} d^2x \partial^a \varphi_B \partial_a \psi = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \psi \Delta \varphi_B + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Gamma} \psi \partial_a \varphi_B n^a d\lambda \quad (7.2)$$

e il secondo integrale si calcola facilmente a partire dal comportamento asintotico della soluzione di background (3.16):

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Gamma} \psi \partial_a \varphi_B n^a d\lambda = -\frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^3 \oint_{\partial\Gamma_i} \psi \frac{\partial \varphi_B}{\partial r} r d\theta = \sum_{i=1}^3 \eta_i \psi(z_i) \quad (7.3)$$

Quindi riesprimendo  $\Delta \varphi_B$  con l'equazione classica del moto (3.15) si ottiene

$$\begin{aligned} S_{cl}[\varphi] &= \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} (\partial_a \varphi_B)^2 + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B} \right) d^2x \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\partial_a \psi)^2 + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B} (e^{\psi} - 1 - \psi) \right] d^2x \\ &+ \sum_{i=1}^3 \eta_i \psi(z_i) - \sum_{i=1}^3 (\eta_i \varphi_i + 2\eta_i^2 \log \varepsilon_i) \end{aligned}$$

Notiamo infine che

$$\varphi_i = \frac{1}{2\pi\varepsilon_i} \oint \varphi dl = (\varphi_B)_i + \psi(z_i)$$

Di conseguenza il termine di bordo (7.3) cancella esattamente il contributo corrispondente nella regolarizzazione. In conclusione, ritornando al campo originale  $\phi = \phi_B + \chi$  si ottiene

$$S[\phi_B + \chi] = \frac{1}{b^2} S_{cl}[\varphi_B] + S_Q[\chi] \quad (7.4)$$



dove  $S_{cl}[\varphi_B]$  è l'azione classica sulla soluzione a tre sorgenti, calcolata nel capitolo 5, mentre

$$S_Q[\chi] = \frac{1}{4\pi} \int \left[ (\partial_a \chi)^2 + 4\pi\mu e^{2b\phi_B} \left( e^{2b\chi} - 1 - 2b\chi \right) \right] d^2x \quad (7.5)$$

è l'azione del campo quantistico  $\chi$ . La funzione a tre punti si scrive allora

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3) \rangle = e^{-\frac{1}{b^2}S_{cl}[\varphi_B]} \int [D\chi] e^{-S_Q[\chi]} \quad (7.6)$$

## 7.2 Studio dell'azione quantistica

Ricordiamo che il fattore conforme di background per tre sorgenti è dato dalla formula (5.23):

$$e^{2b\phi_B} = \frac{1}{8\pi\mu b^2} \frac{8\Delta|w_{12}|^2}{(\Delta y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2)^2} \equiv \frac{1}{8\pi\mu b^2} e^{\Phi_B} \quad (7.7)$$

dove  $e^{\Phi_B}$  è una quantità indipendente da  $b$ , che contiene il valore delle sorgenti solo attraverso i parametri  $\eta_i$ . Con queste notazioni l'azione quantistica si separa in un termine quadratico e un'interazione:

$$S_Q[\chi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left[ (\partial_a \chi)^2 + e^{\Phi_B} \chi^2 \right] + \frac{1}{2\pi} \int d^2x e^{\Phi_B} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2b)^{n-2}}{n!} \chi^n \quad (7.8)$$

La parte quadratica si può riscrivere in un modo significativo come segue

$$S_Q[\chi] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x e^{\Phi_B} \chi (-\Delta_{LB} + 1) \chi + \dots \quad (7.9)$$

dove abbiamo introdotto l'operatore di Laplace-Beltrami per la metrica di background  $\Delta_{LB} = e^{-\Phi_B} \Delta$ .

Quindi questa teoria descrive un campo bosonico con massa unitaria su uno spazio curvo la cui metrica è data dal fattore conforme a tre sorgenti. Il campo interagisce con sè stesso attraverso infiniti vertici di ordine  $n \geq 3$ . Il vertice a  $n$  campi è pesato con un fattore  $b^{n-2}$ .

Sfruttando la discussione sulla mappa conforme  $f$  fatta nel capitolo 5, vediamo che l'azione (7.8) si può riscrivere mappando la teoria sulla vela  $f(\mathbb{C})$ :

$$S_Q[\chi] = \frac{1}{\pi} \int_{f(\mathbb{C})} \frac{d^2z}{(1-z\bar{z})^2} \left[ \chi(-\Delta_{LB} + 1)\chi + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2b)^{n-2}}{n!} \chi^n \right] \quad (7.10)$$

dove il campo  $\chi$  va preso con le corrette condizioni sul bordo della vela, legate al fatto che come visto i due segmenti vanno identificati tra loro, così come i due archi di circonferenza. Vediamo quindi che l'azione risultante è del tutto analoga a quella che si ottiene per la pseudosfera [66] tranne per il fatto che l'integrazione non è più effettuata su tutto il disco unitario, ma solo su un suo sottoinsieme. Questo fatto, assieme alle condizioni al bordo per il campo  $\chi$  complica notevolmente la teoria, in particolare impedisce di calcolare per via diretta la funzione di Green dell'operatore  $-\Delta_{LB} + 1$ . Continueremo quindi a studiare la teoria sulla sfera di Riemann, senza trasportarla sulla vela attraverso la mappa  $f$ .

### 7.3 Sviluppo perturbativo

A questo punto possiamo operare come si fa solitamente in teoria dei campi, con uno sviluppo perturbativo nella costante di accoppiamento  $b$  rispetto alla lagrangiana di interazione data da

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2b)^{n-2}}{n!} \chi^n \quad (7.11)$$

Specifichiamo una volta per tutte che la lagrangiana di interazione va integrata rispetto alla misura data dalla metrica di background, ovvero rispetto a  $d\mu(x) = e^{\Phi_B} d^2x$ .

La funzione a 3 punti si calcola perturbativamente sviluppando in  $b$  l'esponenziale del termine di interazione ed integrando sulla parte quadratica gaussiana [63]:

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3) \rangle = e^{-\frac{1}{b^2}S_{cl}[\varphi_B]} \frac{2\pi}{\sqrt{\det(-\Delta_{LB} + 1)}} \cdot \left[ 1 + \sum_{\text{grafici di Feynman}} \right] \quad (7.12)$$

dove i grafici di Feynman si costruiscono come al solito a partire dal propagatore della teoria, che è definito come l'inverso dell'operatore differenziale che compare nella parte quadratica, ovvero

$$\frac{(-\Delta_{LB} + 1)}{2\pi} G = 1 \quad (7.13)$$

dove con 1 abbiamo indicato l'operatore identità.

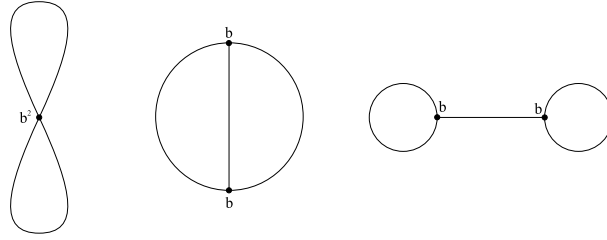


Figura 7.1: Grafici che contribuiscono all'ordine  $b^2$ .

Le regole di Feynman per i grafici si ricavano facilmente dalla forma della lagrangiana di interazione. I possibili vertici sono tutti quelli che connettono un numero  $n$  di campi maggiore di 3. Il coefficiente di un vertice di ordine  $n$  è

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(2b)^{n-2}}{n!} \quad (7.14)$$

La prima correzione quantistica alla funzione a tre punti viene dal determinante dell'operatore differenziale. Infatti a differenza di quanto accade normalmente in teoria dei campi, in cui questo contributo si ignora essendo una costante di normalizzazione inessenziale, nel nostro caso l'operatore è funzione del background, che contiene esplicitamente una dipendenza dalla posizione e dall'intensità delle sorgenti, ovvero in ultima analisi dai parametri che specificano gli operatori di vertice di cui stiamo calcolando la funzione a 3 punti. Il determinante dell'operatore dà un contributo all'ordine zero in  $b$ , in quanto come già discusso dipende solo dai parametri  $\eta_i$ .

La successiva correzione è di ordine  $b^2$  e viene dal contributo dei tre grafici in figura 7.1. Il numero totale delle linee uscenti dai vertici deve essere pari, dato che non abbiamo sorgenti esterne in cui le linee possono terminare. Quindi può comparire solo un numero pari di vertici di ordine dispari, ovvero le correzioni sono solo potenze pari di  $b$ .

## 7.4 Funzione di Green

Riprendendo l'equazione (7.13) vediamo che la funzione di Green della teoria è definita dall'equazione differenziale

$$-\Delta g(z, t) + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B(z)} g(z, t) = 2\pi \delta^2(z - t) \quad (7.15)$$

ottenuta moltiplicando l'equazione (7.13) per  $e^{\Phi_B}$  e notando che l'operatore identità si scrive  $e^{-\Phi_B} \delta^2(z-t)$  poiché siamo in presenza di una metrica di background non banale.

Non cercheremo la soluzione di questa equazione differenziale direttamente, ma dimostreremo che la funzione di Green è connessa alla soluzione del problema di tre sorgenti finite più una infinitesima, risolto nel capitolo 6. Infatti ricordiamo che in quel caso il campo di Liouville risolve l'equazione (6.1):

$$-\Delta\varphi + 8\pi\mu b^2 e^\varphi = 8\pi \sum_{i=1}^3 \eta_i \delta^2(z-z_i) + 8\pi\varepsilon\delta^2(z-t) \quad (7.16)$$

Sia  $\varphi_B$  la soluzione di background per le tre sole sorgenti finite. Allora possiamo scrivere

$$\varphi = \varphi_B + \varepsilon\chi$$

Sostituendo questa formula nell'equazione (7.16) e sviluppando al primo ordine in  $\varepsilon$  otteniamo

$$-\Delta\varphi_B - \varepsilon\Delta\chi + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B}(1 + \varepsilon\chi) = 8\pi \sum_{i=1}^3 \eta_i \delta^2(z-z_i) + 8\pi\varepsilon\delta^2(z-t)$$

Tutti i termini di ordine zero in  $\varepsilon$  si eliminano per l'equazione del campo di background. Rimane la seguente equazione

$$-\Delta\chi + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B} \chi = 8\pi\delta^2(z-t)$$

che è esattamente l'equazione (7.15), a meno di identificare

$$g(z, t) = \frac{\chi}{4} \quad (7.17)$$

La dipendenza da  $z$  della funzione di Green compare esplicitamente attraverso il punto in cui si calcola  $\chi(z)$ . La dipendenza da  $t$  invece è implicita attraverso la posizione della quarta sorgente infinitesima.

A questo punto dall'equazione (6.46) leggiamo la funzione di Green per background con sorgenti in  $0, 1, \infty$ :

$$g(z, t) = \frac{1}{w_{12} [\Delta y_1(z) \bar{y}_1(\bar{z}) - y_2(z) \bar{y}_2(\bar{z})]} \left\{ [\Delta y_1(z) \bar{y}_1(\bar{z}) + y_2(z) \bar{y}_2(\bar{z})] \cdot \right. \\ \cdot [I_{12}(z, t) + \bar{I}_{12}(\bar{z}, \bar{t}) + h(t) + \bar{h}(\bar{t})] \\ - y_1(z) \bar{y}_2(\bar{z}) [I_{22}(z, t) + \Delta \bar{I}_{11}(\bar{z}, \bar{t})] \\ \left. - \bar{y}_1(\bar{z}) y_2(z) [\bar{I}_{22}(\bar{z}, \bar{t}) + \Delta I_{11}(z, t)] \right\} \quad (7.18)$$

dove abbiamo indicato esplicitamente la dipendenza dalle coordinate nelle varie funzioni.

## 7.5 Proprietà della funzione di Green

Vogliamo ora analizzare le proprietà della funzione di Green. Verificheremo che l'espressione (7.18) risolve l'equazione (7.15) in condizioni molto generali. Studieremo le proprietà di trasformazione conforme. Quindi considereremo le singolarità della funzione di Green a punti coincidenti e sulle sorgenti, e infine mostreremo che  $g(z, t)$  è simmetrica.

### 7.5.1 Generalità

Si può verificare direttamente che la formula (7.18) è una soluzione dell'equazione per la funzione di Green, usando il fatto che

$$\frac{\partial I_{ij}(z, t)}{\partial z} = y_i(z)y_j(z)q(z) \quad (7.19)$$

e che il wronskiano  $w_{12} = y_1(z)y_2'(z) - y_1'(z)y_2(z)$  è costante e reale. Infatti il laplaciano si può scrivere in coordinate complesse come  $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$ . Poiché la dipendenza da  $z$  e  $\bar{z}$  è fattorizzata nell'espressione della funzione di Green, compaiono solamente derivate prime in  $z$  e  $\bar{z}$ . Dopo un calcolo non particolarmente complesso, anche se piuttosto lungo, queste derivate si ricombinano tutte a dare il wronskiano.

Da questa discussione segue che la formula (7.18) è del tutto generale. Il ragionamento appena fatto infatti è valido qualsiasi siano le soluzioni  $y_i$ , purché queste risolvano l'equazione differenziale fuchsiana corretta per descrivere un background con  $n$  sorgenti.

### 7.5.2 Invarianza conforme

L'equazione (7.18) fornisce la funzione di Green per un background con sorgenti in  $0, 1, \infty$ . Indichiamo questa funzione con  $g(0, 1, \infty; z, t)$ . Vogliamo ricavare la forma della funzione di Green per background generico  $e^{\varphi_B(z_1, z_2, z_3; z)}$ , ovvero con sorgenti in  $z_1, z_2, z_3$ . La corrispondente equazione sarà

$$-\Delta_z g(z_1, z_2, z_3; z, t) + 8\pi\mu b^2 e^{\varphi_B(z_1, z_2, z_3; z)} g(z_1, z_2, z_3; z, t) = 2\pi\delta^2(z - t)$$

(7.20)

Se operiamo la trasformazione conforme delle coordinate (5.62) che porta le sorgenti in  $0, 1, \infty$ , considerando la legge (1.5) di trasformazione del campo di Liouville, l'equazione (7.20) si può riscrivere

$$\begin{aligned}
 - \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \Delta_w g(z_1, z_2, z_3; f^{-1}(w), t) + 8\pi\mu b^2 \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 e^{\varphi(0,1,\infty;w)} \cdot \\
 \cdot g(z_1, z_2, z_3; f^{-1}(w), t) = 2\pi \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \delta(w - f(t))
 \end{aligned}$$

Tutti gli jacobiani si semplificano e si riottiene esattamente l'equazione originale per la funzione di Green  $g(0, 1, \infty; z, t)$ . Abbiamo quindi dimostrato che la funzione di Green è invariante in valore per trasformazioni conformi, ovvero in particolare:

$$g(z_1, z_2, z_3; z, t) = g\left(0, 1, \infty; \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z)(z_2 - z_1)}, \frac{(t - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - t)(z_2 - z_1)}\right) \quad (7.21)$$

### 7.5.3 Limite a punti coincidenti

Rimane da verificare che la funzione di Green ha una divergenza logaritmica per  $z \rightarrow t$ . Il comportamento singolare può derivare solamente dagli integrali  $I_{ij}(z, t)$  di cui ricordiamo la definizione

$$I_{ij}(z, t) = \frac{1}{2} \int_0^z dx y_i(x) y_j(x) \left[ \frac{(t-1)\beta - 2}{x} - \frac{2+t\beta}{x-1} + \frac{\beta}{x-t} + \frac{2}{(x-t)^2} \right] \quad (7.22)$$

Vediamo che per  $z \rightarrow t$  compaiono una singolarità logaritmica dal termine  $1/(z-t)$  e una polare da  $1/(z-t)^2$ . Separiamo queste divergenze sottraendo e aggiungendo negli integrali la sviluppo di Taylor di  $y_i(x)y_j(x)$  attorno a  $t$ , ovvero cominciamo riscrivendo la parte singolare come

$$\begin{aligned}
 I_{ij}(z, t) &\sim \frac{1}{2} \int_0^z dx y_i(x) y_j(x) \left[ \frac{\beta}{z-t} + \frac{2}{(z-t)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^z dx [y_i(x)y_j(x) - y_i(t)y_j(t)] \left[ \frac{\beta}{z-t} + \frac{2}{(z-t)^2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} y_i(t)y_j(t) \int_0^z dx \left[ \frac{\beta}{z-t} + \frac{2}{(z-t)^2} \right]
 \end{aligned}$$

L'ultimo integrale si calcola direttamente

$$\int_0^z dx \left[ \frac{\beta}{z-t} + \frac{2}{(z-t)^2} \right] = -\beta \log t + \beta \log(t-z) - \frac{2}{t} - \frac{2}{z-t}$$

A causa del termine  $1/(z-t)^2$  il penultimo integrale contiene ancora una singolarità che isoliamo come segue

$$\begin{aligned} \int_0^z dx \frac{y_i(x)y_j(x) - y_i(t)y_j(t)}{(z-t)^2} &= (y_i y_j)'(t) \int_0^z \frac{dx}{x-t} \\ &+ \int_0^z dx \frac{y_i(x)y_j(x) - y_i(t)y_j(t) - (x-t)(y_i y_j)'(t)}{(z-t)^2} \end{aligned}$$

Il primo integrale si calcola direttamente e dà  $-\log t + \log(t-z)$ .

Quindi possiamo riscrivere gli integrali  $I_{ij}(z, t)$  separando parti regolari e parti singolari per  $z \rightarrow t$ :

$$\begin{aligned} I_{ij}(z, t) &= \frac{1}{2} \int_0^z y_i(x)y_j(x) \left[ \frac{(t-1)\beta - 2}{x} - \frac{2+t\beta}{x-1} \right] dx \\ &+ \frac{\beta}{2} \int_0^z [y_i(x)y_j(x) - y_i(t)y_j(t)] \frac{1}{x-t} dx \\ &+ \int_0^z [y_i(x)y_j(x) - y_i(t)y_j(t) - (x-t)(y_i y_j)'(t)] \frac{1}{(x-t)^2} dx \\ &+ \frac{1}{2} y_i(t)y_j(t) \left[ -\beta \log t - \frac{2}{t} + \beta \log(t-z) - \frac{2}{z-t} \right] \\ &+ (y_i y_j)'(t) [\log(t-z) - \log t] \end{aligned} \quad (7.23)$$

ovvero indicando con  $H_{ij}(z, t)$  la parte regolare otteniamo

$$I_{ij}(z, t) = H_{ij}(z, t) + \frac{\beta}{2} y_i(t)y_j(t) \frac{1}{z-t} + \frac{1}{2} [\beta y_i(t)y_j(t) + 2(y_i y_j)'(t)] \log(t-z) \quad (7.24)$$

Utilizzando questo risultato nell'espressione della funzione di Green (7.18) e considerando che le  $y_i$  sono regolari in  $t$ , si possono isolare i coefficienti della singolarità polare e di quella logaritmica nel numeratore della (7.18). Il coefficiente di  $1/(z-t)$  è

$$-\beta [(\Delta y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2) y_1 y_2 - y_1 \bar{y}_2 y_2^2 - \Delta \bar{y}_1 y_2 y_1^2] = 0$$

Invece il coefficiente del termine logaritmico è

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [(\Delta y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2) (\beta y_1 y_2 + 2(y_1 y_2)') \\ &- y_1 \bar{y}_2 (\beta y_2^2 + 4y_2 y_2') - \Delta \bar{y}_1 y_2 (\beta y_1^2 + 4y_1 y_1')] \\ &= -\frac{1}{2} w_{12} (\Delta y_1 \bar{y}_1 - y_2 \bar{y}_2) \end{aligned}$$

In conclusione quindi vediamo che

$$g(z, t) \sim -\frac{1}{2} \log |z-t|^2 + \dots \quad \text{per } z \rightarrow t \quad (7.25)$$

Questo risultato non ha sfruttato in nessun modo il valore di  $\beta$  e  $\Delta$  o la forma particolare delle soluzioni  $y_i$ , quindi è valido in generale per un background arbitrario. Con questo abbiamo ottenuto il notevole risultato che l'equazione (7.18) fornisce la funzione di Green per il campo di background corrispondente ad un numero arbitrario di sorgenti.

Nel calcolo dei grafici di Feynman entrano loop in cui la funzione di Green è calcolata a punti coincidenti. Questi grafici vanno evidentemente regolarizzati a causa della divergenza logaritmica. La procedura più semplice, che è anche quella che sulla pseudosfera fornisce le giuste correzioni alle dimensioni conformi dei campi [66]<sup>1</sup>, consiste nell'eliminare la divergenza logaritmica, ponendo

$$g_R(z) = \lim_{z \rightarrow t} \left( g(z, t) + \log |z - t| \right) \quad (7.26)$$

Notiamo che questa regolarizzazione non è invariante per trasformazioni conformi. Infatti possiamo ad esempio scegliere di regolarizzare la funzione di Green per una background con sorgenti in  $z_1, z_2, z_3$ . Usando l'equazione (5.62) otteniamo:

$$\begin{aligned} g_R(z_1, z_2, z_3; z) &= \lim_{z' \rightarrow z} \left( g(z_1, z_2, z_3; z, z') + \log |z - z'| \right) \\ &= \lim_{w' \rightarrow w} \left( g(0, 1, \infty; w, w') + \log |w - w'| \right) \\ &\quad + \log \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_3| |z_2 - z_3|} |z - z_3|^2 \\ &= g_R(0, 1, \infty; w) + \log \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_3| |z_2 - z_3|} |z - z_3|^2 \end{aligned}$$

Le regolarizzazioni su background differenti differiscono quindi per un termine logaritmico funzione delle differenze tra le coordinate delle sorgenti.

Sulla pseudosfera si può dimostrare rigorosamente [66] che questo comportamento è l'origine delle correzioni di ordine  $b\alpha$  alle dimensioni conformi degli operatori di vertice.

#### 7.5.4 Comportamento sulle sorgenti

Vogliamo ora studiare cosa succede quando  $z \rightarrow z_i$ , ovvero quando uno dei due punti della funzione di Green si avvicina ad una delle sorgenti.

---

<sup>1</sup>Un metodo di regolarizzazione diverso, invariante conforme, è utilizzato nel caso di singolarità paraboliche da Takhtajan [50, 51].



Per simmetria è sufficiente considerare cosa succede ad esempio vicino a  $z = 0$ . Abbiamo già ricavato nel capitolo 6 lo sviluppo asintotico degli integrali  $I_{ij}(z, t)$  attorno a zero. In particolare abbiamo visto che questi integrali si annullano per  $z = 0$ . Gli ordini dominanti nel numeratore e nel denominatore dell'equazione (7.18) vengono dai termini in  $y_2 \bar{y}_2$ , quindi

$$g(z, t) \simeq \frac{|z|^{\frac{1-\lambda_1}{2}} (h + \bar{h})}{-w_{12} |z|^{\frac{1-\lambda_1}{2}}} = -\frac{h + \bar{h}}{w_{12}}$$

ovvero come ci aspettavamo la funzione di Green è regolare nell'intorno delle sorgenti. Infatti come già fatto notare una singolarità in uno di questi punti comporterebbe una correzione alla carica corrispondente.

Questo risultato ci permette di provare una semplice identità integrale che coinvolge la funzione di Green. Infatti possiamo integrare l'equazione (7.15) in  $z$  su tutto il piano complesso escluso un disco di raggio  $\varepsilon$  attorno a  $t$ :

$$-\int \Delta g(x, t) d^2x + \int e^{\Phi_B(x)} g(x, t) d^2x = 0$$

Il primo integrale si traduce in un termine di bordo che vale  $-2\pi$ . Segue quindi l'identità

$$\int e^{\Phi_B(x)} g(x, t) d^2x = 2\pi \tag{7.27}$$

### 7.5.5 Simmetria

La simmetria della funzione di Green (7.18) è tutt'altro che evidente e sicuramente complicata da dimostrare analiticamente.

Possiamo tuttavia addurre un argomento di carattere generale per dimostrare la simmetria. Infatti l'operatore differenziale  $D = -\Delta_{LB} + 1$  è come noto hermitiano nella metrica di background  $d\mu(x) = e^\Phi d^2x$ . La funzione di Green è definita dall'equazione

$$\int (-\Delta_{LB} + 1) g(x, y) f(y) d\mu(x) = f(x)$$

valida per una generica funzione  $f(x)$ . Ovvero deve essere  $DG = 1$ . L'hermitiano coniugato di questa equazione è

$$1 = G^\dagger D^\dagger = G^\dagger D$$

Tuttavia sappiamo che l'inverso sinistro e destro devono essere uguali, ovvero otteniamo  $G^\dagger = G$ . Poiché però la funzione di Green  $G$  è reale, si ha in realtà  $G^T = G$ , ovvero  $g(x, y) = g(y, x)$ . Questa argomentazione è chiaramente valida per un background generico, purché l'area data dall'integrale sulla sfera del fattore conforme sia finita.

Nel nostro caso abbiamo controllato numericamente la simmetria della funzione di Green. Per fare questo abbiamo calcolato gli integrali  $I_{ij}(z, t)$  utilizzando la formula (7.23) per gestire esattamente le divergenze a punti coincidenti. Il calcolo fatto con *Mathematica*<sup>TM</sup> ha dimostrato la simmetria entro una parte su  $10^6$ , ovvero

$$\left| \frac{g(x, y) - g(y, x)}{g(x, y)} \right| \leq 10^{-6}$$

su un campione di 64 coppie di punti scelti su una griglia con coordinate  $x = 1 + 0.5n + i + 0.5m$  e  $y = 1.2 + 0.5n + 1.2i + 0.5m$  dove  $n, m$  variano da 0 a 4. Abbiamo volutamente evitato di calcolare punti sull'asse reale per evitare problemi di convergenza degli integrali numerici dovuti alla presenza delle singolarità in 0 e 1. Nel calcolo fatto abbiamo posto  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.3$ .

## 7.6 Correzioni alle dimensioni conformi

Secondo il risultato della quantizzazione canonica sul cilindro, le corrette dimensioni conformi degli operatori di vertice sono

$$\Delta_\alpha = \alpha(Q - \alpha) = \frac{1}{b^2} \eta (1 - \eta + b^2) = \Delta_\alpha^{sc} + \eta \quad (7.28)$$

dove abbiamo indicato con  $\Delta_\alpha^{sc}$  le dimensioni semiclassiche già ricavate. La funzione a 3 punti ha in generale la forma

$$\langle V_1 V_2 V_3 \rangle = C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) |z_1 - z_2|^{2\gamma_3} |z_1 - z_3|^{2\gamma_2} |z_2 - z_3|^{2\gamma_1} \quad (7.29)$$

dove abbiamo posto  $\gamma_1 = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3$  e permutazioni cicliche. In particolare si ha

$$\gamma_1 = \Delta_1^{sc} - \Delta_2^{sc} - \Delta_3^{sc} + (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)$$

Quindi per quanto riguarda la dipendenza dalle coordinate ci aspettiamo una correzione alla funzione a tre punti data da

$$\langle V_1 V_2 V_3 \rangle = \langle V_1 V_2 V_3 \rangle_{sc} \exp(M) \quad (7.30)$$

dove

$$\begin{aligned}
M &= 4\eta_1 \log \frac{|z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2||z_1 - z_3|} + 4\eta_2 \log \frac{|z_1 - z_3|}{|z_2 - z_3||z_2 - z_1|} \\
&\quad + 4\eta_3 \log \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - z_3||z_2 - z_3|}
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Notiamo che questa è una correzione all'ordine zero in  $b$ . Di conseguenza non potrà venire dai grafici di Feynman, che come abbiamo discusso partono all'ordine  $b^2$ . L'unica possibilità è che sia contenuta nel determinante dell'operatore differenziale definito dalla parte quadratica dell'azione.

## 7.7 Determinante funzionale

Possiamo definire il determinante funzionale dell'operatore

$$D = -\Delta_{LB+} = -e^{\Phi_B} \Delta + 1 \tag{7.32}$$

con la regolarizzazione data dal metodo della funzione zeta e dell'heat kernel. Il calcolo di questo determinante è alquanto complesso, per due motivi.

Il primo è che la superficie che stiamo studiando presenta tre singolarità coniche. Le proprietà dell'heat kernel su superfici regolari sono ben note, mentre invece in presenza di punti singolari non si conoscono in generale espressioni esatte. Lo studio delle proprietà spettrali del laplaciano su varietà riemanniane singolari risale principalmente a Cheeger [16]. Lo sviluppo dell'heat kernel per l'operatore di Laplace si può ricavare sul cono a curvatura nulla [27] e questo risultato è stato generalizzato da Aurell e Salomonson [3, 4] e da Menotti e Peirano [37] al caso di una superficie piatta a tratti con sole singolarità coniche. Nel nostro caso invece abbiamo oltre alle tre sorgenti, anche una curvatura di background costante negativa.

Il secondo motivo è che la maggior parte dei risultati noti per heat kernel e funzione zeta si riferiscono all'operatore di Laplace-Beltrami, mentre nel nostro caso abbiamo l'aggiunta del termine costante 1. Questo modifica chiaramente la forma dell'heat kernel e non permette un'immediata generalizzazione dei risultati di [3, 4].

Quindi in questa sezione impostiamo il problema, ottenendo un'equazione variazionale per il determinante. Inoltre come esempio di un possibile metodo di calcolo, ricaviamo il determinante dell'operatore di Laplace-Beltrami per il fattore conforme per tre sorgenti come limite continuo di una distribuzione di difetti conici infinitesimi.

### 7.7.1 Heat kernel e funzione zeta

L'heat kernel dell'operatore  $D$  si può definire come la soluzione della seguente equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + D_x) K_D(x, y; t) = 0 \\ K_D(x, y; 0) = \delta(x, y) \end{cases} \quad (7.33)$$

Quindi dato un insieme completo di autostati  $|\nu\rangle$  dell'operatore  $D$  con corrispondente autovalore  $\lambda_\nu$  l'heat kernel si può scrivere come

$$K_D(t) = \sum_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu| e^{-\lambda_\nu t} \quad (7.34)$$

In generale si dimostra che l'heat kernel ha uno sviluppo asintotico per piccoli tempi della forma

$$K_D(x, x; t) \simeq \frac{c_{-1}(x)}{t} + \frac{c_{-1/2}(x)}{t^{-1/2}} + c_0(x) + \dots \quad (7.35)$$

dove in generale le potenze semintere compaiono quando la superficie presenta un bordo.

Si definisce anche una generalizzazione della funzione zeta di Riemann

$$Z_D(s) = \text{Tr}(D^{-s}) = \sum_{\nu} \lambda_\nu^{-s} \quad (7.36)$$

dove la somma è fatta su tutti gli autovalori. Questa traccia è finita per  $s$  sufficientemente grande, e può essere prolungata analiticamente attorno a  $s = 0$ . Derivando formalmente la somma in (7.36) rispetto a  $s$  e calcolando il risultato in  $s = 0$  si ottiene

$$Z'_D(0) = - \sum_{\nu} \log \lambda_\nu = - \log \det D \quad (7.37)$$

Quindi possiamo prendere questa equazione come definizione del determinante funzionale regolarizzato dell'operatore  $D$  [61, 16].

Discutiamo ora come si può generalizzare il metodo di [3] affinché sia applicabile all'operatore  $D$ . Se definiamo la densità di funzione zeta come

$$Z_D(x, x; s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K_D(x, x; t) \quad (7.38)$$

si può mostrare [3] che una sua rappresentazione equivalente, che fornisce il prolungamento analitico attorno a  $s = 0$ , è

$$Z_D(x, x; s) = \frac{1}{(s-1)(s-1/2)s\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^s \frac{\partial}{\partial t} [t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} [t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} [t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} t K_D(x, x; t)]]]$$

Con questa possiamo calcolare la derivata di  $Z_D$  in zero:

$$Z'_D(x, x; 0) = (3 + \gamma_E) c_0(x) + 2 \int_0^\infty dt \log t \frac{\partial}{\partial t} [t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} [t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} t K_D(x, x; t)]]$$

dove  $\gamma_E$  è la costante di Eulero-Mascheroni. Restringiamo l'intervallo di integrazione tra  $\varepsilon$  e  $\infty$  e integriamo per parti. Questa operazione fa nascere dei termini divergenti. Prendendo la parte finita e integrando su tutto il volume otteniamo la seguente identità

$$Z'_D(0) = \gamma_E Z_D(0) + \text{P.F.} \text{Tr} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} K_D(x, x; t) \quad (7.39)$$

A partire da questa equazione vogliamo trovare una formula variazionale [3] per calcolare  $Z'_D(0)$  ovvero il determinante di  $D$ . Cominciamo scrivendo l'heat kernel con un insieme completo di autostati dell'operatore  $D$ :

$$K_D(x, x; t) = \sum_\nu |\nu\rangle \langle \nu| e^{-\lambda_\nu t}$$

Quindi calcoliamo la variazione dell'equazione (7.39) per  $D \rightarrow D + \delta D$ . Al primo ordine in  $\delta D$  l'unico contributo all'heat kernel viene dallo spostamento degli autovalori. Quindi

$$\delta Z'_D(0) = \gamma_E \text{Tr} [\delta Z_D(x, x; 0)] - \text{P.F.} \sum_\nu \frac{\delta \lambda_\nu}{\lambda_\nu} e^{-t \lambda_\nu} \quad (7.40)$$

$$= \gamma_E \text{Tr} [\delta Z_D(x, x; 0)] - \text{P.F.} \sum_\nu \langle \nu | \delta D | \nu \rangle \frac{e^{-\varepsilon \lambda_\nu}}{\lambda_\nu} \quad (7.41)$$

Se ora supponiamo che la variazione dell'operatore  $D$  sia dovuta ad una trasformazione di Weyl che modifica il fattore conforme di background  $e^{2\sigma} \rightarrow e^{2(\sigma+\delta\sigma)}$  abbiamo

$$\delta D = \delta(-e^{-2\sigma} \Delta_0 + 1) = -(2\delta\sigma) D + (2\delta\sigma)$$

L'equazione (7.40) si riscrive nella forma finale

$$\begin{aligned} \delta Z'_D(0) &= \gamma_E \text{Tr} [\delta Z_D(x, x; 0)] + \text{P.F.} \text{Tr} [(2\delta\sigma) K_D(x, x, \varepsilon)] \\ &\quad - \text{P.F.} \text{Tr} [(2\delta\sigma) Z_D(x, x; 1)] \end{aligned} \quad (7.42)$$

dove abbiamo usato l'identità

$$Z_D(x, x; 1) = \int_0^\infty K_D(x, x; t) dt$$

L'equazione (7.42) differisce da quella ottenuta in [3, 4] per il termine dipendente dalla funzione zeta in 1. Questa aggiunta è chiaramente dovuta al fatto che il nostro operatore non è  $-\Delta_{LB}$  ma  $-\Delta_{LB} + 1$ .

Questo nuovo termine è più complesso da calcolare rispetto agli altri, in quanto la funzione zeta in 1 non può essere determinata conoscendo solamente lo sviluppo dell'heat kernel per piccoli tempi, ovvero nella terminologia solitamente utilizzata è un contributo non locale.

### 7.7.2 Laplaciano su superfici piatte

Consideriamo il caso più semplice dell'operatore di Laplace definito su una superficie patta ovunque a parte un certo numero di singolarità coniche. In questo caso Aurell e Salomonson [3, 4] hanno dimostrato che la variazione del determinante funzionale del laplaciano è data dalla somma di un contributo per ogni singolarità. Questo permette di integrare l'equazione funzionale e ottenere un'espressione esatta del determinante su questa superficie.

Il metodo utilizzato è essenzialmente il seguente. Rappresentiamo la sfera con una proiezione stereografica sul piano complesso, ottenendo il seguente fattore conforme che descrive correttamente le singolarità [37]:

$$e^{2\sigma} = e^{2\lambda_0} \prod_{i=1}^N |z - z_i|^{2(\alpha_i - 1)} \quad (7.43)$$

dove  $\lambda_0$  è un fattore globale di scala,  $z_i$  sono le posizioni dei difetti e  $\alpha_i$  le corrispondenti aperture, misurate in unità di  $2\pi$ , ovvero  $\alpha = 1$  indica che la superficie è regolare. Poiché la nostra superficie ha la topologia di una sfera, il teorema di Gauss-Bonnet dà una regola di somma per gli  $\alpha_i$ , ovvero

$$\sum_{i=1}^N (1 - \alpha_i) = 2 \quad (7.44)$$

Con queste notazioni, si dimostra [3, 27] che il contributo delle singolarità coniche è

$$Z_D(0) = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\alpha_j} - \alpha_j \right) \equiv c \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{\alpha_j} - \alpha_j \right) \quad (7.45)$$

dove  $c = 1/12$  è caratteristico dell'operatore laplaciano, ed è legato al coefficiente  $c_0$  dello sviluppo dell'heat kernel. Nell'intorno di uno degli  $z_i$  il fattore

conforme (7.43) si scrive

$$e^{2\sigma} \simeq |z - z_i|^{2(\alpha_i - 1)} e^{2\lambda_i} \quad \text{con} \quad \lambda_i = \lambda_0 + \sum_{j \neq i} (\alpha_j - 1) \log |z_i - z_j| \quad (7.46)$$

La variazione in funzione dei parametri  $\alpha_i$  e  $\lambda_i$  è data da

$$\delta\sigma(z, \bar{z}) = \left( \delta\lambda_i - \lambda_i \frac{\delta\alpha_i}{\alpha_i} \right) + \frac{\delta\alpha_i}{\alpha_i} \log(\alpha_i |z|)$$

Possiamo ora utilizzare l'equazione (7.42) che per il laplaciano non contiene il termine aggiuntivo dipendente da  $Z(1)$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} -\delta \log \det(-\Delta) &= \gamma_E \delta c_0 + \sum_i \left[ \left( \delta\lambda_i - \lambda_i \frac{\delta\alpha_i}{\alpha_i} \right) 2c \left( \frac{1}{\alpha_i} - \alpha_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{P.F.} \frac{2\delta\alpha_i}{\alpha_i} \int d^2x \log(\alpha_i |x|) K_\Delta(x, x; \varepsilon) \right] \quad (7.47) \end{aligned}$$

Questa equazione differenziale funzionale si può integrare [37]. Infatti si ha

$$\left( \delta\lambda_i - \lambda_i \frac{\delta\alpha_i}{\alpha_i} \right) \left( \frac{1}{\alpha_i} - \alpha_i \right) = \delta \left[ \left( \frac{1}{\alpha_i} - \alpha_i \right) \lambda_i \right] + 2\delta\alpha_i \lambda_i$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_i \delta\alpha_i \lambda_i &= \sum_i \delta\alpha_i \sum_{j \neq i} (\alpha_j - 1) \log |z_i - z_j| \\ &\quad + \sum_j (\alpha_j - 1) \sum_{i \neq j} (\alpha_i - 1) \delta(\log |z_i - z_j|) \\ &= \sum_{i=1}^N (\alpha_i - 1) (\delta\lambda_i - \delta\lambda_0) \end{aligned}$$

infatti  $\sum_i \delta\alpha_i = 0$  per la (7.44) e inoltre la seconda somma è nulla per l'antisimmetria di  $\delta(\log |z_i - z_j|)$  in  $i, j$ . Segue che

$$\begin{aligned} 2 \sum_i \delta\alpha_i \lambda_i &= \sum_i \delta\alpha_i \lambda_i + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - 1) (\delta\lambda_i - \delta\lambda_0) \\ &= \delta \left[ \sum_{i=1}^N (\alpha_i - 1) (\lambda_i - \lambda_0) \right] \end{aligned}$$

In questo modo integrando direttamente otteniamo la forma finale per il determinante del laplaciano su una superficie piatta con singolarità coniche

$$\begin{aligned} \log \det(-\Delta) &= 2c \left[ \sum_{i, j \neq i} \frac{(\alpha_i - 1)(\alpha_j - 1)}{\alpha_i} \log |z_i - z_j| \right. \\ &\quad \left. + \lambda_0 \sum_i \left( \alpha_i - \frac{1}{\alpha_i} \right) - \sum_i F(\alpha_i) \right] \quad (7.48) \end{aligned}$$

dove con  $F(\alpha_i)$  abbiamo indicato i termini corrispondenti agli integrali dell'equazione (7.47). Questi non contengono dipendenze dalle posizioni delle singolarità, quindi non sono rilevanti per i nostri scopi, in quanto siamo interessati solamente alle correzioni alle dimensioni conformi degli operatori di vertice, ovvero alla dipendenza del determinante dalle posizioni delle sorgenti  $z_i$ .

Dalla definizione (7.43) del fattore conforme si ricava immediatamente che per trasformazioni di  $SL(2, \mathbb{C})$

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (7.49)$$

le posizioni  $z_i$  dei difetti conici e il fattore di scala  $\lambda_0$  si modificano nel seguente modo:

$$z'_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d} \quad (7.50)$$

$$\lambda'_0 = \lambda_0 + \sum_{i=1}^N (\alpha_i - 1) \log |cz_i + d| \quad (7.51)$$

Con queste equazioni si verifica esplicitamente che la formula (7.48) è invariante per azione di  $SL(2, \mathbb{C})$ .

### 7.7.3 Laplaciano su superfici curve

Vogliamo ora estendere questo risultato al caso di superfici con singolarità coniche in presenza però di un fattore conforme di background arbitrario. In questo modo ci avviciniamo al nostro problema, in cui la superficie presenta tre difetti conici ed ha curvatura costante negativa.

Scriviamo quindi il fattore conforme, dato dal campo Liouville, scomponendolo in un contributo dovuto alle singolarità e in un background regolare:

$$e^{\Phi_B} = e^{\lambda_0} \prod_{i=1}^N |z - z_i|^{2(\alpha_i - 1)} e^{2\sigma_B} \quad (7.52)$$

Vogliamo riprodurre il fattore regolare  $\sigma_B$  come limite continuo di una distribuzione di singolarità coniche poste in punti  $z_B$  e di apertura  $\alpha_B$ :

$$e^{\Phi_B} = e^{\lambda_0} \prod_{i=1}^N |z - z_i|^{2(\alpha_i - 1)} e^{2\lambda_B} \prod_B |z - z_B|^{2(\alpha_B - 1)} \quad (7.53)$$



Il punto di partenza è ora l'equazione (7.48) in cui trascuriamo i termini  $F(\alpha)$ . Separiamo il contributo dei difetti finiti da quello di background:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j \neq i} \frac{(\alpha_i - 1)(\alpha_j - 1)}{\alpha_i} \log |z_i - z_j| \\
 & + \sum_i \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} \sum_B (\alpha_B - 1) \log |z_i - z_B| \\
 & + \sum_B \frac{\alpha_B - 1}{\alpha_B} \sum_i (\alpha_i - 1) \log |z_i - z_B| \\
 & + \sum_{B,A \neq B} \frac{(\alpha_B - 1)(\alpha_A - 1)}{\alpha_B} \log |z_A - z_B| \\
 & + (\lambda_0 + \lambda_B) \left[ \sum_i \left( \alpha_i - \frac{1}{\alpha_i} \right) + \sum_B \left( \alpha_B - \frac{1}{\alpha_B} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Il limite in cui i difetti conici di background diventano piccoli è  $\alpha_B \rightarrow 1$ . Allora la seconda e terza somma si combinano per dare

$$\sum_i \left( \alpha_i - \frac{1}{\alpha_i} \right) \sum_B (\alpha_B - 1) \log |z_i - z_B| \equiv \sum_i \left( \alpha_i - \frac{1}{\alpha_i} \right) \psi_B(z_i)$$

Dall'equazione (7.52) ricaviamo la forma del  $\sigma_B$  che vogliamo riprodurre con gli  $\alpha_B$ . Abbiamo

$$\sigma_B = \frac{\Phi_B}{2} + \sum_i (\alpha_i - 1) \log |z - z_i| - \lambda_0 \tag{7.54}$$

Considerando come trasforma il campo di Liouville per azione di  $SL(2, \mathbb{C})$  e le equazioni (7.50) e (7.51) troviamo che

$$\sigma_B(z_i) \rightarrow \sigma_B(z_i) + \log |cz_i + d| \left[ 2 - \sum_i (1 - \alpha_i) \right] \tag{7.55}$$

Dall'equazione (7.53) vediamo d'altra parte che il background nel limite continuo deve essere descritto da  $\psi_B + \lambda_B$ . Usando di nuovo le equazioni (7.50) e (7.51) vediamo che questo trasforma correttamente secondo la (7.55).

Quindi dobbiamo studiare ora il limite continuo della seguente espres-

sione

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j \neq i} \frac{(\alpha_i - 1)(\alpha_j - 1)}{\alpha_i} \log |z_i - z_j| + \sum_i \left( \alpha_i + \frac{1}{\alpha_i} \right) (\sigma_B + \lambda_0) \\
 & + \sum_{B,A \neq B} (\alpha_B - 1)(\alpha_A - 1) \log |z_A - z_B| + \lambda_B \sum_B \left( \alpha_B - \frac{1}{\alpha_B} \right) \\
 & - 2\lambda_0 \left[ 2 - \sum_i (1 - \alpha_i) \right] \tag{7.56}
 \end{aligned}$$

La prima riga si calcola immediatamente quando ci sono tre sole sorgenti. Infatti abbiamo che

$$\tilde{\sigma}_B = \sigma_B + \lambda_0 = \frac{\Phi_B}{2} + \sum_i (\alpha_i - 1) \log |z - z_i| \tag{7.57}$$

è una regolarizzazione del campo di Liouville di background, il cui comportamento asintotico è dato dall'equazione (5.65). Confrontando con la forma del fattore conforme nelle vicinanze di uno dei difetti, equazione (7.45), troviamo che  $\alpha_i = 1 - 2\eta_i$ , come potevamo dedurre anche dalle discussioni sulla forma della regione a vela fatte nel paragrafo 5.4. Quindi abbiamo

$$\tilde{\sigma}_B(z_1) = \alpha_1 L_{23} + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) L_{12} + (1 - \alpha_1 - \alpha_3) L_{13} \tag{7.58}$$

e simili permutando gli indici, avendo posto  $L_{ij} \equiv \log |z_i - z_j|$ .

Il contributo della prima riga dell'equazione (7.56) è in conclusione

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1) [L_{12} (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - 1) \\
 & + L_{13} (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 1) + L_{23} (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)] \tag{7.59}
 \end{aligned}$$

È interessante notare come gli  $\alpha_i$  siano scomparsi da tutti i denominatori. Questa è una caratteristica che vogliamo che il determinante abbia, in quanto le dimensioni conformi dei campi secondo il risultato di Curtright e Thorn non dovrebbero dipendere dai reciproci degli  $\eta_i$ .

Il contributo della parte di background si calcola nel seguente modo. Osserviamo intanto che il logaritmo è proprio la funzione di Green del laplaciano per il fattore conforme (7.43). Simbolicamente

$$\log |z - z'| = 2\pi \frac{1}{\Delta}(z, z') \tag{7.60}$$

Inoltre data una qualsiasi regione  $V$  abbiamo

$$\int_V d^2x e^{2\sigma} R = -2 \int_V d^2x \Delta\sigma = 4\pi \sum_{\{A: z_A \in V\}} (1 - \alpha_A)$$

ovvero nel limite continuo possiamo identificare

$$1 - \alpha_A \rightarrow \frac{\sqrt{g}R}{4\pi} \Big|_{z_A} = -\frac{1}{2\pi} \Delta\sigma_B|_{z_A} \quad (7.61)$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} & \sum_{B,A \neq B} (\alpha_B - 1)(\alpha_A - 1) \log |z_A - z_B| \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int d^2z d^2z' (\Delta\sigma_B)(z) \frac{1}{\Delta}(z, z') (\Delta\sigma_B)(z') \\ & = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \sigma_B \Delta\sigma_B \end{aligned} \quad (7.62)$$

Invece l'altro termine di background fornisce un integrale non dipendente dalle posizioni delle sorgenti:

$$\lambda_B \sum_B \left( \alpha_B - \frac{1}{\alpha_B} \right) \rightarrow \frac{\lambda_B}{\pi} \int d^2z \Delta\sigma_B$$

Il contributo dell'equazione (7.62) si calcola utilizzando l'espressione (7.54) per il fattore conforme. Indicando con  $L$  la somma di logaritmi in questa equazione abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int d^2z \sigma_B \Delta\sigma_B &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left\{ -\lambda_0 \Delta \left( \frac{\Phi_B}{2} + L \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \Phi_B \Delta \Phi_B \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} L \Delta \Phi_B + \frac{1}{2} \Phi_B \Delta L + L \Delta L \right\} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Poiché  $\sigma_B$  è regolare, possiamo calcolare questi contributi integrando sulla regione  $\Gamma$  formata da tutto il piano complesso meno dei dischi di raggio  $\varepsilon_i$  attorno alle sorgenti. Nel limite in cui  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  otteniamo il risultato cercato. In particolare gli ultimi due termini nell'equazione (7.63) non contribuiscono in quanto il laplaciano dei logaritmi è nullo nella regione  $\Gamma$ . Calcoliamo invece gli altri termini.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \int d^2x \Delta \Phi_B &= 8\pi \sum_j \eta_j = 4\pi \sum_j (1 - \alpha_j) \\ \int d^2x \Delta L &= 2\pi \sum_j (1 - \alpha_j) \end{aligned}$$

e quindi questi contributi non ci interessano in quanto non contengono dipendenza dagli  $z_i$ .

Il termine successivo si può ricondurre all'integrale dell'azione classica regolarizzata (3.18). Infatti:

$$\begin{aligned}
 \int d^2x \Phi_B \Delta \Phi_B &= \int \partial_a (\Phi_B \partial^a \Phi_B) - \int d^2x (\partial_a \Phi_B)^2 \\
 &= \text{B.T.} - 16\pi \left\{ \frac{1}{8\pi} \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_a \Phi_B)^2 + e^{\Phi_B} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{8\pi} \int d^2x e^{\Phi_B} \right\} \\
 &= \text{B.T.} - 16\pi \left[ S_{cl} + \sum_j (\eta_j \Phi_j + 2\eta_j^2 \log \varepsilon_j) \right] \\
 &\quad + 2 \int d^2x e^{\Phi_B}
 \end{aligned}$$

Il termine di bordo è

$$\text{B.T.} = -32\pi \sum_j \eta_j^2 \log \varepsilon_j + 8\pi \sum_j \eta_j X_j$$

dove gli  $X_j$  sono definiti dall'equazione (5.65). Riassumendo si ha

$$\int d^2x \Phi_B \Delta \Phi_B = -8\pi \sum_j \eta_j X_j - 16\pi S_{cl} + 8\pi \sum_j (1 - \alpha_j) \quad (7.64)$$

L'altro termine che conta è il seguente

$$\int d^2x L \Delta \Phi_B = \int d^2x \partial_a [L \partial^a \Phi_B - \Phi_B \partial^a L] + \int d^2x \Phi_B \Delta L$$

L'ultimo integrale è nullo, poiché  $\Delta L = 0$  su  $\Gamma$ . I due termini di bordo si calcolano a partire dal comportamento asintotico del campo di Liouville e si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \int d^2x \partial_a (L \partial^a \Phi_B) &= 4\pi \sum_{i,j \neq i} (1 - \alpha_i)(1 - \alpha_j) \log |z_i - z_j| \\
 &\quad + 4\pi \sum_j (1 - \alpha_j)^2 \log \varepsilon_j \\
 \int d^2x \partial_a (\Phi_B \partial^a L) &= 4\pi \sum_j (1 - \alpha_j)^2 \log \varepsilon_j - 2\pi \sum_j X_j (1 - \alpha_j)
 \end{aligned}$$

a meno di termini che vanno a zero con  $\varepsilon_j$ . Quindi quest'ultimo contributo è

$$4\pi \sum_{i,j \neq i} (1 - \alpha_i)(1 - \alpha_j) \log |z_i - z_j| + 2\pi \sum_j X_j (1 - \alpha_j) \quad (7.65)$$

Se sommiamo le equazioni (7.64) e (7.65) tenendo conto della (7.63) e considerando solamente la parte dipendente dalle coordinate  $z_i$  otteniamo infine

$$-2S_{cl} + \sum_{i,j \neq i} (\alpha_i - 1)(\alpha_j - 1) \log |z_i - z_j|$$

Leggendo la dipendenza dell'azione classica dalle coordinate nell'equazione (5.46) e notando che  $\delta_i = \frac{1-\alpha_i^2}{4}$  vediamo che il contributo interessante è

$$\begin{aligned} & 2L_{12} [\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)] \\ & + 2L_{13} [\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + (\alpha_1 - 1)(\alpha_3 - 1)] \\ & + 2L_{23} [-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + (\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)] \end{aligned} \quad (7.66)$$

In conclusione dalle equazioni (7.59) e (7.66) possiamo ricostruire la dipendenza del determinante del laplaciano dalle posizioni delle sorgenti:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{\det(-\Delta)} = & -8c \left[ (\delta_1 + \delta_2 - \delta_3) \log |z_1 - z_2| \right. \\ & + (\delta_1 - \delta_2 + \delta_3) \log |z_1 - z_3| \\ & \left. + (-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \log |z_2 - z_3| \right] \end{aligned} \quad (7.67)$$

Questo risultato è notevole perché riproduce il tipo di correzione che ci aspettiamo di trovare per le dimensioni degli operatori di vertice. In realtà qui troviamo una dipendenza da  $\delta_i = \eta_i(1 - \eta_i)$  e non da  $\eta_i$  semplicemente come vorremmo. L'origine di questa differenza è che qui abbiamo trovato il determinante del laplaciano e non dell'operatore  $D$ . Il calcolo di questo differisce da quello appena fatto per il diverso coefficiente  $c$  e per la presenza del termine in più legato alla funzione zeta calcolata in 1. Tuttavia il risultato (7.67) è comunque interessante perché mostra che tutti i fattori  $\alpha$  a denominatore si cancellano, come deve succedere per avere una correzione alle dimensioni conformi che sia in accordo con quanto ottenuto da Curtright e Thorn.



# Conclusioni

Vogliamo riassumere qui brevemente i principali obiettivi e i risultati originali ottenuti in questa tesi.

Contrariamente a quanto accade sulla pseudosfera, non esiste nell'approccio funzionale una teoria perturbativa standard sulla sfera, dove la difficoltà principale è una limitazione imposta dal teorema di Gauss-Bonnet (disuguaglianza di Picard o limite di Seiberg). Questo impone di lavorare partendo da un background non banale in cui sono presenti delle sorgenti, attorno al quale si sviluppa la teoria perturbativa.

Nel capitolo 6 viene calcolata esplicitamente la funzione a quattro punti con tre sorgenti finite e una infinitesima, esprimendola in termini di integrali di funzioni ipergeometriche. Questo risultato viene pure generalizzato, anche se in forma non esplicita, al caso di un numero arbitrario di sorgenti.

Si ottengono quindi delle espressioni esatte per il limite semiclassico di funzioni di correlazione di operatori di vertice con tre cariche generiche e le altre infinitesime.

Per quanto riguarda il calcolo quantistico nel capitolo 7 si ricava un'espressione esplicita per la funzione di Green sul background dato da tre sorgenti. Si dimostra quindi che il contributo quantistico fondamentale è dato dal determinante funzionale di un operatore ellittico su di una superficie di Riemann singolare, che non è ancora stato trattato in letteratura. Un calcolo preliminare su di un operatore analogo, ma più semplice, mostra che la struttura che emerge ha le corrette caratteristiche di fattorizzazione che ci si attende dalla forma delle funzioni di correlazione.

Il calcolo esatto di tale determinante è di notevole importanza per la teoria quantistica di Liouville che rappresenta un primo modello completamente quantistico di teoria dei campi su spazi curvi ed è naturalmente il prossimo obiettivo di questa ricerca.





## Appendice A

# Calcolo dei commutatori per la quantizzazione canonica

In questa appendice riportiamo i dettagli del calcolo dei commutatori che servono per ricavare l'algebra di Virasoro nella quantizzazione canonica, come discusso nel capitolo 2.

Nel calcolare  $[J_k^\pm, J_m^\pm]$  abbiamo vari termini. I commutatori di un solo  $a_k$  con un solo  $a_m$  si calcolano direttamente dalla regola (2.8). Abbiamo poi termini del tipo

$$\sum_l [a_k, : a_l a_{m-l} :]$$

Se  $l \neq -m + l$  ovvero  $m \neq 0$  i due operatori dentro il prodotto normale ordinato commutano e quindi si ottiene

$$\sum_l [a_k, : a_l a_{m-l} :] = \sum_l (k \delta_{k+l} a_{m-l} + k \delta_{k+m-l} a_l) = 2k a_{k+m} \quad (\text{A.1})$$

Se invece  $m = 0$  abbiamo

$$\sum_l [a_k, : a_l a_{m-l} :] = 2 \sum_{l>0} [a_k, a_{-l} a_l] = 2k a_k = 2k a_{k+m} \quad (\text{A.2})$$

Compare poi il commutatore di due prodotti normali ordinati:

$$\sum_{n,l \neq 0} [ : a_n a_{k-n} :, : a_l a_{m-l} : ]$$

Come prima se  $m \neq 0$  e  $k \neq 0$  gli operatori commutano e si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{n,l \neq 0} [ : a_n a_{k-n} :, : a_l a_{m-l} : ] &= 2 \sum_{n \neq 0, k+m} (k-n) a_n a_{k+m-n} \\ &+ 2 \sum_{n \neq k, -m} n a_{m+n} a_{k-n} \end{aligned}$$

Questo risultato si può riscrivere con prodotti ordinati normalmente considerando che gli operatori nelle somme commutano se  $k+m \neq 0$ . In questo caso la formula precedente si riduce a

$$2(k-m) \sum_{n \neq 0, k+m} : a_n a_{k+m-n} : \quad (\text{A.3})$$

Se invece  $k+m=0$  dobbiamo separare nella prima somma i contributi per  $n < 0$  e  $n > 0$  e nella seconda quelli per  $n < k$  e  $n > k$ :

$$\begin{aligned} &2 \sum_{n \neq 0} (k-n) a_n a_{-n} + 2 \sum_{n \neq k} n a_{n-k} a_{-(n-k)} \\ &= 2 \left( \sum_{n \neq 0} (k-n) : a_n a_{-n} : + \sum_{n \neq -k, k} n : a_{n-k} a_{-(n-k)} : \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n > 0} (k-n)n - \sum_{n > k} n(k-n) \right) \end{aligned}$$

Nella seconda somma ora cambiamo variabile ponendo  $n \rightarrow n+k$ . Abbiamo allora

$$2(2k) \sum_{n \neq 0} : a_n a_{-n} : + 2 \sum_{n=1}^k n(k-n) = 2(2k) \sum_{n \neq 0} : a_n a_{-n} : - \frac{k}{6} + \frac{k^3}{6} \quad (\text{A.4})$$

In conclusione utilizzando le equazioni (2.16), (A.1), (A.2), (A.3) e (A.4) si ottiene:

$$[J_k^\pm, J_m^\pm] = (k-m) \left( J_{k+m}^\pm - \frac{1}{24} \delta_{m+n} \right) + k^3 \left( \gamma^2 + \frac{1}{12} \right) \delta_{k+m} \quad (\text{A.5})$$

Rimane da calcolare il commutatore di  $J_k^\pm$  con  $K_m$ . Si ha chiaramente

$$[J_k^\pm, K_m] = \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} [J_k^\pm, : e^{2b\Phi(\sigma)} :] \quad (\text{A.6})$$

Usando la formula (2.14) otteniamo intanto

$$\begin{aligned} : e^{2b\Phi} : &= \exp[-ib\sqrt{2}a_0^\dagger] \exp[ib\sqrt{2}a_0] \exp \left[ ib\sqrt{2} \sum_{n < 0} \frac{1}{n} (a_n e^{-in\sigma} + b_n e^{in\sigma}) \right] \\ &\cdot \exp \left[ ib\sqrt{2} \sum_{n > 0} \frac{1}{n} (a_n e^{-in\sigma} + b_n e^{in\sigma}) \right] \end{aligned}$$

Dalle regole di commutazione canonica si ottiene in particolare che

$$\left[ \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, : e^{2b\Phi} : \right] = -ib\sqrt{2}e^{\pm ik\sigma} : e^{2b\Phi} : \quad (\text{A.7})$$

e quindi

$$\begin{aligned} [J_k^\pm, : e^{2b\Phi} :] &= -ib\sqrt{2} \left\{ : e^{2b\Phi} : \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} + \left( \frac{a_0 + a_0^\dagger}{2} + i\gamma k \right) e^{\pm ik\sigma} : e^{2b\Phi} : \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0, k} e^{\pm i(k-n)\sigma} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} : e^{2b\Phi} : \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0, k} e^{\pm in\sigma} : e^{2b\Phi} : \begin{pmatrix} a_{k-n} \\ b_{k-n} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Usando la (A.7) possiamo riscrivere i termini  $: e^{2b\Phi} : a_k$  commutando gli operatori. Operiamo in modo analogo anche con il termine contenente i modi zero. Riscriviamo come fatto già in precedenza i risultati come prodotti normali ordinati quando possibile, ottenendo

$$\begin{aligned} [J_k^\pm, : e^{2b\Phi} :] &= -ib\sqrt{2} \left\{ \frac{a_0 + a_0^\dagger}{2} e^{2b\Phi} : e^{\pm ik\sigma} + i\gamma k : e^{2b\Phi} : e^{\pm ik\sigma} \right. \\ &\quad + e^{\pm ik\sigma} \sum_{n \neq 0} : e^{2b\Phi} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} : e^{\mp in\sigma} \\ &\quad \left. - \frac{ib\sqrt{2}}{2} e^{\pm ik\sigma} \left( \sum_{n > 0} : e^{2b\Phi} : - \sum_{n > k} : e^{2b\Phi} : \right) \right\} \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Da questa segue, integrando in  $\sigma$  come nell'equazione (A.6)

$$\begin{aligned} [J_k^\pm, K_m] &= b\sqrt{2} \left( \gamma - \frac{b}{\sqrt{2}} \right) k K_{m \pm k} \\ &\quad - ib\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m \pm k)\sigma} : e^{2b\Phi} \left( \frac{a_0 + a_0^\dagger}{2} + \sum_{n \neq 0} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} e^{\mp in\sigma} \right) : \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$



# Bibliografia

- [1] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, K. D. Rothe, *Non-perturbative methods in 2 dimensional quantum field theory*, World Scientific (1991)
- [2] O. Alvarez, *Theory of strings with boundaries*, Nucl. Phys. **B216**, 125 (1982)
- [3] E. Aurell, P. Salomonson, *On functional determinants of laplacians in polygons and simplices*, Commun. Math. Phys. **165**, 233 (1994) [hep-th/9304031]
- [4] E. Aurell, P. Salomonson, *Further results on functional determinants of laplacians in simplicial complexes*, hep-th/9405140
- [5] A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rep. **119**, 1 (1974)
- [6] A. A. Belavin, A. N. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241**, 333 (1984)
- [7] A. Bilal, J.-L. Gervais, *Exact quantum three-point function of Liouville highest-weight states*, Nucl. Phys. **B305**, 33 (1988)
- [8] A. Bilal, J.-L. Gervais, *Construction of constant curvature punctured Riemann surfaces with particle-scattering interpretation* J. Geom. Phys. **5**, 277 (1988)
- [9] A. A. Bolibrukh, *The Riemann-Hilbert problem*, Russian Math. Surveys, **45**, 1 (1990)

- [10] E. Braaten, T. L. Curtright, G. Ghandour, C. Thorn, *Nonperturbative weak-coupling analysis of the Quantum Liouville Field Theory*, Phys. Rev. Lett. **51**, 19 (1983)
- [11] E. Braaten, T. Curtright, G. Ghandour, C. B. Thorn, *Nonperturbative weak-coupling analysis of the Quantum Liouville Field Theory*, Ann. Phys. **153**, 147 (1984)
- [12] C. G. Callan, S. D. Coleman, R. Jackiw, *A new improved energy-momentum tensor*, Ann. Phys. **59**, 42 (1970)
- [13] L. Cantini, P. Menotti, D. Seminara, *Liouville theory, accessory parameters and 2+1 dimensional gravity*, Nucl. Phys. **B638**, 351 (2003) [hep-th/0203103]
- [14] L. Cantini, P. Menotti, D. Seminara, *Proof of Polyakov conjecture for general elliptic singularities*, Phys. Lett. **B517**, 203 (2001) [hep-th/0105081]
- [15] L. Cantini, P. Menotti, D. Seminara, *Polyakov conjecture and 2+1 dimensional gravity*, hep-th/0112102
- [16] J. Cheeger, *Spectral geometry of singular Riemann spaces*, J. Diff. Geom. **18**, 575 (1983)
- [17] T. L. Curtright, C. B. Thorn, *Conformally invariant quantization of the Liouville Theory*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1309 (1982)
- [18] B. S. DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields*, Blackie and Son Ltd. (1965)
- [19] E. D'Hoker, *Equivalence of Liouville Theory and 2-D quantum gravity*, Mod. Phys. Lett. **A6**, 745 (1991)
- [20] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, R. Jackiw, *SO(2,1)-invariant quantization of the Liouville theory*, Phys. Rev. **D28**, 2583 (1983)
- [21] E. D'Hoker, R. Jackiw, *Classical and quantal Liouville field theory*, Phys. Rev. **D26**, 3517 (1982)
- [22] E. D'Hoker, D. H. Phong, *The geometry of string perturbation theory*, Rev. Mod. Phys. **60**, 917 (1988)

- 
- [23] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sènèchal, *Conformal Field Theory*, Springer (1997)
- [24] J. Distler, H. Kawai, *Conformal field theory and 2-D quantum gravity*, Nucl. Phys. **B321**, 509 (1989)
- [25] H. Dorn, H.-J. Otto, *On correlation functions for non-critical strings with  $c \leq 1$   $D \geq 1$* , Phys. Lett. **B291**, 39 (1992)
- [26] H. Dorn, H.-J. Otto, *Two and three point functions in Liouville Field Theory*, Nucl. Phys. **B429**, 375 (1994)
- [27] J. S. Dowker, *Heat-kernel expansion on a polyhedron*, Phys. Rev. D **36**, 620 (1987)
- [28] A. Erdélyi, *Higher transcendental functions* Vol. I, McGraw-Hill (1953)
- [29] S. Fubini, A. J. Hanson, R. Jackiw, *New approach to field theory*, Phys. Rev. **D7**, 1732 (1973)
- [30] P. Ginsparg, G. Moore, *Lectures on 2D gravity and 2D string theory*, hep-th/9304011 (1993)
- [31] M. Goulian, M. Li, *Correlation functions in Liouville Theory*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2051 (1991)
- [32] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press (1965)
- [33] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* Dover Publ. (1953)
- [34] J. A. Hempel, *On the uniformization of the  $n$ -punctured sphere*, Bull. London Math. Soc. **20**, 97 (1998)
- [35] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publ. (1944)
- [36] L. Lichtenstein, Acta Mathematica, **40**, 1 (1915)
- [37] P. Menotti, P. P. Peirano, *Functional integration on two dimensional Regge surfaces*, Nucl. Phys. **B473**, 426 (1996) [hep-th/9602002]
- [38] P. Menotti, D. Seminara, *ADM approach to 2+1 dimensional gravity coupled to particles*, Ann. Phys. **279**, 282 (2000) [hep-th/9907111]

- [39] P. Menotti, D. Seminara, *ADM approach to 2+1 dimensional gravity*, hep-th/9912263
- [40] Z. Nehari, *Conformal mapping*, McGraw-Hill (1952)
- [41] E. Picard, *Compt. Rend.* **116**, 1015 (1893); *J. Math. Pures Appl.* **4**, 273 (1893) e 313 (1898); *Bull. Sci. Math.* **XXIV** **1**, 196 (1900)
- [42] J. Polchinski, *Evaluation of the one loop string path integral*, *Commun. Math. Phys.* **104**, 37 (1986)
- [43] J. Polchinski, *String Theory* Vol. I, Cambridge Univ. Press (1998)
- [44] A. M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, *Phys. Lett.* **103B**, 207 (1981)
- [45] A. M. Polyakov, *Gauge fields and strings*, Harwood (1987)
- [46] E. G. C. Poole, *Introduction to the theory of linear differential equations*, Clarendon Press (1936)
- [47] A. N. Schellekens, *Introduction to Conformal Field Theory*, *Fortsch. Phys.* **44**, 605 (1996)
- [48] J. Scherk, *An introduction to the theory of dual models and strings*, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 123 (1975)
- [49] N. Seiberg, *Notes on Quantum Liouville Theory and Quantum Gravity*, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102**, 319 (1990)
- [50] L. A. Takhtajan, *Liouville Theory: quantum geometry of Riemann surfaces*, *Mod. Phys. Lett.* **A8**, 3529 (1993) [hep-th/9308125]
- [51] L. A. Takhtajan, *Topics in Quantum Geometry of Riemann Surfaces: two-dimensional quantum gravity*, Como Quantum Groups 1994, 541 [hep-th/9409088]
- [52] L. A. Takhtajan, P. G. Zograf, *On the Liouville equation, accessory parameters and the geometry of Teichmüller space for Riemann surfaces of genus 0*, *Math. USSR Sbornik* **60**, 143 (1988)
- [53] L. A. Takhtajan, P. G. Zograf, *On the uniformization of Riemann surfaces and on the Weil-Petersson metric on the Teichmüller and Schottky spaces*, *Math. USSR Sbornik* **60**, 297 (1988)



- 
- [54] J. Teschner, *From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces*, hep-th/0308031
- [55] J. Teschner, *A lecture on the Liouville vertex operator*, hep-th/0303150 (2003)
- [56] J. Teschner, *On the Liouville three-point function*, Phys. Lett. **B363**, 65 (1995) [hep-th/9507109]
- [57] J. Teschner, *Liouville Theory revisited*, Class. Quant. Grav. **18**, R153 (2001) [hep-th/0104158]
- [58] C. B. Thorn, *Liouville perturbation theory*, hep-th/0204142 (2002)
- [59] E. Tonni, *Approccio geometrico alla teoria quantistica del campo di Liouville*, Tesi di Laurea, Università di Pisa (2002)
- [60] M. Troyanov, *Prescribing curvature on compact surface with conical singularities*, Trans. Am. Math. Soc. **324**, 793 (1991)
- [61] D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: user's manual*, Phys. Rept. **388**, 279 (2003) [hep-th/0306138]
- [62] R. M. Wald, *General Relativity*, The Univ. of Chicago Press (1984)
- [63] S. Weinberg, *The quantum theory of fields Vol I e II*, Cambridge Univ. Press (1995-1996)
- [64] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press (1935)
- [65] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville Field Theory*, Nucl. Phys. **B477**, 577 (1996) [hep-th/9506136]
- [66] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Liouville Field theory on a pseudosphere*, hep-th/0101152 (2001)