

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

# Compattificazione di varietà di caratteri e applicazioni topologiche

Tesi di Laurea in Matematica

30 ottobre 2003

Candidato:  
**Daniele Alessandrini**

Relatore:  
**Prof. Riccardo Benedetti**

Anno Accademico 2002-2003



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>I Preliminari</b>	<b>8</b>
<b>1 Alcune nozioni utili</b>	<b>9</b>
1.1 Nozioni elementari di topologia . . . . .	9
1.1.1 Varietà differenziabili . . . . .	9
1.1.2 Classificazione delle superfici compatte orientabili . . .	12
1.1.3 Gruppo fondamentale . . . . .	12
1.1.4 Omologia . . . . .	14
1.1.5 Complessi cellulari . . . . .	16
1.1.6 Superfici incompressibili . . . . .	18
1.1.7 Varietà iperboliche . . . . .	21
1.2 Tori e Nodi . . . . .	23
1.2.1 Classificazione dei nodi e dei link nel toro $T^2$ . . . . .	23
1.2.2 Tori bordo di tori solidi . . . . .	25
1.2.3 Varietà dei nodi . . . . .	25
1.3 Grafi e alberi . . . . .	28
1.4 Gruppi ordinati e $\Lambda$ -spazi metrici . . . . .	29
1.4.1 Gruppi abeliani totalmente ordinati . . . . .	29
1.4.2 $\Lambda$ -spazi metrici . . . . .	31
1.4.3 $\Lambda$ -alberi . . . . .	32
<b>2 Preliminari di geometria algebrica</b>	<b>34</b>
2.1 Varietà affini . . . . .	34
2.1.1 Le varietà . . . . .	34
2.1.2 Dimensione . . . . .	36
2.1.3 Punti generici . . . . .	38
2.1.4 Morfismi . . . . .	39
2.1.5 Varietà reali . . . . .	41
2.2 Varietà proiettive . . . . .	41
2.2.1 Polinomi omogenei e varietà proiettive . . . . .	42

2.2.2	Relazione tra varietà proiettive e varietà affini . . . . .	43
2.2.3	Prodotti . . . . .	44
2.2.4	Mappe razionali e morfismi . . . . .	44
2.3	Curve algebriche complesse . . . . .	47
2.3.1	Alcune proprietà delle curve . . . . .	48
2.3.2	Il modello proiettivo regolare di una curva affine . . . . .	49
2.3.3	Curve Piane . . . . .	51
<b>II Gli strumenti algebrici</b>		<b>54</b>
<b>3 Compattificazioni con valutazioni</b>		<b>55</b>
3.1	Valutazioni . . . . .	55
3.2	Posti . . . . .	57
3.3	Varietà di dimensione maggiore di 1 . . . . .	59
3.3.1	Successioni e valutazioni . . . . .	59
3.4	Compattificazioni determinate da una mappa . . . . .	61
3.5	Caso di una varietà algebrica complessa . . . . .	62
3.5.1	Lo spazio proiettivo . . . . .	62
3.5.2	La scelta di una mappa . . . . .	62
3.5.3	Valutazioni . . . . .	63
3.6	Caso di una varietà algebrica reale . . . . .	65
<b>4 Valutazioni e <math>\Lambda</math>-alberi</b>		<b>67</b>
4.1	$\mathcal{O}$ -reticoli . . . . .	67
4.2	Associare a $v$ un $\Lambda$ -spazio metrico $T$ . . . . .	70
4.3	Azione di $SL_2(\mathbb{F})$ su $T$ . . . . .	71
4.4	Il caso di una valutazione discreta di rango 1 . . . . .	72
4.5	$T$ come $\Lambda$ -albero . . . . .	74
4.6	Azioni su $\Lambda$ -alberi . . . . .	75
4.6.1	Isometrie di $\Lambda$ -alberi . . . . .	75
4.6.2	Alcune proprietà . . . . .	76
<b>5 Rappresentazioni di gruppi in <math>SL_2(\mathbb{C})</math></b>		<b>77</b>
5.1	Definizione e alcune proprietà . . . . .	77
5.1.1	Rappresentazioni riducibili e irriducibili . . . . .	78
5.2	La varietà delle rappresentazioni . . . . .	78
5.2.1	Struttura algebrica . . . . .	79
5.2.2	Sottovarietà di rappresentazioni . . . . .	80
5.3	La varietà dei caratteri . . . . .	81
5.3.1	Struttura algebrica . . . . .	81
5.3.2	Curve di caratteri . . . . .	84
5.4	Dimensione della varietà dei caratteri . . . . .	86

<b>III</b>	<b>Applicazioni topologiche</b>	<b>90</b>
<b>6</b>	<b>Costruzione di superfici incompressibili</b>	<b>91</b>
6.1	Superfici incompressibili . . . . .	91
6.1.1	Azioni del gruppo fondamentale su alberi . . . . .	91
6.1.2	I sistemi di superfici associati all'azione . . . . .	92
6.1.3	Il complesso $\mathcal{K}$ . . . . .	93
6.1.4	Il sistema di superfici incompressibili . . . . .	95
6.1.5	Eliminare l'ipotesi $\pi_2(M) = \{0\}$ . . . . .	98
6.2	Bordi di superfici incompressibili . . . . .	99
6.2.1	Intersezioni con sottovarietà proprie . . . . .	99
6.2.2	Intersezioni con il bordo . . . . .	100
6.2.3	Superfici incompressibili separanti . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Pendenze e nodi</b>	<b>103</b>
7.1	Il polinomio associato . . . . .	103
7.1.1	Alcune mappe . . . . .	103
7.1.2	La curva $D_K$ . . . . .	104
7.1.3	Qualche proprietà del polinomio $A$ . . . . .	105
7.2	Azioni su alberi relative alla curva $D$ . . . . .	106
7.2.1	Una rappresentazione di $\pi_1(N)$ . . . . .	106
7.2.2	Costruzione di un sistema di superfici incompressibili .	107
7.2.3	Pendenza di bordo . . . . .	107
7.3	Calcolo delle pendenze di bordo . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Compattificazione della varietà dei caratteri</b>	<b>109</b>
8.1	Aggiungere azioni su alberi reali . . . . .	109
8.2	Alcuni insiemi di caratteri . . . . .	111
8.2.1	Gruppi qualunque . . . . .	111
8.2.2	Gruppi fondamentali di superfici . . . . .	112
8.3	Il bordo di Thurston degli spazi di Teichmüller . . . . .	113
8.3.1	Descrizione mediante caratteri . . . . .	113
8.3.2	Compattificazione di $\tau_g^k$ . . . . .	114
8.3.3	Intersezione geometrica di curve . . . . .	115
8.3.4	Interpretazione dei punti di bordo . . . . .	115
	<b>Bibliografia</b>	<b>117</b>
	<b>Indice analitico</b>	<b>120</b>

# Introduzione

L'argomento della tesi è lo studio dei caratteri di rappresentazioni del gruppo fondamentale di una varietà differenziabile in  $SL_2(\mathbb{C})$  con lo scopo di ottenere delle informazioni sulla topologia della varietà.

Considero una varietà  $M$  e definisco l'insieme delle rappresentazioni  $R(M) = \{\rho : \pi_1(M) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})\}$ . Presa una rappresentazione  $\rho$ , il carattere di  $\rho$  è la funzione  $\chi_\rho : \pi_1(M) \ni \gamma \rightarrow \text{tr}(\rho(\gamma)) \in \mathbb{C}$ . L'insieme dei caratteri delle rappresentazioni in  $R(M)$  sarà chiamato  $X(M)$ .

Se  $\pi_1(M)$  è finitamente generato, su  $R(M)$  e  $X(M)$  si può dare una struttura di varietà algebrica affine. È infatti facile immergere  $R(M)$  in uno spazio  $\mathbb{C}^n$  in modo che sia luogo di zeri di un ideale di polinomi. Per  $X(M)$  la cosa è più difficile, si riesce a costruire una mappa polinomiale  $t : R(M) \rightarrow \mathbb{C}^m$  in modo che l'immagine  $t(R(M))$  sia in corrispondenza biunivoca con  $X(M)$ . Però dimostrare che  $t(R(M))$  è una varietà algebrica non è banale ([CS1]).

Sfruttando questa struttura algebrica si cerca di costruire delle azioni di  $\pi_1(M)$  su degli alberi combinatori o anche su opportune generalizzazioni degli alberi, i  $\Lambda$ -alberi.

Queste azioni si costruiscono definendo in maniera opportuna il concetto di punto ideale (“punto all'infinito”) di  $X(M)$ . Ci sono vari modi per farlo, un modo, più semplice, è prendere una curva  $C$  in  $X(M)$ , passare al suo modello proiettivo regolare  $\tilde{C}$  e prendere come punti ideali i punti di  $\tilde{C}$  che non corrispondono a punti di  $C$  ([CS1]). Un altro modo, più complesso, è dare un procedimento generale per costruire una compattificazione di una varietà affine con opportune proprietà, e prendendo come punti ideali i punti aggiunti ([MS1]). Perché esistano dei punti ideali è necessario che  $X(M)$  abbia dimensione almeno uno, e si danno delle ipotesi per cui questo accade.

In entrambi i casi si riesce ad associare ad ognuno di questi punti ideali una valutazione di un opportuno campo  $\mathbb{F}$  con anello di valutazione  $\mathcal{O}$  e una rappresentazione  $\mathcal{R} : \pi_1(M) \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$ , con la proprietà che il sottogruppo  $\mathcal{R}(\pi_1(M))$  non è coniugato ad un sottogruppo contenuto in  $SL_2(\mathcal{O})$  ([MS1]).

Nel caso in cui i punti ideali sono costruiti a partire da una curva le valutazioni ottenute sono sempre a valori in  $\mathbb{Z}$ , altrimenti avremo un insieme denso di punti ideali le cui valutazioni associate sono a valori in  $\mathbb{Z}$ , e per gli altri saranno a valori in un qualche gruppo ordinato di rango finito ([MS1]).

Data una valutazione del campo  $\mathbb{F}$  a valori nel gruppo ordinato  $\Lambda$  si

riesce a costruire un  $\Lambda$ -albero su cui agisce in maniera naturale il gruppo  $SL_2(\mathbb{F})$ . Una rappresentazione  $\mathcal{R} : \pi_1(M) \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$  induce quindi un'azione di  $\pi_1(M)$  sull'albero.

Se la valutazione usata per la costruzione è a valori in  $\mathbb{Z}$ , abbiamo a che fare con uno  $\mathbb{Z}$ -albero, che è un ben noto albero simpliciale. Queste azioni hanno le due importanti proprietà che non esiste nessun punto fisso per tutta l'azione del gruppo, e che nell'azione non ci sono elementi che agiscono con inversioni fantasma, che nel caso degli alberi simpliciali significa che non ci sono elementi che mandano un lato in sé scambiando i vertici corrispondenti ([MS1]).

Proprio queste azioni su alberi, grazie alle loro proprietà, danno informazioni sulla topologia di  $M$ .

Nella tesi si affronta in maniera particolareggiata il caso dell'azione su un'albero simpliciale  $T$ , facendo vedere come, se  $M$  è una 3-varietà compatta, si può arrivare a costruire un sistema di superfici incompressibili di  $M$  ([CS1]). La costruzione si basa sul fatto che il gruppo  $\pi_1(M)$  agisce sul rivestimento universale  $\tilde{M}$  di  $M$  e su  $T$ . Si costruisce una mappa  $f : \tilde{M} \rightarrow T$  che sia  $\pi_1(M)$ -equivariante e trasversale all'insieme dei punti medi dei lati di  $T$ . L'immagine inversa di questa mappa, proiettata su  $M$ , è un sistema di superfici che può essere modificata fino ad ottenere un sistema non vuoto di superfici incompressibili di  $M$  ([CGLS]).

Tutta la costruzione parte dalla scelta di una curva in  $X(M)$  e di un suo punto ideale. A seconda della curva scelta si possono costruire superfici incompressibili che intersecano o che non intersecano certe sottovarietà ([CS1]). Con opportune ipotesi su  $M$  si può scegliere una curva da cui si ottengono superfici incompressibili con certe proprietà, ad esempio superfici chiuse, oppure superfici con bordo contenuto in certe componenti fissate di  $\partial M$ . Si mostra anche come questa tecnica è utile per dimostrare un bel teorema di decomposizione di una 3-varietà in pezzi che sono tori solidi o prodotti di un toro per un intervallo ([CS2]).

Nel caso di una varietà associata ad un nodo si può rendere esplicito tutto il procedimento arrivando a calcolare le pendenze di bordo delle superfici incompressibili costruite in questo modo. Per fare questo si costruisce, a partire da  $X(M)$ , una curva algebrica in  $\mathbb{C}^2$  definita da un polinomio, detto  $A$ -polinomio, che è un invariante del nodo effettivamente calcolabile. Poi si dimostra che le pendenze di bordo delle superfici incompressibili che si costruiscono con queste tecniche sono proprio le pendenze dei lati del poligono di Newton dell' $A$ -polinomio ([CCGLS]).

Il caso delle azioni su alberi reali viene affrontato in maniera meno particolareggiata e si mostra l'applicazione alle superfici iperboliche, fornendo una nuova costruzione del bordo di Thurston degli spazi di Teichmüller ed una nuova interpretazione dei punti di bordo aggiunti.

I punti di bordo sono ora visti come azioni del gruppo fondamentale della superficie su un albero reale, e ad ognuno di questi punti viene associata

una funzione lunghezza, che associa ad ogni elemento del gruppo fondamentale un numero reale. Questa funzione lunghezza si ricollega al numero di intersezione geometrica delle curve sulla superficie ([MS1]).

Esiste poi una costruzione, che non viene affrontata nella tesi, che generalizza la costruzione delle superfici incompressibili, che permette di associare a questi punti di bordo delle laminazioni misurate della superficie ([MS2],[MS3]).



**Parte I**

**Preliminari**

# Capitolo 1

## Alcune nozioni utili

### 1.1 Nozioni elementari di topologia

#### 1.1.1 Varietà differenziabili

Diamo alcune definizioni di base sulle varietà differenziabili solo per chiarire le convenzioni.

**Definizione 1.** Se  $X$  è uno spazio topologico una **carta locale** di **dimensione**  $n$  su  $X$  è una terna  $(\varphi, U, V)$ ,  $U$  aperto del semispazio  $H^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ ,  $V$  un aperto di  $X$ ,  $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$  un omeomorfismo fra  $U$  e  $V$ . Due carte locali  $(\varphi_1, U_1, V_1)$ ,  $(\varphi_2, U_2, V_2)$  si dicono  **$C^\infty$ -compatibili** se la **funzione di transizione**  $\varphi_{12} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1|_{\varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)}$  è un diffeomorfismo  $C^\infty$  fra aperti di  $H^n$ .

Un **atlante** di dimensione  $n$  su  $X$  è un insieme  $A = \{(\varphi_i, U_i, V_i)\}_{i \in I}$  di carte locali di dimensione  $n$  tale che  $\bigcup_{i \in I} V_i = X$ . Un atlante si dice di **classe**  $C^\infty$  se le sue carte locali sono a due a due  $C^\infty$  compatibili. Un atlante si dice **atlante massimale di classe**  $C^\infty$  se ogni carta locale che sia compatibile con tutte le carte dell'atlante appartiene all'atlante stesso. Preso un qualunque atlante  $C^\infty$  si può completare in maniera unica ad un atlante massimale (aggiungendo tutte le carte compatibili).

Per **varietà differenziabile di dimensione**  $n$  si intende una coppia  $(M, A)$ , dove  $M$  è uno spazio topologico di Hausdorff, metrizzabile e a base numerabile e  $A$  è un atlante massimale di classe  $C^\infty$ .

Il **bordo** della varietà  $M$  è il chiuso  $\partial M = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))$ .

Se  $\partial M = \emptyset$  la varietà si dice **senza bordo**, ed è uno spazio topologico localmente euclideo, altrimenti sull'insieme  $\partial M$  viene indotta una struttura di varietà senza bordo di dimensione  $n - 1$ . Il complementare è l'aperto  $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$ , si dice **parte interna** di  $M$ , ed è una varietà senza bordo di dimensione  $n$ . Una varietà compatta e senza bordo si dice **varietà chiusa**.

Si possono definire, in maniera standard, le nozioni di **funzione differenziabile**, di **spazio tangente** in un punto  $x \in M$ , indicato con  $T_x M$  o  $T_x$ , di **fibrato tangente** a  $M$ ,  $TM$ , di **spazio tangente al bordo** in un punto  $x \in \partial M$ ,  $T_x \partial M$ , di **spazio normale al bordo** in un punto  $x \in \partial M$ ,  $N_x \partial M = T_x M / T_x \partial M$ , di **differenziale** in  $x$  di una funzione differenziabile  $f$ , indicato con  $d_x f$ , di **diffeomorfismo**, di **punto regolare** e **valore regolare**, di **orientazione**, di **varietà orientabili**, di **struttura riemanniana**, di **isometria** e **isometria locale**, di **geodetica** rispetto ad una struttura riemanniana.

**Definizione 2.** Un **embedding** di una varietà differenziabile  $S$  in  $M$  è una funzione  $i : S \hookrightarrow M$  differenziabile, iniettiva con differenziale iniettivo, omeomorfismo con l'immagine. Un embedding  $i$  si dice un **embedding proprio** se  $i(S)$  è un chiuso di  $M$ , e vale una delle due condizioni seguenti:

- $i(S) \subset \partial M$ .
- $i(\partial S) = i(S) \cap \partial M$  e per ogni  $x \in \partial S$ ,  $di_x(T_x S)$  sia trasversale a  $T_{i(x)} \partial M$  in  $T_{i(x)} M$ .

Una **sottovarietà** di una varietà  $M$  è l'immagine di un embedding, con la struttura di varietà indotta da  $S$ . Una sottovarietà propria è l'immagine di un embedding proprio. Lo spazio tangente ad un punto  $x \in S$ ,  $T_x S$ , si immerge, mediante il differenziale dell'embedding  $i$  (che consideriamo come un'inclusione  $S \subset M$ ), in  $T_x M$ , e pertanto può essere visto come un sottospazio di questo spazio. Con la stessa identificazione il fibrato tangente a  $S$ ,  $TS$ , può essere visto come un sottofibrato di  $TM$ . Lo spazio quoziente  $N_x S = T_x M / T_x S$  si dice **spazio normale** ad  $S$  in  $M$ , e il fibrato  $NS = TM / TS$  si dice **fibrato normale** ad  $S$  in  $M$ .

Un **intorno tubolare** di una sottovarietà  $S$  di una varietà  $M$  è un diffeomorfismo fra il fibrato normale di  $S$  in  $M$  e un intorno aperto  $T$  di  $S$ ,  $i : NS \hookrightarrow T$ , tale che per ogni  $x \in S$   $i(x, 0) = x$ . A volte si identifica l'intorno tubolare con la sua immagine  $T$ . Un **collare** di una sottovarietà senza bordo  $S \subset \partial M$  è un diffeomorfismo  $i : S \times [0, 1) \hookrightarrow C$ , con  $C$  intorno aperto di  $S$  in  $M$ , tale che per ogni  $x \in S$   $i(x, 0) = x$ .

Una sottovarietà propria si dice una **ipersuperficie** se è connessa e ha codimensione 1, una **superficie** se è connessa e ha dimensione 2, un **sistema di superfici** se ha dimensione 2, un **link** se ha dimensione 1 ed è una varietà chiusa (diffeomorfa ad un'unione di  $S^1$ ), un **nodo** se è un link ed è connesso.

Una ipersuperficie  $S$ , non contenuta nel bordo, si dice ipersuperficie **a due facce** se il suo fibrato normale è banale, ossia isomorfo a  $S \times \mathbb{R}$ , o equivalentemente se preso un intorno tubolare  $T$  di  $S$ ,  $T \setminus S$  è sconnesso.

Una funzione  $f : M \rightarrow N$  si dice **trasversale** ad una sottovarietà  $S \subset N$  nel punto  $x \in M$  se  $f(x) \notin S$  o se  $f(x) \in S$  e  $df_x(T_x M)$  è trasversale a  $T_{f(x)} S$  in  $T_{f(x)} N$ .  $f$  si dice **trasversale** a  $S$  se è trasversale ad  $S$  in tutti i punti di  $M$ .

Una sottovarietà propria non contenuta nel bordo ammette sempre un intorno tubolare, una sottovarietà senza bordo contenuta nel bordo ammette sempre un collare.

Si dimostra che se una funzione  $f : M \rightarrow N$  è trasversale ad una sottovarietà  $S \subset N$ , allora l'immagine inversa  $f^{-1}(S)$  è l'insieme vuoto oppure una sottovarietà di  $M$  di codimensione uguale alla codimensione di  $S$  in  $N$ , e se  $S$  è una sottovarietà propria anche  $f^{-1}(S)$  lo è. Inoltre esiste un intorno tubolare  $T$  di  $S$  in  $N$  tale che l'immagine inversa  $f^{-1}(T)$  è un intorno tubolare di  $f^{-1}(S)$ . Nel caso in cui  $S$  sia una sottovarietà di dimensione 0, ossia un insieme discreto di punti di  $N$ , la condizione di trasversalità è equivalente dire che i punti di  $S$  non siano nell'immagine di  $f$  oppure siano valori regolari per  $f$ . In questo caso particolare il risultato appena enunciato segue dal teorema del Dini. In particolare l'immagine inversa di un valore regolare è una sottovarietà chiusa di codimensione uguale alla dimensione di  $N$ . Se  $S$  è una ipersuperficie a due facce anche la sua immagine inversa mediante  $f$  lo è.

**Esempio 3.** Data una varietà differenziabile  $M$ , un qualunque aperto di  $M$  è una varietà con carte ottenute per restrizione delle carte di  $M$ .

Un aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , è una varietà differenziabile senza bordo di dimensione  $n$  con un atlante costituito da una sola carta. Lo spazio tangente ad un punto di  $A$  può essere identificato con  $\mathbb{R}^n$  stesso, e con questa identificazione abbiamo  $TA \simeq A \times \mathbb{R}^n$ . Su  $A$  può essere data una struttura riemanniana detta **metrica euclidea** mettendo la norma euclidea ( $\|\cdot\|_e$ ) su ogni spazio tangente.  $\mathbb{R}^n$  con questa metrica si dice **spazio euclideo** e si indica con  $\mathbb{E}^n$ .

La  **$n$ -sfera**  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  è una ipersuperficie di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ed è una varietà senza bordo di dimensione  $n$  con un atlante costituito da due proiezioni stereografiche rispetto a due punti distinti  $N, S \in S^n$ .  $S^n \setminus \{N\}$  è una varietà diffeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . La metrica euclidea definita su  $\mathbb{R}^{n+1}$  si restringe ad una metrica su  $S^n$  che si dice **metrica sferica**. La sfera con questa metrica si dice **spazio ellittico** e si indica con  $\mathbb{S}^n$ .

L' **$n$ -disco**  $D^n \subset \mathbb{R}^n$  è una varietà di dimensione  $n$  che ha come bordo  $S^{n-1}$ . La sua parte interna è l' **$n$ -palla**  $B^n = \overset{\circ}{D}^n$ , un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

Il **semispazio**  $H^n$  definito sopra è una varietà di dimensione  $n$  con bordo  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Indico la sua parte interna con  $H_0^n$ .

Su  $H_0^n$  è definita la norma euclidea  $\|\cdot\|_e$ . Possiamo definire un'altra metrica in questo modo: se  $(x, v) \in TH_0^n \simeq H_0^n \times \mathbb{R}^n$   $\|(x, v)\|_h = \frac{\|(x, v)\|_e}{x_n}$ . La struttura riemanniana definita in questo modo si dice **metrica iperbolica**. Similmente si può definire una metrica su  $B^n$ : Se  $(x, v) \in TB^n \simeq B^n \times \mathbb{R}^n$   $\|(x, v)\|_h = \left(\frac{2}{1-\|x\|_e^2}\right)\|(x, v)\|_e$ . Queste due varietà con queste metriche sono isometriche. Una varietà riemanniana isometrica a queste si dice **spazio iperbolico** e si indica con  $\mathbb{H}^n$ .

### 1.1.2 Classificazione delle superfici compatte orientabili

La **somma connessa** fra due varietà orientabili  $M_1$  e  $M_2$  della stessa dimensione  $n$  è una varietà  $M_1 \# M_2$  che si ottiene scegliendo degli  $n$ -dischi  $D_1, D_2$ ,  $D_i$  sottovarietà di  $M_i$ , dei punti  $x_i \in \overset{\circ}{D}_i$  e un diffeomorfismo  $f : D_1 \setminus \{x_1\} \xrightarrow{\sim} D_2 \setminus \{x_2\}$ . Fatte queste scelte definisco  $M_1 \# M_2 = M_1 \setminus \{x_1\} \sqcup_f M_2 \setminus \{x_2\}$ . Se  $M_1$  e  $M_2$  hanno dei diffeomorfismi che scambiano l'orientazione allora la classe di diffeomorfismo di  $M_1 \# M_2$  non dipende dalle scelte fatte e la varietà ottenuta ha ancora la stessa proprietà, quindi l'operazione di somma connessa si può iterare ed è ancora ben definita.

Una **superficie** è una varietà differenziabile connessa di dimensione 2.

Le superfici chiuse orientabili si classificano con un solo invariante che è il genere. La sfera  $S^2$  è la superficie di genere 0, indicata con  $\Sigma_0$ , il toro  $T^2 = S^1 \times S^1$  è la superficie di genere 1,  $T^2 = \Sigma_1$ . Queste due superfici hanno un diffeomorfismo che scambia l'orientazione. Le altre si ottengono per somma connessa da queste:  $\Sigma_{g+1} = \Sigma_g \# T^2$ , e così, per induzione si definiscono tutte le superfici chiuse. Infatti si dimostra che per ogni superficie chiusa  $S$  esiste un unico  $g \in \mathbb{N}$  tale che  $S$  è diffeomorfa a  $\Sigma_g$ . Questo  $g$  si dice genere della superficie.

Le superfici compatte orientabili si classificano con il genere e il numero di componenti connesse del bordo. Fissato un  $k \in \mathbb{N}$ , scelgo  $k$  2-dischi  $D_1 \dots D_k$  sottovarietà della sfera  $S^2$ . Sia  $\Sigma_0^k = S^2 \setminus (\overset{\circ}{D}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{D}_k)$ . Per induzione definisco  $\Sigma_{g+1}^k = \Sigma_g^k \# T^2$ . Si dimostra che per ogni superficie compatta  $S$  tale che  $\partial S$  ha  $k$  componenti connesse esiste un unico  $g \in \mathbb{N}$  tale che  $S$  è diffeomorfa a  $\Sigma_g^k$ .

Grazie a questa classificazione è chiaro come si comportano le superfici rispetto all'operazione di somma connessa:  $\Sigma_{g_1}^{k_1} \# \Sigma_{g_2}^{k_2} = \Sigma_{g_1+g_2}^{k_1+k_2}$ .

La caratteristica di Eulero di una superficie compatta (chiusa o no) è nota:  $\chi(\Sigma_g^k) = 2 - 2g - k$ . La classificazione delle superfici chiuse aiuta anche a calcolare la caratteristica di Eulero di una 3-varietà compatta. Infatti si sa che una 3-varietà chiusa ha caratteristica di Eulero 0. Se  $M$  è una 3-varietà compatta e  $S_1 \dots S_k$  sono le componenti connesse del suo bordo,

$\chi(M) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \chi(S_i)$ . Quindi se  $\partial M$  non ha componenti connesse di genere 0 vale  $\chi(M) \leq 0$ .

### 1.1.3 Gruppo fondamentale

Il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico connesso per archi  $X$  con punto base  $x_0 \in X$  si indica con  $\pi_1(X, x_0)$ .

Dato un **rivestimento**  $p : Y \rightarrow X$  (con  $X, Y$  connessi per archi) si può definire il gruppo degli automorfismi di rivestimento  $\text{Aut}(p) = \{\varphi : Y \rightarrow Y \text{ omeomorfismi} \mid \varphi \circ p = p\}$ . Se il rivestimento è differenziabile (rieman-

niano) gli automorfismi sono diffeomorfismi (isometrie). Il gruppo  $\text{Aut}(p)$  agisce sullo spazio  $Y$  in modo libero e propriamente discontinuo. Scelto un punto  $x_0 \in X$  e un punto  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ , risulta ben definita una azione del gruppo  $\pi_1(X, x_0)$  sulla fibra  $p^{-1}(x_0)$  in modo semplicemente transitivo, e questa azione si estende ad un'azione su tutto lo spazio  $Y$  che commuta con la proiezione, e quindi definisce un omomorfismo  $i_{y_0} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(p)$ . Se  $p$  è il rivestimento universale di  $X$  l'omomorfismo  $i_{y_0}$  è un isomorfismo. Prendendo un altro punto  $y'_0 \in p^{-1}(x_0)$  l'omomorfismo  $i_{y'_0}$  è coniugato all'omomorfismo  $i_{y_0}$ . Se lo spazio  $X$  ha un rivestimento universale ben definito, posso definire il  $\pi_1(X)$  (senza riferimento ad un punto base) come il gruppo degli automorfismi del suo rivestimento universale. Il gruppo  $\pi_1(X, x_0)$  è isomorfo a  $\pi_1(X)$  con un isomorfismo ben definito a meno di coniugazione. Se  $X$  è una varietà differenziabile (riemanniana) connessa ha un ben definito rivestimento universale differenziabile (riemanniano).

Si può invertire il procedimento, prendo uno spazio  $Y$  connesso per archi e un gruppo  $G$  che agisce su  $Y$  in modo libero e propriamente discontinuo. La proiezione  $p : Y \rightarrow X$  nel quoziente  $X$  indotto da questa azione è un rivestimento. Se  $Y$  è una varietà differenziabile (riemanniana) e  $G$  agisce con diffeomorfismi (isometrie) anche su  $X$  viene definita una struttura differenziabile (riemanniana), e il rivestimento è differenziabile (riemanniano). Se  $Y$  è semplicemente connesso  $p$  è il rivestimento universale di  $X$ , e quindi  $G = \pi_1(X) \simeq \pi_1(X, x_0)$ .

Prendiamo una curva chiusa  $\gamma$  in una varietà differenziabile  $X$  connessa. Indico con  $[\gamma]$  la classe di omotopia libera di  $\gamma$ . Gli elementi di  $\pi_1(X, x_0)$  sono classi di omotopia relative ad un punto base, quindi ognuna è contenuta in una classe di omotopia libera. Esiste una classe  $\gamma_0 \in \pi_1(X, x_0)$  contenuta in  $[\gamma]$ . Le classi di  $\pi_1(X, x_0)$  contenute in  $[\gamma]$  sono tutti e soli i coniugati di  $\gamma_0$ . Chiamo  $[\gamma_0]$  la classe di coniugio di  $\gamma_0$ . Se ripeto la costruzione con un altro punto base  $x_1$ , trovo una classe di coniugio  $[\gamma_1]$  nel gruppo  $\pi_1(X, x_1)$  di classi contenute in  $[\gamma]$ . Scelti punti  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$  e  $y_1 \in p^{-1}(x_1)$  si vede che  $i_{y_0}([\gamma_0]) = i_{y_1}([\gamma_1]) \subset \pi(X)$ . Quindi c'è una corrispondenza biunivoca fra le classi di omotopia libera di curve chiuse in  $X$  e le classi di coniugio del gruppo  $\pi(X)$ .

Se uno spazio topologico  $X$  ha gruppo fondamentale abeliano le classi di coniugio sono singoli elementi, quindi i discorsi di sopra definiscono, per ogni punto  $x_0 \in X$  una ben precisa identificazione fra  $\pi_1(X, x_0)$  e  $\pi_1(X)$ , e una ben precisa corrispondenza biunivoca fra  $\pi_1(X)$  e le classi di omotopia libera di curve chiuse.

Una funzione continua fra due spazi topologici connessi per archi  $f : X \rightarrow Y$  definisce un omomorfismo di gruppi  $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ , mandando la classe di equivalenza di una curva chiusa  $\gamma \subset X$  nella classe di equivalenza della curva  $f \circ \gamma$ . Se  $X$  e  $Y$  hanno dei rivestimenti universali  $p_X : \tilde{X} \rightarrow X$ ,  $p_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$ , gli isomorfismi  $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X)$  e  $\pi_1(Y, y_0) \simeq \pi_1(Y)$  determinano una mappa  $f_{\#} : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ , ben defini-

ta a meno di coniugazione. In particolare se  $X \subset Y$  l'inclusione induce una mappa  $i_{\#}$  fra i gruppi fondamentali di  $X$  e  $Y$ , ben definita a meno di coniugazione.

Una proprietà che servirà in seguito è la seguente.

**Proposizione 4.** *Prendiamo uno spazio topologico  $X$  e una mappa continua  $f : S^n \rightarrow X$ .  $f$  si estende ad una mappa  $\bar{f} : D^{n+1} \rightarrow X \Leftrightarrow f$  è omotopicamente banale in  $X$ .*  $\square$

**Definizione 5.** Un **buon ricoprimento**  $\mathcal{B}$  di una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  è un insieme di aperti  $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i \in I}$  tali che:

- $\bigcup_{i \in I} V_i = M$ .
- Ogni  $V_i$  è diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  o a  $H^n$ .
- Ogni intersezione finita di aperti di  $\mathcal{B}$  è vuota oppure diffeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  o  $H^n$ .

**Proposizione 6.** *Ogni varietà differenziabile ammette un buon ricoprimento. Quindi ogni varietà compatta ammette un buon ricoprimento finito, e ogni varietà che sia la parte interna di una varietà compatta ammette un buon ricoprimento finito.*  $\square$

**Proposizione 7.** *Una varietà differenziabile connessa che ammette un buon ricoprimento finito ha il gruppo fondamentale finitamente presentato.*  $\square$

#### 1.1.4 Omologia

Dato uno spazio topologico  $X$  indico il suo  $n$ -simo  $A$ -modulo di omologia con  $H_n(X, A)$ . Per semplicità indico  $H_n(X, \mathbb{Z}) = H_n(X)$ .  $H_n(X)$  è un gruppo abeliano, se è finitamente generato è della forma  $\mathbb{Z}^{n_0} \oplus \bigoplus \mathbb{Z}_p^{n_p}$ . In questo caso se  $\mathbb{K}$  è un campo di caratteristica 0 abbiamo  $H_n(X, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n_0}$ .

Vediamo ora alcune relazioni fra questi moduli e la topologia di  $X$ .  $H_0(X) = \mathbb{Z}^c$  dove  $c$  è il numero di componenti connesse di  $X$ . Il modulo  $H_1(X)$  è invece collegato al gruppo fondamentale.

Se due curve sono omotope sono anche equivalenti in omologia. Quindi esiste un omomorfismo di gruppi  $L : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ , che manda una classe del  $\pi_1(X, x_0)$  nella classe di omologia di un qualunque suo rappresentante. Questo omomorfismo è surgettivo e ha come nucleo il sottogruppo dei commutatori di  $\pi_1(X, x_0)$ . Quindi se  $\pi_1(X)$  è abeliano abbiamo degli isomorfismi ben definiti  $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X, x_0) \simeq H_1(X) \simeq \{ \text{classi di omotopia libera di curve in } X \}$ .

Se  $M$  è una  $n$ -varietà,  $H_m(M, \mathbb{R}) = 0$  per ogni  $m > n$ . Se  $M$  è connessa chiusa e orientabile vale anche che  $H_i(M, \mathbb{R}) = H_{n-i}(M, \mathbb{R})$  per  $i \in \{1 \dots n\}$ ,

e quindi  $H_n(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Se invece  $M$  è connessa ma non è orientabile oppure non è chiusa vale che  $H_n(X, \mathbb{R}) = 0$ .

Se  $M$  è una  $n$ -varietà compatta tutti i moduli di omologia sono finitamente generati, quindi se  $\mathbb{K}$  è un campo di caratteristica 0 abbiamo  $H_i(M, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\beta_i}$ . I numeri  $\beta_i$  con  $i \in \{1 \dots n\}$  descrivono l'omologia di  $M$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ , e non dipendono dal campo di caratteristica 0 scelto. Si dicono **numeri di Betti** di  $M$ . Questi numeri sono legati alla caratteristica

di Eulero della varietà  $M$  dalla relazione 
$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i = \chi(M).$$

**Lemma 8.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile con bordo non vuoto e  $\chi(M) \leq 0$ . Allora  $\beta_1 \geq 1 - \chi(M) \geq 1$ , e quindi  $H_1(M)$  è infinito.*

*Dim :* Per le ipotesi fatte  $\beta_3 = 0$  e  $\beta_0 = 1$ . Quindi possiamo ricavare  $\beta_1$ :  $\beta_1 = 1 + \beta_2 - \chi(M) \geq 1 - \chi(M) \geq 1$ .  $\square$

**Proposizione 9.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa orientata con bordo contenente una sfera  $S$ . Considero il 3-disco  $D^3$  e un diffeomorfismo  $f : \partial D^3 \hookrightarrow S$  che inverte l'orientazione. Allora la varietà  $M' = M \sqcup_f D^3$  ottenuta incolando il disco  $D^3$  mediante la mappa  $f$  è orientabile e l'inclusione  $M \hookrightarrow M'$  induce un isomorfismo  $\pi_1(M) \hookrightarrow \pi_1(M')$ .*  $\square$

**Proposizione 10.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile, con almeno una componente connessa del bordo di genere positivo. Allora  $H_1(M)$  ha almeno un fattore diretto  $\mathbb{Z}$ . Inoltre, se indico le componenti connesse del bordo di genere maggiore di uno con  $S_i$  per  $i \in \{1 \dots k\}$ , si può*

*dire che  $\beta_1 \geq 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \chi(S_i) \geq 1$ .*

*Dim :* Per ogni componente connessa di  $\partial M$  di genere 0 incollo un 3-disco come nella proposizione precedente ottenendo una varietà orientabile con lo stesso gruppo fondamentale, e quindi con lo stesso  $H_1$ . La varietà  $M^*$  che ottengo in questo modo non ha sfere nel bordo e ha quindi caratteristica di Eulero minore o uguale di 0. Per il lemma precedente  $H_1(M^*) = H_1(M)$  ha un fattore  $\mathbb{Z}$  e vale la stima su  $\beta_1$ .  $\square$

Prendiamo una 3-varietà connessa compatta orientabile  $M$ . Voglio studiare la mappa indotta dall'immersione:  $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{Q})$ . Questo è equivalente a studiare l'analoga mappa fra spazi a coefficienti reali. Per questo uso la successione esatta della coppia (in omologia e coomologia di de Rham), insieme con le varie dualità. Indicando con  $H^n(M)$  e  $H_c^n(M)$  gli spazi di coomologia di de Rham e a supporto compatto. Valgono le dualità e gli isomorfismi seguenti:

$$H_n(M, \mathbb{R}) \simeq H_n(\overset{\circ}{M}, \mathbb{R}), \quad H_n(\overset{\circ}{M}, \mathbb{R}) \times H^n(\overset{\circ}{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$



$$H^n(M, \partial M) \simeq H_c^n(\overset{\circ}{M}), \quad H^n(\overset{\circ}{M}) \times H_c^{3-n}(\overset{\circ}{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

Rispetto alla prima dualità le mappe della successione esatta della coppia di omologia a coefficienti reali sono le trasposte delle mappe fra spazi corrispondenti nella successione esatta della coppia in coomologia di de Rham. Sfruttando l'altra dualità scambiando opportunamente gli spazi di coomologia relativa con quelli a supporto compatto si trova che la successione esatta della coppia in coomologia di de Rham è in dualità "con se stessa":

$$\begin{array}{ccccccc} H_0(\partial M, \mathbb{R}) & \leftarrow & H_1(M, \partial M, \mathbb{R}) & \leftarrow & H_1(M, \mathbb{R}) & \leftarrow & H_1(\partial M, \mathbb{R}) \\ \times & & \times & & \times & & \times \\ H^0(\partial M) & \rightarrow & H^1(M, \partial M) & \rightarrow & H^1(\overset{\circ}{M}) & \rightarrow & H^1(\partial M) \\ \times & & \times & & \times & & \times \\ H^2(\partial M) & \leftarrow & H^2(\overset{\circ}{M}) & \leftarrow & H^2(M, \partial M) & \leftarrow & H^1(\partial M) \end{array}$$

Dove la terza successione coincide con la seconda. Supponiamo ora che  $\partial M$  sia connesso, avremo  $\partial M = \Sigma_g$ ,  $\chi(M) = 1 - g$ ,  $H_1(\partial M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2g}$ ,  $\beta_1 = g + \beta_2$ . In questo caso  $i_* : H_2(\partial M, \mathbb{R}) \rightarrow H_2(M, \mathbb{R})$  è la mappa nulla, perchè il generatore standard di  $H_2(\partial M, \mathbb{R})$  è "il bordo" di  $M$ . La sua trasposta  $i^* : H^2(\overset{\circ}{M}) \rightarrow H^2(\partial M)$  è anch'essa la mappa nulla. Per l'isomorfismo detto sopra  $H_1(M, \partial M, \mathbb{R}) \rightarrow H_0(\partial M, \mathbb{R})$  è nulla. Inoltre  $H_1(M, \partial M) \simeq H^2(\overset{\circ}{M}) \simeq \mathbb{R}^{\beta_2}$ . La mappa  $H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \partial M, \mathbb{R})$  è suriettiva, ed ha quindi un nucleo isomorfo a  $\mathbb{R}^{\beta_1 - \beta_2} = \mathbb{R}^g$ . Quindi l'immagine di  $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$  ha dimensione  $g$  e anche il suo nucleo ha dimensione  $g$ . Nel caso in cui  $\partial M$  è connesso questo dimostra la seguente proposizione, vera in generale:

**Proposizione 11.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile con bordo non vuoto e consideriamo la mappa  $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{Q})$ . Vale che  $\dim \ker i_* = \frac{1}{2} \dim H_1(\partial M, \mathbb{Q})$ . In particolare se  $H_1(\partial M, \mathbb{Q}) \neq \{0\}$  la mappa  $i_*$  non è la mappa nulla.  $\square$*

### 1.1.5 Complessi cellulari

**Definizione 12.** Un **complesso cellulare finito** di dimensione 0 è un insieme finito  $C_0$ , con la topologia discreta. Indico con  $c_0$  la cardinalità di  $C_0$

Un **complesso cellulare finito** di dimensione  $n$  si costruisce a partire da un complesso cellulare finito  $C_{n-1}$  di dimensione  $n - 1$  e da un insieme finito di coppie  $(D_1, f_1) \dots (D_{c_n}, f_{c_n})$  con  $f_i : \partial D_i \rightarrow C_{n-1}$ . Allora  $C_n = C_{n-1} \sqcup D_1 \sqcup \dots \sqcup D_{c_n} / \{f_1 \dots f_{c_n}\}$ .

Per ogni disco  $D_i$  che incollo in questo modo rimane definita una mappa  $\bar{f}_i : D_i \rightarrow C_n$  tale che  $\bar{f}_i|_{\partial D_i} = f_i$  e  $\bar{f}_i|_{D_i}$  omeomorfismo con l'immagine.

L' **$n$ -scheletro** di un complesso cellulare finito  $C_n$  di dimensione  $n$  è il complesso cellulare stesso. L' **$m$ -scheletro** del complesso  $C_n$  con  $m < n$  è

l' $m$ -scheletro del complesso  $C_{n-1}$  di dimensione  $n - 1$  che è stato usato per costruire  $C_n$ .

Un **sottocomplesso cellulare** di un complesso cellulare  $C_n$  è un complesso cellulare  $G_m \subset C_n$  tale che per ogni  $l \in \{0 \dots m\}$  valga  $G_l \subset C_l$ .

Se  $C_n$  è un complesso di dimensione  $n$ , indicherò con  $C_m$  il suo  $m$ -scheletro e con  $c_m$  il numero di dischi usati per costruire  $C_m$ .

Un complesso cellulare finito è uno spazio topologico compatto. Ogni varietà compatta di dimensione  $n$  è omeomorfa ad un complesso cellulare finito  $C_n$  con  $c_0 = 1$ . Nel seguito occorre una proprietà dei complessi cellulari con  $c_0 = 1$ .

In un complesso cellulare ogni classe del gruppo fondamentale ha un rappresentante contenuto nell'1-scheletro. Se poi  $c_0 = 1$  l'1-scheletro è fatto di  $c_1$  1-dischi attaccati al punto  $C_0$ , formando delle curve chiuse. Queste curve formano un sistema di generatori del gruppo  $\pi_1(C_n, C_0)$ . Ogni 2-disco del 2-scheletro attaccato all'1-scheletro è una relazione fra quei generatori. In realtà queste sono tutte le relazioni che ci sono fra quei generatori. Quindi il  $\pi_1(C_n, C_0)$  è determinato dal 2-scheletro e ha una presentazione con  $c_1$  generatori e  $c_2$  relazioni. Questo è utile per trovare una presentazione del gruppo fondamentale delle superfici chiuse, si vede infatti che sono omeomorfe ad un complesso cellulare di dimensione 2 con  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 2g$ ,  $c_2 = 1$ . Si riesce anche a dire esattamente qual'è la relazione.

Questa è la proprietà che serve in seguito.

**Proposizione 13.** *Siano  $C_n$  un complesso cellulare finito di dimensione  $n$  con  $c_0 = 1$ ,  $G_m$  un sottocomplesso di dimensione  $m$ ,  $Y \subset X$  una coppia di spazi topologici con  $\pi_2(Y) = \dots = \pi_{m-1}(Y) = \pi_2(X) = \dots = \pi_{n-1}(X) = \{0\}$ , e  $y_0 \in Y$ . Sia  $\varphi : \pi_1(C_n, C_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$  un omomorfismo di gruppi con  $\varphi(\pi_1(G_m, C_0)) \subset \pi_1(Y, y_0)$ , e  $g : C_1 \rightarrow X$  una mappa continua tale che  $g(C_0) = y_0$ ,  $g(G_1) \subset Y$  e, se  $\gamma_1 \dots \gamma_{c_1}$  sono le curve che compongono  $C_1$ ,  $[g(\gamma_i)] = \varphi([\gamma_i])$  (dove con  $[\cdot]$  indico la classe di omotopia di una curva nel gruppo fondamentale). Allora  $g$  si estende ad una mappa  $\bar{g} : C_n \rightarrow X$  tale che  $\bar{g}_\# = \varphi$  e  $\bar{g}(G_m) \subset Y$ .*

*Dim :* Estendo  $g$  al 2-scheletro. Se  $D_i$  è un 2-disco usato per costruire  $C_2$ ,  $\bar{f}_i|_{\partial D_i}$  è una curva in  $C_1$  omotopicamente banale in  $C_2$ . Quindi  $[g(\bar{f}_i(\partial D_i))] = \varphi([\bar{f}_i|_{\partial D_i}]) = 0$ . Quindi  $g|_{\bar{f}_i(\partial D_i)}$  è omotopicamente banale in  $C_2$ , e quindi si estende ad una mappa continua  $\bar{g}$  su  $\bar{f}_i(D_i)$ . Se  $\bar{f}_i(D_i) \subset G_2$  riesco ad estendere  $g$  in modo che vada in  $Y$ . In questo modo definisco  $\bar{g}$  su tutto  $C_2$ .

Supponiamo ora che  $g$  sia stata estesa ad una mappa  $\bar{g}$  definita sull' $m$ -scheletro  $C_m$ ,  $m \geq 2$ , in modo che  $\bar{g}(G_m) \subset Y$ . La posso estendere all' $m + 1$ -scheletro. Infatti se  $D_i$  è un  $m + 1$ -disco usato per costruire  $C_{m+1}$ ,  $\bar{f}_i(\partial D_i) \subset X$  è immagine di una sfera, quindi è omotopicamente banale. Quindi  $\bar{g}|_{\bar{f}_i(\partial D_i)}$  si estende ad una mappa  $\bar{g}$  su  $\bar{f}_i(D_i)$ . Se  $\bar{f}_i(D_i) \subset G_{m+1}$

riesco a estendere  $\bar{g}$  su  $\overline{f_i(D_i)}$  in modo che vada in  $Y$ , e così definisco  $\bar{g}$  su tutto lo scheletro  $C_{m+1}$ .  $\square$

Si possono definire anche i complessi cellulari infiniti, i **CW-complessi**, nei quali la cardinalità dell'insieme dei dischi che si incollano può essere infinita, e non è necessario fermarsi ad una dimensione finita. La topologia si definisce come limite induttivo di spazi topologici. I CW-complessi permettono di costruire gli **spazi di Eilenberg-MacLane**: preso un gruppo  $\Gamma$  indico con  $K(\Gamma)$  uno spazio topologico connesso tale che  $\pi_1(K(\Gamma)) = \Gamma$  e  $\pi_n(K(\Gamma)) = \{0\}$  per ogni  $n > 1$ . Spazi di questo tipo esistono per ogni gruppo  $\Gamma$  e si possono costruire con dei CW-complessi.

### 1.1.6 Superfici incompressibili

In questa sottosezione  $M$  è una 3-varietà.

**Definizione 14.**  $S \subset M$  si dice **superficie incompressibile** per  $M$  se è una superficie (ossia una sottovarietà propria, connessa, di dimensione 2) compatta tale che:

- Se  $S$  è una sfera, non esiste una sottovarietà  $B$  di  $M$  che sia un 3-disco con  $\partial B = S$ .
- Se  $S$  è un disco, non è contenuto in  $\partial M$  e non esiste una sottovarietà  $B$  di  $M$  che sia un 3-disco con  $\partial B \subset S \cup \partial M$ .
- Negli altri casi, cioè se  $S$  ha un gruppo fondamentale non banale, per ogni 2-disco  $D$  sottovarietà di  $M$  con  $\partial D \subset S$ ,  $\partial D$  è omotopicamente banale in  $S$ .

Una superficie  $S$  di  $M$  si dice **parallela al bordo** di  $M$  se esiste una sottovarietà  $N \subset \partial M$  e un'immersione topologica  $i : N \times [0, 1] \hookrightarrow M$  tale che  $N = i(N \times \{0\})$ ,  $S = i(N \times \{1\})$  e  $i(\partial N \times [0, 1]) \subset \partial M$ . L'immersione  $i$  si dice **parallelismo** fra  $S$  e il bordo.

Una superficie  $S$  di  $M$  si dice **superficie essenziale** se è incompressibile e non è parallela al bordo.

Un 2-disco  $D$  sottovarietà di  $M$  si dice un **disco comprimente** per la superficie  $S$  se  $\partial D = S \cap D$  e  $\partial D$  è una curva non omotopicamente banale in  $S$ .

Una superficie  $S$  si dice **triviale** se è parallela al bordo oppure se ha gruppo fondamentale banale ma non è incompressibile, ossia se  $S$  è una sfera che borda un 3-disco, oppure se  $S$  è un 2-disco che, insieme a una sottovarietà di  $\partial M$  borda un 3-disco.

Dalle definizioni si vede che una superficie è essenziale se e solo se non è triviale e non ha dischi comprimenti.

**Proposizione 15.** *Sia  $S$  una superficie compatta a due facce in  $M$ . Abbiamo un omomorfismo  $i_{\#} : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ . Se  $\ker i_{\#} \neq \{e\}$  esiste un 2-disco  $D$  sottovarietà di  $M$  tale che  $D \cap S = \partial D$  e  $\partial D$  è una curva non omotopicamente banale in  $S$ .*

*Dim :* [He, lemma 6.1]. □

**Corollario 16.** *Sia  $S$  una superficie compatta a due facce in  $M$  che non sia una sfera né un disco. Allora  $S$  è incompressibile  $\Leftrightarrow i_{\#} : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  è iniettiva.* □

**Corollario 17.** *Una componente connessa e compatta  $N$  del bordo  $\partial M$  che non sia una sfera è incompressibile  $\Leftrightarrow i_{\#} : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(M)$  è iniettiva.*

*Dim :*  $N$  è incompressibile se e solo se una superficie  $S$  parallela a  $N$  lo è, e  $S$  è a due facce. □

C'è una procedura che, a partire da un sistema di superfici compatto  $S \subset M$  qualunque, con un numero finito di passi, ognuno dei quali modifica “di poco”  $S$ , arriva ad un sistema di superfici incompressibili che “somiglia” al sistema originale  $S$ . Il difetto di questo metodo è che a volte il sistema di superfici a cui si arriva è vuoto.

**Definizione 18.** Una **compressione** di una superficie  $S$  tramite un 2-disco comprimente  $D$  è un'operazione che consiste nel tagliare  $S$  lungo  $\partial D = \gamma$ , e attaccare a quello che resta due dischi “molto vicini” a  $D$ .

Più precisamente consideriamo un intorno tubolare  $T$  di  $\gamma$  in  $M$ .  $T$  è topologicamente un toro solido senza bordo, diffeomorfo a  $B^2 \times S^1$ . Su  $B^2$  considero un diametro  $d$  e un raggio  $r$  perpendicolare a  $d$  (vedi figura). Scelgo punti  $P_1, P_2 \in d$  e  $Q \in r$ , e delle curve  $\alpha_1, \alpha_2$  come in figura, in modo che  $\alpha_i$  abbia come estremi  $P_i$  e  $Q$  e si raccordi in modo  $C^\infty$  con il diametro  $d$ . Il diffeomorfismo fra  $B^2 \times S^1$  e  $T$  può essere scelto in modo che  $\{0\} \times S^1$  vada su  $\gamma$ ,  $d \times S^1$  vada sulla striscia  $S \cap T$  e  $r \times S^1$  vada su  $D \cap T$ .

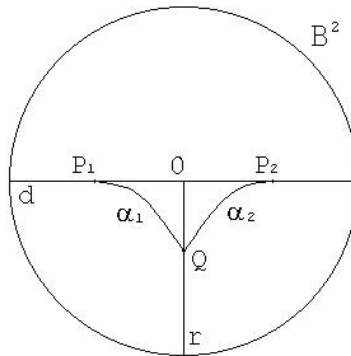


Figura 1.1: La palla  $B^2$

Indico con  $\overline{P_1P_2}$  il segmento fra  $P_1$  e  $P_2$ , con  $\gamma_i$  il cerchio  $P_i \times S^1 \subset S$  e con  $\delta$  il cerchio  $Q \times S^1 \subset D$ . I cerchi  $\gamma_i$  sono isotopi a  $\gamma$  in  $S$ . Considero un intorno tubolare  $T'$  di  $\mathring{D}$ ,  $T'$  sarà diffeomorfo a  $\mathbb{R} \times \mathring{D}$ . Esistono  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ , abbastanza piccoli in modo che  $\delta_i = (\{\varepsilon_i\} \times \mathring{D}) \cap (\alpha_i \times S^1)$  sia diffeomorfo a  $S^1$  e sconnetta  $\{\varepsilon_i\} \times \mathring{D}$  e  $\alpha_i \times S^1$ , e la componente connessa di  $\alpha_i \times S^1$  che contiene  $\gamma_i$  unita con la componente connessa di  $\{\varepsilon_i\} \times \mathring{D}$  che contiene  $\{\varepsilon_i\} \times \delta$  sia omeomorfa ad un disco con bordo  $\gamma_i$ , indicato con  $D_i$ . I  $D_i$  tuttavia non sono sottovarietà, perché hanno degli angoli in

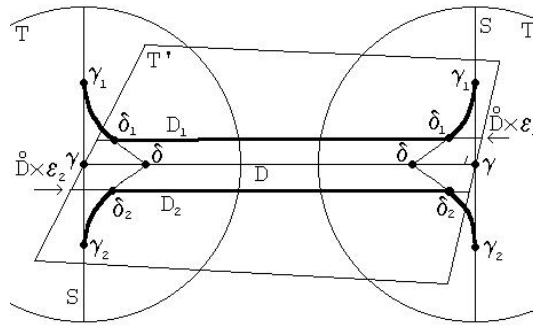


Figura 1.2: I dischi  $D_i$

corrispondenza delle curve  $\delta_i$ . Tuttavia, possiamo fissare un intorno tubolare “molto piccolo”  $T''$  di  $\delta_i$ , in modo che  $T'' \subset T \cap T'$ ,  $T'' \cap S = T'' \cap D = \emptyset$  e trovare dei dischi  $D'_1, D'_2$ , che coincidono con i dischi  $D_i$  fuori da  $T''$ , e che siano sottovarietà di  $M$ .

Con le notazioni date la compressione della superficie  $S$  tramite il disco comprimente  $D$  è il sistema di superfici  $D'_1 \cup D'_2 \cup (S \setminus (\overline{P_1P_2} \times S^1))$ . Questo sistema di superfici è ben definito a meno di isotopia ambientale di  $M$ .

Prendiamo un sistema di superfici compatto  $S$ . Se  $S$  ha delle componenti triviali, le elimino. A questo punto se  $S$  non è incompressibile, qualcuna delle sue componenti ammette un disco comprimente  $D$  trasversale ad  $S$ .

A partire da  $D$  si può costruire un disco comprimente per qualche componente  $S_1 \subset S$  che chiamo  $D_1$ , tale che  $D_1 \cap S = \partial D$ . Per costruire  $D_1$  basta vedere che l'intersezione  $D \cap S$  è un'unione di curve chiuse in  $D$ . Chiamo  $\gamma$  la curva più interna. Se  $\gamma$  è omotopicamente banale in  $S$  si può deformare  $D$  in un disco  $D'$  tale che  $D' \cap S = D \cap S \setminus \gamma$ , e si può poi iterare il procedimento. Se  $\gamma$  non è omotopicamente banale in  $S$ , chiamo  $S_1$  la componente di  $S$  che contiene  $\gamma$  e  $D_1$  il disco contenuto in  $D$  che ha  $\gamma$  come bordo.  $D_1$  è comprimente per  $S_1$ .

Chiamo  $S'$  il sistema di superfici risultante della compressione di  $S_1$  tramite  $D_1$  definita sopra. La curva  $\gamma$  potrebbe sconnettere  $S_1$  oppure no.

Se  $\gamma$  non sconnette  $S_1$  il sistema  $S'$  ha lo stesso numero di componenti connesse di  $S$ . L'attaccamento dei due dischi fa aumentare di 2 la caratteristica di Eulero della componente che contiene  $\gamma$ , e, per la classificazione delle superfici, fa diminuire di uno il genere. Quindi c'è una componente che prima della compressione era diffeomorfa a  $\Sigma_g^k$  e dopo a  $\Sigma_{g-1}^k$ , le altre componenti sono immutate.

Se invece  $\gamma$  sconnette  $S_1$ , la sconnette in due componenti connesse che, siccome  $\gamma$  è non omotopicamente banale in  $S$ , non sono dei dischi. Quindi  $S'$  è un sistema di due superfici nessuna delle quali è una sfera. Inoltre si vede bene che la componente di  $S$  che contiene  $\gamma$  è diffeomorfa alla somma connessa delle due componenti ottenute dopo la compressione, quindi ho due componenti di  $S'$  sono diffeomorfe a  $\Sigma_{g_1}^{k_1} \sqcup \Sigma_{g_2}^{k_2}$ , con almeno uno fra  $g_1$  e  $k_1$  diverso da 0, mentre la componente corrispondente in  $S$  è diffeomorfa a  $\Sigma_{g_1+g_2}^{k_1+k_2}$ .

In entrambi i casi le superfici che si ottengono per compressione di  $S$  sono “più semplici” di  $S$ , nel senso che hanno o il genere o il numero di componenti di bordo diminuito di uno. Questo garantisce che dopo un numero finito di compressioni non sarà più possibile farne altre, e quindi avremo ottenuto un sistema di superfici prive di dischi comprimibili. Questo discorso si riassume nella seguente proposizione.

**Proposizione 19.** *Sia  $S$  un sistema di superfici compatto in  $M$ . Esiste una successione finita  $S = S_0, S_1, \dots, S_k$  tale che  $S_{i+1}$  è ottenuto da  $S_i$  eliminando una componente connessa triviale di  $S_i$  o con una compressione su una componente connessa di  $S_i$ , e  $S_k$  è vuoto oppure un sistema di superfici essenziali.*  $\square$

**Definizione 20.** Un sottogruppo  $H \subset \pi_1(M)$  si dice **sottogruppo periferico** se esiste una componente connessa compatta incompressibile  $N$  di  $\partial M$  tale che  $H$  è coniugato all'immagine di  $i_{\#} : \pi_1(N) \hookrightarrow \pi_1(M)$  (che è ben definita a meno di coniugazione).

### 1.1.7 Varietà iperboliche

Per varietà iperbolica si intende una varietà riemanniana completa connessa orientabile con curvatura sezionale costantemente uguale a  $-1$ . Questa definizione è equivalente alla seguente:

**Definizione 21.** Consideriamo lo spazio iperbolico  $\mathbb{H}^n$ , e indichiamo con  $\mathcal{H}(n)$  il suo gruppo di isometrie che preservano l'orientazione. Data una  $n$ -varietà connessa, orientabile  $M$ , una **struttura iperbolica** su  $M$  è una coppia  $(G, \varphi)$ , con  $G$  un sottogruppo di  $\mathcal{H}(n)$  che agisce su  $\mathbb{H}^n$  in modo libero e propriamente discontinuo, e  $\varphi$  un diffeomorfismo  $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{H}^n/G$ . Un'altra struttura iperbolica  $(G', \varphi')$  su  $M$  si dice **equivalente** a  $(G, \varphi)$  se la funzione composta  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  è una isometria. In questo caso  $G$  è coniugato a  $G'$  in  $\mathcal{H}(n)$ .

Per quanto detto nella sezione 1.1.3 la proiezione  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/G$  è un rivestimento riemanniano, e quindi su  $M$  viene indotta una struttura riemanniana che lo rende localmente isometrico a  $\mathbb{H}^n$ , e  $\pi_1(M)$  è isomorfo a  $G$ . Se conosciamo la struttura iperbolica a meno di equivalenza abbiamo un'immersione di gruppi  $\pi_1(X) \hookrightarrow \mathcal{H}(n)$  ben definita a meno di coniugazione in  $\mathcal{H}(n)$ .

**Definizione 22.** Due strutture iperboliche  $(G, \varphi)$  e  $(G', \varphi')$  su  $M$  si dicono **isometriche** se esiste un diffeomorfismo  $\psi : M \hookrightarrow M$  tale che  $\varphi' \circ \psi \circ \varphi^{-1}$  è un'isometria. Se esiste un tale  $\psi$  isotopo all'identità le due strutture si dicono **isotopicamente equivalenti**.

Si può definire una compattificazione di  $\mathbb{H}^n$ , indicata con  $\overline{\mathbb{H}^n}$ , con la proprietà che l'isometria fra  $\mathbb{H}^n$  e  $(B^n, \|\cdot\|_h)$  si estende ad un omeomorfismo fra  $\overline{\mathbb{H}^n}$  e  $D^n$ , e in modo che l'azione del gruppo  $\mathcal{H}(n)$  si estenda ad un'azione con omeomorfismi su  $\overline{\mathbb{H}^n}$ . Un'isometria iperbolica è determinata dalla sua restrizione al **bordo dello spazio iperbolico**  $\partial\mathbb{H}^n = \overline{\mathbb{H}^n} \setminus \mathbb{H}^n \simeq S^{n-1}$ .

Si possono descrivere bene i gruppi  $\mathcal{H}(2)$  e  $\mathcal{H}(3)$ .

Per il gruppo  $\mathcal{H}(2)$ , si vede che è isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{R})$ .  $\mathbb{H}^2 \simeq (H_0^2, \|\cdot\|_h)$ .  $H_0^2 \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ . Possiamo vedere  $H_0^2$  come l'insieme dei complessi con parte immaginaria positiva, e quindi come un sottoinsieme di  $\mathbb{CP}^1$ . Con questa identificazione si dimostra che gli elementi di  $\mathcal{H}(2)$  sono esattamente le restrizioni di proiettività di  $\mathbb{CP}^1$  che mandano  $H_0^2$  in sé. Il gruppo delle proiettività di  $\mathbb{CP}^1$  è  $PSL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\{\lambda\mathbb{I}\} = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm\mathbb{I}\}$ . Il gruppo delle proiettività che mandano  $H_0^2$  in sé è il gruppo  $PSL_2(\mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R})/\{\lambda\mathbb{I}\} \subset PSL_2(\mathbb{C})$ .

Il gruppo  $\mathcal{H}(3)$  invece è isomorfo a  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Possiamo limitarci a studiare l'azione di  $\mathcal{H}(3)$  su  $\partial\mathbb{H}^3 \simeq S^2$ . Esiste una identificazione di  $\partial\mathbb{H}^3$  con  $\mathbb{CP}^1$  in modo che gli elementi di  $\mathcal{H}(3)$  ristretti a  $\partial\mathbb{H}^3$  siano esattamente le proiettività di  $\mathbb{CP}^1$ . Quindi  $\mathcal{H}^3 \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ .

Sui gruppi  $\mathcal{H}(2)$  e  $\mathcal{H}(3)$  c'è una struttura di gruppo topologico, quella indotta dall'identificazione con un quoziente di un gruppo di matrici. Un sottogruppo di uno di questi gruppi agisce sullo spazio iperbolico in maniera libera e propriamente discontinua se e solo se è discreto e senza torsione. Ad ogni varietà iperbolica  $M$  di dimensione  $n = 2$  o  $3$  si associa un omomorfismo di gruppi iniettivo  $\pi_1(M) \hookrightarrow \mathcal{H}(n) \subset PSL_2(\mathbb{C})$ , ben definito a meno di coniugazione in  $\mathcal{H}(n)$ , la cui immagine è un sottogruppo discreto e senza torsione.

Nel seguito sarà importante trovare dei buoni omomorfismi dal gruppo fondamentale di una varietà in  $SL_2(\mathbb{C})$ . Questo si riesce a fare per 3-varietà iperboliche sfruttando proprio questo omomorfismo in  $PSL_2(\mathbb{C})$ .

**Proposizione 23. (Thurston)** *Prendiamo una 3-varietà iperbolica  $M$ , e sia  $\rho : \pi_1(M) \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$  l'immersione di gruppi descritta sopra. Se  $p : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$  è la proiezione nel quoziente, esiste un sollevamento  $\tilde{\rho} :$*

$\pi_1(M) \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$  tale che  $p \circ \tilde{\rho} = \rho$ . L'omomorfismo  $\tilde{\rho}$  è iniettivo (perchè  $\rho$  lo è).

*Dim* : [CS1, prop. 3.1.1]. □

La rappresentazione in  $SL_2(\mathbb{C})$  descritta nella proposizione precedente è riducibile se e solo se  $\pi_1(M)$  è abeliano.

L'analogo della proposizione precedente vale anche per le 2-varietà che sono superfici compatte o parte interna di una superficie compatta. Anche in questo caso l'immersione del gruppo fondamentale in  $PSL(2, \mathbb{R})$  si solleva ad una rappresentazione discreta e fedele in  $SL_2(\mathbb{R}) \subset SL_2(\mathbb{C})$ .

Si può dimostrare che una 3-varietà iperbolica  $M$  è diffeomorfa alla parte interna di una varietà differenziabile  $\bar{M}$  che ha un bordo le cui componenti connesse sono tutte tori incompressibili (detti cuspidi), in modo che ogni sottogruppo di  $\pi_1(M) \simeq \pi_1(\bar{M})$  isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$  è contenuto in un sottogruppo periferico di  $\pi_1(\bar{M})$ .

I sottogruppi discreti di rango 2 di  $PSL_2(\mathbb{C})$  sono immagini di matrici della forma  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , quindi i sottogruppi periferici sono formati da elementi con modulo della traccia uguale a 2 (per elementi di  $PSL_2(\mathbb{C})$  non è ben definita la traccia ma solo il modulo della traccia).

$M$  ha volume finito (come varietà riemanniana)  $\Leftrightarrow \bar{M}$  è compatta e  $\pi_1(M)$  non contiene sottogruppi abeliani di indice finito.

## 1.2 Tori e Nodi

### 1.2.1 Classificazione dei nodi e dei link nel toro $T^2$

La classificazione dei nodi nel toro a meno di diffeomorfismi è molto semplice. Si vede bene che esistono almeno due tipi di nodi. Passando al rivestimento universale  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ , se  $C \subset \mathbb{R}^2$  è il cerchio con centro  $(0, 0)$  e raggio  $\frac{1}{4}$ ,  $D = p(C)$  è un nodo che sconnette  $T^2$ . Invece  $E = p(\mathbb{R} \times \{0\})$  è un nodo che non sconnette  $T^2$ ,  $T^2 \setminus E \simeq \mathbb{R} \times S^1$ . Si dimostra che questi sono gli unici tipi di nodi nel toro a meno di diffeomorfismo:

**Proposizione 24.** *Siano  $K_1, K_2 \subset T^2$  due nodi nel toro tali che entrambi sconnettano  $T^2$  oppure entrambi non sconnettano  $T^2$ . Allora esiste un diffeomorfismo  $\varphi : T^2 \hookrightarrow T^2$  tale che  $\varphi(K_1) = K_2$ .*

*Dim* : [Ro, 2C, thm. 13]. □

I nodi che sconettono il toro si dicono **inessenziali**, gli altri si dicono **essenziali**. Si possono poi classificare bene i link nel toro in cui tutte le componenti sono essenziali.

**Proposizione 25.** *Siano  $L_1, L_2 \subset T^2$  due link con lo stesso numero di componenti connesse, tutte essenziali. Allora esiste un diffeomorfismo  $\varphi : T^2 \hookrightarrow T^2$  tale che  $\varphi(L_1) = L_2$ .*



*Dim* : Siano  $K_1 \subset L_1, K_2 \subset L_2$  componenti connesse rispettivamente di  $L_1, L_2$ . Esiste un diffeomorfismo del toro che manda una nell'altra. Le altre componenti connesse sono mandate in un cilindro  $\mathbb{R} \times S^1$ . Per concludere basta verificare che un nodo essenziale in  $\mathbb{R} \times S^1$  è isotopo a  $\{0\} \times S^1$ .  $\square$

Quindi i link con  $n$  componenti connesse tutte essenziali coincidono a meno di diffeomorfismo. Basta costruire un esempio  $(p(\mathbb{R} \times \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \dots \frac{n}{n}\}))$  per vedere che tutte le componenti di uno di questi link sono isotope fra di loro.

Vediamo ora che relazione c'è fra i nodi e i link del toro e il gruppo  $\pi_1(T^2) \simeq H_1(T^2)$ . Se vediamo i nodi e i link come embedding  $\psi : S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \hookrightarrow T^2$ , e quindi con una orientazione, è chiaro come si può associare ad ogni nodo una classe di omotopia libera e un elemento di  $\pi_1(T^2)$ , e ad ogni link un elemento di  $H_1(X)$ . Ovviamente i nodi inessenziali sono tutti isotopi fra di loro, e quindi corrispondono alla stessa classe di omotopia, che è la classe nulla.

**Definizione 26.** Una **parametrizzazione** di  $T^2$  è un diffeomorfismo  $\varphi : S^1 \times S^1 \hookrightarrow T^2$ , dove  $S^1$  si intende con fissati una orientazione e un punto base  $1 \in S^1$ . Il punto  $x_0 = \varphi(1, 1) \in T^2$  si dice punto base della parametrizzazione e i nodi orientati  $M = \varphi(S^1 \times \{1\})$  e  $L = \varphi(\{1\} \times S^1)$  si dicono **meridiano** e **longitudine** per la parametrizzazione  $\varphi$ . La coppia di classi di omotopia  $B = \langle [M], [L] \rangle$  è una base (come  $\mathbb{Z}$ -modulo libero) di  $\pi_1(T^2)$  che si dice base **associata alla parametrizzazione**. Indico la classe di omotopia  $p[M] + q[L]$  con  $(\frac{p}{q})$ .

**Proposizione 27.** *Fissata una classe di omotopia  $(\frac{p}{q})$ , abbiamo che esiste un nodo  $K \subset T^2$  con  $[K] = (\frac{p}{q}) \Leftrightarrow p = q = 0$  o  $\text{MCD}(p, q) = 1$ .*

*Dim* : [Ro, 2C, thm. 2].  $\square$

Due classi  $e_1 = (\frac{a}{b})$  e  $e_2 = (\frac{c}{d})$  formano una base di  $\pi_1(T^2)$ , se e solo se  $ad - bc = 1$ , quindi è necessario che entrambe siano rappresentate da un nodo,  $e_1 = [K_1]$ ,  $e_2 = [K_2]$ . Sappiamo che c'è un diffeomorfismo che manda  $M$  in  $K_1$ . Studiando i diffeomorfismi del toro [Ro, 2C] si vede che il diffeomorfismo può essere scelto in modo che  $L$  vada in  $K_2$ . Quindi ogni base di  $\pi_1(T^2)$  è associata a qualche parametrizzazione.

Abbiamo visto quali classi di omotopia (e quindi di omologia) corrispondono a nodi. Si può dimostrare che due nodi omotopi su una superficie sono anche isotopi ([Ep2]). Quindi una parametrizzazione induce una corrispondenza biunivoca fra classi di isotopia di nodi orientati essenziali e classi di omotopia di  $\pi_1(T^2)$  con componenti, nella base  $B$ , prime fra loro. Ogni classe di omologia non corrispondente a queste è multiplo di una di queste:  $(\frac{p}{q})$  con  $\text{MCD}(p, q) = d$  è  $d$  volte una classe corrispondente ad un nodo  $K$ . Questa classe è rappresentata da un link  $L$  con  $d$  componenti connesse tutte isotope a  $K$  e tutte orientate nello stesso verso.

Le classi di isotopia dei nodi (non orientati) sono in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{P}(H_1(T^2)) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{Z}^2) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{Q}^2) \simeq \mathbb{Q}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Un cambiamento di parametrizzazione cambia questa identificazione mediante un'applicazione  $\mathbb{Z}$ -lineare su  $H_1(T^2)$ , che agisce come una proiezione su  $\mathbb{P}(H_1(T^2))$ . Quindi sull'insieme delle classi di isotopia di nodi non orientati in  $T^2$  c'è una ben definita struttura proiettiva razionale che non dipende dalla parametrizzazione. La scelta di una parametrizzazione permette di fissare un sistema di riferimento proiettivo, e quindi di associare ad ogni classe di isotopia non orientata un numero razionale o  $\infty$ , che si dice **pendenza** del nodo rispetto alla parametrizzazione scelta. Se  $K$  è un nodo con  $[K] = p[M] + q[L]$  la pendenza di  $K$  risulta  $\frac{p}{q}$  se  $q \neq 0$ ,  $\infty$  altrimenti. La pendenza di  $M$  è  $\infty$  e quella di  $L$  è 0.

### 1.2.2 Tori bordo di tori solidi

**Definizione 28.** Un **toro solido** è una 3-varietà diffeomorfa a  $D^2 \times S^1$ . Una **parametrizzazione** di un toro solido  $V$  è un diffeomorfismo  $\varphi : D^2 \times S^1 \hookrightarrow V$ . Un **nucleo** di un toro solido è un qualunque nodo  $K \subset V$  per cui esista una parametrizzazione  $\varphi$  con  $\varphi(\{0\} \times S^1) = K$ .

Il bordo  $\partial V$  di un toro solido  $V$  è diffeomorfo a un toro, e una parametrizzazione del toro solido si restringe ad una parametrizzazione  $\varphi|_{\partial V} : \partial D^2 \times S^1 \hookrightarrow \partial V$  di  $\partial V$ .

$\pi_1(V) \simeq \mathbb{Z} \simeq H_1(V)$  perché è abeliano. L'omomorfismo  $i_* : H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V)$  è surgettivo e induce una decomposizione  $H_1(\partial V) \simeq e_1\mathbb{Z} \times e_2\mathbb{Z}$  in modo che  $e_1\mathbb{Z} = \ker i_*$  e  $i_*(e_2)$  generi  $H_1(V)$  ([Ro, 2E]). Fissata una parametrizzazione di  $V$ , che ne induce una di  $\partial V$ , si può scegliere  $e_1$  come classe del meridiano in  $\partial V$  e  $e_2$  come classe della longitudine di  $\partial V$ .  $\ker i_*$  è un sottogruppo ben definito e il suo generatore è univocamente determinato a meno del segno. Questo ci dice che al variare della parametrizzazione del toro solido il meridiano è univocamente determinato a meno dell'orientazione e di isotopia. La longitudine invece dipende dalla parametrizzazione scelta. Si dimostra che una parametrizzazione di  $\partial V$  si estende ad una parametrizzazione di  $V$  se e solo se il meridiano della parametrizzazione genera il nucleo di  $i_*$ .

### 1.2.3 Varietà dei nodi

Sia  $S$  una 3-varietà chiusa connessa orientabile e  $K \subset M$  un nodo. Un intorno tubolare  $U$  di  $K$  è diffeomorfo alla parte interna di un toro solido con un diffeomorfismo  $\psi : B^2 \times S^1 \hookrightarrow U$  che manda  $\{0\} \times S^1$  su  $K$ . Sia  $D \subset B^2$  il disco con centro 0 e raggio  $\frac{1}{2}$ .  $V = \psi(D \times S^1)$  è un toro solido che ha  $K$  come nucleo. La varietà  $X = S \setminus \overset{\circ}{V}$  è una varietà a bordo con  $\partial X = \partial V \simeq T^2$  e  $\overset{\circ}{X} = S \setminus V \simeq S \setminus K$ . La classe di diffeomorfismo di  $X$  non

dipende dalla scelta dell'intorno tubolare  $V$ .  $X$  si dice **varietà associata al nodo**  $K \subset S$ , o **esterno del nodo**, mentre  $\overset{\circ}{X}$  si dice **complementare del nodo**. Il gruppo  $\pi_1(X)$  si dice **gruppo fondamentale** del nodo  $K$ . Potevamo applicare lo stesso procedimento ad un link  $L \subset S$  ottenendo una varietà  $X$  con bordo con componenti connesse toriche, la **varietà associata al link**  $L \subset S$ .

Due embedding  $\varphi_1 : D^2 \hookrightarrow S$  e  $\varphi_2 : D^2 \hookrightarrow S$  sono isotopi (teorema di unicità dei dischi). Quindi esiste un'unica classe di isotopia di nodi che sono bordo di un 2-disco. Un nodo che è bordo di un 2-disco si dice **nodo banale**.

Una varietà associata ad un nodo o ad un link è connessa, perché il nodo o link ha codimensione 2, quindi abbiamo  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . Inoltre  $H_n(X) = \{0\}$  per  $n \geq 3$  perché  $X$  è una 3-varietà a bordo.

**Definizione 29.** Una 3-sfera omologica  $S$  è una 3-varietà chiusa connessa e orientabile con  $H_1(S) = H_2(S) = 0$ . Si chiama così perché una definizione equivalente è che  $S$  sia una 3-varietà con gli stessi gruppi di omologia intera di una 3-sfera, ossia  $H_n(S) = \mathbb{Z}$  per  $n \in \{0, 3\}$ ,  $H_n(S) = \{0\}$  per  $n \notin \{0, 3\}$ .

Se  $S$  è una 3-sfera omologica e  $K \subset S$  è un nodo possiamo conoscere l'omologia della varietà  $X$  associata a  $K$  e inoltre avere informazioni sulle immersioni di  $H_1(\partial X)$  in  $H_1(X)$  e in  $H_1(V)$ . Infatti possiamo applicare la successione di Mayer-Vietoris al ricoprimento  $V \cup X$  di  $S$ , con  $V \cap X = \partial X = \partial V \simeq T^2$ . Indico le immersioni di  $T^2$  in  $V$  e in  $X$  con  $i_1 : T^2 \hookrightarrow V$  e  $i_2 : T^2 \hookrightarrow X$ . Abbiamo una successione esatta:

$$\{0\} = H_2(S) \xrightarrow{0} H_1(T^2) \xrightarrow{i_{1*} \oplus i_{2*}} H_1(V) \oplus H_1(X) \xrightarrow{0} H_1(S) = \{0\}$$

Questo ci dice che  $H_1(X) = \mathbb{Z}$ , ma dice di più. Infatti vediamo che la mappa  $i_{1*} \oplus i_{2*}$  induce una decomposizione  $H_1(T^2) = \ker i_{1*} \oplus \ker i_{2*}$  con  $\ker i_{1*} = e_1 \mathbb{Z}$  e  $\ker i_{2*} = e_2 \mathbb{Z}$ . Esiste una parametrizzazione di  $\partial X$  in modo  $[M] = e_1$  e  $[L] = e_2$ . Una parametrizzazione con questa proprietà si dice **parametrizzazione privilegiata**.

Questo definisce un meridiano  $M$  e una longitudine  $L$ , entrambi ben definiti a meno di orientazione e di isotopia. Se fissiamo un'orientazione su  $S$  e un'orientazione sul nodo  $K$  possiamo restringerci a considerare solo parametrizzazioni  $\varphi : D^2 \times S^1 \hookrightarrow V$  in modo che  $\varphi$  rispetti l'orientazione di  $S$  e  $\varphi|_{\{0\} \times S^1}$  vada su  $K$  rispettando l'orientazione di  $K$ . In questo modo  $M$  e  $L$  hanno un'orientazione ben definita e sono quindi ben definiti a meno della sola isotopia.

Se non fissiamo l'orientazione di  $K$  il meridiano e la longitudine sono ben definiti a meno di isotopia e di scambiare contemporaneamente l'orientazione di entrambi. Questo scambio di entrambe le orientazioni non fa cambiare la pendenza delle curve, quindi in una varietà  $X$  associata ad un nodo in una 3-sfera omologica orientata, ad ogni curva in  $\partial X$  si può associare una ben

definita **pendenza** calcolata su una parametrizzazione privilegiata di  $\partial X$ , e ad ogni superficie in  $X$  con **bordo essenziale**, ossia con bordo che contenga almeno una componente connessa essenziale in  $\partial X$ , si può associare una ben definita **pendenza di bordo** (il termine inglese è “boundary slope”), ossia la pendenza di una qualunque componente essenziale del bordo della superficie.

Usando un'altra parte della successione di Mayer-Vietoris si può vedere anche che  $H_2(X) = 0$ , completando l'omologia di  $X$ . Infatti:

$$\mathbb{Z} = H_2(T^2) \xrightarrow{i_{1*} \oplus i_{2*}} H_2(V) \oplus H_2(X) \xrightarrow{0} H_2(S) = \{0\}$$

Questo ci dice che la mappa  $i_{2*} : H_2(T^2) \rightarrow H_2(X)$  è surgettiva. Ma questa mappa è nulla perché manda il generatore standard di  $H_2(T^2)$  nel bordo di  $X$ , e quindi in una classe nulla.

Abbiamo trovato che ogni varietà associata ad un nodo in una 3-sfera omologica ha l'omologia di un toro solido.

Vediamo ora qualcosa sul gruppo fondamentale. Considero l'omomorfismo  $i_{\#} : \pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$ , ben definito a meno di coniugazione. L'immagine  $i_{\#}(\pi_1(\partial X))$  è generata dagli elementi  $i_{\#}([M]), i_{\#}([L]) \in \pi_1(X)$ , che saranno chiamati ancora  $[M]$  e  $[L]$ . Il gruppo fondamentale di una tale varietà ha un omomorfismo surgettivo in  $\mathbb{Z}$ :  $\pi_1(X) \rightarrow H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$  che manda  $[M]$  in 1 e  $[L]$  in 0.  $[L]$  essendo nel nucleo di questo omomorfismo fa parte del sottogruppo dei commutatori  $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ .

L'omomorfismo  $i_{\#}$  appena definito potrebbe non essere iniettivo. Ad esempio non è iniettivo nel caso di un nodo banale, infatti in questo caso il disco di cui il nodo è bordo interseca  $\partial X$  in una curva essenziale, che è però nulla nell'omotopia di  $X$ . Questo è l'unico caso.

**Proposizione 30.** *L'omomorfismo  $i_{\#}$  è iniettivo  $\Leftrightarrow$  il nodo non è banale.*

*Dim :*  $\Rightarrow$ : Per il discorso di sopra.

$\Leftarrow$ : dimostro che se  $i_{\#}$  non è iniettivo il nodo è banale. Il nucleo di questo omomorfismo è contenuto nel nucleo di  $\pi_1(\partial X) \simeq H_1(\partial X) \rightarrow H_1(X)$ , e quindi in  $[L]\mathbb{Z}$ . Il “loop theorem” ([Ro, 4A, thm. 3]) garantisce che se  $i_{\#}$  non è iniettivo esiste un disco  $D$  sottovarietà propria di  $X$  con bordo  $\partial D$  che rappresenta un elemento non banale di  $\pi_1(\partial X)$ . Questo elemento deve essere un multiplo di  $[L]$ , ma siccome è un nodo nel toro deve essere proprio isotopo a  $L$ . Quindi esiste una parametrizzazione di  $V$  per cui  $\partial D \simeq \{1\} \times S^1$ . Se  $[0, 1] \subset D^2$  è il segmento che ha come estremi 0 e 1,  $[0, 1] \times S^1$  è un anello che connette  $\partial D$  a  $K$ . Quindi  $K$  borda un disco  $D \cup [0, 1] \times S^1$ , ed è quindi banale.  $\square$

La dimostrazione mostra che se  $i_{\#}$  non è iniettivo manda  $[L]$  in 0, e  $\mathbb{Z} \simeq i_{\#}(\pi_1(\partial X)) = [M]\mathbb{Z} \subset \pi_1(X)$ . Altrimenti  $\mathbb{Z}^2 \simeq i_{\#}(\pi_1(\partial X)) = [M]\mathbb{Z} \oplus [L]\mathbb{Z} \subset \pi_1(X)$ . In questo caso il bordo  $\partial X$  è incompressibile e il gruppo  $i_{\#}(\partial X)$  è un sottogruppo periferico di  $\pi_1(X)$ .

### 1.3 Grafi e alberi

**Definizione 31.** Un **grafo combinatorio** è una coppia  $G = (X, Y)$ , dove  $X$  è un insieme i cui elementi sono detti **vertici**, e  $Y$  un insieme di sott'insiemi di  $X$  di due elementi. Gli elementi di  $Y$  si dicono **lati**. Se  $x$  è un vertice e  $l$  un lato dico che  $x$  è un **estremo** di  $l$  se  $x \in l$ . Un **sottografo** di  $G$  è un grafo  $G' = (X', Y')$  con  $X' \subset X$  e  $Y' \subset Y$ , in modo che gli estremi dei lati in  $Y'$  siano in  $X'$ .

Per come è stata data la definizione non capita mai che ci sia un lato che parte e arriva allo stesso vertice o due lati che hanno gli stessi estremi. A volte nella definizione di grafo si ammettono questi casi, ma a me non servono.

**Esempio 32.** La stringa di lunghezza  $n$ :  $P_n = (\{0 \dots n\}, \{\{i, i+1\} \mid i \in \{0 \dots n-1\}\})$ .

Il cerchio di lunghezza  $n$ :  $C_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \{\{i, i+1\} \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\})$ .

Il **link** di un vertice  $x$  è il sottografo  $\mathcal{L}_x$  che non ha lati e ha come vertici tutti e soli i vertici che sono estremi di lati che hanno  $x$  come estremo, tranne il vertice  $x$  stesso.

La **stella** di un vertice  $x$  è il sottografo  $\Sigma_x$  che ha come lati tutti e soli i lati che hanno  $x$  come estremo e come vertici tutti e soli i vertici che sono estremi dei suddetti lati.

La **suddivisione baricentrica** di un grafo  $G = (X, Y)$  è un grafo  $G'$  che ha come insieme dei vertici  $X \cup Y$  e nel quale due vertici  $x, y$  di  $G'$  sono collegati da un lato se e solo se  $x \in X$ ,  $y \in Y$  e  $x$  è un vertice di  $y$ .

**Definizione 33.** Un'orientazione di  $G$  è una funzione  $o : Y \hookrightarrow X \times X$  che manda un lato  $\{x, y\}$  nella coppia  $(x, y)$  oppure nella coppia  $(y, x)$ . Fissata un'orientazione  $o$  si possono definire i punti di **partenza** e di **arrivo** di un lato  $l$  rispettivamente come  $p(l) = p_1(o(l))$  e  $a(l) = p_2(o(l))$ , dove con  $p_1$  e  $p_2$  ho indicato il primo e il secondo elemento della coppia.

**Definizione 34.** Dati due grafi  $G_1 = (X_1, Y_1)$  e  $G_2 = (X_2, Y_2)$ , un **morfismo** fra  $G_1$  e  $G_2$  è un'applicazione  $m : X_1 \rightarrow X_2$  tale che se  $\{x, y\} \in Y_1$ ,  $m'(\{x, y\}) = \{m(x), m(y)\} \in Y_2$ . Un morfismo  $m$  si dice un **isomorfismo** se  $m$  e  $m'$  sono bigettive. Un isomorfismo ha un'inversa che è ancora un isomorfismo. L'insieme degli isomorfismi di un grafo in se è un gruppo rispetto alla composizione, che si indica con  $\text{Aut } G$

**Definizione 35.** Un **cammino** in un grafo  $G$  è un morfismo  $P : P_n \rightarrow G$ , o equivalentemente è una successione finita  $P = x_1 \dots x_n$  di vertici di  $G$  tale che gli insiemi  $\{x_i, x_{i+1}\}$  siano dei lati. I vertici  $x_1$  e  $x_n$  si dicono **estremità** di  $P$ .  $n$  si dice **lunghezza** del cammino  $P$ . Un cammino si dice **semplice** se è iniettivo, tranne al più nelle estremità, che possono coincidere. Un grafo si dice **connesso** se dati due vertici  $x, y$  di  $G$  c'è un cammino che ha  $x$  e

$y$  come estremità. Un **circuito** è un morfismo iniettivo  $C : C_n \hookrightarrow G$ . Un **albero** è un grafo connesso, non vuoto e privo di circuiti. Una **geodetica** in un albero è un cammino iniettivo.

**Proposizione 36.** *Se  $T$  è un albero dati due vertici  $x, y$  di  $T$  esiste un'unica geodetica che li ha come estremi.*

*Dim :* [Se, I.2, prop. 8] □

La lunghezza dell'unica geodetica che ha  $x$  e  $y$  come estremi si indica con  $l(x, y)$  e si dice **distanza** fra  $x$  e  $y$ . Abbiamo che  $l(x, y) = 1$  se e solo se  $\{x, y\}$  è un lato di  $T$ .

Se  $G$  è un grafo combinatorio si può definire la **realizzazione** di  $G = (X, Y)$ , nel seguente modo. Scegliamo un'orientazione  $o$  di  $G$  e mettiamo la topologia discreta su  $X$  e su  $Y$ . Consideriamo la funzione  $f : Y \times \{0, 1\} \rightarrow X$  tale che  $f(l, 0) = p(l)$ ,  $f(l, 1) = a(l)$ . Definisco lo spazio topologico  $\text{real}(G) = X \sqcup_f (Y \times [0, 1])$ , dove con  $\sqcup_f$  intendo l'unione disgiunta quozientata per le identificazioni date dalla mappa  $f$ . La topologia di  $\text{real}(G)$  non dipende dalla scelta dell'orientazione.  $\text{real}(G)$  è un CW-complesso di dimensione 1, e gli spazi topologici della forma  $\text{real}(G)$  sono detti **grafi simpliciali**. Su ogni lato di questo grafo fissiamo una identificazione con  $[0, 1]$ , che permette di parlare di applicazioni affini, punti medi dei lati, ecc. . . , e fissa una struttura di varietà differenziabile sull'aperto  $T \setminus X$ . La realizzazione della suddivisione baricentrica di  $G$  è omeomorfa a  $\text{real}(G)$ , e può essere identificata con  $\text{real}(G)$  considerando i punti medi dei lati come vertici.

**Proposizione 37.** *Sia  $G$  un grafo connesso e non vuoto.  $G$  è un albero  $\Leftrightarrow \text{real}(G)$  è semplicemente connesso.*

*Dim :* [Se, I.2, cor. 1]. □

**Definizione 38.** Un'azione di un gruppo  $\Gamma$  su un grafo è un'omomorfismo  $i : \Gamma \rightarrow \text{Aut } G$ . Lo **stabilizzatore** di un vertice  $x$  o di un lato  $l$  di  $G$  si indica con  $\text{Stab}_x$  o  $\text{Stab}_l$  ed è il sottogruppo di  $\Gamma$  che lascia fisso  $x$  o  $l$ . Un vertice o lato di  $G$  si dice **fisso** per l'azione se il suo stabilizzatore è tutto  $\Gamma$ . Una **inversione** è il dato di un'elemento  $\gamma \in \Gamma$  e un lato  $\{x, y\}$  di  $G$  tali che  $\gamma(x) = y$  e  $\gamma(y) = x$ . Se non esistono inversioni si dice che  $\Gamma$  agisce **senza inversioni**.

Una azione di un gruppo  $\Gamma$  su un grafo  $G$  si estende ad una azione sulla sua realizzazione,  $\text{real}(G)$ , mandando lati in lati in maniera affine. Per questa azione i punti medi dei lati vanno in punti medi di lati.

## 1.4 Gruppi ordinati e $\Lambda$ -spazi metrici

### 1.4.1 Gruppi abeliani totalmente ordinati

**Definizione 39.** Un **gruppo ordinato** è una terna  $(\Lambda, +, <)$ , dove  $(\Lambda, +)$  è un gruppo abeliano, e la relazione  $<$  rispetta l'operazione  $+$ , ossia vale che

$a < b$  e  $c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$ . Un elemento  $\lambda \in \Lambda$  si dice positivo se  $\lambda > 0$ , e possiamo definire  $|\lambda| = \max\{\lambda, -\lambda\}$ .

Un'altro modo per definire un gruppo ordinato è dare una terna  $(\Lambda, +, \Lambda^+)$  dove  $\Lambda$  è come sopra e  $\Lambda^+ \subset \Lambda$  detto insieme degli elementi positivi, è chiuso per prodotto (un semi-gruppo) e  $\Lambda^+, \{0\}, \Lambda^-$  (con  $\Lambda^- = -\Lambda^+$ ) è una partizione di  $\Lambda$ . A questo punto definisco  $a < b \Leftrightarrow b - a \in \Lambda^+$ .

Un gruppo ordinato si dice **archimedeo** se dati due elementi positivi  $a, b > 0$  esiste un  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $na > b$ . Un gruppo ordinato si dice **discreto** se ogni elemento ha un successore immediato e un predecessore immediato.

Ogni sottogruppo di un gruppo ordinato è ancora un gruppo ordinato con l'ordinamento indotto.

**Esempio 40.** Il primo esempio è  $\mathbb{R}$ , con l'ordinamento usuale.  $\mathbb{R}$  è un gruppo ordinato, insieme a tutti i suoi sottogruppi, come  $\mathbb{Z}$ . In effetti tutti i gruppi ordinati archimedei sono isomorfi a dei sottogruppi di  $\mathbb{R}$ .

Altro esempio è  $\mathbb{R}^n$  con l'ordinamento lessicografico: definiamo l'ordine con  $(x_1 \dots x_n) < (y_1 \dots y_n) \Leftrightarrow \exists i \in \{1 \dots n\}$  con  $x_1 = y_1 \dots x_{i-1} = y_{i-1}$  e  $x_i < y_i$ . I sottogruppi discreti di  $\mathbb{R}^n$  sono quelli isomorfi a  $\mathbb{Z}^m$ .

**Definizione 41.** L'**intervallo chiuso** con estremi  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  è l'insieme  $[\lambda_1, \lambda_2] = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}$ . La **lunghezza** dell'intervallo è l'elemento  $\lambda_2 - \lambda_1 \in \Lambda$ . Un **intervallo** in un gruppo ordinato è un insieme  $I \subset \Lambda$  tale che per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in I$  vale che  $[\lambda_1, \lambda_2] \subset I$ . Un **estremo** di un intervallo è un massimo o minimo elemento dell'intervallo (se esiste). Un intervallo è chiuso se e solo se ha massimo e minimo elemento. Un **segmento iniziale** è un intervallo che se contiene un elemento contiene tutti quelli minori, e un **segmento finale** è un intervallo che se contiene un elemento contiene tutti quelli maggiori. Un **intervallo simmetrico** è un segmento che contiene l'opposto di ogni suo elemento.

Un sottogruppo  $\Lambda' \subset \Lambda$  si dice **isolato** se è un intervallo. L'insieme dei sottogruppi isolati di un gruppo è totalmente ordinato per inclusione.  $\Lambda$  si dice di **rango finito** se l'insieme dei suoi sottogruppi isolati è finito. In questo caso la cardinalità dell'insieme dei sottogruppi isolati (escluso il sottogruppo  $\{0\}$ , ma compreso  $\Lambda$ ) si dice **rango** del gruppo  $\Lambda$ .

$\Lambda$  ha rango 1 se e solo se è archimedeo. In questo caso  $\Lambda$  è isomorfo ad un sottogruppo di  $\mathbb{R}$ . Se ha rango finito  $n$  è invece isomorfo a un sottogruppo di  $\mathbb{R}^n$  ([Hah]). Nel seguito considereremo sempre gruppi di rango finito. I gruppi discreti di rango 1 sono isomorfi a  $\mathbb{Z}$ .

Prendiamo un gruppo ordinato  $\Lambda$  di rango finito  $r$ . Indico i suoi sottogruppi isolati con  $\{0\} = \Lambda_0 \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_r = \Lambda$ . L'**altezza** di un elemento  $\lambda \in \Lambda$  è quel  $j \in \{1 \dots r\}$  tale che  $\lambda \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j-1}$ . Il gruppo  $\Lambda_j / \Lambda_{j-1}$  è un gruppo ordinato di rango 1, ed è quindi isomorfo ad un sottogruppo di  $\mathbb{R}$ ,

ossia esiste un'immersione  $i_j : \Lambda_j / \Lambda_{j-1} \hookrightarrow \mathbb{R}$ , unica a meno di moltiplicazione per un numero reale positivo. Considero l'insieme  $[0, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  con le operazioni estese in modo che  $\frac{1}{0} = \infty$ ,  $\frac{1}{\infty} = 0$ ,  $a + \infty = \infty$ . Si può definire in maniera unica una operazione di rapporto  $\Lambda^- \times \Lambda^- \ni (\lambda, \lambda') \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda'} \in [0, \infty]$ , nel seguente modo: se  $\lambda$  e  $\lambda'$  hanno la stessa altezza  $j$  poniamo  $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{i_j(\lambda)}{i_j(\lambda')}$ , se l'altezza di  $\lambda$  è minore di quella di  $\lambda'$  poniamo  $\frac{\lambda}{\lambda'} = 0$ , se è maggiore  $\frac{\lambda}{\lambda'} = \infty$ . Con questa definizione vale che  $(\frac{\lambda}{\lambda'})^{-1} = \frac{\lambda'}{\lambda}$ , e che presi due interi positivi  $r, s$   $\frac{\lambda}{\lambda'} < \frac{r}{s} \Leftrightarrow r\lambda' < s\lambda$ .

### 1.4.2 $\Lambda$ -spazi metrici

**Definizione 42.** Un  $\Lambda$ -spazio metrico è una coppia  $(X, d)$  con  $X$  un insieme e  $d : X \times X \rightarrow \Lambda^+ \cup \{0\}$  una  $\Lambda$ -distanza, ossia una funzione che rispetta le proprietà delle distanze:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- $d(x, y) = d(y, x)$ .
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Un **sottospazio** di un  $\Lambda$ -spazio metrico è un sottoinsieme con la metrica indotta.

Una  $\Lambda$ -**isometria** fra  $\Lambda$ -spazi metrici  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  è un'immersione  $\mu : X \hookrightarrow Y$  tale che  $d'(\mu(x), \mu(y)) = d(x, y)$ .

Gli  $\mathbb{R}$ -spazi metrici e le  $\mathbb{R}$ -isometrie saranno chiamati come al solito spazi metrici e isometrie.

**Esempio 43 (Grafici come  $\mathbb{Z}$ -spazi metrici).** La distanza fra vertici di un albero combinatorio definita nella sezione precedente è una  $\mathbb{Z}$ -distanza sull'albero (va verificata la disuguaglianza triangolare). Una simile  $\mathbb{Z}$ -distanza si può definire su un grafo combinatorio ponendo  $d(x, y)$  uguale alla lunghezza del più breve cammino che ha come estremi  $x$  e  $y$ .

**Esempio 44.**  $\Lambda$  è un  $\Lambda$ -spazio metrico con la metrica  $d(x, y) = |x - y|$ . Le **traslazioni**  $T_{\lambda_0} : \Lambda \ni \lambda \mapsto \lambda + \lambda_0 \in \Lambda$  e le **riflessioni**  $R_{\lambda_0} : \Lambda \ni \lambda \mapsto \lambda_0 - \lambda \in \Lambda$  sono isometrie di  $\Lambda$ . Si dimostra che le isometrie fra due sottospazi di  $\Lambda$  sono tutte restrizioni di traslazioni o riflessioni. Una riflessione  $R_{\lambda_0}$  ha punti fissi in  $\Lambda$  se e solo se  $\lambda_0$  è divisibile per 2 in  $\Lambda$ . Una riflessione senza punti fissi si dice **riflessione fantasma**.

**Definizione 45.** Un **segmento** in un  $\Lambda$ -spazio metrico  $X$  è un'isometria  $\mu : I \hookrightarrow X$ , dove  $I$  è un intervallo di  $\Lambda$ . L'immagine  $\mu(I)$  si indica con  $|\mu|$ . Un segmento si dice **chiuso** se  $I$  è chiuso. Due segmenti si dicono **equivalenti** se hanno la stessa immagine, quindi identifichiamo i segmenti con la loro immagine. Un estremo del segmento è un punto che è immagine di un estremo



di  $I$ . La distanza fra i due estremi di un segmento chiuso si dice **lunghezza** del segmento. Un  $\Lambda$ -spazio metrico  $X$  si dice **unicamente connesso per segmenti** se per ogni coppia di punti esiste un unico segmento che li ha come estremi.

**Esempio 46.** In un albero combinatorio le geodetiche sono  $\mathbb{Z}$ -segmenti.

### 1.4.3 $\Lambda$ -alberi

**Definizione 47.** Un  $\Lambda$ -albero è un  $\Lambda$ -spazio metrico  $(T, d)$  che verifica:

1.  $T$  è unicamente connesso per segmenti.
2. Se due segmenti chiusi in  $T$  hanno un estremo in comune, la loro intersezione è un segmento chiuso.
3. Se  $a \leq b \leq c \in \Lambda$  e  $\mu : [a, c] \rightarrow T$  è una mappa tale che  $\mu|_{[a, b]}$  e  $\mu|_{[b, c]}$  siano segmenti chiusi e  $\mu([a, b]) \cap \mu([b, c]) = \{\mu(b)\}$ , allora anche  $\mu$  è un segmento chiuso. Questa richiesta è equivalente a chiedere che  $d(\mu(a), \mu(c)) = c - a$  (vedi [MS1, rem. 2.1.4]).

Uno  $\mathbb{Z}$ -albero è proprio un albero combinatorio. Un  $\mathbb{R}$ -albero sarà chiamato **albero reale**.

Per gli alberi reali c'è una caratterizzazione più semplice:

**Proposizione 48.** *Uno spazio metrico  $T$  è un albero reale se e solo se per ogni  $x, y \in T$  c'è un unico arco  $A \subset T$  (per arco intendo un sottospazio omeomorfo ad un intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$ ) con estremi  $x$  e  $y$ , e  $A$  è un segmento chiuso.*

*Dim :* [MS1, prop. 2.1.13]. □

Se  $\Lambda$  ha rango 1, è isomorfo ad un sottogruppo di  $\mathbb{R}$ . Fissiamo un isomorfismo  $i : \Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Con questa identificazione un  $\Lambda$ -albero è uno spazio metrico. Vediamo che ogni  $\Lambda$ -albero si può “completare” ad un ben definito albero reale.

**Teorema 49.** *Se  $\Lambda$  è un sottogruppo di  $\mathbb{R}$  e  $T$  è un  $\Lambda$ -albero, esiste un'isometria  $j : T \hookrightarrow T_{\mathbb{R}}$ , con  $T_{\mathbb{R}}$  albero reale, che verifica*

- $T_{\mathbb{R}}$  è uno spazio metrico completo.
- L'unione dei segmenti chiusi di  $T_{\mathbb{R}}$  con estremi in  $j(T)$  è densa in  $T_{\mathbb{R}}$ .

*L'immersione  $j$  è unica, nel senso che se  $j' : T \hookrightarrow T'_{\mathbb{R}}$  verifica le stesse proprietà, c'è un'isometria surgettiva fra  $T_{\mathbb{R}}$  e  $T'_{\mathbb{R}}$  che è l'identità su  $T$ .*

*Se  $\Lambda$  è denso in  $\mathbb{R}$  anche  $T$  è denso in  $T_{\mathbb{R}}$ . In questo caso se  $A$  è un segmento non degenerato di  $T_{\mathbb{R}}$  abbiamo che  $A \cap T$  è denso in  $A$ .*

*Se invece  $\Lambda = \mathbb{Z}$  vale  $T_{\mathbb{R}} \simeq \text{real}(T)$ .*

*Dim :* [MS1, thm. 2.1.9] e [MS1, prop. 2.1.12]. □

Nel caso di  $\Lambda = \mathbb{R}$  questo teorema dice che il completamento di un albero reale è ancora un albero reale.

Questo teorema si può applicare solo quando  $\Lambda$  ha rango 1. Nel caso in cui  $\Lambda$  ha rango finito esiste un più piccolo sottogruppo isolato non nullo  $\Lambda_1$ . Vorremmo trovare un modo di associare ad ogni  $\Lambda$ -albero un  $\Lambda_1$ -albero. Questo si può fare con la seguente costruzione.

**Proposizione 50.** *Sia  $\Lambda$  un gruppo ordinato, e  $\Lambda'$  un suo sottogruppo isolato. Preso un  $\Lambda$ -albero  $T$  e fissato un punto  $x_0 \in T$  considero l'insieme  $T' = \{x \in T \mid d(x_0, x) \in \Lambda'\}$ .  $T'$  è un  $\Lambda'$ -albero.  $\square$*

## Capitolo 2

# Preliminari di geometria algebrica

In questo capitolo introduco alcune nozioni elementari di geometria algebrica. Considero due campi  $k \subset \mathbb{K}$ . Il campo  $k$  sarà detto **campo di definizione**, mentre  $\mathbb{K}$  sarà il **campo delle coordinate**. I casi che servono nel seguito sono  $k = \mathbb{Q}$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ , oppure  $k = \mathbb{C}$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Per fortuna quasi sempre  $\mathbb{K}$  sarà  $\mathbb{C}$ , quindi varrà l'ipotesi  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso, che è molto utile.

Nella prima sezione parlo di varietà affini in  $\mathbb{K}^n$  definite da polinomi a coefficienti in  $k$ , e, nel caso in cui  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso, definisco i morfismi fra varietà affini e le varietà affini astratte. Nella seconda sezione considero solo il caso in cui  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso, e parlo di varietà proiettive, relazione fra varietà proiettive e varietà affini, morfismi e mappe razionali fra varietà proiettive. Nella terza sezione considero più da vicino il caso più semplice: le curve complesse.

### 2.1 Varietà affini

Siano  $k \subset \mathbb{K}$  due campi. Indico con  $\mathcal{A}$  l'anello dei polinomi in  $n$  variabili a coefficienti in  $k$ ,  $k[X_1 \dots X_n]$ . I suoi elementi definiscono delle funzioni su  $\mathbb{K}^n$ , dette **funzioni polinomiali**.

#### 2.1.1 Le varietà

**Definizione 51.** Dato un ideale  $I$  di  $\mathcal{A}$ , l'insieme  $\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \forall P \in I P(x) = 0\}$  si dice una **varietà algebrica affine** di  $\mathbb{K}^n$  definita su  $k$ , o **varietà dell'ideale  $I$** . Data una varietà  $V$  definita su  $k$  l'ideale  $\mathcal{I}(V) = \{P \in \mathcal{A} \mid \forall x \in V P(x) = 0\}$  si dice **ideale della varietà  $V$** .

Se  $k'$  è un campo e  $k \subset k' \subset \mathbb{K}$ , una varietà affine  $\mathcal{V}(I)$  su  $k$  è anche una varietà affine su  $k'$ , definita dall'ideale  $I^e \subset k'[X_1 \dots X_n]$  generato dagli

elementi di  $I$  visti come polinomi in  $k'$ . Con questo cambiamento di campo, però, alcune proprietà potrebbero non conservarsi, per esempio la proprietà di essere irriducibile (vedi definizione 53) dipende dal campo di definizione.

L'insieme delle varietà algebriche affini (su  $k$ ) sarà indicato con  $\mathcal{Z}$ . Abbiamo quindi  $\mathcal{V} : \{\text{ideali di } \mathcal{A}\} \rightarrow \mathcal{Z}$ , e  $\mathfrak{I} : \mathcal{Z} \hookrightarrow \{\text{ideali di } \mathcal{A}\}$ .

**Proposizione 52. (Proprietà delle mappe  $\mathcal{V}$  e  $\mathfrak{I}$ )** *Valgono le seguenti:*

1.  $\mathfrak{I}$  è l'inversa destra di  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}(\mathfrak{I}(V)) = V$ .
2.  $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) \supset I$ ,  $\mathfrak{I}(\mathcal{V}(I)) = I \Leftrightarrow I \in \mathfrak{I}(\mathcal{Z})$ .
3.  $I \subset J \Rightarrow \mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(J)$ .
4.  $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J) = \mathcal{V}(I \cdot J)$ .
5.  $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{V}(I_\alpha) = \mathcal{V}\left(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$ .
6.  $\mathcal{V}(\sqrt{I}) = \mathcal{V}(I)$  dove con  $\sqrt{I}$  indico il radicale dell'ideale  $I$ ,  $\sqrt{I} = \{P \in \mathcal{A} \mid \exists m : P^m \in I\}$ .
7.  $I \in \mathfrak{I}(\mathcal{Z}) \Rightarrow \sqrt{I} = I$ .

In particolare  $\mathcal{Z}$  verifica gli assiomi dei chiusi di una topologia che viene chiamata **topologia di Zariski** su  $\mathbb{K}^n$ . Inoltre  $\mathcal{V}$  è una bigezione fra  $\mathfrak{I}(\mathcal{Z})$  e  $\mathcal{Z}$ , e  $\mathfrak{I}$  è la sua inversa.

*Dim :* La dimostrazione [ZS2, VII§3, pag. 160] non usa mai il fatto che  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso.  $\square$

**Definizione 53.** Una varietà algebrica affine (su  $k$ ) si dice **irriducibile** (su  $k$ ) se non è unione di due varietà affini (su  $k$ ) strettamente più piccole. Uno spazio topologico si dice **irriducibile** se non è unione di due chiusi propri.

**Proposizione 54.** *Una varietà affine  $V$  è irriducibile se e solo se il suo ideale  $\mathfrak{I}(V)$  è primo.*

*Dim :* Come in [ZS2, VII§3, thm. 12].  $\square$

**Proposizione 55.** *Una varietà affine  $V$  si può scrivere in maniera unica come unione irridondante di varietà affini irriducibili,  $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$  con  $V_i \not\subset V_j$  se  $i \neq j$ . Le varietà affini  $V_i$  si chiamano **componenti irriducibili** di  $V$ .*

*Dim :* Come in [ZS2, VII§3, thm. 13].  $\square$

**Definizione 56.** Data una varietà affine  $V$ , una **sottovarietà** di  $V$  è una varietà affine contenuta in  $V$ .

Ogni varietà affine  $V$  è anche uno spazio topologico con la topologia di sottospazio indotta dalla topologia di Zariski su  $\mathbb{K}^n$ . Questa topologia si chiama **topologia di Zariski** della varietà affine  $V$ , e gli aperti per questa topologia si chiamano **aperti di Zariski**, e sono i complementari delle sottovarietà di  $V$ . Questa topologia in generale non è di Hausdorff, anzi per varietà affini irriducibili gli aperti sono densi e compatti. Una varietà affine è irriducibile se e solo se è uno spazio topologico irriducibile.

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  abbiamo anche un'altra topologia su  $\mathbb{K}^n$  e quindi sulle varietà affini, quella classica, che è una topologia più fine di quella di Zariski. Per la topologia classica le varietà sono spazi localmente compatti e  $T_2$ , quindi sono spazi di Baire. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  le varietà irriducibili sono connesse, se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  una varietà irriducibile ha al più un numero finito di componenti connesse ([Mi, thm. 2.4]).

**Teorema 57.** *Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , e  $V$  è una varietà affine irriducibile in  $\mathbb{K}^n$  gli aperti di Zariski non vuoti di  $V$  sono aperti densi per la topologia classica.*

*Dim :* usando [M1, §2C, thm. 2.33].  $\square$

Il risultato precedente non è sempre vero se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ([BCR, esem. 3.1.2]).

**Teorema 58. (Hilbert Nullstellensatz)** *Se  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso, per ogni  $I$  ideale di  $\mathcal{A}$  vale  $\mathfrak{J}(V(I)) = \sqrt{I}$ . Quindi  $\mathfrak{J}(\mathcal{Z}) = \{I \text{ ideale di } \mathcal{A} \mid I = \sqrt{I}\}$ . In particolare se  $\mathfrak{p}$  è un ideale primo  $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ . Quindi le varietà affini irriducibili sono proprio quelle della forma  $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$  con  $\mathfrak{p}$  primo.*

*Questo teorema è equivalente a dire che  $\mathcal{V}(I) = \emptyset \Rightarrow I = (1)$ , quindi le varietà degli ideali propri sono non vuote.*

*Dim :* [ZS2, VII§3, thm. 14].  $\square$

**Definizione 59.** Sia  $V$  una varietà affine definita su  $k$ . L'anello  $\mathcal{A}_V = k[V] = \mathcal{A}/\mathfrak{J}(V)$  (che è isomorfo all'anello  $\{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists P \in \mathcal{A} : f = P|_V\}$ ) si dice **anello delle coordinate affini** di  $V$ . Questo anello è generato, come  $k$ -algebra, dalle immagini nel quoziente dei polinomi  $X_i$ , che saranno indicate con  $[X_i]$ . Se  $V$  è irriducibile  $\mathcal{A}_V$  è integro, il suo campo delle frazioni si dice **campo delle funzioni razionali** su  $V$  e si indica con  $k(V) = \{R = \frac{P}{Q} \mid P, Q \in \mathcal{A}_V, Q \neq 0\}$ . Il sottoanello  $\mathcal{O}_{x,V} = \{\frac{P}{Q} \in k(V) \mid Q(x) \neq 0\}$  si dice **anello locale** di  $x$ . Ha un unico ideale massimale  $m_{x,V} = \{\frac{P}{Q} \mid P(x) = 0\}$ .

## 2.1.2 Dimensione

**Definizione 60.** Sia  $V$  una varietà affine irriducibile. Il campo  $k(V)$  estende il campo  $k$ , ed ha quindi un grado di trascendenza che si indica con  $\text{tr.deg}$ . Si può definire la **dimensione** della varietà affine  $V$  come  $\dim V = \text{tr.deg}_k k(V)$ . Se  $W \subset V$  la **codimensione** di  $W$  in  $V$  è la differenza fra le dimensioni. Definisco la **dimensione** di una varietà affine non irriducibile come il massimo delle dimensioni delle sue componenti irriducibili.

**Proposizione 61.** *Se  $V$  è una varietà affine irriducibile, abbiamo che  $\dim V = \dim \mathfrak{J}(V)$ , nel senso della lunghezza della più grande catena di ideali primi che contengono  $\mathfrak{J}(V)$ .*

*Dim :* [ZS2, VII§7, thm. 20 e cor. 1]. □

Se  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso si può dare un'altra caratterizzazione della dimensione.

**Teorema 62. (Dimensione di Krull)** *Se  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso, la dimensione di una varietà affine irriducibile  $V$  è uguale alla lunghezza  $d$  della più lunga catena strettamente crescente  $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{d-1} \subsetneq V_d = V$  di sottovarietà irriducibili di  $V$ . Inoltre in una tale catena la varietà affine  $V_i$  ha dimensione  $i$ . Più precisamente fissata una sottovarietà irriducibile  $W \subset V$  di dimensione  $i$  esiste una catena strettamente crescente  $W = V_i \subsetneq V_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq V_d = V$ .*

*Dim :* Con la proposizione precedente e il Nullstellensatz. □

**Corollario 63.** *Se  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso e  $V$  è una varietà affine irriducibile di dimensione  $n$ , l'anello  $\mathcal{A}_V$  ha dimensione  $n$ , cioè esiste una catena di ideali primi  $(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subsetneq \mathcal{A}_V$  di lunghezza massima  $n$ .*

*Se  $x \in V$  anche l'anello locale  $\mathcal{O}_{x,V}$  ha dimensione  $n$ .*

*Dim :* Immergendo  $V \subset \mathbb{K}^n$ ,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}(V)$ , gli ideali primi di  $\mathcal{A}_V$  sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali primi di  $k[X_1 \dots X_n]$  che contengono  $\mathfrak{p}$ , che per il Nullstellensatz sono in corrispondenza biunivoca con le varietà irriducibili contenute in  $V$ . Per il teorema precedente la lunghezza massima di una catena è  $n$ .

L'anello locale  $\mathcal{O}_{x,V}$  si ottiene localizzando  $\mathcal{A}_V$  all'ideale  $m = \{P \in \mathcal{A}_V \mid P(x) = 0\}$ , che è massimale, quindi c'è una corrispondenza biunivoca fra gli ideali primi di  $\mathcal{O}_{x,V}$  e gli ideali primi di  $\mathcal{A}_V$  che sono contenuti in  $m$ . □

**Corollario 64.** *Sia  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso e  $V$  varietà affine irriducibile.  $V$  ha dimensione 0  $\Leftrightarrow \forall x \in V$  vale  $V = \overline{\{x\}}$ . Se  $k = \mathbb{K}$  le varietà di dimensione 0 sono singoli punti.*

*Dim :* Se  $k = \mathbb{K}$  i punti sono chiusi,  $\{x\} = \mathcal{V}((X_1 - x_1 \dots X_n - x_n))$ . □

**Proposizione 65.** *Sia  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso e  $V \subset \mathbb{K}^n$  varietà affine irriducibile di dimensione  $n - 1$ . Esiste  $P \in \mathcal{A}$  irriducibile tale che  $V = \mathcal{V}((P))$ .*

*Dim :* Scelgo  $g \in \mathfrak{J}(V) \setminus \{0\}$ . Scrivo  $g = \prod g_i$  con  $g_i$  irriducibili.  $X \subset \mathcal{V}(g) = \bigcup \mathcal{V}(g_i)$ , ma  $X$  è irriducibile quindi  $\exists i : X \subset \mathcal{V}(g_i) \subsetneq \mathbb{K}^n$ . Ma  $\dim X = n - 1 \geq \dim \mathcal{V}(g_i)$  per il teorema 62, quindi  $X = \mathcal{V}(g_i)$ . ([M1, §1A, pag. 7]). □

Sia  $V$  una varietà affine irriducibile definita su  $k$ .  $V$  è anche una varietà affine definita su  $k' \supset k$ , anche se potrebbe non essere irriducibile. Infatti le varietà affini su  $k'$  sono di più delle varietà affini su  $k$ .

**Proposizione 66.** *Le componenti irriducibili di  $V$  come varietà su  $k'$  hanno tutte la stessa dimensione, che è uguale alla dimensione di  $V$  come varietà su  $k$ .*

*Dim :* Usando il teorema [ZS2, VII§11, thm. 36], che dice che se  $\mathfrak{p} \subset k[X_1 \dots X_n]$  è un ideale primo, la dimensione degli ideali primi che danno la decomposizione di  $\mathfrak{p}^e$  è proprio la dimensione di  $\mathfrak{p}$ .  $\square$

Se  $k = \mathbb{K}$  queste nozioni di dimensione si possono ricollegare a quella nota per varietà differenziabili definendo gli spazi tangenti alle varietà affini.

**Definizione 67.** Sia  $x \in V$  varietà affine irriducibile. Una **derivazione centrata** in  $x$  è una applicazione  $k$ -lineare  $D : \mathcal{A}_V \rightarrow k$ , che sia nulla su  $k$  e che verifichi  $D(fg) = f(x)D(g) + D(f)g(x)$ . L'insieme di queste derivazioni forma uno spazio vettoriale, indicato con  $T_{x,V}$ , che si dice **spazio tangente** a  $V$  nel punto  $x$ .

Una derivazione  $D : \mathcal{A}_V \rightarrow k$  centrata in  $x$  si estende in modo unico ad una derivazione  $D : \mathcal{O}_{x,V} \rightarrow k$  con la regola  $D\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{D(P)Q(x) - P(x)D(Q)}{Q(x)^2}$ , quindi  $T_{x,V} \simeq \{D : \mathcal{O}_{x,V} \rightarrow k \text{ derivazioni centrate in } x\}$ .

**Proposizione 68.** *Se  $k = \mathbb{K}$  e  $V$  è una varietà irriducibile,  $\forall x \in V$   $\dim T_{x,V} \geq \dim V$  e l'insieme su cui vale l'uguaglianza è un aperto di Zariski non vuoto. Quindi  $\dim X = \min_{x \in V} \dim T_{x,V}$ .*

*Dim :* vedi [M1, §1A, prop. 1.12] e [BCR, prop. 3.3.14].  $\square$

**Definizione 69.** Un punto  $x$  della varietà affine  $V$  definita su  $k = \mathbb{K}$  si dice **punto regolare** se  $\dim T_{x,V} = \dim V$ , altrimenti si dice **punto singolare**. La varietà  $V$  si dice **varietà regolare** se tutti i suoi punti sono regolari.

### 2.1.3 Punti generici

Sia  $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ . L'insieme  $\mathfrak{p}(x) = \{P \in \mathcal{A} \mid P(x) = 0\}$  è un ideale primo, infatti  $(PQ)(x) = 0 \Rightarrow P(x) = 0$  o  $Q(x) = 0$ . La varietà affine irriducibile  $V = \mathcal{V}(\mathfrak{p}(x))$  è l'intersezione di tutte le varietà affini che contengono  $x$ , cioè  $V = \overline{\{x\}}$ . Se  $x \in k^n$  abbiamo che  $\mathfrak{p}(x)$  è l'ideale massimale  $(X_1 - x_1 \dots X_n - x_n)$ , quindi  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ ,  $x$  è un punto chiuso. Se  $k = \mathbb{K}$  tutti i punti sono chiusi, quindi la topologia di Zariski è  $T_1$ . Altrimenti è interessante vedere come è fatta la varietà  $V$ , che si dice **luogo** di  $x$  su  $k$ .  $V$  ha la proprietà che se un polinomio si annulla in  $x$  allora si annulla in tutti gli altri punti di  $V$ , quindi se  $x$  rispetta una certa relazione polinomiale, ogni punto di  $V$  la rispetta. Per questo  $x$  si dice punto generico della varietà  $V$ . Un altro punto  $y \in V$  si dice una **specializzazione** di  $x$ , e questo si indica

con  $x \rightarrow y$ . Se  $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow x$ , cioè se i luoghi di  $x$  e  $y$  sono uguali,  $y$  si dice una **specializzazione generica** di  $x$ .

Vorremmo dire quali sono le varietà affini irriducibili che ammettono un punto generico. Se  $k = \mathbb{K}$  solo le varietà affini irriducibili di dimensione 0, cioè i singoli punti. Ma se  $\mathbb{K}$  è più grande di  $k$  le varietà che hanno un punto generico diventano di più.

**Proposizione 70.** *Se  $\mathbb{K}$  è algebricamente chiuso e ha grado di trascendenza  $r$  su  $k$ , ogni varietà affine  $V$  con  $\dim V \leq r$  ha un punto generico. Più precisamente, esiste una  $k$ -immersione di campi  $\varphi : k(V) \hookrightarrow \mathbb{K}$  e per ogni tale immersione il punto  $(\varphi([X_1]) \dots \varphi([X_n])) \in \mathbb{K}^n$  è un punto generico di  $V$ .*

*Dim :* [ZS2, VI§5 bis, pag. 22]. □

Quindi se  $\mathbb{K}$  ha grado di trascendenza infinito su  $k$  ogni varietà affine ha un punto generico. In questo caso  $\mathbb{K}$  si dice **dominio universale** di  $k$ .

**Proposizione 71.** *Se  $k$  è numerabile e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , i punti generici di una varietà affine irriducibile  $V$  sono densi in  $V$  per la topologia classica.*

*Dim :* Un punto  $x \in V$  è generico se e solo se per ogni  $P \in \mathcal{A}_V$   $P \neq 0 \Rightarrow P(x) \neq 0$ . Quindi l'insieme dei punti generici è  $\bigcup_{P \in \mathcal{A}_V \setminus \{0\}} \{x \in V \mid P(x) \neq 0\}$ .

Per il teorema 57 questa è un'intersezione di aperti densi.  $\mathcal{A}_V$  è numerabile, quindi per il teorema di Baire l'intersezione è densa. (L'idea della dimostrazione era in [MS1, I.2]). □

Quindi ogni varietà complessa definita su  $\mathbb{Q}$  ha un insieme denso di punti generici.

### 2.1.4 Morfismi

In questa sezione il campo  $\mathbb{K}$  sarà sempre supposto algebricamente chiuso.

**Definizione 72 (Morfismi nel caso  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso).** Date due varietà affini  $V \subset \mathbb{K}^n$  e  $W \subset \mathbb{K}^m$ , entrambe definite su  $k$ , una mappa  $\varphi : V \rightarrow W$  è un **morfismo** (su  $k$ ) se è restrizione di un'applicazione polinomiale, cioè se esistono polinomi  $\varphi_1 \dots \varphi_m \in k[X_1 \dots X_n]$  tali che  $\forall x \in V$   $\varphi(x) = (\varphi_1(x) \dots \varphi_m(x))$ . Un morfismo fra due varietà affini  $V$  e  $W$  definisce un omomorfismo di  $k$ -algebre degli anelli delle coordinate  $\varphi^* : \mathcal{A}_W \rightarrow \mathcal{A}_V$  che si chiama **pull-back**, nella maniera seguente:  $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$ .

La definizione usuale di morfismo per varietà affini non è questa, ma nel caso  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso è ad essa equivalente.

**Proposizione 73.** *La composizione di due morfismi è un morfismo. Il pull-back della composizione è la composizione dei pull-back, in maniera controvariante:  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$*  □



**Proposizione 74.** *I morfismi sono continui nella topologia di Zariski, quindi l'immagine inversa di una sottovarietà (cioè un chiuso) è una sottovarietà.*  $\square$

**Proposizione 75.** *Dato un omomorfismo di  $k$ -algebre  $\lambda : \mathcal{A}_W \rightarrow \mathcal{A}_V$  esiste un unico morfismo  $\varphi : V \rightarrow W$  tale che  $\varphi^* = \lambda$ .*

*Dim :* come in [M2, I§3, prop. 1].  $\square$

**Definizione 76.** Se  $V$  e  $W$  sono varietà affini irriducibili un morfismo  $\varphi : V \rightarrow W$  si dice **dominante** se l'immagine  $\varphi(V)$  è densa in  $W$  con la topologia di Zariski.

**Proposizione 77.** *Se  $\varphi$  è dominante il pull-back  $\varphi^*$  è iniettivo, quindi si estende ad un'immersione del campo delle funzioni  $\varphi^* : k(W) \hookrightarrow k(V)$ .  $k(V)$  è quindi un'estensione di  $k(W)$ , quindi  $\dim V \geq \dim W$ . Inoltre  $\text{tr.deg}_{k(W)} k(V) = \dim V - \dim W$ , e  $k(V)$  è finitamente generato su  $k(W)$ .*

*Dim :* [M1].  $\square$

**Proposizione 78.** *Sia  $V$  una varietà affine irriducibile e  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  un morfismo, e  $W = \overline{\varphi(V)}$  (chiusura nella topologia di Zariski). Allora  $W$  è una varietà affine irriducibile, e il morfismo ristretto  $\varphi' : V \rightarrow W$  è dominante.*

*Dim :* [M2, I§8, prop. 1].  $\square$

**Teorema 79.** *Sia  $\varphi : V \rightarrow W$  un morfismo dominante fra varietà irriducibili definite su  $k = \mathbb{K}$ . Per ogni  $y \in W$  ogni componente di  $\varphi^{-1}(y)$  ha dimensione almeno  $\dim V - \dim W$ .*

*Dim :* [M1, §3A, thm. 3.13].  $\square$

**Teorema 80.** *Sia  $\varphi : V \rightarrow W$  un morfismo dominante fra varietà irriducibili. Esiste un aperto di Zariski  $\emptyset \neq U \subset W$  tale che  $U \subset \varphi(V)$  e che l'immagine inversa di ogni sottovarietà irriducibile  $X \subset W$  che intersechi  $U$ ,  $\varphi^{-1}(X)$ , sia una sottovarietà di  $V$  le cui componenti irriducibili che intersecano  $\varphi^{-1}(U)$  abbiano codimensione in  $V$  pari alla codimensione di  $X$  in  $W$ .*

*Dim :* [M2, 8§3, thm. 3].  $\square$

**Definizione 81.** Un morfismo si dice un **isomorfismo** se è bigettivo e la sua inversa è ancora un morfismo.

**Proposizione 82.** *Il pull-back di un isomorfismo è un isomorfismo di  $k$ -algebre. Inoltre un isomorfismo fra due varietà affini manda componenti irriducibili in componenti irriducibili. Un isomorfismo di  $k$ -algebre degli anelli delle coordinate di due varietà affini è il pull-back di un unico isomorfismo di varietà.*

*Dim :* con la prop. 78.  $\square$

**Definizione 83.** Si può definire una **varietà affine astratta** come una classe di equivalenza di varietà algebriche affini a meno di isomorfismi.

In questo modo ignoriamo tutte le proprietà che dipendono dall'immersione, ma possiamo utilizzare tutte le costruzioni che rimangono invarianti per isomorfismi, come gli anelli delle coordinate, le componenti irriducibili, la dimensione, ecc. . . . Inoltre i morfismi sono funzioni continue per la topologia classica, quindi gli isomorfismi sono omeomorfismi. In questo modo sulle varietà affini astratte rimane definita anche la topologia classica.

Un'altro modo per definire le varietà algebriche affini astratte è considerarle come coppie  $(X, \mathcal{A}_X)$ ,  $X$  insieme,  $\mathcal{A}_X$   $k$ -sottoalgebra di  $\{f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$  per cui esista una bigezione  $\varphi : X \leftrightarrow V$ ,  $V$  varietà affine, che induca un isomorfismo fra gli anelli  $\mathcal{A}_V$  e  $\mathcal{A}_X$ .

### 2.1.5 Varietà reali

Il caso in cui  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  è il caso delle varietà reali.  $\mathbb{R}$  non è algebricamente chiuso, quindi molte cose dette finora non valgono per varietà reali, ad esempio la nozione di morfismo è diversa, e quindi anche la teoria delle varietà astratte cambia.

La teoria delle varietà reali immerse in  $\mathbb{R}^n$  però ha molto in comune con la teoria delle varietà complesse grazie alla costruzione di complessificazione: Se  $W \subset \mathbb{R}^n$  è una varietà affine, la **complessificazione** di  $W$  è la più piccola varietà complessa  $W_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$  che contiene  $W$ . Vale che  $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}] = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[W]$ .

C'è anche un'operazione "quasi" inversa, prendere la **parte reale**: si parte da una varietà affine complessa  $V \subset \mathbb{C}^n$  definita su  $k \subset \mathbb{R}$ , e si ottiene una varietà reale  $V_{\mathbb{R}} = V \cap \mathbb{R}^n$ . Vale che  $(W_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = W$ , e  $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \subset V$ .

Se  $V$  è una varietà complessa irriducibile indico con  $\Sigma(V)$  il chiuso di Zariski formato dai suoi punti singolari. Se  $W$  è una varietà reale irriducibile definisco  $\Sigma(W) = \Sigma(W_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \subset W$ .  $\Sigma(W)$  è ancora una varietà reale di dimensione minore di  $W$ .  $W \setminus \Sigma(W)$  è una varietà differenziabile non vuota con un numero finito di componenti connesse (vedi [Mi, thm. 2.4]), ma non è sempre densa in  $W$ .

**Lemma 84.** *Sia  $V$  una varietà irriducibile complessa definita sul campo numerabile  $k \subset \mathbb{R}$ . Allora esiste un sottoinsieme dei punti  $k$ -generici di  $V$  denso in  $V_{\mathbb{R}} \setminus \Sigma(V)_{\mathbb{R}}$ .*

*Dim :* [MS1, lemma 1.4.1]. □

Quindi se  $W$  è una varietà reale c'è un insieme di punti generici di  $W_{\mathbb{C}}$  denso in  $W \setminus \Sigma(W)$ .

## 2.2 Varietà proiettive

Siano  $k \subset \mathbb{K}$  due campi, con  $\mathbb{K}$  algebricamente chiuso, e  $\mathcal{A} = k[Y_0 \dots Y_n]$ . Indico lo spazio proiettivo di dimensione  $n$  su  $\mathbb{K}$  con  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \{x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : x = \lambda y\}$ , e la classe di equivalenza di un elemento  $x = (x_0, x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$  con  $[x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ .

### 2.2.1 Polinomi omogenei e varietà proiettive

**Definizione 85.** Un ideale  $I \subset \mathcal{A}$  si dice un **ideale omogeneo** se per ogni  $P \in I$ , scritto  $P = \sum_i Q_i$ ,  $Q_i$  omogenei di grado  $i$ , vale  $\forall i Q_i \in I$ .

**Proposizione 86.** *Un ideale è omogeneo se e solo se è generato da un insieme di polinomi omogenei se e solo se è generato da un insieme finito di polinomi omogenei.*  $\square$

Un polinomio non definisce una funzione su  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , ma se  $P \in \mathcal{A}$  è un polinomio omogeneo si può dire che  $P$  si annulla in un punto  $y \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ,  $P(y) = 0$ , se  $P$  si annulla su un qualunque rappresentante di  $y$  in  $\mathbb{K}^{n+1}$ . L'annullarsi di  $P$  non dipende dalla scelta del rappresentante.

**Definizione 87.** Dato un ideale omogeneo  $I$  di  $\mathcal{A}$ , l'insieme  $\mathcal{V}(I) = \{y \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n \mid \forall P \in I, P \text{ omogeneo} \Rightarrow P(y) = 0\}$  si dice una **varietà algebrica proiettiva** di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  definita su  $k$ , o **varietà dell'ideale  $I$** . Data una varietà  $V$  definita su  $k$  l'ideale  $\mathfrak{I}(V) = (\{P \in \mathcal{A} \mid P \text{ omogeneo e } P(y) = 0 \forall y \in V\})$  si dice **ideale della varietà  $V$** .

Una **sottovarietà** di una varietà proiettiva  $V$  è una varietà proiettiva contenuta in  $V$ .

Come nel caso affine, se  $k'$  è un campo e  $k \subset k' \subset \mathbb{K}$ , una varietà  $\mathcal{V}(I)$  su  $k$  è anche una varietà su  $k'$ .

Indicando ancora con  $\mathcal{Z}$  l'insieme delle varietà, abbiamo  $\mathcal{V} : \{\text{ideali omogenei di } \mathcal{A}\} \rightarrow \mathcal{Z}$ , e  $\mathfrak{I} : \mathcal{Z} \rightarrow \{\text{ideali omogenei di } \mathcal{A}\}$ .

**Proposizione 88. (Proprietà delle mappe  $\mathcal{V}$  e  $\mathfrak{I}$ )** *Anche nel caso proiettivo valgono le proprietà enunciate nella proposizione 52, considerando che il radicale di un ideale omogeneo è omogeneo.*

*Dim :* come in [ZS2, VII§3, pag. 160], considerando però sempre ideali omogenei.  $\square$

**Definizione 89.** Le varietà proiettive sono i chiusi della **topologia di Zariski** su  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ . Questa topologia induce sulle varietà la topologia di sottospazio.

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , su  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , e quindi sulle varietà, è definita anche un'altra topologia, la topologia classica, che è più fine di quella di Zariski. Per questa topologia  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$  è compatto, e quindi le varietà, che sono chiuse, sono dei compatti.

**Definizione 90.** Una varietà proiettiva si dice **irriducibile** se non è unione di due varietà strettamente più piccole.

**Proposizione 91.** *Una varietà proiettiva  $V$  si può scrivere in maniera unica come unione irridondante di varietà irriducibili,  $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$  con  $V_i \not\subset V_j$  se  $i \neq j$ . Le varietà  $V_i$  si chiamano **componenti irriducibili** di  $V$ .*

*Dim :* [M2, I§2, prop. 13].  $\square$

I polinomi non definiscono delle funzioni su  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , nemmeno quelli omogenei. Come funzioni possiamo invece usare i rapporti fra polinomi omogenei dello stesso grado:  $k(\mathbb{K}\mathbb{P}^n) = \{\frac{P}{Q} \mid P, Q \in \mathcal{A} \text{ omogenei dello stesso grado, } Q \neq 0\}$ , inteso come sottoinsieme del campo delle frazioni di  $\mathcal{A}$ . Questo insieme è un campo detto **campo delle funzioni razionali**. Ogni  $R = \frac{P}{Q} \in k(\mathbb{K}\mathbb{P}^n)$  definisce una funzione su un aperto di Zariski  $R : \mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus \{y \mid P(y) = Q(y) = 0\} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^1$ .

**Definizione 92.** Data una varietà proiettiva irriducibile  $V$ , il **campo delle funzioni razionali** su  $V$  è il campo  $k(V) = \{\frac{P}{Q} \in k(\mathbb{K}\mathbb{P}^n) \mid Q \notin \mathfrak{I}(V)\} / \{\frac{P}{Q} \in k(\mathbb{K}\mathbb{P}^n) \mid Q \notin \mathfrak{I}(V), P \in \mathfrak{I}(V)\}$ .

Dato un punto  $y$  il sottoanello  $\mathcal{O}_{y,V} = \{\frac{P}{Q} \in k(V) \mid Q(y) \neq 0\}$  è l'**anello locale** di  $y$ .  $k(V)$  è il campo delle frazioni di  $\mathcal{O}_{y,V}$ .

Ora che abbiamo il campo delle funzioni e gli anelli locali possiamo definire, come per le varietà affini, le nozioni di **spazio tangente**, **dimensione**, **codimensione**, **punto regolare**, **punto singolare**, **varietà regolare**.

## 2.2.2 Relazione tra varietà proiettive e varietà affini

**Proposizione 93.**  $\mathcal{Z}$  è invariante per l'azione di una proiettività.

*Dim :* Sia  $L \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$  un isomorfismo lineare di  $\mathbb{K}^{n+1}$ .  $L$  definisce una proiettività  $[L] \in PGL_n(\mathbb{K}) = PSL_n(\mathbb{K})$ .  $L$  definisce anche un isomorfismo di  $k$ -algebre graduate  $\bar{L} : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}$  tale che  $\forall x \in \mathbb{K}^{n+1} P(x) = \bar{L}P(Lx)$ . Questo isomorfismo manda polinomi omogenei in polinomi omogenei, quindi  $\mathcal{Z}$  è invariante per l'azione di  $[L]$ .  $\square$

Sia  $H$  un iperpiano proiettivo. C'è una proiettività che lo manda nell'iperpiano  $H_0 = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_0 = 0\}$ . Possiamo supporre quindi  $H = H_0$ .  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus H = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_0 = 1\}$ . C'è quindi una bigezione  $i : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus H$ ,  $i((x_1 \dots x_n)) = [1 : x_1 : \dots : x_n]$ , con inversa  $i^{-1}([y_0 : \dots : y_n]) = (\frac{y_1}{y_0} \dots \frac{y_n}{y_0})$ .  $i$  viene detta **carta affine** rispetto all'iperpiano  $H$ , che viene detto **iperpiano all'infinito**.

**Proposizione 94.** Data una varietà proiettiva  $V$ , l'aperto di Zariski  $V^a = i^{-1}(V \setminus V \cap H)$  si chiama **parte affine** di  $V$ .  $V^a$  è una varietà affine, infatti se  $I$  è un ideale omogeneo che definisce  $V$ ,  $i^*(I) = \{P(1, X_1 \dots X_n) \mid P \in I\} \subset k[X_1 \dots X_n]$  è un ideale che definisce  $V^a$ . Se  $I$  è primo lo è anche  $i^*(I)$ , quindi la parte affine di una varietà irriducibile è irriducibile.  $\square$

**Proposizione 95.** Una varietà affine  $V$  è la parte affine di un'unica varietà proiettiva  $\bar{V}$  che si chiama **completamento proiettivo** di  $V$ . Infatti se  $I$  è un ideale che definisce  $V$ ,  $i^*(I) = (\{Y_0^{\deg P} P(\frac{Y_1}{Y_0} \dots \frac{Y_n}{Y_0}) \mid P \in I\}) \subset \mathcal{A}$  è un ideale omogeneo che definisce  $\bar{V}$ . Se  $I$  è primo lo è anche  $i^*(I)$ , quindi il completamento di una varietà irriducibile è irriducibile.  $\square$

**Proposizione 96.** *Se  $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è una varietà proiettiva con  $\dim V > 0$  e  $H$  è un iperpiano  $V \cap H \neq \emptyset$ . Quindi  $V^a \subsetneq V$ .*

*Dim :*  $\dim V + \dim H \geq n$ . Per [M1, §3C, corol. 3.30] l'intersezione è non vuota.  $\square$

Sia  $V$  una varietà proiettiva. Al variare degli iperpiani  $H$  di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ , le parti affini di  $V$  sono un ricoprimento aperto di  $V$ , quindi ogni punto appartiene a qualche parte affine.

**Proposizione 97.** *Data  $V$  varietà proiettiva irriducibile e una carta affine  $i : \mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^n \setminus H$ ,  $k(V) \simeq k(V^a)$  e dato  $y \in V \setminus V \cap H$ ,  $\mathcal{O}_{y,V} \simeq \mathcal{O}_{i^{-1}(y),V^a}$ . Quindi valgono tutte le proprietà degli spazi tangenti e della dimensione dimostrate per le varietà affini.*  $\square$

### 2.2.3 Prodotti

Si può definire su  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m$  la **topologia di Zariski** usando come chiusi gli insiemi del tipo  $\{([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m]) \mid P_1(x_0 \dots x_n, y_0 \dots y_m) = 0 \dots P_h(x_0 \dots x_n, y_0 \dots y_m) = 0\}$  al variare di  $P_1 \dots P_h$  fra i polinomi di  $\mathbb{K}[X_0 \dots X_n, Y_0 \dots Y_m]$  omogenei separatamente nelle  $X$  e nelle  $Y$ .

**Proposizione 98. (Immersione di Segre)** *Consideriamo la mappa  $s : \mathbb{K}\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^{nm+n+m}$  definita da  $s([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m]) = [x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_0 y_m : \dots : x_n y_0 : x_n y_1 : \dots : x_n y_m]$ .  $s$  è un omeomorfismo per la topologia di Zariski su  $\mathbb{K}$ , e l'immagine  $s(\mathbb{K}\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m)$  è una varietà proiettiva irriducibile su  $\mathbb{K}$ .*

*Dim :* [M1, §2B, prop. 2.12].  $\square$

Quindi i chiusi del prodotto sono varietà proiettive.

Date due varietà proiettive  $V \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  e  $W \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^m$  definite su  $k = \mathbb{K}$ , si può definire una struttura algebrica sul prodotto  $V \times W$  considerando l'insieme  $V \times W \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^{nm+n+m}$ . In questo modo  $V \times W$  risulta una varietà proiettiva. Quindi è ben definito il **prodotto di varietà proiettive**.

**Lemma 99.** *Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici irriducibili e consideriamo il prodotto  $X \times Y$  con una topologia che renda le applicazioni  $i_x : \{x\} \times Y \hookrightarrow Y$  e  $i_y : X \times \{y\} \hookrightarrow X$  degli omeomorfismi. Allora lo spazio  $X \times Y$  è irriducibile.*

*Dim :* [M1, §2B, lemma. 2.13].  $\square$

**Corollario 100.** *Il prodotto di due varietà proiettive irriducibili su  $\mathbb{K}$  è irriducibile.*  $\square$

### 2.2.4 Mappe razionali e morfismi

In questa sottosezione tutte le varietà proiettive sono definite sul campo  $\mathbb{K}$ .

**Definizione 101.** Dato un aperto di Zariski  $U$  di una varietà proiettiva  $V \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$  definita su  $\mathbb{K}$ , una mappa  $\psi : U \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^m$  è un rapporto fra polinomi se esistono polinomi  $P_0 \dots P_m, Q_0 \dots Q_m \in \mathcal{A}$ ,  $Q_0 \dots Q_m$  mai nulli su  $U$  tali che  $\forall y = [y_0 : \dots : y_n] \in U$   $\psi(y) = [\frac{P_0(y_0 \dots y_n)}{Q_0(y_0 \dots y_n)} : \dots : \frac{P_m(y_0 \dots y_n)}{Q_m(y_0 \dots y_n)}]$ .

Un rapporto fra polinomi  $\psi : U \rightarrow W$  definisce degli omomorfismi di  $\mathbb{K}$ -algebre degli anelli locali  $\psi^* : \mathcal{O}_{\psi(y), W} \rightarrow \mathcal{O}_{y, V}$  per  $y \in V$  che si chiamano **pull-back**, nella maniera seguente:  $\psi^*(R) = R \circ \psi$ .

Date due varietà irriducibili su  $\mathbb{K}$   $V$  e  $W$ , una **corrispondenza** è una relazione definita da una varietà  $Z \subset V \times W$ . L'insieme dei punti in corrispondenza con  $x \in V$  si indica con  $Z[x] = \{y \mid (x, y) \in Z\}$ . In maniera analoga l'immagine di un sottoinsieme  $S \subset V$  si indica con  $Z[S] = \bigcup_{x \in S} Z[x]$ .

La **corrispondenza inversa** è  $Z^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in Z\}$ .

Una corrispondenza  $Z$  si dice **mappa razionale** se  $Z$  è irriducibile e se esiste un aperto di Zariski  $V_0 \subset V$  tale che per ogni  $x \in V_0$   $Z[x]$  è un singolo punto.  $Z$  si dice **mappa birazionale** se  $Z$  e  $Z^{-1}$  sono entrambe mappe razionali.

Un punto  $x_0 \in V$  si dice **punto regolare** per una mappa razionale  $Z \subset V \times W$  se esiste un intorno di Zariski  $U$  di  $x_0$  tale che  $Z[x]$  sia un singolo punto per ogni  $x \in U$ , e  $Z$  sia un rapporto fra polinomi in  $U$ .

Se tutti i punti sono regolari la corrispondenza razionale  $Z$  è una funzione, e si dice **morfismo** di varietà proiettive. Per un morfismo esiste un ricoprimento di  $V$  con aperti di Zariski  $V = \bigcup_i V_i$  tali che per ogni  $i$   $Z$  sia un rapporto fra polinomi su  $V_i$ .

Per un morfismo è ben definito il **pull-back**  $Z^*$  per ogni punto  $y \in V$

Un morfismo si dice un **isomorfismo** se la sua inversa è ancora un morfismo.

Si può definire una **varietà proiettiva astratta** come una classe di equivalenza di varietà algebriche proiettive a meno di isomorfismi.

**Proposizione 102.** *L'insieme dei punti regolari di una mappa razionale, indicato con  $V_{reg} \subset V$ , è un aperto di Zariski non vuoto.*

*Gli insiemi di rapporti fra polinomi, corrispondenze, mappe razionali e morfismi sono chiusi per composizione, definita in maniera opportuna. Il pull-back della composizione è la composizione dei pull-back, in maniera controvariante:  $(Z \circ W)^* = W^* \circ Z^*$*

*Se  $Z$  è una mappa razionale, come varietà  $\dim Z = \dim V$ .*

*I morfismi sono continui nella topologia di Zariski, quindi l'immagine inversa di una sottovarietà (cioè un chiuso) è una sottovarietà.*

*Dim :* Che l'insieme  $V_{reg}$  sia non vuoto segue dalla dimostrazione di [M1, §3B, prop. 3.22]. La seconda asserzione segue da [M1, §2C, corol. 2.27].  $\square$

**Proposizione 103.** *Data una mappa razionale  $Z \subset V \times W$ , se  $Z[V] = W$  i*

pull-back  $Z^*$  sono iniettivi, quindi si estendono ad un'immersione (la stessa per tutti) del campo delle funzioni  $Z^* : \mathbb{K}(W) \hookrightarrow \mathbb{K}(V)$ .  $\square$

**Teorema 104. (Teorema principale della teoria dell'eliminazione)**

La proiezione  $p_2 : \mathbb{K}\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^m$  è chiusa.

Se  $V$  è un aperto di Zariski di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^m$ , la proiezione  $p_2 : \mathbb{K}\mathbb{P}^n \times V \rightarrow V$  è chiusa.

*Dim* : [M1, §2C, thm. 2.23].  $\square$

**Corollario 105.** Se  $Z \subset V \times W$  è una corrispondenza, e  $S \subset X$  è un chiuso,  $Z[S]$  è chiuso.  $\square$

**Proposizione 106.** Per ogni elemento del campo delle funzioni  $R = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(V)$  di una varietà irriducibile  $V$  esiste un'unica mappa razionale  $Z \subset V \times \mathbb{K}\mathbb{P}^1$  tale che l'insieme  $V_0 = \{x \in V \mid P(x) \neq 0 \text{ o } Q(x) \neq 0\}$  sia fatto di punti regolari per  $Z$  e su questo insieme  $Z[x] = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \right\}$ .

*Dim* : Consideriamo un'immersione  $V \subset \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ ,  $V = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$ . Si pone  $W = \{(x, [y_0, y_1]) \mid y_1 Q(x) - y_0 P(x) = 0\}$ .  $W_0 = W \cap V_0 \times \mathbb{K}\mathbb{P}^1$  è il grafico della mappa  $R|_{V_0}$ . La proiezione su  $V$  si restringe ad un omeomorfismo  $W_0 \xrightarrow{\sim} V_0$ , perché è bigettiva, continua e chiusa per il teorema precedente, quindi  $W_0$  è irriducibile. La componente irriducibile di  $W$  che contiene  $W_0$  è una mappa razionale, che ha tutti i punti di  $V_0$  come punti regolari, e su quelli coincide con  $R$ . [M1, §2B, es. 2.17].  $\square$

**Proposizione 107.** Siano  $V \subset \mathbb{K}^n$  e  $W \subset \mathbb{K}^m$  varietà affini irriducibili e  $\varphi : V \rightarrow W$  un morfismo. Allora esiste un'unica mappa razionale  $Z \subset \overline{V} \times \overline{W}$ , tale che  $i(V)$  sia fatto di punti regolari per  $Z$  e su  $i(V)$   $Z$  coincida con  $\varphi$ .

*Dim* :  $\varphi$  è un morfismo, quindi esistono polinomi  $P_1 \dots P_m$  tali che  $\forall x \in V \varphi(x) = (P_1(x) \dots P_m(x))$ . Considero l'insieme  $G = \{(x, y) \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m \mid \forall Q \in \mathfrak{J}(V) x_0^{\deg Q} Q(\frac{x_1}{x_0} \dots \frac{x_n}{x_0}) = 0 \text{ e } \forall i \in \{1 \dots m\} x_0^{\deg P_i} (y_i - y_0 P_i(\frac{x_1}{x_0} \dots \frac{x_n}{x_0})) = 0\}$ .  $G$  è luogo di zeri di polinomi separatamente omogenei nei due insiemi di variabili, quindi è un chiuso di  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m$ . Inoltre  $(x, y) \in G \Rightarrow x \in \overline{V}$  per la prima condizione. Se  $x \in i(V)$  abbiamo  $x = [1 : x_1 : \dots : x_n]$ , quindi  $(x, y) \in G \Leftrightarrow \forall i \in \{1 \dots m\} y_i = y_0 P_i(x_1 \dots x_n) \Leftrightarrow y_0 \neq 0 \text{ e } \frac{y_i}{y_0} = P_i(x_1 \dots x_n) \Leftrightarrow (x, y)$  è nel grafico di  $\varphi$ . Quindi  $G_0 = G \cap (i(V) \times \mathbb{K}\mathbb{P}^m)$  è il grafico di  $\varphi$ . Quindi  $G_0 \subset i(V) \times i(W)$ . La proiezione sulla prima componente è un omeomorfismo fra  $G_0$  e  $i(V)$  perché bigettiva, continua e chiusa per il teorema precedente. Quindi  $G_0$  è irriducibile. Sia  $Z$  la chiusura di Zariski di  $G_0$ .  $Z$  è una mappa razionale contenuta in  $G$ , quindi  $Z \cap (i(V) \times \overline{W})$  è il grafico di  $\varphi$ .  $\square$

**Proposizione 108.** Sia  $U \subset V$  un aperto di Zariski di una varietà proiettiva e  $\psi : U \rightarrow W$  un rapporto fra polinomi a valori in una varietà proiettiva  $W$ . Allora esiste un'unica mappa razionale  $Z \subset V \times W$ , tale che  $U$  sia fatto di punti regolari per  $Z$  e su  $U$   $Z$  coincida con  $\psi$ .

*Dim* : analoga alla dimostrazione precedente.  $\square$

**Proposizione 109.** *Se  $Z \subset V \times W$  è una mappa razionale, possiamo scrivere  $V = V_0 \cup F$ , con  $V_0$  aperto non vuoto tale che per ogni  $x \in V_0$  ogni componente di  $Z[x]$  ha dimensione 0,  $F$  chiuso tale che per ogni  $x \in F$  qualche componente di  $Z[x]$  abbia dimensione maggiore di 0. Inoltre ogni componente irriducibile di  $F$  ha codimensione almeno 2. L'insieme  $F$  si dice **insieme fondamentale** della mappa  $Z$ .*

*Dim :* [M1, §3B, pag. 50] □

**Teorema 110. (Teorema principale di Zariski)**  *$Z \subset V \times W$  mappa razionale. Se  $x \in V$  è regolare per  $V$  e  $x \notin F$  allora  $x$  è regolare per  $Z$ .* □

**Proposizione 111.** *Una mappa razionale  $Z \subset V \times W$  tale che  $Z[V] = W$  induce una  $\mathbb{K}$ -immersione  $Z^* : \mathbb{K}(W) \hookrightarrow \mathbb{K}(V)$ . Vale anche il viceversa: ogni  $\mathbb{K}$ -immersione  $\alpha : \mathbb{K}(W) \hookrightarrow \mathbb{K}(V)$  è indotta da un'unica mappa razionale.*

*Quindi ogni isomorfismo di campi delle funzioni razionali di due varietà è il pull-back di un'unica mappa birazionale.*

*Dim :* [M1, §3B, prop. 3.22]. □

**Proposizione 112.** *Sia  $\varphi$  un morfismo dominante di varietà affini  $\varphi : V \rightarrow W$ . L'immersione di campi  $\varphi^* : \mathbb{K}(W) \hookrightarrow \mathbb{K}(V)$  coincide con l'immersione  $\mathbb{K}(W) \simeq \mathbb{K}(\overline{W}) \xrightarrow{Z^*} \mathbb{K}(\overline{V}) \simeq \mathbb{K}(V)$  indotta dalla mappa razionale  $Z \subset \overline{V} \times \overline{W}$  corrispondente a  $\varphi$ .*

*Dim :* per la prop. 107  $\varphi$  e  $Z$  coincidono sull'aperto di Zariski  $i(V)$ . I pull-back sugli anelli locali nei punti regolari coincidono per definizione. Uno di questi pull-back determina l'immersione dei campi di funzioni, che quindi coincidono. □

## 2.3 Curve algebriche complesse

In questa sezione il campo delle coordinate  $\mathbb{K}$  sarà  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 113.** Una **curva algebrica** affine (proiettiva) è una varietà algebrica affine (proiettiva) irriducibile di dimensione 1.

Su una varietà in  $\mathbb{C}^n$  o in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è definita anche la topologia classica. Si possono dare delle carte negli intorno dei punti regolari in modo che le funzioni di transizione siano oloedriche [M1, §1B, corol. 1.26]. Queste carte sono omeomorfismi per la topologia classica. L'aperto di Zariski dei punti regolari è quindi una varietà complessa. Le varietà regolari sono varietà complesse. Le curve regolari sono superfici di Riemann, quelle proiettive sono superfici di Riemann compatte. Le curve proiettive regolari sono molto importanti in quello che segue, considerando che ogni curva proiettiva ha una curva regolare che le è equivalente a meno di mappe birazionali.



### 2.3.1 Alcune proprietà delle curve

**Lemma 114.** *Sia  $\varphi : V \rightarrow C$  un morfismo fra una varietà irriducibile e una curva. Se  $\exists x, y \in V : \overline{\{P(x)\}} \neq \overline{\{Q(x)\}}$  la mappa  $\varphi$  è dominante. Se  $k = \mathbb{K}$  e  $\varphi$  non è costante è dominante.*

*Dim :* Per la proposizione 78 la chiusura dell'immagine è una varietà irriducibile. Non può essere di dimensione 0 quindi avrà dimensione 1, quindi è tutta  $W$ .  $\square$

**Proposizione 115.** *Sia  $V \subset \mathbb{K}^n$  varietà irriducibile,  $\dim V > 0$ ,  $x \in V$  e  $W \subsetneq V$ ,  $W$  varietà. Allora esiste una curva  $C \subset V$ ,  $x \in C \not\subseteq W$ .*

*Dim :* Per induzione sulla dimensione di  $W$ . Se  $W = \emptyset$  o  $\dim W = 0$  per il teorema 62 trovo una curva che contiene  $x$ , che non può essere contenuta in  $W$ . Altrimenti supponiamo la proposizione vera per  $\dim W < n$  e dimostriamo che è vera per  $\dim W = n$ . Prendo un polinomio  $P \in \mathcal{J}(\overline{\{x\}}) \setminus \mathcal{J}(W)$ .  $P|_V : V \rightarrow \mathbb{K}$  è un morfismo.  $P|_V(x) = 0$  e esiste  $y \in W : P|_V(y) \neq 0$ . Per il lemma 114  $P|_V$  è dominante e per il teorema 79 se  $D$  è una componente irriducibile di  $P|_V^{-1}(0)$  che contiene  $x$ ,  $\dim D \geq \dim V - 1 \geq n$ .  $W \ni y \notin D$ , quindi  $W_0 = W \cap D \subsetneq W \Rightarrow \dim W_0 < n \Rightarrow W_0 \subsetneq D$ . Ora basta applicare il teorema con  $W = W_0$  e  $V = D$ .  $\square$

**Corollario 116.** *Sia  $\varphi : V \rightarrow C$  un morfismo dominante fra una varietà irriducibile e una curva. Esiste una curva  $D \subset V$  tale che  $\varphi|_D$  sia dominante.*

*Dim :* Prendo  $y \in \varphi(V)$  e  $x \in W = \varphi^{-1}(y) \not\subseteq V$ . Per la proposizione precedente esiste una curva  $D$  che contiene  $x$  non contenuta in  $W$ ,  $\exists z \in D : z \notin W$ .  $\overline{\varphi(x)} \neq \overline{\varphi(z)}$  quindi  $\varphi|_D$  è dominante.  $\square$

**Proposizione 117.** *Se  $V$  è una varietà (affine o proiettiva) definita su  $\mathbb{C}$ , e  $x \in V$  è un punto regolare, l'anello locale  $\mathcal{O}_{x,V}$  è un anello a fattorizzazione unica.*

*Dim :* [M1, §1C, thm. 1.28].  $\square$

Sia  $C$  una curva definita su  $\mathbb{C}$  e  $x \in C$  un punto regolare. L'anello  $\mathcal{O}_{x,C}$  non è un campo, è a fattorizzazione unica, quindi ha un elemento irriducibile  $\pi$ , che è anche primo.  $(\pi)$  è un ideale primo, ma  $\mathcal{O}_{x,C}$  è un anello locale di dimensione 1 (corollario 63) quindi ha un unico ideale primo, che è  $m_{x,C}$ . Quindi se  $p$  è un altro elemento irriducibile  $(p) = m_{x,C} = (\pi)$ . Quindi tutti gli irriducibili generano lo stesso ideale, quindi sono associati. In questo caso la proprietà di fattorizzazione unica dice che un  $R \in \mathcal{O}_{x,C} \setminus \{0\}$  si scrive in maniera unica come  $R = u\pi^{d(R)}$ ,  $u$  invertibile,  $d(R) \in \mathbb{N}$ , inoltre  $d : \mathcal{O}_{x,C} \rightarrow \mathbb{N}$  non dipende dalla scelta di  $\pi$ .

**Proposizione 118.** *Esiste una funzione  $d : \mathcal{O}_{x,C} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che fissato un qualunque irriducibile  $\pi \in \mathcal{O}_{x,C}$ , ogni  $R \in \mathcal{O}_{x,C} \setminus \{0\}$  si scrive in maniera unica come  $R = u\pi^{d(R)}$ , con  $u$  invertibile. Inoltre  $\mathcal{O}_{x,C}$  è un anello euclideo con  $d$  come funzione grado.*

*Dim* : Sfruttando l'unicità della fattorizzazione. □

### 2.3.2 Il modello proiettivo regolare di una curva affine

In questa sottosezione considereremo solo curve definite su  $\mathbb{C}$ .

**Proposizione 119.** *Una mappa razionale che ha come dominio una curva proiettiva definita su  $\mathbb{C}$  ha come punti regolari tutti i punti regolari della curva. Se la curva è regolare ogni mappa razionale è un morfismo. In particolare una mappa birazionale fra due curve regolari è un isomorfismo.*

*Dim* : Siccome una curva ha dimensione 1, l'insieme fondamentale di una mappa razionale è vuoto, quindi per il teorema 110 tutti i punti regolari per la curva lo sono anche per la mappa. □

**Corollario 120.** *Un elemento del campo delle funzioni di una curva regolare  $C$  è un morfismo  $C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .*

*Dim* : per la prop. 106 un elemento del campo delle funzioni è una mappa razionale. □

**Definizione 121.** Data una curva proiettiva  $C$  definita su  $\mathbb{C}$  un **modello regolare** di  $C$  è una mappa birazionale fra  $C$  e una curva proiettiva regolare.

**Teorema 122.** *Una curva proiettiva definita su  $\mathbb{C}$  ammette sempre un modello regolare.*

*Dim* : [M1, §7A, thm. 7.5] □

Fra due modelli regolari di una curva  $C$  c'è una mappa birazionale, quindi per la proposizione precedente, sono isomorfi fra di loro. Il modello proiettivo di  $C$  è quindi ben definito come varietà proiettiva astratta, e si indica con  $\tilde{C}$ . L'inverso della mappa birazionale  $C \rightarrow \tilde{C}$  sarà indicato con  $j : \tilde{C} \rightarrow C$  ed è un morfismo birazionale.

Ogni curva affine definita su  $\mathbb{C}$  ha un completamento proiettivo. Questo completamento dipende però dall'immersione, non è ben definito per curve astratte. Date due diverse immersioni di una curva astratta  $C$ , fra i completamenti proiettivi si costruisce una mappa birazionale, perché hanno lo stesso campo delle funzioni, ma non sempre un isomorfismo. Se però passiamo ai modelli regolari, le mappe birazionali diventano isomorfismi. Risulta quindi ben definita una curva proiettiva astratta  $\tilde{C}$ , che si chiama **modello proiettivo regolare** della curva affine astratta  $C$ . Per costruzione c'è una immersione  $i : C_0 \hookrightarrow \tilde{C}$  dove con  $C_0$  si intende l'insieme dei punti regolari di  $C$ . C'è anche un  $\mathbb{C}$ -isomorfismo di campi  $\mathbb{C}(C) \simeq \mathbb{C}(\tilde{C}) \simeq \mathbb{C}(\tilde{C})$ . L'immagine dell'anello  $\mathcal{A}_C$  per questo isomorfismo di campi sarà indicata con  $\mathbb{C}[\tilde{C}]$ .

**Proposizione 123.** *Un morfismo fra una curva affine  $C$  definita su  $\mathbb{C}$  e una varietà affine  $V \subset \mathbb{C}^n$   $\varphi : C \rightarrow V$  induce un unico morfismo  $\hat{\varphi} : \tilde{C} \rightarrow \bar{V}$  che coincide con  $\varphi$  sui punti regolari di  $C$ . Se anche  $V$  è una curva si può*

comporre questo morfismo con la mappa birazionale  $\bar{V} \rightarrow \tilde{V}$  ottenendo una mappa razionale  $\tilde{\varphi} : \tilde{C} \rightarrow \tilde{V}$  che è un morfismo. Se  $\varphi$  è dominante  $\hat{\varphi}$  e  $\tilde{\varphi}$  sono surgettive.

*Dim* : Con la proposizione 107 si costruisce una mappa razionale  $\bar{C} \rightarrow \bar{V}$ . Componendo con la mappa razionale  $\tilde{C} \rightarrow \bar{C}$  si ottiene il morfismo cercato. La surgettività si ottiene dal teorema 104.  $\square$

**Definizione 124.** Data una curva affine  $C \subset \mathbb{C}^n$  definita su  $\mathbb{C}$  definisco i **punti ideali** di  $\tilde{C}$  come  $j^{-1}(\bar{C} \setminus i(C)) \subset \tilde{C}$ .

**Proposizione 125.** *L'insieme dei punti ideali è non vuoto.*

*Dim* : Con la proposizione 96.  $\square$

**Proposizione 126.** *Se  $\varphi : D \rightarrow C$  è un morfismo fra curve affini l'immagine inversa sotto  $\tilde{\varphi}$  di ogni punto ideale di  $\tilde{C}$  è fatta di punti ideali di  $\tilde{D}$ .*

*Dim* : Basta far vedere che un punto non ideale  $x \in D$  non viene mai mandato in un punto ideale di  $C$ . La mappa  $\tilde{\varphi}$  è costruita come composizione di un morfismo  $j : \tilde{D} \rightarrow \bar{D}$  e di una mappa razionale  $\bar{D} \rightarrow \bar{C}$ .  $j(x) \in i(D)$  perché  $x$  non è ideale, ma su  $i(D)$  la mappa razionale coincide con  $\varphi$  quindi  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(j(x)) \in i(C)$ , non è un punto ideale.  $\square$

**Corollario 127.** *L'insieme dei punti ideali non dipende dall'immersione, quindi sono ben definiti i **punti ideali** per curve affini astratte.*

*Dim* : Applicando la proposizione precedente ad un isomorfismo fra due immersioni della stessa curva astratta.  $\square$

**Corollario 128.** *Se  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{C}$  è un morfismo  $\tilde{\varphi} : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  è un morfismo i cui poli sono contenuti nell'insieme dei punti ideali di  $\tilde{C}$ .*

*Dim* : Il modello proiettivo regolare di  $\mathbb{C}$  è  $\mathbb{CP}^1$  e come punti ideali c'è solo il punto  $\infty$ .  $\square$

Se  $\varphi \in \mathcal{A}_C$  l'immagine di  $\varphi$  tramite l'isomorfismo dei campi delle funzioni corrisponde alla funzione  $\tilde{\varphi}$ .

**Proposizione 129.** *Un punto  $x \in \tilde{C}$  è ideale  $\Leftrightarrow$  esiste una funzione in  $\mathbb{C}[\tilde{C}]$  che ha un polo in  $x$ .*

*Dim* :  $\Leftarrow$ : Segue dalla proposizione precedente.

$\Rightarrow$ : Immergendo  $C \subset \mathbb{C}^n$ , un punto di  $\bar{C} \setminus i(C)$  è della forma  $x = [0 : x_1 : \dots : x_n]$ , e esiste un  $i$  tale che  $x_i \neq 0$ . Il polinomio  $X_i$  induce una funzione in  $\mathcal{A}_C$  ha un polo in  $x$ .  $\square$

**Proposizione 130.** *Se  $\varphi : C \rightarrow V$  è un morfismo fra una curva affine e una varietà affine definite su  $\mathbb{C}$ , scegliendo un'immersione  $C \subset \mathbb{C}^n$ , per ogni punto non ideale  $x \in \tilde{C}$  (ossia un punto in cui  $j(x) \in i(C)$ )  $\hat{\varphi}(x) = \varphi(i^{-1}(j(x)))$ .*

*Dim* : con lo stesso ragionamento della dimostrazione della proposizione 126.  $\square$

### 2.3.3 Curve Piane

Una curva  $C \subset \mathbb{C}^2$  si dice una curva piana. Per la proposizione 65 esiste un polinomio irriducibile  $P_C \in \mathbb{C}[x, y]$  che si annulla esattamente su  $C$ .

Prendiamo un polinomio  $P \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $P(x, y) = \sum_{n,m} b_{mn} x^m y^n$ . Definisco

l'insieme  $\mathcal{N}_P = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid b_{mn} \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definizione 131.** Il **poligono di Newton** del polinomio  $P$  è l'involuppo convesso di  $\mathcal{N}_P$  in  $\mathbb{R}^2$ . I **lati** del poligono di Newton sono i segmenti di retta che costituiscono il bordo del poligono. La **pendenza** di un lato è il coefficiente angolare della retta che lo contiene, in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Dico che un lato si trova **sotto** il poligono se ha pendenza negativa e se il punto  $(0, 0)$  appartiene al semipiano individuato dal lato che non contiene il poligono, dico che un lato si trova **sopra** il poligono se ha pendenza negativa e non si trova sotto.

La moltiplicazione o divisione di un polinomio per  $x$  o  $y$  fa traslare il suo poligono di Newton, senza cambiare le pendenze dei lati. Dato un polinomio  $P$ , se esistono lati sotto il poligono è chiaro che  $(0, 0) \notin \mathcal{N}_P$ , e quindi che  $P$  si annulla in  $(0, 0)$ . Se  $P$  non è divisibile per  $x$  né per  $y$  vale anche il viceversa, ossia che se  $P$  si annulla in  $(0, 0)$ , allora esistono lati sotto il poligono.

Supponiamo ora che  $P$  sia un polinomio non divisibile per  $x$  né per  $y$  e che si annulli in  $(0, 0)$ . Il suo luogo di zeri  $\mathcal{V}((P))$  è un'unione finita di curve piane, alcune delle quali passano per  $(0, 0)$ . I lati che sono sotto il poligono possono dare alcune informazioni su queste curve.

**Definizione 132.** Se  $C$  è una curva piana che passa per  $(0, 0)$  e  $P$  è un polinomio che si annulla su  $C$ , una **parametrizzazione di Puiseux** di  $C$  **centrata** in  $(0, 0)$  è una coppia  $(x, y) \in \mathbb{C}[[t]] \times \mathbb{C}[[t]]$  che verifichi

1.  $P(x, y) = 0$
2. esistono  $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e una successione  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ,  $a_0 \neq 0$  tali che
$$x(t) = t^p, y(t) = t^q \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i.$$
3. esiste  $V \subset \mathbb{C}$  intorno aperto di 0 tale che  $x(t)$  e  $y(t)$  convergono su  $V$  e  $\forall t \in V (x(t), y(t)) \in C$ .

Fissiamo una parametrizzazione di Puiseux  $(x, y)$  centrata in  $(0, 0)$  di una curva  $C$ . Preso un elemento  $R \in \mathbb{C}(C)$ , esistono polinomi  $S, T \in \mathbb{C}[x, y]$  tali che  $R = \frac{S}{T}$  in tutti i punti in cui  $R$  ha un valore. Possiamo allora definire  $R(t) = \frac{S(x(t), y(t))}{T(x(t), y(t))} = t^n E(t)$ , con  $E(t)$  serie di potenze con termine noto non nullo. Il numero  $n = o(R)$  si dice **ordine** della funzione  $R$ , e non dipende dalla scelta dei polinomi  $S, T$  (vedi [Le]). Indicando con  $x, y \in \mathbb{C}(C)$

gli elementi del campo delle funzioni corrispondenti alle funzioni coordinate abbiamo che  $o(x) = p$  e  $o(y) = q$ .

I lati che sono sotto il poligono di Newton di un polinomio  $P$  (non divisibile per  $x$  né per  $y$  e che si annulli in  $0$ ) danno informazioni su quali sono le parametrizzazioni di Puiseaux centrate in  $(0, 0)$  delle curve contenute in  $\mathcal{V}((P))$ .

**Proposizione 133.** *Sia  $P$  un polinomio non divisibile per  $x$  né per  $y$  e che si annulli in  $(0, 0)$ . Allora esiste una curva  $(0, 0) \in C \subset \mathcal{V}((P))$  con una parametrizzazione di Puiseaux con parametri  $p$  e  $q \Leftrightarrow$  esiste un lato che sta sotto il poligono di Newton di  $P$  con pendenza  $-\frac{p}{q}$ .*

*Dim :* [CCGLS, par. 3.3].  $\Rightarrow$ : Sia  $P(x, y) = \sum_{n,m} b_{mn} x^m y^n$ . Supponiamo

che esista la parametrizzazione  $(x, y)$  con parametri  $p, q$ . So che vale l'equazione  $P(x(t), y(t)) = 0$ . Per svolgere i conti è utile introdurre il funzionale lineare  $f = f_{p,q} : \mathbb{R}^2 \ni (m, n) \rightarrow mp + nq \in \mathbb{R}$ .  $\ker f = \{(m, n) \mid \frac{m}{n} = -\frac{p}{q}\}$ , una retta con pendenza uguale a  $-\frac{p}{q}$ . Le "curve di livello" di  $f$  sono rette con la stessa pendenza. Abbiamo che

$$0 = P(x(t), y(t)) = \sum_{m,n} b_{mn} t^{f(m,n)} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right)^n$$

$P(x(t), y(t))$  è una serie di potenze in  $t$  con tutti i coefficienti nulli. Il monomio di grado piu' basso in  $t$  che vi compare ha grado  $d = \min_{(m,n) \in \mathcal{N}_P} f(m, n)$ . La retta  $r = \{(m, n) \mid f(m, n) = d\}$  è una retta che interseca il poligono di Newton di  $P$  in un vertice o in un lato che sta sotto al poligono. Il coefficiente di  $t^d$  in  $P(x(t), y(t))$  è  $\sum_{(m,n) \in r} b_{mn} a_0^n = 0$ . Sappiamo che  $a_0 \neq 0$ , quindi è necessario che almeno due coefficienti  $b_{mn}$  siano non nulli, quindi  $r$  interseca il poligono di Newton in un lato sotto il poligono con pendenza  $-\frac{p}{q}$ .

$\Leftarrow$ : Dobbiamo trovare i coefficienti della serie di potenze. Il calcolo di sopra mostra come trovare  $a_0$ , come radice di un polinomio. Scelta una qualunque radice come  $a_0$  si può iterare il procedimento e trovare gli altri elementi della successione  $a_n$ . Si può poi dimostrare che questa è una parametrizzazione di Puiseaux (vedi [Le] o [Ki]).

□



## Parte II

# Gli strumenti algebrici

## Capitolo 3

# Compattificazioni con valutazioni

### 3.1 Valutazioni

Siano  $k \subset \mathbb{F}$  due campi e  $k^* \subset \mathbb{F}^*$  i loro gruppi moltiplicativi. Sia  $(\Lambda, +, <)$  un gruppo ordinato, e  $\Lambda^+$  l'insieme degli elementi strettamente positivi di  $\Lambda$ .

**Definizione 134.** Una **valutazione** di  $\mathbb{F}$  su  $k$  è un omomorfismo di gruppi  $v : \mathbb{F}^* \rightarrow \Lambda$  tale che  $k^* \subset \ker v$  e  $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ .

Una valutazione è **triviale** se  $\ker v = \mathbb{F}^*$ .

L'immagine  $v(\mathbb{F}^*)$  è un gruppo, quindi si può supporre  $\Lambda = v(\mathbb{F}^*)$ .

**Definizione 135.** Una valutazione si dice **discreta** se  $\Lambda$  è discreto. Il **rango** di una valutazione è il rango di  $\Lambda$ . Una valutazione discreta di rango 1 è una valutazione in cui  $\Lambda = \mathbb{Z}$ .

Due valutazioni  $v : \mathbb{F}^* \rightarrow \Lambda$  e  $v' : \mathbb{F}^* \rightarrow \Lambda'$  si dicono **equivalenti** se esiste  $\varphi : \Lambda \hookrightarrow \Lambda'$  isomorfismo di gruppi ordinati tale che  $\forall x \in \mathbb{F}^* \varphi(v(x)) = v'(x)$ .

**Proposizione 136. (Proprietà delle valutazioni)** *Alcune proprietà elementari delle valutazioni:*

- $v(-1) = 0 \Rightarrow v(-x) = v(x)$ .
- $v(x - y) \geq \min(v(x), v(y))$ .
- $v(\frac{y}{x}) = v(y) - v(x) \Rightarrow v(x^{-1}) = -v(x)$
- $v(x) < v(y) \Rightarrow v(x + y) = v(x)$

*Dim :* [ZS2, VI§8, pag. 33,34] □

**Proposizione 137.** *Se  $v$  è una valutazione di  $\mathbb{F}$  su  $k$  allora il rango di  $v$  è minore o uguale del grado di trascendenza di  $\mathbb{F}$  su  $k$ .* □



L'insieme  $\mathcal{O}_v = \{x \in \mathbb{F} \mid v(x) \geq 0\}$  è un anello detto **anello di valutazione** di  $v$ . Questo anello determina la valutazione a meno di equivalenza (vedi [ZS2, VI§8, pag. 34]). Per  $x \in \mathbb{F}^*$   $v(x)$  si dice ordine di  $x$  in  $v$ . Siccome per ogni  $x \in \mathbb{F}$  vale  $v(x) \geq 0$  o  $v(x) \leq 0$ , segue che o  $x$  o  $x^{-1}$  sono in  $\mathcal{O}_v$ .  $x$  e  $x^{-1}$  sono entrambi in  $\mathcal{O}_v \Leftrightarrow v(x) = 0$ . Quindi  $\ker v = \mathcal{O}_v^*$ , l'insieme degli elementi invertibili.

**Proposizione 138.** *Se  $x, y \in \mathcal{O}_v$  vale che  $\exists z : y = xz \Leftrightarrow v(y) \geq v(x)$ . Quindi nell'anello  $\mathcal{O}_v$  l'ideale  $(x) = \{y \mid y = zx\} = \{y \mid v(y) \geq v(x)\}$ , e  $(x) = (y) \Leftrightarrow v(x) = v(y)$ . Inoltre se  $I \subsetneq \mathcal{O}_v$  è un ideale, se contiene un elemento contiene tutti quelli con valutazione maggiore o uguale. Quindi gli ideali principali propri sono in corrispondenza biunivoca con  $\Lambda^+$ , e gli ideali sono in corrispondenza biunivoca con i segmenti finali di  $\Lambda^+$ , gli insiemi  $S$  tali che se  $\lambda \in S$  e  $\delta > \lambda \Rightarrow \delta \in S$ . L'ideale  $m_v = \{x \mid v(x) > 0\}$  è l'unico ideale massimale di  $\mathcal{O}_v$ , che è quindi un anello locale.*

*Dim :* Segue dalla proposizione precedente. □

**Corollario 139.** *Se  $v$  è discreta di rango 1 (cioè con  $\Lambda = \mathbb{Z}$ ), tutti gli ideali sono principali e preso un elemento  $\pi$  con  $v(\pi) = 1$ , abbiamo  $m_v = (\pi)$ , e ogni ideale è della forma  $I = m_v^n = (\pi^n)$ .* □

**Esempio 140 (Valutazione associata ad un punto regolare di una curva).** Prendiamo una curva algebrica proiettiva  $C$  definita su  $\mathbb{C}$ . Sia  $\mathbb{F} = \mathbb{C}(C)$  il campo delle funzioni di  $C$ . Un punto regolare  $x \in C$  definisce una valutazione di  $\mathbb{F}$  su  $\mathbb{C}$  discreta di rango 1 che ha come anello di valutazione proprio l'anello locale  $\mathcal{O}_{x,C}$ . Infatti la proposizione 118 definisce una funzione  $d : \mathcal{O}_{x,C} \rightarrow \mathbb{N}$ . Se  $R \in \mathbb{F}^*$ ,  $R = \frac{P}{Q}$  con  $P, Q \in \mathcal{O}_{x,C}$ , quindi  $R = \frac{u\pi^{d(P)}}{u'\pi^{d(Q)}} = u''\pi^{d(P)-d(Q)} = u''\pi^{v_x(R)}$  in maniera unica con  $u''$  invertibile. La funzione  $v_x : \mathbb{F}^* \rightarrow \mathbb{Z}$  è una valutazione. Si vede bene che è un omomorfismo di gruppi e che è nulla su  $\mathbb{C}$ . Se  $R, S \in \mathbb{F}^*$  e  $v_x(R) \leq v_x(S)$   $R + S = u\pi^{v_x(R)} + u'\pi^{v_x(S)} = \pi^{v_x(R)}(u + u'\pi^{v_x(S)-v_x(R)})$ , e l'ultimo fattore è invertibile, perché non si trova in  $m_{x,C}$ . Quindi  $v_x$  è una valutazione, detta valutazione  $\pi$ -adica (per le valutazioni  $p$ -adiche in generale vedi [ZS2, VI§9, es. 2]). Abbiamo che  $\mathcal{O}_{v_x} = \mathcal{O}_{x,C}$  e  $m_{v_x} = m_{x,C}$ .

Se la curva è regolare ogni punto definisce una valutazione discreta di rango 1. Se  $\tilde{C}$  è il modello proiettivo della curva affine  $C$ , un punto  $x \in C$  è ideale  $\Leftrightarrow \mathbb{C}[\tilde{C}] \not\subset \mathcal{O}_{v_x}$ .

**Esempio 141.** Prendiamo una curva piana  $C \subset \mathbb{C}^2$ , che non sia l'asse  $x$  o l'asse  $y$  e tale che  $(0, 0) \in C$ , e sia  $(x, y) \in \mathbb{C}[[t]] \times \mathbb{C}[[t]]$  una parametrizzazione di Puiseux per  $C$  centrata in  $(0, 0)$  con parametri  $p, q$ . Nella sottosezione 2.3.3 abbiamo visto come definire una funzione  $o : \mathbb{C}(C) \rightarrow \mathbb{Z}$  detta ordine. Questa funzione è una valutazione, che quindi indicherò con  $v = o$ . Vale che  $v(x) = p$  e  $v(y) = q$

Per varietà di dimensione maggiore non è così semplice definire delle valutazioni in corrispondenza dei punti.

**Teorema 142. (Estensione di valutazioni)** *Sia  $v : \mathbb{F}^* \rightarrow \Lambda$  una valutazione e sia  $\mathbb{K}$  un'estensione finitamente generata di  $\mathbb{F}$ . Allora esistono un  $n \in \mathbb{N}$ , un gruppo abeliano ordinato  $\overline{\Lambda}$ , un'immersione  $i : \Lambda \hookrightarrow \overline{\Lambda}$  con  $n\overline{\Lambda} \subset i(\Lambda)$  e una valutazione  $w : \mathbb{K}^* \rightarrow \overline{\Lambda}$  con  $w|_{\mathbb{F}^*} = i \circ v$ . Se  $\Lambda = \mathbb{Z}$  anche  $\overline{\Lambda} = \mathbb{Z}$  e esiste un  $d \in \mathbb{N}$  tale che  $i(\lambda) = n\lambda$ .*

*Dim :* [MS1, lemma II.4.4]. □

## 3.2 Posti

**Definizione 143.** Siano  $k \subset \mathbb{F}$  due campi. Un **posto** di  $\mathbb{F}$  su  $k$  è un omomorfismo di  $k$ -algebre  $\mathcal{P} : \mathbb{F}_{\mathcal{P}} \rightarrow \Delta$  con  $k \subset \mathbb{F}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{F}$ ,  $k \subset \Delta$   $k$ -algebre, tale che per ogni  $x \in \mathbb{F}$   $x \notin \mathbb{F}_{\mathcal{P}} \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  e  $\mathcal{P}(x) = 0$ . (Il termine usato correntemente è la parola inglese “place”).

**Proposizione 144. (Proprietà dei posti)** *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Un posto non può essere esteso come  $k$ -omomorfismo: se  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}} \subset L \subset \mathbb{F}$  e  $\varphi : L \rightarrow \Delta'$ ,  $\Delta \subset \Delta'$  e  $\varphi$  estende  $\mathcal{P} \Rightarrow L = \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ .*
2. *L'immagine  $\mathcal{P}(\mathbb{F}_{\mathcal{P}})$  è un campo. Da ora in poi si assume  $\Delta = \mathcal{P}(\mathbb{F}_{\mathcal{P}})$ .*
3. *Se  $k \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ ,  $\mathcal{P}|_{\mathbb{F}_{\mathcal{P}} \cap \mathbb{K}}$  è un posto di  $\mathbb{K}$ .*
4. *Possiamo “estendere”  $\mathcal{P}$  a tutto  $\mathbb{F}$  ponendo  $\mathcal{P}(x) = \infty$  per ogni  $x \notin \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ , con queste proprietà:*
  - *Se  $\mathcal{P}(x) = \infty$  e  $\mathcal{P}(y) \neq \infty \Rightarrow \mathcal{P}(\pm x \pm y) = \infty$ .*
  - *Se  $\mathcal{P}(x) = \infty$  e  $\mathcal{P}(y) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{P}(xy) = \infty$ .*
  - *Se  $x \neq 0$  allora  $\mathcal{P}(x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}(\frac{1}{x}) = \infty$ .*

*Dim :* [ZS2, VI§2, pag. 4]. □

Si può supporre  $\Delta = \mathcal{P}(\mathbb{F}_{\mathcal{P}})$ . Questo campo si dice **campo residuo** di  $\mathcal{P}$ .

**Definizione 145.** Due posti  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  di  $\mathbb{F}$  su  $k$  si dicono **isomorfi** se esiste un  $k$ -isomorfismo di campi  $\varphi : \Delta \hookrightarrow \Delta'$  tale che per ogni  $x \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$   $\varphi(\mathcal{P}(x)) = \mathcal{P}'(x)$ .

$\mathcal{P}(x)$  si dice **valore** di  $x$  nel posto  $\mathcal{P}$  e  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  si dice **anello di valutazione** di  $\mathcal{P}$ . L'anello di valutazione determina il posto a meno di isomorfismi (vedi [ZS2, VI§2, pag. 6]). Un elemento  $x \in \mathbb{F}$  si dice **finito** in  $\mathcal{P}$  se  $\mathcal{P}(x) \neq \infty$ , altrimenti si dice che  $x$  ha un **polo** in  $\mathcal{P}$ . Un posto si dice **razionale** se  $\Delta = k$ , **triviale** se  $\Delta = \mathbb{F}$  (in questo caso  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}} = \mathbb{F}$  e  $\mathcal{P}$  è un isomorfismo).

Consideriamo l'anello  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ . Se  $x \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  e  $\mathcal{P}(x) \neq 0$  allora anche  $\frac{1}{x} \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ , quindi  $x$  è invertibile in  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ . Altrimenti  $x$  non è invertibile. Quindi  $m_{\mathcal{P}} = \ker \mathcal{P}$  è l'unico ideale massimale di  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$ .  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  è quindi un anello locale. Il quoziente iniettivo del posto  $\mathcal{P}$  è un isomorfismo fra  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}/m_{\mathcal{P}}$  e  $\Delta$ .

**Esempio 146.** Se  $v$  è una valutazione di  $\mathbb{F}$  su  $k$ , il quoziente  $\mathcal{O}_v/m_v = D_v$  è un campo e la proiezione nel quoziente  $\mathcal{P}_v$  è un posto. Abbiamo che  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}_v} = \mathcal{O}_v$  e  $m_{\mathcal{P}_v} = m_v$ .

Abbiamo visto come ad ogni valutazione si possa associare un posto, unico a meno di isomorfismi, con lo stesso anello di valutazione. Vale anche il viceversa, dato un posto si può dare una valutazione, unica a meno di equivalenza, con lo stesso anello di valutazione. Basta notare che l'insieme  $E = \mathbb{F}_{\mathcal{P}} \setminus m_{\mathcal{P}}$  è un sottogruppo moltiplicativo, e il quoziente  $v : \mathbb{F}^* \rightarrow \mathbb{F}^*/E = \Lambda$  è un gruppo a cui si può dare un ordinamento definendo  $\Lambda^+ = v(m_{\mathcal{P}})$ . Bisogna solo verificare che  $\Lambda^+$  così definito soddisfa la proprietà dell'insieme degli elementi positivi di un gruppo ordinato e che  $v$  è una valutazione (vedi [ZS2, VI§9, pag. 35]). Quindi valutazioni e posti sono essenzialmente la stessa cosa. In realtà si potrebbe dire ancora di più: se  $k \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{F}$  è un **anello di valutazione**, cioè se  $\forall x \in \mathbb{F} \ x \in \mathcal{O} \text{ o } x^{-1} \in \mathcal{O}$ , allora  $\mathcal{O}$  è un posto di  $\mathbb{F}$  su  $k$  (e quindi una valutazione) con anello di valutazione  $\mathcal{O}$  (vedi [ZS2, VI§2, thm. 1]).

**Esempio 147.** Prendiamo una curva algebrica proiettiva  $C$  definita su  $\mathbb{C}$ . Sia  $\mathbb{F} = \mathbb{C}(C)$  il campo delle funzioni di  $C$ . Un punto regolare  $x \in C$  definisce un posto razionale di  $\mathbb{F}$  su  $\mathbb{C}$ . Infatti ogni elemento di  $\mathbb{F}$  è una funzione ben definita nel punto  $x$ , quindi se  $\mathcal{O}_{x,C}$  è l'anello locale di  $C$ ,  $\mathcal{P}_x : \mathcal{O}_{x,C} \ni R \rightarrow R(x) \in \mathbb{C}$  è un posto di  $\mathbb{F}$ , con campo residuo un sottocampo di  $\mathbb{C}$  e anello di valutazione  $\mathbb{F}_{\mathcal{P}_x} = \mathcal{O}_{x,C}$ .

Applicando la costruzione dell'esempio precedente alla valutazione definita dal punto regolare  $x$  otteniamo ancora un posto di  $\mathbb{F}$  con lo stesso anello di valutazione, quindi i due posti sono isomorfi.

Abbiamo detto che valutazioni e posti sono essenzialmente la stessa cosa, ma servono a mettere in evidenza proprietà diverse. Nel caso dei campi di funzioni delle curve ad esempio, se  $x$  è un punto regolare sia la valutazione  $v_x$ , sia il posto  $\mathcal{P}_x$  definiscono una partizione del campo delle funzioni  $\mathbb{F}$  in tre insiemi:  $\mathbb{F} \setminus \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O} \setminus m$ ,  $m$ , che sono rispettivamente gli insiemi delle funzioni che hanno un polo in  $x$ , quelle finite non nulle, e quelle che si annullano. All'interno di questi tre insiemi valutazioni e posti danno informazioni di tipo diverso: i posti distinguono fra loro le funzioni finite e non nulle, indicando il loro valore, ma trattano allo stesso modo tutte quelle nulle e quelle che hanno un polo. Le valutazioni non distinguono i valori delle funzioni finite non nulle, ma indicano l'ordine di zero o di polo delle funzioni che ne hanno. Tutto questo però si riesce a fare in maniera così semplice

solo in dimensione 1, ma in qualche modo bisogna cercare di farlo anche in dimensione maggiore. . . .

### 3.3 Varietà di dimensione maggiore di 1

**Esempio 148.** Per varietà di dimensione maggiore di uno non sempre il valore di una funzione razionale è ben definito in un certo punto. Basta pensare alla funzione  $R = \frac{X_2}{X_1}$  su  $\mathbb{C}^2$ , e prendere il punto 0. Infatti avvicinandoci a 0 con una successione di punti che si trovano su una retta del tipo  $(x_1, \lambda x_2)$ , la funzione  $R$  tende a  $\lambda$ , qualunque sia  $\lambda$ . Volendo definire un posto corrispondente al punto 0 è difficile scegliere il valore da assegnare ad  $R$ .

**Teorema 149. (Esistenza di posti)** *Sia  $A$  un anello,  $k \subset A \subset \mathbb{F}$ , e  $I \subsetneq A$  un ideale. Esiste un posto  $\mathcal{P}$  tale che  $A \subset \mathbb{F}_{\mathcal{P}}$  e  $I = m_{\mathcal{P}} \cap A$ .*

*Se  $\varphi$  è un  $k$ -omomorfismo,  $\varphi : A \rightarrow \Delta$ ,  $k \subset \Delta$ , esiste un posto con campo residuo contenente  $\Delta$  che estende  $\varphi$ . In particolare se  $\mathbb{K} \subset \mathbb{F}$  un posto su  $\mathbb{K}$  si può sempre estendere ad un posto su  $\mathbb{F}$ .*

*Dim :* [ZS2, VI§4, thm. 5]. □

**Esempio 150.** Applichiamo il teorema precedente al caso  $\mathbb{F} = k(V)$ ,  $A = \mathcal{O}_{x,V}$ , con  $V$  varietà affine irriducibile,  $x \in V$ . Come  $\varphi$  prendiamo la funzione che associa ad un elemento di  $A$  il suo valore, che è ben definito perché in  $A$  ci sono solo funzioni con denominatore che non si annulla in  $x$ . Abbiamo che esiste un posto che estende  $\varphi$ , quindi che assegna ad ogni funzione che ha un valore ben definito proprio il suo valore. Però non sappiamo proprio cosa fa questo posto sulle altre funzioni. Come prima possiamo passare alla valutazione definita da questo posto, ma in generale non sarà una valutazione discreta di rango 1. Inoltre questo posto non è univocamente determinato dal punto  $x$ , quindi questo non è un buon modo di assegnare un posto in corrispondenza di un punto di una varietà di dimensione maggiore di 1.

#### 3.3.1 Successioni e valutazioni

Sia  $V \subset \mathbb{C}^n$  una varietà irriducibile definita sul campo numerabile  $k \subset \mathbb{C}$  (si può pensare  $k = \mathbb{Q}$ ). Nel seguito quando si parlerà di convergenze o di topologia di  $V$  ci si riferirà alla topologia classica. Vogliamo trovare un modo di descrivere le valutazioni del campo  $\mathbb{F} = k(V)$ .

**Definizione 151.** Una successione  $k$ -**valutante** è una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di punti  $k$ -generici di  $V$  tale che per ogni  $f \in \mathbb{F}$  esiste il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . (La condizione che il punto  $x$  sia  $k$ -generico garantisce che  $f$  sia ben definita in  $x$  e che  $f(x) \in \mathbb{K} \setminus k$ ).

Se  $\{x_n\}$  è una successione valutante possiamo definire la funzione  $\mathcal{P}_{\{x_n\}} : \mathbb{F} \ni f \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Scrivo  $\mathcal{O} = \{f \in \mathbb{F} \mid \mathcal{P}_{\{x_n\}}(f) \neq \infty\}$ .  $\mathcal{P}_{\{x_n\}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$  è un posto di  $\mathbb{F}$  su  $k$ , e determina univocamente una valutazione  $v_{\{x_n\}}$ . Siccome  $\mathbb{F}$  ha grado di trascendenza finito su  $k$ ,  $v_{\{x_n\}}$  ha rango finito.

**Esempio 152.** Esistono delle successioni valutanti, infatti basta prendere una successione di punti generici che tende ad un punto generico (esiste, i punti generici sono densi), questa è una successione valutante. La valutazione associata è la valutazione triviale.

**Proposizione 153.** Ogni valutazione di  $\mathbb{F}$  su  $k$  è determinata da una successione  $k$ -valutante.

*Dim :* [MS1, corol. 1.2.3] □

**Proposizione 154.** Sia  $\{x_n\} \subset V$  una successione valutante, e sia  $v = v_{\{x_n\}}$  la valutazione determinata dalla successione. Se  $f, g \in \mathbb{F}$  sono tali che  $v(f) \leq 0$  e  $v(g) < 0$  (ossia  $\mathcal{P}_{\{x_n\}}f \neq 0$  e  $\mathcal{P}_{\{x_n\}}g = \infty$ ), allora si può calcolare il rapporto  $\frac{v(f)}{v(g)}$  (definito nella sottosezione 1.4.1), e si ottiene:

$$\frac{v(f)}{v(g)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(x_n)|}{\log |g(x_n)|}$$

*Dim :* [MS1, prop. 1.2.1] □

**Definizione 155.** Una valutazione  $v : \mathbb{F} \rightarrow \Lambda$  ha **supporto all'infinito** se  $k[V] \not\subset \mathcal{O}_v$ .

**Proposizione 156.** Sia  $v$  una valutazione di  $\mathbb{F}$  su  $k$ .  $v$  ha supporto all'infinito  $\Leftrightarrow$  è determinata da una successione  $k$ -valutante  $\{x_n\} \subset V$  che è illimitata in  $\mathbb{C}^n$  (o equivalentemente che è definitivamente fuori da ogni compatto di  $V$ ).

*Dim :* [MS1, prop. 1.2.4]. Sia  $\{x_n\}$  una successione che determina  $v$ .  $v$  ha supporto all'infinito  $\Leftrightarrow$  esiste  $f \in k[V], f \notin \mathcal{O}_v \Leftrightarrow$  esiste  $f \in k[V]$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty \Leftrightarrow \{x_n\}$  è illimitata. □

**Definizione 157.** Una successione  $k$ -prevalutante è una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V$  che verifica:

1.  $\forall f \in k[V]$  esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .
2. Se  $f, g \in k[V]$  verificano  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$  allora esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(x_n)|}{\log |g(x_n)|} \in [0, \infty]$ .

Da notare che nella definizione precedente si usano solo funzioni in  $k[V]$ , per garantire che siano ben definite sui punti della successione. Infatti queste successioni sono fatte di punti non necessariamente generici.

Sia  $\{x_n\}$  una successione illimitata. Siccome  $k[V]$  è numerabile, con un procedimento diagonale possiamo estrarne una sottosuccessione che sia illimitata e  $k$ -prevalutante.

**Proposizione 158.** *Sia  $\{x_n\}$  una successione  $k$ -prevalutante. Esiste una successione  $k$ -valutante  $\{x'_n\}$  tale che:*

$$1. \forall f \in k[V] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

$$2. \forall f, g \in k[V] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(x'_n)|}{\log |g(x'_n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(x_n)|}{\log |g(x_n)|}$$

*Dim :* Siccome i punti generici sono densi e  $k[V]$  è numerabile trovo una successione di punti generici che verificano le condizioni. Poi, siccome anche  $\mathbb{F}$  è numerabile riesco ad estrarne una sottosuccessione  $k$ -valutante.  $\square$

**Definizione 159.** Sia  $v$  una valutazione di  $\mathbb{F}$  su  $k$  e  $\{x_n\}$  una successione illimitata e  $k$ -prevalutante.  $v$  si dice **compatibile** con  $\{x_n\}$  se:

1.  $v$  ha supporto all'infinito.
2.  $\forall f \in k[V] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \infty \Leftrightarrow v(f) \geq 0$ .
3.  $\forall f \in k[V] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0 \Leftrightarrow v(f) > 0$ .
4. Se  $f, g \in k[V]$  verificano  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \infty$  allora
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(x_n)|}{\log |g(x_n)|} = \frac{v(f)}{v(g)}$$

**Proposizione 160.** *Per ogni successione  $\{x_n\}$  illimitata e  $k$ -prevalutante esiste una valutazione  $v$  compatibile con  $\{x_n\}$ .*

*Dim :* Segue dalle 3 proposizioni precedenti.  $\square$

### 3.4 Compattificazioni determinate da una mappa

Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto. Una **compattificazione** di  $X$  è una mappa  $\eta : X \rightarrow Y$  con  $Y$  spazio compatto di Hausdorff e  $\eta$  un omeomorfismo di  $X$  in un aperto denso di  $Y$ . Indico la compactificazione di Alexandrov di  $X$  con  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ .

Prendiamo uno spazio di Hausdorff  $\mathcal{P}$  e una mappa continua  $f : X \rightarrow \mathcal{P}$  con immagine relativamente compatta in  $\mathcal{P}$ . A partire da  $f$  possiamo costruire una compactificazione dello spazio  $X$ , che sarà chiamata compactificazione di  $X$  **determinata** da  $f$ .

Considero la mappa  $i : X \ni x \rightarrow (x, f(x)) \in \hat{X} \times \mathcal{P}$ . La compactificazione avrà come spazio di arrivo  $Y = \overline{i(X)}$ , la chiusura dell'immagine di  $i$ , e come

mappa  $\eta$  la mappa  $i$  pensata come mappa a valori in  $Y$ .  $Y$  è un chiuso di  $\hat{X} \times \overline{f(X)}$ , e quindi è compatto. Indico con  $p_1 : \hat{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \hat{X}$  la proiezione sul primo fattore e definisco il chiuso  $B = p_{1|Y}^{-1}(\infty) \subset Y$ . Si dimostra che  $Y \setminus B = \eta(X)$ , e quindi che  $\eta(X)$  è un aperto denso di  $Y$ , quindi  $\eta$  è una compattificazione di  $X$ , la compattificazione determinata da  $f$ . I punti di  $B$  sono detti **punti ideali** della compattificazione.

Indico con  $p_2 : \hat{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  la proiezione sul secondo fattore.  $p_{2|B}$  è un omeomorfismo con l'immagine, quindi possiamo identificare  $B$  con un sottoinsieme di  $\mathcal{P}$ . Possiamo anche identificare  $X$  con  $\eta(X)$ , e quindi pensare  $Y$  come  $X \cup B$ . Nella topologia di  $Y$  una successione  $\{x_n\} \subset X$  tende ad un punto  $b \in B$  se e solo se  $x_n \rightarrow \infty$  in  $\hat{X}$  e  $f(x_n) \rightarrow b$  in  $B$ .

Se gli spazi  $X$ ,  $\hat{X}$  e  $\overline{f(X)}$  soddisfano il primo assioma di numerabilità (ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile) questo fatto è sufficiente a descrivere la topologia di  $Y$  a partire dalle topologie di  $X$  e  $B$ , e inoltre si può caratterizzare  $B$  visto come sottoinsieme di  $\mathcal{P}$  nel seguente modo:  $B = \{b \in \mathcal{P} \mid \exists \{x_n\} \subset X : x_n \rightarrow \infty \text{ in } \hat{X} \text{ e } f(x_n) \rightarrow b \text{ in } \mathcal{P}\}$ .

## 3.5 Caso di una varietà algebrica complessa

### 3.5.1 Lo spazio proiettivo

Sia  $J$  un insieme numerabile, e consideriamo lo spazio  $[0, \infty)^J$ , il prodotto topologico di semirette. È uno spazio di Hausdorff metrizzabile, non è compatto, ma i chiusi della forma  $\prod_{j \in J} [0, \alpha_j]$  sono compatti.

Indico con  $0$  il punto  $(0)_{j \in J}$ . Definisco la relazione di equivalenza  $\sim$  su  $[0, \infty) \setminus \{0\}$ :  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 : x = (t_j)_{j \in J}$  e  $y = (\alpha t_j)_{j \in J}$ , e considero la proiezione nel quoziente  $\pi : [0, \infty)^J \rightarrow ([0, \infty) \setminus \{0\}) / \sim = \mathcal{P}$ , uno spazio "proiettivo" di dimensione infinita.  $\mathcal{P}$  è uno spazio di Hausdorff metrizzabile. Introduco per i punti di  $\mathcal{P}$  la notazione in coordinate omogenee:  $\pi((t_j)_{j \in J}) = [t_j]_{j \in J}$ .

Se  $C \subset \prod_{j \in J} [0, \alpha_j]$  è un qualunque chiuso che non contiene lo  $0$ ,  $C$  è un compatto di  $[0, \infty)^J \setminus \{0\}$ , e quindi  $\pi(C)$  è compatto. Ma, al contrario di quello che accade in dimensione finita, non esiste nessun insieme  $C$  di questo tipo tale che  $\pi(C) = \mathcal{P}$ . Infatti  $\mathcal{P}$  non è compatto.

### 3.5.2 La scelta di una mappa

Sia  $V$  una varietà affine irriducibile complessa definita sul campo numerabile  $k \subset \mathbb{C}$ , definisco  $\mathbb{F} = k[V]$ , e scelgo una famiglia  $\mathcal{F} \subset k[V]$ ,  $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j \in J}$ , con  $J$  numerabile, in modo che  $\mathcal{F}$  generi  $k[V]$  come  $k$ -algebra.  $V$  si può pensare come spazio topologico con la topologia classica.

Possiamo definire una mappa  $\theta : V \ni x \rightarrow [\log(|f_j(x)| + 2)]_{j \in J} \in \mathcal{P}$ , dove il termine “+2” serve solo a garantire che i logaritmi siano strettamente positivi, e può essere sostituito da un qualunque numero maggiore di 1.

**Proposizione 161.** *La chiusura  $\overline{\theta(V)} \subset \mathcal{P}$  è compatta.*

*Dim :* [MS1, prop. 1.3.1]. Consideriamo  $V$  come varietà immersa in  $\mathbb{C}^n$ . Le funzioni coordinate passate al quoziente,  $X_1 \dots X_n$ , generano  $\mathbb{C}[V]$  come  $\mathbb{C}$ -algebra. Considero la funzione  $\nu : V \ni x \rightarrow 2 + \max_{1 \leq i \leq n} |X_i(x)|$ . Definisco la mappa

$$\tilde{\theta} : V \ni x \longrightarrow \left( \frac{\log(|f_j(x)| + 2)}{\log(\nu(x))} \right)_{j \in J} \in [0, \infty)^J \setminus \{0\}$$

Abbiamo che  $\theta = \pi \circ \tilde{\theta}$ . Per concludere basta dimostrare che esistono costanti  $\alpha_j$  tali che  $\log(|f_j(x)| + 2) \leq \alpha_j \nu(x)$ , per avere  $\theta(\tilde{X}) \subset \prod_{j \in J} [0, \alpha_j]$ , e che la chiusura di  $\tilde{\theta}(X)$  non contiene 0. Per le stime vedi [MS1, prop. 1.3.1] e [MS1, lemma 1.3.2].  $\square$

Possiamo quindi considerare la compattificazione di  $V$  determinata da  $\theta$ . Questa compattificazione sarà  $V \cup B(V)$  (In realtà  $B$  dipende non solo da  $V$  ma anche dalla famiglia  $\mathcal{F}$  scelta). Vogliamo trovare un modo di descrivere i punti di  $B(V)$  come valutazioni di  $\mathbb{F}$ .

### 3.5.3 Valutazioni

Chiamo  $S$  l'insieme di tutte le valutazioni di  $\mathbb{F}$  su  $k$ . Su questo insieme si può definire una topologia dando come pre-base degli aperti gli insiemi della forma  $\{v \in S \mid v(f) \leq 0\}$  al variare di  $f$  in  $\mathbb{F}^*$  (in analogia con il fatto che “di solito” gli insiemi  $\{x \mid f(x) \neq 0\}$  sono aperti). Questo spazio topologico si dice **superficie di Riemann astratta** del campo  $k(V)$ .

Vogliamo trovare un sottoinsieme  $S_0 \subset S$  di valutazioni che corrispondano ai punti di  $B(V)$ . Se  $v \in S$  indico con  $\Lambda^v$  il suo gruppo immagine.  $\Lambda^v$  è di rango finito (proposizione 137), quindi come nella sottosezione 1.4.1, indico con  $\Lambda_1^v$  il suo più piccolo sottogruppo isolato non nullo. Definisco  $S_0 = \{v \in S \mid v \text{ ha supporto all'infinito e } \forall f \in k[V] \setminus \{0\} \ v(f) \geq 0 \text{ oppure } v(f) \in \Lambda_1^v\}$ .

Fissata una valutazione  $v \in S_0$ , sia  $\mu : \Lambda_1^v \hookrightarrow \mathbb{R}$  un isomorfismo con un sottogruppo di  $\mathbb{R}$ . Considero l'elemento  $z = (-\mu(\min(0, v(f_j))))_{j \in J} \in [0, \infty)^J$ , dove si intende  $v(0) = +\infty$ . Siccome  $v$  ha supporto all'infinito e la famiglia  $\mathcal{F}$  genera  $k[V]$ ,  $z \neq 0$ , e rimane così ben definito un elemento  $\pi(z) \in \mathcal{P}$  che dipende solo da  $v$ , perché  $\mu$  è univocamente determinato a meno di costanti positive. Possiamo quindi scrivere  $\pi(z) = U(v)$ , con  $U : S_0 \rightarrow \mathcal{P}$ .

Se  $S_+$  è l'insieme delle valutazioni con supporto all'infinito esiste una “retrazione”  $\bar{\cdot} : S_+ \rightarrow S_0$ , infatti preso un  $v \in S_+$  definisco  $s$  come il più



piccolo intero tale che  $\forall f \in k[V] \setminus \{0\} v(f) \geq 0$  oppure  $v(f) \in \Lambda_s^v$ . Siccome  $v$  ha supporto all'infinito  $s > 0$ , e se componiamo  $v$  con la proiezione  $\Lambda^v \rightarrow \Lambda^v / \Lambda_{s-1}^v$  otteniamo una valutazione  $\bar{v} \in S_0$ . Ovviamente per  $v \in S_0$   $\bar{v} = v$ .

Ora vogliamo dimostrare che  $U(S_0) = B(V)$ , ma per questo serve il seguente lemma:

**Lemma 162.** *Sia  $\{x_n\} \subset V$  una successione illimitata e  $k$ -prevalutante e  $v$  una valutazione di  $\mathbb{F}$  su  $k$  con supporto all'infinito e compatibile con  $\{x_n\}$ . Allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) = U(\bar{v})$ .*

*Dim :* [MS1, lemma 1.3.5]. □

**Teorema 163.**  $B(V) = U(S_0)$ .

*Dim :* [MS1, 1.3.6].  $\subset$ : Prendo un punto  $b \in B(V)$ . Per quanto detto nella sezione 3.4 esiste una successione  $\{x_n\} \subset V$  illimitata tale che  $x_n \rightarrow b$ . A meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che  $\{x_n\}$  sua prevalutante, per la proposizione 160 esiste  $v \in S_+$  compatibile con  $\{x_n\}$ . Per il lemma precedente  $b = U(\bar{v}) \in U(S_0)$ .

$\supset$ : Prendiamo  $v \in S_0$ , per la proposizione 153 c'è una successione valutante  $\{x_n\}$  illimitata che definisce  $v$ , in particolare  $v$  è compatibile con  $\{x_n\}$ , quindi, per il lemma precedente,  $U(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) \in B(V)$  perchè  $x_n$  è illimitata in  $V$ . □

Abbiamo visto quindi come si può descrivere l'insieme  $B(V)$  dei punti ideali della compattificazione di  $V$  grazie ad un particolare insieme di valutazioni  $S_0$ . Ora vediamo che c'è un sottoinsieme denso di  $B(V)$  fatto di punti particolari.

**Proposizione 164.** *L'insieme delle valutazioni discrete di rango 1 con supporto all'infinito è denso in  $S_0$ .*

*Dim :* [MS1, thm. 1.3.7]. □

**Teorema 165.** *La mappa  $U : S_0 \rightarrow \mathcal{P}$  è continua.*

*Dim :* [MS1, thm. 1.3.4]. □

**Proposizione 166.** *Se  $v$  è una valutazione discreta di rango 1 con supporto all'infinito,  $U(v) = [n_j]_{j \in J}$  con  $n_j \in \mathbb{N}$ , è un punto di coordinate intere.*

*Dim :* [MS1, thm. 1.3.7]. □

In questo modo si vede che c'è un sottoinsieme denso di  $B(V)$  fatto da punti di coordinate intere, che corrispondono a valutazioni discrete di rango 1. Questo risultato si può estendere a varietà non necessariamente irriducibili.

Sia  $V$  una varietà affine complessa definita sul campo numerabile  $k \subset \mathbb{C}$ , non necessariamente irriducibile. Come sopra scelgo una famiglia numerabile  $\mathcal{F} \subset k[V]$ ,  $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j \in J}$ , in modo che  $\mathcal{F}$  generi  $k[V]$  come  $k$ -algebra.

Scompongo  $V$  nelle sue componenti irriducibili,  $V = \bigcup V_i$ . Ad ogni  $V_i$  associo la famiglia di funzioni  $\mathcal{F}_i = \{f_j|_{V_i}\}_{j \in J}$ , che genera  $k[V_i]$  come  $k$ -algebra. Sono quindi ben definiti i  $B(V_i)$ , e definisco  $B(V) = \bigcup B(V_i)$ . Da quanto detto sopra segue:

**Teorema 167.** *L'insieme  $B(V)$  ha un sottoinsieme denso fatto da punti di coordinate intere.*  $\square$

### 3.6 Caso di una varietà algebrica reale

Sia  $W$  una varietà affine irriducibile reale definita sul campo numerabile  $k \subset \mathbb{R}$ , definisco  $\mathbb{F} = k(V)$ , e scelgo una famiglia  $\mathcal{F} \subset k[V]$ ,  $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j \in J}$ , con  $J$  numerabile, in modo che  $\mathcal{F}$  generi  $k[V]$  come  $k$ -algebra.  $W$  si può pensare come spazio topologico con la topologia classica.

Considero il complessificato  $W_{\mathbb{C}}$ .  $\mathcal{F}$  genera  $k[W_{\mathbb{C}}] = k[W]$ , quindi possiamo applicare la costruzione della sezione precedente per costruire una mappa  $\theta : W_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{P}$  e una compattificazione  $(W_{\mathbb{C}}) = W_{\mathbb{C}} \cup B(W_{\mathbb{C}})$  determinata dalla mappa  $\theta$ . Chiamo  $\tilde{W}$  la chiusura di  $W \subset W_{\mathbb{C}}$  in  $\tilde{W}_{\mathbb{C}}$ , che si può scrivere come  $\tilde{W} = W \cup B(W)$ , con  $B(W) \subset B(W_{\mathbb{C}})$ .  $B(W)$  si può descrivere esplicitamente usando la restrizione a  $W$  della mappa  $\theta$ :  $B(W) = \{b \in \mathcal{P} \mid \exists \{x_n\} \subset W : x_n \rightarrow \infty \text{ in } \hat{W} \text{ e } \theta(x_n) \rightarrow b \text{ in } \mathcal{P}\}$ .

Come sopra si può estendere questa costruzione anche a varietà non irriducibili, definendo  $B(W) = \bigcup B(W_i)$ , dove  $W_i$  sono le componenti irriducibili di  $W$ .

Sia  $C$  una componente connessa della chiusura di  $W \setminus \Sigma(W)$ , indico con  $\tilde{C}$  la sua chiusura in  $\tilde{W}$ , e definisco  $B(C) = B(W) \cap \tilde{C}$ . Come nella sezione precedente vogliamo interpretare i punti di  $B(C)$  in termini di valutazioni del campo  $k(W) = k(W_{\mathbb{C}})$ .

Ho una mappa  $U : S_0 \rightarrow B(W_{\mathbb{C}})$ . Voglio trovare un sottoinsieme  $S_0^C \subset S_0$  tale che  $U(S_0^C) = B(C)$ . Definisco  $S_0^C = \{\bar{v} \in S_0 \mid \exists \{x_n\} \subset C \text{ successione } k\text{-valutante, illimitata, che definisce } v\}$ .

**Proposizione 168.**  $B(C) = U(S_0^C)$ .

*Dim :* [MS1, prop. 1.4.2].  $\subset$ : Sia  $b \in B(C)$ . Esiste una successione  $\{x_n\} \subset C$ ,  $x_n \rightarrow b$ . Per il lemma 84 possiamo supporre che gli  $x_n$  siano  $k$ -generici, e con un procedimento diagonale passando ad una sottosuccessione possiamo ottenere una successione  $k$ -valutante che definisce una valutazione  $v$  con supporto all'infinito. Per il lemma 162  $U(\bar{v}) = b$ .

$\supset$ : Prendo  $v \in S_0^C$ .  $v$  è definita da una successione  $\{x_n\} \subset C$   $k$ -valutante. Per il lemma 162  $U(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) \in B(C)$ .  $\square$

Abbiamo visto quindi come si può descrivere l'insieme  $B(C)$  dei punti ideali di  $C$  con un insieme di valutazioni  $S_0^C$ . Ora vediamo che c'è un sottoinsieme denso di  $B(C)$  fatto di punti a coordinate intere.

**Proposizione 169.** *C'è un insieme di valutazioni discrete di rango 1 con supporto all'infinito denso in  $S_0^C$ .*

*Dim :* [MS1, thm. 1.4.4]. □

Quindi, come sopra, c'è un sottoinsieme denso di  $B(C)$  fatto da punti di coordinate intere, che corrispondono a valutazioni discrete di rango 1.

**Teorema 170.** *Sia  $W$  una varietà affine reale (non necessariamente irriducibile) e sia  $W_0$  una sua componente connessa. Chiamo  $\tilde{W}_0$  la chiusura di  $W_0$  in  $\tilde{W}$ , e pongo  $B(W_0) = \tilde{W}_0 \cap B(W)$ .  $B(W_0)$  ha un sottoinsieme denso fatto di punti a coordinate intere.*

*Dim :* [MS1, coroll. 1.4.5]. Segue da quanto detto sopra, decomponendo  $W_0$  come unione di insiemi della forma  $X \setminus \Sigma(X)$ , con  $X$  varietà reale. □

## Capitolo 4

# Valutazioni e $\Lambda$ -alberi

Sia  $v$  una valutazione del campo  $\mathbb{F}$  a valori nel gruppo abeliano  $\Lambda$ . Indichiamo con  $\mathcal{O}$  il suo anello di valutazione, con  $m$  il suo ideale massimale e con  $D = \mathcal{O}/m$  il suo campo residuo. Sia  $V = \mathbb{F}^2$  un  $\mathbb{F}$ -spazio vettoriale di dimensione 2.  $V$  è anche un  $\mathcal{O}$ -modulo.

### 4.1 $\mathcal{O}$ -reticoli

**Definizione 171.** Un  $\mathcal{O}$ -reticolo di  $V$  è un sotto  $\mathcal{O}$ -modulo di  $V$  finitamente generato (su  $\mathcal{O}$ ) che contenga una  $\mathbb{F}$ -base di  $V$ .

**Proposizione 172.** Un  $\mathcal{O}$ -reticolo  $L$  è un  $\mathcal{O}$ -modulo libero di rango 2 e esiste un  $\mathbb{F}$ -automorfismo di  $V$  che manda  $L$  nel reticolo standard  $\mathcal{O}^2 \subset \mathbb{F}^2$ .

*Dim :* Sia  $\{e_1 \dots e_n\}$  un insieme finito minimale di generatori di  $L$  su  $\mathcal{O}$ . Voglio dimostrare che  $n = 2$ , perché altrimenti dati tre di loro, uno si ricava dagli altri due, e l'insieme non sarebbe minimale. Prendiamo quindi  $e_1, e_2, e_3$ . Sono dipendenti su  $\mathbb{F}$ , quindi esistono  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$  tali che  $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0$ . Possiamo supporre, a meno di riordinamento, che  $v(a_1) \leq v(a_2) \leq v(a_3)$ . Per la proposizione 138 esistono elementi  $b_2, b_3$  di valutazione positiva o nulla (cioè  $b_2, b_3 \in \mathcal{O}$ ) tali che  $a_2 = b_2 a_1$  e  $a_3 = b_3 a_1$ . Quindi  $a_1(e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = 0 \Rightarrow e_1 = b_2 e_2 + b_3 e_3$  e  $b_2, b_3 \in \mathcal{O}$ , assurdo. Quindi esistono  $e_1, e_2 \in L$  tali che ogni elemento di  $L$  si scrive come  $b_1 e_1 + b_2 e_2$  con  $b_1, b_2 \in \mathcal{O}$  univocamente determinati (perché siamo in  $V$  che è uno spazio vettoriale). Esiste un automorfismo  $A$  di  $V$  tale che  $A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Abbiamo che  $A(L) = \mathcal{O}^2$ .  $\square$

**Corollario 173.** Se  $\langle e_1, e_2 \rangle$  è una  $\mathcal{O}$ -base di un  $\mathcal{O}$ -reticolo  $L$  e  $p, q \in \mathbb{F}$  abbiamo che:

- $pe_1, qe_2 \in L \Leftrightarrow p, q \in \mathcal{O} \Leftrightarrow v(p), v(q) \geq 0$ .
- $\langle pe_1, qe_2 \rangle$  è una base di  $L \Leftrightarrow p, q \in \mathcal{O} \setminus m \Leftrightarrow v(p), v(q) = 0$ .

*Dim* : Segue facilmente dalle proprietà delle valutazioni.  $\square$

**Teorema 174.** *Siano  $L, L' \subset V$  due  $\mathcal{O}$ -reticoli. Allora esiste una  $\mathcal{O}$ -base  $\langle e_1, e_2 \rangle$  di  $L$  e esistono  $p, q \in \mathbb{F}$  tali che  $\langle pe_1, qe_2 \rangle$  è una  $\mathcal{O}$ -base di  $L'$ . Inoltre abbiamo che  $L' \subset L \Leftrightarrow p, q \in \mathcal{O}$ .*

*Dim* : Sia  $\langle e_1, e_2 \rangle$  una base di  $L$ ,  $\langle f_1, f_2 \rangle$  una base di  $L'$ . Entrambe generano  $V$  su  $\mathbb{F}$ , quindi esistono  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$  con  $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$  tali che

$$e_1 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$$

$$e_2 = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$$

Possiamo supporre  $v(\alpha_1) \leq v(\alpha_2)$ , a meno di scambiare  $f_1$  con  $f_2$ . Ora ci sono due casi:

Primo caso,  $v(\beta_2) < v(\beta_1)$ : Prendo  $p = \alpha_1^{-1}$ ,  $q = \beta_2^{-1}$ . Abbiamo  $v(p) = -v(\alpha_1) \geq -v(\alpha_2)$ ,  $v(q) = -v(\beta_2) \geq -v(\beta_1)$ . Ora

$$pe_1 = f_1 + p\alpha_2 f_2$$

$$qe_2 = q\beta_1 f_1 + f_2$$

Rimane da verificare che il determinante del cambiamento di base sia invertibile in  $\mathcal{O}$ .  $\det = 1 - pq\alpha_2\beta_1 \notin m$  perché  $v(q\beta_1) > 0$  e quindi il secondo termine è in  $m$ .

Secondo caso,  $v(\beta_2) \geq v(\beta_1)$ : Operando un cambiamento di base in  $L$  ci si riconduce al primo caso. Abbiamo che per generici  $a, b, c, d \in \mathbb{F}$

$$ae_1 + be_2 = (a\alpha_1 + b\beta_1)f_1 + (a\alpha_2 + b\beta_2)f_2$$

$$ce_1 + de_2 = (c\alpha_1 + d\beta_1)f_1 + (c\alpha_2 + d\beta_2)f_2$$

Cerco  $a, b, c, d \in \mathcal{O}$  in modo che questo sia un cambiamento di base in  $\mathcal{O}$ , e in modo che rispetto a questa nuova base valgano le ipotesi del primo punto. Serve quindi:

$$v(ad - bc) = 0 \tag{4.1}$$

$$v\left(\frac{a\alpha_1 + b\beta_1}{a\alpha_2 + b\beta_2}\right) \geq 0 \tag{4.2}$$

$$v\left(\frac{c\alpha_1 + d\beta_1}{c\alpha_2 + d\beta_2}\right) < 0 \tag{4.3}$$

Se  $h$  è un elemento con  $v(h) > 0$  (da scegliere in seguito) voglio scegliere  $c$  e  $d$  in modo che  $c\alpha_2 + d\beta_2 = h(c\alpha_1 + d\beta_1)$ , così da verificare la terza condizione. A questo scopo basta notare che esistono  $c, d \in \mathcal{O}$  tali che  $\frac{c}{d} = -\frac{\beta_2 - h\beta_1}{\alpha_2 - h\alpha_1}$ , perché  $\mathbb{F}$  è il campo delle frazioni di  $\mathcal{O}$ . In questo modo la condizione è verificata, e possiamo scegliere  $c$  e  $d$  di valutazione arbitraria (purchè positiva o nulla). Stesso discorso per la seconda condizione, se  $k$  è

un elemento con  $v(k) \leq 0$ , basta scegliere  $a$  e  $b$  che verifichino  $\frac{a}{b} = -\frac{\beta_2 - k\beta_1}{\alpha_2 - k\alpha_1}$ , e siamo ancora liberi di scegliere la loro valutazione. Per soddisfare la prima condizione prendo un elemento  $n$  di valutazione 0 e faccio vedere che si può scegliere  $h$  in modo che  $ad - bc = n$ . Per la prima condizione, sostituendo le condizioni già imposte e abbiamo:

$$ad - bc = bd \frac{(h - k)(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)}{(\alpha_2 - h\alpha_1)(\alpha_2 - k\alpha_1)}$$

Imponendo l'uguaglianza con  $n$  abbiamo

$$h = \frac{n(\alpha_2 - k\alpha_1)\alpha_2 - bdk(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)}{n(\alpha_2 - k\alpha_1)\alpha_1 - bd(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)}$$

Perchè questo sia lecito basta vedere che in questo modo  $v(h) > 0$ . Se si scelgono  $b$  e  $d$  di valutazione abbastanza grande  $v(h) = v(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}) \geq 0$ . Se  $v(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}) = 0$  basta usare  $k$  al posto di  $h$ . In questo modo rispetto alla nuova base di  $L$  valgono le ipotesi del primo caso e il teorema è dimostrato.  $\square$

Per il teorema precedente se  $L' \subset L$  c'è un  $\mathbb{F}$ -isomorfismo di  $V$  che manda  $L$  in  $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  e  $L'$  in  $p\mathcal{O} \oplus q\mathcal{O}$ , con  $p, q \in \mathcal{O}$ . Il quoziente  $L/L'$  è isomorfo a  $(\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \oplus (\mathcal{O}/q\mathcal{O})$ .

**Proposizione 175.** *L'insieme  $\{v(p), v(q)\}$ , (usando le notazioni del teorema precedente), è univocamente determinato dai due moduli  $L$  e  $L'$ , e quindi lo è anche il valore  $d(L, L') = |v(p) - v(q)|$ .*

*Dim :* Con il teorema precedente e il corollario precedente.  $\square$

**Definizione 176.** Dati due  $\mathcal{O}$ -reticoli  $L' \subset L$ ,  $L'$  si dice **co-ciclico** in  $L$  se  $0 \in \{v(p), v(q)\}$ , cioè se esiste una base  $\langle e_1, e_2 \rangle$  di  $L$  tale che  $\langle e_1, qe_2 \rangle$  è una base di  $L'$ . In questo caso  $d(L, L') = |v(q)|$ .

**Lemma 177.** *Se  $p, q, r \in \mathbb{F}$  sono tali che  $v(p), v(q), v(r) > 0$ ,  $L_1 = (\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \oplus (\mathcal{O}/q\mathcal{O})$  non è isomorfo a  $L_2 = \mathcal{O}/r\mathcal{O}$ .*

*Dim :* Consideriamo il campo residuo  $D = \mathcal{O}/m$ . Se  $s \in m$  allora  $D \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}/s\mathcal{O})$  è un  $D$ -spazio vettoriale di dimensione 1, infatti è generato da  $1 \otimes_{\mathcal{O}} 1$ . Quindi  $D \otimes_{\mathcal{O}} L_1 \simeq D^2$ ,  $D \otimes_{\mathcal{O}} L_2 \simeq D$ , non sono isomorfi.  $\square$

**Corollario 178.**  *$L'$  è co-ciclico in  $L \Leftrightarrow L' \subset L$  e  $L/L' \simeq \mathcal{O}/p\mathcal{O}$  con  $p \in \mathcal{O}$ .*

*Dim :*  $\Rightarrow$ : ovvio.

$\Leftarrow$ : Per assurdo se  $0 \notin \{v(p), v(q)\}$  abbiamo  $L/L' \simeq (\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \oplus (\mathcal{O}/q\mathcal{O}) \not\simeq \mathcal{O}/r\mathcal{O}$ .  $\square$

**Proposizione 179.**  *$L' \subsetneq L$  è co-ciclico in  $L \Leftrightarrow L' \not\subset mL$ .*

*Dim :* Scegliamo una base di  $L$   $\langle e_1, e_2 \rangle$  in modo che  $\langle pe_1, qe_2 \rangle$  sia una base di  $L'$ .

$\Rightarrow$ : Se  $L'$  è co-ciclico si può scegliere  $p = 1$ , ma  $e_1 \notin mL$ .

$\Leftarrow$ : Se  $L' \subset mL$  sicuramente  $v(p), v(q) > 0$ , e non può essere  $0 \in \{v(p), v(q)\}$ .  $\square$

**Lemma 180.** *Se  $L' \subset L$  sono due  $\mathcal{O}$ -reticoli  $A$  è un  $\mathbb{F}$ -automorfismo di  $V$  tale che  $A(L) = L'$ , abbiamo che  $d(L, L') \leq v(\det A)$  e vale l'uguale se e solo se  $L'$  è co-ciclico in  $L$ .*

*Dim :* [MS1, lemma II.3.7]. Sia  $\langle e_1, e_2 \rangle$   $\mathcal{O}$ -base di  $L$  e  $\langle pe_1, qe_2 \rangle$   $\mathcal{O}$ -base di  $L'$  con  $v(p) \leq v(q)$ . Siano  $f_1 = A^{-1}(pe_1), f_2 = A^{-1}(qe_2)$ ,  $\langle f_1, f_2 \rangle$  è un'altra  $\mathcal{O}$ -base di  $L$ . Allora  $A = BC$  dove  $C(f_i) = e_i$  e, nella base  $\langle e_1, e_2 \rangle$ ,  $B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ .  $C$  è un  $\mathcal{O}$ -automorfismo di  $L$ , quindi  $v(\det C) = 0$ .  $v(\det A) = v(\det B) = v(pq) = v(p) + v(q) \geq v(q) - v(p) = |v(p) - v(q)|$ , perché  $v(p), v(q) \geq 0$ .

Se  $L'$  è co-ciclico  $v(p) = 0$ , quindi vale l'uguale. Se vale l'uguale  $v(p) + v(q) = v(q) - v(p)$  quindi  $v(p) = 0$  e  $L'$  è co-ciclico in  $L$ .  $\square$

## 4.2 Associare a $v$ un $\Lambda$ -spazio metrico $T$

Ogni  $\mathbb{F}$ -automorfismo manda  $\mathcal{O}$ -reticoli in  $\mathcal{O}$ -reticoli. Infatti se  $p \in \mathcal{O}$  e  $w \in L$   $pAw = A(pw) \in A(L)$ . Quindi il gruppo moltiplicativo  $\mathbb{F}^*$  agisce sull'insieme degli  $\mathcal{O}$ -reticoli: se  $L$  è un  $\mathcal{O}$ -reticolo e  $x \in \mathbb{F}^*$ , anche  $xL$  è un  $\mathcal{O}$ -reticolo. L'insieme quoziente rispetto a questa azione sarà indicato con  $T$ .  $T$  è quindi l'insieme degli  $\mathcal{O}$ -reticoli modulo la relazione d'equivalenza  $L \sim L' \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{F}^* : L' = xL$ . Indico con  $[L]$  la classe di equivalenza di un  $\mathcal{O}$ -reticolo  $L$ .

**Proposizione 181.** *Dato un  $\mathcal{O}$ -reticolo  $L$ , la sua classe di equivalenza  $[L]$  è un insieme di  $\mathcal{O}$ -reticoli totalmente ordinato per  $\subsetneq$ , e questo insieme ordinato è isomorfo al gruppo ordinato  $\Lambda$ .*

*Dim :* Basta notare che se  $v(x) = 0$   $xL = L$ , se  $v(x) > 0$   $xL \subsetneq L$ , se  $v(x) < 0$ ,  $x^{-1}L \subsetneq L$  e quindi  $L \subsetneq xL$ . L'isomorfismo è quello che manda  $\Lambda \ni \lambda \mapsto xL \in [L]$  dove  $x \in \mathbb{F}$  ha  $v(x) = \lambda$ .  $\square$

**Proposizione 182.** *Dati due  $\mathcal{O}$ -reticoli  $L$  e  $L'$  c'è un unico  $\mathcal{O}$ -reticolo  $L'_0 \sim L'$  che è co-ciclico in  $L$ . Questo è il più grande  $\mathcal{O}$ -reticolo di  $[L']$  contenuto in  $L$ .*

*Dim :* [MS1, prop. II.3.5]. Sia  $\langle e_1, e_2 \rangle$  una base di  $L$  tale che  $\langle pe_1, qe_2 \rangle$  sia una base di  $L'$ , con  $p, q \in \mathbb{F}$  e  $v(p) \leq v(q)$ .  $L'_0 = p^{-1}L'$ , ha come base  $\langle e_1, p^{-1}qe_2 \rangle$ , ma  $p^{-1}q \in \mathcal{O}$ , quindi  $L'_0$  è co-ciclico. Per l'unicità prendiamo un'altro  $\mathcal{O}$ -reticolo  $L_1 = \Lambda L'_0$ .  $v(\Lambda) \geq 0$ , altrimenti  $\Lambda e_1 \notin L$ . Se  $v(\Lambda) > 0$   $L/L_1 \simeq (\mathcal{O}/\Lambda\mathcal{O}) \oplus (\mathcal{O}/\Lambda p^{-1}q\mathcal{O})$ , con  $\Lambda, \Lambda p^{-1}q \in m$ . Quindi per il lemma 177 e il corollario seguente  $L_1$  non è co-ciclico. Quindi  $v(\Lambda) = 0$  e  $L_1 = L'_0$ .  $\square$

Nella definizione della funzione  $d$  (vedi proposizione 175), se passiamo ad altri  $\mathcal{O}$ -reticoli equivalenti ad  $L$  e  $L'$ , cioè rimpiazziamo  $L$  e  $L'$  con  $xL$  e  $yL'$  troviamo che  $\langle xe_1, xe_2 \rangle$  è una  $\mathcal{O}$ -base di  $xL$  e  $\langle ype_1, yqe_2 \rangle$  è una  $\mathcal{O}$ -base di  $yL'$ . Quindi l'insieme  $\{v(p), v(q)\}$  è diventato  $\{v(p\frac{y}{x}), v(q\frac{y}{x})\}$ .

Quindi  $d(xL, yL') = |v(p\frac{y}{x}) - v(q\frac{y}{x})| = |v(p) - v(q)| = d(L, L')$ . Quindi la funzione  $d$  passa al quoziente e diventa una funzione  $d : T \times T \rightarrow \Lambda$ .

**Proposizione 183.** *La funzione  $d$  è una  $\Lambda$ -distanza sull'insieme  $T$ . In questo modo abbiamo definito su  $T$  una struttura di  $\Lambda$ -spazio metrico.*

*Dim :* Dobbiamo verificare le tre proprietà delle distanze.

- $d(t, u) = 0 \Leftrightarrow t = u$ .  $\Leftarrow$ : ovvio.  $\Rightarrow$ : Se  $[L] = t$  e  $[L'] = u$ , abbiamo, per il teorema 174 e il crollario che lo precede, che esiste una base  $\langle e_1, e_2 \rangle$  di  $L$  tale che  $\langle pe_1, pe_2 \rangle$  sia una base di  $L'$ . Moltiplicando per  $p^{-1}$  si vede che  $[L'] = [L]$ .
- $d(t, u) = d(u, t)$ . Se  $[L] = t$ ,  $[L'] = u$ ,  $\langle e_1, e_2 \rangle$  base di  $L$ ,  $\langle pe_1, qe_2 \rangle$  base di  $L'$  abbiamo che  $d(L', L) = |v(p^{-1}) - v(q^{-1})| = |v(p) - v(q)| = d(L, L')$ .
- $d(t, s) \leq d(t, u) + d(u, s)$ . Posso scegliere rappresentanti  $[L_1] = t$ ,  $[L_2] = u$ ,  $[L_3] = s$  in modo che  $L_2$  sia co-ciclico in  $L_1$  e  $L_3$  sia co-ciclico in  $L_2$ . Considero  $\mathbb{F}$ -automorfismi  $A_1, A_2$  di  $V$  tali che  $A_i(L_i) = L_{i+1}$ . Per il lemma 180  $d(t, s) \leq v(\det A_2 A_1) = v(\det A_2) + v(\det A_1) = d(u, s) + d(t, u)$ .

Quindi  $d$  è una  $\Lambda$ -distanza. □

**Corollario 184.** *Dati  $t, u, s \in T$   $d(t, s) = d(t, u) + d(u, s)$  se e solo se esistono rappresentanti  $[L_1] = t$ ,  $[L_2] = u$ ,  $[L_3] = s$  tali che  $L_2$  e  $L_3$  siano co-ciclici in  $L_1$  e  $L_3$  sia co-ciclico in  $L_2$ .*

*Dim :* Scelti gli  $L_i$  come nella dimostrazione della proposizione precedente, si vede da quella dimostrazione che se vale l'uguale  $L_3$  deve essere co-ciclico in  $L_1$ . Il viceversa si fa come nella dimostrazione precedente. □

In questo modo sull'insieme  $T$  è stata definita una struttura di  $\Lambda$ -spazio metrico.

### 4.3 Azione di $SL_2(\mathbb{F})$ su $T$

Ci sono dei gruppi che agiscono su  $T$  con  $\Lambda$ -isometrie, ad esempio il gruppo  $GL_2(\mathbb{F})$ .

Abbiamo detto che il gruppo  $GL_2(\mathbb{F})$  agisce sull'insieme degli  $\mathcal{O}$ -reticoli. Per questa azione le immagini di due  $\mathcal{O}$ -reticoli equivalenti sono equivalenti. Quindi l'azione passa al quoziente dando un'azione di  $GL_2(\mathbb{F})$  su  $T$ .

L'azione è transitiva, perché lo è sugli  $\mathcal{O}$ -reticoli, ed è un'azione per  $\Lambda$ -isometrie. I multipli scalari dell'identità fissano tutti i punti di  $T$ , quindi se due matrici sono un multiplo scalare dell'altra agiscono esattamente allo stesso modo su  $T$ .

Vediamo come sono fatti gli stabilizzatori dei punti. Considero il punto  $[\mathcal{O}^2]$ .



**Proposizione 185.** *Lo stabilizzatore del punto  $[\mathcal{O}^2]$  è costituito da tutti i multipli scalari delle matrici di  $GL_2(\mathcal{O})$  (ossia le matrici a coefficienti in  $\mathcal{O}$  e con determinante invertibile in  $\mathcal{O}$ , cioè con determinante di valutazione 0).  $\text{Stab}_{[\mathcal{O}^2]} = \mathbb{F} \cdot GL_2(\mathcal{O})$ .*

*Dim :* Basta far vedere che una matrice che manda  $\mathcal{O}^2$  in sé è in  $GL_2(\mathcal{O})$ . Segue che se una matrice manda  $[\mathcal{O}^2]$  in sé deve mandare  $\mathcal{O}^2$  in un suo multiplo, ed è quindi multiplo di una matrice in  $GL_2(\mathcal{O})$ . Prendiamo  $A \in GL_2(\mathbb{F})$  tale che  $A(\mathcal{O}^2) = \mathcal{O}^2$ .  $\langle A(\frac{1}{0}), A(\frac{0}{1}) \rangle$  è una  $\mathcal{O}$ -base di  $\mathcal{O}^2$ . Quindi esiste una matrice  $B \in GL_2(\mathcal{O})$  tale che  $B(\frac{1}{0}) = A(\frac{1}{0}), B(\frac{0}{1}) = A(\frac{0}{1})$ . Quindi  $B = A$  e  $A \in GL_2(\mathcal{O})$ .  $\square$

Se considero un'altro punto  $t \in T$ , c'è, per transitività, un elemento  $A \in GL_2(\mathbb{F})$  che lo manda in  $[\mathcal{O}^2]$ . Quindi lo stabilizzatore di  $t$  è coniugato, mediante  $A$ , allo stabilizzatore di  $[\mathcal{O}^2]$ , cioè a  $\mathbb{F} \cdot GL_2(\mathcal{O})$

**Corollario 186.** *Lo stabilizzatore di un punto è coniugato in  $GL_2(\mathbb{F})$  al gruppo  $\mathbb{F} \cdot GL_2(\mathcal{O})$ .*  $\square$

Per restrizione otteniamo un'azione di  $SL_2(\mathbb{F})$  su  $T$ , ma questa azione, in generale, non è transitiva.

**Corollario 187.** *Per l'azione di  $SL_2(\mathbb{F})$  lo stabilizzatore di  $[\mathcal{O}^2]$  è  $SL_2(\mathcal{O})$  (le matrici a coefficienti in  $\mathcal{O}$  con determinante 1). Lo stabilizzatore di un punto per questa azione è coniugato in  $GL_2(\mathbb{F})$  a  $SL_2(\mathcal{O})$ .*

*Dim :* Basta dire che una matrice in  $\mathbb{F}GL_2(\mathcal{O})$  con determinante 1 è in  $SL_2(\mathcal{O})$ . Prendiamo  $A = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , con  $a, b, c, d \in \mathcal{O}$ ,  $v(ad - bc) = 0$  e  $k^2(ad - bc) = 1$ . Questo implica che  $v(k^2) = 0 = v(k)$ , quindi  $A$  è a coefficienti in  $\mathcal{O}$ , e quindi in  $SL_2(\mathcal{O})$ .  $\square$

In realtà si può dare un risultato più forte:

**Proposizione 188.** *Se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F})$ , abbiamo che  $d([\mathcal{O}^2], A[\mathcal{O}^2]) = -2 \min\{v(a), v(b), v(c), v(d)\}$ , dove con  $v(0)$  si intende una quantità più grande di ogni altro elemento di  $\Lambda$ . In particolare preso un  $t \in T$  la distanza  $d(t, A(t))$  è un elemento di  $\Lambda$  divisibile per 2.*

*Dim :* [MS1, prop. II.3.13].  $\square$

## 4.4 Il caso di una valutazione discreta di rango 1

Nel caso in cui  $\Lambda = \mathbb{Z}$  si può dare a  $T$  una struttura di grafo combinatorio in cui i punti di  $T$  sono vertici. Basta definire l'insieme dei lati. Dico che un insieme di due vertici  $\{t, s\}$  è un lato se e solo se  $d(t, s) = 1$ . Scegliendo un elemento di  $\mathcal{O}$  di valutazione 1,  $v(\pi) = 1$ , e dei rappresentanti  $[L] = t$ ,  $[L'] = s$  in modo che  $L'$  sia co-ciclico in  $L$  abbiamo che c'è una base  $\langle e_1, e_2 \rangle$  di  $L$  tale che  $\langle e_1, \pi^{d(t,s)} e_2 \rangle$  sia una base di  $L'$ . Allora  $\{t, s\}$  è un lato se e solo se  $\langle e_1, \pi e_2 \rangle$  è una base di  $L'$ , se e solo se  $mL = \pi L \subsetneq L' \subsetneq L$ , se e solo se  $L/L' \simeq \mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = \mathcal{O}/m = D$ .

**Proposizione 189.** *Il grafo combinatorio  $T$  è connesso.*

*Dim :* Dati due vertici  $t, s \in T$  cerco un cammino  $t = x_0, x_1 \dots x_n = s$  con  $d(x_i, x_{i+1}) = 1$ . Come prima scelgo due rappresentanti  $[L] = t$  e  $[L'] = s$  in modo che  $\langle e_1, e_2 \rangle$  generino  $L$  e  $\langle e_1, \pi^{d(t,s)} e_2 \rangle$  generino  $L'$ . Definisco  $x_i$  come la classe dell' $\mathcal{O}$ -reticolo generato da  $e_1$  e  $\pi^i e_2$ . Gli  $x_i$  formano il cammino cercato.  $\square$

**Teorema 190.** *Il grafo  $T$  è un albero.*

*Dim :* [Se, II§1, thm. 1]. Prendiamo un cammino semplice  $x_0 \dots x_n$ . Bisogna dimostrare che  $x_0 \neq x_n$ . Si può fare dimostrando per induzione su  $n$  che  $d(x_0, x_n) = n$ . Se  $n = 1$  questo è vero per definizione. Possiamo supporre che sia vero per tutti i cammini di lunghezza minore di  $n$ . Per il corollario 184 possiamo scegliere dei rappresentanti  $[L_i] = x_i$  in modo che  $L_i$  sia co-ciclico in  $L_{i-1}$  per  $i \in \{1 \dots n\}$  e  $L_{n-1}$  sia co-ciclico in  $L_0$  ossia  $L_{n-1} \not\subseteq mL_0$  (per la proposizione 179). Basta dimostrare che  $L_n$  è co-ciclico in  $L_0$ , cioè che  $L_n \not\subseteq mL_0$ . Considero il  $D$ -spazio vettoriale  $L_{n-1}/mL_{n-1} \simeq D^2$ .  $mL_{n-1} \subsetneq mL_{n-2}, L_n \subsetneq L_{n-1}$ , quindi  $mL_{n-2}$  e  $L_n$  passano al quoziente per  $mL_{n-1}$  e diventano delle rette. Se fossero la stessa retta avremmo  $L_n = mL_{n-2} = \pi L_{n-2}$  e quindi  $x_n = x_{n-2}$ , impossibile. Quindi sono due rette distinte e insieme generano  $L_{n-1}$ .  $L_{n-1} = L_n + mL_{n-2}$ . Ma  $mL_{n-2} \subset mL_0$ , se valesse anche  $L_n \subset mL_0$  avremmo che  $L_{n-1} \subset mL_0$ , assurdo. Quindi  $L_n \not\subseteq mL_0$ , quello che serviva.  $\square$

**Corollario 191.** *La distanza su  $T$  coincide con la distanza fra due vertici di un albero descritta nella sezione 1.3.*

*Dim :* Dalla dimostrazione del teorema precedente segue che la distanza fra due vertici di  $T$  è uguale alla lunghezza dell'unica geodetica che li ha come estremi.  $\square$

Su questo albero agisce il gruppo  $SL_2(\mathbb{F})$ . L'azione è per isometrie, che mandano punti a distanza 1 in punti a distanza 1, quindi mandano lati in lati, cioè sono isomorfismi di grafi. Gli stabilizzatori dei vertici sono i sottogruppi coniugati in  $GL_2(\mathbb{F})$  a  $SL_2(\mathcal{O})$ . Per la proposizione 188 l'azione è senza inversioni, perché ogni vertice viene mandato in un vertice a distanza pari, e quindi non può mai essere mandato in un vertice adiacente.

Fissiamo il vertice standard  $[\mathcal{O}^2]$ , voglio studiare come agisce lo stabilizzatore  $SL_2(\mathcal{O})$  di  $[\mathcal{O}^2]$  sull'albero  $T$ . Si può descrivere bene l'azione sul link  $\mathcal{L}_{[\mathcal{O}^2]}$ . Se  $x$  è un vertice adiacente ad  $x$  ha un'unico rappresentante  $L$  con  $\pi\mathcal{O}^2 \subsetneq L \subsetneq \mathcal{O}^2$ .  $\mathcal{O}^2/\pi\mathcal{O}^2$  è un  $D$ -spazio vettoriale di dimensione 2, e  $L/\pi\mathcal{O}^2$  è un suo sottospazio di dimensione 1. In questo modo si vede che i vertici di  $T$  adiacenti ad  $[\mathcal{O}^2]$  sono in corrispondenza biunivoca con le rette vettoriali di  $D^2$ , cioè con i punti dello spazio proiettivo  $D\mathbb{P}^1$ . Il gruppo  $SL_2(\mathcal{O})$  agisce su  $\mathcal{O}^2$  e questa azione passa al quoziente come una azione lineare su  $D^2$ ,  $SL_2(\mathcal{O})/m = SL_2(D)$ , che diventa una azione su  $D\mathbb{P}^1$  con proiettività. Quindi se un elemento di  $SL_2(\mathcal{O})$  fissa due elementi di  $\mathcal{L}_{[\mathcal{O}^2]}$  li fissa tutti.

Questi elementi che agiscono banalmente su  $\mathcal{L}_{[\mathcal{O}^2]}$  sono esattamente quelli congrui a  $\pm\mathbb{1}$  modulo  $m$ .

La descrizione dell'azione di  $SL_2(\mathcal{O})$  sul link  $\mathcal{L}_{[\mathcal{O}^2]}$ , insieme alla proposizione 188 dovrebbe chiarire abbastanza bene come agisce il gruppo  $SL_2(\mathbb{F})$  sull'albero  $T$ , ad esempio si può vedere che ogni vertice può essere mandato in ogni altro vertice a distanza pari da lui.

Discorsi simili si possono provare a fare per l'insieme dei vertici a distanza fissata  $n$  da  $[\mathcal{O}^2]$ , anche se sono meno utili. Se  $x$  è un vertice a distanza  $n$  da  $[\mathcal{O}^2]$ , ha un'unico rappresentante co-ciclico in  $\mathcal{O}^2$ ,  $[L] = x$ , con una base  $\langle e_1, e_2 \rangle$  di  $\mathcal{O}^2$  tale che  $\langle e_1, \pi^n e_2 \rangle$  sia una base di  $L$ . Quindi  $\pi^n \mathcal{O}^2 \subsetneq L \subsetneq \mathcal{O}^2$ .  $\mathcal{O}^2/\pi^n \mathcal{O}^2$  è un  $\mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O}$ -modulo libero di rango 2, e  $L/\pi^n \mathcal{O}^2$  è un suo fattore diretto di rango 1. In questo modo si vede che i vertici di  $T$  a distanza  $n$  da  $[\mathcal{O}^2]$  sono in corrispondenza biunivoca con i fattori diretti di  $\mathcal{O}^2/\pi^n \mathcal{O}^2$  di rango 1, cioè con  $\mathbb{P}(\mathcal{O}^2/\pi^n \mathcal{O}^2) = \mathbb{P}^1(\mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O})$ . Su questo insieme di vertici  $SL_2(\mathcal{O})$  agisce come una proiettività, ma si tratta di spazi proiettivi su anelli, e non è così chiaro come si comportano queste proiettività.

## 4.5 $T$ come $\Lambda$ -albero

Abbiamo visto che nel caso di una valutazione a valori in  $\mathbb{Z}$  lo spazio  $T$  è un albero combinatorio. Questo risultato si può estendere in generale, facendo vedere che per una valutazione a valori in un gruppo  $\Lambda$  lo spazio  $T$  è un  $\Lambda$ -albero, su cui  $SL_2(\mathbb{F})$  agisce con  $\Lambda$ -isometrie.

**Proposizione 192.** *Siano  $x_1, x_2 \in T$  con  $d(x_1, x_2) = l \in \Lambda$ . Fissato  $l' \in [0, l] \subset \Lambda$ , esiste un unico  $x' \in T$  che verifica  $d(x_1, x') = l'$  e  $d(x', x_2) = l - l'$ .*

*Inoltre se  $L_i$  sono  $\mathcal{O}$ -reticoli tali che  $[L_i] = x_i$  e  $L_2$  sia cociclico in  $L_1$ , allora esiste un  $\mathcal{O}$ -reticolo  $L'$  con  $[L'] = x'$  e  $L_2 \subset L' \subset L_1$ .*

*Dim :* [MS1, prop. 2.3.10]. In breve: prendiamo rappresentanti  $L_i$  come nell'enunciato. Sia  $\langle e_1, e_2 \rangle$  una base di  $L_1$  tale che  $L_2 = \langle e_1, p e_2 \rangle$  con  $v(p) = l$ . Pongo  $L' = \langle e_1, q e_2 \rangle$  con  $v(q) = l'$ . Per il corollario 184  $x' = [L']$  ha le proprietà volute ed è unico.  $\square$

**Corollario 193.** *Dati  $x_1, x_2 \in T$  esiste un unico segmento chiuso  $A$  che li ha come estremi. Inoltre fissati due rappresentanti  $L_i$  degli  $x_i$ ,  $L_2$  cociclico in  $L_1$ ,  $A$  è costituito dalle classi dei reticoli  $L$  con  $L_2 \subset L \subset L_1$ .*  $\square$

Da questo corollario segue la prima proprietà della definizione di  $\Lambda$ -albero.

**Proposizione 194.** *Siano  $A_1, A_2$  due segmenti chiusi con un estremo  $z$  in comune e con altro estremo  $x_i$ . Allora  $A_1 \cap A_2$  è un segmento chiuso.*

*Dim :* [MS1, pag. 446]. Scelgo rappresentanti  $L$  di  $z$  e  $L_i$  di  $x_i$ , in modo che ciascun  $L_i$  sia cociclico in  $L$ .  $A_i$  è costituito dalle classi dei reticoli

contenuti fra  $L_i$  e  $L$ , quindi  $A_1 \cap A_2$  è costituito dalle classi di reticoli che contengono  $L_1$  e  $L_2$ .  $L_1 + L_2$  è un reticolo (è finitamente generato e genera  $V$  su  $\mathbb{F}$ ) contenuto in  $L$  ed il più piccolo che contiene gli  $L_i$ , quindi  $[L_1 + L_2]$  e  $z$  sono gli estremi di  $A_1 \cap A_2$ .  $\square$

Ecco dunque dimostrata anche la seconda condizione della definizione.

**Proposizione 195.** *Siano  $a \leq b \leq c \in \Lambda$  e  $\mu : [a, c] \rightarrow T$  una mappa tale che  $\mu|_{[a, b]}$  e  $\mu|_{[b, c]}$  siano segmenti chiusi e  $\mu([a, b]) \cap \mu([b, c]) = \{\mu(b)\}$ . Allora  $d(\mu(a), \mu(c)) = c - a$ .*

*Dim :* [MS1, pag. 446].  $\square$

**Corollario 196.**  *$(T, d)$  è un  $\Lambda$ -albero.*  $\square$

## 4.6 Azioni su $\Lambda$ -alberi

Abbiamo visto che il gruppo  $SL_2(\mathbb{F})$  agisce con isometrie sul  $\Lambda$ -albero  $T$ . Avremo in seguito delle rappresentazioni  $\rho : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$ , e saremo interessati al comportamento dell'azione del gruppo  $\Gamma$  su  $T$ . Vediamo quindi alcune proprietà delle isometrie che serviranno nel seguito.

### 4.6.1 Isometrie di $\Lambda$ -alberi

Sia  $(T, d)$  un  $\Lambda$ -albero e sia  $\gamma : T \rightarrow T$  un'isometria. Sia  $I \subset \Lambda$  un intervallo e  $\mu : I \hookrightarrow A \subset T$  un segmento invariante per  $\gamma$ . Allora  $\mu^{-1} \circ \gamma \circ \mu : I \hookrightarrow I$  è un'isometria di  $I$ , ed è quindi una riflessione o una traslazione. Diremo che  $\gamma|_A$  è una **riflessione** o una **traslazione** se lo è  $\mu^{-1} \circ \gamma \circ \mu$ . Se  $\gamma|_A$  è una traslazione l'elemento  $d(x, \gamma x)$  è costante per  $x \in A$ , e si dice **lunghezza di traslazione** di  $\gamma|_A$ .

Se esiste un segmento  $A$  tale che  $\gamma|_A$  è una riflessione fantasma, allora  $\gamma$  si dice una **inversione fantasma**. Si dimostra che  $\gamma$  è una inversione fantasma se e solo se esistono  $x, x' \in T$  tali che  $\gamma(x) = x', \gamma(x') = x$  e  $d(x, x')$  è un elemento di  $\Lambda$  non divisibile per due in  $\Lambda$ .

Per la proposizione 188 le isometrie indotte da elementi di  $SL_2(\mathbb{F})$  sugli alberi associati ad una valutazione di  $\mathbb{F}$  non sono mai inversioni fantasma. Inoltre è chiaro che un  $\mathbb{R}$ -albero non ha mai inversioni fantasma.

Un **asse parziale** per  $\gamma$  è un segmento invariante tale che  $\gamma|_A$  è una traslazione non banale. Se  $\Lambda$  ha rango 1 un'asse parziale è isometrico a  $\Lambda$ , ma questo è falso se il rango è maggiore di uno. Un **asse** è un asse parziale che contiene ogni altro asse parziale. Un'isometria di un  $\Lambda$ -albero si dice **iperbolica** se ha un asse, che è ovviamente unico. La lunghezza di traslazione lungo l'asse si dice **lunghezza di traslazione** dell'isometria iperbolica.

**Teorema 197.** *Sia  $\gamma : T \hookrightarrow T$  un'isometria di un  $\Lambda$ -albero  $T$  che non sia un'inversione fantasma.  $\gamma$  è iperbolica se e solo se non ha punti fissi.*

Inoltre se  $\gamma$  è iperbolica e ha lunghezza di traslazione  $l$  allora il suo asse è  $\{x \in T \mid d(x, \gamma x) = l\}$  e  $l = \min_{x \in T} d(x, \gamma x)$ .

*Dim* : [MS1, thm. 2.2.3]. □

**Corollario 198.** Sia  $\gamma : T \hookrightarrow T$  un'isometria di un  $\Lambda$ -albero  $T$  che non sia un'inversione fantasma. Allora esiste  $\min_{x \in T} d(x, \gamma x)$ . □

#### 4.6.2 Alcune proprietà

Sia  $\Gamma$  un gruppo che agisce sul  $\Lambda$ -albero  $T$  con isometrie. Se nessun elemento di  $\Gamma$  è un'inversione fantasma, allora diremo che l'azione è **senza inversioni fantasma**. Ad esempio il gruppo  $SL_2(\mathbb{F})$  agisce sugli alberi associati ad una valutazione di  $\mathbb{F}$  senza inversioni. In questo caso si può definire una funzione detta **funzione lunghezza** determinata dall'azione:  $l : \Gamma \ni \gamma \rightarrow \min_{x \in T} d(x, \gamma x) \in \Lambda$ .

**Proposizione 199.** Sia  $\Lambda' \subset \Lambda$  un sottogruppo di un gruppo ordinato. Sia  $(T, d)$  un albero e  $T' \subset T$  un sottoinsieme tale che  $(T', d|_{T'})$  sia un  $\Lambda'$ -albero. Sia  $\Gamma$  un gruppo che agisce su  $T$  con isometrie e senza inversioni fantasma, e tale che  $T'$  sia invariante per  $\Gamma$  e l'azione indotta su  $T'$  sia senza inversioni fantasma. Allora la funzione lunghezza determinata dall'azione di  $\Gamma$  su  $T$  è uguale alla funzione lunghezza determinata dall'azione ristretta a  $T'$ , e assume quindi valori in  $\Lambda'$ .

*Dim* : [MS1, prop. 2.2.12]. □

**Corollario 200.** Sia  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  un sottogruppo e sia  $\Gamma$  un gruppo che agisce sul  $\Lambda$ -albero  $T$  con isometrie e senza inversioni. Allora l'azione si estende in maniera unica ad una azione su  $T_{\mathbb{R}}$ , e le funzioni lunghezza determinate da queste due azioni coincidono. □

**Teorema 201.** Sia  $\Gamma$  un gruppo finitamente generato che agisce su un  $\Lambda$ -albero  $T$  con isometrie e senza inversioni. La funzione lunghezza determinata da questa azione è identicamente nulla se e solo se c'è un punto di  $T$  che è fissato da ogni elemento di  $\Gamma$ .

*Dim* : [MS1, prop. 2.2.15]. □

Sia  $\rho : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$  una rappresentazione e  $v$  una valutazione di  $\mathbb{F}$  a valori in  $\Lambda$ . Questo definisce un'azione di  $\Gamma$  sul  $\Lambda$ -albero associato a  $v$ . È possibile determinare in maniera algebrica la funzione lunghezza determinata da questa rappresentazione:

**Proposizione 202.** La funzione lunghezza  $l : \Gamma \rightarrow \Lambda$  determinata dall'azione di  $\Gamma$  su  $T$  è data da:

$$l(\gamma) = -2 \min(0, v(\text{tr}(\rho(\gamma))))$$

*Dim* : [MS1, prop. 2.3.15]. □

## Capitolo 5

# Rappresentazioni di gruppi in $SL_2(\mathbb{C})$

### 5.1 Definizione e alcune proprietà

**Definizione 203.** Sia  $\Gamma$  un gruppo e  $\mathbb{K}$  un campo. Una **rappresentazione** di  $\Gamma$  (in  $G$ ) è un omomorfismo di gruppi  $\rho : \Gamma \rightarrow G$  con  $G$  sottogruppo di  $GL_n(\mathbb{K})$ . La rappresentazione si dice **fedele** se è iniettiva. Se  $\mathbb{K}$  è  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  la rappresentazione si dice **discreta** se l'immagine di  $\Gamma$  è un sottospazio discreto per la topologia usuale di  $GL_n(\mathbb{K})$ .

Due rappresentazioni  $\rho_1, \rho_2$  si dicono **coniugate** se esiste  $g \in GL_n(\mathbb{K})$  tale che per ogni  $\gamma \in \Gamma$  si ha  $\rho_1(\gamma) = g^{-1}\rho_2(\gamma)g$ . Il **carattere** di una rappresentazione  $\rho$  è la funzione  $\chi_\rho : \Gamma \ni \gamma \rightarrow \text{tr}(\rho(\gamma)) \in \mathbb{K}$ .

Ovviamente due rappresentazioni coniugate hanno lo stesso carattere. Per il viceversa vedi la proposizione 206.

L'insieme delle rappresentazioni di  $\Gamma$  in  $SL_2(\mathbb{K})$  verrà indicato con  $R(\Gamma)$ . Ogni  $\gamma \in \Gamma$  definisce una funzione  $\tau_\gamma : R(\Gamma) \ni \rho \rightarrow \chi_\rho(\gamma) \in \mathbb{K}$ . L'insieme dei caratteri di rappresentazioni di  $\Gamma$  in  $SL_2(\mathbb{K})$  verrà indicato con  $X(\Gamma)$ . C'è una mappa naturale  $t : R(\Gamma) \ni \rho \rightarrow \chi_\rho \in X(\Gamma)$  che associa ad ogni rappresentazione il suo carattere. Ovviamente  $t$  è surgettiva e l'insieme  $X(\Gamma)$  può essere visto come un quoziente di  $R(\Gamma)$  mediante la relazione “avere lo stesso carattere”, e  $t$  come la proiezione nel quoziente. Le funzioni  $\tau_\gamma$  passano al quoziente definendo delle funzioni su  $X(\Gamma)$  che saranno chiamate  $I_\gamma$ .

Se  $M$  è uno spazio topologico posso definire  $R(M) = R(\pi_1(M))$  e  $X(M) = X(\pi_1(M))$ . Nel seguito è importante il caso in cui il gruppo è finitamente generato. Se  $M$  è una varietà differenziabile questo accade se  $M$  ammette un buon ricoprimento finito (vedi proposizione 7), quindi se è compatta o è parte interna di una varietà compatta. Questo vale sempre per varietà iperboliche di volume finito (sottosezione 1.1.7).

### 5.1.1 Rappresentazioni riducibili e irriducibili

**Definizione 204.** Un sottospazio di  $\mathbb{K}^n$  si dice **invariante** per  $\rho$  se viene mandato in se stesso da ogni elemento dell'immagine di  $\rho$ . La rappresentazione si dice **irriducibile** se gli unici sottospazi invarianti sono quelli banali, altrimenti si dice **riducibile**. Si dice **assolutamente irriducibile** se è irriducibile come rappresentazione in  $GL_n(\mathbb{F})$  con  $\mathbb{F}$  chiusura algebrica di  $\mathbb{K}$ .

Ovviamente assolutamente irriducibile implica irriducibile. L'irriducibilità si conserva per coniugazione.

**Lemma 205.** *Una rappresentazione in  $SL_2(\mathbb{K})$  con immagine abeliana non è assolutamente irriducibile.*

*Dim :* Se l'immagine è contenuta in  $\{\pm\mathbb{I}\}$  è riducibile. Altrimenti c'è un elemento  $A$  nell'immagine che visto come elemento di  $SL_2(\mathbb{F})$  (chiusura algebrica di  $\mathbb{K}$ ) in forma di Jordan è del tipo  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  con  $\lambda = \pm 1$  oppure  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  con  $\lambda \neq \pm 1$ . Se  $B$  è un'altro elemento dell'immagine imponendo le condizioni di commutazione e poi la condizione sul determinante si ottiene nel primo caso  $B = \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , nel secondo caso  $B$  è diagonale. In ogni caso il sottospazio generato dal primo elemento della base di Jordan di  $A$  è invariante.  $\square$

**Proposizione 206.** *Se due rappresentazioni in  $SL_2(\mathbb{C})$  hanno lo stesso carattere e una delle due è irriducibile allora sono coniugate. Quindi se due rappresentazioni hanno lo stesso carattere o sono entrambe irriducibili o sono entrambe riducibili.*

*Dim :* [CS1, prop. 1.5.2].  $\square$

**Definizione 207.** Possiamo quindi dire che un carattere è **irriducibile** se è il carattere di una rappresentazione irriducibile, altrimenti sarà **riducibile**.

**Proposizione 208.** *Ogni rappresentazione riducibile in  $GL_2(\mathbb{K})$  ha lo stesso carattere di una rappresentazione diagonale, cioè di una rappresentazione la cui immagine è tutta fatta di matrici diagonali.*

*Dim :* Sia  $L$  un sottospazio invariante di dimensione 1 per una rappresentazione riducibile  $\rho$ . Scelgo una base  $e_1, e_2$  con  $e_1 \in L$ . In questa base  $\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ 0 & d_\gamma \end{pmatrix}$  e  $\rho(\gamma_1\gamma_2) = \begin{pmatrix} a_{\gamma_1}a_{\gamma_2} & a_{\gamma_1}b_{\gamma_2} + b_{\gamma_1}d_{\gamma_2} \\ 0 & d_{\gamma_1}d_{\gamma_2} \end{pmatrix}$ . Quindi  $\rho'$  definito da  $\rho'(\gamma) = \begin{pmatrix} a_\gamma & 0 \\ 0 & d_\gamma \end{pmatrix}$  è una rappresentazione e ovviamente ha lo stesso carattere di  $\rho$ .  $\square$

## 5.2 La varietà delle rappresentazioni

Nel seguito  $\Gamma$  sarà sempre un gruppo finitamente generato. In questo caso è possibile dare a  $R(\Gamma)$  e  $X(\Gamma)$  una struttura di varietà algebrica affine astratta.

### 5.2.1 Struttura algebrica

**Definizione 209.** Sia  $\mathbb{Z}^{(n)}$  il gruppo libero generato da  $n$  generatori  $z_1 \dots z_n$ . Una **presentazione** di  $\Gamma$  è un omomorfismo di gruppi  $P : \mathbb{Z}^{(n)} \rightarrow \Gamma$  surgettivo. Definisco  $\gamma_i = P(z_i)$  per  $i = 1 \dots n$ . I  $\gamma_i$  sono i **generatori** di  $\Gamma$  per quella presentazione. Viceversa, fissato un insieme finito di generatori di  $\Gamma$   $\{\gamma_1 \dots \gamma_n\}$ , trovo un'unica presentazione che ha esattamente quei generatori.

Il gruppo  $\Gamma$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}^{(n)} / \ker P$ . Gli elementi del sottogruppo  $\ker P$  si dicono **relazioni**. Se il sottogruppo  $\ker P$  è finitamente generato,  $P$  si dice una **presentazione finita**. Se  $\{r_1 \dots r_k\}$  è un insieme di generatori di  $\ker P$  il gruppo  $\mathbb{Z}^{(n)} / \ker P$  sarà indicato con  $\langle z_1 \dots z_n \mid r_1 \dots r_k \rangle$ .

Fissato un'altro gruppo  $G$ , dico che gli elementi  $g_1, \dots, g_n$  di  $G$  **rispettano le relazioni** di  $P$  se l'omomorfismo  $Q : \mathbb{Z}^{(n)} \rightarrow G$  tale che  $Q(z_i) = g_i$  ha un nucleo che contiene  $\ker P$ . Scritta più esplicitamente questa condizione diventa: per ogni multi-indice  $(i_1 \dots i_m) \in \{1 \dots n\}^m$  e  $(s_1 \dots s_m) \in \{+1, -1\}^m$ , vale che  $z_{i_1}^{s_1} z_{i_2}^{s_2} \dots z_{i_m}^{s_m} \in \ker P \Rightarrow g_{i_1}^{s_1} g_{i_2}^{s_2} \dots g_{i_m}^{s_m} = e$ .

**Proposizione 210.** *Fissata una presentazione  $P$  di  $\Gamma$ , un omomorfismo di gruppi  $\rho : \Gamma \rightarrow G$  è univocamente determinato dai valori  $\rho(\gamma_i)$  che assume sull'insieme dei generatori. Fissati  $g_1 \dots g_n \in G$  esiste un omomorfismo di gruppi  $\rho$  tale che  $\rho(\gamma_i) = g_i$  se e solo se i  $g_i$  rispettano le relazioni di  $P$*

*Dim :* per il primo teorema di omomorfismo.  $\square$

Scelta una presentazione  $P$  di  $\Gamma$ , una rappresentazione in  $SL_2(\mathbb{C})$  può essere identificata come una  $n$ -upla di matrici di  $SL_2(\mathbb{C})$  che rispetti le relazioni di  $P$ . Identificando lo spazio delle matrici  $2 \times 2$  con  $\mathbb{C}^4$ , l'insieme  $R(\Gamma)$  è in corrispondenza biunivoca con  $R_P = \{(g_1 \dots g_n) \in (\mathbb{C}^4)^n \mid \forall i \det g_i = 1 \text{ e i } g_i \text{ rispettano le relazioni di } P\}$ , cioè con un sottoinsieme di  $\mathbb{C}^{4n}$ . Si vede bene che tutte le condizioni si possono scrivere come somme di prodotti di coefficienti delle matrici, e sono quindi relazioni polinomiali a coefficienti interi. Queste relazioni generano un ideale  $I \subset \mathbb{Q}[x_1 \dots x_{4n}]$  tale che  $R_P = \mathcal{V}(I)$ ,  $R_P$  è quindi una varietà algebrica definita su  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{C}^{4n}$ . La bigezione fra  $R(\Gamma)$  e  $R_P$  induce una struttura di varietà algebrica affine astratta su  $R(\Gamma)$ , ma la costruzione richiede la scelta di una presentazione  $P$ . In realtà la struttura indotta su  $R(\Gamma)$  non dipende dalla presentazione scelta:

**Proposizione 211.** *La struttura di varietà algebrica affine astratta così definita su  $R(\Gamma)$  non dipende dalla presentazione scelta, ossia date due presentazioni  $P$  e  $Q$  la mappa  $c : R_P \xrightarrow{\sim} R_Q$  indotta dalle corrispondenze biunivoche con  $R(\Gamma)$  descritte sopra è un isomorfismo di varietà affini su  $\mathbb{Q}$ .*

*Dim :* Siano  $P : \mathbb{Z}^{(n)} \rightarrow \Gamma$  e  $Q : \mathbb{Z}^{(m)} \rightarrow \Gamma$  due presentazioni. Per vedere che la mappa  $c$  è un isomorfismo basta dimostrare che è un morfismo, poi invertendo i ruoli di  $P$  e  $Q$  si vede che lo è anche l'inversa. La mappa  $c$  si



scrive esplicitamente. Sia  $\gamma_i$  l'insieme dei generatori per  $Q$ . Per ogni  $i$  scelgo uno  $\zeta_i \in P^{-1}(\gamma_i) \subset \mathbb{Z}^{(n)}$ . Gli  $\zeta_i$  sono i "nomi" nella presentazione  $P$  dei generatori della presentazione  $Q$ . Ogni  $\zeta_i$  si scrive come  $\zeta_i = z_{j_{i1}}^{s_{i1}} z_{j_{i2}}^{s_{i2}} \cdots z_{j_{ik_i}}^{s_{ik_i}}$  per opportuni multi-indici  $j_i$  e  $s_i$ . La mappa  $c$  si scrive dunque come:

$$(\mathbb{C}^4)^n \ni (g_1 \dots g_n) \rightarrow (g_{j_{11}}^{s_{11}} g_{j_{12}}^{s_{12}} \cdots g_{j_{1k_1}}^{s_{1k_1}}, \dots) \in (\mathbb{C}^4)^m.$$

Ogni componente è un polinomio in  $\mathbb{Q}[X_1 \dots X_{4n}]$  nei coefficienti delle matrici, quindi la mappa è un morfismo su  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**Proposizione 212.** *Le mappe  $\tau_\gamma$  sono nell'anello delle coordinate di  $R(\Gamma)$ .*

*Dim :* Identificando  $R(\Gamma)$  con  $R_P$ , sono restrizione di un polinomio di primo grado (la traccia di una matrice è somma di alcuni coefficienti della matrice).  $\square$

Indico con  $\Delta \subset R(\Gamma)$  l'insieme delle rappresentazioni diagonali.

**Proposizione 213.** *L'insieme  $\Delta$  è una varietà affine definita su  $\mathbb{Q}$ .*

*Dim :* Basta scegliere una presentazione  $P$  e immergere  $R(\Gamma) \simeq R_P$ . Una rappresentazione è diagonale se e solo se tutti i generatori vengono mandati in una matrice diagonale, quindi  $\Delta = V(I)$  con  $I \subset \mathbb{C}[x_1 \dots x_{4n}]$  ideale generato da alcuni polinomi del tipo  $P(X_1 \dots X_{4n}) = X_i$ .  $\square$

**Lemma 214.** *Sia  $R_0$  una componente irriducibile di  $R(\Gamma)$ . Ogni rappresentazione equivalente ad una rappresentazione in  $R_0$  è ancora in  $R_0$ .*

*Dim :* Per  $k = \mathbb{C}$  vedi [CS1, prop. 1.1.1]. Per gli altri casi basta pensare che le componenti irriducibili su  $\mathbb{C}$  sono più piccole di quelle sugli altri campi, quindi ogni componente irriducibile su  $k$  contiene una componente irriducibile su  $\mathbb{C}$ .  $\square$

## 5.2.2 Sottovarietà di rappresentazioni

Prendiamo una sottovarietà irriducibile  $V \subset R(\Gamma)$  definita su  $k$ . Le funzioni  $\tau_\gamma$  si restringono (o passano al quoziente) dando elementi di  $\mathcal{A}_V$ , che chiamo ancora  $\tau_\gamma$ . Un punto  $\rho \in V$  è una rappresentazione  $\rho : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ , quindi possiamo scrivere

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} a_\gamma(\rho) & b_\gamma(\rho) \\ c_\gamma(\rho) & d_\gamma(\rho) \end{pmatrix}$$

dove  $a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma \in \mathcal{A}_V$  perché restrizioni di funzioni polinomiali in  $\mathbb{C}^{4n}$ . Chiaramente  $a_\gamma d_\gamma - c_\gamma b_\gamma = 1$  quindi possiamo porre

$$\Gamma \ni \gamma \rightarrow \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{a}_\gamma & \tilde{b}_\gamma \\ \tilde{c}_\gamma & \tilde{d}_\gamma \end{pmatrix} \in SL_2(k[V]) \subset SL_2(k(V))$$

Otteniamo una rappresentazione in  $SL_2(k(V))$  che indico con  $\mathcal{R}$ . Il carattere della rappresentazione  $\mathcal{R}$  associa ad ogni elemento  $\gamma \in \Gamma$  la funzione  $\chi_{\mathcal{R}}(\gamma) = a_\gamma + d_\gamma = \tau_\gamma$  visto che  $(a_\gamma + d_\gamma)(\rho) = \text{tr}(\rho(\gamma)) = \chi_\rho(\gamma)$ .

Alcune proprietà della rappresentazione  $\mathcal{R}$  si possono dedurre da proprietà simili dei punti di  $V$ . Ad esempio è chiaro che se  $V$  contiene una rappresentazione fedele anche  $\mathcal{R}$  è fedele.

Se  $V$  è una curva definita su  $\mathbb{C}$ , indichiamo il modello proiettivo regolare di  $V$  con  $\tilde{V}$ . Abbiamo un isomorfismo di campi  $\mathbb{C}(V) \simeq \mathbb{C}(\tilde{V})$ . In questo caso la rappresentazione  $\mathcal{R}$  può essere vista come una rappresentazione in  $SL_2(\mathbb{C}(\tilde{V}))$ . Se scegliamo un punto  $x \in \tilde{V}$ , questo definisce una valutazione  $v_x : \mathbb{C}(\tilde{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$  (vedi esempio 140).

Vediamo qualche proprietà di rappresentazioni  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$  dove  $\mathbb{F}$  è un campo con una assegnata valutazione  $v : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Indico con  $\mathcal{O}$  l'anello di valutazione di  $v$ , e con  $\tau_\gamma$  l'elemento  $\text{tr } \mathcal{R}(\gamma)$

**Lemma 215.** *Fissato un elemento  $\gamma \in \Gamma$ , abbiamo che  $\mathcal{R}(\gamma)$  è coniugato ad un elemento di  $SL_2(\mathcal{O}) \Leftrightarrow \tau_\gamma \in \mathcal{O}$ .*

*Dim :* (Come nella dimostrazione di [CS1, thm. 2.2.1]).  $\Rightarrow$ : Se  $\mathcal{R}(\gamma)$  è coniugato a  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con  $a, b, c, d \in \mathcal{O}$ ,  $\tau_\gamma = a + d \in \mathcal{O}$ .

$\Leftarrow$ : Abbiamo  $\tau_\gamma \in \mathcal{O}$ . Se tutti i vettori di  $\mathbb{F}^2$  sono autovettori di  $\mathcal{R}(\gamma)$ , allora è  $\pm \mathbb{I} \in SL_2(\mathcal{O})$ . Altrimenti prendo un vettore  $w \in \mathbb{F}^2$  che non sia un autovettore di  $\mathcal{R}(\gamma)$ . Posso coniugare mettendomi nella base  $\langle w, \mathcal{R}(\gamma)w \rangle$ . La matrice diventa  $\begin{pmatrix} 0 & -\det \mathcal{R}(\gamma) \\ 1 & \text{tr } \mathcal{R}(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \tau_\gamma \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O})$ .  $\square$

**Lemma 216.**  $\chi_{\mathcal{R}}(\Gamma) \subset \mathcal{O} \Leftrightarrow \mathcal{R}$  è coniugata ad una rappresentazione in  $SL_2(\mathcal{O})$ .

*Dim :*  $\Leftarrow$ : Segue dal lemma precedente.

$\Rightarrow$ : Segue da [MS1, prop. II.3.17].  $\square$

## 5.3 La varietà dei caratteri

### 5.3.1 Struttura algebrica

Dare una struttura di varietà affine su  $X(\Gamma)$  è più complicato. Si vuole dare una struttura definita su  $\mathbb{Q}$  che renda la mappa  $t$  un morfismo, e tale che l'anello delle coordinate di  $X(\Gamma)$  sia proprio quello generato dalle funzioni  $I_\gamma \in \{f : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}\}$ . Questa seconda condizione determina univocamente la struttura algebrica di  $X(\Gamma)$ , infatti un isomorfismo fra gli anelli di funzioni induce un isomorfismo fra le varietà. Bisogna però dimostrare che una tale struttura algebrica esiste.

Sia  $T$  l'anello generato dalle funzioni  $\tau_\gamma \in \mathcal{A}_{R(\Gamma)}$ .

**Proposizione 217.** *L'anello  $T$  è finitamente generato e si può trovare un insieme finito di generatori contenuto nella famiglia  $\{\tau_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$*

*Dim* : Sia  $\gamma_1 \dots \gamma_n$  un insieme di generatori di  $\Gamma$  e  $T_0$  l'anello generato dalle funzioni  $\tau_{\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_r}}$  con  $i_1 \dots i_r \in \{1 \dots n\}$  tutti distinti.  $T_0$  è finitamente generato, quindi basta dimostrare che  $T_0 = T$ , ossia che  $\forall \gamma \in \Gamma \tau_\gamma \in T_0$ . Per questo vedi [CS1, prop. 1.4.1].  $\square$

Fissato un insieme  $G = \{g_1 \dots g_m\}$  di elementi di  $\Gamma$  tali che  $\tau_{g_1} \dots \tau_{g_m}$  generino  $T$ , si può definire una mappa  $t : R(\Gamma) \ni \rho \rightarrow (\tau_{g_1}(\rho) \dots \tau_{g_m}(\rho)) \in \mathbb{C}^m$  (chiamata ancora  $t$  perché sarà identificata con l'altra mappa  $t$ ). Siccome  $\tau_{g_1} \dots \tau_{g_m}$  generano  $T$ , il carattere di una rappresentazione  $\rho$  è determinato da  $t(\rho)$ . Quindi c'è una bigezione tra  $X(\Gamma)$  e  $t(R(\Gamma))$  che identifica la mappa  $t$  definita ora con la mappa  $t$  definita precedentemente.

Dobbiamo ora dimostrare che l'insieme  $t(R(\Gamma))$  è una varietà affine definita su  $\mathbb{Q}$ . Questo è di più di quando dimostrato in [CS1], dove dice solo che  $t(R(\Gamma))$  è definita su  $\mathbb{C}$ , e la dimostrazione che segue è più semplice di quella di [CS1]. Questo perché nell'articolo si usa una versione più debole del lemma 216 che richiede fra le ipotesi che la rappresentazione sia assolutamente irriducibile. Ma in [MS1] viene dimostrata la versione che uso io, che abbrevia parecchio le cose. Voglio dimostrare che ogni componente irriducibile  $R_0 \subset R(\Gamma)$ ,  $t(R_0)$  è una varietà affine irriducibile. A questo punto siccome  $R(\Gamma)$  è unione delle sue componenti irriducibili,  $t(R(\Gamma))$  è unione di varietà affini e quindi una varietà affine.

$R(\Gamma)$  è una varietà affine definita su  $\mathbb{Q}$ , e può quindi essere vista come varietà affine definita su  $k \supset \mathbb{Q}$ .

**Teorema 218.** *Se  $R_0 \subset R(\Gamma)$  è una componente irriducibile di  $R(\Gamma)$  su  $k$ , allora  $t(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  è una varietà irriducibile su  $k$ .*

*Dim* :  $t|_{R_0}$  è un morfismo definito su una varietà affine irriducibile, quindi per la proposizione 78  $V = \overline{t(R_0)}$  è una varietà affine irriducibile definita su  $k$  e  $t|_{R_0} : R_0 \rightarrow V$  è un morfismo dominante. Scegliamo un  $x \in V$  e dimostriamo che  $x \in t(R_0)$ .

Per dimostrare questo voglio ricondurmi al caso  $k = \mathbb{C}$ . Considero  $R_0$  e  $V$  come varietà affini definite su  $\mathbb{C}$ . Non saranno più irriducibili. Considero una componente irriducibile  $V'$  di  $V$  che contiene  $x$ .  $t^{-1}(V')$  è un chiuso, contiene alcune componenti irriducibili di  $R_0$ . Su una di quelle componenti, che chiamo  $R'_0$ , la mappa  $t$  sarà dominante. Ora sono nella stessa situazione di prima con  $k = \mathbb{C}$ . Per comodità nel seguito chiamo  $V' = V$ ,  $R'_0 = R_0$ .

La dimostrazione per il caso  $k = \mathbb{C}$ , che segue, è simile a quella in [CS1, prop. 1.4.4], ma più semplice.  $t|_{R_0} : R_0 \rightarrow V$  è un morfismo dominante, quindi per il teorema 80  $t(R_0)$  contiene un aperto non vuoto di  $V$ . Quindi esiste un chiuso proprio  $W \subsetneq V$  tale che  $V \setminus W \subset t(R_0)$ . Dobbiamo dimostrare che  $t(R_0) = V$ .

Se  $\dim V = 0$  per il corollario 64 non ha sottovarietà proprie, quindi  $W = \emptyset$ .

Possiamo supporre  $\dim V > 0$ . Per la proposizione 115 c'è una curva  $C \subset V$ , tale che  $x \in C \not\subset W$ .  $C \setminus W$  è un aperto di  $C$ . Applicando il

corollario 116 ad una componente irriducibile di  $t^{-1}(C) \cap R_0$  ristretta alla quale  $t$  sia dominante, trovo una curva  $D \subset R_0$  tale che  $t|_D : D \rightarrow C$  sia dominante.

Immergiamo la varietà affine astratta  $R_0$  in un  $\mathbb{C}^n$  e consideriamo il suo completamento proiettivo  $\overline{R_0}$ . L'inclusione  $i : D \hookrightarrow R_0$  definisce per la proposizione 123 la mappa  $\hat{i} : \tilde{D} \rightarrow \overline{R_0}$ . Nello stesso modo  $t|_D$  definisce  $\hat{t} : \tilde{D} \rightarrow \overline{C}$ , surgettiva perchè  $t|_D$  è dominante. Sappiamo come si comportano queste mappe sui punti non ideali, infatti per la proposizione 130 se  $z \in \tilde{C}$  non ideale  $t(\hat{i}(z)) = t(j(z)) = \hat{t}(z)$ , dove  $j : \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$  è il morfismo birazionale definito dopo il teorema 122. Siccome  $\hat{t}$  è surgettiva abbiamo un  $y \in \tilde{D}$  tale che  $\hat{t}(y) = x$ . Se  $y$  non è ideale  $y' = j(y) \in R_0$  è tale che  $t(y') = x$ , quello che volevamo. Quindi possiamo supporre che  $y$  sia un punto ideale per  $\tilde{D}$ .

Abbiamo una curva di rappresentazioni  $D$ , e un punto ideale  $y \in D$ . Posso considerare la rappresentazione  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C}(\tilde{D}))$ , definita nella sezione 5.2.2. Sia  $v$  la valutazione associata al punto ideale  $y$ ,  $\mathcal{O}$  il suo anello di valutazione. Vogliamo applicare il lemma 216, per questo manca da far vedere che  $\chi_{\mathcal{R}}(\Gamma) \subset \mathcal{O}$ , cioè che tutte le funzioni  $\tilde{\tau}_\gamma$  sono in  $\mathcal{O}$ , cioè non hanno un polo in  $y$ . Basta farlo vedere per le funzioni  $\tilde{\tau}_{g_1} \dots \tilde{\tau}_{g_m}$  dove  $g_1 \dots g_m$  sono quelli scelti per generare  $T$ . Su tutti i punti  $z \in D$  non ideali  $\tilde{\tau}_{g_i}(z) = \tau_{g_i}(j(z)) = [t(j(z))]_i = [\hat{t}(z)]_i$ , dove con  $[\cdot]_i$  indico la componente  $i$ -ma di un punto in  $\mathbb{C}^m$ . Esiste un intorno aperto  $U$  di  $y$  per la topologia classica tale che  $U \setminus \{y\}$  è fatto di punti non ideali. Per  $U \ni z \rightarrow y$  abbiamo che  $\tilde{\tau}_{g_i}(z) = [\hat{t}(z)]_i \rightarrow [\hat{t}(y)]_i = [x]_i < \infty$ . Quindi  $\chi_{\mathcal{R}}(\Gamma) \subset \mathcal{O}$ , e, applicando il lemma, abbiamo che  $\mathcal{R}$  è coniugata ad una rappresentazione in  $SL_2(\mathcal{O})$ .

Abbiamo che esiste una rappresentazione  $\mathcal{R}' : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathcal{O})$  e una matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}(\tilde{D}))$  tale che per ogni  $\gamma \in \Gamma$   $\mathcal{R}'(\gamma) = M\mathcal{R}(\gamma)M^{-1}$ . Sia  $U$  l'aperto  $\tilde{D} \setminus \{\text{punti ideali di } \tilde{D} \text{ e poli delle funzioni } a, b, c, d\}$ . Consideriamo la mappa  $d : U \ni z \rightarrow \left\{ \gamma \rightarrow \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} j(z)(\gamma) \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}^{-1} \right\} \in R(\Gamma)$ . Siccome per ogni  $z \in U$   $d(z)$  è coniugata a  $j(z) = \hat{i}(z) \in R_0$ , per la proposizione 214 anche  $d(z) \in R_0$ , quindi  $d : U \rightarrow R_0$ . Questa mappa è un rapporto fra polinomi, quindi per la proposizione 108 si estende ad una mappa razionale  $\bar{d} : \tilde{D} \rightarrow \overline{R_0}$ , che è un morfismo per la proposizione 119. Per continuità se  $\mathcal{R}'(\gamma) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O})$ , avremo che  $\bar{d}(y)(\gamma) = \begin{pmatrix} p(y) & q(y) \\ r(y) & s(y) \end{pmatrix}$ , quindi  $\bar{d}(y) \in R_0$ . Inoltre per ogni  $z \in U$   $t(\bar{d}(z)) = t(\hat{i}(z)) = \hat{t}(z)$  perchè sono coniugate. Per continuità  $t(\bar{d}(z)) = \hat{t}(z)$  per ogni  $z \in \tilde{D}$ , e in particolare  $t(\bar{d}(y)) = \hat{t}(y) = x$ , ma  $\bar{d}(y) \in R_0$ , quindi  $x \in t(R_0)$ .  $\square$

**Teorema 219.** *Scelto un insieme finito di generatori dell'anello  $T$ , che induce una mappa  $t$ , l'immagine  $t(R(\Gamma))$  è una varietà affine definita su  $\mathbb{Q}$ , o su un qualunque campo  $k$ ,  $\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{C}$ , la struttura di varietà affine astratta che viene indotta dalla bigezione con  $X(\Gamma)$  non dipende dalla scelta dei generatori, le funzioni  $I_\gamma$  sono morfismi e generano (su  $k$ ) l'anello delle coordinate  $\mathcal{A}_{X(\Gamma)}$ .*

*Dim* : Per il discorso fatto dopo la definizione della mappa  $t$ , l'immagine  $t(R(\Gamma)) = X$  è una varietà affine definita su  $\mathbb{Q}$  o su un sopracampo  $k$ . Inoltre l'anello delle funzioni di  $X$  è  $\mathcal{A}_X = k[X_1 \dots X_m]/\mathcal{I}(X)$  è generato dalle coordinate  $X_1 \dots X_m$  passate al quoziente. Ma per la definizione della mappa  $t$   $X_{i|X} = I_{g_i}$ , quindi  $\mathcal{A}_X$  è generato dalle funzioni  $I_{g_1} \dots I_{g_m}$ . Per la proposizione 217 preso un  $\gamma \in \Gamma$  esiste un polinomio  $P \in \mathbb{Z}[X_1 \dots X_m]$  tale che  $\tau_\gamma = P(\tau_{g_1} \dots \tau_{g_m})$ , e quindi  $I_\gamma = P(I_{g_1} \dots I_{g_m})$ , e abbiamo che tutte le funzioni  $I_\gamma$  sono morfismi. Sull'insieme  $X(\Gamma)$  posso considerare la  $k$ -algebra  $\mathcal{A}_{X(\Gamma)}$  generata dalle funzioni  $I_\gamma$ . La corrispondenza biunivoca fra  $X(\Gamma)$  e  $X$  induce un isomorfismo fra  $\mathcal{A}_X$  e  $\mathcal{A}_{X(\Gamma)}$ , quindi la coppia  $(X(\Gamma), \mathcal{A}_{X(\Gamma)})$  è una varietà affine astratta. Un altro sistema di generatori di  $T$  mi definisce un'altra mappa che chiamo  $t'$ .  $t'(R_0)$  sarà ancora una varietà affine, con una corrispondenza biunivoca con  $X(\Gamma)$  e quindi una con  $t(R(\Gamma))$  che mi induce un isomorfismo degli anelli di funzioni. Per la proposizione 82 questa corrispondenza è un isomorfismo di varietà affini, quindi la struttura di varietà affine astratta data su  $X(\Gamma)$  non dipende dalla scelta dei generatori di  $T$ .  $\square$

**Esempio 220** ( $X(T^2) = X(\mathbb{Z}^2)$ , la varietà dei caratteri del toro).

Una rappresentazione  $\rho : \mathbb{Z}^2 \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  ha immagine abeliana. Per il lemma 205 non è assolutamente irriducibile, quindi è riducibile perché  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso. Per la proposizione 208  $\rho$  ha lo stesso carattere di una rappresentazione diagonale. Quindi per descrivere i caratteri di  $\mathbb{Z}^2$  basta considerare le rappresentazioni in  $\Delta \subset R(\mathbb{Z}^2)$ . Una tale rappresentazione  $\rho$  è determinata da due matrici  $\rho\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $\rho\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix}$ . Scritta esplicitamente la rappresentazione è  $\rho\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} l^a m^b & 0 \\ 0 & l^{-a} m^{-b} \end{pmatrix}$ . Il carattere di  $\rho$  è la funzione  $\chi_\rho : \mathbb{Z}^2 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow l^a m^b + l^{-a} m^{-b} \in \mathbb{C}$ , dove  $l, m$  sono i valori che determinano  $\rho$ . Si può identificare ogni tale rappresentazione con un punto del piano  $\mathbb{C}^2$ , associando a  $\rho$  il punto  $(l, m)$ . Questa mappa che chiamo  $d : \Delta \hookrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}^2$  è bigettiva ed è un morfismo in  $\mathbb{C}^2$ . Abbiamo una mappa  $p : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow X(\mathbb{Z}^2)$  che associa ad ogni punto la funzione  $\chi_{(l,m)}\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = l^a m^b + l^{-a} m^{-b}$ . La mappa  $p$  è surgettiva per il discorso di prima, ma non è iniettiva, infatti  $p(l, m) = p(l^{-1}, m^{-1})$ .  $p$  può essere vista come la proiezione nel quoziente dell'azione dell'involuzione  $\sigma(l, m) = (l^{-1}, m^{-1})$ . Quindi possiamo vedere  $X(\mathbb{Z}^2)$  come un quoziente di  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  con una proiezione che è "quasi sempre" 2-1. Questa descrizione permette di dire che  $X(\mathbb{Z}^2)$  è una varietà irriducibile di dimensione 2.

### 5.3.2 Curve di caratteri

Prendiamo una curva  $C \subset X(\Gamma)$  definita su  $\mathbb{C}$ .

**Proposizione 221.** *L'anello delle coordinate di  $C$  è generato dalle restrizioni delle mappe  $I_\gamma$ .*

*Dim* : Scegliendo dei generatori  $\{g_1 \dots g_m\}$  di  $T$  e immergendo  $X(\Gamma)$  in  $\mathbb{C}^m$ , si vede che la funzione  $X_i$  coincide con  $I_{g_i}$ , e l'anello delle coordinate di  $C$  è generato dalle restrizioni delle coordinate  $X_i$   $\square$

**Proposizione 222.** *Scelta una curva di caratteri  $C$  in  $X(\Gamma)$  e un punto ideale  $x \in \tilde{C}$  si può costruire un campo  $\mathbb{F}$  con un anello di valutazione  $\mathcal{O}$ , e una rappresentazione  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$  che non sia coniugata ad una rappresentazione  $\Gamma \rightarrow SL_2(\mathcal{O})$ . Più precisamente  $\mathcal{R}(\gamma)$  è coniugato ad un elemento di  $SL_2(\mathcal{O}) \Leftrightarrow \tilde{I}_\gamma \neq \infty$ .*

*Dim* : Applicando il corollario 116 ad una componente irriducibile di  $t^{-1}(C)$  ristretta alla quale  $t$  sia dominante, trovo una curva di caratteri  $D \subset R(\Gamma)$  tale che  $s = t|_D : D \rightarrow C$  sia dominante. Per la proposizione 123 il morfismo  $\tilde{s} : \tilde{D} \rightarrow \tilde{C}$  è surgettivo. Considero un punto ideale  $x \in \tilde{C}$ . La sua immagine inversa  $t|_D^{-1}(x)$  è fatta di punti ideali. Prendo  $y \in t|_D^{-1}(x)$ .

Per la proposizione 129 c'è qualche funzione della forma  $\tilde{I}_\gamma$  che ha un polo in  $x$ . Quindi  $\tilde{\tau}_\gamma$  ha un polo in  $y$ .

Possiamo costruire una rappresentazione  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C}(\tilde{D}))$  come nella sezione 5.2.2. Il punto  $y$  determina una valutazione su  $\mathbb{C}(\tilde{D})$ , con anello di valutazione  $\mathcal{O}$ . Per quanto detto sopra c'è un  $\gamma$  con  $\tau_\gamma \notin \mathcal{O}$ . Per il lemma 215  $\tau_\gamma$  non è coniugato a nessun elemento di  $SL_2(\mathcal{O})$ , quindi la rappresentazione  $\mathcal{R}$  non è coniugata ad una rappresentazione a valori in  $SL_2(\mathcal{O})$ .

Questa costruzione è descritta in [CS1].

Altra costruzione. Sia  $V$  una componente irriducibile di  $t^{-1}(C)$  ristretta alla quale  $t$  sia dominante. Sia  $\mathbb{F} = \mathbb{C}(V)$  il campo delle funzioni di  $V$ . La  $t$  è dominante quindi per la proposizione 77 induce un'immersione  $t^* : \mathbb{C}(C) \hookrightarrow \mathbb{C}(V)$ , quindi  $\mathbb{F}$  può essere visto come un'estensione di  $\mathbb{C}(C)$  finitamente generata. Il punto ideale  $x$  determina una valutazione  $v_x : \mathbb{C}(C) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Per il teorema 142 questa valutazione si estende ad una valutazione  $v : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $v|_{\mathbb{C}(C)} = dv_x$ , con anello di valutazione che chiamo  $\mathcal{O}$ . Come sopra c'è qualche funzione della forma  $I_\gamma$  con  $v_x(I_\gamma) < 0$ . Quindi  $v(\tau_\gamma) < 0$ ,  $\tau_\gamma \notin \mathcal{O}$ . Per il lemma 215 la rappresentazione  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C}(V))$ , descritta nella sezione 5.2.2, non è coniugata a nessuna rappresentazione a valori in  $SL_2(\mathcal{O})$ .

Una costruzione simile a questa, ma fatta solo nel caso in cui la curva  $C$  sia una componente irriducibile di  $X(\Gamma)$ , si trova in [CGLS].  $\square$

Un punto ideale di una curva esiste sempre (proposizione 125), ma non sempre esistono curve di caratteri. Affinché esistano è necessario e sufficiente che almeno una componente irriducibile di  $X(\Gamma)$  abbia dimensione positiva. Ci sono delle condizioni sufficienti perché questo accada, che daremo nella prossima sezione.

## 5.4 Dimensione della varietà dei caratteri

Vogliamo dare delle condizioni sul gruppo  $\Gamma$  affinché la varietà  $X(\Gamma)$  abbia dimensione almeno uno. È sufficiente che  $X(\Gamma)$  abbia infiniti punti, infatti le varietà irriducibili su  $\mathbb{C}$  di dimensione 0 sono singoli punti e ogni varietà è unione finita di varietà irriducibili.

Questo criterio è sufficiente per il gruppo  $\mathbb{Z}$ , infatti per ogni matrice  $A \in SL_2(\mathbb{C})$  esiste un'unica rappresentazione  $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  con  $\rho(1) = A$ . Da questo si vede che  $X(\mathbb{Z})$  è infinito. Con il ragionamento dell'esempio 220 si vede che è proprio una curva.

Inoltre, sempre con il ragionamento dell'esempio 220 si vede che  $X(\mathbb{Z}^n)$  è una varietà irriducibile di dimensione  $n$ .

Un omomorfismo di gruppi  $h : \Gamma \rightarrow H$  induce morfismi  $h^* : R(H) \ni \rho \rightarrow \rho \circ h \in R(\Gamma)$  e  $h^* : X(H) \ni \chi \rightarrow \chi \circ h \in X(\Gamma)$ . Se  $h$  è surgettivo le mappe  $h^*$  sono iniettive, e quindi  $\dim R(\Gamma) \geq \dim R(H)$  e  $\dim X(\Gamma) \geq \dim X(H)$ .

Da questo si vede che ogni gruppo con un omomorfismo surgettivo (basta non banale) in  $\mathbb{Z}$  ha una curva di caratteri riducibili, e se il gruppo ha un omomorfismo surgettivo su  $\mathbb{Z}^n$  la sua varietà dei caratteri ha una componente irriducibile di dimensione almeno  $n$ .

Dato un gruppo  $\Gamma$  finitamente generato posso considerare il suo abelianizzato,  $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ . Questo è un gruppo abeliano finitamente generato, e quindi della forma  $\mathbb{Z}^{n_0} \oplus \bigoplus \mathbb{Z}_p^{n_p}$ . Se  $n_0 > 0$  la varietà dei caratteri del gruppo  $\Gamma$  ha una componente irriducibile di dimensione almeno  $n_0$ . Quindi se l'abelianizzato di un gruppo  $\Gamma$  è infinito,  $X(\Gamma)$  contiene almeno una curva.

Nel caso di uno spazio topologico  $M$  l'abelianizzato del gruppo  $\pi_1(M)$  è il gruppo  $H_1(M)$  e  $n_0 = \dim H_1(M, \mathbb{Q})$ . Se  $M$  è una varietà differenziabile compatta  $n_0 = \beta_1$ , primo numero di Betti.

**Proposizione 223.** *Se  $M$  è una varietà differenziabile compatta esiste una componente irriducibile  $X_0 \subset X(M)$  con  $\dim X_0 \geq \beta_1$ . Se  $H_1(M)$  è infinito allora  $X(M)$  contiene una curva di caratteri.*  $\square$

Questo criterio include tutte le superfici compatte orientabili di genere maggiore di 0, infatti  $H_1(\Sigma_g) = \mathbb{Z}^{2g}$  e  $H_1(\Sigma_g^k) = \mathbb{Z}^{2g+k-1}$  se  $k > 0$ .

Inoltre include anche tutte le 3-varietà compatte orientabili con almeno una componente connessa del bordo che non sia una sfera (vedi proposizione 10).

Se  $M$  è una varietà iperbolica non compatta ma di volume finito, allora è parte interna di una varietà compatta le cui componenti di bordo sono tori (vedi sottosezione 1.1.7), quindi  $X(M)$  ha una componente irriducibile  $X_0$  con  $\dim X_0 > 0$ .

Ci sono poi altri criteri per dare stime più precise della dimensione della varietà dei caratteri.

Nel caso in cui  $\Gamma = \mathbb{Z}^{(n)}$ , il gruppo libero con  $n$  generatori,  $n > 1$ , si può dare una stima migliore. Infatti per dare una rappresentazione di  $\Gamma$  basta

scegliere  $n$  matrici qualunque. Si può calcolare esattamente la dimensione di  $X(\mathbb{Z}^{(n)})$  notando che  $R(\mathbb{Z}^{(n)}) = SL_2(\mathbb{C})^n$ , varietà irriducibile di dimensione  $3n$  che contiene delle rappresentazioni irriducibili, e usando la seguente proposizione si vede che  $\dim X(\mathbb{Z}^{(n)}) = 3(n-1)$  per  $n > 1$ .

I gruppi liberi sono importanti in topologia delle 3-varietà perché sono i gruppi fondamentali dei **corpi con manici**, delle 3-varietà a bordo ottenute attaccando degli 1-manici ad un 3-disco.

**Proposizione 224. (Dimensione di  $X(\Gamma)$ )** *Se  $R_0$  è una componente irriducibile (su  $k$ ) di  $R(\Gamma)$  che contiene una rappresentazione irriducibile, e se  $X_0 = t(R_0)$ , allora  $\dim X_0 = \dim R_0 - 3$ .*

*Dim :* Per la proposizione 66, è sufficiente dimostrare il teorema per  $k = \mathbb{C}$ . In questo caso vedi [CS1, corol. 1.5.3].  $\square$

Se il gruppo  $\Gamma$  ha una presentazione finita si può dare una stima della dimensione della varietà delle rappresentazioni. Se  $\Gamma \simeq \langle x_1 \dots x_n \mid r_1 \dots r_k \rangle$  si può dire che ogni componente irriducibile di  $R(\Gamma)$  ha dimensione almeno  $3(n-k)$ . Le relazioni  $r_i$  sono elementi del gruppo libero  $\mathbb{Z}^{(n)}$ ,  $r_i = z_{i_1} \dots z_{i_h}$ , e può quindi essere vista come funzione:  $r_i : SL_2(\mathbb{C})^n \ni (g_1 \dots g_n) \rightarrow g_{i_1} \dots g_{i_h} \in SL_2(\mathbb{C})$ , ed è un morfismo di varietà affini. In questo modo le  $k$  relazioni  $(r_1 \dots r_k)$  definiscono un morfismo  $r : SL_2(\mathbb{C})^n \rightarrow SL_2(\mathbb{C})^k$  fra una varietà affine di dimensione  $3n$  e una di dimensione  $3k$  per il teorema 79 l'immagine inversa  $r^{-1}((\mathbb{I} \dots \mathbb{I})) = R(\Gamma)$  o è vuoto o tutte le sue componenti irriducibili hanno dimensione maggiore o uguale a  $3(n-k)$ . Ma sappiamo che non può essere vuoto, infatti ogni gruppo ammette almeno la rappresentazione banale.

**Proposizione 225.** *Se un gruppo  $\Gamma$  ha una presentazione finita con  $n$  generatori e  $k$  relazioni la dimensione di ogni componente irriducibile di  $R(\Gamma)$  è maggiore o uguale a  $3(n-k)$ .*

*Se  $n-k > 1$  e  $\Gamma$  ammette almeno una rappresentazione irriducibile  $\rho_0$  in  $SL_2(\mathbb{C})$ , se  $R_0$  è una componente irriducibile di  $R(\Gamma)$  che contiene  $\rho_0$ , e  $X_0 = t(R_0)$ , allora  $\dim R_0 > 3$ , e quindi  $\dim X_0 > 0$ .*  $\square$

Questo criterio si può applicare ai gruppi fondamentali delle superfici chiuse. Infatti  $\pi_1(\Sigma_g)$  ha una rappresentazione con  $2g$  generatori e 1 relazione (vedi sottosezione 1.1.5). Per l'esistenza di una rappresentazione irriducibile in  $SL_2(\mathbb{C})$  vedi la sottosezione 1.1.7, e il lemma 260.

C'è un'altro criterio per i gruppi che sono gruppi fondamentali di qualche 3-varietà.

**Teorema 226. (Thurston)** *Sia  $M$  una 3-varietà compatta orientabile, e siano  $T_1 \dots T_s$  le componenti connesse di  $\partial M$  di genere 1 (tori) (possono esserci altre componenti connesse di  $\partial$  con altro genere). Sia  $\rho_0 : \pi_1(M) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  una rappresentazione irriducibile tale che, per ogni  $i \in \{1 \dots s\}$ , se  $H_i = i_{\#}(\pi_1(T_i)) < \pi_1(M)$ ,  $\rho_0(H_i) \not\subset \{\pm \mathbb{I}\} \subset SL_2(\mathbb{C})$ .*



Allora se  $R_0$  è una componente irriducibile di  $R(\pi_1(M))$  che contiene  $\rho_0$  abbiamo che  $\dim R_0 \geq 3 + s - 3\chi(M)$ , e quindi se  $X_0 = t(R_0)$  vale  $\dim X_0 \geq s - 3\chi(M)$ .

*Dim* : [CS1, prop. 3.2.1] □

Se  $\partial M$  non ha componenti connesse di genere 0 abbiamo che  $\chi(M) \leq 0$ , e quindi  $\dim X_0 \geq s$ .

Se inoltre abbiamo una rappresentazione  $\rho_0$  che sia fedele oltre che irriducibile, e se  $T_i$  è incompressibile,  $i_{\#}(\pi_1(T_i))$  è infinito, e non può mai essere mandato in  $\{\pm\mathbb{I}\}$ .

Questo teorema può servire a dare una stima della dimensione di una componente irriducibile della varietà dei caratteri di una varietà iperbolica  $M$  non compatta ma di volume finito. Infatti per quanto detto nella sottosezione 1.1.7  $M$  è parte interna di una varietà compatta le cui componenti di bordo sono tori incompressibili (cuspidi). La proposizione 23 ci assicura l'esistenza di una rappresentazione  $\rho_0$  fedele in  $SL_2(\mathbb{C})$ . Questa rappresentazione è irriducibile perché supponevamo  $M$  di volume finito e quindi non può avere gruppo fondamentale abeliano (vedi sottosezione 1.1.7). Quindi abbiamo che la componente irriducibile  $X_0$  di  $X(M)$  che contiene  $\chi_0 = t(\rho_0)$  ha dimensione almeno pari al numero delle cuspidi di  $M$ .

Indico con  $B_1 \dots B_s$  le cuspidi di  $M$ . Scelgo un intero  $k \in \{1 \dots s\}$ . Per ogni  $j \in \{1 \dots k\}$  scelgo un nodo essenziale  $\gamma_j \subset B_j$ . Indico con  $i_{\#} : \pi_1(B_j) \hookrightarrow \pi_1(M)$  l'immersione e pongo  $g_i = i_{\#}([\gamma_i])$ . Chiamo  $V \subset X_0$  la sottovarietà  $\{\chi \in X_0 \mid \forall i \in \{1 \dots k\} I_{g_i}^2 = 4\}$ .  $V$  non è vuota, infatti  $\chi_0 \in V$ . Chiamo  $V_0$  una componente irriducibile di  $V$  che contiene  $\chi_0$ .

**Proposizione 227.** • Se  $j \in \{1 \dots k\}$ ,  $g \in i_{\#}(\pi_1(B_j))$ ,  $\chi \in V_0$  allora  $I_g(\chi) = \chi(g) = \pm 2$ .

• Se  $k = s$  allora  $V_0 = \{\chi_0\}$ .

*Dim* : [CS2, prop. 2]. □

**Corollario 228.** Se  $M$  è una varietà iperbolica di volume finito con una sola cuspide,  $\rho_0$  è la rappresentazione indotta dalla struttura iperbolica e  $X_0$  è la componente irriducibile di  $X(M)$  che contiene  $t(\rho_0)$ , allora  $\dim X_0 = 1$ .

*Dim* : Abbiamo che  $\dim X_0 \geq 1$  per il teorema precedente. Per la proposizione precedente applicata con  $k = 1$  abbiamo che  $V$  è luogo di zeri di una sola funzione, quindi  $\dim V_0 \geq \dim X_0 - 1$ . Ma per la proposizione precedente  $\dim V_0 = 0$ . □



## Parte III

# Applicazioni topologiche

## Capitolo 6

# Costruzione di superfici incompressibili

### 6.1 Superfici incompressibili

#### 6.1.1 Azioni del gruppo fondamentale su alberi

Abbiamo visto nella sezione 5.3.2 che dato un gruppo  $\Gamma$  finitamente generato e tale che la varietà affine  $X(\Gamma)$  abbia una componente irriducibile  $X_0$  con dimensione almeno uno, possiamo scegliere una curva affine  $C \subset X_0$  e un punto ideale  $x \in \tilde{C}$ . Fatte queste scelte, per la proposizione 222 possiamo trovare un campo  $\mathbb{F}$ , una valutazione  $v : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Z}$  con anello di valutazione  $\mathcal{O}$  e una rappresentazione  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$  in modo che  $\mathcal{R}(\gamma)$  è coniugato ad un elemento di  $SL_2(\mathcal{O})$  se e solo se  $I_\gamma$  non ha un polo in  $x$ , e quindi esiste un elemento  $\gamma$  con  $\mathcal{R}(\gamma)$  non coniugato ad un elemento di  $SL_2(\mathcal{O})$ .

Per quanto detto nella sezione 4.4 si può costruire un albero combinatorio  $T$  su cui il gruppo  $SL_2(\mathbb{F})$  agisce senza inversioni, e in modo che gli stabilizzatori dei vertici siano esattamente i sottogruppi coniugati a  $SL_2(\mathcal{O})$ .

Mediante la rappresentazione  $\mathcal{R}$  anche il gruppo  $\Gamma$  agisce sull'albero  $T$  senza inversioni, e in modo che un elemento  $\gamma$  abbia un punto fisso in questa azione se e solo se  $I_\gamma$  non ha un polo in  $x$ .

Come nella sezione 5.4 se prendiamo una varietà connessa  $M$  con gruppo fondamentale finitamente generato e tale che almeno una componente irriducibile di  $X(M)$  abbia dimensione positiva (alcune ipotesi perché questo succeda sono date nella sezione 5.4) possiamo applicare quanto detto al gruppo  $\pi_1(M)$ , scegliere una curva  $C \in X(M)$ , un punto ideale  $x \in \tilde{C}$  e trovare una azione di  $\pi_1(M)$  su un albero  $T$ , senza inversioni e con punti fissi in corrispondenza di funzioni  $I_\gamma$  che non hanno polo in  $x$ , quindi con degli elementi  $\gamma \in \Gamma$  senza punti fissi. Possiamo considerare l'albero simpliciale  $\text{real}(T)$ , e l'azione di  $\Gamma$  estesa ad una azione su  $\text{real}(T)$ .

Grazie a questi elementi, se  $M$  è una 3-varietà connessa compatta orien-

tabile, vogliamo costruire un sistema di superfici incompressibili di  $M$ . Il metodo che presento è descritto in [CGLS, sez. 1.3]. È una variazione del metodo descritto in [CS1], che utilizza la teoria di Tits-Bass-Serre (vedi [Se] e [Tr]), insieme ad una costruzione di Stallings, Epstein e Waldhausen (vedi [St], [Ep], [Wa]). In [CGLS] il metodo viene rivisto, imitando una costruzione fatta in [MS3]. Per come è esposto in [CGLS] occorre l'ipotesi aggiuntiva  $\pi_2(M) = \{0\}$ , ma questa ipotesi si può eliminare (sottosezione 6.1.5).

Prendiamo quindi una varietà  $M$  connessa compatta orientabile, e una azione del  $\pi_1(M)$  su un albero simpliciale  $T$  senza inversioni. Chiamo  $X$  l'insieme dei vertici di  $T$ ,  $E$  l'insieme dei punti medi dei lati dell'albero  $T$ , e  $\Sigma_x$  la stella, per la suddivisione baricentrica di  $T$ , del vertice  $x \in X$ . Le componenti connesse di  $T \setminus E$  sono le stelle  $\Sigma_x$ , al variare di  $x \in X$ . Fisso un rivestimento universale  $p : \tilde{M} \rightarrow M$ . Il gruppo  $\pi_1(M)$  agisce per definizione su  $\tilde{M}$ , e per ipotesi su  $T$ , su  $X$  e su  $E$ .

### 6.1.2 I sistemi di superfici associati all'azione

**Definizione 229.** Una mappa  $\phi : \tilde{M} \rightarrow T$  si dice  $\pi_1(M)$ -equivariante se per ogni  $\gamma \in \pi_1(M)$  e per ogni  $x \in \tilde{M}$   $\phi(\gamma(x)) = \gamma(\phi(x))$ .

Una mappa  $\phi : \tilde{M} \rightarrow T$  si dice **regolare** se è continua e se, detto  $A$  l'aperto  $\phi^{-1}(T \setminus X) \subset \tilde{M}$ ,  $\phi|_A : A \rightarrow T \setminus X$  è differenziabile e trasversale ad  $E$ .

Se  $\phi : \tilde{M} \rightarrow T$  è una mappa regolare,  $\tilde{S} = \phi^{-1}(E)$  è l'insieme vuoto oppure un sistema di superfici in  $\tilde{M}$ . Se  $\phi$  è anche  $\pi_1(M)$ -equivariante  $\tilde{S}$  è un insieme saturo per la proiezione  $p$ , ossia il sistema di superfici  $S = p(\tilde{S})$  ha la proprietà  $p^{-1}(S) = \tilde{S}$ . Infatti se  $x \in \tilde{S}$  e  $y \in \tilde{M}$  è un punto tale che  $p(x) = p(y)$ , sappiamo che esiste un  $\gamma \in \pi_1(M)$  tale che  $\gamma(x) = y$ , e quindi  $\phi(y) = \phi(\gamma(x)) = \gamma(\phi(x)) \in E$  perchè  $\phi(x) \in E$ .

**Definizione 230.** Un insieme della forma  $S = p(\phi^{-1}(E)) \subset M$  con  $\phi : \tilde{M} \rightarrow T$  una mappa  $\pi_1(M)$ -equivariante e regolare, si dice un sistema di superfici **associato all'azione** del  $\pi_1(M)$  su  $T$ . Per quanto detto sopra vale che  $\phi^{-1}(E) = p^{-1}(S)$ .

Voglio dimostrare che se l'azione del  $\pi_1(M)$  su  $T$  non ha punti fissi, un sistema di superfici associato all'azione è non vuoto, ed è quindi un vero sistema di superfici.

Sia  $\phi : \tilde{M} \rightarrow T$  una mappa  $\pi_1(M)$ -equivariante regolare, sia  $S = p(\phi^{-1}(E)) \subset M$ , sia  $\tilde{S} = p^{-1}(S) = \phi^{-1}(E)$ . Se  $D$  è una componente connessa di  $M \setminus S$ , una componente connessa  $\tilde{D}$  di  $p^{-1}(D)$  è anche una componente connessa di  $\tilde{M} \setminus \tilde{S}$ . L'immagine  $\phi(\tilde{D})$  è un connesso di  $T$  disgiunto da  $E$ , quindi contenuto in una componente connessa di  $T \setminus E$ , quindi esiste un vertice  $x \in X$  tale che  $\phi(\tilde{D}) \subset \Sigma_x$ .

**Proposizione 231.** *Sia  $D$  una componente connessa di  $M \setminus S$ . L'immagine  $i_{\#}(\pi_1(D)) \subset \pi_1(M)$ , ben definita a meno di coniugio, è contenuta nello stabilizzatore di un vertice di  $T$  (il coniugato di uno stabilizzatore è ancora uno stabilizzatore, quindi questo enunciato ha senso).*

*Quindi se non ci sono punti fissi per l'azione  $i_{\#}(\pi_1(D)) \neq \pi_1(M) \Rightarrow D \neq M \Rightarrow S \neq \emptyset$ .*

*Dim :* [CGLS, prop. 1.3.2]. Scegliamo dei punti  $x_0 \in D$  e  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Sia  $\tilde{D}$  la componente connessa di  $p^{-1}(D)$  che contiene  $y_0$ .  $p : \tilde{D} \rightarrow D$  è un rivestimento di  $D$ . Scegliamo delle identificazioni  $\pi_1(D, x_0) \hookrightarrow \pi_1(D)$  e  $\pi_1(M, x_0) \hookrightarrow \pi_1(M)$ , in modo che la mappa  $i_{\#} : \pi_1(D) \rightarrow \pi_1(M)$  corrisponda alla mappa  $i_{\#} : \pi_1(D, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$  indotta dall'immersione  $i : D \hookrightarrow M$ . Un elemento dell'immagine  $i_{\#}(\pi_1(D, x_0))$  è rappresentato da una curva chiusa con punto base  $x_0$  contenuta in  $D$ . Questa curva, scelto  $y_0$  come punto base, agisce su  $\tilde{M}$  mandando  $\tilde{D}$  in sé, infatti la stessa curva definisce un automorfismo del rivestimento  $\tilde{D}$ , abbassando l'automorfismo che induce sul rivestimento universale di  $D$ . Quindi l'immagine  $\Pi = i_{\#}(\pi_1(D, x_0)) \subset \pi_1(M, x_0)$  è contenuta nello stabilizzatore di  $\tilde{D}$ . Per quanto detto sopra c'è un vertice  $x \in T$  tale che  $\phi(\tilde{D}) \subset \Sigma_x \setminus E$ . Sia  $\gamma \in \Pi$ . Per la  $\pi_1(M)$ -equivarianza  $\gamma$  manda punti di  $\phi(\tilde{D})$  in sé. Se  $x$  non fosse fisso per  $\gamma$  la stella  $\Sigma_x$  sarebbe mandata nella stella  $\Sigma_{\gamma(x)}$ , che non interseca  $\Sigma_x \setminus E$ . Quindi  $x$  deve essere fisso per  $\gamma$ , e  $\Pi \subset \text{Stab}_x$ .  $\square$

### 6.1.3 Il complesso $\mathcal{K}$

Considero lo spazio topologico semplicemente connesso  $\tilde{M} \times T$ . Il gruppo  $\pi_1(M)$  agisce su  $\tilde{M} \times T$  in maniera diagonale, per  $\gamma \in \pi_1(M)$   $\gamma : \tilde{M} \times T \ni (x, t) \rightarrow (\gamma(x), \gamma(t)) \in \tilde{M} \times T$ . L'azione è libera e propriamente discontinua. Definisco  $\mathcal{K} = \tilde{M} \times T / \pi_1(M)$ . La proiezione  $P : \tilde{M} \times T \rightarrow \mathcal{K}$  è il rivestimento universale di  $\mathcal{K}$ , quindi  $\pi_1(\mathcal{K}) = \pi_1(M)$ .

Da notare che  $\mathcal{K} \not\cong \tilde{M} \times (T / \pi_1(M))$ . Sono entrambi quozienti di  $\tilde{M} \times T$ , ma il primo è un quoziente per una relazione di equivalenza meno forte del secondo. Per  $\mathcal{K}$  la relazione è  $(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \pi_1(M) : \gamma(x) = y$  e  $\gamma(t) = s$ . Per  $\tilde{M} \times (T / \pi_1(M))$  la relazione è  $(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(M) : \gamma_1(x) = y$  e  $\gamma_2(t) = s$ . Quindi  $\tilde{M} \times (T / \pi_1(M))$  è un quoziente di  $\mathcal{K}$ .

Lo spazio  $\mathcal{E} = P(\tilde{M} \times E) = (\tilde{M} \times E) / \pi_1(M)$  è un sottospazio di  $\mathcal{K}$ , e l'aperto  $\mathcal{E}^s = P(\tilde{M} \times (T \setminus X)) = (\tilde{M} \times (T \setminus X)) / \pi_1(M)$  è una varietà differenziabile diffeomorfa a  $\mathcal{E} \times [0, 1]$ , quindi si può dire che  $\mathcal{E}$  ha un "intorno tubolare" in  $\mathcal{K}$ .

Se  $l$  è un lato di  $T$  con punto medio  $m$ , pongo  $\mathcal{K}_l = (\tilde{M} \times \{m\}) / \text{Stab}_l$ . C'è una proiezione  $\mathcal{K}_l \rightarrow P(\tilde{M} \times \{m\}) \subset \mathcal{E}$  che riveste  $P(\tilde{M} \times \{m\})$ , una componente connessa di  $\mathcal{E}$ . Quindi ogni componente connessa di  $\mathcal{E}$  è rivestita da uno spazio del tipo  $\mathcal{K}_l$  con un rivestimento  $P_l : \mathcal{K}_l \rightarrow \mathcal{E}$ .

Se  $x$  è un vertice di  $T$  pongo  $\mathcal{K}_x = (\tilde{M} \times (\Sigma_x \setminus E)) / \text{Stab}_x$ . Come prima c'è una proiezione  $\mathcal{K}_x \rightarrow \mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$  che riveste la componente connessa di  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$  che

contiene  $P(\tilde{M} \times \{x\})$ . Quindi ogni componente connessa di  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$  è rivestita da uno spazio del tipo  $\mathcal{K}_x$  con un rivestimento  $P_x : \mathcal{K}_x \rightarrow \mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$ .

**Proposizione 232.** *Un sistema di superfici  $S$  è associato all'azione del  $\pi_1(M)$  su  $T \Leftrightarrow$  esiste una mappa continua  $\psi : M \rightarrow \mathcal{K}$  tale che:*

- $\psi_{\#} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathcal{K})$  è l'isomorfismo dato dalla definizione di  $\mathcal{K}$  (a meno di coniugazione).
- La mappa  $\psi|_{\psi^{-1}(\mathcal{E}^s)} : \psi^{-1}(\mathcal{E}^s) \rightarrow \mathcal{E}^s$  è differenziabile e trasversale a  $\mathcal{E}$ .
- $S = \psi^{-1}(\mathcal{E})$ .

*Dim :* (Idea della dimostrazione in [CGLS, prop. 1.3.4]).  $\Rightarrow$ : Data  $\phi : \tilde{M} \rightarrow T$   $\pi_1(M)$ -equivariante e regolare che definisce  $S$  possiamo costruire una mappa  $\tilde{\psi} : \tilde{M} \xrightarrow{\mathbb{I} \times \phi} \tilde{M} \times T \xrightarrow{P} \mathcal{K}$ .

Voglio costruire una mappa  $\psi : M \rightarrow \mathcal{K}$  tale che  $\psi \circ p = \tilde{\psi}$ . Questo si può fare se e solo se  $\forall x, y \in \tilde{M} p(x) = p(y) \Rightarrow \tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(y)$ .  $p(x) = p(y) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : \gamma(x) = y \Rightarrow \gamma(x, \phi(x)) = (y, \phi(y)) \Rightarrow \gamma(\mathbb{I} \times \phi(x)) = \mathbb{I} \times \phi(y) \Rightarrow \tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(y)$ . Si può quindi definire la mappa  $\psi$ .

Per vedere cosa fa  $\psi_{\#}$  scelgo un punto base  $x_0 \in M$  e un rialzamento  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ . I punti corrispondenti su  $\mathcal{K}$  saranno indicati con  $y_1 = \mathbb{I} \times \phi(y_0)$ ,  $x_1 = P(y_0) = \psi(x_0)$ . Vediamo come viene trasformata una curva  $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$ .  $\gamma$  si rialza ad una curva  $\tilde{\gamma}$  che ha come estremi i punti  $y_0$  e  $\gamma(y_0)$ .  $\mathbb{I} \times \phi(\gamma(y_0)) = \gamma(\mathbb{I} \times \phi(y_0)) = \gamma(y_1)$  per l'equivarianza di  $\phi$ . Quindi  $\mathbb{I} \times \phi$  manda la curva  $\tilde{\gamma}$  in una curva che ha come estremi  $y_0$  e  $\gamma(y_0)$ . E quindi  $\psi_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathcal{K}, x_1)$  con le identificazioni date da  $i_{y_0}$  e  $i_{y_1}$  induce proprio l'isomorfismo dato dalla definizione di  $\mathcal{K}$ .

Per la trasversalità basta prendere un intorno di trivializzazione di un punto di  $\mathcal{E}$ , rialzarlo ad un intorno di un punto di  $\tilde{M} \times E$  e notare che la mappa  $\mathbb{I} \times \phi$  è prodotto dell'identità su  $\tilde{M}$  e di una mappa trasversale ad  $E$ . Per vedere cos'è  $\psi^{-1}(\mathcal{E})$  basta sfruttare la commutatività  $\psi \circ p = P \circ (\mathbb{I} \times \phi)$ .

$\Leftarrow$ : Prendo una mappa  $\psi$  come nell'enunciato della proposizione tale che  $\psi^{-1}(\mathcal{E}) = S$ . Ho una mappa  $\varphi : \tilde{M} \xrightarrow{p} M \xrightarrow{\psi} \mathcal{K}$ . Siccome  $\tilde{M}$  è semplicemente connesso la mappa  $\varphi$  si solleva ad una mappa  $\tilde{\varphi} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} \times T$  tale che  $P \circ \tilde{\varphi} = \psi \circ p$ . Componendo con la proiezione su  $T$  ottengo una mappa  $\phi : \tilde{M} \rightarrow T$ . Osservando il comportamento di  $\phi$  vicino ad un piccolo intorno di  $E$  si vede bene che è trasversale ad  $E$ . Il fatto che  $p(\phi^{-1}(E)) = S$  segue dalla condizione di commutazione.

Manca solo da dimostrare che  $\phi$  è  $\pi_1(M)$ -equivariante, basta far vedere che per ogni  $\gamma \in \pi_1(M)$  e per ogni  $y_0 \in \tilde{M}$   $\tilde{\varphi}(\gamma(y_0)) = \gamma(\tilde{\varphi}(y_0)) \in \tilde{M} \times T$ . Sia  $x_0 = p(y_0) = p(\gamma(y_0)) \in M$ .  $P(\tilde{\varphi}(y_0)) = P(\tilde{\varphi}(\gamma(y_0))) = x_1 \in \mathcal{K}$  perché  $\tilde{\varphi}$  è un rialzamento di una mappa  $\tilde{M} \rightarrow \mathcal{K}$ . Rappresentiamo  $\gamma$  come un elemento di  $\pi_1(M, x_0)$ .  $\tilde{\gamma}$  è un cammino in  $\tilde{M}$  che ha come estremi  $y_0$  e  $\gamma(y_0)$ .  $\psi(\gamma)$  è un cammino in  $\mathcal{K}$  che, per la condizione di commutazione è

uguale al cammino  $\tilde{\varphi}(\tilde{\gamma})$ , ma  $\tilde{\varphi}(\tilde{\gamma})$  ha come estremi  $\tilde{\varphi}(y_0)$  e  $\tilde{\varphi}(\gamma(y_0))$ . Per costruzione  $\psi(x_0) = x_1$ , e quindi  $\psi_{\#} : \pi_1(M, x_0) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{K}, x_1)$  è un isomorfismo che corrisponde all'isomorfismo dato dalla definizione di  $\mathcal{K}$ , quindi  $\psi_{\#}(\gamma) = \gamma$ , ma  $\psi_{\#}(\gamma)$  è il cammino  $\psi(\gamma)$  che manda  $\tilde{\varphi}(y_0)$  in  $\tilde{\varphi}(\gamma(y_0))$ , la condizione voluta.  $\square$

#### 6.1.4 Il sistema di superfici incompressibili

Se  $\pi_2(M) = \{0\}$  allora anche  $\pi_2(\tilde{M} \times T) = \{0\}$ , e quindi  $\pi_2(\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}) = \{0\}$ .

**Proposizione 233.** *Se  $\pi_2(M) = \{0\}$  e  $S$  è un sistema di superfici associato all'azione del  $\pi_1(M)$  allora il sistema  $S'$  ottenuto da  $S$  con una compressione o eliminando una componente triviale di  $S$ , è anch'esso associato all'azione del  $\pi_1(M)$ .*

*Dim :* Imitando la dimostrazione di [He, lemma 6.5], che è fatta però per varietà PL. Considero la mappa  $\psi : M \rightarrow \mathcal{K}$  come nella proposizione 232. Cerco di costruire una mappa  $\psi'$  che soddisfi le proprietà della proposizione 232 per il sistema  $S'$ . Per fare questo occorre che  $\pi_2(\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}) = \{0\}$ , e che  $i_{\#} : \pi_1(\mathcal{E}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{K})$  sia iniettiva. Ci sono vari casi a seconda di qual'è l'operazione fatta. Prima di esaminarli faccio notare che se due mappe  $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathcal{K}$  coincidono fuori da un 3-disco  $B$ , anche le mappe indotte  $f_{1\#}, f_{2\#} : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathcal{K})$  coincidono. Infatti, scelto un punto base  $x_0 \notin B$  per ogni classe del  $\pi_1(M, x_0)$  trovo una curva rappresentante che non interseca  $B$ , e quindi le immagini di queste curve per  $f_1$  e  $f_2$  coincidono.

**Eliminare una sfera triviale:** La sfera  $S_1$  borda un 3-disco  $B_1$ . Considero un intorno tubolare di  $S_1$   $i : S_1 \times \mathbb{R} \hookrightarrow U$  con  $U$  aperto di  $M$  che non interseca altre componenti di  $S$ , orientato in modo che  $S_1 \times [0, \infty) \subset B_1$ , e prendo una sfera  $S_2 = S_1 \times \{-1\}$ . Chiamo  $B_2$  il 3-disco  $(S_1 \times [-1, 0]) \cup B_1$ . Considero la mappa  $\psi_1 = \psi|_{S_2} : S_2 \rightarrow \mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$ . Siccome  $\pi_2(\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}) = \{0\}$ , per la proposizione 4 la mappa  $\psi_1$  si estende ad una mappa  $\psi_1 : B_2 \rightarrow \mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$ . Estendo  $\psi_1$  a tutto  $M$  ponendola uguale a  $\psi$  dove non è ancora stata definita.  $\psi^{-1}(\mathcal{E}) = S \setminus S_1 = S'$ . Inoltre  $\psi$  e  $\psi_1$  coincidono fuori dal 3-disco  $B_2$ , quindi le loro mappe indotte sul  $\pi_1(M)$  coincidono.

**Eliminare un disco o una componente parallela al bordo:** Sia  $S_1$  la componente eliminata, e  $B$  il 3-disco o l'immagine di un parallelismo fra  $S_1$  e il bordo tale che  $\partial B \subset S_1 \cup \partial M$ . Prendo un intorno tubolare di  $S_1$ ,  $i : S_1 \times \mathbb{R} \hookrightarrow U$ , con  $U$  aperto di  $M$  che non interseca altre componenti di  $S$ , orientato in modo che  $S_1 \times [0, \infty) \subset B$ . In entrambi i casi c'è un omeomorfismo  $t : U \cup B \hookrightarrow S_1 \times (-\infty, 0]$  omotopo all'identità e che coincide con l'identità su  $S_1 \times (-\infty, -1]$ . Definisco  $\psi_1 = \psi \circ t$  su  $U \cup B$  e  $\psi_1 = \psi$  negli altri punti di  $M$ .  $\psi^{-1}(\mathcal{E}) = S \setminus S_1 = S'$ , inoltre  $\psi_1$  è omotopa a  $\psi$ , quindi la condizione su  $\psi_{\#}$  è rispettata.



**Compressione:** Sia  $D$  il disco comprimente per  $S$ , e sia  $S'$  la superficie ottenuta per compressione. Prendo un intorno tubolare  $V$  di  $\mathcal{E}$  in  $\mathcal{K}$ ,  $V = \mathcal{E} \times (-\mu, \mu)$  scelto in modo che  $U = \psi^{-1}(V)$  sia un intorno tubolare di  $S$ ,  $U \simeq S \times (-\mu, \mu)$  in modo che per  $(x, m) \in S \times (-\mu, \mu)$   $\psi((x, m)) = (\psi(x), m) \in \mathcal{E} \times (-\mu, \mu)$  e abbastanza piccolo in modo che  $U$  si estenda ad un intorno tubolare  $U'$  di  $S'$ ,  $U' \simeq S' \times (-\mu, \mu)$ , e  $U'$  coincida con  $U$  in corrispondenza di  $S \cap S'$ .

Usiamo le notazioni della definizione 18. Chiamo  $S''$  la striscia parte interna di  $\overline{P_1 P_2} \times S^1$ .  $D'_1 \cup D'_2 \cup S''$  è omeomorfo ad  $S^2$ , e borda un 3-disco. Sia  $W$  un intorno aperto di questo 3-disco,  $W$  scelto in modo che  $\overline{W}$  sia omeomorfo ad un 3-disco, che contenga  $U|_{S''}$  e  $U'|_{D'_1 \cup D'_2}$  e tale che  $S \cap W$  sia connesso. Definisco  $\psi_1$  coincidente con  $\psi$  su  $M \setminus W$ . Ora devo

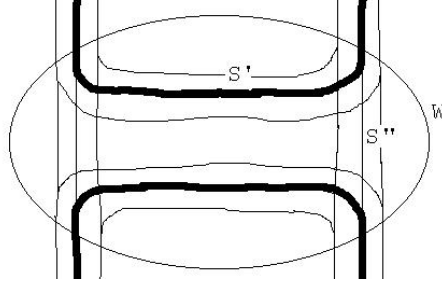


Figura 6.1: L'intorno  $W$

definire  $\psi_1$  su  $W$  in modo che  $\psi^{-1}(\mathcal{E})$  sia  $S'$ . Definisco  $\psi_1$  coincidente con  $\psi$  su  $U'|_{S \setminus S''}$ .  $\psi|_{\gamma_i}$  è una curva in  $\mathcal{E}$  che, per la proposizione 4, è omotopicamente banale in  $\mathcal{K}$ , perché si estende ad una mappa  $\psi|_{D'_i}$ . Siccome  $i_{\#} : \pi_1(\mathcal{E}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{K})$  è iniettiva,  $\psi|_{\gamma_i}$  è omotopicamente banale anche in  $\mathcal{E}$ , e quindi si estende ad una mappa  $s : D'_i \rightarrow \mathcal{E}$ , che si collega bene alla mappa  $\psi|_S$  dando una mappa  $t : S' \rightarrow \mathcal{E}$ . Uso  $t$  per estendere  $\psi_1$  su un sottoinsieme di  $U' = S' \times (-\mu, \mu)$  in questo modo:  $\psi_1 : S' \times [-\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\mu] \ni (x, m) \rightarrow (t(x), m) \in \mathcal{E} \times (-\mu, \mu) = V \subset \mathcal{K}$ . In questo modo manca solo da estendere  $\psi_1$  ad una mappa  $\psi_1 : W' = W \setminus (S' \times [-\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\mu]) \rightarrow \mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$ . Questo si riesce a fare perché ogni componente connessa di  $W'$  è omeomorfa ad una 3-palla bordata da una sfera su cui la mappa  $\psi_1$  è già definita e a valori in  $\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$ , quindi siccome  $\pi_2(\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}) = 0$ , riesco ad estendere  $\psi_1$  a tutto  $W'$ . Per costruzione vale che  $\psi_1^{-1}(\mathcal{E}) = S'$ , e inoltre  $\psi$  e  $\psi_1$  coincidono fuori dal 3-disco  $\overline{W}$ , quindi le loro mappe indotte sul  $\pi_1(M)$  coincidono.

In tutti e tre i casi manca solo la condizione di differenziabilità e trasversalità dove serve, ma questa condizione si riesce a soddisfare passando ad un'opportuna mappa  $\psi'$  omotopa a  $\psi_1$  e coincidente con  $\psi_1$  su  $S'$ .  $\square$

**Proposizione 234.** *Se  $S$  è un sistema di superfici associato all'azione, non vuoto, e tale che nessuna componente connessa di  $S$  sia contenuta in  $\partial M$ , allora  $S$  è a due facce, sconnette  $M$ , e, per ogni componente connessa  $S'$  di  $S$ , l'immagine di  $i_{\#} : \pi_1(S') \rightarrow \pi_1(M)$  è contenuta nello stabilizzatore di un lato di  $T$ .*

*Dim :* Considero la mappa  $\psi : M \rightarrow \mathcal{K}$  come nella proposizione 232 che definisce  $S$ .

Per vedere che  $S$  è a due facce basta notare che la sottovarietà  $\mathcal{E}$  di  $\mathcal{E}^s$  è una ipersuperficie a due facce ( $\mathcal{E}^s = \mathcal{E} \times \mathbb{R}$ ).

$\mathcal{K} \setminus \mathcal{E}$  è sconnesso e le componenti connesse sono gli aperti  $P_x(\mathcal{K}_x)$ , al variare di  $x$  fra i vertici di  $T$ . Le immagini inverse  $\psi(P_x(\mathcal{K}_x))$  sono degli aperti disgiunti che ricoprono  $M \setminus S$ . Devo far vedere che almeno due di questi aperti sono non vuoti. Prendo una componente connessa  $S'$  di  $S$ .  $\psi(S') \subset \mathcal{E}$ , e, più precisamente  $\psi(S')$  è contenuto in una componente connessa  $P_l(\mathcal{K}_l)$  di  $\mathcal{E}$ , con  $l$  un lato di  $T$ . La componente connessa di  $\mathcal{E}^s$  che contiene  $P_l(\mathcal{K}_l)$  è omeomorfa a  $P_l(\mathcal{K}_l) \times \mathbb{R}$ . Se  $x$  e  $y$  sono i vertici di  $l$  le due componenti connesse di  $P_l(\mathcal{K}_l) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  sono contenute una in  $P_x(\mathcal{K}_x)$  e l'altra in  $P_y(\mathcal{K}_y)$ . Siccome  $\psi$  è trasversale a  $P_l(\mathcal{K}_l)$ ,  $S' \subset \psi^{-1}(P_l(\mathcal{K}_l))$  e  $S'$  non è contenuta nel bordo, allora, preso un intorno  $U$  di  $S'$ ,  $\psi(U) \cap P_x(\mathcal{K}_x) \neq \emptyset$  e  $\psi(U) \cap P_y(\mathcal{K}_y) \neq \emptyset$ . Quindi  $\psi^{-1}(P_x(\mathcal{K}_x))$  e  $\psi^{-1}(P_y(\mathcal{K}_y))$  sono due aperti non vuoti.

Se  $U$  è un intorno tubolare di  $S'$  che non interseca altre componenti di  $S$ ,  $U \setminus S'$  ha due componenti connesse, contenute in due componenti connesse di  $M \setminus S$ ,  $C_x$  e  $C_y$ , con  $\psi(C_x) \subset P_x(\mathcal{K}_x)$ , e  $\psi(C_y) \subset P_y(\mathcal{K}_y)$ . Segue dalla dimostrazione della proposizione 231 che  $i_{\#}(\pi_1(C_x))$  è contenuto, a meno di coniugio, nello stabilizzatore  $\text{Stab}_x$ , e  $i_{\#}(\pi_1(C_y))$  in  $\text{Stab}_y$ . Siccome ogni curva in  $S'$  è omotopa ad una curva in  $C_x$  e ad una curva in  $C_y$ , abbiamo  $i_{\#}(\pi_1(S')) \subset i_{\#}(\pi_1(C_x)) \cap i_{\#}(\pi_1(C_y)) \subset \text{Stab}_x \cap \text{Stab}_y = \text{Stab}_l$ .  $\square$

**Teorema 235.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile e con  $\pi_2(M) = \{0\}$ , e sia  $T$  un albero con fissata una azione del  $\pi_1(M)$  su  $T$  senza inversioni e senza punti fissi per tutta l'azione. Allora trovo un sistema  $S$  di superfici essenziali a due facce, non vuoto, e tale che  $S$  sconnetta  $M$ .*

*Inoltre il sistema  $S$  può essere scelto in modo che per ogni componente connessa  $C$  di  $M \setminus S$  l'immagine di  $i_{\#} : \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(M)$  è contenuta nello stabilizzatore di un vertice di  $T$ , e per ogni componente connessa  $S'$  di  $S$  l'immagine di  $i_{\#} : \pi_1(S') \rightarrow \pi_1(M)$  è contenuta nello stabilizzatore di un lato di  $T$ .*

*Posso fissare un omeomorfismo di  $M$  con un complesso cellulare finito  $C_3$  di dimensione 3, e prendere un sottocomplesso  $D$  tale che per ogni componente connessa  $D'$  di  $D$  l'immagine di  $i_{\#}(\pi_1(D')) \rightarrow \pi_1(M)$  sia contenuta nello stabilizzatore di un vertice di  $T$ . Allora posso trovare  $S$  con le proprietà di sopra e disgiunto da  $D$ .*

*(Faccio notare che anche se  $S$  sconnette  $M$  non è detto che esista una*

singola superficie di  $S$  che sconnetta  $M$ , quindi questo non è, in generale, un sistema di superfici essenziali separanti).

*Dim* : Dimostro il teorema solo nel caso in cui il complesso  $C_3$  abbia  $c_0 = 1$  e, quindi, il sottocomplesso  $D$  sia connesso. La dimostrazione nel caso generale segue le stesse linee ma è un po' più complicata.

L'immagine di  $i_{\#}(\pi_1(D)) \rightarrow \pi_1(M)$  è contenuta nello stabilizzatore di un vertice  $x$  di  $T$ . Ogni elemento di  $\text{Stab}_x$  è rappresentato da una curva in  $\mathcal{K}_x$  come elemento del  $\pi_1(\mathcal{K}_x, p)$ , con  $p \in \mathcal{K}_x$  e quindi come una curva in  $P_x(\mathcal{K}_x)$  come elemento del  $\pi_1(\mathcal{K}, q)$  con  $q = P_x(p)$ . Se per ogni elemento del  $\pi_1(M)$  scelgo una curva in  $\mathcal{K}$  che rappresenti quell'elemento nel  $\pi_1(\mathcal{K}, q) \simeq \pi_1(M)$ , in modo che per ogni elemento di  $\pi_1(D)$  la curva scelta è in  $P_x(\mathcal{K}_x)$ , per la proposizione 13 trovo una mappa  $\psi : M \rightarrow \mathcal{K}$  che induce su  $\pi_1(M)$  l'isomorfismo naturale con  $\pi_1(\mathcal{K})$  e tale che  $\psi(D) \subset P_x(\mathcal{K}_x)$ . Con una omotopia possiamo modificare  $\psi$  in modo che mantenga questa proprietà e sia trasversale a  $\mathcal{E}$ .  $S = \psi^{-1}(\mathcal{E})$  è un sistema di superfici associato all'azione, e  $S \cap D = \emptyset$ . Ora applichiamo la procedura della proposizione 19 con delle compressioni e eliminazione di componenti triviali per ottenere un sistema di superfici essenziali che sarà ancora associato all'azione per la proposizione 233. I dischi comprimibili possono essere scelti disgiunti da  $D$ , quindi le operazioni di compressione e di eliminazione di componenti triviali lascia  $S$  disgiunto da  $D$ . Tutte le altre proprietà di  $S$  seguono dal fatto che è un sistema di superfici associato all'azione, e sono state dimostrate nelle proposizioni precedenti.  $\square$

### 6.1.5 Eliminare l'ipotesi $\pi_2(M) = \{0\}$

Nella costruzione delle superfici incompressibili fatta sopra occorre l'ipotesi  $\pi_2(M) = \{0\}$ . Nell'articolo [CGLS] questa ipotesi non dava nessun fastidio perché la costruzione doveva essere applicata a varietà iperboliche. L'ipotesi serviva solo ad assicurare che lo spazio  $\mathcal{K}$  fosse asferico. Nella costruzione di  $\mathcal{K}$  si usa lo spazio  $\tilde{M} \times T$ . Non potevamo usare il solo  $T$  perché l'azione del  $\pi_1(M)$  su  $T$  non è libera, e quindi il quoziente  $T/\pi_1(M)$  non è un rivestimento e  $\pi_1(T/\pi_1(M)) \neq \pi_1(M)$ . Per poter ottenere uno spazio con gruppo fondamentale uguale a  $\pi_1(M)$  abbiamo dovuto moltiplicare per  $\tilde{M}$ , su cui  $\pi_1(M)$  agisce in modo libero e propriamente discontinuo. Grazie a questo l'azione diagonale di  $\pi_1(M)$  su  $\tilde{M} \times T$  da un quoziente  $\mathcal{K}$  con  $\pi_1(\mathcal{K}) = \pi_1(M)$ . Questo è l'unico ruolo dello spazio  $\tilde{M}$  nella costruzione di  $\mathcal{K}$ . Potevamo sostituire  $\tilde{M}$  con un qualunque altro spazio topologico su cui  $\pi_1(M)$  agisce in modo libero e propriamente discontinuo. Ad esempio potevamo considerare lo spazio  $N = K(\pi_1(M))$ , spazio di Eilenberg-MacLane, e il suo rivestimento universale  $\tilde{N}$ .  $\tilde{N}$  è uno spazio con tutti i gruppi di omotopia banali, e  $\pi_1(M)$  agisce su  $\tilde{N}$  in modo libero e propriamente discontinuo. Se definiamo  $\mathcal{K}_0 = (\tilde{N} \times T)/\pi_1(M)$ , questo spazio ha tutte le proprietà richieste dalla costruzione fatta sopra, si possono definire come sopra gli spazi  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_0^s$ , e

tutti gli altri, senza bisogno di chiedere  $\pi_2(M) = \{0\}$ . L'unica cosa che manca è che  $\tilde{N}$  non è una varietà differenziabile, quindi va un po' rivista la nozione di trasversalità allo spazio  $\mathcal{E}_0$ . Ma comunque questo si riesce a sistemare sfruttando il prodotto  $\mathcal{E}_0^s = \mathcal{E}_0 \times \mathbb{R}$ , e definendo la trasversalità a  $\mathcal{E}_0$  sfruttando la struttura differenziabile del solo fattore  $\mathbb{R}$ . Quindi vale il seguente teorema.

**Teorema 236.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta e orientabile, e sia  $T$  un albero con fissata una azione del  $\pi_1(M)$  su  $T$  senza inversioni e senza punti fissi per tutta l'azione. Allora vale la tesi del teorema 235.*

*Dim :* Basta sostituire nelle due sezioni precedenti lo spazio  $\mathcal{K}$  con lo spazio  $\mathcal{K}_0$  definito qui sopra. Tutte le dimostrazioni seguono allo stesso modo.  $\square$

## 6.2 Bordi di superfici incompressibili

Con il metodo presentato nella sezione precedente, data una 3-varietà compatta orientabile  $M$ , possiamo, scegliendo opportunamente (quando possibile) la curva di caratteri e il punto ideale sulla curva, ottenere un sistema di superfici incompressibili  $S$  con alcune proprietà volute.

### 6.2.1 Intersezioni con sottovarietà proprie

Il teorema 236 ci garantisce che se ho un'azione su un albero con le proprietà necessarie e ho una sottovarietà propria  $D$  di  $M$  con  $i_{\#}(\pi_1(D))$  che stabilizza un vertice dell'albero, allora posso scegliere  $S$  in modo che non intersechi  $D$ . Presa una curva di caratteri  $C$  e un suo punto ideale  $x$ , un elemento  $g \in \pi_1(M)$  stabilizza un vertice dell'albero associato a  $x$  se e solo se la funzione  $I_{g|C}$  non ha un polo in  $x$ . Se per ogni elemento  $g \in i_{\#}(\pi_1(D))$  la funzione  $I_{g|C}$  non ha un polo in  $x$ , allora, per il lemma 216 l'intero sottogruppo  $i_{\#}(\pi_1(D))$  stabilizza un vertice. Quindi se ho una sottovarietà  $D \subset M$  e voglio che  $S$  non intersechi  $D$  mi basta trovare una curva di caratteri  $C$  tale che  $I_{g|C}$  sia costante per ogni  $g \in i_{\#}(\pi_1(D))$ , e se  $D$  è una curva mi basta che  $I_{[D]}$  sia costante su  $C$ .

Nel caso in cui  $D$  sia una componente del bordo  $\partial M$  posso usare questo criterio per assicurarmi che  $S$  non intersechi quella componente del bordo.

Se invece ho una curva  $\gamma \in M$  e una curva di caratteri  $C$  con  $I_{[\gamma]|C}$  non costante posso trovare un punto ideale  $x$  di  $C$  su cui  $I_{[\gamma]|C}$  abbia un polo. In questo caso  $\gamma$  non può essere omotopa a nessuna curva contenuta in  $S$ , perchè tutte queste curve stabilizzano un lato (e quindi due vertici), ma  $\gamma$  non può neanche essere disgiunta da  $S$  perchè i gruppi fondamentali delle componenti connesse di  $M \setminus S$  stabilizzano un vertice dell'albero.

Quindi se  $D \subset M$  è una superficie che contiene una curva  $\gamma$  con  $I_{[\gamma]}$  non costante, trovo una curva di caratteri  $C$  e un punto ideale  $x$  di  $C$  in

modo che il sistema  $S$  intersechi  $D$  trasversalmente in un sistema di curve che non ha nessuna componente omotopa a  $\gamma$  e ha almeno una componente che interseca  $\gamma$  e non omotopicamente banale in  $D$ .

Se  $D$  è un toro con una curva  $\gamma \subset D$  come sopra, trovo una curva di caratteri  $C$  e un punto ideale  $x$  di  $C$  tali che  $S$  intersechi  $D$  in un sistema di curve essenziali tutte isotope fra loro in  $D$ . Se  $\delta$  è una di queste curve ho che  $I_{\delta|_C}$  non ha un polo in  $x$ , ed è l'unica classe di omotopia di nodi in  $D$  con questa proprietà.

### 6.2.2 Intersezioni con il bordo

Se la varietà  $M$  è a bordo non vuoto le superfici incompressibili di  $S$  possono essere chiuse oppure con bordo contenuto in  $\partial M$ . Se il bordo  $\partial S$  contiene una componente  $\gamma$  omotopicamente banale in  $\partial M$ , ho che  $\gamma$  borda un disco in  $\partial M$ , ed è quindi possibile operare una compressione su  $S$  mediante questo disco e eliminare la componente di bordo  $\gamma$ . In questo modo si vede che è sempre possibile supporre che il sistema di superfici incompressibili  $S$  non contenga componenti di bordo omotopicamente banali in  $\partial M$ . Un sistema di superfici di questo tipo si dice  **$\partial$ -incompressibile**.

**Esempio 237.** Considero ora una varietà  $N$  associata ad un nodo in una 3-sfera omologica. L'omomorfismo  $h : \pi_1(N) \rightarrow H_1(N) = \mathbb{Z}$  definisce una curva  $C = h^*(X(\mathbb{Z}))$ . Considero il meridiano  $M$  e la longitudine  $L$  associati alla parametrizzazione privilegiata di  $\partial N$ .  $h([M]) = 1$ ,  $h([L]) = 0$ , quindi  $I_{[L]|_C}$  è la costante 2, e  $I_{[M]}$  non è costante su  $C$ . Trovo un punto ideale  $x$  di  $C$  sul quale  $I_{[M]}$  ha un polo, e quindi il sistema  $S$  così costruito ha un bordo, e tutte le componenti di bordo sono parallele a  $L$ . Le superfici con bordo del sistema  $S$  hanno una pendenza di bordo nulla.

L'articolo [Ha] si occupa dei bordi di superfici incompressibili e  $\partial$ -incompressibili in una 3-varietà compatta  $M$  con bordo che ha tutte le componenti connesse toriche. Nel caso in cui  $\partial M$  ha una sola componente connessa [Ha] considera l'insieme delle classi di omotopia di nodi  $\gamma \subset \partial M$  per cui esiste una superficie incompressibile  $\partial$ -incompressibile  $S$  con  $\partial S$  formato da componenti parallele a  $\gamma$ , e dimostra che questo insieme è finito.

**Proposizione 238.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile con bordo  $\partial M \simeq T^2$ . Se esiste una componente irriducibile  $X_0 \subset X(M)$  con  $\dim X_0 \geq 2$  allora posso trovare una curva di caratteri  $C \subset X_0$  tale che per ogni punto ideale  $x$  di  $C$  il sistema  $S$  è formato da superfici chiuse.*

*Dim :* [CCGLS, prop. 2.4]. Se  $\gamma$  è un nodo in  $\partial M$  posso trovare una curva  $C \subset X_0$  su cui la funzione  $I_{[\gamma]}$  è costante. Il sistema  $S$  costruito con un punto ideale di questa curva o è fatto di superfici chiuse oppure qualcuna delle sue superfici ha come bordo un sistema di curve parallele a  $\gamma$ . Ma questa seconda alternativa non può verificarsi per tutti i nodi  $\gamma \subset \partial M$  per il risultato di [Ha] citato prima.  $\square$

Nel caso delle varietà iperboliche si possono costruire sistemi di superfici incompressibili che intersecano esattamente le componenti di bordo volute.

**Teorema 239.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile con bordo consistente di  $s$  tori  $B_1 \dots B_s$ , e tale che la parte interna  $\overset{\circ}{M}$  ammetta una struttura iperbolica di volume finito. Sia  $k$  un intero  $1 \leq k \leq s$ , e per  $i \in \{1 \dots k\}$  sia  $\gamma_i \subset B_i$  un nodo essenziale. Allora esiste una curva di caratteri  $C$  e un suo punto ideale  $x$  in modo che il sistema  $S$  non intersechi  $B_i$  per  $i > k$ , e per  $i \leq k$  intersechi  $B_i$  in un sistema di nodi essenziali tutti omotopi fra loro e non omotopi a  $\gamma_i$ .*

*Dim :* [CS2, thm. 3]. Sia  $\rho_0$  la rappresentazione indotta dalla struttura iperbolica e sia  $X_0$  una componente irriducibile di  $X(M)$  che contiene  $t(\rho_0)$ . Per il teorema 226.  $\dim X_0 \geq s$ . Per ogni  $i > k$  scelgo una curva  $\gamma_i \subset B_i$ . Definisco un morfismo

$$f : X_0 \ni \chi \rightarrow \begin{pmatrix} I_{[\gamma_2]} - I_{[\gamma_1]} \\ I_{[\gamma_3]} - I_{[\gamma_1]} \\ \vdots \\ I_{[\gamma_k]} - I_{[\gamma_1]} \\ I_{[\gamma_{k+1}]} \\ \vdots \\ I_{[\gamma_s]} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1}$$

. Per ogni  $p \in \mathbb{C}^{n-1}$  o  $f^{-1}(p)$  è vuoto oppure  $\dim f^{-1}(p) \geq \dim X_0 - \dim \mathbb{C}^{n-1} \geq 1$ . Quindi esiste una curva  $C$  che passa per  $t(\rho_0)$  su cui  $f$  è costante.  $I_{[\gamma_1]}$  non è costante su  $C$ , altrimenti tutte le funzioni  $I_{[\gamma_i]}$  sarebbero costanti su  $C$  e si contraddirebbe il secondo punto della proposizione 227.

Quindi trovo un punto ideale  $x$  di  $C$  su cui  $I_{[\gamma_1]}$  ha un polo. Siccome  $f$  è costante su  $C$  tutte le  $I_{[\gamma_i]}$  con  $1 \geq i \geq k$  hanno un polo in  $x$ , invece le  $I_{[\gamma_i]}$  con  $k < i \leq s$  valgono costantemente 2 su  $C$ , e per il primo punto della proposizione 227 per ogni  $g \in i_{\#}(\pi_1(B_i))$ ,  $I_{g|_C} = 2$ . La conclusione segue dal discorso fatto nella sottosezione 6.2.1.  $\square$

### 6.2.3 Superfici incompressibili separanti

L'articolo [CS2] utilizza la proposizione precedente per dimostrare dei risultati sull'esistenza di superfici incompressibili separanti e sul loro utilizzo per decomporre le 3-varietà in parti semplici.

**Teorema 240.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile con bordo non vuoto e con tutte le componenti toriche. Supponiamo che  $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M)$  sia surgettiva e  $M$  non sia omeomorfa a  $D^2 \times S^1$  o a  $S^1 \times S^1 \times I$ . Allora per ogni componente connessa  $T \subset \partial M$  esiste una superficie incompressibile separante, non parallela al bordo, il cui bordo è non vuoto e contenuto in  $T$ .*

*Dim* : [CS2, thm. 2]. La dimostrazione si divide in vari casi, di cui il più importante è quello in cui  $M$  ammette una struttura iperbolica di volume finito, e in questo caso si usa il teorema della sottosezione precedente.  $\square$

**Teorema 241.** *Sia  $M$  una 3-varietà connessa compatta orientabile con bordo che contiene una componente connessa di genere positivo. Supponiamo che  $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M)$  sia surgettiva e  $M$  non sia omeomorfa a  $D^2 \times S^1$  o a  $S^1 \times S^1 \times I$ . Allora  $M$  contiene una superficie incompressibile separante, non parallela al bordo, con bordo non vuoto.*

*Dim* : [CS2, thm. 1]. Prima si risolve in modo semplice il caso in cui ci sia una componente connessa del bordo di genere 0. Se non ci sono sfere nel bordo la dimostrazione si fa per induzione su  $l = -\chi(M) \geq 0$ , in cui il caso base  $l = 0$  segue dal teorema precedente.  $\square$

Grazie a questo teorema si ottiene il seguente teorema di decomposizione.

**Teorema 242.** *Sia  $M$  una 3-varietà irriducibile, connessa compatta orientabile, con bordo che contiene una componente connessa di genere positivo. Supponiamo che  $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M)$  sia surgettiva e  $M$  non sia omeomorfa a  $D^2 \times S^1$  o a  $S^1 \times S^1 \times I$ . Allora esiste una successione finita  $M = M_0 \dots M_k$  di 3-varietà compatte tali che*

- Per ogni  $i \in \{1 \dots k\}$   $M_i$  è ottenuta tagliando  $M_{i-1}$  lungo una superficie incompressibile con bordo che sconnette una componente di  $M_{i-1}$ .
- Ogni componente di  $M_k$  è omeomorfa a  $D^2 \times S^1$  o a  $S^1 \times S^1 \times I$ .

*Dim* : Vedi [CS2, corollario] e [Sh, dim. thm. 2].  $\square$

# Capitolo 7

## Pendenze e nodi

In tutto questo capitolo  $N$  denoterà una 3-varietà compatta orientabile connessa con bordo diffeomorfo ad un toro. A volte aggiungeremo l'ipotesi che  $N$  sia una varietà associata ad un nodo in una 3-sfera omologica, oppure che la sua parte interna ammetta una struttura iperbolica di volume finito.

### 7.1 Il polinomio associato

#### 7.1.1 Alcune mappe

Fissiamo una parametrizzazione del bordo di  $N$ ,  $\varphi : S^1 \times S^1 \hookrightarrow \partial N$  e chiamiamo  $M$  e  $L$  rispettivamente il meridiano e la longitudine per quella parametrizzazione.

C'è un omomorfismo  $i - \# : \pi_1(\partial N) \rightarrow \pi_1(N)$ , ben definito a meno di coniugazione. Fissiamo una determinazione di  $i_{\#}$ . Questa induce un morfismo  $i^* : X(N) \rightarrow X(\partial N)$ . Nell'esempio 220 viene descritta la varietà  $X(\partial N)$  per mezzo della mappa  $t_{|\Delta} : \Delta \rightarrow X(\partial N)$  dove  $\Delta \subset R(\partial N)$  è la sottovarietà delle rappresentazioni diagonali.

Se  $Y \subset X(N)$  è una sottovarietà irriducibile (sul campo  $k \subset \mathbb{C}$ ),  $Y^* = \overline{i^*(Y)} \subset X(\partial N)$  è una sottovarietà irriducibile di  $X(\partial N)$  con  $\dim Y^* \leq 2$ . In effetti se  $\dim Y^* = 2$  abbiamo  $Y^* = X(\partial N)$ , se  $\dim Y^* = 0$  allora  $Y^*$  è un insieme finito (un singolo punto se  $k = \mathbb{C}$ ), altrimenti  $Y^*$  è una curva. L'immagine inversa  $\tilde{Y} = t_{|\Delta}^{-1}(Y^*) \subset \Delta$  è composta da al più due componenti irriducibili (su  $k$ ) entrambe con dimensione uguale a  $\dim Y^*$ .

Nell'esempio 220, fissata una base di  $\pi_1(\partial N)$ , che supponiamo essere  $\langle [L], [M] \rangle$ , si definisce la mappa  $d : \Delta \hookrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}^2$  e la mappa  $p : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow X(\partial N)$ . Dalle definizioni si vede che  $d(\tilde{Y}) = p^{-1}(Y^*) \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . Siccome  $d$  è un morfismo iniettivo in  $\mathbb{C}^2$ , la chiusura in  $\mathbb{C}^2$  di  $d(\tilde{Y})$  è una sottovarietà di  $\mathbb{C}^2$  definita su  $k$ , che chiamo  $\bar{Y}$ , con tutte le componenti irriducibili di dimensione uguale a  $\dim Y^*$ . A seconda della dimensione  $\bar{Y}$  può essere 1 o 2 punti, l'unione di 1 o 2 curve, oppure l'intero piano



$\mathbb{C}^2$ . In ogni caso  $\bar{Y}$  è invariante rispetto all'involutione  $s : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \ni (l, m) \mapsto (l^{-1}, m^{-1}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ , che lascia invariante la mappa  $p$ .

Se  $N$  è una varietà associata ad un nodo  $K$  in una 3-sfera omologica orientata possiamo scegliere come parametrizzazione di  $\partial N$  la parametrizzazione privilegiata, che è ben definita a meno di isotopia e del cambio di segno di  $M$  e  $L$  contemporaneamente. Se  $Y$  è una sottovarietà irriducibile di  $X(N)$  la varietà  $\bar{Y}$  non dipende dalla scelta della parametrizzazione privilegiata, per l'invarianza rispetto all'involutione  $s$ .

**Esempio 243.** Sempre nel caso di una varietà associata ad un nodo, abbiamo un omomorfismo surgettivo  $h : \pi_1(N) \rightarrow H_1(N) = \mathbb{Z}$ , e un morfismo iniettivo  $h^* : X(\mathbb{Z}) \hookrightarrow X(N)$ . L'immagine di questo morfismo è composta dai caratteri di rappresentazioni che si fattorizzano tramite  $h$ .  $h([L]) = 0$  e  $h([M]) = 1$  quindi scelta una matrice  $A \in SL_2(\mathbb{C})$  esiste un'unica rappresentazione di questo tipo che manda  $[M]$  in  $A$ . Questo fa vedere che se  $C$  è la chiusura di  $h^*(X(\mathbb{Z}))$  la sottovarietà  $\bar{C}$  è la curva  $\{(l, m) \mid l = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ , quindi ha dimensione uno.

**Proposizione 244.** *Sia  $Y \subset X(N)$  è una curva su  $\mathbb{C}$  tale che  $\bar{Y}$  abbia dimensione 0. Allora il sistema di superfici incompressibili associato ad un punto ideale di  $Y$  è un sistema di superfici chiuse.*

*Dim :* Se  $\bar{Y}$  ha dimensione 0, allora  $Y^*$  è un singolo punto. Questo significa che se  $g \in i_{\#}(\pi_1(\partial N))$ , la funzione  $I_{g|_Y}$  è costante. La conclusione segue dal ragionamento fatto nella sottosezione 6.2.1.  $\square$

### 7.1.2 La curva $D_K$

Chiamo  $X'$  l'unione delle componenti irriducibili  $Y \subset X(N)$  tali che  $\bar{Y}$  ha dimensione almeno uno. Chiamo  $D = D_{N,\varphi} \subset \mathbb{C}^2$  la sottovarietà unione delle  $\bar{Y}$  per  $Y \subset X'$ .

**Proposizione 245.** *La varietà  $X'$ , e quindi la curva  $D$ , sono non vuoti.*

*Dim :* Per la proposizione 11 la mappa  $i_* : H_1(\partial N) \rightarrow H_1(N)$  è non nulla, quindi esiste un omomorfismo  $h : \pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $i_{\#}(\pi_1(\partial N)) \not\subset \ker h$ . A questo punto si procede come nell'esempio precedente, e si vede che se  $C$  è la chiusura di  $h^*(X(\mathbb{Z}))$ ,  $\bar{C}$  è una curva.  $\square$

Se  $N$  è una varietà associata ad un nodo  $K$  in una 3-sfera omologica e  $\varphi$  è la parametrizzazione privilegiata scriverò  $D_K = D_{N,\varphi} = D$ . La varietà  $D_K$  dipende solo dalla classe di diffeomorfismo del nodo  $K$ , ed è quindi un invariante del nodo.

Per varietà iperboliche di volume finito si può dire di più:

**Proposizione 246.** *Se  $\overset{\circ}{N}$  ammette una struttura iperbolica di volume finito e se  $\rho_0$  è la rappresentazione indotta dalla struttura iperbolica e  $X_0$  è una componente irriducibile di  $X(N)$  che contiene  $t(\rho_0)$ , allora  $X_0 \subset X'$ .*

*Dim* : Il secondo punto della proposizione 227 assicura che per  $g \in i_{\sharp}(\pi_1(\partial N))$ ,  $I_g$  non è costante su  $X_0$ , quindi  $X_0 \subset X'$ . Un altro modo per dimostrarlo è usare il teorema [Du, thm. 4.1] che dice che in queste ipotesi la mappa  $i^*|_{X_0}$  è un isomorfismo birazionale con la sua immagine (ossia induce un isomorfismo dei campi delle funzioni), e quindi in particolare la sua immagine  $X_0^*$  è una curva.  $\square$

$D$  è una sottovarietà definita su  $\mathbb{Q}$ , che può essere tutto  $\mathbb{C}^2$  oppure un'unione di componenti irriducibili tutte di dimensione 1, delle curve razionali.

Faremo vedere più avanti che il primo caso non capita mai. Nel secondo caso per ogni componente irriducibile (su  $\mathbb{Q}$ )  $D'$  di  $D$  esiste un polinomio irriducibile  $P \in \mathbb{Q}[l, m]$  che si annulla esattamente su  $D'$  (prop. 65). Un tale polinomio è univocamente determinato a meno di moltiplicazione per scalari. Il prodotto di questi polinomi al variare delle componenti irriducibili di  $D$  è un polinomio privo di fattori irriducibili ripetuti che si annulla esattamente su  $D$ . Moltiplicando per un opportuno scalare si può ottenere un polinomio in  $\mathbb{Z}[l, m]$  senza un divisore comune a tutti i coefficienti. Questo polinomio è ben definito a meno del segno, e sarà indicato con  $A_{N,\varphi} \in \mathbb{Z}[l, m]/\pm 1$ . Come prima per i nodi sarà indicato con  $A_K$ , e quando non ci sono ambiguità sarà chiamato solo  $A$ .

Posso considerare il completamento proiettivo di  $D$ ,  $\overline{D} \subset \mathbb{CP}^2$ . Chiamo **punti all'infinito** di  $\overline{D}$  tutti i punti di  $\overline{D}$  che non corrispondono a punti di  $\Delta$ , ossia tutti i punti di  $\overline{D} \setminus \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . In coordinate omogenee  $[l, m, z]$  i punti all'infinito sono quelli in cui almeno una coordinata è 0.

### 7.1.3 Qualche proprietà del polinomio $A$

Non ho ancora dimostrato che il polinomio  $A$  esiste, manca infatti da dire che  $D \neq \mathbb{C}^2$ . Questo sarà dimostrato nella prossima sezione. Intanto supponiamolo vero e vediamo alcune proprietà del polinomio  $A_K$  per un nodo  $K$  in una 3-sfera omologica.  $A_K$  dipende solo dalla classe di diffeomorfismo del nodo, ed è quindi un'invariante del nodo. Questo invariante ha il grande vantaggio che può essere calcolato esplicitamente, vedi [CCGLS, sez. 7].

Per quanto detto sopra per un nodo  $K$  abbiamo che  $D_K$  contiene la retta  $\{l = 1\}$ , e quindi il polinomio  $A_K$  è divisibile per  $l - 1$ . Se  $K$  è il nodo banale  $A_K = l - 1$ .

**Proposizione 247.** *Se  $N$  è la varietà associata ad un nodo  $K$  in una 3-sfera omologica e  $\overset{\circ}{N}$  ammette una metrica iperbolica di volume finito, allora  $A_K \neq l - 1$ .*

*Dim* : [CCGLS, prop. 2.6].  $\square$

Chiamo  $A'(l, m) = \frac{A(l, m)}{l-1}$ .  $A'$  non è divisibile per  $l - 1$ . Gli zeri del polinomio  $A'(1, m)$  sono correlati al polinomio di Alexander (vedi [CCGLS, sez. 6]).

**Proposizione 248.** *Se  $K \subset S^3$  esistono interi  $k_1, k_2 \geq 0$  tali che  $A_K(l, \pm 1) = (l-1)^{k_1}(l+1)^{k_2}$ .*

*Dim :* [CCGLS, par. 2.8]. □

**Proposizione 249.** *Se  $K \subset S^3$  è un  $(p, q)$ -nodo torico non banale allora  $A_K$  è divisibile per  $lm^{pq} + 1$ , e quindi è diverso da  $l-1$ .*

*Dim :* [CCGLS, prop. 2.7]. □

**Proposizione 250.** *Se  $K$  è un nodo in una 3-sfera omologica allora  $A_K$  ha solo potenze pari di  $m$ .*

*Dim :* [CCGLS, prop. 2.9]. □

Si possono poi studiare i polinomi ad una variabile  $A(1, m)$  e  $A(l, \pm 1)$ .

## 7.2 Azioni su alberi relative alla curva $D$

Sia  $N$  una 3-varietà connessa compatta orientabile con bordo  $\partial N \simeq T^2$ , scegliamo una parametrizzazione del bordo e supponiamo che la varietà  $D \subset \mathbb{C}^2$  sia non vuota. Sia  $Y \subset D$  una curva irriducibile su  $\mathbb{C}$ . Le coordinate di  $\mathbb{C}^2$ ,  $l$  e  $m$ , possono essere viste come funzioni su  $Y$ :  $l, m \in \mathbb{C}(Y)$ . Come funzioni su  $Y$  almeno una fra  $l$  e  $m$  non sarà costante.

### 7.2.1 Una rappresentazione di $\pi_1(N)$

$Y_\Delta = d^{-1}(Y) \subset \Delta$  è una curva in  $\Delta$ . Infatti è irriducibile perché l'immagine mediante  $d$  di ogni componente irriducibile di  $Y_\Delta$  deve essere densa in  $Y$ , e per l'iniettività di  $d$  ce ne può essere una sola.  $d|_{Y_\Delta} : Y_\Delta \rightarrow Y$  è dominante.  $Y_{\partial N} = \overline{t(Y_\Delta)} \subset X(\partial N)$  è ancora una curva.  $t|_{Y_\Delta} : Y_\Delta \rightarrow Y_{\partial N}$  è dominante. Per costruzione di  $D$  la curva  $Y_{\partial N}$  è nell'immagine di  $i^* : X(N) \rightarrow X(\partial N)$ , quindi per il corollario 116 esiste una curva  $Y' \subset R(N)$  tale che  $T = (i^* \circ t)|_{Y'} : Y' \rightarrow Y_{\partial N}$  è dominante.

Queste mappe dominanti inducono immersioni dei campi delle funzioni:

$\mathbb{C}(Y_{\partial N}) \xrightarrow{t|_{Y_\Delta}} \mathbb{C}(Y_\Delta), \mathbb{C}(Y_{\partial N}) \xrightarrow{T|_{Y'}} \mathbb{C}(Y'), \mathbb{C}(Y) \xrightarrow{d|_{Y_\Delta}} \mathbb{C}(Y_\Delta)$ .  $\mathbb{C}(Y_\Delta)$  e  $\mathbb{C}(Y')$  sono estensioni finite dello stesso campo  $\mathbb{C}(Y_{\partial N})$ , quindi esiste un'estensione finita  $\mathbb{F}_0$  che le contiene entrambe.  $\mathbb{F}_0$  è anche un'estensione finita di  $\mathbb{C}(Y)$ .

$Y' \subset R(N)$ , come nella sottosezione 5.2.2 possiamo costruire una rappresentazione  $\mathcal{R} : \pi_1(N) \rightarrow SL_2(\mathbb{C}(Y')) \subset SL_2(\mathbb{F}_0)$ . Per  $\gamma \in \pi_1(N)$  ho  $\text{tr}(\mathcal{R}(\gamma)) \in \mathbb{C}(Y') \subset \mathbb{F}_0$ , e per  $\rho \in Y'$  ho  $(\text{tr}(\mathcal{R}(\gamma)))(\rho) = \text{tr}(\rho(\gamma))$ . Per  $\gamma \in i_\#(\pi_1(\partial N))$  ho che  $\text{tr}(\rho(\gamma)) = T(\rho)(\gamma)$ , ricordando che  $T(\rho) \in X(\partial M)$ . Dalla costruzione della curva  $D$  segue che  $\text{tr}(\mathcal{R}([L])) = l+l^{-1}$  e  $\text{tr}(\mathcal{R}([M])) = m+m^{-1}$  e  $\text{tr}(\mathcal{R}([L][M])) = lm+l^{-1}m^{-1}$ .

Considero la chiusura algebrica  $\mathbb{F}_0$  di  $\mathbb{F}_0$ . Abbiamo detto che almeno una fra le due funzioni  $l$  e  $m$  non è costante. Supponiamo che  $m$  sia non costante (altrimenti nel discorso seguente sostituire  $[L]$  al posto di  $[M]$ ).

Con una coniugazione in  $GL_2(\overline{\mathbb{F}_0})$  posso mettere  $\mathcal{R}([M])$  in forma di Jordan,  $\mathcal{R}([M]) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ , non può essere della forma  $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  perché la sua traccia non è la costante 2. Scambiando, se necessario, l'ordine dei due autovettori, ho che  $\lambda = m$ . Siccome  $[M]$  e  $[L]$  commutano ho che nella stessa base anche  $\mathcal{R}([L])$  è diagonale e i suoi coefficienti sono  $m$  e  $m^{-1}$ , nell'ordine giusto per rispettare la condizione sulla traccia del prodotto  $\mathcal{R}([M])\mathcal{R}([L])$ .

Estendo  $\mathbb{F}_0$  aggiungendo i coefficienti degli autovettori di  $\mathcal{R}([M])$  come matrice in  $\overline{\mathbb{F}_0}$ , ottenendo un campo  $\mathbb{F}$  che è un'estensione finita di  $\mathbb{F}_0$  e quindi di  $\mathbb{C}(Y)$ . La coniugazione di prima mi dà una rappresentazione  $P : \pi_1(N) \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$  con la proprietà che  $P([M]) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{pmatrix}$  e  $P([L]) = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l^{-1} \end{pmatrix}$ .

### 7.2.2 Costruzione di un sistema di superfici incompressibili

Data una curva  $Y \subset D$ , posso considerare il completamento proiettivo  $\overline{Y} \subset \overline{D} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , e il modello proiettivo regolare  $\tilde{D}$  con il suo morfismo birazionale  $j : \tilde{Y} \rightarrow \overline{Y}$ . Un **punto all'infinito** di  $\tilde{Y}$  è un punto che viene mandato da  $j$  in un punto all'infinito di  $\overline{Y}$  ossia un punto di  $\overline{Y} \setminus \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . I punti all'infinito sono esattamente i punti in cui almeno una delle funzioni  $l, l^{-1}, m, m^{-1}$  ha un polo. In questo contesto i punti all'infinito hanno il ruolo che prima avevano i punti ideali.

Un punto all'infinito  $x \in Y$  definisce una valutazione discreta di rango 1  $v_x : \mathbb{C}(\tilde{Y}) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Per il teorema 142 questa valutazione si estende ad una valutazione  $v : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $v|_{\mathbb{C}(\tilde{Y})} = dv_x$ . Chiamo  $\mathcal{O}$  l'anello di valutazione di  $v$ .  $x$  è un punto all'infinito quindi o  $v(l + l^{-1}) < 0$  oppure  $v(m + m^{-1}) < 0$ , quindi o  $\text{tr}(P([L])) \notin \mathcal{O}$  oppure  $\text{tr}(P([M])) \notin \mathcal{O}$ . Quindi la rappresentazione  $P : \pi_1(N) \rightarrow SL_2(\mathbb{F})$  non è coniugata ad una rappresentazione in  $SL_2(\mathcal{O})$ . Ottengo quindi un'azione di  $\pi_1(N)$  su un'albero simpliciale senza inversioni e senza punti fissi per tutta l'azione.

Per il teorema 236 al punto  $x \in \tilde{Y}$  posso associare un sistema di superfici incompressibili  $S$ . Per quanto detto nella sottosezione 6.2.1, siccome c'è una curva in  $\partial N$  che non fissa nessun vertice dell'albero, ho che  $\partial S \subset \partial N$  è non vuoto, e formato da nodi in  $\partial M$  tutti omotopi fra loro.

### 7.2.3 Pendenza di bordo

Chiamo  $\gamma$  la classe di omotopia di nodi in  $\partial M$  individuata da  $\partial S$ . Vediamo qual'è la pendenza di  $\gamma$  rispetto alla parametrizzazione  $\varphi$  scelta su  $\partial N$ .  $\gamma = a[L] + b[M]$ , la pendenza di  $\gamma$  è  $\frac{b}{a}$ , oppure  $\infty$  se  $a = 0$ .

Una curva in  $\partial S$  deve stabilizzare un vertice dell'albero, quindi abbiamo  $v(\text{tr}(P(\gamma))) \geq 0$ . Ma  $P(\gamma) = P([L])^a P([M])^b = \begin{pmatrix} l^a m^b & 0 \\ 0 & l^{-a} m^{-b} \end{pmatrix}$ .  $\text{tr}(P(\gamma)) = l^a m^b + (l^a m^b)^{-1}$ . Se  $v(l^a m^b) \neq 0$  ho che  $v(\text{tr}(P(\gamma))) = \min(v(l^a m^b), -v(l^a m^b)) < 0$ . Quindi  $0 = v(l^a m^b) = av(l) + bv(m)$ . Quindi la pendenza di  $\gamma$  è  $\frac{b}{a} = -\frac{v(l)}{v(m)} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

Se  $N$  è una varietà associata ad un nodo  $K$  in una 3-sfera omologica e  $\varphi$  è la parametrizzazione privilegiata, la pendenza di  $\gamma$  rispetto a  $\varphi$  è la pendenza di bordo del sistema di superfici  $S$ .

**Proposizione 251.** *La varietà  $D$  non è tutto il piano  $\mathbb{C}^2$ , quindi se  $D$  è non vuota ogni sua componente irriducibile ha dimensione 1.*

*Dim :* Se  $D$  fosse tutto il piano  $\mathbb{C}^2$  potremmo applicare il ragionamento di questa sezione ad ogni curva  $Y \subset \mathbb{C}^2$ , e per ogni pendenza  $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  troveremmo una curva  $Y$  e un punto all'infinito  $x$  di  $\tilde{Y}$  tale che  $-\frac{v_x(l)}{v_x(m)} = r$ . Avremmo superfici incompressibili con infinite pendenze di bordo diverse, ma in [Ha] si dimostra che le pendenze di bordo delle superfici incompressibili di  $N$  sono un numero finito.  $\square$

### 7.3 Calcolo delle pendenze di bordo

C'è un modo per calcolare esplicitamente le pendenze delle curve in  $\partial S$  per ogni sistema  $S$  costruito a partire da un punto ideale di una curva contenuta in  $D$ . Abbiamo visto che questa pendenza è collegata alla valutazione indotta dal punto ideale dalla formula  $r = -\frac{v(l)}{v(m)}$ . Quindi basta capire quali valori può assumere questo rapporto. Ci vengono in aiuto la proposizione 133 e l'esempio 141:

**Proposizione 252.** *Per ogni lato del poligono di Newton del polinomio  $A$  che si trova sotto il poligono con pendenza negativa  $r$  esiste una componente irriducibile  $C$  di  $D$  ed una valutazione  $v$  del campo  $\mathbb{C}(C)$  centrata in  $(0, 0)$  tale che  $r = -\frac{v(l)}{v(m)}$ .*

*Dim :* Basta notare che  $A$  non è divisibile né per  $x$  né per  $y$  (perché la curva  $D$  è stata ottenuta come chiusura di una curva contenuta in  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ) e combinare la proposizione e l'esempio citati sopra.  $\square$

**Proposizione 253.** *Per ogni lato del poligono di Newton del polinomio  $A$  con pendenza  $r$  esiste una componente irriducibile  $C$  di  $D$  ed una valutazione  $v$  del campo  $\mathbb{C}(C)$  centrata in un punto all'infinito tale che  $r = -\frac{v(l)}{v(m)}$ .*

*Dim :* [CCGLS, prop. 3.3]. Usando la proposizione precedente con dei cambiamenti di coordinate per trasformare lati che non sono sotto il poligono in lati che lo sono.  $\square$

Questo risultato porta subito al seguente teorema.

**Teorema 254.** *Le pendenze dei lati del poligono di Newton del polinomio  $A$  sono pendenze di bordo di superfici incompressibili della varietà  $N$ .*  $\square$

## Capitolo 8

# Compattificazione della varietà dei caratteri

Dato un gruppo  $\Gamma$  finitamente generato, vogliamo compattificare la varietà dei caratteri  $X(\Gamma)$ , sfruttando la costruzione della sezione 3.5, e interpretare i punti aggiunti come azioni di  $\Gamma$  su alberi reali.

### 8.1 Aggiungere azioni su alberi reali

Abbiamo visto che la varietà  $X(\Gamma)$  è definita su  $\mathbb{Q}$  e che l'anello  $\mathbb{Q}[X(\Gamma)]$  è generato dalle funzioni della famiglia  $\mathcal{F} = \{I_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  (teorema 219). Siccome  $\Gamma$  è finitamente generato la famiglia  $\mathcal{F}$  è numerabile. Siccome la funzione  $I_\gamma$  dipende solo dalla classe di coniugio di  $\gamma$ , se indichiamo con  $\mathcal{C}$  l'insieme delle classi di coniugio di  $\Gamma$  possiamo reindicizzare la famiglia  $\mathcal{F}$  con  $\mathcal{F} = \{I_c\}_{c \in \mathcal{C}}$ . Possiamo quindi applicare la costruzione della sezione 3.5 e ottenere una compattificazione  $\tilde{X}(\Gamma) = X(\Gamma) \cup B(\Gamma)$ , con  $B(\Gamma) \subset \mathcal{P} = ([0, \infty)^{\mathcal{C}} \setminus \{0\}) / \sim$ .

Vogliamo far vedere come si possono interpretare i punti di  $B(V_i)$  come azioni di  $\Gamma$  su alberi reali. Prendiamo un'azione con isometrie di  $\Gamma$  su un albero reale  $T$  senza punti fissi per tutto  $\Gamma$ . È ben definita una funzione lunghezza  $l : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , che non è identicamente nulla. Inoltre per ogni  $\gamma \in \Gamma$  il valore  $l(\gamma)$  dipende solo dalla classe di coniugio di  $\gamma$ , quindi  $l$  può essere visto come funzione da  $\mathcal{C}$  in  $[0, \infty)$ , e quindi come elemento di  $[0, \infty)^{\mathcal{C}}$ . Questo elemento non è mai nullo, quindi definisce un elemento di  $\mathcal{P}$  che si dice **funzione lunghezza proiettivizzata** dell'azione. Vogliamo far vedere che ogni punto di  $B(\Gamma)$  è una funzione lunghezza proiettivizzata di qualche azione di  $\Gamma$  su un albero reale.

Scomponiamo  $X(\Gamma)$  nelle sue componenti irriducibili,  $X(\Gamma) = \bigcup V_i$ . Per definizione  $\tilde{X}(\Gamma) = \bigcup \tilde{V}_i$  e  $B(\Gamma) = \bigcup B(V_i)$ , dove  $\tilde{V}_i$  è la compattificazione di  $V_i$  data dalla famiglia  $\mathcal{F}_i = \{I_{c|V_i}\}_{c \in \mathcal{C}}$ . Indico con  $S_0^i$  l'insieme di valutazioni di  $\mathbb{Q}(V_i)$  che parametrizzano  $B(V_i)$  mediante una mappa che chiamo  $U_i : S_0^i \rightarrow B(V_i)$ .

Prendiamo un elemento  $v \in S_0^i$ . Vogliamo trovare un'azione su un albero reale che ha come funzione lunghezza parametrizzata  $U(v) \in \mathcal{P}$ .  $v$  è una valutazione di  $\mathbb{Q}(V_i)$  a valori in un gruppo  $\Lambda$ , con supporto all'infinito e tale che per ogni  $f \in \mathbb{Q}[V_i]$  vale  $v(f) > 0$  o  $v(f) \in \Lambda_1$ .

Dalla dimostrazione del teorema 219 segue che esiste una componente irriducibile  $R_i$  di  $R(\Gamma)$  tale che  $t(R_i) = V_i$ . Questa mappa induce un'immersione di campi  $t_{|R_i}^* : \mathbb{Q}(V_i) \hookrightarrow \mathbb{Q}(R_i)$ , quindi il campo  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(R_i)$  può essere visto come un'estensione finita di  $\mathbb{Q}(V_i)$ , con  $\mathbb{Q}[V_i]$ . Per il teorema 142 questa valutazione si estende ad una valutazione  $w : \mathbb{Q}(R_i) \rightarrow \Lambda'$ , con  $\Lambda \subset \Lambda'$  e  $\Lambda_1 = \Lambda'_1 \cap \Lambda$ . Chiamo  $\mathcal{O} \subset \mathbb{F}$  l'anello di valutazione di  $w$ .

Consideriamo ora la rappresentazione  $\mathcal{R} : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{Q}(R_i))$  definita nella sezione 5.2.2.

**Lemma 255.** *La rappresentazione  $\mathcal{R}$  è coniugata ad una rappresentazione  $\mathcal{R}'$  tale che per ogni  $\gamma \in \Gamma$  se  $e_\gamma$  è un coefficiente della matrice  $\mathcal{R}'(\gamma)$ , abbiamo che  $w(e_\gamma) > 0$  oppure  $w(e_\gamma) \in \Lambda'_1$ .*

*Dim :* [MS1, dim. lemma. 2.4.5]. Sia  $\pi : \Lambda' \rightarrow \Lambda'/\Lambda'_1$  la proiezione nel quoziente, e sia  $w' = \pi \circ w$  la valutazione composta, con anello di valutazione  $\mathcal{O}' \subset \mathbb{F}$ . Vale che per ogni  $\gamma \in \Gamma$  l'elemento  $\text{tr}(\mathcal{R}(\gamma)) = I_{\gamma|V_i} \in \mathbb{Q}[V_i] \subset \mathcal{O}'$ . Quindi per il lemma 216 la rappresentazione  $\mathcal{R}$  è coniugata ad una rappresentazione  $\mathcal{R}'$  con immagine contenuta in  $SL_2(\mathcal{O}')$ . Quindi tutti i coefficienti delle matrici di  $\mathcal{R}'$  sono in  $\mathcal{O}'$ , e hanno quindi la proprietà richiesta.  $\square$

Considero ora il  $\Lambda$ -albero  $T$  associato alla valutazione  $w$ . La rappresentazione  $\mathcal{R}'$  induce un'azione di  $\Gamma$  su  $T$  mediante isometrie senza inversioni fantasma e senza punti fissi in comune per tutta l'azione.

Se  $\mathcal{R}'(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  abbiamo, per la proposizione 188, che  $d([\mathcal{O}^2], \gamma[\mathcal{O}^2]) = -2 \min(v(a), v(b), v(c), v(d)) \geq 0$ , quindi  $d([\mathcal{O}^2], \gamma[\mathcal{O}^2]) \in \Lambda'_1$ .

Definisco  $T_1 = \{x \in T \mid d(x, [\mathcal{O}^2]) \in \Lambda'_1\}$ . Per la proposizione 50  $T_1$  è un  $\Lambda'$ -albero. Per quanto detto sopra è invariante per  $\Gamma$ . Abbiamo quindi un'azione di  $\Gamma$  su  $T_1$ . Identifichiamo  $\Lambda'_1$  con un sottogruppo di  $\mathbb{R}$ . Per il corollario 200 l'azione si estende alla realizzazione  $T_{\mathbb{R}}$ .

Sempre per lo stesso corollario la funzione lunghezza dell'azione su  $T_{\mathbb{R}}$  coincide con quella su  $T_1$ .  $T_1$  rispetta tutte le ipotesi della proposizione 199, quindi questa funzione lunghezza coincide con la funzione lunghezza dell'azione su  $T$ , che possiamo calcolare grazie alla proposizione 202:  $l(\gamma) = -2 \min(0, w(\text{tr}(\mathcal{R}'(\gamma)))) = -2 \min(0, v(I_{\gamma|V_i}))$ . Se passiamo alla funzione definita sull'insieme delle classi di coniugio, e poi alla funzione lunghezza proiettivizzata abbiamo  $[l(c)]_{c \in \mathcal{C}} = U(v) \in \mathcal{P}$ .

Quindi abbiamo associato alla valutazione  $v \in S_0^i$  un'azione su un'albero reale e abbiamo interpretato il punto  $U(v) \in B(V_i)$  come funzione lunghezza proiettivizzata dell'azione di  $\Gamma$  su un albero reale.

Se  $v$  è discreta di rango 1, per il teorema 142 lo è anche  $w$ , quindi  $\Lambda'$  ha già rango 1,  $T_1 = T$  che è un albero combinatorio e la realizzazione  $T_{\mathbb{R}}$  è quindi un albero simpliciale.

## 8.2 Alcuni insiemi di caratteri

### 8.2.1 Gruppi qualunque

Vediamo ora alcune proprietà di alcuni sott'insiemi di  $X(\Gamma)$ .

Siamo interessati alle rappresentazioni di  $\Gamma$  in  $SL_2(\mathbb{R})$ . L'insieme di queste rappresentazioni è in corrispondenza biunivoca con la parte reale della varietà  $R(\Gamma)$  (che è definita su  $\mathbb{Q}$  e quindi anche su  $\mathbb{R}$ ), che indichiamo con  $R_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ . Possiamo considerare anche la parte reale di  $X(\Gamma)$ , che chiamiamo  $X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ . Ovviamente  $t(R_{\mathbb{R}}(\Gamma)) \subset X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ , perché la mappa  $t$  è definita da polinomi a coefficienti in  $\mathbb{Q}$ , ma non vale l'uguale. Infatti se  $\rho$  è una rappresentazione con immagine contenuta in  $SU_2(\mathbb{C})$  il suo carattere è in  $X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$  (e si dimostra che questo è l'unico caso).

Definisco  $DR(\Gamma)$  come l'insieme delle rappresentazioni discrete e fedeli e  $DX(\Gamma) = t(DR(\Gamma))$  l'insieme dei caratteri di rappresentazioni discrete e fedeli.

**Proposizione 256.** *L'insieme  $DX(\Gamma)$  è un chiuso di  $X(\Gamma)$  per la topologia classica.*

*Dim :* [MS1, prop. 2.4.6]. □

Chiamo  $\tilde{D}X(\Gamma)$  la chiusura di  $DX(\Gamma)$  in  $\tilde{X}(\Gamma)$ , e definisco  $B(DX(\Gamma)) = \tilde{D}X(\Gamma) \setminus DX(\Gamma) = \tilde{D}X(\Gamma) \cap B(\Gamma)$ . Abbiamo visto come interpretare i punti di  $B(\Gamma)$  come funzioni lunghezza proiettivizzate di azioni su alberi reali. I punti di  $B(DX(\Gamma))$  hanno delle proprietà in più.

**Definizione 257.** Un gruppo si dice **virtualmente abeliano** se contiene un sottogruppo abeliano di indice finito.

Sia  $V$  una componente irriducibile di  $X(\Gamma)$ .

**Teorema 258.** *Sia  $\{x_n\} \subset V \cap DX(\Gamma)$  una successione  $\mathbb{Q}$ -prevalutante in  $V$  illimitata in  $V$ . Sia  $v$  una valutazione di  $\mathbb{Q}(V)$  compatibile con  $\{x_n\}$ , e sia  $b = U(\bar{v}) \in B(V)$ . Allora esiste un'azione di  $\Gamma$  su un'albero reale senza punti fissi per tutta l'azione, che abbia  $b$  come funzione lunghezza proiettivizzata e tale che lo stabilizzatore di ogni segmento non degeneri di  $T$  sia virtualmente abeliano.*

*Se  $\bar{v}$  è una valutazione discreta di rango 1, allora esiste un albero simpliciale con le proprietà suddette, su cui l'azione del gruppo sia indotta da un'azione su un albero combinatorio senza inversioni.*

*Dim :* [MS1, thm. 2.4.8]. □

**Corollario 259.** *Ogni punto di  $B(DX(\Gamma))$  è una funzione lunghezza proiettivizzata definita dall'azione di  $\Gamma$  su un albero reale con la proprietà che lo stabilizzatore di ogni segmento non degeneri dell'albero sia virtualmente abeliano.*



*Dim* : [MS1, thm. 2.4.7]. Prendo un punto  $b \in B(DX(\Gamma))$ , e una successione  $\{x_n\} \subset DX(\Gamma)$  che tende a  $b$ . A meno di passare a sottosuccessioni si può supporre che la successione sia tutta contenuta in una stessa componente irriducibile  $V$  di  $X(\Gamma)$  e sia una successione  $\mathbb{Q}$ -prevalutante di  $V$ , illimitata in  $V$ . Prendo una valutazione  $v$  di  $\mathbb{Q}(V)$  compatibile con  $\{x_n\}$ . Per il lemma 162 abbiamo  $U(\bar{v}) = b$ . A questo punto basta applicare il teorema precedente.  $\square$

Possiamo anche per questi insiemi passare alle “parti reali” considerando le intersezioni con  $R_{\mathbb{R}}(\Gamma)$  e  $X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ :  $DR_{\mathbb{R}}(\Gamma) = DR(\Gamma) \cap R_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ ,  $DX_{\mathbb{R}}(\Gamma) = DX(\Gamma) \cap X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ .

## 8.2.2 Gruppi fondamentali di superfici

Sia  $S$  una superficie connessa compatta orientabile, e  $\Gamma = \pi_1(S)$ .  $S = \Sigma_g^k$ , con  $k$  componenti di bordo che, se  $k > 0$ , indico con  $b_1 \dots b_k$ , e indico con  $\beta_i \in \Gamma$  un elemento che ha la stessa classe di omotopia libera di  $b_i$ . Vale che  $\beta_i \in [\Gamma, \Gamma]$ .

Supponiamo che  $\chi(S) < 0$ . Allora  $\mathring{S}$  ammette una struttura di varietà iperbolica di volume finito, a cui corrisponde una rappresentazione  $\bar{\rho}_0 : \Gamma \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$ , che si solleva ad una rappresentazione  $\rho_0 : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$  discreta e fedele. Gli elementi  $\beta_i$  si dicono **parabolici**, ossia vale  $\text{tr}(\rho_0(\beta_i)) = \pm 2$ .

L'insieme dei punti di  $R(\Gamma)$  per cui vale questa proprietà è una sottovarietà algebrica definita su  $\mathbb{Q}$ :  $R^{par}(\Gamma) = \{\rho \in R(\Gamma) \mid \forall i \text{ tr}(\rho(\beta_i)) = \pm 2\}$ . Indico la parte reale di  $R^{par}(\Gamma)$  con  $R_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma) = R^{par}(\Gamma) \cap R_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ .

In maniera analoga si può definire  $X^{par}(\Gamma) = \{\chi \in X(\Gamma) \mid \forall i I_{\beta_i} = \pm 2\}$ , che è ancora una varietà definita su  $\mathbb{Q}$ , e la sua parte reale  $X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma) = X^{par}(\Gamma) \cap X_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ . Vale  $R^{par}(\Gamma) = t^{-1}(X^{par}(\Gamma))$  e  $t(R_{\mathbb{R}}^{par}) \subset X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ .

Vediamo qualche proprietà degli insiemi di rappresentazioni discrete e fedeli.

**Lemma 260.** *Vale che  $t^{-1}(DX(\Gamma)) = DR(\Gamma)$ , e le rappresentazioni in  $DR(\Gamma)$  sono tutte irriducibili.*

*Dim* : [MS1, lemma 3.1.3].  $\square$

**Proposizione 261.**  *$t(DR_{\mathbb{R}}(\Gamma)) = DX_{\mathbb{R}}(\Gamma)$  e  $t(DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)) = DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ .*

*Dim* : [MS1, prop. 3.1.4].  $\square$

Definisco poi i sott'insiemi  $DR^{par}(\Gamma) = DR(\Gamma) \cap R^{par}(\Gamma)$  e  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma) = DR(\Gamma) \cap R_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  delle rappresentazioni discrete e fedeli che rendano parabolici gli elementi  $\beta_i$ . Analogamente definisco  $DX^{par}(\Gamma) = DX(\Gamma) \cap X^{par}(\Gamma)$  e  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma) = DX(\Gamma) \cap X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ .

$DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  è l'insieme di rappresentazioni in  $SL_2(\mathbb{R})$  che se composte con il quoziente in  $PSL_2(\mathbb{R})$  inducono una struttura iperbolica di volume finito su  $S$ . Siccome queste rappresentazioni sono tutte irriducibili, due

di esse sono coniugate se e solo se hanno lo stesso carattere. Quindi l'insieme  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  può essere visto come l'insieme delle classi di coniugio delle suddette rappresentazioni.

**Lemma 262.**  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  è contenuto nella parte interna di  $DR^{par}(\Gamma)$  relativamente a  $R^{par}(\Gamma)$ .

*Dim* : [MS1, lemma 3.1.2]. □

**Proposizione 263.**  $L'$ insieme  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  è aperto e chiuso in  $R_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ , ed è quindi un'unione di componenti connesse di  $R_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ .

*Dim* : [MS1, prop. 3.1.6]. Per la proposizione 256  $DX(\Gamma)$  è chiuso in  $X(\Gamma)$ , segue che  $t^{-1}(DX(\Gamma)) = DR(\Gamma)$  è chiuso in  $R(\Gamma)$ , e quindi  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  è chiuso in  $R_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ . Il lemma precedente, intersecando tutti gli spazi con  $R_{\mathbb{R}}(\Gamma)$  dice che  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  è anche aperto. □

**Proposizione 264.**  $L'$ insieme  $t(DR_{\mathbb{R}}^{par}) = DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  è aperto e chiuso in  $X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ , ed è quindi unione di componenti connesse di  $X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ .

*Dim* : [MS1, prop. 3.1.8]. □

**Lemma 265.** Le funzioni  $I_{\gamma}$  non si annullano mai su  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ .

*Dim* : Uno zero di  $I_{\gamma}$  corrisponde ad una rappresentazione  $\rho$  tale che  $\rho(\gamma) \in SL_2(\mathbb{C})$  è a traccia nulla, quindi in forma di Jordan è  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ , ha ordine 4. Ma  $\Gamma$  non ha elementi di ordine finito, quindi  $\rho$  non può essere fedele. □

## 8.3 Il bordo di Thurston degli spazi di Teichmüller

### 8.3.1 Descrizione mediante caratteri

Fissiamo come sopra una superficie connessa compatta orientabile  $S = \Sigma_g^k$ , e scriviamo  $\Gamma = \pi_1(S)$ . Consideriamo l'insieme di tutte le strutture iperboliche di volume finito su  $S$ , quozientato modulo la relazione di equivalenza “essere isotopicamente equivalenti”, introdotta nella definizione 22. Questo insieme quoziente si chiama **spazio di Teichmüller** di  $S$ , e viene denotato con  $\tau_g^k$ .

Due strutture iperboliche isotopicamente equivalenti definiscono la stessa immersione  $\Gamma \rightarrow \mathcal{H}(2) \simeq PSL_2(\mathbb{R})$ , ben definita a meno di coniugio, e che ha come immagine un sottogruppo discreto. Questo definisce una applicazione da  $\tau_g^k$  nell'insieme delle classi di coniugio delle rappresentazioni di  $\Gamma$  in  $PSL_2(\mathbb{R})$  che siano discrete, fedeli e rendano parabolici gli elementi  $\beta_i$  (notazione della sezione precedente). Questa applicazione è bigettiva, e consideriamo identificati i due insiemi.

Ogni elemento di  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  definisce, per composizione con il quoziente  $SL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R})$  una rappresentazione di  $\Gamma$  in  $PSL_2(\mathbb{R})$  che rende parabolici i  $\beta_i$ , e che rimane discreta e fedele perché  $\Gamma$  non ha elementi di ordine finito.

Considero il gruppo  $H = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ . Questo gruppo agisce su  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  nel seguente modo:  $H \times DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma) \ni (h, \rho) \rightarrow \rho' \in DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  con  $\rho'(\gamma) = (-1)^{h(\gamma)} \rho(\gamma)$ . Rispetto a questa azione due elementi hanno la stessa orbita se e solo se definiscono la stessa rappresentazione in  $PSL_2(\mathbb{R})$ .

Questa azione passa al quoziente, e diventa una azione su  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ :  $H \times DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma) \ni (h, \chi) \rightarrow \chi' \in DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  con  $\chi'(\gamma) = (-1)^{h(\gamma)} \chi(\gamma)$ .

Siccome gli elementi di  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  sono in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugio degli elementi di  $DR_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  il quoziente rispetto all'azione  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)/H$  è in corrispondenza biunivoca con lo spazio di Teichmüller  $\tau_g^k$ .

Sia  $h \in H$ ,  $h \neq \mathbb{I}$ . Allora esiste  $\gamma \in \Gamma$  tale che  $h(\gamma) = -1$ , quindi  $I_\gamma(\chi) = -I_\gamma(h\chi)$ .  $I_\gamma$  ha segno diverso su  $\chi$  e su  $h\chi$ , quindi, per il lemma 265,  $h$  non manda nessuna componente connessa di  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  in sé, agisce in maniera libera sulle componenti connesse.

Possiamo portare la topologia classica di  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)/H$  su  $\tau_g^k$  con questa corrispondenza biunivoca. Si può dimostrare che con questa topologia  $\tau_g^k$  è omeomorfo ad uno spazio euclideo. Quindi è connesso, e questo dice che l'azione di  $H$  sulle componenti connesse di  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  è transitiva. Quindi il quoziente  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)/H$  è in corrispondenza biunivoca con una qualunque componente connessa di  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ , che è poi una componente connessa di  $X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ .

### 8.3.2 Compattificazione di $\tau_g^k$

Abbiamo visto come  $\tau_g^k$  si può mettere in corrispondenza biunivoca, in maniera naturale, con  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)/H$ , da cui eredita la topologia, e come la proiezione nel quoziente dell'azione di  $H$  induca una corrispondenza biunivoca fra una qualunque componente connessa di  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  e il quoziente. Abbiamo visto anche che le componenti connesse di  $DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$  sono anche componenti connesse di  $X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ , che è una varietà reale affine definita su  $\mathbb{Q}$ .

Nella sezione 3.6 abbiamo visto come si possa compattificare una componente connessa di una varietà reale  $W$  definita su  $\mathbb{Q}$  scegliendo una famiglia numerabile  $\mathcal{F} \subset \mathbb{Q}[W]$  che generi, e aggiungendo valutazioni del campo  $\mathbb{Q}(W)$  definite da successioni  $\mathbb{Q}$ -valutanti di punti di  $W$ . Abbiamo visto anche che il sottoinsieme dei punti aggiunti rappresentati da valutazioni discrete di rango uno è denso.

Se ora applichiamo questo alla varietà  $X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)$ , scegliendo come famiglia  $\mathcal{F} = \{I_{c|X_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma)}\}_{c \in \mathcal{C}}$ , dove  $\mathcal{C}$  indica l'insieme delle classi di coniugio di  $\Gamma$ , troviamo una compattificazione delle sue componenti connesse, e quindi di  $\tau_g^k$ . La mappa  $\theta : DX_{\mathbb{R}}^{par}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}$ , che serve per definire la compattificazione, commuta con l'azione di  $H$ , e quindi la compattificazione di  $\tau_g^k$  indotta non dipende dalla componente connessa scelta.

I punti aggiunti sono contenuti nella compattificazione di  $X(\Gamma)$  descrit-

ta all'inizio del capitolo, quindi corrispondono tutti a funzioni lunghezza proiettivizzate di azioni di  $\Gamma$  su alberi reali.

### 8.3.3 Intersezione geometrica di curve

Sia  $p : \tilde{S} \rightarrow S$  il rivestimento universale di  $S$ , e  $C \subset S$  un **link essenziale**, ossia un link in  $S$  in cui nessuna componente connessa borda un disco in  $S$  né è parallela ad una componente di bordo di  $S$ .  $C$  si può sollevare ad un sistema di curve  $\tilde{C} = p^{-1}(C) \subset \tilde{S}$ . A partire da  $C$  possiamo costruire un grafo combinatorio che ha come vertici le componenti connesse di  $\tilde{S} \setminus \tilde{C}$ , e dicendo che due vertici sono collegati da un lato se e solo se le chiusure in  $\tilde{S}$  delle componenti connesse che li rappresentano si intersecano. In questa maniera i lati del grafo sono in corrispondenza biunivoca con le componenti connesse di  $\tilde{C}$ . Si vede che questo grafo è connesso e semplicemente connesso, e quindi è un albero combinatorio.

Il gruppo  $\Gamma$  agisce sul rivestimento universale  $\tilde{S}$  con diffeomorfismi che preservano l'orientazione, e che mandano  $\tilde{C}$  in sé, e quindi  $\tilde{S} \setminus \tilde{C}$  in sé. Questa azione induce quindi una azione sull'albero, che si estende poi ad una azione con isometrie sulla sua realizzazione simpliciale. Il fatto che gli elementi di  $\Gamma$  preservino l'orientazione di  $\tilde{S}$  e che  $\tilde{C}$  sia a due facce garantisce che l'azione sia senza inversioni. Questa azione induce poi una funzione lunghezza a valori interi. Le azioni su alberi costruite in questo modo si dicono **azioni geometriche**, e le loro funzioni lunghezza si dicono **funzioni lunghezza geometriche**.

Le funzioni lunghezza geometriche si possono definire anche in maniera più geometrica, definendo il **numero di intersezione geometrica** di un sistema di curve  $C$  con un elemento  $\gamma \in \Gamma$  (indicato con  $\langle \gamma, C \rangle \in \mathbb{N}$ ). Definisco  $\langle \gamma, C \rangle = \min_{f \in \gamma} \text{Card } f^{-1}(C)$ , il minimo numero di punti di intersezione fra  $C$  e un rappresentante  $f$  della classe  $\gamma$ .

**Proposizione 266.** *Se  $C \subset S$  è un link essenziale, la funzione lunghezza dell'azione di  $\Gamma$  sull'albero costruito a partire da  $C$  è  $l(\gamma) = \langle \gamma, C \rangle$ .*

*Dim :* [MS1, prop. 3.2.3]. □

### 8.3.4 Interpretazione dei punti di bordo

Abbiamo detto che possiamo compattificare lo spazio di Teichmüller  $\tau_g^k$  aggiungendo un insieme di punti ideali che chiamo  $B(\tau_g^k)$  che sono funzioni lunghezza proiettivizzate di azioni di  $\Gamma$  su alberi reali. Per il corollario 259 queste azioni hanno la proprietà che lo stabilizzatore di ogni segmento non degenerare dell'albero sia virtualmente abeliano.

In effetti per i punti di  $B(\tau_g^k)$  si può dire ancora di più:

**Teorema 267.** *Un elemento di  $B(\tau_g^k)$  è una funzione lunghezza proiettiviz-*

*zata di un'azione su un albero reale in cui lo stabilizzatore di ogni segmento non degenerare è ciclico e in cui gli elementi  $\beta_i$  hanno punti fissi.*

*Inoltre la chiusura dell'insieme delle funzioni lunghezza geometriche proiettivizzate è proprio  $B(\tau_g^k)$ .*

*Dim :* [MS1, prop. 3.3.1] e [MS1, thm. 3.3.2]. □

Nell'articolo [MS3] si estende la definizione di azione geometrica partendo da laminazioni misurate su  $S$  invece che da sistemi di curve, ottenendo azioni geometriche su alberi reali, con le corrispondenti funzioni lunghezza geometriche a valori reali. Con questa nuova definizione l'insieme dei punti di  $\mathcal{P}$  che sono funzioni lunghezza geometriche proiettivizzate coincide con l'insieme  $B(\tau_g^k)$ .

# Bibliografia

## [1] Articoli principali

- [CS1] Culler M., Shalen P.B., *Varieties of group representations and splitting of 3-manifolds*, Annals of Math. **117** (1983), 109–146.
- [CGLS] Culler M., Gordon C. M., Luecke J., Shalen P.B., *Dehn surgery on knots*, Annals of Math. **125**(1987), 237–300.
- [CCGLS] Cooper D., Culler M., Gillet H., Long D. D., Shalen P. B., *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Invent. Math. **118** (1994), 47–84.
- [MS1] Morgan J. W., Shalen P. B., *Valuations, trees, and degeneration of hyperbolic structures, I*, Annals of Math. **120** (1984), 401–476.
- [MS2] Morgan J. W., Shalen P. B., *Degeneration of hyperbolic structures, II: Measured laminations in 3-manifolds*, Annals of Math. **127** (1988), 403–456.
- [MS3] Morgan J. W., Shalen P. B., *Degeneration of hyperbolic structures, III: Actions of 3-manifold groups on trees and Thurston's compactness theorem*, Annals of Math. **127** (1988), 457–519.

## [2] Articoli precedenti

- [St] Stallings J. R., *Some topological proofs and extensions of Grushko's theorem*, Thesis, Princeton Univ. (1959).
- [Ep] Epstein D. B. A., *Free products with amalgamation and 3-manifolds*, Proc. A. M. S. **12** (1961), 669–670.
- [Wa] Waldhausen F., *Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, Topology **6** (1967), 505–517.
- [Sh] Shalen P.B., *Separating, incompressible surfaces in 3-manifolds*, Invent. Math. **52** (1979), 105–126.
- [Ha] Hatcher A. E. *On the boundary curves of incompressible surfaces*, Pacific Journal of Math. Vol. 99, No. 2, 1982.

- [3] Altri articoli
- [CS2] Culler M., Shalen P.B., *Bounded, separating, incompressible surfaces in knot manifolds*, Invent. math. **75** (1984), 537–545.
- [CS3] Culler M.; Shalen P. B. *Boundary slopes of knots*. Comment. Math. Helv. **74** (1999), 530–547.
- [CGLS2] Culler M., Gordon C. M., Luecke J., Shalen P. B., *Correction to: Dehn surgery on knots*. Annals of Math. (2) **127** (1988), 663.
- [Du] Dunfield N. M., *Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds*, Invent. Math. **136** (1999), 623–657.
- [Sh2] Shalen P. B. *Three-manifold topology and the tree for  $PSL_2$ : the Smith conjecture and beyond*. Algebra, K-theory, groups, and education (New York, 1997), 189–209, Contemp. Math., 243, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [Sh3] Shalen P. B. *Representations of 3-manifold groups*. Handbook of geometric topology, 955–1044, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Mo] Morgan J. W.,  *$\Lambda$ -trees and their applications*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **26** (1992), 87–112.
- [BZ] Boyer S., Zhang X., *On Culler-Shalen seminorms and Dehn filling*, Ann. Math. (2) **148** (1998), 737–801.
- [4] Riferimenti per la topologia
- [He] Hempel J., *3-Manifolds*, Ann. of Math. Studies **86**, Princeton Univ. Press, 1976.
- [Ro] Rolfsen D., *Knots and Links*, II ed., Math. Lect. Ser., Publish or Perish, Inc., 1990.
- [BP] Benedetti R., Petronio C., *Lectures on hyperbolic geometry*, Springer-Verlag, 1992.
- [Bo] Boothby W. M., *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Pure and Applied Math. vol. 120, II ed., Academic Press Inc., Orlando, Fla., 1986.
- [Ep2] Epstein D. B. A., *Curves on 2-manifold and isotopies*, Acta. Math., **115** (1966), 83–107.
- [5] Azioni di gruppi su alberi

- [Se] Serre J.-P. (con Bass H.), *Trees*, Springer-Verlag, 1980.
- [Tr] Tretkoff M., *A topological approach to the theory of groups acting on trees*, J. Pure Appl. Algebra **16** (1980), 323–333.
- [6] Riferimenti per la geometria algebrica
- [La] Lang S., *Introduction to Algebraic Geometry*, Interscience publishers, INC., 1958.
- [M1] Mumford D. *Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties*, Springer-Verlag, 1976.
- [M2] Mumford D. *Introduction to Algebraic Geometry*, preliminary version of first tree chapters, photocopied notes, Harvard University.
- [BCR] Bochnak J., Coste M., Roy M.-F., *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1998.
- [Le] Lefschetz S. *Algebraic Geometry*, Princeton University Press, 1953.
- [Ki] Kirwan, F. *Complex Algebraic Curves* (London Math. Soc. Student Texts, Vol. 23), Cambridge University Press 1992.
- [Mi] Milnor, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton University Press, 1968.
- [7] Riferimenti per l'algebra
- [ZS1] Zariski O., Samuel P. *Commutative Algebra*, vol 1, Springer-Verlag, 1975.
- [ZS2] Zariski O., Samuel P. *Commutative Algebra*, vol 2, Springer-Verlag, 1975.
- [AM] Atiyah M. F., Macdonald I. G. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley.
- [Hah] Hahn H., *Über die nichtarchimedischen Grossensysteme*, S.-Ber. Akad. Wiss., Math. Natur. Kl. Abt. IIa, **116** (1907), 601–655.



# Indice analitico

- $C^\infty$ -compatibili, 9
- $\partial$ -incompressibile, 100
  
- a due facce, 10
- albero, 29, 32
- albero reale, 32
- altezza, 30
- anello delle coordinate affini, 36
- anello di valutazione, 56–58
- anello locale, 36, 43
- aperti di Zariski, 36
- archimedeo, 30
- arrivo, 28
- asse, 75
- asse parziale, 75
- associata alla parametrizzazione, 24
- associato all'azione, 92
- assolutamente irriducibile, 78
- atlante, 9
- atlante massimale di classe  $C^\infty$ , 9
- azione, 29
- azioni geometriche, 115
  
- bordo, 9
- bordo dello spazio iperbolico, 22
- bordo essenziale, 27
- buon ricoprimento, 14
  
- cammino, 28
- campo delle coordinate, 34
- campo delle funzioni razionali, 36, 43
- campo di definizione, 34
- campo residuo, 57
- carattere, 77
- carta affine, 43
  
- carta locale, 9
- centrata, 51
- chiuso, 31
- circuito, 29
- classe  $C^\infty$ , 9
- co-ciclico, 69
- codimensione, 36, 43
- collare, 10
- compatibile, 61
- compattificazione, 61
- complementare del nodo, 26
- complesso cellulare finito, 16
- complessificazione, 41
- complesso cellulare finito, 16
- completamento proiettivo, 43
- componenti irriducibili, 35, 42
- compressione, 19
- coniugate, 77
- connesso, 28
- corpi con manici, 87
- corrispondenza, 45
- corrispondenza inversa, 45
- curva algebrica, 47
- CW-complessi, 18
  
- derivazione centrata, 38
- determinata, 61
- diffeomorfismo, 10
- differenziale, 10
- dimensione, 9, 36, 43
- disco, 11
- disco comprimente, 18
- discreta, 55, 77
- discreto, 30
- distanza, 29, 31
- dominante, 40

dominio universale, 39  
 embedding, 10  
 embedding proprio, 10  
 equivalente, 21  
 equivalenti, 31, 55  
 equivariante, 92  
 essenziali, 23  
 esterno del nodo, 26  
 estremità, 28  
 estremo, 28, 30  
  
 fedele, 77  
 fibrato normale, 10  
 fibrato tangente, 10  
 finito, 57  
 fisso, 29  
 funzione di transizione, 9  
 funzione differenziabile, 10  
 funzione lunghezza, 76  
 funzione lunghezza proiettivizzata, 109  
 funzioni lunghezza geometriche, 115  
 funzioni polinomiali, 34  
  
 generatori, 79  
 geodetica, 10, 29  
 grafi simpliciali, 29  
 grafo combinatorio, 28  
 gruppo fondamentale, 12, 26  
 gruppo ordinato, 29  
  
 ideale della varietà, 34, 42  
 ideale omogeneo, 42  
 inessenziali, 23  
 insieme fondamentale, 47  
 intervallo, 30  
 intervallo chiuso, 30  
 intervallo simmetrico, 30  
 intorno tubolare, 10  
 invariante, 78  
 inversione, 29  
 inversione fantasma, 75  
 iperbolica, 75  
  
 iperpiano all'infinito, 43  
 ipersuperficie, 10  
 irriducibile, 35, 42, 78  
 isolato, 30  
 isometria, 10, 31  
 isometria locale, 10  
 isometriche, 22  
 isomorfi, 57  
 isomorfismo, 28, 40, 45  
 isotopicamente equivalenti, 22  
  
 lati, 28, 51  
 link, 10, 28  
 link essenziale, 115  
 longitudine, 24  
 lunghezza, 28, 30, 32  
 lunghezza di traslazione, 75  
 luogo, 38  
  
 mappa birazionale, 45  
 mappa razionale, 45  
 meridiano, 24  
 metrica euclidea, 11  
 metrica iperbolica, 11  
 metrica sferica, 11  
 modello proiettivo regolare, 49  
 modello regolare, 49  
 morfismo, 28, 39, 45  
  
 nodo, 10  
 nodo banale, 26  
 nucleo, 25  
 numeri di Betti, 15  
 numero di intersezione geometrica, 115  
  
 ordine, 51  
 orientazione, 10, 28  
  
 palla, 11  
 parabolici, 112  
 parallela al bordo, 18  
 parallelismo, 18  
 parametrizzazione, 24, 25  
 parametrizzazione di Puiseaux, 51

parametrizzazione privilegiata, 26  
 parte affine, 43  
 parte interna, 9  
 parte reale, 41  
 partenza, 28  
 pendenza, 25, 27, 51  
 pendenza di bordo, 27  
 poligono di Newton, 51  
 polo, 57  
 posto, 57  
 presentazione, 79  
 presentazione finita, 79  
 prevalutante, 60  
 prodotto di varietà proiettive, 44  
 pull-back, 39, 45  
 punti all'infinito, 105  
 punti ideali, 50, 62  
 punto all'infinito, 107  
 punto regolare, 10, 38, 43, 45  
 punto singolare, 38, 43

rango, 30, 55  
 rango finito, 30  
 rappresentazione, 77  
 razionale, 57  
 realizzazione, 29  
 regolare, 92  
 relazioni, 79  
 reticolo, 67  
 riducibile, 78  
 riflessione, 75  
 riflessione fantasma, 31  
 riflessioni, 31  
 rispettano le relazioni, 79  
 rivestimento, 12

scheletro, 16  
 segmento, 31  
 segmento finale, 30  
 segmento iniziale, 30  
 semispazio, 11  
 semplice, 28  
 senza bordo, 9  
 senza inversioni, 29

senza inversioni fantasma, 76  
 sfera, 11  
 sistema di superfici, 10  
 somma connessa, 12  
 sopra, 51  
 sotto, 51  
 sottocomplesso cellulare, 17  
 sottografo, 28  
 sottogruppo periferico, 21  
 sottospazio, 31  
 sottovarietà, 10, 35, 42  
 spazi di Eilenberg-MacLane, 18  
 spazio di Teichmüller, 113  
 spazio ellittico, 11  
 spazio euclideo, 11  
 spazio iperbolico, 11  
 spazio metrico, 31  
 spazio normale, 10  
 spazio normale al bordo, 10  
 spazio tangente, 10, 38, 43  
 spazio tangente al bordo, 10  
 specializzazione, 38  
 specializzazione generica, 39  
 stabilizzatore, 29  
 stella, 28  
 struttura iperbolica, 21  
 struttura riemanniana, 10  
 suddivisione baricentrica, 28  
 superficie, 10, 12  
 superficie di Riemann astratta, 63  
 superficie essenziale, 18  
 superficie incompressibile, 18  
 supporto all'infinito, 60

topologia di Zariski, 35, 36, 42, 44  
 toro solido, 25  
 traslazione, 75  
 traslazioni, 31  
 trasversale, 10  
 triviale, 18, 55, 57

unicamente connesso per segmenti, 32  
 valore, 57

valore regolare, 10  
valutante, 59  
valutazione, 55  
varietà affine astratta, 40  
varietà algebrica affine, 34  
varietà algebrica proiettiva, 42  
varietà associata al link, 26  
varietà associata al nodo, 26  
varietà chiusa, 9  
varietà dell'ideale, 34, 42  
varietà differenziabile, 9  
varietà orientabili, 10  
varietà proiettiva astratta, 45  
varietà regolare, 38, 43  
vertici, 28  
virtualmente abeliano, 111