Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Абрамчук В.С., Абрамчук І.В., Петрук Д.О., Пугач О.С. Оптимізаційні методи розв'язування систем Ax=B // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2017. – Випуск 1(11). – С. 9-13.

Abramchuk V., Abramchuk I., Petruk D., Puhach O. Optimization Methods For Solving Systems Ax=B // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 1(11). – P. 9-13.

УДК 519.6

В.С. Абрамчук, І.В. Абрамчук, Д.О. Петрук, О.С. Пугач
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Україна
helenpugach@gmail.com

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ $A\vec{x}=\vec{b}$

Анотація. *У роботі обґрунтовано, що ітераційні методи класу* $\vec{x}^{(k+1)}=B^{(k)}\vec{x}^{(k)}+\beta_k\vec{w}^{(k)}$, $B_k\in M_{n\times n}(R), \vec{w}^{(k)}\in R^n, \beta_k\in R$, *не є ефективними при розв'язуванні систем* $A\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{b}\in imA$.

З погано зумовленими матрицями $A\in M_{n\times n}(R), rankA=n$, *довільної структури, великих порядків: сповільнюється швидкість збіжності, оскільки наближення при мінімізації норми вектора нев'язки або вектора похибки попадають в область* $K_{\min}$ *– область мінімальних нев'язок; базисні вектори з підпростору Крилова, на яких ґрунтується збіжність методу, сильно зумовлені, похибки обчислень приводять до не монотонності процесу збіжності.*

Запропонований двоциклічний алгоритм мінімізує похибку обчислень і строго монотонно збігається. Алгоритм заснований на основі базису Крилова $Kr_m=\left\{\vec{r}, A\vec{r},..., A^{m-1}\vec{r}\right\}$, $\vec{r}$ *– нев'язка і системи повних базисів* $Ke_i=\left\{\vec{e}_i, A\vec{e}_i,..., A^{m-1}\vec{e}_i\right\}_{i=1}^{n}, \left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1}^{n}$ *– одиничний базис. Базис* Kr_m *використовується для побудови початкового наближення, базиси* $\left\{Ke_i\right\}_{i=1}^{n}$ *– для уточнення напрямного вектора на розв'язок, у заданій (обчисленій) точці* $\vec{x}^{(0)}$, *що гарантує стійкість процесу обчислень. Критерій прийняття наближеного рішення системи стійкий до похибок.*

Ключові слова: *погано зумовлені матриці, ітераційні методи, метод напрямленого пошуку, базиси криловського типу.*

Постановка проблеми. При розв'язуванні сіткових і різницевих рівнянь математичної фізики, що описують різні реальні явища [4-11], виникають проблемні задачі – не розв'язані або мало досліджені в теорії систем лінійних алгебричних рівнянь. З ростом порядку матриці (розрідженої, довільної структури, невиродженої але погано зумовленої) зростає число зумовленості матриці, спадає швидкість збіжності ітераційних методів, яка залежить від похибок обчислень, від структури матриці, критерії прийняття наближених рішень стають не достовірними. І головне, чи існує принципова стратегія розробки ітераційних методів розв'язання вказаних проблемних задач.

Аналіз актуальних досліджень. Недостатньо дослідженою проблемою є визначення стратегії розв'язання систем $A\vec{x}=\vec{b}$ з невиродженими погано зумовленими матрицями великих порядків. Не існує єдиного способу побудови ефективних методів розв'язування таких систем. З однієї сторони, на основі теорії збурень випливає, що в умовах реальних обчислень – накопичення похибок заокруглення в машинній арифметиці, такі системи не можливо розв'язувати з достовірною точністю, оскільки матриці цих систем близькі до вироджених [4,5,9,11]. З другої сторони, запропоновані методи спряжених, бі-спряжених напрямів для різницевих рівнянь $A\vec{x}=\vec{b}$ з додатно визначеними симетричними матрицями, широко застосовуються у практиці [5,11]. З третьої сторони, проектування високочутливих систем обробки результатів спостережень (регресійний аналіз з степеневим базисом, матриці Гільберта, Коші [5,9]) дослідження обернених задач, пов'язаних з ідентифікацією матеріалів [6], з природними катаклізмами тощо [11], вимагають оцінки розв'язків систем $A\vec{x}=\vec{b}$ з погано зумовленими матрицями.

Більшість класичних ітераційних методів [4-9,11] описується процедурою: наближення до розв'язку системи $A\vec{x}=\vec{b}$ формувати як послідовність

$$\vec{x}^{(k+1)}=\vec{x}^{(k)}+\alpha_k\vec{c}^{(k)} \text{ або } \vec{x}^{(k+1)}=B^k\vec{x}^{(k)}+\beta_k\vec{w}^{(k)}, \text{ для } \forall k=0,1,... \quad (1)$$

де $B^k,\vec{c}^{(k)},\vec{w}^{(k)}$ задаються як функції (оператори) матриці A, правої частини $\vec{b}$, наближення до $A^{-1}: B^{(k)}\approx A^{-1}$, використовують наближення $\vec{x}^{(i)}$ за S попередніх кроків: $\vec{x}^{(k-1)},...,\vec{x}^{(k-S)}$ тощо.

Мета статті. 1. Виконати аналіз причин, що стають на перешкоді ітераційним методам класу (1) стати ефективними. 2. Запропонувати принципово нову стратегію можливості побудови ефективних методів розв'язування систем $A\vec{x}=\vec{b}$ з невиродженими погано зумовленими матрицями великих порядків.

Виклад основного матеріалу. Основними причинами, що стають на перешкоді методам класу (1) бути ефективними є: область $K_{\min}$ – мінімальних нев'язок, базиси криловського типу, похибки обчислень, які накопичуються в ітераціях.

1. Область $K_{\min}$. Простір R^n розбивається гіперплощинами $A_i\vec{x}=b_i, i=1,...,n$ (A_i – вектор-рядки матриці A (нормалі), $\vec{b}=(b_i,...,b_n)^T$) на 2^n конусів з вершиною у розв'язку $\vec{x}^*=A^{-1}\vec{b}$. Конуси, що містять сингулярну пряму (у загальному площину) $\vec{x}=\vec{x}^*+t\vec{\varepsilon}_{\min}$ утворюють область мінімальних нев'язок, де $\vec{\varepsilon}_{\min}=\vec{x}-\vec{x}^*$ – власний вектор матриці A^TA, що відповідає $\lambda_{\min}(A^TA)$. Основні деталі пояснимо на прикладі простору R^2 (не втрачаючи загальності).

Приклад. Проаналізувати систему

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0,9999\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0,01\end{bmatrix},\ \vec{x}^*=\begin{bmatrix}100\\ -100\end{bmatrix},\ \vec{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0,01\end{bmatrix}.$$

Виберемо дві початкові точки $\vec{x}^{(1)}=[150;50]\notin K_{\min}$, $\vec{x}^{(2)}=[0;0]\in K_{\min}$, $\left\|\vec{x}^{(1)}-\vec{x}^*\right\|_2\approx 158$, $\left\|\vec{x}^{(2)}-\vec{x}^*\right\|_2\approx 14$. Застосуємо один і той же ітераційний процес напрямленого пошуку [3]: $\vec{\tilde{x}}^{(k)}=\vec{x}^{(k)}+\alpha_k A^T\vec{r}^{(k)}$ $\alpha_k=-\left\|\vec{r}^{(k)}\right\|_2^2/\left\|A^T\vec{r}^{(k)}\right\|_2^2$, що мінімізує норму $\|\cdot\|_2$ вектора похибки, дістанемо $\vec{\tilde{x}}^{(1)}=[49,99878739;-49,99621274]^T\in K_{\min}$, $\vec{\tilde{x}}^{(2)}=[0,0050005;0,005]^T\in K_{\min}$.

Обчислимо нев'язки $\vec{\tilde{r}}^{(1)}=[0,00257465;0,002425228]^T$, $\vec{\tilde{r}}^{(2)}=[0,010005;0]^T$. Незалежно від того, що $\vec{x}^{(1)}\notin K_{\min}$, $\vec{x}^{(2)}\in K_{\min}$, ітераційний процес класу (1) за один крок привів наближення в область $K_{\min}$, причому точка $\vec{x}^{(1)}$, що знаходилась на значній відстані від розв'язку, перейшла в блищу точку $\vec{\tilde{x}}^{(1)}\in K_{\min}$, ніж точка $\vec{\tilde{x}}^{(2)}$, яка належала $K_{\min}$ і знаходилась на меншій відстані від розв'язку. Точка $\vec{x}^{(2)}$ майже не змінила своє положення, нев'язки $\vec{\tilde{r}}^{(1)}$, $\vec{\tilde{r}}^{(2)}$, якими оперують в методах класу (1), ніякого роз'яснення не вносять в дану ситуацію. Процес збіжності в області $K_{\min}$ з нових стартових точок $\vec{\tilde{x}}^{(1)}$, $\vec{\tilde{x}}^{(2)}$ на наступних кроках настільки сповільниться, що його необхідно буде зупинити за кількістю кроків $k\le 500$, так і не досягнувши фактичного розв'язку. Число зумовленості матриці $condA=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)/\lambda_{\min}(A^TA)}=12648,79453$.

2. Базис Криловського типу. Цей базис є основним в методах класу (1). Якщо відоме наближення $\vec{x}^{(0)}\in R^n$ і нев'язка $\vec{r}^{(0)}=A\vec{x}^{(0)}-\vec{b}$, то базис формується як система $Kr_m=\left\{\vec{r}^{(0)},A\vec{r}^{(0)},...,A^{m-1}\vec{r}^{(0)}\right\}$. Система Kr_m є погано зумовленою, тому процес її ортогоналізації методом Грама-Шмідта (Арнольді або Ланцоша) приводить до швидкої розортогоналізації в силу похибок заокруглень. Отже, в практичних обчисленнях необхідно вибирати $m \ll n$ тоді базис Kr_m у просторі R^n не повний.

3. Похибки обчислень. Похибки обчислень завжди присутні в реальних обчисленнях в машинній арифметиці, складаються з похибок заокруглення та втрати старших розрядів (катастрофічна втрата точності). Отже, проблемною задачею є така організація процесу обчислень, щоб мінімізувати вплив похибок обчислень на кінцевий результат.

Область $K_{\max}$. У протилежність області $K_{\min}$ існує область $K_{\max}$ (область максимальних нев'язок), що є об'єднанням конусів, які містять сингулярну пряму $\vec{x}=\vec{x}^*+t\vec{\varepsilon}_{\max}$, де $\vec{\varepsilon}_{\max}$ – власний вектор, що відповідає $\lambda_{\max}(A^TA)$. Власні вектори $\vec{\varepsilon}=\vec{x}-\vec{x}^*$ матриці A^TA мають фундаментальну властивість для збіжності довільного ітераційного методу: $A^TA\left(\vec{x}-\vec{x}^*\right)=\lambda\left(\vec{x}-\vec{x}^*\right)$. Звідси випливає, що $A^T\vec{r}=\lambda\left(\vec{x}-\vec{x}^*\right)$ є оптимальним вектором на розв'язок.

Таким чином, задача мінімалізації (максимізації), відношення Релея $\rho = \|r\|_2^2 / \|\varepsilon\|_2^2$ на сфері $\left\|\vec{x} - \vec{x}^*\right\|_2^2 = \left\|\vec{x}^{(0)} - \vec{x}^*\right\|_2^2$ для довільної точки $\vec{x}^{(0)} \in R^n$, $\vec{x}^{(0)} \neq \vec{x}^*$, є розв'язанням проблеми побудови швидкозбіжних ітераційних методів [2,3].

Ітераційні методи напрямленого пошуку. В методах напрямленого пошуку ітераційний процес можна організувати наступною процедурою [2,3]:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \alpha_k A^T \vec{c}^{(k)}, \ \alpha_k = -(\vec{r}^{(k)}, \vec{c}^{(k)}) / \left\|A^T \vec{c}^{(k)}\right\|_2^2 . \tag{2}$$

Послідовність похибок $\vec{\varepsilon}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^*$ строго монотонно збігається в абсолютно точній арифметиці для довільної послідовності напрямних векторів $A^T \vec{c}^{(k)}$, $\vec{c}^{(k)} \in K$, $\left(\vec{c}^{(k)}, \vec{r}^{(k)}\right) \neq 0$. Швидкість збіжності

$$\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_2^2 = \left\|\vec{\varepsilon}_k\right\|_2^2 (1 - \cos^2 \left\{A^T \vec{c}^{(k)}, \vec{\varepsilon}^{k}\right\}). \tag{3}$$

Проте в силу похибок обчислень, процес швидкості збіжності може значно сповільнитись .

Запропонуємо алгоритм методу напрямного пошуку з матрицями "чорний ящик" на принципово новій стратегії, відмінній від (1), що згладжує похибки обчислень, збігається строго монотонно. Запишемо двоциклічну ітераційну процедуру:

$$\vec{x}^{(k,i)} = \vec{x}^{(i)} + \alpha_{k,i} A^T \vec{c}^{(k,i)}, \ \alpha_{k,i} = -(\vec{r}^{(i)}, \vec{c}^{(k,i)}) / \left\|A^T \vec{c}^{(k,i)}\right\|_2^2, \ i = 0,1,...,n, \ k = 0,1,...,m \tag{4}$$

Процес (4) складається з двох етапів: а) обчислення початкового напрямного вектора $\vec{c}^{(0)}$ на основі криловського базису Kr_m; б) уточнення напрямного вектора $\vec{c}^{(i)}$ по системі повних базисів криловського типу $\left\{Ke_i = \left\{e_i, Ae_i, ..., A^{m-1} e_i\right\}\right\}_{i=1}^n$.

Початкове наближення вектора $\vec{c}^{(0)}$ в базисі Kr_m. Нехай заданий вектор $\vec{x}^{(0)}$, нев'язка $\vec{r}^{(0)} = A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}$. Сформуємо базис $Kr_m = \left\{\vec{r}^{(0)}, A\vec{r}^{(0)}, ..., A^{m-1}\vec{r}^{(0)}\right\} = \{\vec{u}_0, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_{m-1}\}$.

Розмірність m вибирається з умови: $\forall j \in [0,1,..., m-1]$ $\cos^2\left\{A^{(j-1)}\vec{r}^{(0)}, A^{(j)}\vec{r}^{(0)}\right\} < 1 - 10^{-s}$ і для $j = m$ $\cos^2\left\{A^{(m-1)}\vec{r}^{(0)}, A^{(m)}\vec{r}^{(0)}\right\} \geq 1 - 10^{-s}$ $s > 1$ – ціле додатне число, пов'язане з машинною точністю (практично достатньо покласти $s = \{8,9,10\}$. Ортогоналізуємо методом Грама-Шмідта систему K_m, дістанемо систему $\left\{\tilde{\vec{u}}_0, \tilde{\vec{u}}_1, ..., \tilde{\vec{u}}_{m-1}\right\}$ з вектора $\left\{\tilde{\vec{u}}_i\right\}$. Сформуємо вектор $\vec{c}^{(0)} = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \tilde{\vec{u}}_i, \alpha_i = -\left(\vec{r}^{(0)}, \tilde{\vec{u}}_i\right) / \left\|A^T \tilde{u}_i\right\|_2^2$. Вектор $\vec{c}^{(0)}$ мінімізує норму вектора похибки (або максимізує $\cos^2\left\{A^T \vec{c}^{(0)}, \vec{\varepsilon}^{(0)}\right\}$). Таким чином, вектор $\vec{c}^{(0)}$, гладжує похибку розортогоналізації – він побудований на основі оптимальних параметрів α_i для базису Kr_m малої розмірності $m << n$, забезпечує строгу монотонність для норми вектора похибки. Дійсно, обчислимо

$$\left\|\vec{\varepsilon}^{(1)}\right\|_2^2 = \left\|\vec{\varepsilon}^{(0)}\right\|_2^2 - (r^{(0)}, \vec{c}^{(0)})^2 / \left\|A^T \vec{c}^{(0)}\right\|_2^2 < \left\|\vec{\varepsilon}^{(0)}\right\|_2^2, \tag{5}$$

оскільки, для векторів з підпростору Крилова $\left(\vec{c}^{(0)}, \vec{r}^{(0)}\right) \neq 0.$ Чим менша похибка розортогоналізації, тим ближче норма обчисленої похибки (5) буде до теоретичної (в абсолютно точній арифметиці $\left\|\vec{\varepsilon}^{(i)}\right\|_2^2 = \left\|\vec{\varepsilon}^{(0)}\right\|_2^2 \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} \cos^2 \left\{A^T \tilde{\vec{u}}_k, \vec{\varepsilon}^{(0)}\right\}\right).$

Уточнення напрямного вектора $\vec{c}^{(0)}$ здійснимо на основі системи повних базисів. Таку систему найпростіше формувати з одиничного базису $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ у формі криловських базисів $Ke_i = \left\{\vec{e}_i, A\vec{e}_i, ..., A^{m-1}\vec{e}_i\right\} = \left\{w_0^{(i)}, w_1^{(i)}, ..., w_{m-1}^{(i)}\right\}$. Розмірність m вибирається як і для базису Kr_m. Уточнення $\vec{c}^{(0)}$ проведемо наступним алгоритмом: побудуємо у внутрішньому циклі послідовність A^T – ортогональних векторів $\vec{s}^{(1,k)} : i = 1 : \vec{s}^{(1,0)} := \gamma_0 \vec{c}^{(0)} + \vec{w}_0^{(i)}$, за правилом $(A^T \vec{s}^{(i,0)}, A^T \vec{c}^{(0)}) = 0 \Rightarrow \gamma_0 = -(A^T \vec{c}^{(0)}, A^T \vec{w}_0^1) / \left\|A^T c_0^{(0)}\right\|_2^2$; Для $\forall k \in [0,1,..., m-1]$ покласти $\vec{s}^{(i,k)} := \gamma_0 c^{(0)} + \sum_{t=0}^{k-1} \beta_t \vec{s}^{(i,t)} + \vec{w}_t^{(1)}$:

Параметри $\gamma_{0,} \beta_t, t \in [1; m-1]$ знайдемо з умови ортогоналізації системі векторів $\left\{A^T \vec{c}^{(0)}, A^T s^{(i;k)}\right\}_{k=0}^{m-1}$:

$$(A^T \vec{s}^{(i,k)}, A^T \vec{c}^{(0)}) = 0 \quad \forall t \in [0; k-1] \ A^T \vec{s}^{(i,k)}, A^T \vec{s}^{(i,t)}) = 0 \Rightarrow \gamma_0 = -(A^T \vec{c}^{(0)}, A^T w_k^{(1)}) / \left\|A^T c_k^{(0)}\right\|_2^2,$$

$$\beta_k = -(A^T s^{(i,k)}, A^T w_k^{(1)}) / \left\|A^T w_k^{(1)}\right\|_2^2.$$

Після завершення внутрішнього циклу по $k \in [0,1,...n-1]$ дістанемо систему A^T ортогональних векторів $\vec{s}(i,k)$ в абсолютній арифметиці і вектор $A^T \vec{c}^{(0)}$ ортогональний системі $\left\{A^T \vec{s}^{(i,k)}\right\}$.

З векторів $\vec{s}^{(i,k)}$ сформуємо вектор $\vec{s}^{(i)}$ у формі $\vec{s}^{(i)} = \sum_{k=0}^{m-1} \eta_k \varsigma^{(i,k)}, \eta_k = -\left(\vec{r}^{(0)}, \vec{s}^{(i,k)}\right) / \left\|A^T \vec{s}^{(i,k)}\right\|_2^2$.

Вектор $\vec{s}^{(i)}$ мінімізує норму вектора похибки і $\left(A^T \vec{s}^{(i)}, A^T \vec{c}^{(0)}\right) = 0,$ тому уточнений вектор $\vec{c}^{(i)}$ задамо у формі $\vec{c}^{(i)} = \alpha \vec{c}^{(0)} + \beta \vec{s}^{(i)}, \alpha = -\left(\vec{r}^{(0)}, \vec{c}^{(0)}\right) / \left\|A^T \vec{c}^{(0)}\right\|_2^2 \quad \beta = -\left(\vec{r}^{(0)}, \vec{s}^{(0)}\right) / \left\|A^T \vec{s}^{(1)}\right\|_2^2$. Вектор $\vec{c}^{(i)}$ мінімізує норму вектора похибки: $\vec{x}^{(i)} = \vec{x}^{(0)} + \alpha A^T \vec{c}^{(0)} + \beta A^T \vec{s}^{(i)}$.

$$\left\|\vec{\varepsilon}^{(i)}\right\|_2^2 = \left\|\vec{\varepsilon}^{(0)}\right\|_2^2 - \frac{\left(\vec{r}^{(0)}, \vec{c}^{(0)}\right)^2}{\left\|A^T \vec{c}^{(0)}\right\|_2^2} - \frac{\left(\vec{r}^{(0)}, \vec{s}^{(i)}\right)}{\left\|A^T \vec{s}^{(i)}\right\|_2^2} < \left\|\vec{\varepsilon}^{(0)}\right\|_2^2. \tag{7}$$

Якщо критерій збіжності не виконується, то продовжимо процес по зовнішній ітерації $i \in [1:n.]$ В процесі обчислень по i нев'язка $\vec{r}^{(0)}$ не змінюється. Після завершення циклу по i, якщо критерій збіжності не виконується, виконати проекцію, процес повторити.

Критерій збіжності. Нехай $\tilde{\vec{x}}$ – деяке наближення до розв'язку системи. Обчислимо $\varphi = \cos^2\{\vec{c}(\vec{x}), \vec{b}\}$, $\vec{c}(\tilde{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^n A_i.\tilde{x}_i$. Якщо $\varphi \geq 1 - 10^t$, де $t > 1$ – ціле додатне число, то ітераційний процес зупинити, $\tilde{\vec{x}}$ – прийняти за наближений розв'язок системи. Функція φ є стійкою до похибок. Дійсно, нехай $\tilde{x} = \vec{x}* + \Delta\vec{x} \Rightarrow \vec{c}(\vec{x}* + \Delta\vec{x}) = \vec{b} + \Delta\vec{b}$ $\Delta\vec{b} = \sum_{i=1}^n A_{i.}\Delta x_i, \varphi = (1+\alpha)^2 / (1 + 2\alpha + \beta^2), \alpha = (\Delta\vec{b}, \vec{b}) / \|\vec{b}\|_2^2$ $\beta = \|\Delta\vec{b}\|_2 / \|\vec{b}\|_2$. Функція φ досягає максимуму лише за умови $\alpha = \beta = 0$, що означає $\|\Delta\vec{b}\|_2 = 0$ (отже всі $\Delta x_i = 0, i = 1,..., n$).

Теорема. Алгоритм ітераційного методу (4) на основі формування напрямних векторів з базису Крилова Kr_m і системи повних базисів Ke коректний: строго монотонно збігається, згладжує похибку обчислень, застосований до систем з довільними дійсними не виродженими матрицями.

Доведення теореми випливає з формул (4)-(7).

Висновки. 1. У роботі запропонований принципово новий підхід до розв'язування систем з довільними дійсними не виродженими погано зумовленими матрицями великих порядків, що ґрунтується на використанні системи повних базисів криловського типу у просторі R^n.

2. Перспективним напрямком є застосування методу до розв'язування різницевих еліптичних рівнянь, матриці яких містять ортогональні підсистеми.

Список використаних джерел

1. Абрамчук В.С. Базисні системи в задачах математичного моделювання / В.С. Абрамчук, І.В. Абрамчук, Д.О. Петрук, О.С. Пугач, О.Г. Руда, Я.В. Шмулян // Фізико-математична освіта: наук. журн.; Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка. – Суми, 2016. – №3(9). – С. 17-21.
2. Абрамчук В.С. Ефективні ітераційні методи розв'язування систем лінійних рівнянь / В.С. Абрамчук, І.В. Абрамчук, А Вешемірський // Вісник Львівського університету. Сер. прикладна математика та інформатика. – 2007. – Вип. 12. – С. 5-12.
3. Абрамчук В.С. Проблеми, методи, алгоритми розв'язування систем лінійних рівнянь з погано зумовленими матрицями/ В.С. Абрамчук, І.В. Абрамчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. Випуск 10. – 2014. – С. 5-17.
4. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. – М.: Мир, 2001. – 429 с.
6. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач: Учеб. Пособие./ А.М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
7. Зверев В.Г. Модифицированнй полилинейный метод решения разностных эллиптических уравнений / В.Г. Зверев //ЖВМ и МФ. – 1998. –Т.38. – № 9. – С. 1553-1562.
8. Ильин В.П. Методы бисопряженных направлений в пространствах Крылова / В.П. Ильин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. XI. – №4 (36). – С. 47-60.
9. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. Пер. с англ./Дж. Райс. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
10. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука. Глав.ред. физ.-мат. лит., 1979. – 283 с.
11. Хейгеман Л. Прикладные итерационые методы. Пер с англ./ Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1986. – 448 с.

References

1. Abramchuk V, Abramchuk I, Petruk D, Puhach, Ruda O, Shmulian Ya. (2016). Basic systems in problems of mathematical modeling. Physics and mathematics education, Sumy State Pedagogical University named after AS Makarenko, 3 (9), 17-21.
2. Abramchuk V, Abramchuk I, Veshemirskyy A. (2007).Efficient iterative methods for solving systems of linear equations. Bulletin of Lviv University. Series: Applied Mathematics and Informatics, 12, 5-12.
3. Abramchuk V, Abramchuk I. (2014). Problems, methods, algorithms for solving systems of linear equations with matrices resulting from bad. Mathematical and computer modeling. Series: Physics and mathematics, 10, 5-17.
4. Voevodyn V, Kuznetsov Yu. (1984). Matrices and calculations. Moscow, Russia: Nauka.
5. Demmel J. (2001) Computational linear algebra. Moscow, Russia: Mir.
6. Denisov A. (1994). Introduction to the theory of inverse problems: Proc. Allowance. Moscow, Russia: Izd-vo MGU.
7. Zverev V. (1998). Modified multilinear method for solving difference elliptic equations. ZhVM and MF, 38(9), 1553-1562.
8. Ylyn V. (2008). Methods of bi-conjugate directions in Krylov spaces. Siberian Journal of Industrial Mathematics, 11(4), 47-60.
9. Rais J. (1984). Matrix Computation and Mathematical Support (Trans.from English). Moscow, Russia: Mir.
10. Tikhonov A. Methods for solving ill-posed problems / A.Tikhonov, V. Arsenin. – Moscow Russia: Nauka. Home edition of physical and mathematical literature, 1979. – 283 p.
12. Kheiheman L, Yanh D. (1986). Applied iterative methods (Trans.from English). Moscow, Russia: Mir.

OPTIMIZATION METHODS FOR SOLVING SYSTEMS $A\vec{x} = \vec{b}$

Vasil Abramchuk, Ihor Abramchuk, Daria Petruk, Olena Puhach

Vinnitsa State Pedagogical University named after M. Kotsybinsky, Ukraine

Abstract. *The work proved that kind of iterative methods* $\vec{x}^{(k+1)} = B^{(k)}\vec{x}^{(k)} + \beta_k \vec{w}^{(k)}$, $B_k \in M_{n\times n}(R), \vec{w}^{(k)} \in R^n, \beta_k \in R,$ *are not effective in solving systems* $A\vec{x} = \vec{b},\ \vec{b} \in imA$ *with ill predefined matrices* $A \in M_{n\times n}(R), rankA = n,$ *arbitrary structure, large orders, slowing the rate of convergence as the approach vector regulations while minimizing the residual error vector or fall in the set* $K_{\min}$ *- set of minimum residuals; basis vectors of Krylov subspace on which the convergence method, greatly due, calculation errors do not lead to monotony process of convergence.*

The proposed algorithm based dvotsyklichnyy which minimizes the error computation and strictly monotonously the same. The algorithm is based on the basis of the Krylov basis $Kr_m = \left\{\vec{r}, A\vec{r}, ..., A^{m-1}\vec{r}\right\}$, $\vec{r}$ *– discrepancy and complete system of bases* $Ke_i = \left\{\vec{e}_i, A\vec{e}_i, ..., A^{m-1}\vec{e}_i\right\}_{i=1}^{n}, \left\{\vec{e}_i\right\}_{i=1}^{n}$ *– unit basis. The basis* Kr_m *used to build the initial approach, bases* $\left\{Ke_i\right\}_{i=1}^{n}$ *– to refine the guide on the solution vector in the set (computed) point* $\vec{x}^{(0)}$ *that guarantees process stability calculations. Criterion adoption approximate solution of a system resistant to errors.*

Key words: *a bad conditioned matrix, iterative method, method directional search bases Krylov type.*