Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Золота О.А. Методичні особливості навчання геометрій Лобачевського та Рімана // Фізико-математична освіта: науковий журнал. – 2017. – Випуск 2(12). – С. 75-79.

Zolota Olga. Methodological Features Of Teaching Lobachevski And Riemann Geometries // Physical and Mathematical Education : scientific journal. – 2017. – Issue 2(12). – P. 75-79.

УДК 514.13 (07)

О.А. Золота
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Україна
o.zolota@gmail.com

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЙ ЛОБАЧЕВСЬКОГО ТА РІМАНА

Анотація. *У статті розглянуто методичні особливості навчання студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів гіперболічної геометрії Лобачевського та еліптичної геометрії Рімана, які вивчаються у курсі «Проективної геометрії та основ геометрії» з метою глибшого розуміння майбутніми вчителями структури геометричної науки в цілому та незалежності логічної побудови геометрії від геометричної наочності. Наведено основні поняття, відношення та моделі цих геометрій. Проаналізовано деякі ключові факти неевклідових геометрій та подано порівняльну таблицю основних тверджень, що дає змогу встановити спільні та відмінні риси цих геометрій, і , відповідно, геометрії Евкліда. Виділено методи порівняння та аналогії як найбільш ефективні методи навчання геометрій Лобачевського та Рімана. Запропоновано використання інформаційних технологій з метою демонстрації різноманітних моделей неевклідових геометрій та порівняння найпростіших понять, співвідношень та тверджень геометрій Евкліда, Лобачевського та Рімана.*

Ключові слова: *геометрії Лобачевського та Рімана, моделі неевклідових геометрій, евклідова геометрія, порівняльна таблиця.*

Постановка проблеми. Зміст неевклідових геометрій полягає в тому, що в геометрії можна відмовитися від V постулату. Наприклад, замінити його протилежним за змістом. Не звертаючи уваги на очевидну неправильність такого припущення, з нього можна виводити наслідки, доводити теореми, не отримуючи логічної суперечності. При цьому багато теорем цієї геометрії ще у більшій мірі, ніж вихідне припущення, виглядають з наочної точки зору невірними. Однак логічний виклад залишається досконалим.

Ця обставина показує незалежність логічної побудови геометрії від геометричної наочності. Крім того, природно виникає запитання: яка геометрія справедлива у матеріальному світі? Це питання приводить до диференціації геометрії як фізики та геометрії як математики. Доки існувала лише одна евклідова геометрія, то вважали, що в природі виконується саме вона. Якби цю точку не подолали, то була б неможливою поява теорії відносності.

Якщо геометрію розглядати як вчення про протяжність реального світу, то математика може запропонувати для цього різноманітні схеми [1].

Знання лише евклідової геометрії достатньо обмежує погляд на геометрію майбутнього вчителя математики. Володіння основами гіперболічної геометрії Лобачевського та еліптичної геометрії Рімана дасть можливість майбутнім вчителям краще зрозуміти структуру геометричної науки в цілому та дозволить добре орієнтуватися у різноманітному геометричному матеріалі.

Аналіз актуальних досліджень. На початку XIX століття математика змогла дати відповідь на запитання про те, чи можливо побудувати логічно послідовну, без внутрішніх суперечностей, систему геометрії, яка б не використовувала аксіоми про паралелі і допускала б існування **двох** різних граничних прямих, тобто **двох** паралелей до заданої прямої. Гаус перший відкрив існування неевклідової геометрії. Однак перші опубліковані роботи написали російський геометр Лобачевський (1829) та угорський математик Бояї (1832). Вони обоє знайшли ці результати незалежно один від одного.

Суттєво новий напрям дав цим питанням Ріман на початку другої половини XIX століття. Ріман вважає простір лише **необмеженим**, а не нескінченним. Тоді пряма стає замкненою лінією, на якій точки розташовані так, як на колі. У геометрії Рімана взагалі не існує паралельних прямих до заданої прямої [1].

У роботі Н.В. Шаповалової, Л.Л. Панченко [5] проаналізовано особливості навчання гіперболічної геометрії в процесі вивчення дисципліни «Основи геометрії». У статті запропоновано використання порівняльного аналізу фактів геометрії Лобачевського та Евкліда як одного з методів навчання. Також у роботах Н.В. Шаповалової та Л.Л. Панченко розглядаються основні методичні аспекти навчання еліптичної, сферичної геометрій студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів.

Дослідженням неевклідових геометрій займалися Ф. Клейн, Д. Гільберт, Е. Бельтрамі, А. Д. Александров, Н. В. Єфімов, В. Н. Боровик, В. П. Яковець та інші.

У даній статті розглянуто методичні особливості навчання неевклідових геометрій Лобачевського та Рімана та подано порівняльну таблицю деяких фактів цих геометрій.

Метою статті є розкриття етапів та методичних особливостей навчання геометрій Лобачевського та Рімана під час вивчення студентами курсу «Проективна геометрія та основи геометрії». У статті подається порівняльна таблиця, у якій наводиться лише невелика частина фактів неевклідових геометрій, однак уже завдяки їм можна сформувати у студентів початкові уявлення про спільні та відмінні риси геометрій Лобачевського та Рімана, і, відповідно, геометрії Евкліда.

Виклад основного матеріалу. Знайомство студентів педагогічних вузів із геометріями Лобачевського та Рімана відбувається під час вивчення курсу «Проективна геометрія та основи геометрії». Деякі факти цих геометрій видаються студентам надзвичайно дивними та суперечать їхньому наочному уявленню. Однак неевклідові геометрії теж можуть знайти практичне застосування.

Вивчення деяких фактів геометрії Лобачевського розпочинається з вивчення системи аксіом, яка відрізняється від системи аксіом Евкліда лише аксіомою про паралелі. Оскільки як в геометрії Евкліда, так і в геометрії Лобачевського основні поняття та відношення є однаковими, то однаковими будуть і теореми, які є наслідками спільних аксіом. Ці геометрії відрізнятимуться тими теоремами, які доводяться на основі аксіом паралельності.

За своїм змістом аксіома Лобачевського є запереченням аксіоми паралельності Евкліда.

Аксіома Лобачевського. Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести більше, ніж одну пряму, яка не перетинає заданої.

Площину, на якій виконується аксіома Лобачевського, називають *площиною Лобачевського.*

Безпосередньо з аксіоми Лобачевського випливає, що через точку, яка не лежить на прямій, проходить безліч прямих, які не перетинають заданої прямої.

Для глибшого розуміння студентам варто навести хоча б одну з моделей, на якій виконується цей постулат Лобачевського. Для прикладу, модель Клейна.

Нехай задано круг, точки на межі якого виколені. Нехай задано пряму 1, через точку C проведемо пряму 2 (рис. 1). Прямі 1 і 2 – перетинаються. Прямі 1 і 3 – не перетинаються. Вони називаються *розбіжними*. Прямі *n* і *m* – граничні. Вони у геометрії Лобачевського називаються прямими, *паралельними* до прямої 1. Отже, в одній парі вертикальних кутів (які містять пряму 3), утворених прямими *n* і *m*, є безліч прямих, що не перетинають пряму 1 [6].

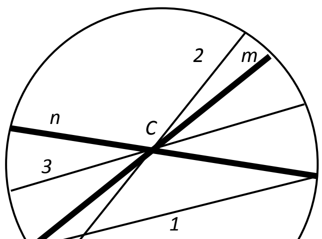

Рис. 1.

Також в евклідовому просторі є така поверхня як псевдосфера, внутрішня геометрія якої співпадає з геометрією на площині Лобачевського.

Перед втановленням спільних та відмінних рис гіперболічної та еліптичної геометрій розглянемо основні поняття і відношення у геометрії Рімана.

Розглянемо довільну сферу *s* евклідового простору. Кожну пару діаметрально протилежних точок цієї сфери будемо називати «точкою». Тоді неевклідовою площиною Рімана називатимемо множину пар діаметрально протилежних точок. Кожне велике коло сфери *s* будемо називати «прямою». Очевидно, що у геометрії Рімана будь-які дві прямі площини *перетинаються*.

Для того, щоб охарактеризувати взаємне розміщення точок на еліптичній прямій, яка є замкненою, вводиться поняття «розділеності двох пар точок». Нехай задано чотири різні точки *A*, *B*, *C* і *D* (рис. 2). Точки *A* і *B* розділяють пряму на 2 різні частини. Кажуть, що пара точок *A*, *B* розділяє пару точок *C*, *D*, якщо точки *C* і *D* належать різним частинам і пара *A*, *B* не розділяє *C*, *D*, якщо *C* і *D* належать одній частині [2].

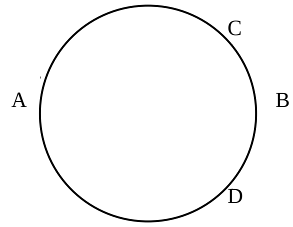

Рис. 2.

Далі студентам наводиться аксіоматика еліптичної геометрії на площині. Система аксіом геометрії Рімана складається з чотирьох груп: 1) аксіоми належності; 2) аксіоми порядку; 3) аксіоми конгруентності; 4) аксіома неперервності Дедекінда.

Деякі факти неевклідових геометрій подано у порівняльній таблиці 1 [2-4]. Крім того, інформаційні технології дають можливість наочної демонстрації певних тверджень. Очевидно, що наведені факти не дають змоги описати усю «красу» та повноту геометрій Лобачевського та Рімана.

Таблиця 1

№ з/п	Критерії порівняння	Геометрія Лобачевського	Геометрія Рімана
1.	Модель планіметрії	**Псевдосфера**	**Сфера**
2.	Кривина	Стала **від'ємна** кривина	Стала **додатна** кривина
3.	Розміщення прямих на площині	**Три випадки:** 1) прямі перетинаються; 2) прямі паралельні; 3) прямі розбіжні.	**Один випадок:** 1) прямі перетинаються.
4.	Довжина прямої	**Нескінченна**	**Скінченна** – $l = \pi r$.
5.	Означення паралельних прямих	Пряма $C'C$, що проходить через т. A , називається ***паралельною*** прямій $B'B$ у напрямку $B'B$, якщо по-перше, пряма $C'C$ не перетинає пряму $B'B$, по-друге, $C'C$ є межовою у пучку прямих з центром в точці A , тобто кожен промінь AE , що проходить у середині кута CAD , де D – будь-яка точка прямої $B'B$, перетинає промінь DB .	***Немає паралельних*** прямих
6.	Сума внутрішніх кутів трикутника	**Змінна** і завжди **менша** 180° .	**Змінна** і завжди **більша** 180° .
7.	Зовнішній кут трикутника	Зовнішній кут трикутника **більший** суми внутрішніх, не суміжних з ним.	Зовнішній кут трикутника **або менший, або дорівнює, або більший** внутрішнього кута, не суміжного з ним.
8.	Ознаки рівності трикутників	Має місце **четверта** ознака рівності трикутників: якщо кути одного трикутника відповідно дорівнюють кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.	Має місце **четверта** ознака рівності трикутників: якщо кути одного трикутника відповідно дорівнюють кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні
9.	Коло, описане навколо трикутника, та коло, вписане у трикутник	**Існують трикутники,** навколо яких **не можна описати** коло, і трикутники, у які **не можна вписати** коло.	Навколо **довільного** трикутника **можна описати** коло, та у довільний трикутник **можна вписати** коло

№ з/п	Критерії порівняння	Геометрія Лобачевського	Геометрія Рімана
10.	Подібні трикутники	У геометрії Лобачевського **не існує подібних трикутників.**	У геометрії Рімана **не існує подібних трикутників**
11.	Сума кутів чотирикутника	Сума кутів опуклого **чотирикутника менша** 360°	Сума кутів опуклого чотирикутника **більша** 360°
12.	Формули для знаходження **площі трикутника**	Площа трикутника визначається через міри його кутів: $S=4c_h^2\left(\pi-\alpha-\beta-\gamma\right)$, де α,β,γ – внутрішні кути трикутника, $2c_e=-2ic_h$, $2c_e$ – радіус евклідової сфери.	Площа трикутника визначається через міри його кутів: $S=4c_e^2\left(\alpha+\beta+\gamma-\pi\right)$, де α,β,γ – внутрішні кути трикутника, $2c_e$ – радіус евклідової сфери
13.	Теорема **косинусів**	$\mathrm{ch}\frac{A}{2c_h}=\mathrm{ch}\frac{B}{2c_h}\mathrm{ch}\frac{C}{2c_h}+$ $+\mathrm{sh}\frac{B}{2c_h}\mathrm{sh}\frac{C}{2c_h}\cos\alpha,$ де *A*, *B*, *C* – сторони трикутника, $2c_e=-2ic_h$, $2c_e$ – радіус евклідової сфери; $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$; α – внутрішній кут трикутника.	$\cos\frac{A}{2c_e}=\cos\frac{B}{2c_e}\cos\frac{C}{2c_e}+$ $+\sin\frac{B}{2c_e}\sin\frac{C}{2c_e}\cos\alpha,$ де *A*, *B*, *C* – сторони трикутника, $2c_e$ – радіус евклідової сфери; α – внутрішній кут трикутника.
14.	Теорема **Піфагора** $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}\right)$	$\mathrm{ch}\frac{A}{2c_h}=\mathrm{ch}\frac{B}{2c_h}\mathrm{ch}\frac{C}{2c_h}$.	$\cos\frac{A}{2c_e}=\cos\frac{B}{2c_e}\cos\frac{C}{2c_e}$
15.	Теорема **синусів**	$sh\frac{A}{2c_h}:sh\frac{B}{2c_h}=\sin\alpha:\sin\beta$.	$\sin\frac{A}{2c_e}:\sin\frac{B}{2c_e}=\sin\alpha:\sin\beta$

Висновки. При навчанні студентів основних фактів неевклідових геометрій Лобачевського та Рімана для уникнення відчуття «незвичності», перш за все, необхідно навести студентам конкретні приклади моделей, на яких виконуються ці геометрії. Серед методичних особливостей слід виділити застосування методів порівняння і аналогії, використання інформаційних технологій навчання, наведення міжпредметних зв'язків неевклідових геометрій з фізикою та астрономією.

Список використаних джерел

1. Гильберт Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 491 с.
2. Ефимов Н. В. Высшая геометрия / Н. В. Ефимов. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
3. Клейн Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 355 с.
4. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрий / Б. В. Кутузов. – М.: УЧПЕДГИЗ , 1950. – 127 с.
5. Шаповалова Н. В. Особливості навчання гіперболічної геометрії для підвищення навчання компетентності майбутніх вчителів математики і фізики / Н. В. Шаповалова, Л. Л. Панченко // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми : Вид-во СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2015. – № 3 (6). – С. 109-118.
6. Щербаков Р. Н. От проективной геометрии – к неевклидовой / Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин. – М.: Просвещение, 1979. – 158 с.

References

1. Hilbert D. Bases of geometry / D. Hilbert. – M.-L.: OGIZ, 1948. – 491 s. (in Russian)
2. Efymov N. Higher Geometry / N. Efymov. – M.: Nauka, 1971. – 576 s. (in Russian)
3. Klein F. Non-Euclidean Geometry / F. Klein. – M.-L.: ONTY, 1936. – 355 s. (in Russian)

4. Kutuzov B. V. Geometry of Lobachevski and elements of bases of geometry / B. V. Kutuzov. – M.: UCHPEDHYZ, 1950. – 127 s. (in Russian)
5. Shapovalova N. V**.** The peculiarities of teaching hyperbolic geometry in building up professional competence of future mathematics and physics teachers / N. V. Shapovalova, L. L. Panchenko // Fizyko-matematychna osvita. Naukovyi zhurnal. – Sumy : Vyd-vo SumDPU im. A. S. Makarenka, 2015. – # 3 (6). – S. 109-118. (in Ukrainian)
6. Shcherbakov R. N. From projective geometry – to non-Euclidean / Shcherbakov R. N., Pychuryn L. F. – M.: Education, 1979. – 158 p. (in Russian)

METHODOLOGICAL FEATURES OF TEACHING LOBACHEVSKI AND RIEMANN GEOMETRIES

Olga Zolota

Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Ukraine

Abstract. *The article considers methodical features of training of students of mathematical specialties pedagogical universities of the hyperbolic geometry of Lobachevsky and elliptic geometry of Riemann, which are studied in the course "Projective geometry and foundations of geometry" with the goal of better understanding prospective teachers ' geometric structure of science in General and the independence of the logical construction of geometry from the geometric clarity. Given the basic concepts, relationships and models of these geometries. Analyzed some key facts of non-Euclidean geometries and presents a comparative table of basic claims, which allows to establish common and distinctive features of these geometries, and, therefore, Euclid's geometry. Selected methods of comparison and analogy as the most effective teaching methods geometries of Lobachevsky and Riemann. Proposed use of information technologies to demonstrate various models of non-Euclidean geometries and comparisons the simplest of concepts, relations and assertions of the geometries of Euclid, Lobachevsky and Riemann.*

Keywords: *geometries of Lobachevski and Riemann, models of non-Euclidean geometries, Euclidean geometry, comparison table.*