

УДК 519.2

Ф.М. Лиман, д.ф.-м.н.,
Т.Д. Лукашова, к.ф.-м.н.,
М.Г. Друшляк

Скінченні 2-групи з нециклічним центром та недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп

Вивчаються скінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп та нециклічним центром. Встановлюється зв'язок між нормами нециклічних та абелевих нециклічних підгруп.

Ключові слова: нормалізатор, норма абелевих нециклічних підгруп, норма нециклічних підгруп.

E-mail: marydru@mail.ru

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, проф. Кириченко В.В.

Одним з основних напрямків у теорії груп є вивчення впливу наперед заданих систем підгруп на структуру групи. В одних випадках група може мати систему підгруп з певними властивостями, але вплив цієї системи підгруп є не суттєвим. В інших випадках наявність єдиної (як правило, характеристичної) підгрупи з певною властивістю може бути визначальним фактором для будови усієї групи. Список таких підгруп можна суттєво розширити, розглядаючи різноманітні Σ -норми групи. Нагадаємо, що Σ -нормою називається перетин нормалізаторів усіх підгруп системи Σ (за умови, що система Σ непорожня). Зрозуміло, що коли Σ -норма збігається з групою, то в останній нормальні всі підгрупи системи Σ .

Уперше ситуацію, коли Σ -норма є власною підгрупою групи, почав вивчати Р.Бер [1] у 1935 році для системи Σ всіх підгруп даної групи. Відповідну Σ -норму він назвав *нормою* групи G та позначив $N(G)$. Згідно з [1] нормою $N(G)$ групи G називатимемо перетин нормалізаторів усіх підгруп групи G .

F.M. Lyman, Ph.D.,
T.D. Lukashova, Ph.D.,
M.G. Drushlyak

Finite 2-groups with non-cyclic centre and non-Dedekind norm of Abelian non-cyclic subgroups

Finite 2-groups with non-Dedekind norm of Abelian non-cyclic subgroups and non-cyclic centre are studied. Connections between norms of non-cyclic and Abelian non-cyclic subgroups are investigated.

Key Words: normalizer, norm of Abelian non-cyclic subgroups, norm of non-cyclic subgroups.

Звужуючи систему підгруп Σ , можна отримувати ті чи інші Σ -норми, що є узагальненнями норми $N(G)$. Зрозуміло, що всі Σ -норми містять центр групи і є її характеристичними підгрупами. Якщо у якості системи Σ виступає система всіх абелевих нециклічних підгруп, то у відповідності з [2] таку Σ -норму називатимемо нормою абелевих нециклічних підгруп і позначатимемо N_G^A . Якщо група G збігається з нормою N_G^A , то в G нормальними будуть всі абелеві нециклічні підгрупи. Неабелеві групи з такою властивістю вивчалися в [3] і були названі \overline{NA} -групами (або \overline{NA}_2 -групами у випадку 2-груп). Будову скінченних \overline{NA}_2 -груп описує наступне твердження.

Твердження 1. ([3]). *Скінченні негамільтонові \overline{NA}_2 -групи вичерпуються групами наступних типів:*

- 1) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $|a| = 2^n$, $n \geq 1$, $|b| = |c| = 2$, $[a, b] = [a, c] = 1$, $[b, c] = a^{2^{n-1}}$;
- 2) $G = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $n \geq 2$,

$m \geq 1, [a, b] = a^{2^{n-1}};$

3) $G = (H \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$,
 $|h_1| = |h_2| = 4, h_1^2 = h_2^2, |b| = |c| = 2,$
 $[h_1, h_2] = h_1^2, [H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = E, [b, c] = h_1^2;$

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $|a| = |b| = |c| = 4,$
 $c^2 = a^2 b^2, [c, b] = c^2, [c, a] = a^2;$

5) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle c \rangle \langle d \rangle$, де $|a| = |b| = |c| =$
 $|d| = 4, c^2 = d^2 = a^2 b^2, [a, c] = [d, c] = a^2,$
 $[b, d] = b^2, [c, b] = [d, a] = c^2;$

6) $G = H \times \langle c \rangle$, де H - група кватерніонів,
 $|c| = 2^n, n \geq 2;$

7) $G = H \times Q$, де H і Q - групи кватерніонів;

8) $G = (H \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$,
 $|h_1| = |h_2| = |b| = |c| = 4, [h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2,$
 $[H, \langle b \rangle] = [H, \langle c \rangle] = E, c^2 = b^2 h_1^2, [b, c] = b^2;$

9) $G = (\langle h_2 \rangle \times \langle c \rangle) \langle h_1 \rangle$, де $|h_1| = |h_2| = 4,$
 $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2, |c| = 2^n > 2, [c, h_1] = c^{2^{n-1}};$

10) $G = (H \times \langle b \rangle) \langle c \rangle$, де $H = \langle h_1, h_2 \rangle$,
 $|h_1| = |h_2| = 4, |b| = 2, |c| = 8, [b, c] = [h_1, h_2] =$
 $h_1^2 = h_2^2, c^2 = h_1, [h_2, c] = b;$

11) $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, де $|a| = 8, |b| = 2^n > 2,$
 $a^4 = b^{2^{n-1}}, a^{-1} b a = b^{-1}.$

У статті досліджуються скінченні 2-групи з нециклічним центром, що мають недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп.

Безпосередньо з твердження 1 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 1. *Нехай G - скінченна 2-група, що має нециклічний центр та недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп. Тоді N_G^A є групою одного з типів 4)-9) або 2) при $t > 1$ твердження 1.*

Лема 1. ([4]) *Якщо Z - центральна нециклічна підгрупа групи G , то у фактор-групі $G/Z = \overline{G}$ має місце включення $\overline{N_G^A} \subseteq N(\overline{G})$, де $N(\overline{G})$ - норма групи \overline{G} .*

Наступний приклад підтверджує, що рівність $\overline{N_G^A} = N(\overline{G})$ виконується не завжди.

Приклад 1. $G = (\langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle) \times \langle c \rangle$, $|a| = 8, |b| = 2,$
 $|c| = 4, b^{-1} a b = a^{-1}$. Зрозуміло, що $N_G^A \subseteq$
 $N_G(\langle b, c \rangle) \cap N_G(\langle ab, c^2 \rangle) = \langle a^4, b, c \rangle \cap \langle a^4, ab, c \rangle =$
 $\langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle = Z(G)$. Тому $N_G^A = \langle a^4 \rangle \times \langle c \rangle = Z(G)$.

У фактор-групі $\overline{G} = G/\langle a^4, c^2 \rangle$ норма $N(\overline{G}) = Z(\overline{G}) = \langle \overline{a^2} \rangle \times \langle \overline{c} \rangle$. Образом норми N_G^A абелевих нециклічних підгруп є $\overline{N_G^A} = \langle \overline{c} \rangle$. Отже, $\overline{N_G^A} \neq N(\overline{G})$.

Позначимо $\omega_m(G)$ підгрупу, породжену елементами порядку не більше 2^m . Зокрема, $\omega_1(G) = \omega(G)$ - нижній шар групи G .

Лема 2. ([4]) *Якщо локально скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нижній шар $\omega(N_G^A)$ є центральною нециклічною підгрупою групи G , то $\omega(G) = \omega(N_G^A)$.*

Нециклічною нормою N_G групи G будемо називати перетин нормалізаторів усіх нециклічних підгруп даної групи. Зрозуміло, що в загальному випадку має місце включення $N_G \subseteq N_G^A$. Більш точні зв'язки між цими нормами в класі скінченних 2-груп встановлюються нижче.

Теорема 1. *Якщо скінченна 2-група G має недедекіндову норму N_G^A абелевих нециклічних підгруп та нециклічний центр і не містить групи кватерніонів, то $N_G^A = N_G$.*

Доведення. Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 2 $\omega(G) = \omega(N_G^A)$. Враховуючи, що група G не містить групи кватерніонів і має нециклічний центр, кожна нециклічна підгрупа, містить нижній шар $\omega(G)$. Тому для кожного елемента x довільної нециклічної підгрупи підгрупа $\langle x, \omega(G) \rangle$ - абелева нециклічна. Отже, кожна нециклічна підгрупа покривається абелевими нециклічними підгрупами і тому $N_G^A = N_G$. Теорему доведено. \square

Відсутність групи кватерніонів в групі G є суттєвою вимогою в теоремі 1, що підтверджує наступний приклад.

Приклад 2. $G = Q \rtimes H$, $Q = \langle q_1, q_2 \rangle, |q_1| = 2^n,$
 $n > 2, |q_2| = 4, q_1^{2^{n-1}} = q_2^2, q_2^{-1} q_1 q_2 = q_1^{-1},$
 $H = \langle h_1, h_2 \rangle, |h_1| = |h_2| = 4, [h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2,$
 $[q_2, h_2] = 1, [q_2, h_1] = q_2^2, [H, \langle q_1 \rangle] = E.$

У цій групі $N_G^A = \langle q_1^{2^{n-2}} \rangle \times H \neq N_G =$
 $\langle h_2 \rangle \rtimes \langle h_1 q_1^{2^{n-2}} \rangle.$

Отже, якщо в локально скінченній p -групі G ($p \neq 2$) з неабелевою нормою N_G^A завжди виконується рівність $N_G^A = N_G$ [4], то в 2-групах ця рівність може не виконуватись як у випадку $G = N_G^A$ (твердження 1, група типу 7), так і у випадку $G \neq N_G^A$ (приклад 2).

Лема 3. *Будь-яка скінченна 2-група G експоненти 4 з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром є $\overline{HA_2}$ -групою.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умови леми. Тоді $\omega(N_G^A) = \omega(G)$ - центральна елементарна абелева група порядку 4.

Фактор-група $\overline{G} = G/\omega(G)$ є групою експоненти 2. Отже, \overline{G} - абелева і $G' \subseteq \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи містить $\omega(G)$, то кожна така підгрупа нормальна в G і $G \in \overline{HA_2}$ -групою. Лему доведено. \square

Наслідок 2. *Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо група G містить елементи порядку 4, що не належать нормі N_G^A , то $\exp G > 4$.*

Лема 4. *Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$, то підгрупа $G_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA_2}$ -групою.*

Доведення. Нехай $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G) \subseteq Z(G)$. Тому $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ і $G'_1 \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G_1 містить $\omega(G)$, то вона нормальна в G_1 . Отже, $G_1 \in \overline{HA_2}$ -групою і лему доведено. \square

Існування групи, про яку йдеться в лемі 4, підтверджує приклад 2.

Наслідок 3. *Нехай G - скінченна 2-група з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром. Якщо норма N_G^A є групою одного з типів 2)*

при $n \geq m > 2$, $m > n > 2$, 5), 7), 8) або 6) і 9) при $n > 2$ твердження 1, то $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$ і $\omega_2(N_G^A)$ є підгрупою експоненти 4.

Доведення. Нехай умови наслідку виконуються та існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. Тоді за лемою 4 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA_2}$ -групою. Враховуючи будову норми N_G^A і опис $\overline{HA_2}$ -груп, приходимо до протиріччя. Отже, $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$. \square

Лема 5. *Якщо в скінченній 2-групі G з недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп і нециклічним центром $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то група G не містить узагальненої групи кватерніонів порядку більше 8. Якщо при цьому група G містить групу кватерніонів, то $H \subset N_G^A$. Більше того, якщо кожна група кватерніонів нормальна в нормі N_G^A , то $N_G^A = N_G$.*

Наслідок 4. *Нехай G - скінченна 2-група з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A , яка не містить групи кватерніонів. Якщо $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то група G також не містить групи кватерніонів і $N_G^A = N_G$.*

Для скорочення викладу скінченні 2-групи з нециклічним центром і недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп будемо називати групами типу α , якщо N_G^A - неметациклічна підгрупа, і групами типу β , якщо N_G^A - метациклічна підгрупа.

Теорема 2. *Група G є групою типу α тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з наступних типів:*

1) G - неметациклічна недедекіндова $\overline{HA_2}$ -група з нециклічним центром, $G = N_G^A$;

2) $G = H \cdot Q$, де H - група кватерніонів порядку 8, Q - узагальнена група кватерніонів, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $[h_1, h_2] = h_1^2 = h_2^2$, $Q = \langle y, x \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $|x| = 4$, $y^{2^{n-1}} = x^2$, $x^{-1}yx = y^{-1}$, $H \cap Q = E$, $[Q, H] \subseteq \langle x^2, h_1^2 \rangle$, $N_G^A = H \times \langle y^{2^{n-2}} \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Доведемо необхідність умов теореми.

Оскільки центр $Z(G)$ нециклічний, то $\omega(N_G^A) \subseteq Z(G)$ і за лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Виходячи з умови теореми та наслідку 1, робимо висновок, що норма N_G^A є групою одного з типів 4)-9) твердження 1.

Продовжимо доведення теореми залежно від будови норми N_G^A .

Лема 6. *Нехай G - група типу α , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою одного з типів 4), 5), 7), 8) та 9) при $n = 2$ твердження 1. Тоді $G = N_G^A$.*

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$ і покажемо, що G - група експоненти 4. Нехай існує елемент $x \in G$, $|x| = 8$.

Якщо при цьому норма N_G^A є групою одного з типів 5), 7) або 8) твердження 1, то за наслідком 3 $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$ і $x^2 \in N_G^A$.

Нехай норма N_G^A є групою одного з типів 4) або 9) при $n = 2$ твердження 1. Припустимо, що $x^2 \notin N_G^A$. З умов $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ та $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ випливає, що $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$ і $x^2 \in Z(G_1)$. Але у такому випадку $\omega(G_1) \neq \omega(N_G^A)$, що неможливо за лемою 2. Отже, $x^2 \in N_G^A$, $[\langle x \rangle, \omega(G)] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \langle x^2 \rangle \omega(G)$.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G_1} = G_1 / \omega(G)$. За доведеним $\overline{G_1}' \subseteq \langle \overline{x^2} \rangle$. Якщо $\overline{G_1}' \neq \overline{E}$, то, враховуючи умови $\overline{x} \notin Z(\overline{G_1})$ і $\langle \overline{x} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$, одержимо $[\overline{G_1} : C_{\overline{G_1}}(\langle \overline{x} \rangle)] = 2$. Отже, $\overline{N_G^A}$ містить елемент \overline{y} порядку 2, непереставний з \overline{x} . Тоді $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ - група діедра порядку 8 і $|\overline{xy}| = 2$. Оскільки $\omega(G)$ - центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 1 $\overline{N_G^A} \leq N(\overline{G})$, звідки $\langle \overline{xy} \rangle \triangleleft \overline{G_1}$. Отже, $\overline{G_1}$ - абелева, що неможливо.

Тому $\overline{G_1}' = E$, $G_1' \subseteq \omega(N_G^A)$ і $G_1 \in \overline{HA}_2$ -групою, що містить центральну циклічну підгрупу порядку 4, що неможливо, враховуючи будову норми N_G^A . Таким чином, G є групою експоненти 4. За лемою 3 $G \in \overline{HA}_2$ -групою і лему доведено. \square

Лема 7. *Нехай G - група типу α , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є прямим або напівпрямим добутком нормальної циклічної групи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Тоді $G = N_G^A$.*

Доведення. Нехай норма N_G^A задовольняє умови леми, тобто є групою типу 6) або 9) при $n > 2$. Припустимо, що $G \neq N_G^A$. Оскільки центр групи G нециклічний, то за лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Окрім того, за наслідком 3 $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$.

Якщо норма N_G^A є групою типу 6) при $n > 2$, то за лемою 5 $N_G^A = N_G$. За теоремою 2 [5] G - \overline{HA}_2 -група, що є напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи порядку більше 4 і групи кватерніонів. Отже, $G = N_G^A$ що неможливо.

Нехай норма N_G^A є групою типу 9) при $n > 2$. Тоді за лемою 5 N_G^A містить усі групи кватерніонів. Враховуючи також, що N_G^A нормалізує кожну абелеву нециклічну підгрупу, робимо висновок, що нециклічна норма N_G групи G збігається з нециклічною нормою підгрупи N_G^A , тобто $N_G = N_{N_G^A} = \langle c^2 \rangle \times H$, $|c^2| \geq 4$. За теоремою 2 [5], як і в попередньому випадку, $G \in \overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$, що неможливо. Лему доведено. \square

Лема 8. *Нехай G - група типу α , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою виду $N_G^A = H \times \langle c \rangle$, де H - група кватерніонів, $|c| = 4$. Тоді або $G = N_G^A$, або G є групою типу 2) теореми 2.*

Доведення. За лемою 2 $\omega(N_G^A) = \omega(G)$. Якщо $N_G^A = \omega_2(G)$, то за лемою 5 $N_G^A = N_G$. За результатами роботи [5] $G \in \overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$.

Отже, надалі будемо вважати, що $N_G^A \neq \omega_2(G)$ і існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 4 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A \in \overline{HA}_2$ -групою експоненти 4. Якщо при цьому $[x, c] = 1$, то G_1 містить центральну циклічну підгрупу $\langle c \rangle$ порядку 4, що неможливо за твердженням 1, враховуючи, що $|\omega_2(G_1)| = 64$. Отже, $c \notin Z(G)$.

Якщо при цьому $\langle c \rangle \triangleleft G$, то, враховуючи нецентральність підгрупи $\langle c \rangle$, одержимо $[G : C] = 2$, де $C = C_G(\langle c \rangle)$.

Покажемо, що за цих умов усі елементи, порядок яких більший за 4, переставні з елементом c . Нехай $y \in G \setminus N_G^A$, $|y| = 2^s$, $s > 2$. Якщо $\langle y \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ і $[\langle y^2 \rangle, N_G^A] = E$. Але у такому випадку $\omega(G) \neq \omega(N_G^A)$, що суперечить лемі 2. Тому $\langle y \rangle \cap N_G^A = \langle y^{2^{s-2}} \rangle$.

Покладемо $y_1 = y^{2^{s-3}}$, $y_1^2 = c^m h^k$, де $h \in H$ і розглянемо групу $G_2 = \langle y_1 \rangle N_G^A$. Оскільки $[\langle y_1 \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y_1 \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \langle y_1^2 \rangle \omega(G)$, то $\langle y_1^2 \rangle \triangleleft G_2$. З цього випливає, що або $m \equiv 0 \pmod{2}$ і $(k, 2) = 1$, або $k \equiv 0 \pmod{2}$ і $(m, 2) = 1$.

У першому випадку $y_1^2 = c^{2m_1} h^k$, $(k, 2) = 1$. За доведеним вище $[\langle \bar{y}_1 \rangle, N_G^A] \subseteq \langle \bar{y}_1 \rangle \cap N_G^A = \langle \bar{y}_1^2 \rangle = \langle \bar{h} \rangle$. Нехай h_1 - елемент підгрупи H , непереставний з h . Тоді $[\langle \bar{h}_1 \rangle, \langle \bar{y}_1 \rangle] = \langle \bar{y}_1^{2l} \rangle = \langle \bar{h}^{kl} \rangle$. Якщо при цьому $(l, 2) = 1$, то $\langle \bar{y}_1, \bar{h}_1 \rangle$ - група дієдра і $|\bar{y}_1 \bar{h}_1| = 2$. За лемою 1 $\langle \bar{y}_1 \bar{h}_1 \rangle \triangleleft \overline{G_2}$, тому $\overline{G_2} = N_G^A \times \langle \bar{y}_1 \bar{h}_1 \rangle$. Отже, $[\bar{y}_1 \bar{h}_1, \bar{h}_1] = [\bar{y}_1, \bar{h}_1] = 1$, що неможливо. Таким чином, $(l, 2) \neq 1$ і $[\bar{h}_1, \bar{y}_1] = 1$. Але тоді $[h_1, y_1] \in \omega(N_G^A)$, $[h_1, y_1^2] = [h_1, h] = 1$, всупереч вибору h_1 .

Таким чином, $y_1^2 = c^m h^{2k_1}$, де $(m, 2) = 1$, і тому $[y, c] = 1$. Отже, елементи порядку яких більший 4, належать до централізатора C .

Нехай тепер $x \notin C$. Тоді $|x| = 4$. Враховуючи умову $[G : C] = 2$, одержимо $G = C \langle x \rangle$, де $x^2 \in \omega(G)$, $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$. За доведеним вище норма N_G^A містить усі елементи четвертого порядку централізатора C , тобто $N_G^A = \omega_2(C)$. Якщо при цьому $\exp C = 4$, то $N_G^A = C$ і $G = N_G^A \cdot \langle x \rangle$. За лемою 4 G - \overline{HA}_2 -група відмінна від N_G^A , що неможливо. Отже, $\exp C > 4$.

Оскільки норма N_C^A підгрупи C містить N_G^A і $c \in Z(C)$, то норма N_C^A є групою одного з типів:

- 1) $N_C^A = \langle y \rangle \times H$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$;
- 2) $N_C^A = \langle y \rangle \rtimes H$, $[\langle y \rangle, H] = \langle y^{2^{n-1}} \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$.

За лемою 7 $N_C^A = C$. Розглянемо кожен з випадків окремо.

1. Нехай $C = N_C^A = \langle y \rangle \times H$, тоді $G = (\langle y \rangle \times H) \langle x \rangle$, $x^2 \in C$. Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\omega(G) \cong (\langle \bar{y} \rangle \times \overline{H}) \langle \bar{x} \rangle$. Оскільки $\langle \bar{y} \rangle = Z(C)$, то підгрупа $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$ містить циклічну підгрупу індекса 2 і можливі наступні співвідношення між \bar{x} та \bar{y} .

Якщо $[\bar{y}, \bar{x}] = 1$, то $G' \subseteq \omega(G)$ і $G \in \overline{HA}_2$ -групою, всупереч умові $G \neq N_G^A$.

Якщо $\bar{x}^{-1} \bar{y} \bar{x} = \bar{y}^{-1} \bar{y}^{2^{n-2}}$, $n \geq 4$, то переходячи до прообразів, будемо мати $x^{-1} y x = y^{-1} c z$, де $z \in \omega(G)$. Далі $x^{-2} y x^2 = x^{-1} y^{-1} c z x = y c^{-2}$, що суперечить умові $x^2 \in Z(G)$.

Якщо $\bar{x}^{-1} \bar{y} \bar{x} = \bar{y} y^{2^{n-2}}$, де $n \geq 4$, то $|y| \geq 16$, $x^{-1} y x = y c z$, де $z \in \omega(G)$, і $x^{-1} y^2 x = y^2 c^2$. Оскільки $c \in \langle y \rangle$, то $y^2 = c$ і $|y| = 8$. Протиріччя.

Таким чином, $\bar{x}^{-1} \bar{y} \bar{x} = \bar{y}^{-1}$. Тоді $G = \langle y \rangle G_1$, де $G_1 = N_G^A \langle x \rangle \in \overline{HA}_2$ -групою, яка є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Незавжди довести, що існує елемент $x_1 \in G_1$, що $x_1^2 = c^2$ і $\langle y, x_1 \rangle$ - узагальнена група кватерніонів.

Отже, $G = H \cdot Q$ - група типу 2) теореми 2, де одна з груп H чи Q є узагальненою групою кватерніонів порядку більше 8, а інша - групою кватерніонів, $[H, Q] \subseteq \omega(G)$.

2. Нехай тепер $C = N_C^A = \langle y \rangle \rtimes H$, $[\langle y \rangle, H] = \langle y^{2^{n-1}} \rangle$, $|y| = 2^n$, $n \geq 3$, $y^{2^{n-2}} = c$.

Розглянемо фактор-групу $\overline{G} = G/\omega(G) \cong (\langle \bar{y} \rangle \rtimes \overline{H}) \langle \bar{x} \rangle$, де $[\overline{H}, \langle \bar{x} \rangle] = E$, $[\langle \bar{y} \rangle, \langle \bar{x} \rangle] \subseteq \langle \bar{y}, \overline{H} \rangle$. Покладемо $\bar{x}^{-1} \bar{y} \bar{x} = \bar{y}^\alpha \bar{h}^\beta$, де $\bar{h} \in \overline{H}$. Тоді з умови $[\bar{x}^2, \bar{y}] = 1$ випливає, що $\bar{x}^{-2} \bar{y} \bar{x}^2 = (\bar{y}^\alpha \bar{h}^\beta)^\alpha \bar{h}^\beta = \bar{y}^{\alpha^2} \bar{h}^{\beta(\alpha+1)} = \bar{y}$. Якщо $\beta \equiv 1 \pmod{2}$, то $\alpha^2 \equiv 1 \pmod{2^{n-1}}$ і $\alpha = \pm 1 + 2^{n-1}t$ або $\alpha = \pm 1 + 2^{n-2}t$. Незавжди перевірити, що кожному з випадків $[h_1, (xy)^2] \neq 1$ для елемента $h_1 \in H$, який непереставний з h . З іншого боку, $[h_1, x] \in \omega(G)$, $[h_1, y] \in \omega(G)$. Отже, $[h_1, xy] \in \omega(G)$ і $[h_1, (xy)^2] = 1$. Отримали протиріччя.

Отже, $\beta \equiv 0 \pmod{2}$ і $\langle \bar{y} \rangle \triangleleft \overline{G}$. Міркуючи аналогічно попередньому випадку отримуємо, що $\bar{x}^{-1} \bar{y} \bar{x} = \bar{y}^{-1}$. Тоді $G = \langle y \rangle G_1$, де $G_1 = N_G^A \langle x \rangle \in \overline{HA}_2$ -групою, яка є прямим чи напівпрямим добутком двох груп кватерніонів. Отже, $G = H \cdot Q$ - група типу 2) теореми 2.

Припустимо, що $\langle c \rangle \not\triangleleft G$. Тоді $[\langle c \rangle, G] \subseteq \omega(G)$.

Нехай x - елемент G , такий що $|x| \geq 8$. Якщо $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$ і $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$. Тоді $G_1 = \langle x^2 \rangle N_G^A$ є \overline{HA}_2 -групою, що має дві центральні циклічні підгрупи $\langle x \rangle$ та $\langle c \rangle$ порядку 4, що суперечить їх опису. Отже, $x^{2^k} = c^\alpha h^\beta$ (де або α , або β не діляться на 2) і $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x^{2^k} \rangle \omega(G)$. Оскільки $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, то або $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ і $\beta \equiv 1 \pmod{2}$, або $\alpha \equiv 1 \pmod{2}$ і $\beta \equiv 0 \pmod{2}$.

Якщо $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ і $\beta \equiv 1 \pmod{2}$, то неважко довести, що $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$, тому $[x^2, h_1] = 1$. З іншого боку, $[x^2, h_1] = [c^{2^\alpha} h^\beta, h_1] = [h^\beta, h_1] \neq 1$. Отримали протиріччя. Отже, $x^{2^k} = c^\alpha h^{2^\beta}$, де $(\alpha, 2) = 1$, звідки $[x, c] = 1$ і $\langle x \rangle \cap N_G^A = \langle ch^{2^\beta} \rangle$, де $\beta \in \{0, 1\}$.

Позначимо $N = N_G(\langle c \rangle)$. Зрозуміло, що $N \supseteq N_G^A$ і для будь-якого елемента $y \in G$ $|y| \geq 8$, $y \in N$. Якщо $N \neq G$, то існує елемент $a \in G \setminus N$, такий що $|a| = 4$, $a^2 \in \omega(G)$, $[\langle a \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$.

Нехай $a, b \notin N$. Тоді $[a, c] = c^{2^r} h^2$, $[b, c] = c^{2^s} h^2$, звідки $[ab, c] \in \langle c \rangle$ і $ab \in N$. Неважко довести, що $a^{-1}N = aN = bN$, тому $[G : N] = 2$ і $N \triangleleft G$, $G = N\langle a \rangle$, $a^2 \in \omega(N_G^A)$.

За доведеним вище підгрупа N є добутком групи кватерніонів порядку 8 і узагальненої групи кватерніонів порядку більше 16: $N = H \cdot Q$, $|H| = 8$, $|Q| \geq 16$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $Q = \langle y, x \rangle$, $|y| = 2^n > 4$, $y^{2^{n-2}} = c$, $[H, Q] \subseteq \omega(G)$.

Якщо $|y| > 8$, то $N' = \langle y^2 \rangle \times \langle h^2 \rangle \triangleleft G$ і $\langle y^4 \rangle \triangleleft G$, $\langle c \rangle \triangleleft G$, що суперечить припущенню. Отже, $|y| = 8$.

Розглянемо фактор-групу $G/N_G^A \cong (\langle \bar{y} \rangle \times \langle \bar{x} \rangle) \langle \bar{a} \rangle$, $|\bar{y}| = |\bar{x}| = |\bar{a}| = 2$. Якщо G/N_G^A неабелева, то вона є групою дієдра і містить елемент четвертого порядку виду $\langle \bar{a}\bar{t} \rangle$, де $\bar{t} \in \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$. Зрозуміло, що $|\bar{a}\bar{t}| > 4$, а, отже, $\bar{a}\bar{t} \in N$ і $a \in N$, що неможливо. Таким чином, фактор-група G/N_G^A абелева, $[\bar{N}, \langle \bar{a} \rangle] = 1$ і $[y, a] = c^k h^m$. Якщо $m \equiv 0 \pmod{2}$, то $[y^2, a] = c^{2k} \in \langle c \rangle$, що неможливо, бо у такому випадку $a \in N$. Отже, $m = 1$ і $[y, a] = c^k h$. Звідси $(ya)^2 = ya^2 yc^k h = c^{1+k} h z$, $z \in \omega(G)$. З іншого боку,

оскільки $|ya| > 4$, то за доведеним $\langle ya \rangle \cap N_G^A \subseteq \langle c \rangle \omega(G)$. Протиріччя. Лему доведено. \square

Теорему доведено. \square

Теорема 3. Група G є групою типу β тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з наступних типів:

- 1) G - метациклічна недедекіндова \overline{HA}_2 -група з нециклічним центром, $G = N_G^A = N_G$;
- 2) $G = \langle x \rangle \langle b \rangle$, $|x| = 2^k$, $|b| = 2^m$, $m > 2$, $k \geq m+r$, $1 \leq r < m-1$, $Z(G) = \langle x^{2^{r+1}} \rangle \times \langle b^{2^{r+1}} \rangle$, $[x, b] = x^{2^{k-r-1}} s b^{2^{m-1}t}$, $(s, 2) = 1$, $0 \leq t < 2$, $N_G^A = N_G = \langle x^{2^{m-1}} \rangle \times \langle b \rangle$.

Доведення. Достатність умов теореми неважко перевірити безпосередньо. Доведемо необхідність умов теореми.

Оскільки норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп недедекіндова і метациклічна, а центр $Z(G)$ - нециклічний, то за наслідком 1 N_G^A є групою типу 2) твердження 1 при $m > 1$:

$N_G^A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, де $|a| = 2^n$, $|b| = 2^m$, $n \geq 2$, $m > 1$, $[a, b] = a^{2^{n-1}}$.

Продовжимо доведення теореми в наступних лемах.

Лема 9. Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $m > n \geq 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.

Доведення. Нехай $G \neq N_G^A$. Якщо $\omega_2(N_G^A) = \omega_2(G)$, то за наслідком 4 і лемою 5 [5] $G = N_G^A = N_G$, що суперечить припущенню.

Отже, далі будемо вважати, що $\omega_2(N_G^A) \neq \omega_2(N_G^A)$. Тоді існує елемент $x \in G \setminus N_G^A$, $|x| = 4$. За лемою 2 $x^2 \in \omega(G)$, $[\langle x \rangle, N_G^A] \subseteq \langle x \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$. Тому за лемою 4 $G_1 = \langle x \rangle N_G^A$ є \overline{HA}_2 -групою.

Виходячи з опису \overline{HA}_2 -груп з нециклічним центром, G_1 є прямим чи напівпрямим добутком нормальної циклічної підгрупи $\langle y \rangle$ порядку більше 2 та групи кватерніонів H . З цього випливає, що $|a| = |x| = 4$, $|y| = |b|$. Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $G_1 = \langle y \rangle \times H$, де $H = \langle x, a \rangle$ - група кватерніонів, $[H, \langle y \rangle] \subseteq \langle b^{2^{m-1}} \rangle$. Виходячи

з цього, неважко довести, що для довільного елемента $x \notin N_G^A$, $|x| > 2$ виконується $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$.

Припустимо, що фактор-група $\overline{G} = G/N_G^A$ містить підгрупу $\langle \overline{x} \rangle \times \langle \overline{y} \rangle$, де $|\overline{x}| = |\overline{y}| = 2$. Оскільки $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$ і $\langle y \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$, то $|x| = |y| = 4$. За доведеним у кожному з суміжних класів xN_G^A та yN_G^A знайдуться такі елементи x_1 та y_1 , що $|x_1| = |y_1| = 4$, $x_1^2 = y_1^2 = a^2 = [x_1, a] = [y_1, a]$ та $[x_1, b] = b^{2^{m-1}t}$, $[y_1, b] = b^{2^{m-1}l}$. Оскільки $[\overline{x}, \overline{y}] = 1$, то $[x_1, y_1] \in N_G^A$. Покладемо $[x_1, y_1] = a^r b^s$, тоді $[x_1^2, y_1] = b^{2s} a^{2rs} b^{2^{m-1}ts} = 1$ і $2s(1 + 2^{m-2}t) \equiv 0 \pmod{2^m}$. Оскільки $m > 2$, то $s \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$, $s = 2^{m-1}s_1$. Отже, $(x_1 y_1)^2 = a^{-r} b^{2^{m-1}s_1}$. Якщо $(r, 2) \neq 1$, то $|x_1 y_1 a^{-\frac{r}{2}} b^{2^{m-1}s_1}| = 2$. У такому випадку і $(x_1 y_1 a^{-\frac{r}{2}} b^{2^{m-1}s_1}) \in N_G^A$ і $x_1 \in y_1 N_G^A$, що неможливо. Нехай $(r, 2) = 1$. Тоді з умови $[x_1 y_1, b] = b^{2^{m-1}t}$ випливає $[(x_1 y_1)^2, b] = [a^{-r} b^{2^{m-1}s_1}, b] = [a^r, b] = 1$, що також неможливо. Отже, \overline{G} має єдину інволюцію.

Припустимо, що $|\overline{G}| = 2$, тоді $G \in \overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню. Отже, фактор-група \overline{G} містить елемент \overline{g} порядку 4. Тоді $|g| = 8$ і за доведеним $\langle g \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$. Оскільки $[\langle g \rangle, N_G^A] \subseteq \langle g \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$, то комутант групи $G_1 = \langle g \rangle N_G^A$ міститься в $\omega(G)$ і $G_1 \in \overline{HA}_2$ -групою, що неможливо, враховуючи будову N_G^A та опис \overline{HA}_2 -груп. Лему доведено. \square

З наслідків 3 та 4 і леми 5 [5] отримуємо наступну лему.

Лема 10. *Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n \geq t > 2$. Тоді G є групою типу 2) теореми 2.*

Лема 11. *Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n > t = 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.*

Доведення леми 11 аналогічне доведенню леми 9.

Лема 12. *Нехай G - група типу β , норма N_G^A абелевих нециклічних підгруп якої є групою типу 2) твердження 1 при $n = t = 2$. Тоді $G = N_G^A = N_G$.*

Доведення. Припустимо, що $G \neq N_G^A$. Нехай x - елемент найменшого порядку групи G , що не належить до норми N_G^A . Тоді $x^2 \in N_G^A$ і за лемою 2 $|x| > 2$. Покладемо $x^2 = a^\alpha b^\beta$. Оскільки $\langle x \rangle \omega(G) \triangleleft G_1 = \langle x \rangle N_G^A$, то $\langle x^2 \rangle \triangleleft G_1$, звідки $\beta = 2\beta_1$.

Припустимо, що $(\alpha, 2) = 1$. Оскільки $\omega(G)$ центральна нециклічна підгрупа, то за лемою 1 у фактор-групі $\widetilde{G}_1 = G_1/\omega(G)$ $N_{G_1}^A \subseteq N(\widetilde{G}_1)$, тому $\langle \widetilde{x} \rangle \triangleleft \widetilde{G}_1$ і $\widetilde{G}_1' \subseteq \langle \widetilde{x} \rangle \cap \widetilde{N}_{G_1}^A = \langle \widetilde{x}^2 \rangle = \langle \widetilde{a} \rangle$. Якщо $\widetilde{G}_1' = \widetilde{E}$, то $G_1' \subseteq \omega(G)$ і $[x, b] \in \omega(G)$, $[x^2, b] = 1$, що неможливо. Отже, $\widetilde{G}_1' = \langle \widetilde{a} \rangle$. Тоді $(\widetilde{b}\widetilde{x})^2 = (\widetilde{b}\widetilde{x})(\widetilde{b}\widetilde{x}) = \widetilde{b}^2 \widetilde{x}^2 \widetilde{a}^t = 1$. Але у такому випадку $b \notin N_G(\langle \widetilde{b}\widetilde{x} \rangle)$, що неможливо. Отже, $\alpha \equiv 0 \pmod{2}$ і для довільного елемента $x \in G$, $|x| = 2^k$, $k > 1$, $\langle x \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(G)$. Якщо при цьому $k > 2$, то $\langle x \rangle \cap N_G^A = \langle a^2 b^2 \rangle$, бо інакше з умови $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$ випливає існування елемента порядку 2, що не належить нормі N_G^A .

Нехай \overline{A} - максимальна елементарна абелева підгрупа фактор-групи $\overline{G} = G/N_G^A$, \overline{x} та \overline{y} - довільні елементи з \overline{A} . За доведеним вище $x^2 \in \omega(G)$ та $y^2 \in \omega(G)$, тому $[x^2, y] = [x, y^2] = 1$. Покладемо $[x, y] = a^r b^t$. Тоді $(xy)^2 = a^r b^t z$, де $z \in \omega(G)$. Оскільки $(xy)^2 \in \omega(G)$, то $r \equiv t \equiv 0 \pmod{2}$. Отже, для довільних елементів $x, y \in A$ (A - повний прообраз підгрупи \overline{A}), $[x, y] \in \omega(G)$ і $A' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з A містить $\omega(G)$, $A \in \overline{HA}_2$ -групою експоненти 4. З опису таких груп $|\overline{A}| \leq 4$.

Нехай $|\overline{A}| = 2$. Оскільки \overline{G} нільпотентна, то $Z(\overline{G}) \neq \overline{E}$ і \overline{G} має єдину інволюцію. Отже, \overline{G} або циклічна, або кватерніонна 2-група.

Якщо \overline{G} - циклічна, то $G = \langle x \rangle N_G^A$, $G' \subseteq \omega(G)$. Враховуючи, що кожна абелева нециклічна підгрупа з G містить $\omega(G)$, $G \in \overline{HA}_2$ -групою і $G = N_G^A$, що суперечить припущенню.

Нехай \bar{G} - кватерніонна 2-група. Тоді вона містить групу кватерніонів $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ порядку 8, $\bar{x}^2 = \bar{y}^2$. Переходячи до прообразів, покладемо $y^2 = x^2 a^m b^s$. Оскільки $[\langle y \rangle, N_G^A] \subseteq \langle y \rangle \omega(G) \cap N_G^A = \omega(G)$, то $[\langle y^2 \rangle, N_G^A] = E$. Аналогічно $[\langle x^2 \rangle, N_G^A] = E$. Отже, $m \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$ і $x^2 \in Z(G)$, що неможливо.

Нехай $|\bar{A}| = 4$, $\bar{A} = \langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle$ елементарна абелева підгрупа порядку 4. Якщо $\bar{A} = \bar{G}$, то $G' \subseteq \omega(N_G^A)$ і $G \in \overline{HA}_2$ -групою, тобто $G = N_G^A$, що неможливо за припущенням.

Нехай $\bar{A} \neq \bar{G}$. Позначимо $\bar{N} = N_{\bar{G}}(\bar{A})$. Тоді $[\bar{N} : C_{\bar{N}}(\bar{A})] = 2$. Група $C_{\bar{N}}(\bar{A})$ не містить нециклічних абелевих підгруп порядку 8, оскільки повний прообраз такої групи є \overline{HA}_2 -групою, що неможливо, враховуючи твердження 1. Тоді $C_{\bar{N}}(\bar{A}) = \bar{A}$ і $\bar{N} = C_{\bar{N}}(\bar{A}) \langle \bar{x}_1 \rangle$, де $\bar{x}_1^2 \in C_{\bar{N}}(\bar{A})$.

Отже, $\bar{N} = \bar{A} \langle \bar{x}_1 \rangle = (\langle \bar{x} \rangle \times \langle \bar{y} \rangle) \langle \bar{x}_1 \rangle = \langle \bar{x}_2 \rangle \lambda \langle \bar{y} \rangle$, $|\bar{x}_2| = 4$, $[\bar{x}_2, \bar{y}] = \bar{x}_2^2 = \bar{x}$.

Позначимо $\bar{N}_1 = N_{\bar{G}}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$. Оскільки $[\bar{N}_1 : C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle)] = 2$ і $\bar{y} \notin C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$, то $\bar{N}_1 = C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle) \lambda \langle \bar{y} \rangle$, де $C_{\bar{N}_1}(\langle \bar{x}_2 \rangle)$ - циклічна підгрупа. Отже, $\bar{N}_1 = \langle \bar{z} \rangle \lambda \langle \bar{y} \rangle$ і $\bar{x}_2 \in \langle \bar{z} \rangle$. Тоді $\bar{N}'_1 = \langle \bar{z}^2 \rangle$ і тому $\langle \bar{x}_2 \rangle$ - характеристична підгрупа групи \bar{N}_1 .

Покладемо $\bar{N}_2 = N_{\bar{G}}(\bar{N}_1)$, тоді $\langle \bar{x}_2 \rangle \triangleleft \bar{N}_2$ і $\bar{N}_2 \subseteq N_{\bar{G}}(\langle \bar{x}_2 \rangle) = \bar{N}_1$. Це можливо лише за умови, що $\bar{N}_1 = \bar{G} = \langle \bar{z} \rangle \lambda \langle \bar{y} \rangle$, $|\bar{z}| = 2^k > 2$, $|\bar{y}| = 2$, $\bar{y}^{-1} \bar{z} \bar{y} = z^{-1+2^{k-1}t}$, $t \in \{0, 1\}$. Покажемо, що $t = 0$. Для довільного елемента $g \in \langle z, y \rangle$, $|g| \geq 8$ мають місце співвідношення $[g^2, N_G^A] = 1$ та $\langle g \rangle \cap N_G^A = \langle a^2 b^2 \rangle$. Нехай $z_1 = z^{2^{k-1}}$ і $y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a^\alpha b^\beta$, де z та y - прообрази елементів \bar{z} та \bar{y} відповідно. Оскільки $|z| > 8$, то $|z y| = 8$ і $(z y)^4 = a^2 b^2 = a^2 b^2 a^{2\alpha+2\beta} a^\alpha b^{2\beta}$. Таким чином, $\alpha \equiv \beta \equiv 0 \pmod{2}$ та $y^{-1} z y = z^{-1} z_1 a_1$, де $a_1 \in \omega(G)$. Оскільки $[z_1, y] \in \omega(G)$, покладемо $[z_1, y] = a_2$, де $a_2 \in \omega(G)$. Враховуючи, що $y^2 \in \omega(N_G^A)$, маємо $y^{-2} z y^2 = y^{-1} z^{-1} z_1 a_1 y = z a_2 = z$. Отже, $a_2 = 1$ і $z_1 \in Z(G)$, що неможливо. Таким чином, $\bar{y}^{-1} \bar{z} \bar{y} = \bar{z}^{-1}$. Перейдемо до прообразів - $y^{-1} z y = z^{-1} a^l b^s$. Оскільки $\langle z y \rangle \cap N_G^A \subseteq \omega(N_G^A)$ та $(z y)^2 = y^2 a^l b^s \in N_G^A$, то $l \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$ і $y^{-1} z y = z^{-1} a^{2l} b^{2s} = z^{-1} z_2$, де $z_2 \in \omega(N_G^A)$.

Виходячи з умов $[\langle z \rangle, N_G^A] \subseteq \omega(G)$,

$[z^{2^{k-1}}, y] \in \omega(G)$, робимо висновок, що $[\langle z^{2^{k-1}} \rangle, G] \subseteq \omega(G)$. Оскільки кожна абелева нециклічна підгрупа групи G містить $\omega(G)$, то елемент $z^{2^{k-1}}$ порядку 4 нормалізує кожен таку підгрупу. Це означає, що $z^{2^{k-1}}$ належить нормі N_G^A . Маємо протиріччя. Отже, $G = N_G^A$. Лему доведено. \square

Теорему доведено. \square

З теорем 12 і 16 та теореми [2] випливає наступний наслідок.

Наслідок 5. *Будь-яка 2-група G з нециклічним центром та недедекіндовою нормою N_G^A абелевих нециклічних підгруп тоді і тільки тоді не містить підгрупи кватерніонів, коли такої підгрупи не містить норма N_G^A .*

Список використаних джерел

1. Baer R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // *Comp. Math.*-1935.-1.-S.254-283.
2. Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп // *Вісник Київського університету, серія "Фіз.-мат. науки"*. - 2005. - №1. - С.56-64.
3. Лиман Ф.Н. 2-групи с инвариантными нециклическими подгруппами // *Мат. Заметки*. - 1968. - 4, №1. - С. 75-83.
4. Друшляк М.Г. Конечные p -группы ($p \neq 2$) с неабелевой нормой абелевых нециклических подгрупп // *Известия Гомельского университета имени Ф.Скорины*.- 2010.-№1(58).-С.192-197.
5. Лукашова Т.Д. Конечные 2-группы с недедекіндовою нормою нециклических підгруп // *Известия Гомельского гос-го ун-та им.Ф.Скорины. Вопросы алгебры*. - 2001. - №3(6). - С. 139-150.