Kahden vastakkaisen matematiikka

Albert Lautman ja matematiikan filosofia

Pro Gradu

Helsingin yliopisto

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Matematiikan aineenopettajan koulutuslinja

Timo Sihvonen

013816087

22.5.2017

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Laitos/Institution– Department Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä/Författare – Author Timo Sihvonen		
Työn nimi / Arbetets titel – Title Kahden vastakkaisen matematiikka – Albert Lautman ja matematiikan filosofia		
Oppiaine /Läroämne – Subject Matematiikan aineenopettaja		
Työn laji/Arbetets art – Level Pro Gradu	Aika/Datum – Month and year Toukokuu 2017	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages 52

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Tutkielmassa tarkastellaan Albert Lautmanin kirjoituksia matematiikasta ja filosofiasta, sekä erityisesti niiden soveltamista yleisesti tieteellisen tiedon muodostuksessa. Lautman poikkesi monista 1800 -luvun ja 1900 -luvun taitteen matemaatikosta siinä, että häntä ei erityisemmin kiinnostanut matematiikan perusteiden etsiminen, vaan enemmänkin ne ajatuksen vaiheet, joilla näitä perusteita tai matematiikkaa yleisesti tehdään.

Tutkielman historiallinen viitekehys on rikas, sillä uutta matematiikkaa tehtiin Lautmanin aikana enemmän kuin koskaan. Mm. George Boole, Gottlob Frege, Bertrand Russell ja Ludwig Witgenstein pyrkivät matematiikan perusteiden kyseenalaistamisella luomaan uutta, mahdollisimman alkukantaisiin aksioomeihin perustuvaa matematiikkaa. Tämä työ synnytti useita uusia matematiikan filosofian koulukuntia, kuten logisismin, intuitionismin ja formalismin.

Näiden uusien koulukuntien sijaan Lautman pitäytyi omaperäisessä tulkinnassaan antiikin Kreikan platonismista, jonka mukaan matemaattiset abstraktit objektit, kuten luvut, ovat olemassa ihmisistä tai kielestä riippumatta. Matemaattisen teorian todellinen kehitys tapahtuu enemmänkin ilmentymänä kuin puhtaana järkeilynä tukien tiettyjä abstrakteja ideoita, jotka ovat vallitsevia matematiikan suhteen. Tämä ilmentymä voi tulla matematiikan ulkopuolelta, vaikka lopputuloksena olisi kuitenkin puhtaasti matemaattinen teoria. Lautmanin mukaan matemaattinen tutkimus ei koostu yksittäisen sisällyttämisestä yleiseen, vaan aineellisen tiedon edistymisen ehtoihin verrattavissa olevien kokonaisuuden osien erottamisesta eli dissosioitumisesta.

Logiikan yritys rakentaa koko matematiikka pienestä määrästä alustavia periaatteita osoittautui mahdottomaksi. Tämän sijaan Lautman esitti David Hilbertin ohjelman mielessä kahden vastakkaisen matematiikan, jossa matematiikka jaetaan lokaaliin ja globaaliin osaan. Lokaali tutkimus kohdistuu yksittäiseen todellisuuden elementtiin, josta se pyrkii määrittämään spesifisyyttään. Sitten, askel askeleelta, se muodostaa tarpeeksi vahvoja yhtäläisyyksiä näiden eri elementtien välille synnyttäen näin kokonaisuuden idean. Globaali tutkimus taas pyrkii kuvaamaan kokonaisuutta riippumatta niistä elementeistä, joista se koostuu, näin määrittäen matemaattisia entiteettejä vain niiden funktionaalisten ominaisuuksien pohjalta. Joissain tapauksissa lokaali matematiikka antaa syvemmän ymmärtämyksen globaalista matematiikasta, mutta se ei tee näistä eriarvoisia, vaan yksinkertaisesti täysin eri asioita.

Vaikka Lautmanin työt jäivät hänen teloituksestaan johtuen pahasti kesken, niin hänellä oli suuri vaikutus ranskalaisen filosofian kehitykseen ja sitä kautta myös pedagogian kehitykseen. Rikas aineisto ansaitsi ja ansaitsee edelleen tulla tutkituksi.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
matematiikan filosofia; logiikka; ontologia; platonismi; dialektiikka; Lautman, Albert

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällysluettelo

1. Johdanto

1800- ja 1900-luvun taitteessa Euroopassa virinneen vilkkaan matematiikan perusteita ja logiikkaa koskevan keskustelun taustalla olivat kaksi viime vuosisadan lopun tärkeää kehityslinjaa, jotka liittyivät toisaalta reaalilukujen teorian ja toisaalta luonnollisten lukujen teorian perusteiden tutkimukseen (Raatikainen 1996, 31-35). 1800-luvun matematiikalle oli ollut leimallista pyrkimys entistä täsmällisempään käsitteenmäärittelyyn, kuten aiemmin Newton ja Leibniz uudella differentiaali- ja integraalilaskennalla olivat pyrkineet päästä eroon ongelmallisesta infinidesimaalin käsitteestä, tai kuten Weierstrass oli pyrkinyt täsmällistämään analyysin aritmetisoinnin omalla ohjelmallaan. Kävi kuitenkin ilmi, että analyysin aritmetisoinnissa tarvittiin aiempaa yleisempää luvun käsitettä. Näin Georg Cantor (1845–1918) esitti teoriansa reaaliluvuista käyttämällä määritelmissään äärettömiä rationaalilukujen joukkoja. Tämä poikkesi radikaalisti kaikesta aiemmasta matematiikasta, jossa äärettömän käsitettä oli kaikin keinoin yritetty välttää tai se oli jätetty kokonaan määrittelemättä. Näin vuosisadan vaihteessa muodostui joukko-oppi, joka avasi täysin uudenlaisia ovia matematiikoille tutkittavaksi.

Tähän matematiikan ja logiikan vallankumoukseen syntyi ranskalainen matematiikan filosofi Albert Lautman (1908–1944), joka työskenteli kahden maailmansodan välisinä vuosikymmeninä. Hän postuloi Hilbertiläisessä mielessä samaan aikaan formaalisen ja strukturaalisen käsityksen matematiikasta (Duffy 2009, 19). Viittaus David Hilbertin aksiomaattiseen strukturalismiin on olennainen Lautmanille, koska hänen näkemyksensä matemaattisesta todellisuudesta ja matematiikan filosofiasta poikkesivat huomattavasti vallitsevista matematiikan epistemologian suuntauksista. Lautmanin työt eivät olleet kovin keskittyneet tiettyihin perustavaa laatua oleviin matematiikan kysymyksiin, kuten sen alkuperään, sen suhteeseen logiikkaan, tai sen perusteisuuden ongelmiin. Näiden sijaan häntä kiinnosti enemmänkin koko tämän problematiikan muuttaminen tuomalla esiin matemaattisen problematiikan luonne yleisesti.

Matematiikan problematiikka liittyy hyvin vahvasti ongelmanratkaisuun, tosin matemaattinen ongelmanratkaisu on ”vaarallinen” termi, sillä kyseessä on 1980-luvun opetuksen uudistajien lempikäsite, joka saattaa aiheuttaa negatiivisia mielleyhtymiä joillakin opettajilla (Hästö 2011). Ei ole olemassa mitään kattavaa tutkimustietoa siitä, millaista ongelmanratkaisua suomalaisissa tai yleisemminkin kouluissa matematiikan tunneilla esiintyy. Ongelmanratkaisu liitetään helposti matematiikan sanallisiin tehtäviin, mutta sanalliset tehtävät eivät useinkaan ole ongelmatehtäviä, eikä ongelmatehtävän tarvitse olla sanallinen. Ongelmatehtävällä tarkoitetaan tehtävää, johon oppilaalla ei ole valmista ratkaisumallia käytettävissään, vaan hän joutuu sellaisen itse kehittämään (Schoenfeld 2007, 541). Suuri teoreettinen haaste onkin siirtyä strukturaalisista kuvauksista, kuten mitkä asiat vaikuttavat ongelmanratkaisun onnistumiseen tai epäonnistumiseen, kohti teoreettisempia selityksiä siitä, miten ja miksi ongelmanratkaisuun osallistuttaessa ylipäätään tehdään valintoja. Oman ratkaisumallin kehittelyssä käytetään aiemmin hankittua tietoa, kuten omia käsityksiä siitä, miten myötävaikutetaan ongelman ratkaisuun. Tarkoitus ei ole tietenkään keksiä itse uudestaan sitä matematiikkaa, jonka kehittämiseen on kulunut tuhansia vuosia.

Perinteinen matematiikan opetus perustuu siihen, että ensin näytetään ratkaisumalli, ja sitten sitä käytetään olennaisesti identtisiin tehtäviin. Keskeinen kysymys nykyajan matematiikan opetuksessa kuuluukin, onko tämä sitä matematiikkaa, jota opiskelijoiden tulisi oppia, vai onko tärkeämpää, että he osaisivat soveltaa oppimaansa matematiikkaa myös sellaisiin tehtäviin, joita he eivät ole ennen nähneet. Jos opiskelija ei osaa soveltaa aiemmin opittua matematiikkaa uuteen matematiikkaan, niin miten opiskelijalta sitten onnistuu soveltaminen niihin reaalimaailman ongelmiin, joihin liittyy yleensä paljon muitakin kuin pelkästään matemaattisia vaikeuksia.

Tämän pro gradu -tutkimelman tarkoituksena on tarkastella Albert Lautmanin ja muutamien muiden matematiikan filosofien ajatuksia matematiikasta ja matemaattisen ongelmanratkaisun vaiheista, sekä liittää nämä ajatukset nykypäivän matematiikkaan, matematiikan opetukseen ja oppimiskulttuuriin. Keskeisenä tutkimuskysymyksenä on pohtia, miten matemaattiset rakenteet ja käsitteet muodostuvat ja minkälaista työtä matematiikka vaatii ajattelulta Lautmanin mukaan. Lisäksi tutkitaan miten matematiikkaa tehtäessä luovuus ja valmiiksi annetut käsitteet ja rakenteet ovat suhteessa toisiinsa. Lautmanin työt tutkivat sitä risteystä, jossa moderni matematiikka, edistynyt matemaattinen uuden luominen, strukturaalisuus tai yhtenäisyys suhteessa matemaattiseen tietoon, ja matemaattisen toiminnan perustana olevat metafyysiset ja dialektiset jännitteet kohtaavat.

Johdannon jälkeisessä luvussa ”Logiikka ja matematiikan perusteet” esitellään tutkimuksen tärkeimmät käsitteet, lähteet ja teoreettinen tausta käymällä läpi lyhyesti aiheen kannalta olennaista tutkimushistoriaa. 1900-luvun alun epistemologian piiri ja Lautmanin työt antoivat historiallisen käännekohdan, joka avasi mahdollisuuden uudenlaiseen ymmärrykseen matemaattisesta luovuudesta ja sen suhteesta todellisuuteen.

Tämän jälkeen siirrytään seuraavissa luvuissa Lautmanin keskeisiin teksteihin, jotka kaikki on koottu kokoelmaan *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits* (1977) ja joka on ilmestynyt englanniksi Simon B. Duffyn käännöksenä *Mathematics, Ideas and the Physical Real* (2011). Luvussa ”Platonismin puolustukseksi” keskitytään Lautmanin vuosina 1933–1937 kirjoittamiin artikkeleihin ja kirjoihin, joissa näkyy selvimmin ajan kuva, eli pyrkimys kaiken matematiikan selittämiseen logiikalla. Lautman oli hyvin logiikkavastainen, ja vaikka hän mainitseekin logiikan useasti, hän ei koskaan pidä sitä varteenotettavana matematiikan selittävänä työkaluna, vaan lähinnä liian helppona vastauksena äärimmäisen vaikeaan kysymykseen matematiikan perusteista. Luvun kattavana teemana ja teoriapohjana on antiikin ajan filosofin mukaan nimetty filosofinen koulukunta platonismi.

Seuraavassa luvussa ”Rakenne ja olemassaolo matematiikassa” keskitytään Lautmanin toiseen väitöskirjaan (*Essay on the Notions of Structure and Existence in* Mathematics; Lautman 2011, 87-193), jossa siirrytään kauemmaksi logiikasta ja pyritään esittämään erilaisia matematiikan käsitteitä sekä pohtimaan niiden muodostuksen ongelmia ja ajattelun vaikeuksia. Vaikka Lautman onkin ensisijaisesti filosofi, on hänellä myös hyvin kattava koulutus sekä saksalaisesta että ranskalaisesta matematiikasta. Toisaalta osa Lautmanin esittämästä matematiikasta on nykypäivään mennessä osoitettu epäpäteväksi tai muuten vähemmän kiinnostavaksi, joten joissain tapauksissa tätä tutkielmaa lukiessa kannattaa muistaa tutkimuksen historiallinen viitekehys: vuosisadan vaihde oli muutoksen aikaa matematiikassa, ja joskus matematiikot tekivät suuria ajatteluvirheitä tai hyppäyksiä oletuksesta toiseen päästäkseen haluttuun lopputulokseen. Lautman kuitenkin vältti suuremmat sudenkuopat ja osasi perustella näkökantansa erittäin perusteellisilla teorioilla.

Tutkielman viimeisessä luvussa pohditaan Lautmanin ajatusten vaikutuksia filosofiaan ja kasvatustieteisiin. Erityisesti kiinnitetään huomiota hänen vaikutukseensa joihinkin keskeisiin nykyajan filosofian teorioihin, jotka vuorostaan peilautuvat eräissä matematiikan opetuksen teorioissa. Lautmanilla oli suuri vaikutus ranskalaiseen filosofi Gilles Deleuzeen (1925–1995), joka tuli tunnetuksi uuden ajattelun ja käsitteiden kehittämisestä paitsi matematiikan ja filosofian historian myös filosofisen metafysiikan ja taiteiden filosofian tutkimuksessa. Hänen kehittämänsä eron metafysiikka ja tapahtuman filosofia peilautuvat matematiikan opetuksessa, kun näille rinnakkaiseksi käsitteeksi esitetään matemaattisen tapahtuman käsite luokkahuoneessa.

Lopuksi tehdään vielä yhteenveto johtopäätöksistä, eli missä määrin Lautmanin ajatukset ovat relevantteja nykypäivän matematiikassa ja varsinkin matematiikan opetuksessa; miten Lautmanin ajatukset ovat ajankohtaisia vielä yli 70 vuotta hänen kuolemansa jälkeen.

2. Logiikka ja matematiikan perusteet

2.1. Analyyttisen filosofian historiaa

1800-luvun lopulla matematiikassa koitti muutoksen aika. Kasvava määrä matemaatikoita kyseenalaisti matematiikan perusteet ja haluttiin luoda ns. ”puhdas matematiikka”, jonka avulla voitaisiin todistaa kaikki matematiikan lauseet lähtemällä liikkeelle muutamasta yksinkertaisesta perusaksioomasta. Yleisesti ensimmäisenä tällaisen matematiikan ajattelijana ja luojana pidetään George Boolea (1815–1864), joka teoksissaan *Mathematical Analysis of Logic* (1847) ja *Investigation of the Laws of Thought* (1854) esitti *joukkoalgebran* eli *Boolen algebran.* Kirja *Investigation of the Laws of Thought* alkaa Boolen selostuksella siitä, kuinka hän tutki mielen operaatioiden fundamentaalisia lakeja, joiden avulla päättelyä tehdään. Yleiset luonnonlait eivät ole välittömästi havaittavia, vaan ne ovat joko induktiivisia päättelyitä isommasta faktojen kokoelmasta, yleisen totuuden erikoistapauksia tai kausaliteetin aineellisia hypoteeseja, joiden avulla voidaan selittää ilmiöitä järkähtämättömällä tarkkuudella ja ennustaa niistä uusia yhdisteitä. Kaikki nämä ovat todennäköisiä päätelmiä, jotka lähestyvät varmuutta kokemuksen lisääntyessä, mutta eivät koskaan ole täydellisiä.

Toisaalta tietämys mielen laeista ei välttämättä tarvitse laajaa havaintojen kenttää. Yleinen totuus on riippuvainen tilanteesta, eikä sitä voi todentaa toistamalla sitä eri tilanteissa, sillä tämä tekee siitä vain tietyn totuuden käytännön todentamisen, mikä ei lisää varmuutta sen yleisyydestä. Melkein rajaton määrä tiettyjä ja vielä tuntemattomiakin teorioita voidaan johtaa muutamasta yksinkertaisesta ja perustavanlaatuisesta aksioomasta, jotka ovat kuitenkin kaikki yleisiä totuuksia. Nämä fundamentaaliset päättelyn lait voidaan esittää matematiikan symbolisella kielellä, antaen sille tarkoituksenmukaisen tiivistetyn muodon. *Boolen algebrassa* fundamentaaliset päättelyn lait redusoitiin kahteen laskutoimitukseen, $\wedge$ ja $\vee$, kahteen alkioon, 0 ja 1, sekä alkioiden komplementtiin $\neg a$, tosin hän itse käytti hieman eri merkintöjä.

Näillä yksinkertaisilla työkaluilla pystyttiin Boolen mielestä kattamaan koko klassinen logiikka.

Matemaattisen logiikan ja matematiikan perusteiden täsmällistämisen myötä syntyi tarve palauttaa matematiikka alkutekijöihinsä ja rakentaa se uudelleen loogisten perusaksioomien päälle. Saksalainen matemaatikko Gottlob Frege (1848–1925) pyrki määrittelemään luonnollisten lukujen joukon uudelleen, ja häntä pidetäänkin yleisesti analyyttisen filosofian ja symbolisen logiikan isänä. Lause- ja kvanttorilogiikan symbolit, joista osa löytyikin jo Boolen algebrasta, esiteltiin ensimmäistä kertaa kokoelmana Fregen kirjassa *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1879). Tämä ei kuitenkaan riittänyt Fregelle, sillä hänen kaksiosainen pääteoksensa *Grundesetze der Arithmetik* (osa I, 1893 ja osa II, 1903) tarkoituksena oli esittää matematiikka kokonaan logiikan jatkeena käyttäen saksalaisen matemaatikko Georg Cantorin (1845–1918) luomaa joukko-oppia. Ennen Cantorin tutkimuksia joukon käsitettä matematiikassa käytettiin hyvinkin implisiittisesti, vaikka sen määrittely olikin jäänyt kovin alkeistasolle (Johnson 1972, 55–62). Yleisesti ajateltiin, että oli olemassa vain äärellisiä joukkoja, jotka on helppo ymmärtää ja määrittää, ja ”äärettömyydestä” keskusteleminen oli luonteeltaan enemmän filosofinen kuin matemaattinen ongelma. Vasta todistaessaan, että on olemassa ääretön määrä erikokoisia äärettömiä joukkoja, Cantor osoitti joukko-opin epätriviaalisuuden ja lisätutkimuksen tarpeen. Joukko-opin avulla pystytään tulkitsemaan väitteitä matemaattisista olioista kaikilta perinteisen matematiikan osa-alueilta, ja se antaa perustavanlaatuisen joukon aksiomeja näiden väitteiden osoitukseen tai kumoamiseen. Juuri tämän teorian kokonaisvaltaisen matematiikan kattavuuden takia Frege halusi käyttää joukko-oppia matematiikan perusteiden uudelleen luomiseen.

Englantilainen matemaatikko ja filosofi Bertrand Russell (1872–1970) löysi kuitenkin Fregen järjestelmän kumoavan ”Russellin paradoksin”, jossa kysytään sisältääkö kaikkien joukkojen joukko itsensä (Lehtinen 2000, 119–120). Cantorin joukko-oppi, joka myöhemmin nimettiin naiiviksi joukko-opiksi, ei kyennyt vastaamaan tähän ristiriitaan johtavaan kysymykseen. Russell lähetti kirjoituksensa tästä Fregelle juuri ennen tämän pääteoksen toisen osan painoon menemistä, ja Frege elikin lopun elämästään erakkona kirjoittaen hyvin vähän, eikä enää palannut logiikan pariin kirjoituksissaan. Myös Cantor otti teoriaansa kohdistuneen kritiikin raskaasti vastaan ja viettikin viimeiset vuodet elämästään mielisairaalassa.

Russell ja Alfred North Whitehead (1861–1947) palasivat Fregen aloittaman työn pariin matematiikan perusteiden uudistamiseksi suurteoksessaan *Principia Mathematica* (1910–1913). Sen yrityksenä oli kuvata joukko aksioomia ja symbolisen logiikan päättelysääntöjä, joiden avulla periaatteessa kaikki matematiikan totuudet olisivat todistettavissa (Lehtinen 2000, 118). Russell mainitsee *Principian* esipuheessa Fregen, joka innosti myös itävaltalaisen insinööriopiskelija Ludwig Wittgensteinin (1889–1951) kirjoittamaan logiikasta. Hän puolestaan näytti kirjoitelmaansa Fregelle, joka ehdotti Wittgensteinia lähtemään Cambridgen yliopistoon Russellin oppilaaksi opiskelemaan logiikkaa. Tehtyään suuren vaikutuksen kirjoituksillaan Russelliin ja matemaatikko G. E. Mooreen (1873–1958), Wittgenstein alkoi työskennellä logiikan ja matemaattisen logiikan perusteiden parissa. Näitä neljää nimeä, Frege, Russell, Wittgenstein ja Moore, pidetään analyyttisen filosofian historian ensimmäisinä edustajina (Raatikainen 2007).

2.2. Logisismi

Toisin kuin suurin osa aikansa matemaatikoista, Albert Lautman erotti logiikan muusta matematiikasta ja ajatteli sen olevan vain osa suurempaa kokonaisuutta. Hän huomioi julkaisussaan *Considerations on Mathematical Logic* (Lautman 2011, 1-8) matemaattisen logiikan tarpeen yhdistää kaksi toisistaan riippumatonta tutkimuskenttää, looginen päättely ja algebrallinen laskenta, toisiinsa. Aikansa matemaatikot olivat varmoja matemaattisen logiikan perusteiden kaatumisesta niistä löytyneiden joukko-opillisten paradoksien johdosta, kuten esimerkiksi Russellin paradoksin löytyminen Fregen logiikasta. Kuitenkin joukko-oppi osoittautui niin hyödylliseksi lukuteorian tutkimisessa, että sen oli mahdollista hyötyä transfiniittisesta laskennasta samalla kun se määritteli suhteellisen tarkasti luvut ja joukot välttäen suurimmat ristiriidat.

Seuraavaksi siirryttiin pieneen määrään loogisia käsitteitä ja väitteitä, joista yritettiin johtaa uudestaan koko matematiikka. Näin matematiikka ja logiikka yhdistyivät yleiseen johtamisen teoriaan, jota Lautman kutsui käsitteellä ”logisismi” (Lautman 2011, 2). Tällaisen yleisen johtamisen teorian olemassaolon ongelma on kaksijakoinen. Toisaalta kyse on sen tietämisestä, onko perusteltua verrata matemaattisen todistuksen alkuoletuksia loogisiin käsitteisiin ja väitteisiin, joista logisismi johtaa lopputuloksensa. Tässä tärkeää on rajata tarkasti ne periaatteet, jotka ovat ehdottoman tarpeellisia ja riittäviä tämän johtamisen kannalta. Lisäksi matemaattisen todistuksen ja logisismin yhdistämisessä tulosten pätevyys pitää tarkistaa, jotta kumpaakaan sovellettaessa ei törmätä ristiriitaan.

Russell havaitsi analyysin ja joukko-opin loogisen ristiriidan johtuvan siitä, että joukkojen alkiot voitiin määritellä joukon itsensä kautta tai funktioilla, joiden muuttujien arvoiksi voitiin määritellä mahdollisten muuttujien arvojen täydellisyys (Raatikainen 2005, 31). Koska tällaisista määrittelyistä haluttiin tehdä epäpäteviä, niin Russell rakensi yksityiskohtaisen tyyppiteorian, jossa yksiköiden hierarkia määriteltiin tyypiksi 0, yksiköiden ominaisuudet tyypiksi 1, ominaisuuksien ominaisuudet tyypiksi 2 ja niin edelleen. Näin joukkojen alkiot tai funktioiden muuttujat ovat aina alempaa tyyppiä eikä siten voi syntyä kaikkien joukkojen joukon tyyppisiä ristiriitoja, koska nämä olisivat kieliopin vastaisia.

Tyyppiteoria ei kuitenkaan poistanut noidankehien muodostumisia saman tyyppisistä funktioista ja ominaisuuksista. Kun ominaisuuksien jakaminen yksilöille perustuu tämän yksilön ominaisuuksien kokonaisuuteen, niin siinä tämän kokonaisuuden huomioiminen on kiellettyä. Esimerkiksi kardinaalilukujen teoria perustuu alkeellisiin käsityksiin nollasta ja toistuminen luvusta n lukuun $n + 1$. Kokonaisluku $n + 1$ on luku, jolla on kaikki luvun n toistuvat ominaisuudet alkaen nollasta. Kuitenkin kokonaisluvun ominaisuus määriteltynä toistuvuudesta on myös yksi luvun n ominaisuuksista. Siten kokonaisluvun käsitys olisi kielletysti implikoitu sen määrittelyn elementeissä.

Tämän takia Russell joutui luomaan uuden haarautumisen samanlaisista ominaisuuksista joukon sisällä: Toistuvuuden määrittelyyn liittyvät ominaisuudet ovat aina tietyssä järjestyksessä ja kardinaaliluvun ominaisuus on saman tyypin ominaisuus, mutta korkeammalla tässä järjestyksessä. Toisin sanoen eri tyypeillä on hierarkia, ja myös tyyppien sisältä löytyy toinen hierarkia. Kardinaaliluvun käsitys oli siten pelastettu, mutta suuri joukko reaalilukujen teorioita, jotka käsittelivät koko reaalilukujen joukkoa ilman järjestystä, mitätöitiin. Tämän takia Russell esitti pelkistyvyysaksiooman, jonka mukaan kaikkien järjestyslukujen predikaattifunktioille on olemassa samaa tyyppiä oleva funktio järjestysluvulla 1, tosin sen konstruoiminen jostain yleisestä funktiosta ei ole mahdollista. Tämän aksiooman tarkoitus oli tunnustaa, että matematiikka ei muodosta tautologisten väitteiden joukkoa. Russell ja Whitehead pystyivät luottamaan vain siihen ”realistiseen varmuuteen, että tietyt olennot omaavat tiettyjä ominaisuuksia, vaikka me emme voi johtaa niitä tukeutumalla vain järkähtämättömiin loogisiin laskutoimituksiin” (Lautman 2011, 3). Pelkistyvyysaksiooma on käännös symboliselle kielelle mahdottomien laskutoimitusten olemassaolon mahdollisuudesta, mikä johtuu vain empiirisen intuition aiheuttamasta tarpeesta.

Lisäksi *Principia Mathematica* sisälsi muita päättelyn teoriaan perustuvia aksioomeja. Kokonaisluvut voidaan määritellä siten, että ne eroavat toisistaan edeltäjiensä mukaan. Tämän mahdollistaa vain olioiden äärettömyyden olemassaolo, jonka takia täytyy omaksua äärettömyysaksiooma: Jos universumissa olevien olioiden luku rajoitetaan esimerkiksi kymmeneen, niin $10 + 1, 10 + 2$, jne. olisi identtinen luokan 0 kanssa ja siten kaikki sen luokan alkiot olisivat samoja, toisin kuin yleisissä kokonaislukujen ominaisuuksissa. Kardinaaliluvun käsitys on erottamaton laskettavien asioiden todellisesta olemassaolosta, sillä se nojautuu luokkien olemassaoloon.

Tässä jatkuvassa vetoamisessa kokemukseen peruskäsityksien valinnoissa sekä erilaisten loogisten laskutoimitusten esittelyssä Russell ja Whitehead uskovat eliminoineensa kaikki mahdolliset paradoksit ja ristiriidat (Lautman 2011, 4). Kuitenkin päättelyyn liittyvän teorian pitää yleisesti todistaa johdonmukaisuutensa, jotta sitä voitaisiin pitää uskottavana ja käyttää perusteellisesti. Russellin teoria, yhdistäessään matemaattisen olemassaolon aistittavaan todellisuuteen, välttää tämän tarpeen laatijansa tarkoituksen mukaisesti. Äärettömyysaksiooman, joukko-opista otetun valinta-aksiooman ja pelkistyvyysaksiooman teoriaan omaksumisesta puuttuu looginen oikeutus. Russellin seuraajat halusivat päästä eroon myös logisismin aksioomista ja heidän mukaansa *Principian* pohjalla oleva tuki kokemukseen todellisuudesta haittaa matematiikan symbolista luonnetta. Voidaan silti todeta, että tyyppiteoria on välttämätön kaikessa rationaalisessa tulkinnassa, ja logisismin suurin anti matemaattiselle filosofialle sisältyy sen huomioihin yhteneväisyydestä matemaattisten funktioiden luomisen ja loogisten ominaisuuksien kuvailun välillä.

2.3. Intuitionismi ja formalismi

Osittain joukko-opin ristiriitojen vuoksi esitettiin uudenlainen, koko matematiikan kattava, formalistinen lähestymistapa matematiikan perusteisiin. Saksalainen matemaatikko David Hilbert (1862–1943) oli yksi formalismin varhaisista kannattajista. Hänen tavoitteenaan oli täydellinen ja loogisesti ristiriidaton koko matematiikan aksiomatisointi (Kleene 1976, 763). Hilbertin ehdotuksen mukaan tietty sopiva osa klassista matematiikkaa pitää formalisoida uudestaan siten, että tässä uudessa formaalissa systeemissä kaikki tavat koostaa matemaattisia lausekkeita, joilla esitetään matematiikan väitteitä, kaikki matematiikan oletukset ja teorioiden todistuksissa käytetyt logiikan periaatteet määrätään eksplisiittisesti todetuilla säännöillä. Näiden sääntöjen soveltaminen pitää onnistua työstämällä mekaanisesti lausekkeiden muotoja niiden tarkoitukset huomioon ottaen. Jotta tällainen tiettyjen sääntöjen puitteissa tehty mekaaninen työskentely onnistuisi, niin uuden formaalin systeemin pitää olla ”turvallinen” eli loogisesti ristiriidaton. Samasta sääntöjen joukosta ei saa löytyä todistusta sekä väitteelle A että sen negaatiolle $\neg A$. Näin Hilbertin ristiriidattomuuteen liittyvät todistukset olivat suoria formaalin systeemin rakenteen ristiriidattomuuteen liittyviä todistuksia.

Ensimmäistä kertaa loogiseen ristiriidattomuuteen liittyvät ongelmat muuttuivat perustavanlaatuisiksi, kun aikaisemmin niitä esitettiin vain aika ajoin uuden teorian tulkitsemiseksi vanhasta teoriasta, esimerkiksi esitettäessä kuinka epäeuklidinen geometria on loogisesti ristiriidaton, jos euklidinen geometriakin on ristiriidaton. Hilbertin mukaan formuloidessa molempia teorioita toiseen liitetyt lukuteorian tasolla olevat todistukset voidaan liittää toiseen, koska ne sisältyvät samaan formaaliin systeemiin. Lisäksi ohjelmaan sisältyi myös formaalin systeemin täydellisyys, eli systeemin sisällä jokaisen suljetun lausekkeen pitää olla joko todistettavissa tai kumottavissa. Tähän liittyy kolmannen poissuljetun laki, jonka mukaan jokin väittämä voi olla vain tosi tai epätosi, eikä kolmatta vaihtoehtoa ole.

On olemassa matemaatikoiden joukko, joille taidokkaimmatkin yritykset järkähtämättömässä päättelyssä näyttäytyivät epätodellisilta, sillä heille matematiikan oliot ovat logiikan merkinnöistä vapaan ja itsenäisen ajattelun tuotteita. Heidän mukaansa ainut laki, mitä ajattelu noudattaa, on äärellisyyden laki: tällainen mielen toiminta onnistuu vain numeroituvassa määrässä vaiheita. Tätä matematiikan filosofian suuntausta kutsutaan ”intuitionismiksi” (Brouwer 2000, 55–56). Sen perustaja L. E. J. Brouwer (1881–1966) esitti intuitionismin Hilbertin kannattaman formalismin vastakkaiseksi suuntaukseksi.

Klassinen logiikka, samoin kuten logisismi, tunnusti kolmannen poissuljetun lain soveltamisen universaalin väitteen ja sitä vastakkaisen väitteen muodostaman disjunktion. Joko kaikilla sen joukon alkioilla on jokin tietty ominaisuus, tai sitten yhdelläkään ei sitä ole. Brouwerin mukaan ei ole järkevää hylätä yleisen väitteen pohjalta johdettua ominaisuutta, ellei siihen liittyvää ristiriitaa ole efektiivisesti määritelty (Brouwer 2000, 58). Tämän takia useat vajavaisesti tehdyt matemaattiset teoriat ovat hyväksyttäviä intuitionismin mukaan, kunhan niitä vastaan kehitettyjä ristiriitoja ei ole. Intuitionismiin pohjautuvan matemaattisen käsitteen olemassaolo on väliaikainen ja aina tarkistettavissa, jolloin se on yhdenkin uuden käsitystä muuttavan ratkaisun löytymisen armoilla. Matemaattisen olion määrittely varmistuu vasta siinä vaiheessa, kun mielen toiminta loppuu. Tällöin matemaatikko on ehkä saanut varmuuden, mutta matematiikka yleisesti on vähentynyt mielen toiminnan rajojen mukaisesti.

Brouwer tiivisti näiden kahden koulukunnan – intuitionismin ja formalismin – väliset ajatukset siitä, missä matemaattinen eksaktius sijaitsee, yhteen lauseeseen: intuitionismin mukaan se on ihmisjärjessä, formalismin mukaan se on paperilla. Ihmismielellä ei ole käytössään täydellisiä kuvia esimerkiksi suorista viivoista tai kymmentä suuremmista luvuista, ja tämän takia nämä matemaattiset oliot eivät ole olemassa luontokäsityksessämme sen enempää kuin mitä itse luonto on (Brouwer 2000, 56). Matemaattinen eksaktius määrittyy vain asioiden välisten yhteyksien joukkojen luomisen metodista ja on erillään siitä merkityksestä, mitä näille yhteyksille tai niitä koskeville asioille halutaan antaa. Näillä merkityksettömillä joukoilla yhteyksiä, joihin matematiikka on pelkistetty, on matemaattinen olemassaolo vain, kun ne esitetään puhuttuna tai kirjoitettuna kielenä samalla kun esitetään niiden pohjalla olevat matemaattis-loogiset lait.

Koska tyypillisesti puhuttu tai kirjoitettu kieli ei riitä tyydyttämään symbolisen logiikan tarpeita, formalismi välttää yleisen kielen käyttöä matematiikassa. Se ei kuitenkaan ota kantaa siihen, mikä useista johdonmukaisesti rakennettavissa olevista symbolisista kielistä on ”oikeaa matematiikkaa”, joten sen täytyy määrätä ne ehdottomat aksioomien systeemit ja päättelyn lait, joilla matematiikkaa rakennetaan. Tähän monet eri formalistit ovat näyttäneet omat ratkaisunsa, joita kaikkia yhdistää sama lähtökohtainen ajatus. Se lähtee perusolettamuksesta matemaattisten olioiden maailman olemassaolosta yksilön ajattelun ulkopuolella; se noudattaa klassisen logiikan lakeja; sen oliot noudattavat joukkojen ja niissä olevien alkioiden välisiä yhteyksiä, joihin postuloidaan useita aksioomeja. Matematiikkaa laaditaan merkkien joukossa, ja näillä merkeillä itsessään ei ole mitään merkitystä. Kokonaisluku ei ole enää Russellin intuitiivinen luku, vaan yksinkertainen yleinen ominaisuus tietylle joukolle merkkejä, joita käytetään aksioomeissa. Useita aksioomien joukkoja voidaan erotella toisistaan, joista jokainen on osa edellistä isompaa aksioomien joukkoa, jne.

Tähän aksioomien joukkoon perustuen formalismi kehittää ensimmäiseksi äärellisten joukkojen teorian. Joukkoa kutsutaan äärelliseksi, jos sen alkioita ei voida yhdistää yksikäsitteisellä vastaavuudella minkään sen alijoukon alkioiden kanssa. Täydellisen induktion periaate on näin osoitettu olevan näiden joukkojen keskeinen ominaisuus. Periaatteen mukaan ominaisuus pätee kaikille äärellisille joukoille, jos se pätee aina kaikille yhden alkion joukoille ja, jos sen pätevyys mielivaltaiselle äärelliselle joukolle voidaan todeta sen pätevyydestä samalle joukolle, mistä on vähennetty yksi alkio. Se, että formalismin pitää antaa täsmällinen todistus tälle periaatteelle - joka on intuitionismille itsestään selvää johtuen äärellisten lukujen erilaisesta muodostamisesta - osoittaa, että formalismi ei koskaan kykene oikeuttamaan aksioomiensa valintoja korvaamalla tyytymättömyytensä epätarkkaan käytäntöön tai intuitioon todistuksella hänen teoriansa ristiriidattomuudesta. Jotta voitaisiin osoittaa formalismin valitsemien aksiomien joukon tuottamien johtopäätöksien ristiriidattomuus, niin täytyisi ensin näyttää, että jos ristiriitoja ei löydy n määrästä johtopäätöksiä, niin niitä ei löydy myöskään $n + 1$ määrästä johtopäätöksiä, ja sen jälkeen omaksua täydellisen induktion periaate intuitiivisesti. Tämän periaatteen matemaattinen varmuus tarvitsee osakseen symbolisen esityksen konkreettisen esimerkin sovelluksena ja toisen intuitiivisen soveltamisen täydelliseen induktioon, mitkä taas johtaisivat formalismin kehäpäätelmään.

Tämä esimerkki formalismin teorian rakentamisesta ei kuitenkaan osoita, että intuitionismi olisi aina se parempi vaihtoehto. Jatkuva viittaaminen ihmisjärkeen ja epätarkkoihin määritelmiin ei riittänyt useimmille 1900-luvun alun matemaatikoille, eivätkä ne riitä tänä päivänäkään. Viimeistään Kurt Gödelin (1906–1978) kirjoittaman kuuluisan formaalisti ratkeamattomista lauseista kertovan artikkelin *Sätze der "Principia Mathematica" und verwandter Systeme* (1931) ilmestymisen jälkeen voitiin todeta, että formalismi ei tulisi enää koskaan saavuttamaan päämääräänsä (Kleene 1976, 763–764). Artikkelissaan Gödel esittää, että luonnollisten lukujen aksioomat *Principia Mathematican* logiikkaan yhdistämällä muodostetusta formaalista systeemistä haluttu täydellisyys on aina puutteellinen. Tällaista luonnollisten lukujen aritmetiikkaa kuvailevaa aksiomaattista järjestelmää ei voida todistaa loogisesti ristiriidattomaksi tai täydelliseksi millään matematiikan keinoilla. Toisin sanoen matematiikkaa ei voida osoittaa ristiriidattomaksi matematiikan avulla. Tätä kutsutaan Gödelin epätäydellisyysteoreemaksi.

Hilbert toivoi, että klassisen matematiikan ytimen formalisoinnin jälkeen saadun systeemin loogisen ristiriidattomuuden näyttämiseksi tarvittaisiin vain ”finiittisiä” keinoja, jotka eivät sisältäisi täydellisen äärettömyyden käsitettä. Kuitenkaan edes kaikki systeemissä sisäisesti formuloidut keinot eivät riitä sen ristiriidattomuuden osoittamiseksi.

2.4. Matematiikon apologia

1800-luvun lopun ja 1900-luvun alun matemaatikon ajattelumaailmaa ehkä parhaiten kuvasi englantilainen matemaatikko G. H. Hardy (1877–1947) kirjassaan *A Mathematician's Apology* (1940). Analyysin ja lukuteorian saavutuksista tunnettu Hardy halusi kirjoittaa kirjan matematiikan ulkopuolelta, jotta hän henkilökohtaiseen elämäänsä peilaten saisi oikeutuksen elämäntyöhönsä matemaatikkona. Kirjan nimi ei suinkaan viittaa anteeksipyyntöön, vaan juuri tämän oikeutuksen puolustuskirjoitukseen. 62-vuotias Hardy totesi kykynsä ja luovuutensa matemaatikkona heikentyneen siihen pisteeseen, että hänen uransa matemaatikkona oli ohi. Matematiikan ammattilaiselle on melankolinen kokemus huomata kirjoittavansa matematiikan filosofiasta, sillä matemaatikon tehtävänä on todistaa uusia teorioita, luoda uutta ja tuoda jotain lisää matematiikkaan, eikä puhua siitä, mitä itse tai muut matemaatikot ovat jo tehneet. Hardy halusi kirjoittaa kirjan uudelle sukupolvelle, jotta hänen filosofiaansa matematiikan tekemiseen ymmärrettäisiin paremmin.

Ensimmäisen ja toisen maailmansodan välisenä aikana alkoi yleistyä ajatus siitä, että matematiikan ja monen muun tieteen hyödyllisyys perustui vain siihen, löytyykö tutkimukselle jokin käytännön sovellus, kuten atomipommi. Pasifistina tunnettu Hardy puolusti matematiikan kehittämistä pelkästään ”puhtaan matematiikan” ansioiden vuoksi, eikä hyväksynyt soveltavaan matematiikkaan turvautumista. Matematiikkaa tehdään vain matematiikan vuoksi. Useista kirjan teemoista keskeisin on matematiikan kauneus, jota Hardy vertaa runouteen ja kuvataiteeseen. Erityisen kaunista matematiikkaa hänen mielestään on sellainen matematiikka, jolla ei ole minkäänlaista käytännön sovellusta todellisuudessa. Hardy väittää, että jos hyödyllinen tieto määritellään tietona, joka todennäköisesti edesauttaa ihmiskunnan materiaalista hyvinvointia nyt tai lähitulevaisuudessa siten, että pelkkä älyllinen tyydytys on irrelevanttia, niin suurin osa korkeammasta matematiikasta on tällöin hyödytöntä. Hän oikeuttaa puhtaan matematiikan tavoittelua sillä, että tämän kokonaisvaltainen ”hyödyttömyys” tarkoittaa, ettei sitä pystytä väärinkäyttämään tekemään pahaa.

Ennennäkemättömien äärettömien joukko-opillisten menetelmien hyödyntäminen ja halu oikeuttaa niiden hyödyllisyys muovasivat vahvasti 1900-luvun alun matematiikkaa ja logiikkaa. Lautman kirjoitti useita logiikkaan liittyviä artikkeleita vuosina 1933–1937, jotka osaltaan vaikuttivat suuresti myös oman aikansa ranskalaiseen filosofiaan, ja sitä kautta nykyajan ajatteluun. Merkittävä osa nykyajan filosofiasta jää ymmärtämättä, jos ei tunneta sen yhteyttä tähän matematiikan ja logiikan vallankumoukseen. Esimerkiksi Hardyn kirjoitukset matematiikan itsetarkoituksellisuudesta heijastuvat vahvasti vielä nykyajankin akateemiseen kulttuuriin. Yleissivistyksellä on edelleenkin arvonsa, vaikka sitä ei voitaisi suoraan rahallisesti tai välittömän hyödyllisyyden nimissä mitata.

3. Platonismin puolustukseksi

3.1. Matemaattisten teorioiden todellisuus

Platonismi on matematiikan metafyysinen näkökulma, jonka mukaan abstraktit objektit, kuten luvut tai joukot, ovat olemassa ihmisistä tai kielestä, ajatuksista tai käytännöistä riippumatta. Ne eivät ole olemassa samaan tapaan kuten esimerkiksi pöydät tai tuolit ovat olemassa, fyysisinä olentoina ajassa ja avaruudessa, eivätkä ne aiheuta asioiden tapahtumisia, mutta ne ovat silti olemassa. Antiikin merkittävimmän filosofin Platonin (427–347 eaa.) mukaan nimetty filosofinen koulukunta on eräs tulkinta hänen alkuperäisestä filosofiastaan. Usein matematiikassa puhutaan totuudesta, eli onko jokin asia totta vai ei. Esimerkiksi voidaan väittää, että on olemassa luku kuuden ja kahdeksan välillä. Vaikuttaa siltä, että väite on tosi ja etsitty luku on seitsemän. Platonismin mukaan tämä tarkoittaa, että on olemassa objekti, luku seitsemän, vaikka se onkin aistihavainnon ulkopuolella. Jotta väitettä voitaisiin osoittaa todeksi, niin tällaisen abstraktin objektin on oltava olemassa. Tästä seuraa, että platonismi ei tyydy löyhään olemassaolon käsitteeseen luvuista tai muista abstraktimmista käsitteistä, vaan haluaa olemassaolon tarkoittavan täsmällistä olemassaoloa. Seitsemän on siis olemassa samalla tavalla kuin pöytä tai tuoli ovat olemassa, tosin tässä tapauksessa ajan ja avaruuden ulkopuolella. Olemassaolossa on siis kyse enemmänkin sijainnista eli siitä, missä jokin asia on kuin siitä, onko jokin asia ylipäätään olemassa vai ei.

Eräs suurimmista platonismin vaikeuksista on käsitys matemaatikosta, eli aika-avaruuden toimijasta, joka on kuitenkin täysin kykenevä toimimaan myös ajan ja avaruuden ulkopuolella olevien abstraktien objektien kanssa. Aikaisemmin todettiin, että abstraktit objektit ovat kausaliteetin ulkopuolella, eli ne eivät voi aiheuttaa asioiden tapahtumisia. Kuitenkin matemaatikko voi todistaa jonkin matemaattisen väitteen todeksi, eli tehdä jotain abstraktia todeksi. Tämä suhde reaalisen ja abstraktin maailman välillä on hyvin vaikea selittää platonismin näkökulmasta. Lautmanin mukaan matemaattinen todellisuus ei ole luotu siinä teossa, missä järki luo tai ymmärtää, vaan siinä teossa, missä se ilmentyy meille ja missä sitä ei kuitenkaan voida kuvata täysin riippumatta matematiikasta, joka on sen korvaamaton tukipylväs ja peruste (Lautman 2011, 28).

Toisin sanoen ajatellaan, että matemaattisen teorian todellinen kehitys tuo esille skeeman yhteyksistä tukien tiettyjä abstrakteja ideoita, jotka ovat vallitsevia matematiikan suhteen. Nämä ideoiden tukemat yhteydet voivat tulla matematiikan ulkopuolelta, mutta lopputuloksena on kuitenkin puhtaasti matemaattinen teoria. Siksi matemaattinen logiikka ei ole Lautmanin mukaan missään erityisasemassa ongelmanratkaisussa, vaan se on vain yksi teoria muiden joukossa. Niitä ongelmia, joita se tuo esille ja joihin se antaa ratkaisun, voi löytää melkein identtisenä mistä vain muualta matematiikan ulkopuolelta.

Oikeuttaakseen tämän näkökulman matemaattisten teorioiden synnystä Lautman ottaa tarkasteluun asioiden sisimmän olemuksen ja olemassaolon välisen suhteen ongelman. Klassinen metafysiikka on aina yrittänyt löytää väylän yksittäisen entiteetin sisimmästä olemuksesta olemassaoloon omilla dialektisilla keinoillaan. Intuitionismi ja formalismi ovat jättäneet tämän debatin perinteisen filosofian piiriin, mutta olennaisesti filosofiseen ongelmaan linkittyy matematiikassa esimerkiksi äärellisen ja äärettömän ongelma sekä transfiniittinen induktio.

Äärellisen ja äärettömän ongelmaan liittyen määrittelemme platonismin rinnalle toisen näkökulman abstraktien objektien olemassaolosta. Matemaattinen nominalismi on samaa mieltä platonismin kanssa siitä, että matemaattiset väitteet ovat tosia, mutta ne ovat parhaiten ymmärrettävissä väitteinä todellisista asioista, kuten tuoleista ja pöydistä. Laskutoimitus $6 * 8 = 48$ nominalismin mukaan tarkoittaa siis, että jos meillä on kuusi kahdeksan alkion, kuten tuolin, joukkoa, niin meillä on yhteensä 48 tuolia. Luvut ovat siis vain linkkejä todellisten asioiden lukumääriin, eikä lukuja itsenäisinä abstrakteina objekteina ole olemassa, vaan ne tarvitsevat aina tosimaailman vastineen vierelleen.

Näin nominalismiin voidaan liittää se tapa, miten pienille lapsille opetetaan matematiikkaa. Lukujen käsitteitä ei suinkaan esitetä abstrakteina objekteina, vaan ne linkitetään aina tosielämän esineisiin. Tyypillisessä ihmisen kokemuksessa ensimmäisissä matematiikan tehtävissä omenoita on korissa tietty määrä, josta sitten syödään osa ja kysytään, kuinka monta koriin jää. Kuitenkin nominalismiin alkaa muodostua ongelmia, kun kysytään tosielämän vastinetta monimutkaisemmille luvuille, kuten $\sqrt{-1}$. On helppo liittää kokonaisluvut (tai jopa murtoluvut) omenoihin, koska ne ovat selvästi rajattuja yksittäisiä esineitä, mutta on paljon vaikeampaa keksiä se esine, mikä linkittyy lukuun $\sqrt{-1}$. Toinen esimerkki on luku π, jonka arvoa ei voida esittää pelkästään numeroilla, joten nominalismille luvun π liittäminen johonkin konkreettiseen on mahdotonta. Platonismille luvut kuten $\sqrt{-1}$ tai π eivät ole ongelmallisia, sillä platonismissa luvut itsessään ovat olemassa (vaikkakin ajan ja avaruuden ulkopuolella). Näin platonismille ristiriidaton matemaattisen entiteetin määrittely riittää sen olemassaolon tukemiseksi, kun taas nominalismille on olemassa vain käytäntöön rakentuva olemassaolo.

Kuitenkin näille näkökulmille on yhteistä niiden laatima sisimmän olemuksen ja olemassaolon ongelma saman entiteetin suhteen. Jos nyt hylkäämme ajatuksen siitä, että ongelmaan voi syntyä ratkaisun skeema matematiikan ulkopuolelta, kuten klassisesta metafysiikasta tai filosofiasta, ja yritämme sen sijaan johtaa taustalla olevat puitteet matemaattisten teorioiden kehityksestä, niin päädymme hyvin erilaisiin lopputuloksiin. Kun reitti sisimmästä olemuksesta olemassaoloon on mahdollinen, niin se tapahtuu aina eräästä entiteetistä toisenlaiseen entiteettiin, kuten logiikassa ja matematiikassa yleisesti. Kolmion sisin olemus on sen kolme sivua. Tällöin kolmion olemassaololle välttämätöntä on, että sillä on kolme sivua. Metallinen tai keltainen kolmio voivat olla olemassa, mutta materiaali tai väri ei ole osa sen sisintä olemusta. Voidaan siis ajatella, että kolmion sisin olemus ja jokin olemassa oleva kolmio ovat myös eri entiteettejä.

Tulkinnanvaraisuus aksioomien systeemissä yrittää luoda yhteyden systeemin väitteiden rakenteellisten ominaisuuksien ja näiden väitteiden määrittelyjoukon välille (Lautman 2011, 30). Reitti sisimmästä olemuksesta olemassaoloon on siis tulos aksioomien systeemin rakenteesta, joka on omiaan rakentamaan uusia tulkintoja systeemistä. Havaitaan perustason tapa rakentua, esim. kolme sivua, jota voidaan tulkita sen olemassaolon ehtojen mukaan tietyille uusille entiteeteille, esimerkiksi funktioille, transmutaatioille tai luvuille, jotka tämä taso näyttää suorittavan. Sisimmästä olemuksesta olemassaoloon löytyvän reitin ongelma voidaan ehkä muotoilla abstraktisti, mutta vasta todellisen matemaattisen teorian kehityksessä sen ratkaisemiseen tarvittavat erittelyt voidaan määritellä tarkasti. Voi olla myös mahdollista saada johdettua matemaattisista teorioista niiden yhteyksien skeema, jolla tuetaan toisia loogisia, tarkemmin dialektisia, ideoita, kuten kokonaisuus ja osuus, täydellisyys ja epätäydellisyys tai sisäinen ja ulkoinen. Kuitenkin luontainen matemaattisten teorioiden olemassaolo tulee niiden osallisuudesta ideaalisessa todellisuudessa, joka on hallitseva matematiikan suhteen, mutta josta on mahdollista saada tietoa vain näiden teorioiden kautta.

Edellä useampaan kertaan mainittu yhteyksien skeema voi tuntua hieman hämärältä termiltä. Se kuitenkin pohjautuu siihen ajatteluun, että ne ideat, jotka tekevät teorian pohjalta siihen liittyvän objektiivisuuden tai todellisuuden, eivät ole teorian sisäisiä objekteja tai sen määrittelemiä käsitteitä. Joukko-opin taustalla olevat ideat eivät liity tiettyjen joukkojen määrittelyjoukkoon eivätkä itse joukon käsitteen määrittelyyn. Analyysin todellisuus ei liity reaalilukujen tai yhtälöiden objektiiviseen olemassaoloon. Lautman lähestyy teorioiden kehitystä yleensä kahden vastakkaisen käsitteen vuorovaikutuksista toisiinsa. Jokainen käsite vaatii toisen käsitteen rinnalleen, jotta teorian taustalla olevat ideat voidaan ylipäätään muodostaa, ja matemaattiset teoriat usein antavat meille ne työkalut, toisin sanoen yhteyksien skeemat, joilla näiden käsitteiden vuorovaikutukset sovitetaan yhteen.

3.2. Aksiomaattisuudesta ja dissosioitumisesta

Abstraktien teorioiden kehitys matematiikassa ja aksiomaattisten määrittelyiden tutkimus liittyvät usein yleistyksen idean palauttamiseen (Lautman 2011, 31). Aksioomat ovat sekä itsenäisten ajateltavissa olevien ehtojen systeemi erillään niistä matemaattisista entiteeteistä, joihin ne liittyvät, että laajin mahdollinen entiteettien luokka näiden toteuttamiseksi. Tämä laajennuksen näkökulma on joskus hyvin yhdistettävissä lajeihin ja tyyppeihin luokittelun kanssa niin, että pienimmän mahdollisen lajin sovittaminen laajimpaan mahdolliseen esiintyy myös abstraktien teorioiden perustuksessa. Lautman käyttää tästä esimerkkinä ranskalaisen matemaatikon Maurice René Fréchetin (1878–1973) kehittämää teoriaa metrisistä avaruuksista. Väitöskirjassaan *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (1906) Fréchet yleisti monet analyysistä tutut käsitteet, kuten raja-arvon ja jatkuvuuden, yleisiin avaruuksiin. Jotta voitaisiin paremmin ymmärtää Fréchet'n teorioita, tarvitaan muutama funktioanalyysin käsite (Tylli 2010, 4-31).

Ensin määritellään metriikka. Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *metriikka* X:ssä, jos

1. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$
2. $d(y,x) = d(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$
3. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ kun $d(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$

Tällöin (X, d) on joukko X varustettuna metriikalla d, ja sitä kutsutaan metriseksi avaruudeksi. Funktioanalyysissä joukko X on yleensä vektoriavaruus ja metriikka d on normin indusoima.

Normilla tarkoitetaan itseisarvon käsitteen yleistystä, eli vektorin pituutta. Se on kuvaus, joka asettaa jokaista lineaariavaruuden alkiota vastaamaan reaaliluvun. Tällöin normiavaruus on normilla varustettu lineaariavaruus, jonka määrittämiseksi täytyy esittää pari $(V, \|\cdot\|)$, missä V on lineaariavaruus ja $\|\cdot\|$ normi. Itseisarvo $|\cdot|$ on erityistapaus normista. Normiavaruudessa voidaan kahden vektorin $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{Y}$ välinen etäisyys määritellä normiksi $\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\|$.

Normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\|x_k - x_j\| < \varepsilon$$

aina kun $k \geq m_\varepsilon$ ja $j \geq m_\varepsilon$. Tällä tavalla analyysistä tutut *Cauchyn jonot* laajennetaan mihin tahansa metriseen avaruuteen, mutta tällöin ne eivät välttämättä suppene. Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos avaruuden E jokainen Cauchyn jono (x_n) suppenee avaruudessa E. Toisin sanoen on siis olemassa sellainen $y \in E$ siten, että $\lim_{n \to \infty} x_n = y$.

Täydellistä normiavaruutta $(E, \|\cdot\|)$ sanotaan *Banachin avaruudeksi*, ja *Fréchet'n avaruus* on Banachin avaruuden, normitetun täydellisen vektoriavaruuden, yleistys ilman normista johdettua metriikkaa. Esimerkiksi sileiden funktioiden, eli niiden funktioiden, joiden jokaisen kertaluvun derivaatta on jatkuva, avaruudet ovat Fréchet'n avaruuksia. Kirjassaan *Les espaces abstraits* (1928) Fréchet esittää abstraktien avaruuksien aksiomaattisen perustuksen peräkkäisten avaruuden käsityksien yleistyksien näkökulmasta. Hän määrittelee ensin D-avaruuksiksi metriset avaruudet, eli avaruudet joissa kahden pisteen välille voidaan asettaa luku esittämään niiden välistä etäisyyttä ja jotka toteuttavat metriikan ehdot. Sitten hän määrittelee L-avaruuksiksi sellaiset avaruudet, joissa alkioiden jonojen suppeneminen voidaan määritellä ilman metriikkaa. Luonnollisesti D-avaruudet ovat aina L-avaruuksia, mutta sama ei välttämättä päde toiseen suuntaan. Tämän jälkeen Fréchet esittää vielä kolmannen avaruuden, V-avaruuden, jonka määrittely ei vetoa edes suppenemisen käsitteeseen, vaan nojautuu pelkästään naapuruuden ja kertymisen käsityksiin. On mahdollista esittää, että L-avaruuksien luokka sisältyy kokonaan V-avaruuksien luokkaan.

Lautmanin mukaan näiden esimerkkien avulla näytetään, kuinka abstraktien avaruuksien aksiomaattinen tarkastelu voidaan tulkita yleistykseksi niistä. Aloitetaan jostain selkeästi määriteltävästä avaruuksista, joilla on tarkasti johdettuja ominaisuuksia, kuten täydellisyys tai metriikka. Sitten näistä avaruuksista poistetaan muutama ominaisuus, jolloin saadaan uusi, abstraktimpi avaruuksien luokka, joka sisältää enemmän avaruuksia. Tätä toistetaan, kunnes saavutaan johonkin mahdollisimman abstraktiin avaruuteen, joka kuitenkin sisältää suuren määrän selkeämmin määriteltävissä olevia avaruuksia.

Aivan toisenlaisen aksiomaattisen ajattelun merkityksen Lautman antaa käsitellessään matemaattisen kausaliteetin yleistämistä ranskalaisen matemaatikon Georges Bouligandin (1889–1979) töiden pohjalta (Lautman 2011, 32). Bouligandin mukaan todistus on kausaalinen, jos väitteen ja johtopäätöksen välinen relaatio on sellainen, että väitteen muotoilun supistaminen tekee johtopäätöksen epäpäteväksi. Todistus on siis yksinkertaisimmassa mahdollisessa muodossaan, mihin matematiikassa usein pyritäänkin. Tämän relaatio voidaan sitten käsittää sopivan laajassa matemaattisten tosiasioiden määrittelyjoukossa, joka määrää kyseisen relaation kausaalisuuden määrittelyjoukon. Toisin sanoen todistuksen yksinkertaisuus mahdollistaa sen, että sitä voidaan soveltaa mahdollisimman monessa eri tilanteessa. Esimerkiksi joukon idea tuo esille sen, että samasta relaatiosta tehdyt eri käsitykset noudattavat joukon muodostumisen lakeja. Nyt kausaalinen todistus toimii invarianttina eli käytännöllisesti muuttumattomana missä tahansa joukossa, mihin se sisältyy.

Bouligand korostaa kausaalisuuden vaikutuksia aksiomaattisen metodin implikoimaan matematiikan alustavien käsityksien uudistamiseen ja suuremman yleistämisen etsimiseen. Hänen mukaansa kaikkein yleisimpien pätevyyden ehtojen etsiminen määrätylle lauseelle, jolla on jo olemassa kausaalinen todistus, ei onnistu ilman jatkuvaa sen toteuttavien käsityksien uudelleentyöstämistä. Esimerkiksi Pythagoraan lauseen geometrisessä tulkinnassa suorakulmion sivuille piirretään neliöt ja todetaan, että kateettineliöiden alojen summa on yhtä suuri kuin hypotenuusaneliön ala. Tämä tulkinta on liian rajoittunut ja tekee tarpeettoman monimutkaiseksi sen kausaalisen tosiasian, että minkä tahansa hypotenuusalle annetun luvun neliö on kateeteille annettujen lukujen neliöiden summa. Näitä lukuja voidaan kuvailla aloina, mutta se ei ole määrittelylle välttämätöntä. Voidaan todeta, että kaikkein yleisimmän väitteen ajattelu on tarkoitettu valaisemaan vain sen toteuttavan välttämättömän yhteyden, tässä tapauksessa neliöiden pinta-alojen suhteet toisiinsa, joka osoittautuu tietyissä tapauksissa riittämättömäksi. Näin yleisyyden etsiminen ei liity millään tavalla yleistämiseen, vaan se ilmentyy tarpeellisen yhteyden etsimisen seurauksena.

Toisin sanoen matemaattinen tutkimus ei koostu yksittäisen sisällyttämisestä yleiseen, olipa kyse sitten abstraktien teorioiden perustuksesta tai välttämättömien yhteyksien etsimisestä. Sen sijaan se koostuu aineellisen tiedon edistymisen ehtoihin verrattavissa olevien kokonaisuuden osien erottamisesta eli dissosioitumisesta. Esimerkiksi äärettömyys on keskeinen käsite matematiikassa, mutta sitä ei kuitenkaan ole kyetty määrittämään kiistattomasti. Antiikin kreikan filosofi Aristoteles (384-322 eaa.) käytti dissosioitumista erottaessaan äärettömyyden kahteen eri luokkaan, koska hänen mielestään matemaatikko ei tarvitse tai käytä ns. aktuaalista äärettömyyttä (Kouremenos 1995, 1). Sen sijaan matemaatikko tarvitsee todistuksissaan vain mielivaltaisen pieniä rajallisia suuruuksia, joiden olemassaoloa hän kutsuu potentiaaliseksi äärettömyydeksi. Aristoteleen mukaan kaikki äärettömyyttä kohtaan esitetty kritiikki kohdistuu aktuaaliseen äärettömyyteen, kun taas potentiaalinen äärettömyys on se varsinainen todellisuuden perustava ominaisuus, josta on käytännön hyötyä esimerkiksi laskemisessa tai ajan kulumisen lukemisessa.

Lautmanin esittää esimerkin liittyen fysiikkaan (Lautman 2011, 33). Usein fysikaalinen kokeellinen läpimurto on seuraus ilmiön sisällä tehdystä dissosioitumisesta, missä havaitaan aluksi yksinkertaiselta vaikuttanut tosiasioiden mutkikkuus. Tämä kokeellinen dissosioituminen usein edeltää tai tapahtuu se jälkeen, kun vakiinnutetaan teoreettinen dissosioituminen havaintoa vastaavien käsityksien systeemissä. Esimerkiksi teoreettisessa fysiikassa dissosioitumista voi tapahtua sellaisesta toiminnasta, joka on täysin eristetty epäsuorasti yleisiin käsitteisiin hyväksytyistä kriittisistä olettamuksista. Ajan yksikäsitteisyyden dissosioitumisesta syntyi kritiikki sattuman käsitteestä ja mittaamisen kritiikki johti havaitsijan ja havaittavan näkökulmien dissosioitumiseen.

Esimerkkinä tästä problematiikasta voidaan esittää kaukaisten tapahtumien samanaikaisuus ja näiden mittaamisen ongelmat (Mansouri & Sexl 1977, 498-499). 1900-luvun vaihteessa tehtiin useita kokeita, joiden tavoitteena oli määrittää valon suhteellinen nopeus havaitsijan liiketilan mukaan. Nämä johtivat saksalaissyntyisen yhdysvaltalaisen fyysikko Albert Einsteinin (1879-1955) kuuluisaan erikoista suhteellisuusteoriaa koskevaan artikkeliin *Annalen der Physik* -lehdessä vuonna 1905. Einstein määritteli samanaikaisuuden olettamalla, että valon nopeus on sama havaitsijan liiketilasta riippumatta. Aika ei enää etene samalla tavalla kaikkien havaitsijoiden mielestä, vaan kullakin havaitsijalla on oma luonnollinen aikansa, joka etenee kaikkein nopeimmin, ja kaikkien liikkuvien koordinaatistojen aika näyttää kuluvan hitaammin. Suhteellisuusteorian avulla voitiin todeta, että aika ei ollut enää absoluuttinen kaikille, vaan ainut universaali vakio olikin valon nopeus.

Lautman esittää dissosioitumisen muodon, joka näyttää matematiikassa kriittisen pohdinnan ja tehokkaan luomisen välisen yhteyden (Lautman 2011, 34–42). Muutamalla esimerkillä aksiomaattisesti rakennetuista käsitteistä näytetään, kuinka yksinkertaiset ja alkeellisilta vaikuttavat aritmetiikan ja algebran käsitteet kätkevät sisäänsä hankalasti täsmennettävissä olevan logiikan ja matematiikan käsitteiden monimutkaisuuden ja lukuisuuden, joka on kuitenkin selvästi eriteltävissä näistä. Tällä tavalla esimerkiksi janan pituus on yhteydessä suuruuteen, jota se mittaa, mutta sen esitystapa on silti pelkkä numero, joka liitetään tähän suuruuteen sopimuksen mukaan. Klassisessa algebrassa itseisarvo sisältää idean lukujen järjestämisestä suuruuksiin ilman etumerkkiä. Tämän lisäksi sen avulla voidaan selvittää pisteen etäisyys origosta tai vektorin normi eli euklidinen pituus, jolloin se toimii hyvin erilaisissa määrittelyjoukoissa. Siirtyminen alkeellisista käsitteistä monimutkaisempiin abstrakteihin käsitteisiin ei estä itse erityisen sisällyttämistä yleiseen. Tällöin olemassa olevan yhtenäisyys on rakenne, joka toimii lähtökohtana sen ideoissa yhdistyneiden periaatteiden etsimiseen, joita tunnistamalla ja karsimalla päästään kohti yksinkertaisempaa ja perusteellisempaa matematiikkaa.

Matemaattisen idean dissosioitumisessa havaitut erilliset käsitteet pohjautuvat toisaalta tietynlaisten entiteettien ominaisluonteeseen ja toisaalta näiden entiteettien toimintaan suhteessa toisiin entiteetteihin. Se tosiasia, että joukossa lukuja joukon alkioilla on eri arvoja, on toisesta näkökulmasta vain lukujen luonteisiin liittyvä perusominaisuus. Se tosiasia, että yhtäsuuruuden relaatio, kuten mikä tahansa ekvivalenssirelaatio, määrittää kyseisen joukon jakamisen luokkiin (joista kukin sisältää vain yhden alkion) liittyy siihen rakenteeseen, minkä yhtäsuuruuden relaatio määrää joukolle. Lukujen moninkertaistaminen liittyy kokonaislukujen renkaan luontaisiin ominaisuuksiin. Toisaalta se tosiasia, että luvun kertominen vektorilla antaa vektorin, linkittyy siihen, että vektoriavaruus sallii numeeriset laskutoimitukset sisällään. Samalla tavalla luvun positiivisuus tai negatiivisuus on luvun perusluontainen ominaisuus, mutta itseisarvolla selvitetty luvun suuruus liittyy oikeutetusti suuruuden arvioitavuuden käsitteen rakenteelliseen hedelmällisyyteen. Matemaattisen entiteetin tai käsitteen luontaisten ominaisuuksien ja sen toiminnan mahdollisuuksien erittely liittyy platonismin sisimmän olemuksen ja olemassaolon ongelmaan saman entiteetin suhteen. Sisin olemus olisi käsitteen perusluontaiset ominaisuudet ja olemassaolo sen suhde ja toimintatapa toisia käsitteitä kohtaan.

Fréchet ja Bouligand liittivät yhteen aksiomaattisen abstraktion yleistyksen ideaan. Lautmanin mukaan yleistys on kuitenkin vain seuraus olennaisemmista syventymistä. Siinä, missä Bouligandin suhteen siinä on kyse tarpeellisen yhteyden etsimisestä, niin Fréchetin suhteen siinä on kyse analyysistä, jossa siirretään yleistyksen näkökulma toisarvoiseksi. Fréchet kuitenkin tiedosti tämän kirjoittaessaan siitä, kuinka mielenkiintoista on nähdä niinkin pelkistymättömän käsitteen kuin etäisyyden dissosioituminen luonnon käsitteisiin pituudesta ja matkasta, jotka ovat kuitenkin matemaattisesti hyvin erilaisia toisiinsa verrattuina.

4. Rakenne ja olemassaolo matematiikassa

4.1. Naiviin logiikan jälkeen

1900-luvun alun matematiikan perusteiden etsimisen ja matemaattisen logiikan tutkimuksen jatkeeksi Lautman kirjoitti useita esseitä matematiikan käsitteiden rakentumisesta ja olemassaolosta matematiikassa. Nämä esseet koottiin kirjaksi *Essais sur les Notions de Structure et d'Existence en Mathématiques* (1938; ks. Lautman 2011, Book II). Kirjan esipuheessa Lautman kertoo kirjan lähteneen siitä näkemyksestä liikkeelle, että matematiikan kehityksessä on syntynyt todellisuus, jonka kuvaamiseen ja tunnistamiseen vaaditaan matematiikan filosofiaa (Lautman 2011, 87-92). Suurimmassa osassa tapauksia matemaattinen analyysi paljastaa tästä todellisuudesta hyvin vähän ja sitäkin hyvin heikosti.

Itse asiassa Bertrand Russell, kehittäessään tautologian käsitettä, eliminoi täysin idean matematiikalle erityisestä todellisuudesta. Häntä seuranneille Wittgensteinille ja Rudolf Carnapille matematiikka oli vain kieli, joka on täysin erillään sen kuvaamasta sisällöstä. ”Vain empiiriset prepositiot viittaavat johonkin objektiiviseen todellisuuteen, ja matematiikka on vain muodollisten muutosten systeemi, jonka keinoin fysiikan tiedoille saadaan yhteydet toinen toisiinsa” (Lautman 2011, 87). Yksi syy tälle matematiikan todellisuuden progressiiviselle häviämiselle voi johtua deduktiivisen menetelmän käytöstä. Yritettäessä konstruoida kaikki matematiikan käsitteet pienestä määrästä aksioomeja sekä alkeellisista loogisista väitteistä näiden konstruoitavien teorioiden kvalitatiivinen ja olennainen luonne häviää. Lautmanin mukaan jäljelle jää vain mahdollisuus totuuden löytymisestä, joka ilmenee sen rakennelmien muodostamasta harmoniasta.

Lautman kuitenkin uskoi vahvasti matemaattisen todellisuuden positiiviseen tutkimukseen kuvaamalla matemaattisen todellisuuden ymmärtämisen ja järjestämisen (jota voi tehdä myös sen sisäisesti) suhdetta sen omaan rakenteeseen. Matematiikkaa muodostetaan kuin fysiikkaa: tutkimuksen kohteena olevat faktat ovat olleet läpi historian paradokseja, jotka reflektion edistyminen on tulkinnut ymmärrettäviksi vain jatkuvalla olennaisten käsitteiden merkitysten uudistamisella. Esimerkiksi irrationaaliluvut, kaikkialla jatkuvat mutta ei missään derivoituvat funktiot ja luvun π transsendenttisuus ovat kaikki tunnustettuja ja hyväksyttyjä käsittämättömästä faktan tarpeesta ennen, kuin niistä oli edes yritetty kehittää deduktiiviset teoriat. Näin koko matematiikan rakentaminen pienestä määrästä alustavia periaatteita ei yleisesti ottaen onnistu, ja matematiikan redusoiminen logiikkaan on mahdotonta.

Ranskalaisen filosofi Léon Brunschvicgin (1869–1944) mukaan kaikki apriorinen päättely kääntää ympäri mielen luonnollisen järjestyksen matemaattisessa havainnossa. Kirjassaan *Les étapes de la philosophie mathématique* (1912) Brunschvicg esitti, että sellaisten ainoastaan yksittäistä tajuntaa kiinnostavien keksintöjen ja ennen kaikkea pedagogiseen perinteeseen pohjautuvien diskurssin muotojen välillä matemaattinen filosofia rajaa alueen, jossa kollektiivista tiedon omaksumista tuotetaan tunnistamalla luovan älykkyyden näyttämä polku. Näin matemaattisen todellisuuden sisäiseen luonnehdintaan tarvitaan sekä älyn että loogisen täsmällisyyden liikehdintää, ilman että niitä sekoitetaan toisiinsa (Brunschvicg 1947, 459).

Tätä luonnehdintaa varten Lautman kokee tehtäväkseen käyttää rakenteellisena näkökulmana David Hilbertin metamatematiikkaa (Raatikainen 2003, 157–158). Hilbertin mielestä äärettömien joukko-opillisten menetelmien käyttö matematiikassa oli vaaratonta ja hyödyllistä, vaikka hän ei uskonut äärettömien joukkojen olemassaoloon. Näin hän erotti toisistaan äärellisen, luonnollisia lukuja koskevan alkeislukuteorian, ja äärettömän, ”kaiken matematiikan”, mukaan lukien äärettömän joukko-opin, sisältämän matematiikan. Lisäksi Hilbert erotti toisistaan reaalilauseet ja ideaalilauseet. Hänen mielestään vain reaalilauseet, kuten luonnollisten lukujen teorian kaavat ilman kvanttoreita, ovat merkityksellisiä ja puhuvat jostain todellisesta, ja kaikki muut lauseet ovat vain ideaalilauseita, vaikkakin nämä kuitenkin nopeuttavat laskutoimituksia sekä täydentävät ja yksinkertaistavat sekavaa formalismia. Vain ne lisäämällä matematiikkaan on mahdollista säilyttää klassisen logiikan lait, kuten kolmannen poissuljetun laki, myös matematiikan alueella. Finiittisestä ja sisällöllisestä näkökulmasta kolmannen poissuljetun lakia ei kuitenkaan pitäisi hyväksyä loogisesti ongelmattomana. Sen sijaan Hilbertin tavoitteena oli osoittaa, että lain soveltaminen matematiikassa on harmitonta ja kaiken kaikkiaan tarpeellista, kun halutaan luoda yhtenäinen matematiikka (Raatikainen 2003, 159).

Hilbertin ohjelmaksi kutsutaan hänen yritystään turvata matematiikan perusteet (Lautman 2011, 89–90). Ensiksi, koko ääretön matematiikka tuli formalisoida Fregen ja Russellin kehittämän uuden logiikan avulla, jolloin sen lauseita ja todistuksia voitaisiin tarkastella ulkoapäin metatasolla, pelkkinä äärellisinä merkkien jonoina, josta tulikin Hilbertin nimitys ”metamatematiikka”. Toiseksi, käyttämällä vain äärellistä matematiikkaa, olisi todistettava tämän suuren formalisoidun järjestelmän ristiriidattomuus sekä se, ettei ääretön matematiikka todista yhtään merkityksellistä, jo äärellisessä matematiikassa todistuvaa reaalilausetta. Tämä takaisi äärettömien joukko-opillisten menetelmien käytön äärellisen matematiikan näkökulmasta. Hilbertin mielestä mitään ratkaisemattomia ongelmia ei ole olemassa, sillä olisi irrationaalista, jos järki voisi esittää kysymyksiä, joihin ei kuitenkaan olisi vastausta. Täytyy siis olla mahdollista esittää sellainen joukko täsmällisiä sääntöjä, joita täysin mekaanisesti ja sokeasti soveltamalla mikä tahansa matemaattinen ongelma ratkeaa. Matemaattinen teoria saa arvonsa siis sen metamatemaattisista ominaisuuksista, joita sen rakenne havainnollistaa.

Aluksi matematiikan rakenteellinen ja dynaaminen käsitys vaikuttavat vastakkaisilta: Ensimmäisellä on tapana oikeastaan tarkastella matematiikkaa valmiina, ajasta riippumattomana kokonaisuutena, kun taas toinen päinvastoin ei erota sitä sen kehityksen väliaikaisista vaiheista. Ensimmäiselle teoriat ovat kuin kvalitatiivisesti toisistaan eroteltuja olioita, kun taas toinen näkee jokaisessa teoriassa rajattoman laajentumisen mahdollisuuden ja liitoksen toisiinsa, jolla älyn yhtenäisyys vakuutetaan. Hilbertin metamatematiikan avulla pystytään kehittämään matemaattisen todellisuuden käsitys, joka yhdistää loogisten käsitteiden pysyvyyden siihen ajatuksen liikkeeseen, missä teoriat elävät (Lautman 2011, 90–91). Tutkimalla matemaattisia teorioita jatkuvuuden ja täydellisyyden loogisten käsitteiden näkökulmasta, ajattelemalla nämä ideallisina tutkittua kohdetta kohtaan, voidaan kuvitella tietty täydellisten rakenteiden idea, joka on todistettavissa äärellisellä matematiikalla.

Tämä erottelu loogisen ongelman aseman ja sen matemaattisen ratkaisun välille ei useinkaan vaikuta kovin hyödylliseltä, koska sillä ei ole merkitystä tiedetäänkö teorian olevan mahdollisesti ristiriidaton, vaan pystytäänkö teorian ristiriidattomuus päättämään vai ei. Kuitenkin vaikuttaa mahdolliselta kuvitella muita loogisia käsitteitä, jotka ovat samalla tavalla mahdollisesti yhteydessä toisiinsa matemaattisessa teoriassa, ja jotka ovat sellaisia, että matemaattiset ratkaisut niiden aiheuttamiin ongelmiin voivat edellyttää äärettömän kertaluvun. Osittaiset ratkaisut, kesken jätetyt vertailut ja ryhmittelyä muistuttavat ratkaisuyritykset on lajiteltu saman teeman mukaiseen kokonaisuuteen, ja liikkeessään ne sallivat yhteyden tiettyjen abstraktien ideoiden välillä tekemiseen, jota Lautman kutsuu dialektiseksi vaikutukseksi. Tällainen dialektinen vaikutus on aina taustavaikuttajana kaikessa matemaattisessa toiminnassa, oli se sitten jonkin väitteen todistamista tai uuden matemaattisen teorian muotoilua.

4.2. Lokaali ja globaali

1900-luvun puolivälin matematiikan tutkimus voidaan jakaa kahteen eri koulukuntaan, lokaaliin ja globaaliin (Lautman 2011, 95). Lokaali tutkimus kohdistuu yksittäiseen, usein infinitesimaaliseen, todellisuuden elementtiin, josta se pyrkii määrittämään spesifisyyttään. Sitten, askel askeleelta, se muodostaa tarpeeksi vahvoja yhtäläisyyksiä näiden eri elementtien välille, jotta kokonaisuuden idea syntyisi niiden rinnastuksista. Globaali tutkimus taas pyrkii kuvaamaan kokonaisuutta riippumatta niistä elementeistä, joista se koostuu, näin määrittäen matemaattisia entiteettejä vain niiden funktionaalisten ominaisuuksien pohjalta. Globaali tutkimus nojaakin usein siihen ajatukseen, että matemaattisten entiteettien käyttötarkoitus ja hyödyllisyys ovat parempia takeita niiden yhtenäisyydestä kuin niiden rakentuminen useista eri palasista.

Analyyttisen funktion käsite perustuu sen globaaliin, tai vähintäänkin paikalliseen, määriteltävyyteen. Jotta voitaisiin paremmin ymmärtää analyyttisen funktion käsite ja siitä seuraavat Cauchyn-Riemannin yhtälöt, niin määrittelemme aluksi kompleksisen derivaatan käsitteen, joka muistuttaa pinnallisesti hyvin paljon tavallisen reaalisen derivaatan määritelmää (Astala 2016, 20, 24). Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ epätyhjä ja $f\colon A \to \mathbb{C}$ jokin kompleksifunktio. Jos z_0 on joukon A sisäpiste, niin funktiolla f on kompleksinen derivaatta $f'(z_0)$ pisteessä z_0, mikäli on olemassa erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Tässä h on kompleksiluku ja raja-arvo vaaditaan kompleksisessa mielessä. Koska z_0 on A:n sisäpiste, niin $z_0 + h \in A$ kunhan h on kyllin pieni. *Analyyttinen funkti*o on funktio, joka voidaan paikallisesti esittää suppenevana potenssisarjana. Toisin sanoen funktio on analyyttinen, jos se on differentioituva jokaisessa sen joukon pisteessä.

Tarkastellaan funktiota $f\colon A \to \mathbb{C}$, jossa $A \subset \mathbb{C}$. Tällöin reaaliosa $u = \operatorname{Re} f$ ja imaginaariosa $v = \operatorname{Im} f$ ovat funktioita $A \to \mathbb{R}$ ja $f = u + iv$ eli

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Kompleksiesitys $f = u + iv$ on analyyttinen funktio kompleksilukujen joukossa, jos jokaisessa joukon A pisteessä f on differentioituva. *Cauchyn–Riemannin yhtälöt* ovat välttämätön ehto sille, että kompleksifunktiolla on derivaatta. Voidaan myös osoittaa, että jos ensimmäinen derivaatta on olemassa, funktiolla on samalla kaikkien kertalukujen derivaatat. Cauchyn–Riemannin yhtälöt voidaan kirjoittaa kompleksisessa muodossa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Näin määriteltynä jokaisessa pisteessä olevan derivaatan avulla analyyttinen funktio ei ole vielä globaalista näkökulmasta määritelty käsite, mutta se johtaa integraalin teoriaan, joka taas on hyvinkin globaali käsite. Cauchyn kehittämän integraalikaavan avulla pystytään laskemaan analyyttisen funktion arvo annetun alueen sisäpisteessä z, jos funktion arvot tunnetaan rajatun alueen reunalla. Näin kaikkialla differentioituvuuteen liittyvät ehdot eivät ole enää pääroolissa, eikä funktio ole enää määritelty sen määrittelyalueen jokaisessa pisteessä olevien ominaisuuksien kautta, koska nyt nämä ominaisuudet koskevat koko aluetta.

Riemannin globaalin analyyttisen funktion käsitteen vastakohdaksi muodostui Karl Weierstrassin lokaalin käsite, sillä hänen mukaansa analyyttinen funktio on oleellisesti määritelty kompleksisen pisteen z_0 ympäristössä (Lautman 2011, 96-97). Analyyttisen jatkuvuuden menetelmä auttaa muodostamaan askel askeleelta kokonaisen määrittelyjoukon, jossa funktio on ”analyyttinen”. Menetelmässä otetaan uudeksi keskuspisteeksi piste ensimmäisen ympyrän sisältä, jolloin sekä uusi sarja, että uusi ympäristö muodostuvat. Uusi sarja kasvattaa ensimmäistä, jos sen arvot vastaavat toisiaan ympäristöjen yhteisessä alueessa. Näin sarjaa voidaan kasvattaa kaikkiin suuntiin, kunnes se joissain lähiympäristön pisteissä alkaa hajaantua. Tällä menetelmällä saatu määrittelyjoukko ei ole rajoitettu etukäteen, vaan se saadaan tuloksena lokaalien laskutoimitusten äärettömistä sarjoista. Weierstrassin teoria kehitettiin tarkoituksellisesti Cauchyn ja Riemannin käsitteille vastakkaiseksi, ja siinä missä toiset matemaatikot pitävät näitä teorioita erottamattomina, joidenkin mielestä näitä teorioita ei saa missään nimessä sekoittaa.

Uuden matematiikan kehityksessä usein erilaiset teoriat muodostuvat toistensa vastakkaisiksi, jolloin on tärkeää yrittää saada molemmille yhtä vakaa teoriapohja. Saksalainen matemaatikko Felix Klein (1849–1925) teki vuonna 1872 huomattavia tutkimuksia geometrian alalla. Geometria Kleinin mukaan oli sellaisten kuvioiden ominaisuuksien tutkimus, jotka säilyvät, kun niiden avaruudelle tehdään tietynlaisia muutoksia luoden näin ns. muutosryhmän. Täten euklidinen geometria on niiden kuvioiden ominaisuuksien tutkimus, jotka säilyvät, kun avaruuden pisteille tehdään jokin siirtymä. Näin havaitaan, että juuri nämä siirtymät säilyttävät kaikki kuvioiden ominaisuudet, erityisesti niiden metriset ominaisuudet. Affiini eli ”jalostettu” geometria tutkii niitä ominaisuuksia, jotka säilyvät lineaarikuvauksessa, kuten janojen yhdensuuntaisuus, ja projektiivinen geometria tutkii ominaisuuksia, jotka säilyvät keskeisprojektioissa tasolta tasolle, kuten neljän samalla suoralla olevan pisteen muodostama kaksoissuhde. ”Mitä tahansa ovatkaan ne ominaisuudet, joilla invarianssia suhteessa muutosryhmään tutkitaan, Klein-avaruuden olennaisin ominaisuus on aina niiden homogeenisyys” (Lautman 2011, 97). Tämä ryhmä toimii samalla tavalla kaikissa avaruuden pisteissä.

Tätä vastoin Riemannin avaruudet ovat täysin vailla minkäänlaista homogeenisyyttä. Riemannin kehittämä geometria on osa ns. differentiaaligeometriaa, joka käyttää differentiaalilaskennan menetelmiä käyrien ja pintojen tutkimiseen tasossa tai useampiulotteisessa avaruudessa. Siinä määritellään eräänlainen "metriikka", joka mahdollistaa mm. käyrien pituuksien ja erilaisten variaatio-ongelmien asettelun ja ratkaisemisen. Kaarevuuden käsitteellä on tärkeä rooli Riemannin geometriassa, sillä se sisältää informaatiota Riemannin avaruuksien globaaleista ominaisuuksista ja topologiasta. Yksi modernin Riemannin geometrian tärkeimmistä ongelmista onkin globaalien ominaisuuksien selvittäminen tämän kaarevuuden lokaaleista ominaisuuksista.

Jokainen Riemannin avaruus kuvataan lausekkeella, joka määrittää kahden pisteen infinidesimaalisen etäisyyden neliön (Lautman 2011, 98). Tätä lauseketta kutsutaan neliölliseksi differentiaalimuodoksi ja se yleistää euklidisen kaavan kahden pisteen väliselle etäisyydelle $ds^2 = du_1^2 + du_2^2$. Riemannilainen ds^2 kahteen ulottuvuuteen on muotoa

$$ds^2 = g_{11}du_1^2 + g_{12}du_1du_2 + g_{21}du_2du_1 + g_{22}du_2^2$$

ja yleinen kaava n-ulotteiseen monikertaan on muotoa

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{n} g_{ij}du_idu_j.$$

Kaavassa g_{ij} on mielivaltainen kerroin, joka vaihtelee pisteestä pisteeseen. Lopputuloksena kaksi naapurihavaitsijaa voivat löytää Riemannin avaruuden pisteet lähiympäristöstään, mutta eivät voi löytää niitä suhteessa toisiinsa ilman jonkinlaista uutta käytäntöä. Jokainen ympäristö on siis pieni osa euklidista avaruutta, mutta kahden ympäristön välinen yhteys ei ole määritelty ja se voidaan näin tehdä äärettömän monella eri tavalla. Yleisin tapa kuvata Riemannin avaruutta on amorfinen kokoelma vierekkäin aseteltuja paloja, jotka eivät kuitenkaan ole yhteydessä toisiinsa.

Näin Kleinin geometrian ja Riemannin geometrian välille syntyy huomattava eroavaisuus. Kuitenkin Riemannin avaruudelle voidaan antaa ns. euklidinen yhteys, jolloin on mahdollista paikantaa askel askeleelta havaitsijat toisistaan. Jos täysin lokaali näkökulma unohdetaan, niin universumista kokonaisuudessaan ei saada mitään tietoa.

Lokaalin ja globaalin näkökulman välillä on edelleen aukko, ja tästä eroavaisuudesta yhtenäisen kenttäteorian ongelmat syntyvät, kuten Albert Einstein esitti vuonna 1929 (Lautman 2011, 98). Universumin metriikka antaa joukon osittaisdifferentioituvia yhtälöitä, joita Einstein pyrki ratkaisemaan ilman koko avaruuden singulariteettia, eli vääristymää, jossa suureet ovat äärettömään suuria ja eivät käyttäydy tunnettujen fysiikan lakien mukaan. Tämä olisi tarvinnut tietoa aika-avaruuden topologiasta, kuten onko se suljettu vai avoin. Näin lokaalien fysiikan lakien etsintää ei voida erottaa kosmologisesta ongelmasta. Ei voida sanoa, että toinen edeltää toista, sillä ne ovat erottamattomasti sekoittuneet toisiinsa. Globaali vuorovaikutus ei ole lokaalin vuorovaikutuksen jatke, ja lokaalin ongelman ratkaiseminen tarvitsee syvällisempää tietoa universumin rakenteesta.

Tämän kaksijakoisuuden havaitseminen aiheuttaa matemaatikolle luonnollisesti tarpeen etsiä synteesiä (Lautman 2011, 101-102). Jonkin edistyneen kehityksen luomien elementtien kykenemättömyys aikaansaada globaaleita luonteenpiirteitä omaavia entiteettejä antaa tarpeen löytää kokonaisuuden topologisen rakenteen heijastumia sen osien ominaisuuksista. Toisin sanoen voidaan aloittaa joukosta, jonka rakenne on tunnettu ja tämän jälkeen etsitään niitä ehtoja, joiden täytyy toteutua kaikille tämän joukon alkioille. Toinen vaihtoehto olisi aloittaa jostain määrästä tiettyjä ominaisuuksia omaavia alkioita ja yritetään löytää niiden muodostamista joukoista näiden rakenteiden lokaaleja ominaisuuksia. Molemmissa tapauksissa yritetään muodostaa yhteyksiä kokonaisuuden rakenteelle ja sen osien ominaisuuksille, joissa kokonaisuutta järjestävä vaikutus ilmenee.

Uskomme, että idea rakenteen joukon alkioita järjestävästä toiminnasta on täysin ymmärrettävä matematiikassa, vaikka sen soveltaminen muihin aloihin tekisi siitä melkein järjettömän. Matematiikan oppijalle liian harmoniset järjestelmät voivat olla vaikeita oppia, mutta tämä ei välttämättä johdu osien käskynalaisuudesta ja alistumisesta sille kokonaisuuden idealle, joka niitä järjestää, vaan siitä menetelmästä, jolla tämä kokonaisuus on järjestelty ja miten se esitetään. Järjestely voi vaikuttaa havaitsijasta esimerkiksi naiivilta antropomorfismilta, inhimillisten ominaisuuksien liittämistä abstrakteihin olioihin, tai mystiseltä epämääräisyydeltä, ns. käsien heiluttelulta. Matematiikka antaa keinot tehdä loogisesti eksakteja määritelmiä, mutta usein tämän määritelmän keinot vaikuttavat hankalasti ymmärrettäviltä, vaikka lähtökohta ja lopputulos olisivatkin täysin selkeitä. Tämä pätee erityisesti opettaja-oppilas-suhteessa, jossa toiselle täysin itsestään selvät käsitteet ja määritelmät yritetään saada toiselle selkeiksi. Usein tähän ei kuitenkaan riitä opettajan aika tai pätevyys, jolloin tyydytään vain valmiiden ratkaisumallien toistamiseen ad nauseam.

4.3. Kohti absoluuttista

Ranskalainen filosofi René Descartes (1596–1650) oli yksi merkittävimmistä niin sanotun uuden ajan filosofian harjoittajista. Hän oli analyytikko, jonka tavoitteena oli löytää varma pohja varmalle tiedolle järjestelmällisesti epäilemällä kaikkea mahdollista. Aikakauden mukaisesti Descartes pohjasi kaiken varman tiedon täydellisyyden Jumalaan. Koska Jumala on täydellinen, on selvää, ettei Jumala voi pettää tai käyttää vilppiä, koska kaikessa siinä olisi epätäydellisyyttä (Lautman 2011, 125-126). Descartes oikeuttaa loogisen etusijan muihin teorioihin verrattuna idealle täydellisyydestä suhteessa ideaan epätäydellisyydestä. Epätäydellinen olio voidaan ainoastaan ymmärtää viittaamalla täydelliseen olioon, jonka olemassaolo syntyy näin itsestään. Kun tiedustellaan sitä ajattelukyvyn alkuperää, että olisi mahdollista kuvitella jokin täydellisempi kuin oma itse, niin on hyvin selvää, että tämä kyky on saatu joltain itseä täydellisemmältä. Toisin sanoen epätäydellisyys ei pelkästään edellytä täydellisyyttä, vaan se myös mahdollistaa epätäydellisyyden harkinnan kautta kyvyn määritellä täydellisen olion ominaisuudet. Täydellisen ja epätäydellisen erottava etäisyys näin piirtyy epätäydellisen olion luonteeseen.

Ajattelu kohoaa kohti absoluuttista liikkeellä, jonka askeleita muokataan sen lopputuloksen mukaan, mikä on nähtävissä alkupisteestä. Epätäydellisen olion rakenne ottaa omakseen sen todellisen merkityksen: sen monimutkaisuus tai epäselvyys ovat vain poikkeamia suhteessa sen loppumuodon läpinäkyvään yksinkertaisuuteen. Näin kohoaminen kohti täydellisyyttä näyttää menevän läpi päinvastaisessa järjestyksessä aikaisemmin tapahtuneen hajoamisen askeleet. Viittaus nousuun kohti absoluuttista antaa mahdollisuuden tutkia epätäydellisen luonteen omaavia matemaattisia entiteettejä, ja niiden nousua kohti täydellisyyttä askelilla, joista jokainen häivyttää jotain epäpuhtautta siihen asti, kunnes viimeinen askel korjaa jokaisen epäkohdan entiteetissä. Tämä on hyvin erilainen näkökulma verrattuna normaaliin aritmetiikkaan, joka on pohjimmiltaan jonkin laskutoimituksen toistamista ikuisuuteen asti. Lautmanin esittämissä esimerkeissä teorian lopputuloksen olemassaoloa kehitetään ja käsitetään koko ajan itse nousun välttämättömänä ehtona.

Keskeisimpänä esimerkkinä Lautman esittää Galois’n teorian. Nuorena kuollut ranskalainen matemaatikko Évariste Galois (1811–1832) kiinnostui aikaisempien matemaatikoiden töistä viidennen asteen yhtälöiden ratkaisukaavojen etsimisessä. Niiden innoittamina hän laati omaperäisen Galois'n teorian, jonka avulla voitiin viimein löytää konkreettisia viidennen asteen yhtälöitä, joilla ei ole ratkaisukaavaa (Stewart 2004, 85). Sen lisäksi, että teorialla voitiin selittää miksi viidennen asteen yhtälöillä ei ole yleistä ratkaisukaavaa, sen avulla voitiin selittää myös miksi joitain neljännen tai alemman asteen yhtälöitä on mahdollista ratkaista käyttäen vain tavallisimpia laskutoimituksia ja juurilausekkeita.

Galois'n teorian pohjana on algebran käsitteet kunta ja kuntalaajennus, jotka määritellään seuraavaksi (Häsä & Rämö 2012, 177-180). Kunta on joukko, johon on määritelty neljä tavallisia laskulakeja noudattavaa peruslaskutoimitusta, ja toimitusten tulosten pitää kuulua samaan joukkoon. Formaalimmin muotoiltuna kahdella laskutoimituksella varustettu joukko $K(+,\cdot)$ on *kunta*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

1. Kaikilla x, y, z on $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. K:ssa on nolla-alkio 0 niin, että kaikilla x on $x + 0 = x$
3. Kaikilla x on K:ssa vasta-alkio $-x$ siten, että $x + (-x) = 0$
4. Kaikilla x, y on $x + y = y + x$
5. Kaikilla x, y, z on $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
6. Kaikilla x, y, z on $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

7. K:ssa on ykkösalkio 1 siten, että kaikilla x on $1 \cdot x = x$
8. Kaikilla x paitsi 0:lla on K:ssa käänteisalkio x^{-1} siten, että $x \cdot x^{-1} = 1$
9. Kaikilla x, y on $x \cdot y = y \cdot x$

Määritelmässä käytetään vain kahta laskutoimitusta, mutta vähennyslasku ja jakolasku voidaan määritellä näiden avulla. Kuntalaajennuksen idea taas on löytää kunnalle jokin isompi kunta, johon alkuperäinen kunta myös kuuluu. Toisin sanoen jos K ja L ovat kaksi kuntaa siten, että K on L:n osajoukko ja K:n yhteen- ja vähennyslaskut ovat samat kuin L:ssä, niin K on L:n *alikunta*, L on K:n *laajennus* ja L/K on *kuntalaajennus*.

Galois määritteli Galois'n ryhmän polynomin nollakohtien tiettyinä permutaatioina (Stewart 2004, 90). Modernin matematiikan kielellä ilmaistuna jokaista kuntalaajennusta vastaa ryhmä automorfismeja, eli isomorfismi ryhmästä itselleen, jotka kiinnittävät lähtökunnan alkiot. Olkoot K ja L kuntia siten, että $K \subset L \subset \mathbb{C}$. Kunnan L *K-automorfismi* on isomorfismi $f: L \to L$, jolle pätee

$$f(k) = k \text{ kaikilla } k \in K.$$

Kuntalaajennuksen L/K *Galois'n ryhmä* $\Gamma(K, L)$ on kunnan L K-automorfismien muodostama ryhmä laskutoimituksenaan kuvausten yhdistäminen. Tämän ryhmän ominaisuuksien avulla Galois määritteli sen, miksei kaikille polynomeille ole olemassa ratkaisukaavaa.

Kuitenkin Lautmania kiinnosti erityisesti niin sanottu ensimmäinen Galois'n lause: Olkoon L/K normaali ja äärellisasteinen kuntalaajennus. Tällöin laajennuksen L/K Galois'n ryhmän $\Gamma(K, L)$ kertaluku on laajennuksen L/K aste eli

$$\#\Gamma(K, L) = [L/K].$$

Edellisen avulla voitiin ymmärtää sitä mitä Lautman kutsui pohjimmaisen kunnan epätäydellisyydeksi suhteessa annettuun polynomiin (Lautman 2011, 126-128). Tämä epätäydellisyys saadaan siitä, että tarvitaan n-asteinen kuntalaajennus, jotta päästäisiin kunnasta k kuntaan K, joka sisältää kaikki kyseisen polynomin juuret ja on mitattavissa yhtälöön liitetyn Galois'n ryhmän kertaluvun mukaan. Kun ”noustaan” kunnasta k kuntaan K, voidaan määritellä välikunta k' siten, että $k \subset k' \subset K$ ja

k':n epätäydellisyys vähenee, kun lähestytään kohti K:ta. Olkoon siis k' kuntalaajennus siten, että K on vain asteen m päässä suhteessa laajennukseen $k'(m < n)$. Galois'n teoria yksiselitteisesti liittää ryhmän G aliryhmän g' tähän välikuntaan, joka määritellään siten, että g' hylkää kaikki ne K:n alkiot, jotka ovat välikunnassa k' invariantteja ja permutoi vain integroitaviksi jäävät alkiot. Lisäksi tämän aliryhmän kertaluku on sama kuin laajennuksen aste m, jolla mitataan kunnan k' etäisyyttä kunnasta K. Itse asiassa asteella m mitataan kunnan k' epätäydellisyyttä ja kun lähestytään kohti kuntaa K, josta kaikki epätäydellisyys on hävinnyt, niin samalla välikuntiin liitettyjen ryhmien kertaluvut pienenevät. Koska kunnasta K on kaikki epätäydellisyys hävinnyt, niin se siis sisältää kaikki funktion $f(x)$ juuret ja se vastaa pienintä ryhmän G aliryhmää I, joka sisältää vain identtisen kuvauksen. Jos yhtälö $f(x) = 0$ on ratkaistavissa juurilausekkeilla, niin tällöin kunta K, joka sisältää kaikki ehdotetun yhtälön juuret, voidaan konstruoida perättäisillä suuruuksien liitoksilla $\sqrt[n]{a}$, missä a kuuluu joka kerta jo saatuun kuntaan. Tässä tapauksessa voidaan asettaa järjestykseen erityisillä ominaisuuksilla varustettu kasvava kuntien sarja $k \subset k' \subset k'' \ldots \subset K$ ja siihen termi termiltä vastaava laskeva ryhmien sarja $G \supset g' \supset g'' \ldots \supset I$.

Edellä havaitun perusteella voidaan implikoida lopullisen kunnan olemassaolo ja sen kokonaisvaltainen eroavaisuus pohjakunnasta. Lisäksi saadaan täsmällinen lukumäärä niille tasoille, jotka pitää suorittaa loppukuntaan pääsemiseksi. Lautmanin mukaan kaksi tärkeintä hetkeä nousussa kohti absoluuttista ovat löydettävissä Descartesin ajatuksista: ensinnäkin kyky nähdä se täydellinen olio, jonka olemassaolo implikoituu epätäydellisestä oliosta, ja toiseksi tietoisuus siitä, kuinka absoluuttisen saavuttamiseksi järkeilylle on annettu jossain määrin epätäydellinen olio ehdotettuna, eli epätäydellisestä oliosta on tehty eräänlainen malli, josta on häivytetty kaikki epäkohdat pois. Kokonaisuuden ja sen osien solidaarisuus, suhteellisten ominaisuuksien palauttaminen luontaisiksi ominaisuuksiksi ja kohoaminen epätäydellisyydestä absoluuttiseen ovat kaikki Lautmanin esittämiä pyrkimyksiä strukturaaliseen järjestämiseen, joka antaa matemaattisille entiteeteille liikkeen kohti sitä täydellistymää, jossa ne voidaan sanoa olevan olemassa. Mutta tämä olemassaolo ei ilmene vain siinä, mitä näiden entiteettien rakenne jäljittelee, eli niitä ideaaleja rakenteita, joihin ne antavat itseään verrattavan. Nimittäin entiteetin täydellistyminen synnyttää samaan aikaan uusia entiteettejä, joiden syntymiskaava löytyy syvimmän olemuksen ja olemassaolon välisistä loogisista relaatioista.

4.4. Matematiikka ja dialektiikka

Edeltävissä alkuluvuissa Lautman on esittänyt joko jonkinlaisen kahtia-jaottelun (ääretön/äärellinen, lokaali/globaali), jossa kumpikaan pareista ei ollut arvoltaan huonompi kuin toinen, tai sitten tietynlaiset ”tikkaat” alemmasta arvosta kohti ylempää arvokkuutta (Larvor 2011, 198-199). Joissain tapauksissa äärellinen matematiikka antaa syvemmän ymmärtämyksen äärettömästä matematiikasta, kuten esimerkiksi edellä, kun äärellisiä kokonaislukukuntia käytettiin rajattomasti numeroituvien luonnollisten lukujen tutkimukseen. Kuitenkin matematiikassa äärellisyys ei mitenkään ole jollain tavalla epätäydellinen versio äärettömyydestä, vaan nämä ovat täysin eri asioita. Samalla tavalla lokaali matemaattinen analyysi voi pohjautua globaaliin topologiaan, mutta analyysi ei ole jollain tavalla vähemmän määritelty tai riittämätön versio topologiasta. Lautman käyttää Descartesin perustelua siitä, kuinka hän omassa epätäydellisyydessään päätyi Jumalan käsitteeseen esittäessään nousun kohti absoluuttista. Descartesille ihminen ei ole dialektinen vastakohta Jumalalle, vaan ihminen on enemmänkin epätäydellinen kuva Jumalasta. Samanlaisella ajattelun kululla epätäydellisten kuntien pohdiskelu johtaa käsitykseen täydellisestä kunnasta.

Absoluuttiseen kohoamisen pohdinnan jälkeen Lautman aloittaa käsittelemään matemaattisen määrittelyalueen rakenteen synnyttämiä uusia matemaattisia olioita. Lautman ei suoranaisesti vastaa yleiseen kysymykseen matemaattisten entiteettien metafyysisestä olemuksesta, vaan hän on enemmänkin kiinnostunut siitä, miten jo olemassa olevasta matematiikasta voidaan muodostaa uusia matemaattisia rakenteita ja olioita. Hänen mukaansa synnyttävän struktuurin ja luodun objektin väliset roolit ovat suhteelliset, sillä uudet luodut objektit voivat itsessään saattaa alkuunsa joitakin uusia objekteja synnyttäviä struktuureja. Näillä struktuureilla on siis eräänlainen kaksinaisrooli. Tällaista vapaampaa, monimerkityksellisempää tarkoitusta

Lautman esittää sitä määrittelyä vastaan, jossa matemaattisella olemassaololla ei ole muuta merkitystä kuin aksiomaattisen systeemin johdonmukaisuus. Matemaattiset entiteetit eivät ole riippuvaisia niiden olemassaolosta näennäisesti mielivaltaisissa valinnoissa siitä, minkälaisia aksiomaattisia joukkoja päätetään tutkia. Sen sijaan matemaatikot luovat uusia matemaattisia struktuureja samalla, kun ne vastaavat joihinkin pinnan alla piileviin kysymyksiin perustuen matematiikan ulkopuolella olevaan dialektiseen järjestykseen.

Todellisuuden luonne, sen rakenne ja syntyperän ehdot eivät voi olla tunnettuja, paitsi jos palataan niihin ideoihin, jotka tiede pitää sisällään sen sisäisissä relaatioissaan. Tässä Lautman käyttää sanaa tiede, sillä hänen mielestään väite pätee sekä matematiikalle että fysiikalle (Lautman 2011, 192-193). Tiedemiehen, eli matemaatikon tai fyysikon, työn ja filosofin työn välinen erottelu riippuu siitä, miten erotellaan entiteetin tiedostamaton ja tiedostava oleminen. Tiedemies käyttää tiedostamattomia konsepteja, joista hän muodostaa tiedostamattomia totuuksia, kun taas filosofi tunnistaa ja tiedostaa näitä totuuksia ja löytää niistä vastaavia ontologioita. Tätä vertauskuvaa Lautman käyttää, kun hän erottelee toisistaan dialektiikan ja matematiikan.

Dialektinen ongelmanratkaisu matkii matematiikkaa sellaisella kokoelmalla hienovaraisia erikoislaatuisuuksia ja loogisia temppuja, että sen voi sekoittaa matematiikkaan itsessään. Kuitenkin dialektisten käsitteiden ja ideoiden täytyy löytää määritelmänsä matemaattisista esimerkeistä, jotka mahdollistavat taas idean kokonaan uusista määrittelyistä, rajoituksista ja poikkeuksista, joilla matemaattiset teoriat rakennetaan ja todennetaan. Eli jos tarkastellaan esimerkiksi niitä lukemattomia matemaattisia käsitteitä täydellisyydestä tai sulkeumasta, niin niistä voidaan tunnistaa matemaattiset versiot epätäsmällisistä (dialektisista) käsitteistä, joille monimutkaiset asiat ovat ainutlaatuisia ja riippumattomia (Larvor 2011, 200-202). Kuinka sitten erotetaan oikea matemaattisten vastausten etsiminen dialektisista kysymyksistä, ja siitä väärin ymmärretystä toiminnasta, missä dialektiikka matkii matematiikkaa? Matematiikan rajattomuudesta kertoo esimerkiksi se, että Euler luuli Königsbergin siltaongelman olevan matematiikan ulkopuolella, sillä sen vastaus perustui vain järkeilyyn eikä sen löytyminen perustunut mihinkään matemaattiseen periaatteeseen. Lautmanin mukaan dialektisen ja matemaattisen erottaminen perustui dialektisten ideoiden olennaiseen riittämättömyyteen eli siihen, ettei niitä voitu ymmärtää muuten kuin matemaattisen teorian rakentumisen kautta.

5. Lautmanin ajattelun vaikutukset

5.1. Eron filosofia

Oman aikansa matemaatikoiden ja filosofien piireissä mielipiteet Lautmanista olivat suurimmaksi osin epäsuotuisia (Duffy 2009, 356). Matemaatikot olivat ymmällään siitä, mitä Lautman tarkoitti filosofisella spekulaatiollaan tai sen hienovaraisuuksilla. Filosofit taas moittivat häntä siitä, mikä heidän mielestään oli tiettyä epätarkkuutta Lautmanin käyttäessä käsitettä dialektiikka. Ei nimittäin ollut selvää, viittasiko Lautman esimerkiksi antiikin Kreikkaan ja filosofi Sokrateen (469–399 eaa.) dialektiikalle tarkoittamaan menetelmään, jonka avulla erilaisia näkemyksiä tarkastellaan kaikista mahdollisista näkökulmista ja pyritään kumoamaan ne näkemykset, joihin ei ollut löydettävissä vakuuttavia perusteluja. Toisena vaihtoehtona saattoi olla vähän lähempänä Lautmanin omaa aikaa toiminut preussilainen filosofi Immanuel Kant (1724–1804), jonka mukaan dialektiikan tehtävä oli paljastaa ne ongelmat, jotka liittyvät järjen yritykseen ymmärtää aistihavainnon ulkopuolella olevia asioita, kuten kaikkeuden rajoja tai aineen loputonta jaettavuutta. Tai vielä kolmantena G.W.F. Hegelin käsitys teesin ja antiteesin dialektisesta suhteesta sekä Karl Marxin tulkinta niiden ratkeamattomuuden välttämättömyydestä.

Vasta melkein 30 vuotta Albert Lautmanin kuoleman jälkeen tähän dialektiikan käsitteeseen saatiin selvyyttä, kun ranskalainen filosofi Gilles Deleuze (1925–1995) otti siihen kantaa teoksessaan *Différence et répétition* (1968). Deleuze mobilisoi matematiikan luomaan ”pulmien laskennan”, joka perustui paljolti nimenomaan Lautmanin töihin. Deleuzen ”pulmalla” (*problème)* on kolme muotoa: sen laadullinen eroavaisuus ratkaisuista; sen transsendentaalisuus suhteessa niihin ratkaisuihin, joita se synnyttää pohjautuen sen omiin määrittäviin eli immanentteihin tekijöihin, ja sen läsnäolo sen kattavissa ratkaisuissa, jolloin pulma on sitä paremmin selvitetty mitä enemmän se on määritelty. Tällöin pulmallisuuden (dialektiseen) Ideaan perustuvat ideaalit liitokset havainnollistuvat reaalisina ratkaisuina. Ne taas perustuvat matemaattisiin teorioihin ja jotka kantautuvat pulmiin ratkaisujen muodossa

(Deleuze 1994, 178-9). Deleuze selittää tätä prosessia viittaamalla joihinkin matematiikan konseptuaalisiin pareihin, kuten jatkuvuuteen ja epäjatkuvuuteen, äärettömään ja äärelliseen sekä globaaliin ja lokaaliin. Tätä tarkoitusta varten Deleuze ammentaa esimerkkinsä differentiaalilaskennasta pohjautuen siihen ajatukseen, että vektorikenttien erikoispisteet, eli ne pisteet, joissa funktioilla ei ole derivaattaa, määräävät ratkaisukuvaajien lokaalit radat, eli niiden topologisen käyttäytymisen. Näitä erikoispisteitä voidaan kuvailla annetun matemaattisen problematiikan suhteen, esimerkiksi kuinka ratkaistaan kaksi hajaantuvaa sarjaa samassa kentässä, ja ratkaisujen suhteen, pulman ratkaisukuvaajien ratoina. Se, mikä itse asiassa lasketaan pulman ratkaisuksi, määräytyy pulman itsensä luonteenpiirteisistä ominaisuuksista, kuten pulman erikoispisteiden jakautumisesta systeemissä.

Deleuze ymmärtää differentiaalilaskennan pohjimmiltaan ”pulmien laskentana”, ja dynaamisten systeemien teorian kvalitatiivisena ja topologisena pulmien teoriana, jotka yhdistämällä vaikuttavat ratkaisevasti Deleuzen kompleksiseen logiikkaan (Deleuze 1994, 209-10). Hän muodostaa problemaattisen idean konseptin differentiaalilaskennasta, ja ajattelee Lautmanin tavoin matemaattisen luomisen olevan vain malli muiden inkarnaatioiden tyyppien joukossa (Lautman 2011, 203). Lautman rajasi aktualisoinnin filosofisen logiikan matematiikan puitteisiin, kun taas Deleuze laajensi viitekehystä filosofiaan, tieteeseen ja jopa taiteen tutkimukseen. Siinä, missä Lautmanille matemaattinen ongelma ratkeaa uuden matemaattisen teorian kehityksessä, Deleuzelle filosofisen ongelman ratkaisu tarjoutuu uuden konseptin rakentumisessa, vaikka tämä uusi konsepti olisi ominainen tai mallinnettu uudesta matemaattisesta teoriasta (Duffy 2009, 370).

Deleuze hylkää Lautmanin platonistisen idealismin ja sanoo, että ei ole olemassa ideoihin liittyvää ideaalista todellisuutta, vaan ideat muodostuvat käsitteellisten parien välisistä puhtaasti ongelmallisista suhteista. Idea on rakenne, joka muodostuu useista, ei-paikannettavissa olevista differentiaalisten elementtien yhteyksistä. Nämä yhteydet synnyttävät ongelmanratkaisussa reaaliset suhteet ja varsinaiset ehdot ratkaisulle (Deleuze 1994, 183). Käsitteellisten parien välisten suhteiden ongelmallinen luonne synnyttää problemaattisia ideoita, jotka sitten määräävät minkälaisia ratkaisuja näihin filosofisiin ongelmiin voidaan löytää. Lautmanin uusien matemaattisten teorioiden, joita tarjotaan ratkaisuiksi matemaattisiin pulmiin, luomisen prosessi vastaa Deleuzen käsitteiden rakentumista ratkaisuiksi filosofisiin ongelmiin.

Lautman hahmotteli kriittisen matematiikan ohjelman, jonka tarkoitus oli syrjäyttää aikaisempi matematiikan perustuksien pohdinta. Hänen mielestään tämä pohdinta omistautui liiaksi klassisen analyysin kritiikkiin. Lautman ehdotti logistista väitettä, että matematiikan kehitystä hallitsi apriorisesti logiikka, vastaan logiikan metafysiikan, ja edellytti matemaattisen luomisen filosofian kehittämistä (Duffy 2009, 373). Tähän edellytykseen Deleuze vastasi keskittymällä sen selvittämiseen, mitä Lautman tarkoitti loogisilla ideoilla, ja muotoili tämän uudelleen filosofisiksi käsitteiksi rakentamaan loogista skeemaa suhteiden teorialle, jolle ominaista on Deleuzen eron filosofia. Yleisesti ajatellaan, että ero on ajateltu dialektisesti jonkin erona jostakin (Deleuze 1994, 28). Dialektinen erokäsitys asettaa eron x:n ja y:n välille: ensin on x, sitten on y, ja vasta x:n ja y:n välissä on ero. Lisäksi dialektisen logiikan mukaan identiteetti muodostuu negatiivisen eron kautta: x:n identiteetti on sitä, että se on ei-y. Deleuzen mukaan ero sinänsä on ”puhdas”. Toisin sanoen se on ero ilman identiteettejä ja vastakkainasetteluja, kun taas erot olioiden välillä ovat empiirisiä, tuotettuja ja ei-puhtaita. Puhtaan eron ajattelu kysyy, mitä jostakin on tulossa, miten asioista tulee erilaisia ja miten ne liikkuvat ja muuttuvat kategorioiden ohi, aivan kuten Lautman kysyy matemaattisen luomisen prosessissa. Näin Lautmanin työt antavat pohjan sekä Deleuzen matematiikalle, että hänen spekulatiivisen logiikan metafysiikalleen.

5.2. Matemaattiset tapahtumat luokkahuoneessa

Perinteisesti matematiikan filosofia keskittyy matemaattisten olioiden luonteeseen, joka heijastuu vallitseviin teorioihin matematiikan oppimisesta. Sen tarkoituksena taas on saavuttaa perehtyneisyys ideallisiin matemaattisiin olioihin, kuten lukuihin, polygoneihin tai tangenttiin. Kuitenkin matemaattinen uuden luominen, kuten Lautman väittää, ei toimi samalla tavalla kuin kokemuksiin pohjautuva, kronologisesta järjestämisestä muodostuva tiedon hankinta (Lautman 2011, 204). Voidaan väittää, että matemaattisen *tapahtuman* käsite, toisin kuin *olion* käsite, tavoittaa paremmin matematiikan luonteen ja voi tarjota uudenlaisen näkökulman myös matematiikan opettamiseen (de Freitas 2012, 581).

Siinä missä matemaattisen objektin olemassaolo voi olla materiaalinen tai immateriaalinen, matemaattiset tapahtumat ovat aina lyhytaikaisia, materiasta riippumattomia sattumuksia, perustuen lähinnä toimintaan, liikkeeseen ja väliaikaisuuteen. Tällainen ajallinen ulottuvuus matematiikassa otetaan harvoin huomioon, sillä yleisesti ajatellaan matemaattisten olioiden olevan sen ulkopuolella. Filosofinen kysymys onkin se, mikä on matematiikan rooli aika-avaruudessa ja miten matematiikka voi tulla ja tulee siinä aineeksi. Tätä kysymystä harvoin tullaan esittäneeksi kasvatustieteessä, vaikka se onkin usein opiskelijoiden hämmennyksen lähde.

Opiskelijat kokevat vaikeaksi matematisoida väliaikaisia prosesseja tai tapahtumia, kuten matkoja kaupunkien välillä, mittamuutosten suuruusluokkia tai jonkin yksittäisen tapahtuman todennäköisyyttä (de Freitas 2012, 582). Kun vaikka niinkin yksinkertainen tapahtuma kuin kahden nopan heitto viedään matematiikassa kaksiulotteiseen viitekehykseen, jossa tapahtuma hajotetaan kahteen eri todennäköisyyteen ja näin asetetaan se oletus kyseenalaiseksi, että molempia noppia heitetään ja havainnoidaan samaan aikaan, huomataan, miten tällainen oikeutuksen muoto poistaa noppien heiton tapahtumasta aika-avaruudellisen ulottuvuuden ja asettaa tilanteen enemmänkin loogisen järjestyksen alaisuuteen kuin hetkelliseen järjestykseen. Ongelma syntyy siitä, että kysytään mitä eroa on todennäköisyydellä saada noppapari 5-6 ja 6-6. Havaitsija ei näe tässä eroa, kun taas matemaattisesti noppien tulosten järjestyksellä on ero ja näin pari 5-6 eroaa parista 6-5.

Jos matematiikkaa ajatellaan tapahtumien näkökulmasta, niin tämä antaa opettajille mahdollisuuden niputtaa yhteen matemaattisen tuloksen tarpeen logiikan ja keskittää huomionsa kysymykseen miten uutta matematiikkaa voisi esittää luokkahuoneessa (de Freitas 2012, 584). Tämä huomion uudelleen suuntaaminen tarvitsee perustakseen matematiikalle uuden opetusfilosofian, jonka avulla voitaisiin asettaa kyseenalaiseksi perinteiset oletukset matemaattisten universaalien, esimerkiksi neliön, suoruuden tai alkuluvun konseptien, asemasta. Näiden universaalien (globaalien) vastakohdiksi esitetään yleensä niiden yksittäisiä tai erityisiä (lokaaleja) ilmentymiä. Matematiikan opettaja piirtää vapaalla kädellä taululle ympyrän ja toteaa, että taululla ei ole ympyrä, vaan ympyrän matemaattisen universaalin erityinen ilmentymä, jota voidaan pitää vain tietynlaisena heijastumana siitä, mitä matematiikkaa ympyrä kätkee taakseen. Tämä väite kuitenkin alentaa piirroksen tai piirtämisen teon pelkäksi täydellisen käsitteellisen ympyrän kopioimiseksi, joka määrittää ja kuvaa minkä tahansa ympyrän perustavanlaatuista luonnetta. Voidaan väittää, että kyseinen tapahtuma ei ole matemaattisen universaalin ilmentymä, sillä siitä puuttuu se luovuus ja yleisen yksilöinnin teko, mikä edellyttää matematiikkaa. Tarkoituksena on määrittää matematiikka uudelleen tapahtumien paikkana, jossa luovuus ja mahdollisuus hallitsevat, ja jossa epävarmuus ja päämäärättömyys omaksutaan tapahtumien lähteinä mieluummin kuin hylätään kokonaan.

Matematiikka on pohjimmiltaan ongelmien ratkontaa ja näillä ongelmilla on samaan aikaan ontologinen ja looginen elementti, sillä ne tuovat esiin uutta samaan aikaan, kun ne selittävät mikä on mahdollista. Jos matemaattisia ongelmia käsitellään vain esteinä kohti ratkaisuja, niin tällöin ei oteta huomioon niiden ontologista luovuutta. Lautman huomioi ongelmien ja ratkaisujen yhteen liittämisen vaikeuden siinä, kuinka perinteisessä matematiikan ongelmanratkaisussa ongelma on annettu ja valmiiksi muotoiltu, ja ainut tehtävä ratkaisun tekijälle on vain muotoilla se siihen muotoon, että ongelmasta päästään eroon (Brown 1994, 189-190).

Oletukseen, että ratkaisu ongelmaan löytyy harjoittamalla kaikkia ratkaisun elementtejä esimerkein, sisältyy ongelmia, sillä ongelmanratkaisussa yleisesti on huomattava määrä kompetensseja, tunteita ja taitoja, joihin pitää kiinnittää huomiota, vaikka niistä ei olisi välitöntä hyötyä itse ongelman ratkaisuun. Se, että oletuksien todistamisen akti matematiikassa on saanut tietyn muodon, ei kuitenkaan kerro meille mitään siitä prosessista, jolla todistettavat oletukset on alun perin valittu työn alle. Ratkaistavien ongelmien valinta jää yleensä matematiikan opettajalle, ja opiskelijan rooliksi jää valmiiksi työstettyjen ratkaisumallien toisto ja matemaattisten universaalien ulkoa opettelu. Kuitenkin matematiikan ei pitäisi olla pelkkää ongelmien ratkontaa, vaan keksimisen tapoja sovitettuna ongelmien perusolemukseen, niiden problemaattiseen luonteeseen pulmina ja pulmalliseen luonteeseen probleemoina (Deleuze 1994, 161).

Matemaattinen ongelmien ratkonta näin teoretisoidaan tapahtumina, jolloin siihen saadaan sisällytettyä aivan uusia näkökulmia liittyen ajan kestoon, alkuperään, toimintaan, epävarmuuteen ja päämäärättömyyteen (de Freitas 2012, 597-598). Yhdessä nämä elementit antavat vaihtoehtoisen ajattelutavan ongelmanratkontaan. Siinä päämääränä ei ole niinkään johonkin lopputulokseen päätyminen, vaan enemmänkin jonkin uuden tuominen esille ja paitsi uuden myös ylipäätään jonkin uuden *esiin tuomisen* oppiminen. Ratkaisemisen kokemus on enemmän yhteenottoa oman järkevyyden rajojen kanssa ja uuden luomisen liikkeen mukana kulkemista, ja matemaattisen ongelman ratkontaa edellyttää ontologinen taso, joka ei välittömästi näy oppimisen kehityskaaressa.

6. Lopuksi

Tarve ja mahdollisuus koko tämän tutkielman kirjoittamiseen syntyi, kun Lautmanin kaikki keskeiset kirjoitukset julkaistiin yhtenä englanninkielisenä käännöksenä (Lautman 2011). Toki tähän vaikutti myös se, että hänet mainitaan yhtenä keskeisenä lähteenä moniin nykyaikaisiin matematiikan filosofian teorioihin. Suurin osa Lautmanin pääkirjoituksista julkaistiin jo vuonna 1938, kun hän oli 30-vuotias. Kuusi vuotta myöhemmin, toisen maailmansodan pyörteissä Lautman teloitettiin. Ei ole siis epäselvää, että Lautmanin työt jäivät pahasti kesken ja, kuten monet 1900-luvun vaihteen matematiikan filosofit, hän kärsi näistä ratkaisemattomista vaikeuksista suuresti. Miksi hänen työnsä olivat sitten niin vaikuttavia ja minkälainen suhde niillä oli matemaattisiin teorioihin ja matemaattiseen ajatteluun?

Yksi tapa vastata tähän kysymykseen on kiinnittää huomiota siihen, miten Lautman viittaa Martin Heideggeriin vuonna 1939 ilmaistessaan epäröintinsä kahden näkökulman välillä (ks. Lautman 2011, 200-202). Ensimmäisen näkökulman mukaan matemaattisen kehityksen pitäisi perustua intuitioon, jossa nähtäisiin uusi tapa liittää yhteen kaksi vastakkaista käsitettä, tai jossa tehtäisiin tilaa toiselle vastakohdalle teoriassa, jonka perustana on sitten vastaavasti toinen vastakohta, ja tästä luotaisiin uusi hyvin määritelty matematiikka. Toisen näkökulman mukaan matematiikan pitäisi suunnata ratkaisunsa enemmän avoimiin ongelmiin matematiikan alueessa, eikä katsoa suoraan ns. ideaaliseen todellisuuteen. Kuitenkin matematiikan todellisuus pakottaa käyttämään näitä vastakkaisia ideoita, jotka filosofiassa voidaan todentaa paremmin. Näihin kahteen näkökulmaan perustuvat erisuuntaiset mallit matematiikan historiassa, mutta nähtävästi Lautman ei osannut päättää, kumpaa näkökulmaa hän kannattaa. Tämä väliinputoajan rooli selittää osaltaan kenties myös sitä, miksi Lautman viittaa niin moneen matemaatikkoon ja filosofiin kehittäessään ja esittäessään omia ideoitaan.

Historiallisesta näkökulmasta Lautmanin platonismi havainnollistaa hyvin, miten useat eri platonismin alat menestyivät Hilbertin ohjelman epäonnistumisen jälkeen. Matematiikan filosofian näkökulmasta, koska Lautman ei keskittynyt matematiikan perusteisiin, vaan enemmänkin teorioiden elävään liikkeeseen, niin hänen teoksensa toivat esille nykyaikaisen käänteen matematiikan filosofiassa kohti käytännön kysymyksiä. Lisäksi ne ovat juuri kasvatustieteissä niitä kysymyksiä, jotka kiinnostavat. Paljon lukeneena ja useita eri tieteenaloja hallitsevana kirjoittajana Lautman ansaitsi ja ansaitsee edelleen tulla tutkituksi, sillä hän oli selvästi edellä omaa aikaansa.

Lähteet

Astala, Kari; *Kompleksianalyysi I*, luentomoniste, Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos 2016, http://wiki.helsinki.fi/download/attachments/197664042/Kompleksianalyysi2016.pdf. Viitattu 11.5.2017.

Boole, George; *Mathematical Analysis of Logic*, Philosophical library, Cambridge 1847

Boole, George; *Investigation of the Laws of Thought*, Dover publications, New York 1854

Brouwer, L. E.; *Intuitionism and formalism*, Bulletin-American mathematical society 37:1, 2000

Brown, Stephen I.; *The Problem of the Problem and Curriculum Fallacies*, julkaisussa *Constructing mathematical knowledge: Epistemology and mathematics education*, Ernest, Paul (toim.), The Falmer Press, Lontoo 1994

Brunschvicg, Léon; *Les Etapes de la philosophie mathematique*, Presse Universitaire de France, Pariisi 1947

Deleuze, Gilles; *Difference and Repetition*, Columbia University press, New York 1994

Descartes, Rene; *Teokset II*, Gaudeamus, Helsinki 2002

Duffy, Simon; *Albert Lautman*, julkaisussa *Deleuze's philosophical lineage*, Jones, Graham & Roffe, Jon (toim.), Edinburgh University press, Edinburgh 2009

Frege, Gottlob; *Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought*, julkaisussa *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1937*, Van Heijenoort, Jean (toim.), Harvard University Press, Cambridge 1967

Frege, Gottlob; *The Foundations of Arithmetic*: *a logico-mathematical enquiry into the concept of number*, Northwestern University Press, Illinois 1980

de Freitas, Elizabeth; *The Mathematical Event: Mapping the Axiomatic and the Problematic in School Mathematics*, Studies in Philosophy and Education 32, 2013

Hardy, G. H.; *Matemaatikon apologia*, Terra Cognita, Helsinki 1997

Hästö, Peter; *Matemaattinen ongelmanratkaisu suomalaisissa kouluissa*, Oulun yliopiston LUMA-keskus 2011, https://ouluma.fi/2011/02/matemaattinen-ongelman-ratkaisu-suomalaisissa-kouluissa. Viitattu 21.2.2017.

Häsä, Jokke, Rämö, Johanna; *Johdatus abstraktiin algebraan*, Gaudeamus, Helsinki 2015

Johnson, Phillip E.; *The Genesis and Development of Set Theory*, The Two-Year College Mathematics Journal 3:1, 1972

Kleene, Stephen C.; *The Work of Kurt Gödel*, The Journal of Symbolic Logic 41:4, 1976

Kouremenos, Theokritos; *Aristotle on mathematical infinity*, väitöskirja The Ohio State University, Columbus, Ohio 1995, https://etd.ohiolink.edu/!etd.send_file?accession=osu1487930304685193. Viitattu 24.5.2017.

Larvor, Brendan; *Albert Lautman: Dialectics in mathematics*, julkaisussa *Foundations of the Formal Sciences VII: Bringing together Philosophy and Sociology of Science*, François, Karen, Löwe, Benedikt, Müller, Thomas, Van Kerkhove, Bart (toim.), College Publications, Lontoo 2011

Lautman, Albert; *Mathematics, ideas and the physical real*, the Continuum International Publishing Group, Lontoo 2011

Lehtinen, Matti; *Matematiikan historian luentoja*, Matematiikkalehti Solmu 2000, http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/histluennot.pdf. Viitattu 21.2.2017.

Mansouri, Reza, Sexl, Roman U.; *A Test of Special Relativity: I. Simultaneity and Clock Synchtonization*, General Relativity and Gravitation 8:7, 1977

Raatikainen, Panu; *Analyyttinen filosofia*, Filosofia.fi LOGOS-ensyklopedia 2007, muokattu 2014, http://filosofia.fi/node/2353. Viitattu 18.5.2017

Raatikainen, Panu; *Formalismin rajat*, niin & näin 2, Tampere 2005

Raatikainen, Panu; *Hilbert's program revisited*, Synthese 137.1, 2003

Russell, Bertrand, Whitehead, Alfred North; *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge 1910

Schoenfeld, Alan H.; *Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics*, ZDM Mathematics Education 39, 2007

Stewart, Ian; *Galois Theory*, Chapman & Hall, 2004

Tylli, Hans-Olav; *Funktioanalyysin peruskurssi*, luentomoniste, Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos 2010, https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/87265589/FApk.pdf. Viitattu 8.5.2017.

Wilson, Robin; *Euler's combinatorial mathematics*, Bulletin of the British Society for the History of Mathematics 23, 2008