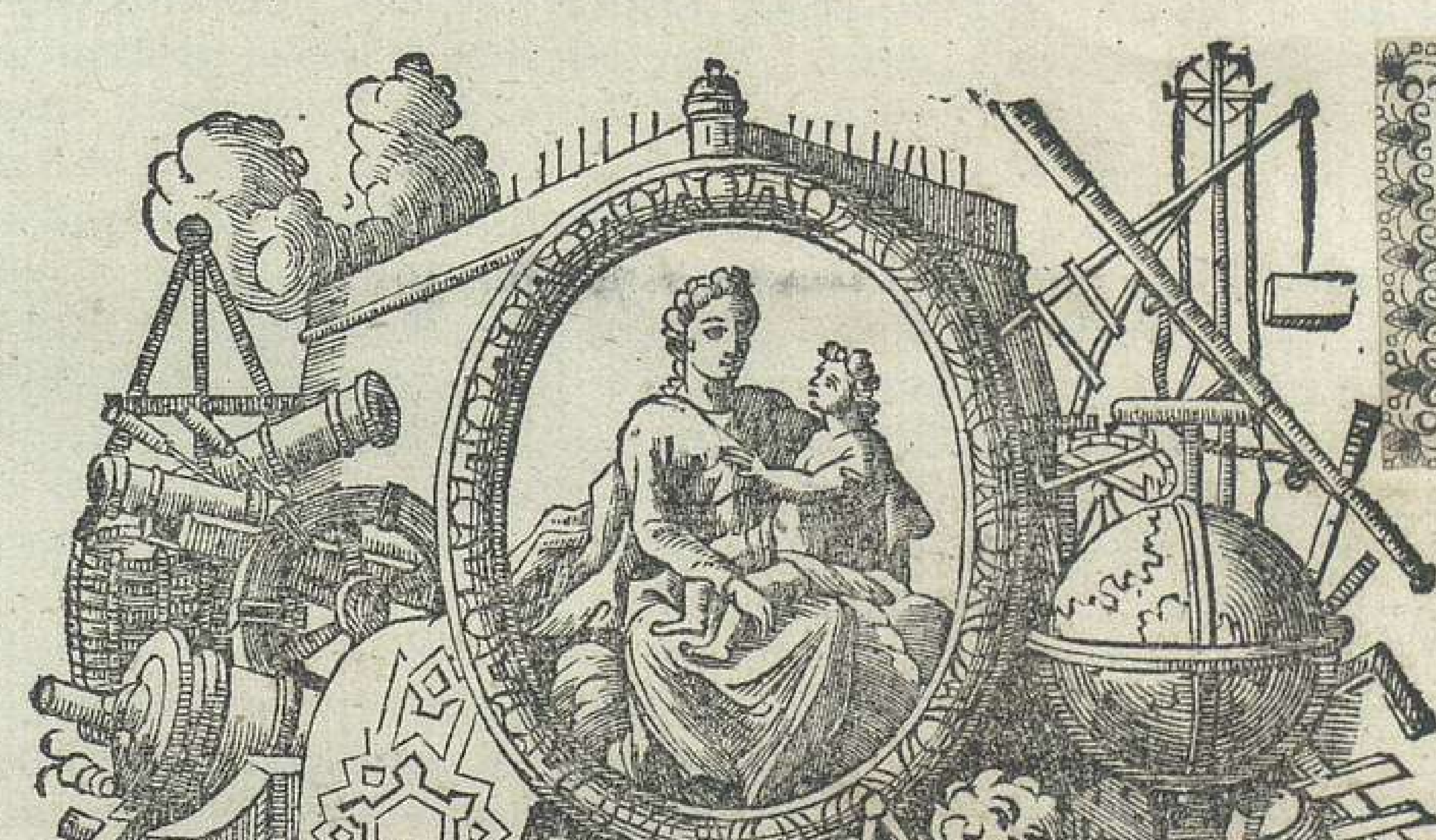
DE LA METHODE
D'OBSERVER
EXACTEMENT SUR MER
LA HAUTEUR DES ASTRES.

PIECE QUI A REMPORTE' LE PRIX
proposé par l'Academie Royale des Sciences
pour l'année 1729.

Par Monsieur BOUGUER, *Professeur Royal en Hydrographie au Croisic, & Membre de l'Academie Royale de Bordeaux.*



A PARIS, RUE S. JACQUES,
Chez CLAUDE JOMBERT, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXIX.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

Dado á la Acad.a de Guardias-Marinas por D.n Jph Carbonel
en 1786

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre : A nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, Salut. Notre bien amé & feal le *Sieur Jean-Paul Bignon*, *Conseiller ordinaire en notre Conseil d'Etat*, *& Président de notre Académie Royale des Sciences*, Nous ayant fait très-humblement exposer, que depuis qu'il nous a plû donner à notredite Académie, par un Réglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences, qui font l'objet de ses exercices ; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnez au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat du 13. Août 1713. Et désirant donner au Sieur Exposant toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre utiles au Public les travaux de notredite Académie Royale des Sciences, Nous avons permis & permettons par ces Présentes à ladite Académie, de faire imprimer, vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéissance, par tel Imprimeur qu'elle voudra choisir, en telle forme, marge, caractére, & autant de fois que bon lui semblera, *toutes ses Recherches ou Observations journaliéres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées* ; comme aussi *les Ouvrages, Mémoires ou Traitez de chacun des Particuliers qui la composent*, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître sous son nom, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression ; & ce pendant le tems de *quinze années* consécutives, à compter du jour de la datte desdites Présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre Royaume ; comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun desdits Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Académie ; en tout ni en partie, par extrait, ou autrement, sans le consentement par écrit de ladite Académie, ou de ceux qui auront droit d'eux : à peine contre chacun des contrevenans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de sondit Imprimeur : de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interêts ; à condition que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour : que l'impression de chacun desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie ; & qu'avant de les exposer en vente, il en sera mis de chacun deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur Daguesseau ; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ladite Académie, ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desd. Présentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desd. Ouvrages, soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le 29 jour du mois de Juin, l'an de grâce 1717, & de notre Regne le deuxiéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, FOUQUET.

Il est ordonné par l'Edit du Roy du mois d'Août 1686. & Arrêt de son Conseil, que les Livres dont l'impression se permet par Privilege de Sa Majesté, ne pourront être vendus que par un Libraire ou Imprimeur.

Registré le présent Privilege, ensemble la Cession écrite ci-dessous, sur le Registre IV. de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, p. 155. N. 205. conformément aux Réglemens, & notamment à l'Arrêt du Conseil du 13. Août 1703. A Paris le 3. Juillet 1717.

Signé, DELAULNE, *Syndic.*

Nous soussigné Président de l'Académie Royale des Sciences, déclarons avoir en tant que besoin cedé le présent Privilege à ladite Académie, pour par elle & les differens Académiciens qui la composent, en jouir pendant le tems & suivant les conditions y portées. Fait à Paris le 1. Juillet 1717. *Signé*, J. P. BIGNON.

DE LA MÉTHODE D'OBSERVER EXACTEMENT SUR MER LA HAUTEUR DES ASTRES.

——— Oculosque sub astra tenebat.

Virg. Mar. Ænei. Lib V.

LORSQUE l'Academie Royale des Sciences propose aux Sçavans de toutes les Nations, de déterminer *quelle est la meilleure Méthode d'observer les hauteurs sur Mer, par le Soleil & par les Etoiles, soit par des instrumens déja connus, soit par des instrumens de nouvelle invention*, Elle montre dans cette rencontre, comme dans toutes les autres, l'extrême attention qu'elle a pour l'utilité publique, & pour la perfection des Arts. Elle ne pouvoit pas choisir en effet de matiere plus importante, & qui interressât davantage les Marins. Car réduits en Mer à ne pouvoir trouver que la seule latitude, avec un peu de précision, les Pilotes ne ſçavent point trop ce qu'ils doivent penſer des inſtrumens dont ils ſe ſervent ; & il ne paroît pas non plus que les Hydrographes aïent pris beaucoup de ſoin de les en inſtruire. Heureuſement rien n'eſt plus propre à porter les Sçavans à faire tous leurs efforts, pour tâcher de ſupléer à ce défaut, que l'invitation que fait aujourd'hui l'ACADEMIE. Je me ſuis auſſi laiſſé entraîner par l'eſperance, peut-être, trop flateuſe, de pouvoir mériter les ſuffrages de cette célébre Compagnie : mais je ne propoſe mes idées, qu'après les avoir examinées avec le dernier ſcrupule ; & qu'après avoir fait attention, que le Tribunal devant lequel j'oſe parler, diſtingue le vrai du faux, à ſes moindres caracteres.

§. I.

On peut diviſer en deux eſpeces différentes, tous les inſtrumens qu'on peut emploïer ſur Mer, pour obſerver la hauteur des Aſtres. Les premiers, qui paroiſſent être d'un uſage beaucoup plus commode à terre, ont un fil à plomb, ou bien ils prennent d'eux-mêmes, par leur peſanteur, une ſituation horiſontale. Nous avons de ce nombre le quart de cercle ordinaire des Aſtronomes, l'aſtrolabe, l'anneau aſtronomique, l'Hémiſphere nautique de *Michel Cognet*, &c. Les autres inſtrumens, comme le bâton aſtronomique de *Gemma*, l'arbaleſtrille, le quartier Anglois, &c. ſont ceux qui ont beſoin d'horiſon & qui ne peuvent ſervir qu'en Mer ; parce que l'Obſervateur eſt obligé, pour les ajuſter, de prendre pour ligne horiſontale, le raïon viſuel tiré de ſon œil à la ſéparation aparente de la Mer & du Ciel. C'eſt de ces derniers inſtrumens dont on ſe ſert depuis aſſez long-tems dans la Marine, mais peut être s'eſt on déterminé un peu trop-tôt en leur faveur ; car eſt-il certain qu'on ne pourroit pas à l'aide d'une bonne ſuſpenſion, garantir les premiers des plus grandes agitations du vaiſſeau ? Ce doute nous engage à examiner principalement les inſtrumens de la premiere espece; ceux qui prennent d'eux-mêmes leur situation. Nous ferons ensuite nôtre choix : Et afin de ne rien omettre sur le sujet dont il s'agit, nous ajouterons une seconde Partie, dans laquelle nous parlerons des corrections, dont la hauteur a besoin.

PREMIERE PARTIE.

Examen des Instrumens, qui sont les plus propres pour observer en Mer la hauteur des Astres.

CHAPITRE PREMIER.

Description des Instrumens qui portent avec eux leur horison; & premierement de l'Astrolabe.

§. II.

SI on examinoit d'abord la maniere de suspendre les Instrumens de la premiere espece, & si on trouvoit qu'on ne le peut pas faire d'une maniere assez parfaite, on pourroit se dispenser de parler ensuite de ces sortes d'Instrumens. Mais comme nous nous proposons toujours d'en dire quelques choses, nous croïons qu'il est plus à propos de ne travailler à leur suspension, qu'après que nous aurons choisi celui qui est le plus exact & le plus commode. Les Figures 1, 2, 3, 4 & 5. représentent à peu près tous ces Instrumens dont on s'est servi, ou dont on pourroit se servir dans la Marine. Le premier est l'astrolabe des Pilotes, bien différent des trois astrolabes des Astronomes, qui ne sont autre chose que des Planispheres, qu'on attribuë à *Ptolomée*, à *Gemma*, & à *Royas*. L'astro- Fig. 1.

labe des Marins est un gros cercle de cuivre de 8 ou 9 pouces de diametre, dont la circonférence est partagée en quatre parties égales par les deux diametres KL & HI; & dont chaque partie est divisée en 90 degrez. Il a de plus une allidade ou regle mobile BD apliquée au centre C, & qui porte à ses deux extremitez, deux pinnules B & D. On suspend cet instrument par la boucle A; & dirigeant ensuite l'allidade BD vers l'astre, on trouve la hauteur marquée en F ou en E.

§. III.

Il n'est pas nécessaire d'expliquer comment on graduë cet instrument; mais il est à propos de dire un mot d'un défaut considérable que nous avons remarqué dans la construction de tous ceux que nous avons vû. C'est qu'au lieu de placer les deux pinnules vers les deux extremitez de l'allidade, en mettant entre elles le plus grand éloignement qu'il est possible, les Pilotes les faisoient placer au contraire vers le centre à environ deux pouces de distance l'une de l'autre. Le Pere *Fournier* qui autorise cet usage dans son *Hydrographie*, veut qu'on s'y conforme, afin que le centre de gravité de l'instrument ne soit point sujet à changer de place lorsqu'on fait tourner l'allidade; ou pour me servir des propres termes de ce bon Pere, *afin que l'allidade ou regle qui porte les pinnules, soit insensible en quelque situation qu'elle soit, au respect du poids de l'Instrument* Mais il est certain qu'aussi-tôt que l'allidade est bien en équilibre, autour du centre C, on peut la faire tourner, sans craindre que son centre de gravité change de place, ni que celui de tout l'Instrument en change aussi. Il n'y a que le centre d'oscillation qui ne reste pas toujours dans le même endroit. Mais comme il est démontré que ce centre est toujours situé dans tous les corps, sur la ligne droite qui passe par leur point de suspension & par leur centre de gravité, ce centre ne doit faire simplement que monter ou descendre un peu, le long du diametre K L, lorsqu'on fait tourner l'allidade ; & ainsi ce doit être précisement la même chose, que s'il restoit toujours dans le même endroit.

§. IV.

Pour nous, nous soupçonnerions que les Pilotes n'aprochoient ainsi les deux pinnules l'une de l'autre, qu'afin d'avoir ensuite plus de facilité à diriger l'allidade vers l'Astre. Mais ils ne remarquoient pas que cette facilité portoit préjudice à l'exactitude. Ils dirigeoient, il est vrai, plus aisément l'allidade : mais ce n'étoit que parce qu'ils se contentoient de le faire avec moins de justesse ; ou que parce qu'ils voïoient moins bien ensuite l'erreur qu'ils pouvoient commettre. En effet si dans un grand astrolabe, les deux pinnules sont, par exemple, éloignées l'une de l'autre de 16. pouces, on ne pourra pas en dirigeant l'allidade se tromper de 3 ou 4 minutes, sans qu'on s'en aperçoive aussi-tôt : car le raïon de lumiere qui passe à travers d'une des pinnules, au lieu de venir tomber exactement sur le milieu de l'autre, en tombera à un sixiéme ou à un septiéme de ligne, & cette petite quantité commence à être sensible. Mais ce ne seroit plus la même chose, si on raprochoit les deux pinnules, & qu'on les mît à quatre ou cinq fois moins de distance l'une de l'autre : il est évident qu'il faudroit alors, que l'erreur fût quatre ou cinq fois plus grande, pour qu'elle se manifestât aussi sensiblement. C'est pourquoi il n'y a point de doute, qu'on ne doive toujours mettre entre les pinnules, la plus grande distance qu'il est possible.

De l'Anneau Astronomique.

§. V.

La seconde figure représente l'anneau astronomique, Fig. 2.

qui est un gros anneau de cuivre, qu'on suspend par la boucle A, comme l'astrolabe; mais qui a un petit trou en B, par lequel on fait passer la lumiere du Soleil; & cette lumiere venant se projetter en D, dans la partie interieure de l'anneau, marque la hauteur de l'Astre. Le petit trou B doit être éloigné du point de suspension A, d'environ 45 degrez ou de la huitiéme partie de la circonférence, afin que l'Instrument puisse servir à observer les grandes & les petites hauteurs avec la même exactitude. On voit aussi assez que la surface interieure de la demie circonférence GDH, qui est sujette à recevoir les raïons de lumiere, doit être divisée en 90 parties, pour tenir lieu de degrez; & que ces parties doivent être subdivisées en d'autres plus petites, pour marquer les minutes.

§. VI.

Cette graduation de l'anneau astronomique est un peu plus difficile à faire que celle de l'astrolabe. Car le petit trou B étant pris pour centre, on est obligé de décrire le quart de cercle FE, compris entre la ligne horisontale BE & la ligne verticale BF; & après avoir divisé ce quart de cercle en degrez, il faut tendre un fil ou bien tirer des lignes droites du centre B à tous les points de division, & ce sont ces lignes qui déterminent les degrez sur la demie circonférence GDH de l'anneau. Tous les Auteurs qui ont parlé de cet Instrument, prescrivent ordinairement cette construction. Mais il ne paroît pas qu'ils aïent fait attention à toute la nécessité qu'il y a de la suivre; car ils n'en ont point parlé. Cependant on rendroit presque toujours la graduation très-défectueuse, si sans se donner la peine de tracer le quart de cercle EDF, & de tirer toutes les lignes BL, BN &c, on se contentoit de diviser immédiatement la demie circonférence GDH en 90 parties égales. Cette méthode reviendroit à l'autre, si le demi cercle GDH étoit géométriquement parfait; mais elle s'en éloigneroit presque toujours sensiblement dans la pratique, parce que l'anneau n'est jamais rond dans la derniere rigueur.

§. VII.

Pour voir évidemment ce que nous avançons ici, on n'a qu'à suposer que l'arc G r D n'est pas exactement circulaire, & qu'il s'éloigne en r de l'arc de cercle GKD de la petite quantité rK. Cette quantité peut aller fort aisément à un cinquiéme ou à un quart de ligne sans qu'on s'en aperçoive : car ce n'est pas ici la même chose que lorsqu'il s'agit d'un cercle tracé sur un plan. On peut vérifier sans aucune peine l'exactitude de ce dernier, en apliquant un compas à son centre : mais on ne peut pas vérifier avec la même facilité la rondeur de la surface intérieure de l'anneau ; parce qu'outre que cette surface pourroit être exactement circulaire par ses deux bords, & ne l'être pas par le milieu, il y a encore assez de difficulté à déterminer son centre. Mais suposons donc qu'il s'en faut la quantité r K que l'anneau ne soit exactement rond en r : il est évident que ce défaut n'empêchera pas qu'on ne détermine, par exemple, exactement le point R du 15me degré de hauteur, si du point L qui marque le 15me degré, sur le quart de cercle EDF, on tire la ligne droite LKB au point B. Mais il y auroit de l'erreur, si pour marquer le 15me degré on prenoit sur la surface interieure de l'anneau, la moitié de l'arc GP qui répond à 30 degrez : car on trouveroit alors le point r qui seroit situé sur le sémi-diametre CK & qui différeroit du point R, du petit espace r R, presqu'égal à rK. Ainsi, si rK étoit effectivement d'un cinquiéme ou d'un quart de ligne, rR seroit à peu près d'autant, & causeroit parconsequent une erreur assez considérable dans la graduation. C'est ce qui montre qu'on ne doit pas diviser l'anneau astronomique, en se contentant de faire par le moïen du compas tous ses degrez égaux : mais qu'on doit emploïer le quart de cercle E D F, pour trouver principalement les premieres divisions vers G & les dernieres vers H. Au surplus l'anneau astronomique est d'un usage assez commode, aussi-tôt que le peu d'agitation du Vaisseau laisse la liberté de s'en servir. Aussi raporte-t-on que feu M. de Chazelles l'emploïoit avec beaucoup de succès dans ses voïages sur la Méditerranée.

Description de quelques autres Instrumens proposez par différens Auteurs.

§. VIII.

Outre les deux Instrumens précedens dont on a fait un long usage dans la Marine, on en a proposé plusieurs autres, ausquels on attribuoit quelques avantages particuliers. On a de ce nombre l'Hémisphere nautique de *Michel Cognet*, d'Anvers, qui prétendoit non-seulement observer en Mer la hauteur du Soleil, mais qui vouloit aussi que son Instrument servît de Cadran, & qu'il fit trouver en même-tems la latitude de l'endroit où l'on est. Le seul nom d'Hémisphere suffit pour donner une idée de la figure de cet Instrument. On l'orientoit par le moïen d'une Boussole ; & la hauteur du Soleil se mesuroit sur un demi cercle mobile qui servoit d'azimuth ou de vertical, & qui représentoit la moitié supérieure d'un astrolabe.

§. IX.

Fig. 3. On voit dans la Figure 3 le demi cercle de M. *Meynier*, actuellement Professeur Royal en Hydrographie au *Havre de Grace*. Ce demi cercle se suspend par la boucle A ; & le raïon du Soleil passant par la pinnule C, qui répond au centre, vient se rendre en E dans la partie interieure de l'arc, & fait connoître la hauteur comme dans l'anneau astronomique. Cet instrument peut être aussi d'usage

la

la nuit, pour observer la hauteur des Etoiles : mais aparemment qu'on le suspend dans un sens contraire, & qu'on vise à l'Etoile par la pinnule du centre & par une autre pinnule située sur la circonférence. Nous ne connoissons ce demi cercle que pour en avoir vû une description très-succinte * : mais nous ne doutons point que son sçavant Auteur ne lui procure une situation constamment horisontale, malgré le poid de la pinnule qui est située sur la circonférence, & qu'on est obligé de faire monter ou descendre selon que les hauteurs sont plus ou moins grandes.

§. X.

La Figure 4 représente un quart de cercle, dont on pourroit se servir de la même maniere que du demi cercle de M. *Meynier* ; mais qui ne seroit propre que pour observer la hauteur du Soleil. On suspendroit ce quart de cercle par la boucle A, & faisant passer la lumiere du Soleil par le petit trou C, elle viendroit marquer en E la hauteur. Enfin on voit dans la Figure 5 un autre quart de cercle qui ne differe du précédent qu'en ce qu'il ne prend pas de lui-même sa situation & qu'il faut la lui donner, en plaçant horisontalement son côté BC, par le moïen d'un niveau à air HI qui y est attaché. On peut apliquer le niveau de la même façon à plusieurs autres instrumens [a] : c'est ce qui fut proposé la premiere fois dans les assemblées qui se tenoient à Paris, chez le fameux M. *Thevenot*, & ce qu'on communiqua ensuite aux Académies de Londres & de Florence.

Fig. 4.

Fig. 5.

§. XI.

Au surplus, comme tous les Instrumens qui portent

* Dans l'Histoire de l'Academie Royale des Sciences de l'année 1724. *pag.* 93.

a Voyez la quatriéme partie des voyages de M. Thevenot.

B

leur horiſon avec eux, ſe raportent aiſément à ceux dont nous venons de parler, il n'eſt nullement beſoin de nous répandre dans de plus longues deſcriptions, ni de multiplier davantage nos Figures. Nous ne faiſons point mention ici du quart de cercle des Aſtronomes; parce qu'il paroît aſſez que cet Inſtrument, qui eſt très-exact à terre, le ſeroit très-peu ſur un Vaiſſeau, à cauſe de la double agitation à laquelle il ſeroit ſujet; ſçavoir à ſon agitation propre, & à celle de ſon fil à plomb. Il n'en eſt pas de même de la plûpart des Inſtrumens dont on vient de parler; car ils ne ſont expoſez qu'à leurs ſeuls & propres balancemens, & ils ſont donc par cette raiſon beaucoup plus commodes pour la Mer. On ne gagneroit rien auſſi de ſubſtituer à la place du fil à plomb, une regle chargée d'un poid par ſon extremité d'enbas: car outre qu'elle ſeroit expoſée à la même agitation, elle donneroit encore beaucoup plus de priſe au choc du vent. Ainſi dans le deſſein où nous ſommes de marquer quels ſont les Inſtrumens qu'on doit préferer ſur Mer, nous n'avons qu'à examiner ſimplement ceux que nous avons repréſentez dans nos cinq premieres Figures.

CHAPITRE II.

Du choix qu'on doit faire entre les Inſtrumens décrits dans le Chapitre précédent.

§. XII.

IL ſemble d'abord que quelques-uns de ces Inſtrumens ſont préférables aux autres, parce qu'ils peuvent ſervir la nuit pour prendre hauteur aux Etoiles. Mais pour peu qu'on y faſſe attention, on reconnoît qu'il n'y en a aucun de cette eſpece, qui ſoit propre à cette obſervation, & qui ait à cet égard un avantage bien réel ſur les autres.

Qu'on se serve de l'astrolabe ou du demi cercle de la Figure 3 en le changeant de disposition, il faudra pour observer la hauteur d'une Etoile, la regarder par deux pinnules ; mais comme la premiere de ces pinnules ne sera percée que d'un très-petit trou, il sera extrémement difficile de viser exactement à l'Etoile, pendant que l'Instrument d'un côté & l'Observateur de l'autre, seront toujours exposez à quelque mouvement. Pour se convaincre de ce que nous disons ici, on n'a qu'à tâcher de prendre à terre la hauteur de quelque Etoile avec l'astrolabe, ou avec quelqu'autre Instrument suspendu de la même maniere : on verra combien on est incommodé par les plus petits balancemens que le vent imprime à l'astrolabe. L'Etoile sera difficile à saisir ; on perdra du tems à diriger la regle mobile ; & l'Instrument une fois agité par le vent ou par la main de l'Observateur, ne reprendra pas ensuite tout d'un coup sa situation verticale. Voilà déja bien des difficultez : mais on en trouvera encore de bien plus considérables, sur un Vaisseau : car l'agitation de l'Instrument sera entretenuë & continuée par le mouvement qu'a toujours le Navire, & le Pilote sera obligé en même-tems, pour se soutenir, de s'apuïer alternativement sur l'une & l'autre jambe, de s'incliner de part & d'autre, & de prendre je ne sçai combien de différentes postures. Il n'est pas possible d'exprimer toutes ces situations : mais il est toujours évident qu'elles ne permettront point de regarder par les pinnules, ni d'apliquer l'œil à l'allidade. Il faut en un mot, pour qu'un Pilote puisse observer en Mer la hauteur des Etoiles, qu'il ôte à son Instrument la liberté de se mouvoir & qu'il l'assujetisse contre son œil, de maniere qu'il ne soit sujet à aucune autre agitation qu'à celle qu'il reçoit lui-même du Vaisseau. Mais il faudroit pour cela que l'Instrument eût raport à l'arbalestrille ou au quartier Anglois : car, comme il ne prendroit plus de lui-même sa situation horisontale, le Pilote seroit obligé, pour la lui donner, de se servir de l'horison sensible ou visuel.

§. XIII.

Il faut remarquer que ceci est conforme à ce que pensent les gens du Métier sur ce sujet. Car le *Pere Fournier*, par exemple, qui avoit une longue expérience de la Mer, & dont l'autorité doit être par consequent d'un très-grand poid dans un pareil fait, insinuë (pag. 370.) de son *Hydrographie*, qu'on ne peut point se servir de l'astrolabe, pour observer la hauteur des Etoiles. Il est vrai qu'on n'avoit point encore réussi de son tems à diminuer l'agitation de l'Instrument, en le suspendant d'une maniere particuliere. Mais on peut assurer que quelque parfaite que soit la suspension qu'on inventera, l'Instrument sera toujours sujet à quelques balancemens, & à quelques secousses irrégulieres, qui ne s'accorderont point avec celles de l'Observateur : & il est clair qu'il n'en faut pas davantage pour empêcher d'apliquer l'œil à une pinnule fort étroite, & de viser à un objet tel qu'une Etoile.

§. XIV.

Cela supose, on ne doit considerer les Instrumens qui portent leur horison avec eux, que dans le simple usage qu'on en peut faire pour observer la hauteur du Soleil, & on n'a donc ici simplement qu'à examiner lesquels sont les plus propres pour cette observation. Il faut choisir d'abord ceux qui ont de plus grands degrez ; car on sçait que c'est de cette grandeur que dépend principalement l'exactitude des opérations. Elle en dépend même de deux manieres ; parce que, 1°. Le Fabricateur commet moins d'erreur en construisant l'Instrument ; & parce que, 2°. L'Observateur en commet aussi moins lorsqu'il s'en sert. Il est certain que quelque soin qu'aporte un Ouvrier lorsqu'il place les pinnules, & lorsqu'il fait les divisions des degrez, il peut toujours se tromper de quelques petites quantitez ; au moins de celles qui se refusent à nos regards. Or ces petites erreurs deviennent moins considérables à mesure que les degrez de l'Instrument sont plus grands. Si, par exemple, ces erreurs sont de la dixiéme partie d'une ligne, elles ne produiront qu'une minute dans un certain Instrument : au lieu qu'elles en produiroient trois ou quatre dans un autre dont les degrez seroient trois ou quatre fois plus petits. Ce sera aussi la même chose pour l'Observateur ; il croira que l'allidade se trouvera précisement sur une certaine division, ou que le raïon de l'Astre viendra s'y rendre exactement : mais il s'en manquera toujours quelque chose ; & cette erreur se trouvera d'un plus grand nombre de minutes si les degrez sont plus petits. Voilà ce qui oblige de choisir les Instrumens dont les degrez ont le plus d'étenduë : mais on a aussi quelqu'autre chose à considerer. Il est certain que tout le reste étant égal, on doit préferer les Instrumens qui se placent d'eux-mêmes ; ceux qui n'ont point d'allidade ou de regle mobile ; ceux qui n'obligent point l'Observateur à partager son attention ; ceux enfin qui sont d'une figure moins embarassante.

§. XV.

Mais il suffit de considerer les Instrumens que nous venons de décrire, pour reconnoître que l'anneau astronomique & le quart de cercle de la Figure 4 sont les seuls qui ont à peu près tous ces avantages. On voit d'abord que les degrez de l'anneau sont beaucoup plus grands que ceux de l'astrolabe & que ceux du demi cercle de la Figure 3 ; & cette grandeur des degrez nous promet donc déja une plus grande exactitude. Mais une autre raison nous engage encore à préferer en particulier l'anneau à l'astrolabe : c'est qu'il suffit de tourner le côté de l'anneau vers le Soleil, pour que la hauteur se trouve marquée comme d'elle-même en D sur la surface interieure : au lieu qu'après avoir fait la même chose à l'astrolabe, il faut encore toucher bien des fois à sa regle mobile, avant de pouvoir la diriger exactement vers le Soleil; & on a quelquefois beaucoup de peine à réussir. L'Hémisphere nautique de *Michel Cognet* est sujette à plusieurs défauts, qu'on pourroit peut-être venir à bout de corriger: mais ce même inconvénient lui resteroit toujours; & on peut reprocher aussi quelque chose de semblable au quart de cercle de la Figure 5 proposé chez M. *Thevenot*. S'il est difficile en effet d'ajuster la regle mobile de l'astrolabe, il doit l'être encore incomparablement davantage, & on peut même dire qu'il doit être impossible de mettre sur un Navire le niveau HI, dans une situation exactement horisontale, & de l'entretenir pendant quelque tems, précisement dans le même état. D'ailleurs on est obligé de regarder en deux endroits à la fois lorsqu'on se sert de ce dernier instrument: on est obligé de prendre garde à la situation du niveau, & de considerer en même-tems le point où se termine le raïon de lumiere; & ainsi il faudroit toujours deux personnes pour observer la hauteur.

§. XVI.

Mais ne pourroit-on pas imaginer quelqu'autre Instrument qui n'eût point besoin d'horison, & qui fût encore plus parfait que l'anneau astronomique ou que le quart de cercle de la Figure 4? On voit assez que cela n'est pas possible: car dans une opération aussi simple que celle de prendre hauteur, on ne doit emploïer que des Instrumens très-simples; & de pareils Instrumens ont dû s'offrir les premiers & comme d'eux-mêmes à l'esprit. Ainsi, s'il est très-facile d'en imaginer encore de nouveaux, il n'y a cependant aucun lieu de croire qu'on puisse en inventer de préférables: ou bien ils ne représenteroient pas si naturellement la partie du Ciel qu'on veut mesurer; ou bien ils ne seroient pas si faciles à ajuster; ou bien leurs degrez ne seroient pas si grands à proportion. C'est aussi ce que l'expérience justifie en quelque maniere; puisque dans le genre des Instrumens dont il s'agit ici, nous ne voïons pas que ceux qu'on a proposez depuis un certain tems, comme, par exemple, le quart de cercle de la Figure 5 l'emporte le moins du monde sur ceux * qui furent mis en usage il y a trois siecles, par les premiers Instituteurs de la nouvelle Navigation.

§. XVII.

Ainsi il ne resteroit plus qu'à choisir entre l'anneau astronomique & le quart de cercle de la Figure 4. Mais ces deux Instrumens sont assez égaux: car s'il est un peu plus facile de bien graduer le dernier, il paroît aussi qu'il est un peu plus aisé de bien suspendre l'autre. Cette derniere considération fait que nous nous déterminons en faveur de l'anneau. Il s'agit à présent d'examiner s'il est possible de lui donner effectivement une suspension assez parfaite; car cela est encore nécessaire pour qu'on puisse s'en servir en Mer avec succès, & qu'on ne soit pas obligé de revenir aux Instrumens qui sont actuellement en usage. C'est ce que nous allons voir dans le Chapitre suivant.

* Les Portugais imaginerent l'Astrolabe, & commencerent à s'en servir sous le Regne de Jean II.

CHAPITRE III.

De la suspension de l'Anneau Astronomique, & des autres Instrumens dont on peut se servir pour observer la hauteur des Astres.

§. XVIII.

IL n'est difficile de suspendre les Instrumens de la premiere espece, qu'à cause des secousses ausquelles le Vaisseau est sujet. Il en reçoit dans le sens horisontal & dans le vertical : & comme ces secousses sont produites par l'agitation de la Mer, & par le choc continuel des vagues, il n'est pas possible de les arrêter entierement ; tout ce qu'on peut faire c'est de les rendre moins violentes. On doit esperer qu'on y réüssira mieux maintenant qu'on a des régles plus sûres pour mâter les Vaisseaux. Les trois piéces sur ce sujet qui viennent de paroître par les soins de l'Académie, ne peuvent pas manquer de renfermer beaucoup d'inventions très-utiles. Mais quelque chose qu'on fasse, nous osons cependant assurer qu'on ne pourra jamais détruire toute l'agitation du Vaisseau. Il ne dépend pas de l'adresse des hommes, d'empêcher qu'une vague qui vient choquer le Navire par la proüë, ne l'arrête toujours un peu en lui causant une secousse vers l'arriere ; ni qu'une vague qui le choque par la poupe, ne lui imprime aussi quelques nouveaux degrez de vitesse en le poussant vers l'avant. Outre cela le Vaisseau sera toujours sujet à des secousses dans le sens vertical ; puisqu'en même-tems que les vagues le poussent horisontalement, elles le poussent aussi toujours en haut, à cause de l'inclination de sa proüe & de ses flancs : ainsi il doit s'élever avec force, & retomber ensuite par sa pesanteur lorsque le choq de la vague est accompli. Ce sont ces dernieres secousses que

que l'Auteur de la premiere des Piéces qu'on vient de citer a bien vû qu'il ne pouvoit pas empêcher ; mais qu'il a tâché de rendre moins irrégulieres & moins dangereuses, en faisant en sorte que le Navire conservât toujours sa situation horisontale lorsqu'il sort de l'eau, & lorsqu'il s'y enfonce.

Remarques sur les différentes suspensions qu'on a proposées jusques ici.

§. XIX.

Il n'est pas nécessaire d'un plus long examen des mouvemens du Vaisseau, pour se mettre en état de mieux juger de la bonté de toutes les suspensions qu'on a proposées jusques ici. On a voulu se servir de *genoux*, de *resforts* à boudin, de *manches* de cuir, capables d'extension & de compression, &c. Mais il semble qu'on n'a toujours eu en vuë que de remédier aux secousses qui se font dans le sens vertical ; quoique ce ne soient pas celles-là qui alterent le plus la situation des Instrumens. Il est vrai que si elles les surprennent lorsqu'ils sont déja inclinez, elles peuvent faire augmenter leur inclinaison : mais généralement parlant, ce sont les secousses qui se font dans le sens horisontal qui produisent le mal, & qui causent les balancemens, qu'il seroit important d'empêcher. Représentons-nous un Pendule, un poid suspendu à l'extremité d'un fil : ce pendule demeurera exactement vertical tant que le Navire singlera avec un mouvement parfaitement uniforme : mais il commencera à faire des vibrations, aussi-tôt que la vitesse du sillage souffrira quelque changement ; parce que le mouvement du poid ne s'accordera plus avec celui du point de suspension. Si une vague, par exemple, en choquant la proüe, fait diminuer tout à coup la vitesse du Navire d'une certaine quantité ; le poid ira ensuite plus vite que le point de suspension de cette même quantité : & ainsi il avancera vers l'avant, en décrivant un arc de cercle par raport au Navire, jusqu'à ce qu'il ait perdu en montant toute sa vitesse relative. Mais lorsqu'il l'aura perduë, il retournera en arriere par sa pesanteur ; il sera donc plusieurs vibrations de part & d'autre, & comme l'agitation de la Mer est continuelle, ces vibrations ne cesseront presque jamais. Or la même chose doit arriver aussi aux Instrumens propres à prendre hauteur : car ce ne sont toujours que des especes de pendules, malgré tous les ressorts & tous les genoux ausquels ils sont attachez. Suposé qu'on suspende, par exemple, l'Instrument à des ressorts AX & AZ (*Fig. 2.*) ces ressorts obéïront un peu lorsque l'Instrument tendra à avancer d'un certain côté : mais le bas de l'Instrument avancera cependant toujours avec beaucoup plus de facilité que le haut.

§. XX.

Il peut venir en pensée de suspendre l'Instrument d'une maniere toute différente ; de le poser sur un morceau de bois ou sur quelqu'autre corps léger, & de le faire floter sur une liqueur. Mais lorsqu'après le choc d'une nouvelle vague, l'Instrument avancera avec une vitesse différente de celle du Vaisseau, il trouvera toujours de la difficulté à fendre la liqueur qui le suporte ; & ainsi sa partie supérieure avancera plus promptement que l'inférieure, & il sera par conséquent encore sujet à s'incliner, & à faire des balancemens. Lorsqu'on suspend l'Instrument avec des ressorts, ces ressorts après qu'ils se sont comprimez tendent avec force à reprendre leur premier état, & ils font des vibrations qui doivent contribuer à rendre irrégulieres celles de l'Instrument. Ce n'est pas ici la même chose : car après que la liqueur a cedé au mouvement de l'Instrument, elle ne le repousse point en arriere avec la même force qu'un ressort, qui en se restituant est sujet à un retour. C'est pourquoi cette derniere suspension est préférable à la premiere : mais cependant elle doit être encore toujours très-défectueuse ; puisque pendant que le haut de l'Instrument peut avancer avec sa premiere vitesse, le bas n'a pas la même liberté à cause de la résistance de la liqueur.

§. XXI.

En un mot, tant que l'Instrument sera suspendu par un point différent de son centre de gravité, il sera sujet à s'incliner & à faire des balancemens ; parce qu'une de ses extrémitez recevra par l'entremise des ressorts ou de la liqueur les secousses du Navire, au lieu que l'autre ne les recevra pas avec la même facilité, & qu'elle avancera toujours pendant quelque tems avec sa premiere vitesse. Ainsi pour rendre la suspension entierement parfaite, il faudroit pouvoir soutenir l'Instrument par son centre de gravité même : alors une partie ne pourroit point avancer sans l'autre, & comme le Vaisseau communiqueroit ensuite ses agitations à toutes les parties de l'Instrument à la fois, il ne tendroit point à lui faire perdre sa situation verticale. Mais ne tomberoit-on pas aussi dans un autre inconvenient ? Car on sçait qu'un corps suspendu par son centre de gravité n'affecte de lui-même aucune situation particuliere, & qu'il demeure aussi-bien dans un état que dans un autre ; de sorte qu'il ne peut se trouver ensuite de niveau, que par hazard. Il faudroit donc pouvoir réünir ces deux conditions, qui paroïssent néanmoins incompatibles : que l'instrument, 1°. Fût suspendu par son centre de gravité, & que, 2°. Il affectât toujours de prendre une certaine situation. Il faudroit qu'il fût suspendu par son centre de gravité ; afin que les secousses du Navire ne lui causassent point de balancemens : & il faudroit qu'il affectât toujours un certain état ; afin qu'il pût toujours se trouver de niveau, & nous tenir continuellement lieu d'Horison.

Maniere de soutenir l'Instrument par son centre de gravité, & de faire cependant ensorte qu'il affecte toujours de prendre une certaine situation.

§. XXII.

Si ces deux conditions ne sont pas incompatibles, il n'y a selon toutes les aparences qu'un seul moïen de les concilier. C'est de faire floter l'Instrument sur une liqueur, comme dans le §. 20 : Mais en faisant ensorte que le centre de gravité du tout, de l'Instrument & du corps qui le suporte, se trouve dans le milieu de la partie
Fig. 6. sumergée. C'est-à-dire, que si SQRT (*Fig.* 6.) est la surface d'une certaine quantité d'eau ou d'huile, contenuë dans un grand vase, & que l'anneau astronomique A BC soit soutenu par le corps cilindrique & plat DEGF, qui flote dans le vase, il faut que ce corps DEGF soit tellement chargé, que le centre de gravité V du tout, se trouve enfoncé dans la liqueur & situé précisement au milieu de la partie sumergée QRGF. Il est certain que l'Instrument affectera ensuite une situation constante : car le corps DEGF tendra toujours à se mettre de niveau, & il s'y metroit quand même le centre de gravité V seroit beaucoup plus élevé. D'un autre côté l'Instrument & le corps DEGF seront comme suspendus par leur centre de gravité V : car l'Hydrostatique nous aprend que la force de la liqueur qui les soutiendra, en poussant de bas en haut, agira comme si elle étoit réunie, dans le centre de gravité de l'espace QRGF qu'occupe la partie sumergée. Si l'Instrument tend aussi à avancer de côté ou d'autre, la direction de la résistance de la liqueur passera par le centre de gravité V ; & ainsi cette résistance s'oposera au mouvement de toutes les parties de l'Instrument en même-tems, & elle ne le fera par consequent point incliner. Voilà ce qui montre que nôtre suspension satisferoit éga-

lement aux deux conditions qu'il s'agissoit de remplir. Fig. 6.

§. XXIII.

Pour rendre ceci encore plus sensible, suposons pour un moment, que le corps DEFG s'incline de la plus petite quantité. La force avec laquelle la liqueur le poussera en haut, ne se réunira plus dans le centre de gravité V, mais dans le centre de gravité de la partie qui sera alors sumergée; & cette force agissant de bas en haut sur une direction qui ne passera plus par le centre de gravité V, & qui sera située par raport à ce centre du côté de l'inclinaison, travaillera à rétablir la situation horisontale. Il est vrai que lorsque le corps DEFG est de niveau, la force relative qui l'entretient dans cette situation est nulle ou infiniment petite: mais il suffit que cette force soit toujours prête à agir en cas d'inclinasion, & qu'elle augmente lorsque l'inclinaison est plus grande. C'est en effet précisement de la même maniere que les Pendules conservent leur situation verticale: car la force relative qui les retient dans le même état, lorsqu'ils sont situez verticalement est nulle ou infiniment petite; mais comme cette force augmente à mesure que le poid s'éloigne de la ligne verticale, elle l'oblige toujours d'y revenir. Toute la différence qu'il y a, c'est que le pendule ne peut pas conserver sa situation verticale dans un Navire; parce comme on l'a déja assez dit, son poid n'est pas disposé à suivre sur le champ tous les mouvemens du point de suspension. Au lieu que les secousses du Vaisseau ne doivent pas alterer de la même maniere la situation de notre Instrument; parce qu'elles doivent se communiquer d'abord à son centre de gravité, par l'entremise de la liqueur, & quelles doivent tendre à faire avancer toutes ses parties en même-tems.

§. XXIV.

Fig. 6. Pour faire maintenant enſorte que le centre de gravité V de l'Inſtrument ABC & du corps DEGF, ſe trouve effectivement au milieu de la partie ſumergée QRGF; on ſupoſera que ce corps DEGF eſt creux comme une boëte ou que c'en eſt même une; & que lorſqu'elle eſt tout-à-fait vuide & qu'elle n'eſt chargée que du poid de l'Inſtrument ABC, elle n'enfonce dans la liqueur que juſqu'à la ligne KL. Nous nommerons e la quantité verticale FK ou GL de cet enfoncement; & nous déſignerons par la lettre a la hauteur HI du centre de gravité commun H de cette boëte DEGF & de l'Inſtrument. Si nous voulons enſuite nous ſervir d'une plaque de plomb ou de quelqu'autre métail NOGF, pour charger la boëte & pour faire deſcendre le centre de gravité de H en V; nous nommerons z l'épaiſſeur NF ou OG de cette plaque, & nous exprimerons par les letres p & q le raport qu'il y a entre les peſanteurs ſpécifiques du plomb & de la liqueur dont nous nous ſervirons pour ſoutenir notre Inſtrument. Cela ſupoſé lorſqu'on mettra la plaque de métail dans le fond de la boëte DEGF, l'enfoncement augmentera de la quantité KQ ou LR qui ſera égale à $\frac{pz}{q}$. La boëte lorſqu'elle eſt vuide n'enfonce que juſqu'à la ligne KL; mais auſſi-tôt que ſon poid deviendra plus grand, elle enfoncera davantage & elle ne s'arrêtera que lorſqu'elle occupera la place d'un nouveau volume de liqueur qui ſoit préciſement du même poid que la charge qu'on lui aura ajoutée. Or z étant l'épaiſſeur FN ou GO de la plaque de métail, & p & q déſignant le raport des peſanteurs ſpécifiques de ce métail & de la liqueur, il eſt évident que $\frac{pz}{q}$ doit marquer ici l'épaiſſeur du volume de

liqueur qui est de même poid que la plaque NOGF. Fig. 6.

Ainsi $\frac{pz}{q}$ désigne l'enfoncement KQ ou LR, produit par la pesanteur de cette plaque : & comme la boëte DEGF enfonçoit déja de la quantité FK ou GL $= e$, nous aurons $e + \frac{pz}{q}$ pour l'enfoncement total.

§. XXV.

Mais en même-tems que la plaque de métail NOGF fait que la boëte enfonce d'une plus grande quantité, elle fait aussi que le centre de gravité H du tout change de place & qu'il se trouve plus bas. Pour découvrir le point V où il se trouve ensuite, on n'a qu'à faire attention que le centre de gravité commun de l'Instrument & de la boëte étant en H, & que celui de la plaque étant en S au milieu de son épaisseur IP ; le centre de gravité V du tout, doit partager la distance HS, en raison réciproque de la pesanteur de la plaque, & de la pesanteur de l'Instrument & de la boëte : c'est-à-dire, que VS doit être à VH, comme le poid de l'Instrument & de la boëte joints ensemble, est au poid de la plaque NOGF : & il suit de-là *componendo* que HS est à VH, comme la pesanteur du tout, de l'Instrument, de la boëte & de la plaque, est à la pesanteur particuliere de la plaque. Mais la boëte étant cilindrique, les enfoncemens sont proportionels aux pesanteurs qui les produisent, & ainsi nous pouvons mettre à la place de la pesanteur totale, l'enfoncement total FQ ou GR $= e + \frac{pz}{q}$, & à la place de la pesanteur particuliere de la plaque, l'enfoncement KQ ou LR $= \frac{pz}{q}$ que cause sa pesanteur. On aura donc cette analogie ; HS $=$ HI $-$ SI $= a - \frac{1}{2}z$ | VH || $e +$

Fig. 6. $\frac{pz}{q} \mid \frac{pz}{q}$: & si après avoir déduit de cette analogie, la valeur $\frac{\frac{apz}{q} - \frac{pz^2}{2q}}{e + \frac{pz}{q}}$ de VH, on l'ôte de IH$=a$, il viendra $\frac{ae + \frac{pz^2}{2q}}{e + \frac{pz}{q}}$, pour la quantité requise IV, dont le centre de gravité V est élevé au-dessus du fond de la boëte. Mais puisque cette quantité doit être égale à la moitié de FQ ou de GR ($= e + \frac{pz}{q}$), pour que le centre de gravité V réponde au milieu de la partie sumergée FQRG, nous aurons l'équation du second degré $\frac{ae + \frac{pz^2}{2q}}{e + \frac{pz}{q}} = \frac{1}{2} e + \frac{pz}{2q}$ qui nous fournit la *formule* $z = \frac{-epq + q\sqrt{2ae \times \overline{p^2 - pq} + e^2pq}}{p^2 - pq}$; & cette formule exprime en grandeurs entierement connuës l'épaisseur z, qu'on doit donner à la piéce de métail NOGF.

§. XXVI.

On voit assez sans qu'il soit nécessaire que nous le disions, qu'on ne se servira dela formule précédente, qu'après qu'on aura déja construit l'instrument ABC & la boëte DEGF. On jugera par le poid qu'ils auront ensemble & par la pesanteur spécifique de la liqueur, de la quantité FK ou GL$=e$ dont la boëte doit d'abord enfoncer : ou bien pour trouver cette quantité d'une maniére plus simple, on la cherchera par l'experience, en faisant floter l'instrument sur la liqueur, Il sera aussi plus commode & plus

plus exact de déterminer le centre de gravité H par l'expérience, que de le chercher par le calcul, sur les dimensions de l'instrument & de la boëte. Enfin on connoîtra aussi toûjours le rapport de p & de q, des pesanteurs spécifiques du métail dont on formera la plaque NOGF, & de la liqueur dont on se servira pour faire floter l'instrument. Ainsi rien n'empêchera d'employer la formule $z = \frac{-epq + q\sqrt{2ae \times \overline{p^2 - pq} + e^2pq}}{p^2 - pq}$ pour découvrir l'épaisseur que doit avoir la plaque.

§. XXVII.

Fig. 6.

Au surplus il faudra faire l'Instrument plus ou moins grand, selon qu'on voudra observer les hauteurs avec plus ou moins d'exactitude : mais il suffiroit peut-être de lui donner toujours 17 ou 18 pouces de diametre, & d'en donner 24 à la boëte cilindrique DG, avec 8 de hauteur. Suposé qu'on fît cette boëte d'étain & qu'on lui donnât effectivement les dimensions que nous disons, avec une ligne d'épaisseur à son pourtour & à ses deux fonds, elle peseroit environ 37 livres, ausquelles on pourroit ajouter encore 7 livres pour le poid de l'Instrument. Ce seroit en tout 44 livres : cette pesanteur feroit enfoncer la boëte dans l'eau de Mer d'environ $2\frac{1}{3}$ pouces, & le centre de gravité commun H de la boëte & de l'Instrument, seroit élevé au-dessus du fond FG de $6\frac{1}{4}$ pouces. Ainsi il faudroit introduire $6\frac{1}{4}$, & $2\frac{1}{3}$, à la place de a & de e, dans nôtre formule ; & si on se déterminoit à faire aussi la plaque NG d'étain, il n'y auroit qu'à mettre 43 & 6 à la place de p & de q ; parce que les pesanteurs spécifiques de l'étain & de l'eau de Mer, sont à très-peu de chose près comme 43 est à 6. C'est de cette sorte que j'ai trouvé que la plaque NOGF doit avoir un peu plus de $5\frac{1}{3}$ lignes d'épaisseur : & il est facile de voir ensuite qu'elle doit avoir

presque 202 pouces cubiques de solidité, & qu'elle doit peser environ 60 livres 5 onces, à proportion du pied cubique qui pese 516 livres 2 onces. Il sera facile sur ces mesures de donner à la plaque sa juste grandeur : mais comme il peut cependant se glisser toujours quelques erreurs, & que d'ailleurs nous avons aussi négligé quelque chose, afin de rendre notre solution plus simple, il sera à propos de faire la plaque un peu plus pesante, afin que le centre de gravité se trouve un peu trop bas; & l'on apliquera au haut de l'Instrument un petit poid Z, comme
Fig. 7. on le voit dans la Figure 7, qu'on fera monter ou descendre le long de la vis PQ, jusqu'à ce qu'on reconnoisse par la stabilité de l'Instrument, que le centre de gravité est dans sa véritable place. On a représenté dans la Figure 7 la machine entiere : RO est le vase qui contient la liqueur & qui est soutenu comme les boussoles de Mer; & DE est la boëte cilindrique qui flote sur la liqueur, & qui porte l'anneau astronomique ABC. On voit bien que nous n'avons pas pu marquer dans cette Figure la plaque d'étain qui doit être dans le fond de la boëte; n'y représenter des ressorts qu'on doit mettre au tour du vase RO par dedans, pour obliger la boëte DE à demeurer toujours à peu près dans le milieu : mais deux de ces ressorts paroissent en Z
Fig. 6. & en Y dans la Figure 6; & il est clair qu'ils doivent répondre au milieu de la partie sumergée de la boëte; afin que la direction de leur effort, lorsqu'ils agissent, passe toujours précisément par le centre de gravité V.

Remarques sur la suspension précedente.

§. XXVIII.

Enfin on néglige de raporter ici différentes autres précautions, parce qu'elles sont assez faciles à imaginer, & qu'on craint aussi de se trop étendre. Il est, par exemple, évident qu'au lieu de soutenir le vase RO [Fig. 7.) comme les bouſſoles de Mer ou comme les lampes de *Cardan*, on pourroit le faire floter dans un autre vaſe, en faiſant enſorte que ſon centre de gravité & de toute ſa charge ſe trouvât au milieu de la partie ſumergée. Il eſt clair qu'il faut auſſi choiſir l'endroit du Vaiſſeau où il y a le moins de mouvement : cet endroit ſe trouve vers le centre de gravité du Navire ; ou plûtôt vers le centre de gravité de la coupe horiſontale de la carene faite à fleur d'eau, comme on pourroit le démontrer aſſez aiſément. Avec toutes ces attentions on rendroit la machine aſſez parfaite : mais on eſt cependant obligé d'avoüer qu'elle ſera encore toujours ſujette à faire quelques balancemens. Elle conſerveroit ſa ſituation verticale ſi la ſurface de la liqueur reſtoit continuellement de niveau : mais comme cette ſurface ſe trouvera ſouvent inclinée, à cauſe de l'agitation du Navire ; l'Inſtrument ſera auſſi toujours un peu expoſé à perdre ſa ſituation horiſontale.

§. XXIX.

En effet lorſque pluſieurs vagues viennent choquer le Navire, elles doivent faire changer ſenſiblement la viteſſe de ſon ſillage, elles doivent la faire accélerer ou la faire diminuer ; & le changement doit ſe faire par des degrez ſenſiblement égaux, tant que les vagues n'impriment qu'une petite partie de leur viteſſe au Navire ; parce qu'elles doivent toujours le fraper alors à peu près avec la même force. Or ſi la viteſſe du Vaiſſeau ne diminuë, par exemple, que d'un pied dans une ſeconde, la diminution ſe fera par des degrez environ vingt-ſix fois plus petits que ceux qu'imprime la peſanteur aux corps qui tombent ; car la peſanteur communique, comme on le ſçait, environ 26 pieds de viteſſe par ſeconde Mais pendant que le Vaiſſeau perdra ainſi continuellement de petits degrez de ſa viteſſe, les particules de la liqueur contenuës dans le vaſe RTSX (Fig. 8.) tendront à avancer Fig. 8.

avec ces mêmes degrez, puisqu'elles ne peuvent pas faire ſur le champ la même perte que le Vaiſſeau. Ainſi en même-tems que chaque molecule C tendra à deſcendre verticalement par ſa peſanteur CD, elle tendra à avancer horiſontalement avec la force CE, qui dans la ſupoſition que nous avons faite, ſera la vingt-ſixiéme partie de CD: c'eſt-à-dire donc que chaque molecule tendra à deſcendre le long de la direction compoſée CF, par le concours de ſa peſanteur &. de ſa force horiſontale: & comme la même choſe doit arriver à toutes les autres molecules, il eſt ſenſible qu'on peut les conſiderer comme ſi leur peſanteur avoit changé de direction, & comme ſi elle s'exerçoit ſur CF au lieu de le faire ſur CD. C'eſt pourquoi la ſurface AB de la liqueur ne doit plus ſe trouver de niveau ni être perpendiculaire à CD; mais elle doit l'être à CF: & ainſi elle ſera ici inclinée d'environ $2^{deg.}\ 12^{min}$; puiſque CE étant la vingt-ſixiéme partie de CD, la diagonale CF du rectangle ECDF, doit faire avec CD un angle de $2^{\circ}.\ 12^{min.}$ Cette inclinaiſon eſt déja aſſez conſidérable: mais lorſque les vagues ſeront plus fortes & qu'elles cauſeront un plus grand changement dans la viteſſe du Navire, la ſurface AB ſe trouvera encore plus inclinée: & il eſt clair qu'on ne doit point attendre pendant une ſemblable diſpoſition de la liqueur, que les corps qui floteront deſſus, puiſſent conſerver exactement leur ſituation verticale. Il eſt vrai que les choſes ne demeureront gueres long-tems dans cet état; mais l'Inſtrument, avant de reprendre ſa ſituation naturelle, fera pluſieurs vibrations de part & d'autre, & peut-être qu'il ne ſe ſera point encore mis en repos, lorſqu'une nouvelle ſuite de vagues viendra reproduire une nouvelle inclinaiſon.

§. XXX.

Si encore les vibrations de l'Inſtrument étoient regulieres; elles n'empêcheroient pas tout à fait d'obſerver exactement la hauteur. Il n'y auroit qu'à remarquer le point le plus haut & le point le plus bas, où se termineroit le raïon de lumiere; & deux vibrations immédiates étant sensiblement égales, il n'y auroit qu'à prendre le milieu entre les deux points. Il arriveroit même que les vibrations allant en diminuant, les points où le rayon du Soleil viendroit se rendre, s'aprocheroient de plus en plus les uns des autres; de sorte que ces points marqueroient continuellement la hauteur avec plus d'exactitude, à peu près de la même maniere que les termes d'une série convergente, donnent toujours avec plus de précision la quantité exprimée par la série. Mais il suffit d'avoir vû la Mer, pour avoüer qu'on ne peut pas compter sur cette régularité des vibrations. Car les ondes ne gardant aucun ordre ni aucune mesure dans leur choc, & imprimant des secousses au Navire vers differens côtez, elles seront cause que les balancemens de notre anneau seront non-seulement irréguliers, mais qu'ils ne se feront point aussi dans le même plan. Ainsi, quoique notre Instrument soit peut-être suspendu de la maniere la plus parfaite qu'il est possible, nous devons craindre qu'il ne puisse pas être d'usage dans toutes sortes de rencontres. C'est à l'expérience à nous en aprendre le succès: mais on a cru qu'on devoit toujours en attendant examiner les Instrumens de la seconde espece; ceux qui ne se placent pas d'eux-mêmes, mais que le Pilote ajuste par le moïen de l'horison sensible ou visuel.

CHAPITRE IV.

Examen des Instrumens qu'on ajuste par le moïen de l'horison visuel.

§. XXXI.

On peut regarder comme une incommodité dans ces sortes d'Instrumens, que pour les ajuster, on soit obligé de viser à l'horison sensible ou aparent : mais nous ne doutons point qu'il ne soit cependant toujours plus facile de leur donner de cette maniere, la situation qu'ils doivent avoir, que de la leur procurer par le moïen de quelque suspension particuliere. Suposons que le Pilote prenne hauteur avec l'Instrument représenté
Fig. 9. dans la Figure 9, qu'on apelle ordinairement *Quartier Anglois*; le Pilote mettra la pinnule E sur un certain nombre de degrez de l'arc BA ; & tournant le dos vers le Soleil, il apliquera l'œil à la pinnule F qui est située sur l'autre arc HD, & il la fera monter ou descendre jusqu'à ce qu'il voïe l'horison par la pinnule C & que l'ombre de la pinnule E tombe en même-tems sur la pinnule C : & la hauteur du Soleil sera mesurée par les deux arcs BE & HF joints ensemble, puisque ces deux arcs mesurent la grandeur de l'angle SCF, formé par le raïon SC de l'Astre & par la ligne horisontale FC. Sans doute que pendant cette observation, le Vaisseau sera exposé au choc de plusieurs vagues ; mais l'Instrument ne recevra toujours point d'autres secousses que celles que lui communiquera le Pilote, puisqu'il n'a point ici la liberté de se mouvoir à part & que le Pilote le tient fermement. Je sçai bien aussi que le Pilote sera obligé, pour se tenir debout, de s'incliner de côté & d'autre, & de se mettre successivement en différentes situations : mais on

doit remarquer que tous ces mouvemens lui serviront en même-tems pour ne point perdre l'horison de vuë, & que lorsqu'il lui arrivera de s'en écarter, il lui sera toujours facile d'y revenir & de s'y fixer : au lieu qu'une machine qui revient à sa situation naturelle, ne s'y arrête jamais d'abord ; parce que l'action de la pesanteur ou des ressorts qui l'y fait revenir, lui communique toujours un mouvement qui la transporte au-delà. C'est ce qui montre que l'homme même, si on peut s'exprimer de la sorte, est la machine de suspension la plus parfaite de toutes. Aussi voïons-nous que si on ne peut pas construire un Instrument qui reste toujours, malgré l'agitation du Navire, dirigé exactement vers un certain point, les Marins ne laissent pas de bien ajuster leurs fusils sur les oiseaux qui sont en l'air, & de les tirer en volant.

§. XXXII.

Ainsi il suffit que l'Instrument soit construit avec soin, & qu'il soit capable de recevoir un certain degré de perfection dans sa graduation, pour qu'on puisse observer la hauteur avec exactitude. On n'entreprend point ici l'examen de tous les Instrumens : cette discussion seroit longue & ennuïeuse ; & d'ailleurs il est certain que le quartier Anglois est le meilleur. Nos Pilotes se servent cependant beaucoup de l'arbalestrille ; mais outre que les degrez de cet Instrument sont inégaux, ce qui augmente beaucoup la difficulté de le construire exactement, il est encore sujet à plusieurs inconvéniens. Les marteaux ne sont quelquefois pas bien perpendiculaires à la fleche ; les marteaux s'usent par les extremitez ; la fleche se courbe ; & enfin la forme de cet Instrument ne permet pas de le tenir avec assez de force, lorsque le vent est violent. Mais ce qui fait principalement qu'on préfere ici le quartier Anglois ; c'est qu'on croit qu'il est plus facile de le perfectioner, en lui faisant quelque changement.

Des changemens qu'il faut faire au quartier Anglois, pour lui donner toute la perfection possible.

§. XXXIII.

Les Pilotes n'ont fait ſans doute l'arc BA d'un plus petit raïon que l'arc HD, qu'afin de rendre l'Inſtrument plus portatif: mais ils l'ont auſſi rendu en même-tems beaucoup plus défectueux. Car c'eſt en vain qu'ils répondent qu'ils ont toujours le ſoin de mettre la pinnule E ſur un nombre juſte de degrez, afin que s'il y a des minutes dans la hauteur du Soleil, elles ſe trouvent marquées ſur l'autre arc HD, où elles ſont plus faciles à diſtinguer à cauſe de la plus grande étenduë des degrez Rien n'eſt plus foible que cette raiſon; car une partie de la hauteur eſt toujours meſurée avec peu d'exactitude, puiſque les degrez de l'arc BA ſont trés-petits. Il n'eſt pas néceſſaire de répéter ici, ce qu'on a dit dans le §. 14. Il y aura toujours quelque erreur dans la graduation de l'arc BA; le Pilote ſe trompera toujours de quelque petite quantité en voulant mettre la pinnule E ſur un certain nombre de degrez, & il ſe trompera encore en croïant faire tomber exactement l'ombre de cette pinnule ſur la pinnule C du centre. Or ces trois erreurs, quoiqu'elles ſoient peut-être toujours d'une quantité conſtante, comme de la cinquiéme ou de la quatriéme partie d'une ligne, ſeront cependant d'un plus grand nombre de minutes, à meſure que l'arc BA ſera d'un plus petit raïon. Ainſi il eſt très certain qu'on doit augmenter ce raïon; & que pour rendre l'Inſtrument parfait, il faut ne le faire que d'un ſeul arc de cercle comme dans la Figure 10. Nous convenons qu'il ne ſera plus tout-à-fait ſi commode à tranſporter: mais on doit aiſément ſacrifier ce leger avantage, lorſqu'il s'agit d'ôter un défaut conſidérable dans un Inſtrument.

Fig. 10.

§. XXXIV.

§. XXXIV.

Quant à la grandeur qu'on doit donner ensuite à ce quart de cercle, il est certain qu'à mesure qu'on l'augmentera on se trouvera plus en état de placer exactement la pinnule E, & de distinguer les scrupules du degré. Mais cette grandeur ne contribuera pas à rendre toutes les Parties de l'observation plus exactes: car comme l'œil sera ensuite plus éloigné de la pinnule C, il se peut faire que l'ombre de la pinnule E ne tombe pas si exactement sur la pinnule C; & que cependant l'observateur ne s'en aperçoive point. Quelquefois on tire avantage de toutes les manieres de la grandeur d'un Instrument: on le construit avec plus d'exactitude; & les observations se font aussi avec plus de précision. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans la Méridienne que traça autrefois dans l'Eglise de saint Petrone de Boulogne le célébre feu M. Cassini. La grandeur des degrez donne de la facilité à en distinguer les plus petites parties: Mais si l'Observateur étoit logé au haut de la voute proche du trou par lequel entre la lumiere du Soleil, & qu'il n'eût pas la liberté de descendre pour venir considerer de près l'endroit où se termine cette lumiere, il est certain qu'il ne tireroit pas le même fruit de la grande étenduë de l'Instrument. Or c'est la même chose pour notre quart de cercle: car en même-tems que le Pilote vise à l'horison aparent par les pinnules F & C, il faut qu'il considere si l'ombre de la pinnule E tombe exactement sur C, & il est sensible qu'il le fait avec moins d'exactitude à mesure que l'Instrument est plus grand. On nous dira peut-être que la distance FC est toujours trop petite pour qu'on puisse commettre une erreur considérable: mais nous ne sçavons que trop que nous ne voïons pas également bien à toutes les distances, lorsqu'il s'agit principalement de distinguer de très petits objets, comme l'épaisseur d'un cinquiéme ou d'un quart de ligne.

Après cela il eſt permis de faire un peu plus d'attention à l'incommodité que cauſeroit un trop grand quart de cercle ; & on peut donc ſe contenter de lui donner 22 ou 23 pouces de raïon, comme on le fait ordinairement à l'arc HD du quartier Anglois.

§. XXXV.

Au ſurplus il n'eſt pas néceſſaire de parler ici de la force qu'on doit donner aux Piéces qui composent cet Inſtrument, pour que fait en bois il puiſſe ſe ſoutenir. Nous ne dirons rien auſſi de la maniere de diviſer les dégrez en minute. Les Fabricateurs d'Inſtrumens de Mathématique, ſçavent que cette diviſion ſe fait en traçant ſur le limbe pluſieurs cercles concentriques, qu'on coupe par des lignes obliques ou tranſverſales qui doivent être courbes, auſſi-tôt que les cercles ſont tous à une égale diſtance les uns des autres ; mais qu'on fait cependant droites ſans erreur ſenſible ; pourvû qu'il y ait peu d'intervale entre les cercles. Ces tranſverſales doivent être dans la rigueur de petites portions de ſpirale (de celle d'Archimede :) mais en rendant inégales les diſtances des cercles ; on peut faire en ſorte que les tranſverſales deviennent des arcs de cercles, & alors on peut diviſer le limbe par une méthode Géométrique & très-connuë. Nous nous propoſions d'apliquer à la pinnule E une eſpece de micrometre, qui nous eût diſpenſé de diviſer le limbe en minutes, & que nous euſſions fait avancer d'un mouvement continu par le moïen d'une vis : mais comme les deux mains du Pilote ſont déja occupées à tenir le quart de cercle, il ſeroit aſſez difficile de ſe ſervir de ce micrometre ; & d'ailleurs cette petite machine ſeroit trop délicate pour pluſieurs Marins. Nous ne pouvons pas non plus enchaſſer dans la pinnule F un verre convexe pour ſervir d'oculaire, & pour mettre l'obſervateur en état de mieux diſtinguer en C le point où ſe termine le raïon de l'Aſtre. Car il faudroit enſuite, comme nous l'aprend la Dioptrique, placer un autre verre au-delà du point C, afin que l'Obſervateur pût auſſi découvrir l'horiſon : mais ce dernier verre formeroit avec le premier une lunette très-incommode & très-facile à déranger.

§. XXXVI.

Tout ce qu'on peut faire pour rendre les obſervations plus exactes, c'eſt d'apliquer à la pinnule E un petit verre convexe, dont le foïer ſe trouve en C ; & on marquera ſur la pinnule C du centre, non-ſeulement ce foïer, mais on tracera auſſi le contour de l'ombre du corps même de la pinnule E. On a repréſenté ici en grand la pinnule du centre, en lui faiſant tourner vers nous le côté qu'elle doit préſenter à l'œil de l'Obſervateur. P eſt le trou par le moïen duquel on aplique cette pinnule au centre du quart de cercle, de la même maniere qu'on le fait dans le quartier Anglois : MN eſt une fente d'une vingtaine de lignes de longueur par laquelle on regarde l'horiſon ; C eſt le point où doit venir ſe rendre le raïon du Soleil ; & OQRT eſt l'eſpace où doit ſe faire la projection de l'ombre du corps de la pinnule E. Ainſi lorſque le Pilote voudra prendre hauteur, il n'aura qu'à avoir égard à l'une ou à l'autre de ces choſes ; ou faire tomber l'ombre de la pinnule E ſur le rectangle OQRT, ou faire tomber le raïon de l'Aſtre dans le point C, & viſer enſuite à l'horiſon par la pinnule F & par la fente MN. Si on mettoit la pinnule E en différens endroits, la projection de ſon ombre changeroit conſidérablement de largeur, & ne pourroit pas être renfermée dans le rectangle OQRT : c'eſt pourquoi nous placerons toujours préciſement la pinnule E dans le même endroit au commencement de la graduation ; & il n'y aura donc que la pinnule oculaire qu'il faudra faire gliſſer en haut ou en bas, ſelon que la hauteur ſera plus ou moins grande. Ce mouvement de la pinnule F ſe fera fort aiſément avec le pouce de la main gauche ; parce que cette main sera apliquée sur le limbe proche de la pinnule, pendant que l'autre main sera alongée derriere l'Instrument pour le saisir par quelqu'autre endroit : c'est ce que nous avons éprouvé plusieurs fois sur le quartier Anglois.

§. XXXVII.

Il faut remarquer qu'il est absolument nécessaire de mettre toujours un petit verre convexe à la pinnule E, ou bien de se servir de l'ombre entiere de cette pinnule, afin d'éviter l'erreur que causeroit le pénombre. Nos Auteurs de Marine prétendent qu'on peut fort bien n'avoir égard qu'au bord supérieur de l'ombre, & que comme ce bord est terminé par les raïons qui viennent du haut du disque du Soleil, la hauteur se trouve trop grande du demi diametre aparent du Soleil ; & qu'ainsi il faut retrancher ce demi diametre pour avoir la hauteur véritable. Mais on reconnoît fort aisément que ce précepte est tout-à-fait défectueux. Si nos yeux étoient parfaitement bons & pouvoient distinguer les plus foibles degrez de lumiere, sans doute qu'en observant la hauteur du Soleil par l'ombre d'un stile, on trouveroit la hauteur du bord supérieur de l'Astre & non pas la hauteur du centre. Mais comme il s'en faut beaucoup que nos yeux aïent tant de délicatesse, nous prenons toujours une partie de la pénombre pour l'ombre même ; & cela fait que l'erreur de la hauteur n'est jamais égale au demi diametre entier du Soleil. Pour vérifier ce que j'avance ici, j'exposai au Soleil le 19 de Juin de cette année (1728.) un morceau de bois très-plat & large de $5\frac{1}{3}$ lignes & je faisois tomber son ombre à environ deux pieds de distance sur un arc de cercle divisé en degrez & en minutes. Cette ombre se trouva plus étroite que le morceau de bois d'environ $2\frac{2}{3}$ lignes qui valoient environ 26 minutes sur l'arc ; & ainsi cette ombre n'étoit pas terminée par des raïons qui venoient des deux bords du Soleil ; puisqu'elle eût été dans ce cas plus étroite que le morceau de bois de 31^{min} 38^{sec}, ou de tout le diametre aparent du Soleil. Je ne voulus pas m'en raporter à mes ſeuls yeux ; pluſieurs perſonnes ſe mettant toujours à deux pieds de diſtance de l'ombre, trouverent toutes qu'elle étoit plus étroite que le morceau de bois ; mais de différentes quantitez ; les unes de 2 $\frac{2}{3}$ lignes, qui valoient, comme je l'ai déja dit, 26 minutes, & les autres de 2 lignes, qui ne valoient que 20 minutes. Or cette obſervation fait voir qu'on ſe trompe très-ſenſiblement lorſqu'on prend la hauteur par le moïen de l'ombre de quelque ſtile ou de quelque marteau, & qu'on retranche enſuite le demi diametre du Soleil ; puiſque l'erreur n'eſt pas égale à ce demi diametre, & qu'elle eſt différente ſelon que les yeux de l'Obſervateur ſont différemment conformez.

§. XXXVIII.

Enfin il n'a été queſtion juſques ici que de la maniere d'obſerver la hauteur du Soleil : mais notre Inſtrument pourra auſſi ſervir à obſerver celle des Etoiles ; pourvû qu'elles ne ſoient point trop élevées. Il faudra faire exprès pour cela un trés-petit trou à l'extremité de la fente de la pinnule C du centre ; on y apliquera l'œil ; & on aprochera les deux pinnules E & F l'une de l'autre, juſqu'à ce qu'on voïe l'horiſon par le bord de l'une & l'Aſtre par le bord de l'autre, & la hauteur ſera enſuite compriſe, comme il eſt évident, entre les deux pinnules. On pourra de cette maniere obſerver la hauteur des Etoiles qui ſont au-deſſous du 10^{me} degré d'élévation, mais lorſqu'elles ſeront plus hautes, cette méthode ne pourra plus être d'uſage ; parce qu'on ne pourra plus gueres voir du même coup d'œil l'Horiſon & l'Etoile. Il faudroit quitter un de ces objets pour regarder l'autre ; on ſeroit même obligé de remuer la tête ; & cela ne pourroit pas manquer de cauſer du dérangement dans la ſituation de l'Inſtrument. Au ſurplus tous les autres Inſtrumens ſeront ſujets au même défaut, & nous avons assez fait voir (§. 12.) que ceux qui prennent d'eux-mêmes leur situation horisontale, sont encore moins propres pour ces sortes d'observations Ainsi tout ce que nous pouvons faire, c'est de choisir des Etoiles qui soient peu élevées ; mais qui soient cependant au-dessus du 2^{me} degré de hauteur, afin que la réfraction soit plus réguliere & plus connuë. Il reste maintenant à parler de cette réfraction & des autres corrections dont la hauteur a besoin. Nous ne dirons rien de la paralaxe ; parce que celle des Etoiles est absolument insensible, & que la plus grande du Soleil n'est que de 10″ selon M. *Cassini*, ou même que de 6″ selon M. *de la Hire*. Mais nous ne pouvons pas nous dispenser de parler de l'inclinaison de l'horison visuel, puisque l'erreur que produit cette inclinaison est particuliere aux Instrumens de la seconde espece. On prend ordinairement pour ligne droite, le raïon visuel conduit de notre œil à l'horison sensible : cependant ce raïon est une ligne courbe ; puisque c'est une portion de la ligne que décrit la lumiere en traversant l'Atmosphere. Il est à propos de considerer ce raïon dans son état de ligne courbe ; quand ce ne seroit que pour reconnoître s'il est permis de négliger sa courbure : mais avant d'examiner cette portion de ligne, il faut que nous tâchions de découvrir la nature de la courbe entiere.

Fin de la premiere Partie.

SECONDE PARTIE.

Des corrections qu'il faut faire à la hauteur aparente des Astres, pour avoir la hauteur véritable.

CHAPITRE PREMIER.

De la réfraction Astronomique.

§. XXXIX.

PLusieurs grands Géometres ont cherché la nature de la *Solaire*, ou de cette ligne courbe que tracent dans l'air les raïons qui nous viennent des Astres : mais ils ont toujours négligé la ſphéricité des différentes couches, dont on peut concevoir que l'Atmoſphere eſt formée. Cependant il eſt certain qu'on doit y faire une expreſſe attention ; & qu'il ne ſuffit pas, comme on le pourroit croire d'abord, de chercher la nature de la *Solaire* pour des couches planes, & de courber enſuite cette ligne à proportion qu'on ſupoſe que les couches ſe courbent elles-mêmes pour devenir Sphériques. Car un raïon de lumiere qui avance ici horiſontalement, fait avec les couches ſupérieures des angles de 30$^{min.}$ d'un degré, de deux degrez &c. & cette diverſité d'angles d'incidence, qui vient principalement de la courbure des couches, doit aporter de la différence dans la refraction même. C'eſt auſſi par cette raiſon qu'on ne peut pas apliquer à l'Atmoſphere, le fameux Théorême avancé par M. *Nevvton* dans ſon Optique, * qu'un raïon de lumiere qui passe à travers plusieurs milieux de différentes densitez, & compris entre des surfaces paralelles, souffre précisement par le trajet de tous ces milieux, la même réfraction que s'il passoit immédiatement du premier au dernier. Cette proposition n'est vraïe que lorsque les surfaces sont planes, & il s'en faut extrêmement qu'on puisse s'en servir pour déterminer les réfractions astronomiques, ni pour découvrir *le pouvoir refringent* qu'a l'air grossier d'ici-bas, par raport à celui qu'a l'air subtil du haut de l'Atmosphere.

§. XL.

Peut-être donc qu'on entreprend ici de donner la premiere solution légitime du problême de la *Solaire*. Pour entrer en matiere, on suposera que KAO (*Fig.* 11.) est
Fig. 11. une portion de la surface de la terre, dont le point C est le centre: on concevra le semidiametre CA prolongé indéfiniment vers D, & on imaginera une courbe BGI qui ait CD pour axe, & dont les ordonnées AB, FG, DI représentent les différentes dilatations de l'air à chaque hauteur au-dessus de la terre; ou plûtôt ces ordonnées doivent marquer les diverses dilatations de la matiere réfractive répanduë dans l'air. Concevant après cela un raïon de lumiere NPA, qui à cause de la réfraction continuelle qu'il souffre en passant toujours dans un milieu plus dense, décrit avant de parvenir à nous la courbe NPA, nous considererons les trois parties consécutives & infiniment petites Pp, $p\pi$, $\pi\varpi$; & les aïant prolongées indéfiniment vers le bas, afin d'avoir les trois tangentes PL, pl, $\pi\lambda$ à la courbe NPA, nous abaisserons du centre C de la terre, les trois perpendiculaires CL, Cl, & Cλ sur ces tangentes. Enfin on tirera les lignes CP, Cπ; & aïant décrit du point C comme centre, les trois arcs PF, Spf,

* Dans la propos. X de la troisiéme Partie du second Livre.

S$\pi\varphi$

$s\pi\varphi$, on élevera perpendiculairement à l'axe CD de la courbe BGI, les trois ordonnées FG, *fg*, $\varphi\gamma$.

Lemme.

§. XLI.

Cela ſupoſé, il eſt évident qu'à cauſe de l'infinie petiteſſe des épaiſſeurs F*f*, *f*φ, on peut ſupoſer que l'ordonnée GF exprime la dilatation de l'air ou de la matiere réfractive qui eſt compriſe dans toute la couche ſphérique, dont FP*pf* eſt une portion, & dont F*f* eſt l'épaiſſeur; & que l'ordonnée *gf* repréſente pareillement la dilatation de la matiere refractive, compriſe dans toute la couche qui eſt imédiatement au-deſſous, & dont *f*φ ou *ps* eſt la petite épaiſſeur. Ainſi le raïon de lumiere fera le petit trajet P*p* ſans ſe courber; mais rendu en *p*, il s'y rompra, parce qu'il rencontrera en cet endroit de l'air plus condenſé; & par conſequent, au lieu de continuer le long de *p*L, il ſe détournera ſelon *pl*; & le détour ſera tel, qu'il y aura même raport de FG au ſinus de l'angle d'incidence que de *fg* au ſinus de l'angle de réfraction. C'eſt ce qui doit arriver ſelon la loi ordinaire des réfractions: mais ſi on conſidere que C*pl*, eſt égal à l'angle d'incidence, & que C*pl* eſt l'angle même de réfraction, on conclura que FG eſt à CL, comme *fg* eſt à C*l*; puiſque dans les deux trianges C*p*L, C*pl* qui ont même hypotenuſe C*p*, les côtez CL, & C*l* ſont en même raiſon que les ſinus des angles C*p*L, C*pl*, & que par la nature de la réfraction, FG doit être au ſinus de l'angle C*p*L, comme *fg* au ſinus de l'angle C*pl*. On prouvera avec la même facilité que *fg* eſt à C*l*, comme $\varphi\gamma$ eſt à Cλ: car le raïon étant parvenu en π en faiſant avec la verticale Cπ, un angle d'incidence Cπl, il ſouffrira dans ce point un ſecond détour, enſuite duquel il avancera ſelon $\pi\lambda$ & fera avec la même verticale Cπ, l'angle de réfraction C

$\pi\lambda$. Mais comme les deux triangles rectangles $C\pi l$, $C\pi\lambda$ ont encore une même hypoteneuse $C\pi$, il est clair que Cl sera à $C\lambda$, comme le sinus de l'angle $C\pi l$ sera au sinus de l'angle $C\pi\lambda$: & qu'ainsi les ordonnées gf & $\gamma\varphi$ qui expriment le raport qui doit être entre les sinus des angles d'incidence & de refraction $C\pi l$ & $C\pi\lambda$, exprimeront aussi le raport qui doit se trouver entre Cl & $C\lambda$; & il y aura donc par consequent même raison de gf à Cl, que de $\gamma\varphi$ à $C\lambda$. Or il résulte de tout cela que GF est à CL, comme $\lambda\varphi$ est à $C\lambda$; puisque l'un & l'autre de ces raports, est égal à celui de gf à Cl. Et comme on peut apliquer le même raisonnement à toutes les autres Parties de la solaire ou de la courbe tracée par le raïon de lumiere; il s'ensuit que les perpendiculaires tirées du centre de la terre sur les tangentes de cette courbe, seront continuellement proportionelles aux ordonnées correspondantes de la courbe IGB des dilatations; c'est-à-dire, que si on tire du centre C de la terre des perpendiculaires CR, CM &c. sur les tangentes NR, AM &c. de la Solaire, il y aura continuellement même raport de ID à CR que de AB à CM, que de GF à CL, &c.

Trouver la courbe des dilatations lorsqu'on connoît la Solaire ou la courbe que suit le raïon de lumiere.

§. XLII.

Fig. 11. Cette propriété de la Solaire & de la courbe des dilatations, peut servir également à découvrir la premiere ou la seconde de ces lignes courbes, lorsque l'autre sera donnée. Il sera toujours très-facile de trouver la seconde aussi-tôt qu'on connoîtra la premiere. Car la connoissance qu'on aura de cette premiere, fera qu'on pourra lui tirer des tangentes par tous ses points, & si on mene ensuite du centre de la terre des perpendiculaires sur ces tangentes, elles exprimeront par leurs longueurs combien

l'air ou la matiere réfractive doit être dilatée en chaque point de la Solaire, & il n'y aura donc qu'à faire les ordonnées correſpondantes de la courbe BGI de la même longueur que ces perpendiculaires. Si on cherche par cette méthode quelle proportion il faut que ſuivent les dilatations à différentes hauteurs au-deſſus de la terre, pour que les raïons de lumiere décrivent des logarithmiques ſpirales, en traverſant l'Atmoſphere ; on verra tout d'un coup qu'il faut que ces diverſes dilatations ſoient en même raiſon, que les diſtances au centre de la terre ; de ſorte que BGI doit être alors une ligne droite. C'eſt ce qui eſt évident. Car la logarithmique ſpirale faiſant toujours le même angle avec ſes apliquées, tous les triangles rectangles CPL, formez par ces apliquées CP, par les tangentes PL & par les perpendiculaires CL à ces tangentes, doivent être ſemblables ; & ainſi il y a toujours même raport entre les perpendiculaires CL & les apliquées CP : mais il ſuit de là que les dilatations GF, qui ſont proportionelles aux perpendiculaires CL (ſelon le lemme précédent) le ſont auſſi aux apliquées CP, ou aux diſtances C P au centre de la terre. On trouvera par la même méthode que pour que les raïons de lumiere tracent des arcs d'Epicycloïde, il faut que les dilatations ſoient comme les ordonnées d'une hyperbole, dont C ſeroit le centre, & CD l'axe déterminé prolongé.

Connoiſſant la courbe des dilatations, trouver la ligne courbe que tracent dans l'Atmoſphere les raïons de lumiere.

§. XLIII.

On peut auſſi, mais avec un peu plus de difficulté, réſoudre le problême inverſe du précédent ; c'eſt-à-dire, découvrir la courbe que tracent les raïons de lumiere, lorſque les diverſes dilatations de la matiere refractive ſont connuës. Pour donner ici une ſolution générale de ce pro-

blême, on nommera a le raïon CA de la terre; c la perpendiculaire CM abaissée du centre C sur la ligne AM, qui est tangente de la solaire, dans le point A où cette
Fig. 11. courbe parvient à nous. On voit assez que CA étant pris pour le sinus total, cette perpendiculaire $CM = c$ est le sinus de l'angle CAM, qui est le complement de la hauteur aparente de l'Astre; puisque CAM est l'angle que fait la solaire NPA avec la verticale CAD, lorsque nous la recevons ici bas. Nous nommerons de plus a la premiere ordonnée AB de la courbe BGI des dilatations: c'est ce que nous pouvons faire, puisque les ordonnées de cette courbe ne représentent point des grandeurs absoluës, mais simplement le raport des dilatations. Enfin z designera toutes les autres ordonnées, comme GF, DI de la même courbe; y ses abscisses CF, CD qui sont égales aux apliquées CP, CN de la solaire APN; & prenant sur la circonférence de la terre les abscisses AP, AO de cette seconde courbe, on les nommera u. Nous aurons après cela, $dy = Ff = SP$; & $du = eE$.

§. XLIV.

Si on fait maintenant attention au Lemme demontré §. 41. que les ordonnées de la courbe des dilatations sont continuellement proportionelles aux perpendiculaires tirées du centre C sur les tangentes de la solaire, on pourra faire cette proportion $AB = a \mid CM = c \parallel GF = z \mid CL = \frac{cz}{a}$. Ainsi la question se réduit à faire ensorte que la courbe ANP que décrit le raïon de lumiere, ait effectivement dans tous ses points, $\frac{cz}{a}$ pour les perpendiculaires comme CL tirées du centre C, sur ses tangentes PL. Pour cela je cherche la petite ligne ou le petit arc pS, par cette analogie; $CE = a \mid eE = du \mid Cp = y \mid pS =$

$\frac{ydu}{a}$; & ajoutant le quaré de pS avec celui de $SP = dy$, & tirant la racine quarée de la somme, il me vient $\sqrt{\frac{y^2du^2}{a^2} + dy^2} = \sqrt{\frac{y^2du^2 + a^2dy^2}{a}}$ pour la valeur de pP. La ressemblance du petit triangle pSP & du grand CLP me fait ensuite découvrir la valeur de la perpendiculaire CL par cette analogie, $pP = \frac{\sqrt{y^2du^2 + a^2dy^2}}{a} \mid pS = \frac{ydu}{a} \parallel CP = y. \mid CL = \frac{y^2du}{\sqrt{y^2du^2 + a^2dy^2}}$. Et comme cette perpendiculaire CL que nous trouvons ainsi égale à $\frac{y^2du}{\sqrt{y^2du^2 + a^2dy^2}}$, le doit être aussi à $\frac{cz}{a}$, nous aurons l'équation $\frac{y^2du}{\sqrt{y^2du^2 + a^2dy^2}} = \frac{cz}{a}$, dont nous tirons $a^2y^4du^2 = c^2z^2y^2du^2 + a^2c^2z^2dy^2$, & $a^2y^4du^2 - c^2z^2y^2du^2 = a^2c^2z^2dy^2$, & enfin la formule $du = \frac{aczdy}{y\sqrt{a^2y^2 - c^2z^2}}$, ou $du = \frac{czdy}{y\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2}z^2}}$. Or on voit assez qu'on peut toujours construire aisément la solaire par cette formule; pourvû qu'on supose connuë la quadrature des courbes. C'est ce qu'il n'est pas necessaire d'expliquer. Nous pourrions aussi nous dispenser de dire que pour trouver la valeur de u ou de l'arc AE par le calcul, il n'y a qu'à tirer l'expression de z en y, de l'équation qui marque la nature de la courbe BGI des dilatations, & qu'introduisant cette expression à la place de z, Fig. 11. dans la formule $du = \frac{czdy}{y\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2}z^2}}$, le second membre ne contiendra plus que y de seule variable avec sa differentielle; ce qui nous permetra toujours d'en prendre l'intégrale, & de trouver au moins par aproximation, la valeur de l'arc u qui répond à chaque apliquée y.

§. XLV.

On peut non-seulement construire de cette sorte la ligne APN que tracent dans l'air les raïons de lumiere; mais on peut toujours aussi découvrir la quantité de la réfraction astronomique, ou la quantité dont ces raïons se courbent depuis leur entrée dans l'Atmosphere jusqu'à nous. La courbure qu'ils souffrent en chaque point p, est mesurée par l'angle infiniment petit que font deux tangentes voisines PL, pl; & la courbure totale est égale à l'angle que font les tangentes aux deux extremitez de la courbe. Il suit de là que si nous abaissons du centre C de la terre, des perpendiculaires CL, Cl sur les deux tangentes PL, pl; nous pourrons regarder le petit arc xX compris entre ces deux perpendiculaires, comme l'élement de la réfraction astronomique, puisqu'il mesurera l'angle LCl, qui est égal à celui que font les deux tangentes: & par la même raison l'arc entier KZ intercepté entre les deux lignes CMK & CR, qui sont perpendiculaires aux tangentes AM & NR, aux deux extremitez de la courbe, pourra être pris pour la courbure que souffre le raïon dans tout son trajet. Or si on se souvient que CL $= \frac{cz}{a}$, on aura $\frac{cdz}{a}$ pour la petite partie LH dont CL surpasse Cl; & on pourra découvrir la valeur de ce petit arc Xx par cette analogie PL $= \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CL}^2} = \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2}z^2}$ | LH $= \frac{cdz}{a}$ || CX $= a$ | Xx. Il vient de cette sorte $\frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2}z^2}}$ pour l'expression de ce petit arc: expression qui est générale, & qui convient également à toutes les différentes hypotheses des dilatations de l'air.

Mais on la réduira, comme on le ſçait, à chaque hypotheſe particuliere, en ſubſtituant à la place de z ſa valeur exprimée en y; & il ne reſtera plus enſuite qu'à en prendre l'intégrale, pour avoir la quantité $\int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ de la réfraction aſtronomique.

§. LXVI.

Il ſeroit aſſez facile ſelon cela, ſi on connoiſſoit les diverſes dilatations z de la matiere réfractive à différentes hauteurs au-deſſus de la terre, de découvrir la nature de la courbe que décrivent les raïons de lumiere; & le raport des réfractions: car on n'auroit toujours qu'à ſe ſervir pour la premiere de ces déterminations de la formule $u = \int \frac{czdy}{y\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ & pour la ſeconde de la formule $\int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$. Mais malheureuſement on ne connoît point les dilatations de la matiere réfractive, dont on auroit beſoin. On a bien quelque connoiſſance des différentes dilatations de l'air; mais il eſt certain que les réfractions n'en ſuivent pas le raport. En effet l'air pris à une grande hauteur au-deſſus de la terre, eſt mille fois & dix mille fois plus dilaté qu'ici bas; & ainſi, ſi les ſinus des angles d'incidence & de réfraction, ſuivoient le raport ſimple de ces dilatations, comme l'ont ſupoſé preſque toutes les perſonnes qui ont traité ce ſujet, un raïon de lumiere qui ſeroit d'abord horiſontal, devroit ſe rompre ſi conſidérablement dans l'Atmoſphere, qu'il deviendroit preſque vertical, avant de parvenir juſqu'à nous.

C'est ce qui nous a obligé de suposer que les réfractions étoient causées dans l'Atmosphere par une matiere différente de l'air, & que nous avons apellée *réfractive.* Mais si on ne veut point admettre l'existence de cette matiere, nous ne nous en mettons point en peine. Car les sinus des angles d'incidence & de réfraction, qui ne sont point proportionels aux dilatations de l'air, le sont certainement à quelque puissance ou à quelque fonction de ces dilatations : or on n'a qu'à regarder la courbe BGI, comme exprimant les dilatations de l'air élevées à ces puissances ou à ces fonctions quelles quelles soient.

Déterminer la Solaire pour toutes les Hypotheses dans lesquelles les dilatations z *sont proportionelles aux distances* y *au centre de la terre, élevées à une puissance quelconque* m.

§. XLVII.

Mais enfin, puisque nous ne connoissons point la courbe BGI des dilatations, nous allons suposer que ses ordonnées FG $= z$ sont égales à une puissance quelconque m des distances y au centre de la terre ; c'est-à-dire, que nous suposerons $z = y^{m}$, ou plûtôt $z = a^{1-m} y^{m}$, afin d'observer la loi des Homogenes. De cette sorte nous comprendrons dans notre calcul une infinité de différentes hypotheses de dilatations, puisque m peut représenter une infinité de differentes puissances. Cette suposition donne $dz = ma^{1-m} y^{m-1} dy$, & si on introduit cette valeur à la place de dz, & $a^{1-m} y^{m}$ à la place de z, dans les formules générales $\frac{czdy}{y\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ & $\int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$; la premiere qui exprime l'élement du des abscisses AE ou

ou AO de la Solaire, ſe changera en . . . .
$\frac{ca^{1-m}y^{m}dy}{y\sqrt{y^2-\frac{c^2a^{2-2m}}{a^2}y^{2m}}}=\frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2-c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$ & on aura donc par conſéquent $u=\int\frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2-c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$, pour ces abſciſſes, ou pour les arcs AE, ou AO qui répondent à chaque apliquée CP ou CN $=y$. D'un autre côté, la ſeconde formule $\int\frac{cdz}{\sqrt{y^2-\frac{c^2}{a^2}z^2}}$, qui exprime la quantité de la réfraction aſtronomique, ſe changera par de pareilles ſubſtitutions, en $\int\frac{mca^{1-m}y^{m-1}dy}{\sqrt{y^2-\frac{c^2a^{2-2m}}{a^2}y^{2m}}}=\int\frac{mca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2-c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$ & c'eſt donc là la quantité de la réfraction. Il nous reſte maintenant à trouver les valeurs de ces deux intégrales $\int\frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2-c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}=u$, & $\int\frac{mca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2-c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$. Mais c'eſt aſſez que nous en trouvions une, pour que nous aïons les deux; car on voit qu'elles ſont dans un raport conſtant, que la premiere ou que le progrès horiſontal OA du raïon de lumiere à meſurer ſur la circonférence de la terre, eſt à la ſeconde intégrale ou à la réfraction aſtronomique, comme l'unité eſt à m: & c'eſt ce qui eſt très-remarquable.

§. XLVIII.

On peut trouver très-aiſément ces deux intégrales, en ſupoſant la rectification des arcs de cercle. On n'a d'abord qu'à tirer du centre C de la terre (Figure 12.) une Fig. 12.

Fig. 12. ligne $C\Delta$ parallele à AM, qui est tangente à l'extremité A de la Solaire NPA; l'arc $A\Delta$ sera du même nombre de degrez, que l'angle CAM, qui est le complement de la hauteur aparente de l'Astre; & le sinus droit $A\Sigma$ sera égal à $CM = c$. Si on regarde ensuite quelque apliquée CP (y) de la Solaire, comme connuë; on n'aura qu'à faire le sinus droit $TV = ca^{1-m}y^{m-1}$, & multiplier l'arc compris entre le point A & le point T par $\frac{1}{m-1}$ pour avoir l'arc AE, par l'extremité E duquel on doit faire passer l'apliquée CP: & multipliant ce même arc AT par $\frac{m}{m-1}$, il viendra la quantité de la réfraction que souffre le raïon de lumiere dans le trajet PA. Pour démontrer cela, je conçois la ligne tv parallele & infiniment proche de TV; & du point t je tire la petite ligne $t6$ parallelement à $C\Delta$. Il est clair que $ca^{1-m}y^{m-1}$ étant la valeur de TV, nous aurons $\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}} = \sqrt{\overline{CT}^2 - \overline{TV}^2}$ pour celle de CV, & si nous prenons la différentielle de $ca^{1-m}y^{m-1}$, il nous viendra $\overline{m-1} \times ca^{1-m}y^{m-2}dy$ pour $T6$. Mais comme le grand triangle CVT est semblable au petit $T6t$, nous pouvons faire cette proportion $CV = \sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}} \mid CT = a \parallel T6 = \overline{m-1} \times ca^{1-m}y^{m-2}dy \mid Tt$, & nous trouverons de cette sorte que $Tt = \frac{\overline{m-1} \times ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$. Or il suit de là que l'arc entier AT, qui est la somme de tous les petits arcs Tt, sera la valeur de l'intégrale $\int \frac{\overline{m-1} \times ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{m-2}}}$: car y étant suposée égale à a, comme cela arrive au point

A, le sinus TV $= ca^{1-m}y^{m-1}$ se trouve égal à $A\Sigma = c$, & l'arc est par conséquent nul ; mais à mesure que y augmente, le sinus TV s'éloigne de $A\Sigma$, & l'arc AT croît d'une nouvelle partie Tt qui est, comme on le voit, continuellement égale à $\frac{\overline{m-1} \times ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$. Mais enfin puisque l'arc AT est la valeur de l'intégrale . . . $\int \frac{\overline{m-1} \times ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$, il est évident qu'il ne reste plus qu'à le multiplier par $\frac{1}{m-1}$ pour avoir l'intégrale . . $\int \frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}} = u$, qui est la valeur de l'abscisse AE, qui répond à chaque apliquée CP de la Solaire ; & que si on multiplie ce même arc AT par $\frac{m}{m-1}$, on aura l'intégrale $\int \frac{mca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$ qui exprime la quantité de la réfraction. Rien n'empêchera de faire la même chose pour toutes les autres apliquées y. Mais il est évident que si DN est la surface supérieure de l'Atmosphere, ou que si la matiere réfractive ne change plus de densité au-dessus de cette surface ; il faudra prendre CN, pour derniere apliquée, puisque le raïon de lumiere ne souffrira aucune réfraction au-dessus du point N. Ainsi si on fait le sinus droit $\Theta\Xi$ égal à ca^{1-m} CN^{m-1}, ce sera l'arc $A\Theta$ intercepté entre les sinus $A\Xi$ & $\Theta\Xi$ qu'il faudra multiplier par $\frac{1}{m-1}$ pour avoir l'abscisse correspondante AO ; & qu'il faudra multiplier par $\frac{m}{m-1}$ pour avoir la réfraction astronomique, ou la courbure totale que reçoit le raïon de lumiere, en traversant toute l'épaisseur de l'Atmosphere, depuis N jusqu'en A.

Fig. 12.

Fig. 12.

§. XLIX.

Il ſuit de tout cela qu'il n'importe que l'expoſant m ſoit un nombre poſitif ou négatif, entier ou rompu, & que pourvû qu'il ne ſoit pas irationel, on peut toujours déterminer géometriquement la quantité de la réfraction, & tracer géometriquement la Solaire. Car il ſera toujours poſſible de trouver la valeur $ca^{1-m}y^{m-1}$ des ſinus TV & ΘΞ pour les apliquées CP & CN : & l'arc AT ou AΘ étant déterminé, ou pourra toujours découvrir la réfraction, auſſi-bien que l'arc AE ou AO qui ſert d'abſciſſe à l'apliquée CP ou CN : puiſque ces arcs ſont des multiples ou des ſoûmultiples de l'arc AT ou AΘ, & que nous avons des méthodes géometriques, pour diviſer un arc, ou pour le multiplier, ſelon quel raport nous voulons, auſſi-tôt que ce raport eſt de nombre à nombre. Il faut cependant qu'outre l'irationalité de l'expoſant m, nous exceptions encore un cas, dans lequel la Solaire ſe trouve être une courbe méchanique. C'eſt lorſque les différentes dilatations de la matiere réfractive ſont en même raiſon que ſes diſtances au centre de la Terre. Dans ce cas z eſt égale ou proportionelle à y; m deſigne l'unité, & la Solaire eſt une logarithmique ſpirale. C'eſt ce qu'on reconnoît par la formule $u = \int \frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$, qui ſe réduit à $u = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} \int \frac{ady}{y}$, laquelle apartient à la logarithmique ſpirale. C'eſt auſſi ce qui eſt conforme à ce qu'on a vû cy-devant, (§. 42.) que pour que les raïons de lumiere ſuivent cette ligne courbe, il faut que les dilatations des différentes couches de l'Atmoſphere, ſoient proportionelles à leurs diſtances au centre de la terre.

Fig. 12.

De la construction de la Table des réfractions ; & du choix d'une hypothese des dilatations de l'air.

§. L.

On n'insistera pas davantage sur la nature de la Solaire, & on se bornera à parler des réfractions. Il est évident que puisqu'elles sont toujours proportionelles à l'arc $A\Theta$ intercepté entre le sinus $A\Xi$ (c) du complement de la hauteur aparente, & le sinus $\Theta\Xi$ ($ca^{1-m}y^{m-1}$) qui a un raport constant avec le sinus $A\Xi$, & qui est toujours égal au produit de ce sinus par $a^{1-m}y^{m-1}$ ou par $a^{1-m}CN^{m-1}$; il est, dis-je, évident qu'il sera toujours facile de les calculer (les réfractions), par le moïen des tables des sinus ; pourvû qu'on connoisse l'exposant m, & la plus grande apliquée CN. On pourra aussi en venir à bout par le moïen des séries : car si continuant de nommer a le semi-diametre CA de la Terre & C le sinus complement $A\Xi$ de la hauteur aparente, nous désignons par b le sinus de cette même hauteur, & nous suposons $\frac{1}{h} = \frac{m}{m-1}$ & $1-g = a^{1-m}CN^{m-1}$; nous aurons $c \times \overline{1-g}$ ou $c - cg$ pour le sinus $\Theta\Xi$ & la série infinie $\frac{acg}{b} - \frac{ac^3}{2b^3}g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5}g^3$, &c. pour la valeur de l'arc $A\Theta$, comme on peut le voir aisément; & il ne restera donc plus qu'à multiplier cette série par $\frac{1}{h} = \frac{m}{m-1}$ pour avoir $\frac{ac}{bh}g - \frac{ac^3}{2b^3h}g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5h}g^3$, &c. pour la quantité de la réfraction. Mais il est clair que faute de connoître les quantitez g & h, nous ne pouvons point faire usage de cette série. Nous ne connoissons point h,

Fig. 12. parce que nous ignorons la valeur de m, ou que nous ne ſçavons pas laquelle de toutes les hypotheſes repréſentées par l'équation $z = a^{1-m} y^m$ eſt la plus conforme à la nature : & nous ne connoiſſons pas non plus g, parce qu'outre que la valeur de m nous eſt inconnuë, nous ne connoiſſons point auſſi la hauteur de l'Atmoſphere, ou la longueur de la plus grande apliquée CN.

§. L I.

Mais rien n'eſt plus facile que de découvrir ces deux grandeurs h & g, auſſi-tôt qu'on a ſeulement trouvé par des obſervations exactes, la réfraction aſtronomique pour deux différentes hauteurs aparentes. Car comparant l'expreſſion générale $\frac{ac}{bh} g - \frac{ar^3}{2b^3h} g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5h} g^3$, &c. avec ces deux réfractions connuës par obſervation ; on aura deux différentes équations, & on ſçait qu'il n'en faut pas davantage, pour pouvoir déterminer deux inconnuës. C'eſt ce qu'on va tâcher d'exécuter ici ; mais en emploïant comme cela eſt abſolument néceſſaire la methode des ſuites & celle de leur retour, parce que, comme il s'agit d'arcs & de ſinus, l'opération apartient à la géometrie tranſcendante. Nous ſupoſons d'abord pour une plus grande facilité que la réfraction horiſontale eſt une des deux que nous connoiſſons, & nous la déſignerons par e : l'autre réfraction connue, nous la nommerons f, & nous nommerons q le ſinus de la hauteur aparente & p le ſinus de complement. Si nous introduiſons enſuite q & p à la place de b & de c dans l'expreſſion générale $\frac{ac}{bh} g - \frac{ac^3}{2b^2h} g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5h} g^3 -$ &c. des réfractions, nous aurons $\frac{ap}{qh} g - \frac{ap^3}{2q^2h} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^5h} g^3 -$ &c. pour la réfraction f qui convient à la hauteur aparente, dont q eſt le sinus & p le cosinus ; & ainsi nous aurons $f = \frac{ap}{qh} g - \frac{ap^3}{2q^2h} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^5h} g^3 -$ &c. Je change cette équation en $h = \frac{ap}{qf} g - \frac{ap^3}{2q^2f} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^5f} g^3 -$ &c. & je trouve par la methode qu'on apelle le retour des suites ; $g = \frac{qf}{ap} h + \frac{f^2}{2a^2} h^2 - \frac{f^3q}{6a^3p} h^3 - \frac{f^4}{24a^4} h^4 +$ &c. Voilà donc une valeur de g qui nous est fournie par la seconde hauteur aparente & par la réfraction astronomique f qui lui convient : mais la premiere hauteur & la premiere réfraction ; c'est-à-dire, la réfraction horisontale e peut nous fournir aussi une valeur de g, & il est évident que pour la trouver tout d'un coup, nous n'avons qu'à metre e à la place de f ; & *zero* & a à la place de q & de p, parce que lorsqu'un Astre paroît dans l'horison, le sinus de sa hauteur aparente est nul, & le sinus complement de cette hauteur est égal au sinus total a. Il viendra de cette sorte $g = \frac{e^2}{2a^2} h^2 - \frac{e^4}{24a^4} h^4 +$ &c ; & combinant cette seconde valeur de g avec la premiere, on fera disparoître g, & on aura l'équation $\frac{qf}{ap} h + \frac{f^2}{2a^2} h^2 - \frac{f^3q}{6a^3p} h^3 - \frac{f^4}{24a^4} h^4 +$ &c. $= \frac{e^2}{2a^2} h^2 - \frac{e^4}{24a^4} h^4 + \frac{e^6}{720a^6} h^6 -$ &c. qui ne contient plus que la seule inconnuë h. Mais cette derniere équation se réduit à $\frac{qf}{ap} = \frac{e^2 - f^2}{2a^2} h + \frac{f^3q}{6a^3p} h^2 - \frac{e^4 + f^4}{24a^4} h^3 - \frac{f^5q}{120a^5p} h^4 +$ &c, & elle donne par le retour des suites $h = \frac{2aqf}{p \times \overline{e^2 - f^2}} - \frac{4af^5q^3}{3p^3 \times \overline{e^2 - f^2}^3}$

Fig. 12.

$$+\frac{16\,af^9q^5 + 6aq^3f^3p^2 \times \overline{e^2 - f^2} \times \overline{e^4 - f^4}}{9p^5 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,5}}$$

$$\frac{+300aq^5p^2f^7 \times \overline{e^2 - f^2} \times \overline{f^4 - e^4} - 400aq^7f^{13} + 36aq^5p^2f^9 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,2}}{135p^7 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,7}}$$

&c. Ainsi on peut maintenant regarder h, comme connuë; puisque la série précédente qui l'exprime, n'est formée que de grandeurs connuës, & que d'ailleurs il est facile de voir que cette série est très-convergente. Enfin il ne reste plus qu'à introduire cette valeur de h dans l'équation $g = \frac{e^2}{2a^2}h^2 - \frac{e^4}{24a^4}h^4 + \frac{e^6}{720a^6}h^6$ &c. pour avoir $g = \frac{2q^2e^2f^2}{p^2 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,2}} - \frac{8q^4e^2f^6 - 2q^4e^4f^4}{3p^4 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,4}}$

$$\frac{+400q^6e^2f^{10} + 160q^6e^4f^8 + 8q^6e^6f^6 + 120q^4p^2e^2f^4 \times \overline{e^2 - f^2} \times \overline{e^4 - f^4}}{90p^6 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,6}}$$

&c. & il viendra donc $1 - g = 1 - \frac{2q^2e^2f^2}{p^2 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,2}} +$

$$\frac{8q^4e^2f^6 + 2q^4e^4f^4}{3p^4 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,4}}$$

$$\frac{-400q^6e^2f^{10} - 160q^6e^4f^8 - 8q^6e^6f^6 - 120q^4p^2e^2f^4 \times \overline{e^2 - f^2} \times \overline{e^4 - f^4}}{90p^6 \times \overline{e^2 - f^2}^{\,6}}$$

+ &c.

§. LII.

Connoissant ainsi les valeurs de h & de g, rien n'empêche de trouver à présent la réfraction astronomique, pour quelle hauteur aparente on voudra. On n'a qu'à introduire les valeurs de h & de g dans la formule générale $\frac{ac}{bh}g - \frac{ac^3}{2b^3h}g^2 +$ &c. du §. 50. Ou si on veut découvrir la même chose par les tables des sinus, on multipliera le sinus AM $= c$ du complement de la hauteur proposée par la valeur de $a^{1-m}y^{m-1}$ ou de a^{1-m}

CN^{m-1}

CN^{m-1} que fournit la derniere série du §. 51. en donnant la valeur de $1-g$; & on aura au produit le sinus $\Theta\Xi = ca^{1-m}CN^{m-1}$. On cherchera ensuite dans les Tables à quel arc $\Theta\Delta$ ce sinus répond; & retranchant cet arc de celui $A\Delta$ du complement de la hauteur aparente, il viendra l'arc $A\Theta$, qu'il ne restera plus qu'à multiplier par Fig. 12.

$\frac{1}{h} = \frac{m}{m-1}$, ou qu'à diviser par h, dont la série

$\frac{2aqf}{p \times \overline{e^2 - f^2}} - \frac{4af^3q^3}{3p^3 \times \overline{e^2 - f^2}}$, &c. est l'expression; & il viendra au quotien la réfraction qu'on vouloit découvrir. On fera la même chose pour toutes les autres hauteurs aparentes, & on trouvera donc de cette sorte toutes les réfractions, en suposant simplement qu'on en connoît deux par les observations, sçavoir l'une (e), lorsque l'Astre paroît dans l'horison; & l'autre (f), lorsque l'Astre est élevé d'une hauteur aparente, dont q est le sinus & p le sinus de complement, pendant que a désigne le sinus total.

§. LIII.

Le Livre de la connoissance des Tems marque 32′ 20″ pour la réfraction horisontale; mais comme les observations donnent presque toujours cette réfraction un peu plus grande, on l'a suposée de 33′ complettes. On a pris ensuite la réfraction qui apartient au 26me degré de hauteur, & on l'a fixée à 2′ 12″, en se conformant aux Tables de M. de la Hire. Si après cela on prend 10000000 pour le sinus total, & qu'on cherche combien valent à proportion les petits arcs de 33′ & de 2′ 12″ de réfraction, on trouvera 95944 & 6400, comme on le peut voir tout d'un coup en cherchant dans les Tables les sinus de ces arcs, parce que leurs sinus leur sont sensiblement égaux. Ainsi 10000000 étant la valeur de a; 95944 sera celle de e & 6400 celle de f; & on aura de plus 4383712 pour le sinus q de 26 degrez, & 8987940 pour le sinus p de complement. Or introduisant ces nombres

Fig. 12.

dans la ſérie $1 - g = 1 - \frac{2q^2e^2f^2}{p^2 \times \overline{e^2 - f^2}^2} +$

$\frac{8q^4e^2f^6 + 2q^4e^4f^4}{3p^4 \times \overline{e^2 - f^2}^4}$

$\frac{-400q^6e^2f^{10} - 160q^6e^4f^8 - 8q^6e^6f^6 - 120q^4p^2e^2f^4 \times \overline{e^2 - f^2} \times \overline{e^4 - f^4}}{90p^6 \times \overline{e^2 - f^2}^6}$

$+$ &c, on trouvera $\frac{9978668785}{10000000000}$ pour la valeur de $1 - g$ ou de $a^{1-m}CN^{m-1}$: & il faut remarquer que cette ſérie eſt ſi convergente, qu'il n'eſt pas néceſſaire de pouſſer l'aproximation au-delà du ſecond terme. L'autre ſérie $h = \frac{2aqf}{p \times \overline{e^2 - f^2}^2} - \frac{4af^5q^3}{3p^3 \times \overline{e^2 - f^2}^3}$

$\frac{+16af^9q^5 + 6aq^3f^3p^2 \times \overline{e^2 - f^2} \times \overline{e^4 - f^4}}{9p^5 \times \overline{e^2 - f^2}^5}$ + &c. qui eſt également convergente, donnera en même-tems $\frac{22458}{3300}$ pour la valeur de h, & on aura donc $\frac{3300}{22458}$ pour celle de $\frac{1}{h}$ ou de $\frac{m}{m-1}$.

§. LIV.

Ainſi c'eſt la fraction $\frac{9978668785}{10000000000}$ qui exprime le raport conſtant des ſinus AΣ & ΘΞ, entre leſquels l'arc AΘ eſt intercepté, & c'eſt $\frac{3300}{22458}$ qui marque le raport de cet arc & de la réfraction. C'eſt-à-dire qu'on doit toujours multiplier le ſinus de complement AΣ de chaque hauteur aparente, par $\frac{9978668785}{10000000000}$ pour avoir le ſinus ΘΞ; & que lorſque l'arc AΘ eſt trouvé en degrez, minutes & ſecondes, il faut le multiplier par $\frac{3300}{22458}$ pour avoir la réfraction requiſe. Si on nous propoſe, par exemple, 10 degrez de hauteur aparente, nous multiplierons le ſinus complement 9848077 de cette hauteur par $\frac{9978668785}{10000000000}$, ou ce qui eſt la même choſe, nous retrancherons du logarithme 9. 9933515 de ce ſinus, le nombre conſtant 9274, parce que $-$ 9274 eſt le logarithme de $\frac{9978668785}{10000000000}$. Il nous viendra 9. 9924241, pour le logarithme du ſinus ΘΞ qui répond à 79°. 19′. 45″; & ainsi l'arc A⊖ sera de 40′. 15″ ou de 2415″; & si on le multiplie par le nombre constant $\frac{2300}{22458} = \frac{1}{h} = \frac{m}{m-1}$ on trouvera 355″ ou 5′. 55″ pour la quantité de la réfraction qu'on vouloit découvrir. C'est de cette sorte que nous avons calculé la Table suivante. Fig. 12.

Nouvelle Table des réfractions Astronomiques.

Hauteurs aparentes.	Réfractions.		Hauteurs aparentes.	Réfractions.		Hauteurs aparentes.	Réfractions.	
Deg.	Min.	Sec.	D.	Min.	Sec.	D.	Min.	Sec.
0	33		31	1	47	61		35
1	25	20	32	1	43	62		34
2	19	47	33	1	39	63		32
3	15	50	34	1	35	64		30
4	13	1	35	1	32	65		29
5	10	58	36	1	29	66		28
6	9	25	37	1	26	67		27
7	8	5	38	1	23	68		26
8	7	18	39	1	20	69		25
9	6	3	40	1	17	70		24
10	5	55	41	1	15	71		22
11	5	24	42	1	12	72		21
12	4	57	43	1	9	73		20
13	4	35	44	1	6	74		19
14	4	15	45	1	4	75		17
15	3	58	46	1	2	76		16
16	3	43	47	1	0	77		15
17	3	29	48		58	78		13
18	3	17	49		56	79		12
19	3	6	50		54	80		11
20	2	56	51		52	81		10
21	2	47	52		50	82		9
22	2	39	53		48	83		8
23	2	32	54		46	84		7
24	2	25	55		45	85		6
25	2	18	56		43	86		4
26	2	12	57		42	87		3
27	2	6	58		40	88		2
28	2	1	59		38	89		1
29	1	56	60		37	90		0
30	1	52						

Fig. 12.

§. LV.

Il n'est pas nécessaire de s'arrêter ici à expliquer l'usage de cette Table. Tous les Pilotes un peu instruits dans la théorie de leur art, sçavent assez que les réfractions sont communes aux hauteurs mesurées par toutes sortes d'instrumens ; & que puisque ces réfractions font paroître les Astres un peu plus élevez qu'ils ne sont en effet, on doit toujours retrancher la réfraction de la hauteur aparente, pour avoir la hauteur véritable. On n'insiste pas davantage sur cet article. Mais les Lecteurs seront sans doute bien-aises de connoître la valeur de m, afin de sçavoir le degré de l'équation $z = a^{1-m} y^m$ & de connoître quelle est l'hypothese qui sert de fondement à nôtre table. Nous avons trouvé (§. 15.) que $\frac{a}{b}$ ou $\frac{m}{m-1} = \frac{3300}{22458}$: mais cette fraction $\frac{3300}{22458}$ doit être regardée comme *négative*, parce qu'elle marque le raport de l'arc A☉ à la réfraction astronomique, & que l'arc A☉ est *négatif*, parce que les sinus TV ou ☉Ƶ diminuent ici à mesure que les apliquées AP, ou AN $= y$ augmentent. Ainsi au lieu de l'équation $\frac{m}{m-1} = \frac{3300}{22458}$, nous avons $\frac{m}{m-1} = -\frac{3300}{22458}$; d'où nous tirons $25758\, m = 3300$ & $m = \frac{3300}{25758}$ & si nous mettons cette valeur à la place de m dans l'équation $z = a^{1-m} y^m$ de la courbe BGI des dilatations, il viendra $z = a^{\frac{22458}{25758}} \times y^{\frac{3300}{25758}}$ ou $z^{25758} = a^{22458} y^{3300}$; & c'est donc là l'équation qui représente nôtre hypothese particuliere ; hypothese qui est préferable à la multitude infinie d'autres renfermées dans l'équation $z = a^{1-m} y^m$. Il est vrai que quelque sistême qu'on embrasse sur cette matiere, il arrive presque toujours que les réfractions sont proportionelles à un arc A☉ intercepté entre deux sinus AƵ, ☉Ƶ qui ont entr'eux un raport constant. Mais il suffit que ce raport soit différent, ou que les deux sinus soient pris en quelqu'autre endroit du quart de cercle, pour que les réfractions suivent une autre progression, & que la Table soit différente ; & enfin nôtre hypothese a toujours cet avantage singulier, d'être choisie entre une infinité d'autres. On pouvoit bien avoir fait quatre ou cinq différentes supositions & examiné ensuite laquelle étoit la meilleure : mais ce n'est qu'en suivant une méthode semblable à celle qu'on vient d'expliquer qu'on pouvoit pousser la discussion infiniment plus loin ; & choisir, non pas entre quatre ou cinq hypotheses, mais entre une infinité. Fig. 12.

§. LVI.

Nous pouvons dire aussi à l'avantage de nos calculs, qu'ils s'accordent assez exactement avec les observations des plus sçavans Astronomes. Après que *Tycho* eut donné dans le premier livre de ses *Progymnasmata* des Tables des réfractions déduites de ses observations, personne ne toucha à cette matiere, jusqu'au tems du célébre feu M. *Cassini*, qui l'examina le premier avec des yeux de Géometre, qui inventa une hypothese très-ingénieuse, & qui démontra que les réfractions devoient alterer, jusqu'au zénit, la hauteur des Astres. La Table de la connoissance des Tems est calculée sur cette hypothese ; mais M. *Cassini* qui ne travaille pas aujourd'hui avec moins d'assiduité ni moins de succès que son illustre pere, à perfectioner l'Astronomie, a remarqué que les réfractions sont un peu plus grandes qu'elles ne sont marquées dans la table, lorsque l'Astre est tout-à-fait proche de l'horison ; qu'à très-peu de hauteur, elles deviennent un peu plus petites, & qu'ensuite elles commencent de rechef à surpasser celles de la table. Il suit de là que l'hypothese ancienne ne représente pas bien la progression des réfractions ; & c'est aussi ce qu'a observé feu M. *de la Hire*. Mais si on examine la nouvelle table que nous

Fig. 12. donnons ici, on reconnoîtra que cette progression y est beaucoup mieux observée ; & nous pourrions montrer en particulier, que nos réfractions sont effectivement plus petites que celles de la connoissance des tems depuis environ la 5me minute de hauteur aparente jusqu'un peu audessous du 4me degré, & qu'ensuite elles deviennent un peu plus grandes. Après tout notre table ne doit être principalement exacte dans ces climats-ci, que pendant l'été ; & il est certain que si on vouloit en construire une autre pour l'hyver, il faudroit suposer la réfraction horisontale beaucoup plus forte, & telle qu'on l'observe ordinairement dans cette saison. On se serviroit également pour cela des séries $1 \frac{-2q^2e^2f^2}{p^2 \times \overline{e^2 - f^2}^2} + \frac{8q^4e^2f^6 + 2q^4e^4f^4}{3p^4 \times \overline{e^2 - f^2}^4}$ $-$ &c. & $\frac{2aqf}{p \times \overline{e^2 - f^2}} - \frac{4af^5q^3}{3p^3 \times \overline{e^2 - f^2}^3} +$ &c : de la premiere pour trouver l'exposant $1 - g$ du raport qu'il faudroit metre entre les sinus AZ & $\odot Z$; & de la seconde, pour découvrir l'exposant $\frac{1}{h}$ ou $\frac{m}{m-1}$ du raport de l'arc $A\odot$ à la réfraction.

CHAPITRE II.

De l'Inclinaison de l'Horison visuel.

§. LVII.

SI on s'étoit déterminé dans la premiere Partie, en faveur d'un Instrument qui portât son horison avec lui, on n'auroit simplement qu'à retrancher la réfraction astronomique de la hauteur aparente pour avoir la hauteur véritable. Mais comme on a choisi un Instrument d'une autre espece, on est obligé de faire encore une correction à la hauteur. Car lorsqu'on est élevé au-dessus de la Mer, & qu'on regarde son extremité aparente, le raïon visuel n'est pas de niveau, il est incliné du côté de la Mer; & il est plus ou moins incliné, selon qu'on est plus ou moins élevé. Or cette inclinaison doit alterer la hauteur des Astres; puisque la hauteur n'est autre chose que l'angle formé par le raïon de l'Astre & par une ligne parfaitement horisontale; & qu'au lieu de cette derniere ligne on en emploïe une qui est inclinée. Si (par exemple) le cercle ADM (Fig. 13.) représente la circonférence de la terre, & si un observateur est situé en B & élevé de la quantité AB au-dessus de la surface de la Mer, il n'y a qu'à tirer du point B la ligne BD qui touche la circonférence du cercle en quelque point D, & cette tangente représentera le raïon de l'horison visuel: de sorte que ce sera au-dessus de cette ligne que l'observateur prendra la hauteur des Astres, faute de pouvoir la prendre immédiatement au-dessus de la ligne FBG, qui est parfaitement de niveau. Mais on voit que l'observateur se trompera de l'angle FBD dont l'horison visuel est incliné: & que pour corriger l'erreur, il faut ajouter cet angle FBD à la hauteur aparente de l'Astre, lorsqu'on observe cette hauteur * *par derriere*.

Fig. 12.

Fig. 13.

§. LVIII.

Nous disons qu'il faut ajouter à la hauteur observée de l'Astre, l'inclinaison de l'horison aparent, lorsqu'on prend hauteur *par derriere*: c'est ce qui est sensible; car si l'Astre est en I & qu'on lui tourne le dos, pour observer sa hauteur, la tangente BD sera l'horison visuel, & nôtre Instrument nous donnera l'angle IBE formé par le raïon

* Prendre hauteur *par derriere*, c'est prendre hauteur en tournant le dos à l'Astre, comme nous l'avons expliqué au commencement du dernier Chapitre de l'autre Partie, & les Pilotes disent qu'ils prennent hauteur *par devant* lorsqu'ils visent à l'Astre même, comme nous l'avons expliqué à la fin du même Chapitre, en parlant de la maniere d'observer la hauteur des Etoiles.

Fig. 12. IB de l'Astre & par le prolongement BE de la tangente BD : mais on voit que cet angle est plus petit que celui IBG de la véritable hauteur, de la quantité dont l'horison est incliné. Ce seroit tout le contraire si on prenoit *par devant* la hauteur d'un Astre H : car on trouveroit par le moïen de l'Instrument l'angle HBD qui est trop grand ; & ainsi il faudroit alors retrancher l'angle de l'inclinaison.

§. LIX.

Au surplus il est très-facile de calculer cette inclinaison de l'horison pour toutes les différentes élévations de l'observateur au-dessus de la Mer, aussi-tôt qu'on supose que le raïon visuel est une ligne droite. Il est sensible que cette inclinaison est égale à l'angle fait au centre de la terre, par la ligne BC & par le semi-diametre CD qui se rend au point D où le raïon touche la surface de la Mer. Ainsi si dans le triangle rectangle BCD, on compare le raïon DC de la terre au sinus total ; BC qui est connuë, puisque c'est la distance de l'observateur au centre de la terre, représentera la secante de l'angle BCD & en même-tems celle de l'angle de l'inclinaison BFD. En un mot on peut toujours faire cette proportion, le raïon de la terre est au sinus total, comme la distance BC de l'observateur au centre de la terre est à la secante de l'inclinaison, & il n'y aura qu'à renverser cette analogie pour trouver la distance de l'observateur au centre de la terre, lorsque l'inclinaison de l'horison sera donnée. C'est de cette sorte qu'on a calculé la Table suivante.

Table

Fig. 15.

Table des inclinaisons de l'Horison sensible.

Elévations au-dessus de la Mer.		Inclinais. de l'horison visuel.	Elévations au-dessus de la Mer.	Inclinais. de l'horison visuel.	Elévations au-dessus de la Mer.	Inclinais. de l'horison visuel.
Pieds	Pouc.	Min.	Pieds.	Min.	Pieds.	Min.
0	10	1	365	21	1395	41
3	4	2	401	22	1470	42
7	5	3	439	23	1534	43
13	3	4	478	24	1607	44
20	9	5	519	25	1681	45
29	11	6	561	26	1756	46
39	9	7	605	27	1833	47
53	2	8	651	28	1912	48
67	3	9	698	29	1993	49
83	0	10	747	30	2074	50
100	5	11	798	31	2159	51
119	5	12	850	32	2244	52
140	3	13	904	33	2331	53
162	8	14	960	34	2420	54
186	8	15	1017	35	2511	55
212		16	1076	36	2603	56
240		17	1136	37	2697	57
269		18	1198	38	2792	58
299		19	1262	39	2889	59
331		20	1328	40	2988	60

§. LX.

Comme les plus grands Vaisseaux ne sont pas fort élevez au-dessus de la surface de la Mer, il n'y aura que les premiers nombres de la Table précédente qui pourront servir. Les autres seroient seulement d'usage, si étant à terre sur quelque montagne proche de la Mer, on vouloit observer la hauteur des Astres à la maniere des Marins, en prenant pour horison l'extremité aparente de la Mer. Mais dans ce cas la Table précédente ne seroit pas assez exacte ; car le raïon visuel BD se courbe sensi-

Fig. 13. blement par les réfractions, dans le long trajet qu'il a à faire depuis l'œil jusques vers le point D. Le raïon visuel doit se courber sensiblement, puisqu'il est, comme nous l'avons déja dit à la fin de la premiere Partie, une portion de la *solaire* ou de la ligne courbe que tracent les raïons de lumiere, en traversant l'Atmosphere : & il est clair que cette courbure des raïons, doit rendre les inclinaisons de l'horison un peu plus petites que celles qui sont marquées ci-dessus. Si on étoit, par exemple, élevé au-dessus de la surface de la Mer de 2440 pieds ou de 2460, l'inclinaison de l'horison visuel seroit selon la Table d'environ 54′ 20″ : & cependant M. *Cassini* observa le 12 Mars 1701, au pied de la tour de la *Massane*, qui est proche de *Collioure*, & qui est élevé de 408 $\frac{1}{2}$ Toises ou de 2451 pieds que l'inclinaison de l'horison visuel n'étoit que de 50′ 20″. La difference étant assez considérable, nous avons cru qu'il étoit à propos de nous servir de la Théorie établie dans le Chapitre précedent, pour tâcher de découvrir les inclinaisons de l'horison avec plus d'exactitude. C'est même ce qui nous a engagé à ne traiter ce sujet qu'après avoir examiné les réfractions; sans cela nous eussions suivi un ordre contraire. Ce que nous avons dit des réfractions nous met en effet plus en état de connoître exactement les inclinaisons de l'horison. Mais cela n'empêche pas que pour avoir la hauteur véritable d'un Astre, on ne doive toujours, à parler dans la rigueur, corriger l'inclinaison de l'horison avant de corriger la réfraction : Car les réfractions qui sont marquées dans la Table, ne sont pas calculées pour des hauteurs mesurées au-dessus d'un horison incliné; mais pour des hauteurs mesurées au-dessus d'un horison parfaitement de niveau.

De l'Inclinaison de l'Horison aparent, lorsque les raïons visuels sont pris pour des lignes courbes.

§. LXI.

Considerons la Figure 14, dans laquelle ♈AE est une partie de la surface de la terre & BG est la courbe des dilatations de l'Atmosphere; & suposons comme ci-devant (§. 43.) que cette ligne BG est tracée de sorte que sa premiere ordonnée AB soit égale au semi-diametre AC de la terre. Cette condition fera que si AP est une portion de *solaire* ou de la ligne courbe que trace dans l'Atmosphere un raïon de lumiere, & que si cette courbe touche la surface de la terre en A; les perpendiculaires CR tirées du centre C sur les tangentes PR de cette ligne, seront non-seulement proportionelles aux ordonnées correspondantes FG de la courbe des dilatations; mais elles leur seront aussi égales. C'est ce qui suit de ce qu'on a dit dans le Chapire précédent (§. 41.) car la solaire AP rencontrant CA perpendiculairement en A, il doit y avoir même raport de CA à AB que de CR à FG: mais puisque les deux premiers termes de cette proportion sont égaux entr'eux, les deux derniers CR & FG le seront aussi. Si maintenant on fait attention que la courbe AP peut être prise pour le raïon visuel d'un observateur qui seroit situé en P, & qui étendant sa vuë aussi loin que lui permettroit la rondeur de la terre, regarderoit l'extremité aparente A de la Mer, on reconnoîtroit que l'angle RPC est le complement de l'inclinaison de l'horison aparent, puisque le raïon visuel AP est dirigé lorsqu'il entre dans l'œil de l'observateur P, comme s'il venoit du point R, & qu'il fait avec la verticale PC l'angle RPC. Il doit donc y avoir par consequent dans le triangle rectangle CPR, même raport de CP à CR que du sinus total au sinus du complement de l'inclinaison proposée de l'horison vi- Fig. 14.

Fig. 14. ſuel. Mais pour mettre ce raport entre CP & CR, on n'a qu'à le mettre entre les deux autres lignes CF & FG qui leur ſont égales; & il eſt clair que pour le mettre entre ces deux dernieres lignes, on n'a qu'à prendre AC pour le ſinus total, & faire AΩ égal au ſinus de complement de l'inclinaiſon propoſée & tirer la ligne CG par le point Ω. Ainſi voici une conſtruction très-ſimple & très-générale. C'eſt de faire l'arc AΨ égal au complement de l'inclinaiſon de l'horiſon ou égal à l'angle RPC qu'on veut que faſſe le raïon viſuel AP avec la verticale CP de l'obſervateur; & tirant du point Ψ la ligne ΨΩ parallelement à CA, afin de faire ΩA égale au ſinus ΨΦ, il n'y aura qu'à tirer par le point Ω la ligne CG, juſqu'à ce qu'elle rencontre la courbe BG des dilatations en quelque point G; & menant enſuite l'ordonnée GF parallelement à BA ou perpendiculairement à CF, le point F fera connoître combien il faut que l'obſervateur P ſoit élevé au-deſſus de la Mer, pour que ſon horiſon viſuel ſoit incliné de la quantité preſcrite.

§. LXII.

Pour reſoudre le même problême par le calcul, on continuera de nommer y les diſtances CP ou CF au centre de la terre, & z les ordonnées FG de la courbe des dilatations: & ſi on prend de plus r pour le ſinus total, & i pour le ſinus du complement de l'inclinaiſon qu'on veut qu'ait l'horiſon aparent; on aura à cauſe du triangle rectangle CRP cette analogie, $r \mid CP = y \parallel i \mid CR = FG = z$: D'où on tire $rz = iy$. Or il ſuffit, comme il eſt ſenſible, d'introduire dans cette petite formule la valeur de z en y, (valeur qu'on connoît toujours, auſſi-tôt qu'on ſçait la nature de la courbe des dilatations,) & il viendra une autre équation qui ne contiendra plus que y de ſeule inconnuë, & dont il n'y aura plus par conſequent qu'à chercher les racines. On a ſupoſé dans l'autre Chapitre $z = a^{1-m} y^{m}$ & on a trouvé qu'entre la multitude infinie d'hypotheses que cette équation représente, c'est $z = a^{\frac{22458}{25758}} y^{\frac{3300}{25758}}$ qui est conforme aux observations. On n'a donc qu'à introduire $a^{\frac{22458}{25758}} y^{\frac{3300}{25758}}$ ou plus généralement $a^{1-m} y^{m}$ à la place de z dans la formule $rz = iy$: il viendra $r a^{\frac{22458}{25758}} y^{\frac{3300}{25758}} = iy$ ou $ra^{1-m} y^{m} = iy$; & si à cause de la trop haute dimension de ces équations, on les resoud par les logarithmes, on trouvera $Ly = La + \frac{25758}{22458} \times \overline{Lr - Li}$ ou généralement $Ly = La + \frac{1}{1-m} \times \overline{Lr - Li}$. Or il est très-facile de trouver par ces formules, combien l'observateur doit être élevé au-dessus de la Mer, pour que son horison visuel soit incliné d'une quantité donnée. Il n'y a, comme on le voit, qu'à multiplier par $\frac{25758}{22458}$ ou généralement par $\frac{1}{1-m}$, l'excès du logarithme Lr du sinus total sur le logarithme Li du cosinus de l'inclinaison proposée; & ajoutant le produit au logarithme du semi-diametre terrestre a, il viendra le logarithme de la distance y de l'observateur au centre de la terre : & il ne restera donc plus qu'à soustraire de cette distance y, le semi-diametre a. Cette méthode nous a procuré la Table suivante.

Fig. 14.

Fig. 14.

Nouvelle Table des Inclinaiſons de l'Horiſon viſuel.

Elévations au-deſſus de la Mer.		*Incli-naiſ. de l'horiſon ſenſible.*	*Elévations au-deſſus de la Mer.*	*Incli-naiſ. de l'horiſon ſenſible.*	*Elévations au-deſſus de la Mer.*	*Incli-naiſ. de l'horiſon ſenſible.*
Pieds	Pouc.	Min.	Pieds.	Min.	Pieds.	Min.
	11	1	420	21	1601	41
3	9	2	459	22	1680	42
8	7	3	504	23	1761	43
15	3	4	548	24	1844	44
23	10	5	595	25	1928	45
34	3	6	645	26	2015	46
46	7	7	694	27	2103	47
60	11	8	747	28	2194	48
77	0	9	801	29	2286	49
95	2	10	857	30	2381	50
115	1	11	915	31	2477	51
136	11	12	975	32	2575	52
160	9	13	1037	33	2674	53
186	5	14	1101	34	2777	54
214		15	1166	35	2881	55
243		16	1234	36	2986	56
275		17	1304	37	3094	57
308		18	1375	38	3203	58
343		19	1448	39	3324	59
381		20	1524	40	3428	60

§. LXIII.

Il paroîtra peut-être que c'eſt pouſſer la délicateſſe trop loin, de vouloir obliger les Pilotes à ne ſe ſervir que de cette ſeconde Table au lieu de la premiere. Mais cependant il ſuffit que l'obſervateur ſoit élevé de trente pieds, pour que la différence ſoit déja de près d'une demie minute: & ſi on étoit obligé de monter dans la hune afin de découvrir la Mer par-deſſus quelques iſles ou quelques rochers, l'erreur pourroit aller à près d'une minute. Or nous ſommes perſuadez qu'on ne doit preſ-

Fig. 14.

que rien négliger dans une ſemblable matiere : car quelque ſoin & quelque peine qu'on ſe donne, il arrive qu'on ſe trompe encore ſouvent d'une quantité trop ſenſible. D'ailleurs il étoit toujours néceſſaire d'entreprendre la diſcuſſion précédente, au moins pour ſçavoir, comme on l'a déja dit, ce qu'on doit penſer de l'exactitude de la Table ordinaire.

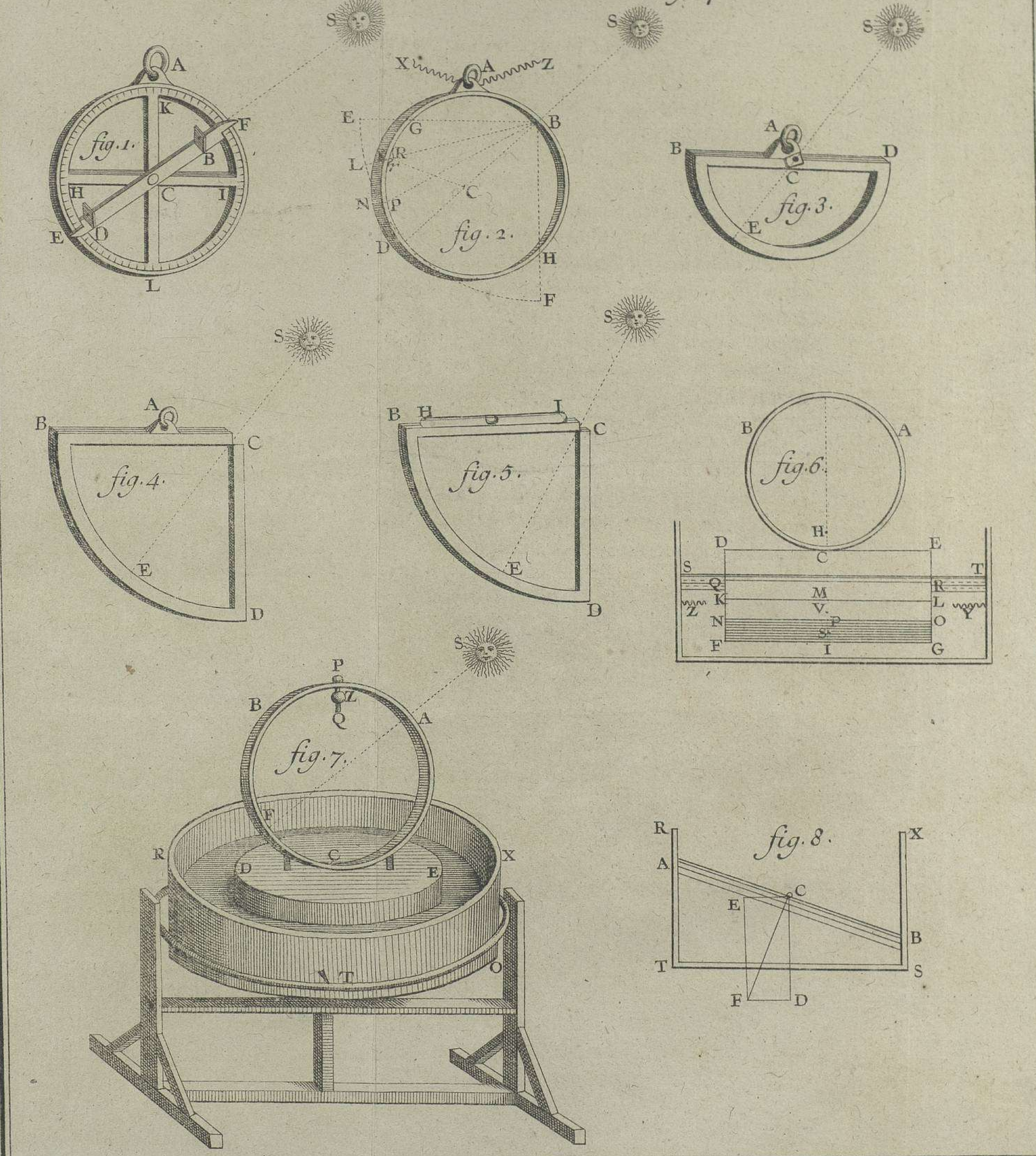
§. LXIV.

Enfin ſi dans la formule $Ly = La + \frac{25758}{22458} \times \overline{Lr - Li}$, ou $Ly = La + \frac{1}{1-m} \times \overline{Lr - Li}$, on traite le coſinus i de l'inclinaiſon de l'horiſon aparent, comme inconnu, on trouvera $Li = Lr - \frac{22458}{25758} \times \overline{Ly - La}$ ou plus généralement $Li = Lr - \overline{1 + m} \times \overline{Ly - La}$; & on pourra aiſément par le moïen de ces nouvelles formules découvrir l'inclinaiſon de l'horiſon aparent, lorſqu'on connoîtra l'élévation de l'obſervateur au-deſſus de la ſurface de la Mer. Aprés avoir pris l'excès du logarithme Ly de la diſtance de l'obſervateur au centre de la terre, ſur le logarithme La du raïon même de la terre, il faudra multiplier cet excès par $\frac{22458}{25738}$ ou généralement par $1 - m$, & retranchant le produit qu'on trouvera du logarithme Lr du ſinus total, il viendra le logarithme Li du ſinus de complement de l'inclinaiſon de l'horiſon viſuel. Si on vouloit après cela trouver la diſtance à l'horiſon ou à l'extremité aparente de la Mer, il n'y auroit qu'à multiplier le nombre de minutes & de ſecondes de l'inclinaiſon aparente, par $\frac{1}{1-m}$ ou par $\frac{25758}{22458}$; & il viendroit la diſtance requiſe en minutes & ſecondes de grand cercle de la terre. C'eſt ce qu'on ne demontre point, parce que cela n'eſt point néceſſaire à nôtre ſujet : Il ſuffit d'ajouter que

Fig. 14. comme les réfractions sont sujettes à plusieurs irrégularitez, tant à cause de la différente quantité de vapeurs qui se soutiennent dans la partie basse de l'Atmosphere, que parce que la masse même de l'air est sujette à changer de hauteur, on ne peut pas promettre que les déterminations précédentes s'accordent toujours dans la derniere rigueur, avec les observations qu'on pourra faire. Mais les irrégularitez se faisant tantôt dans un sens & tantôt dans un autre, les raïons de lumiere doivent être plus ou moins courbes; & c'est donc assez, pour que les calculs aïent toute l'exactitude possible, qu'ils représentent toujours la courbure moïenne des raïons. Or nous avons lieu de croire, que si les calculs qu'on a mis en usage jusques ici n'ont point eu ce degré de perfection, & que s'ils n'ont pas dû faire trouver les quantitez moïennes, parce qu'ils n'ont toujours été faits que dans la supposition que les raïons de lumiere sont des lignes droites; ce ne sera pas tout-à-fait la même chose des suputations que nous avons emploïées.

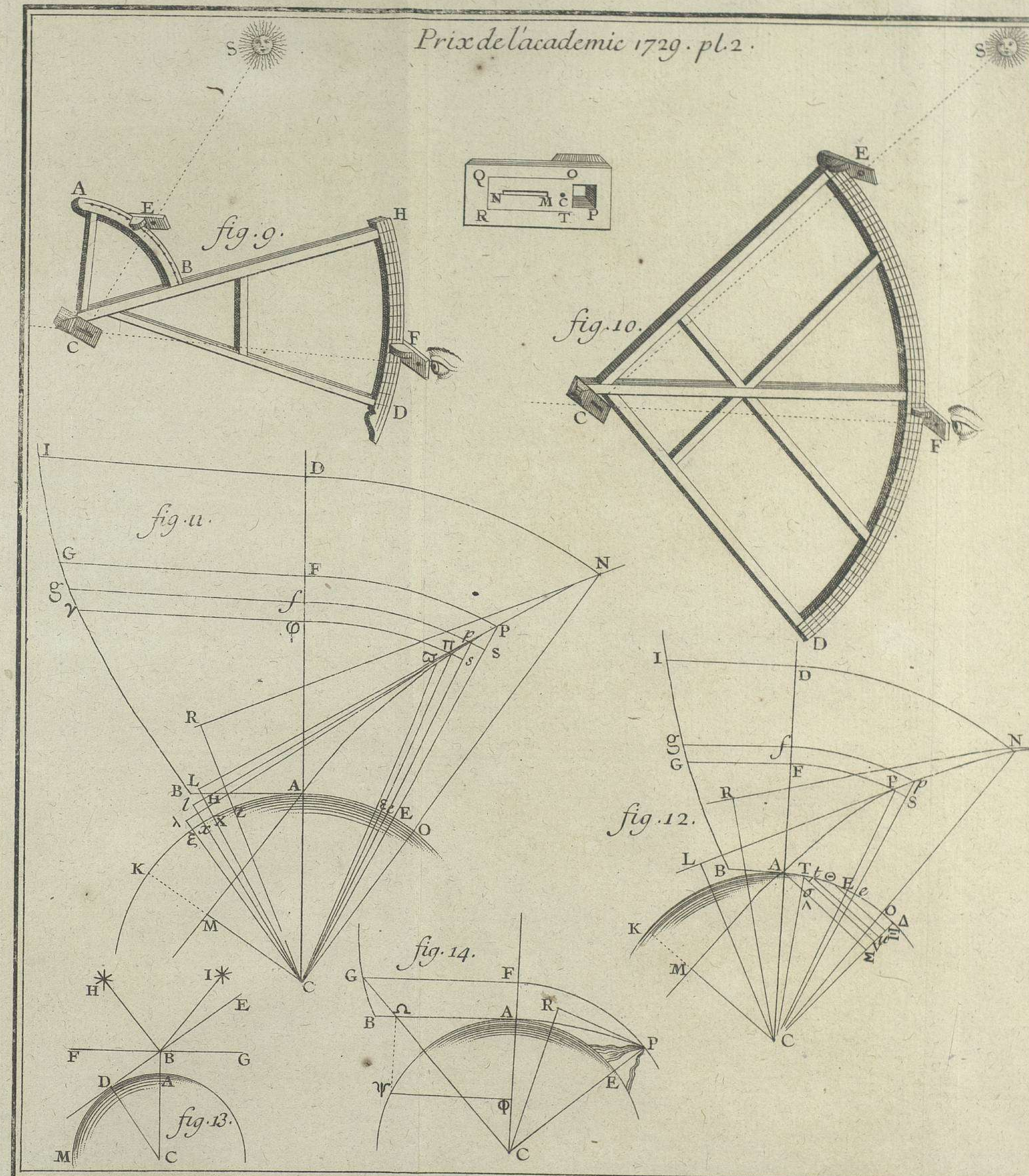
FIN.

Prix de l'academie 1729 · pl. 1.



pl. 22.

Prix de l'academie 1729. pl. 2.



BOUGUE