



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO  
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA



# **Estrategias desarrolladas por estudiantes de Nivel Medio Superior al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA**

Tesis que para obtener el grado de maestra en  
ciencias, área Matemática Educativa presenta:

**Florida Pastrana Juárez**

Directora de tesis: Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Octubre de 2012

## DEDICATORIA

Quiero dedicar esta Tesis a mis padres y hermanos.

**Para mis padres Ignacia y Pedro Luis**, por su comprensión y ayuda en todos los momentos. Me han enseñado a encarar las adversidades sin perder nunca la dignidad ni desfallecer en el intento. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y mi empeño. Siempre me han dado una gran dosis de amor y sin pedir nunca nada a cambio. Ellos han sido y serán una de mis mayores motivaciones en la vida.

**Para mis hermanos**, especialmente Rosa, Edith, Elder, quienes me han dado su cariño y apoyo.

Y a **toda mi familia** por sus muestras de cariño y apoyo en los momentos difíciles.

A todos ellos, muchas gracias de todo corazón.

# AGRADECIMIENTOS

Primero quiero darle gracias a **Dios**, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

Mi más sincero agradecimiento a mi asesora de Tesis, **Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez**, por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección. Su apoyo, confianza, dedicación, dedicación, paciencia y motivación, fueron fundamentales para realizar este trabajo.

Al **Dr. Crisólogo Dolores Flores**, por su apoyo a lo largo de la carrera y para esta trabajo de investigación, por sus sabios y oportunos consejos, que me hicieron crecer en esta área, pero sobre todo por su cariño.

Quiero agradecer también al **Mtro. Edilberto Meza Fitz**, por sus observaciones y sugerencias para enriquecer este trabajo.

También darle agradecer al **M.C. Armando Morales Carballo** por los consejos recibidos a lo largo de mi carrera a quien le tengo un gran aprecio.

Deseo agradecer **al Dr. Rondero, al Dr. Luis Capistrans, a la Dra. Celia Rizo, al Dr. Flaviano, al M.C. Miguel Díaz, al M.C. Zavaleta, a la M.C. Sugey**, por compartir conmigo su conocimiento y amistad.

Mi gratitud también personas que no sólo son mis amigos, sino que forman también parte de mi familia: **Marina Rojas, Oralia Pérez, Alejandro Ramírez, Rigoberto Menor, Martha Iris Rivera, Víctor Marino, Nicolás Catalán, Enrique Rodríguez, Ricardo Rodríguez, Sandi Rivera y Flor** por su apoyo y cariño. Siempre los están en mi corazón.

Quiero darle las gracias al **Yadira Lizette Villarreal**, que aunque no llevamos la misma sangre somos hermanas de corazón, por compartir tantos momentos a lo largo de estos años, por el apoyo que me brindó siempre pero sobre todo por su cariño.

Quiero darle las gracias a **Juan Rodríguez**, una persona que forma parte de mi vida, por su apoyo incondicional, por todos consejos y por enseñarme a encarar la vida con mucha fortaleza.

# ÍNDICE

## Introducción

## Capítulo 1. Antecedentes y problema de investigación

1.1. Antecedentes	6
1.1.1. Investigaciones sobre estrategias	6
1.1.1.1. Estrategias exploradas en nivel básico	6
1.1.1.2. Estrategias exploradas en nivel medio superior y superior	9
1.1.1.3. A manera de reflexión	13
1.1.2. PISA: Resultados e investigaciones	14
1.1.2.1. Estudios teórico-metodológicos	16
1.1.2.2. Estudios comparativos	20
1.1.2.3. Estudios descriptivos-explicativos	23
1.1.2.4. A manera de reflexión	27
1.2. Problema de Investigación	28
Referencias bibliográficas del capítulo	30

## Capítulo 2. Elementos teóricos y metodológicos

2.1. Elementos teóricos	33
2.1.1. Procedimiento	33
2.1.2. El concepto de estrategia y su caracterización o tipos	33
2.1.3. Elementos para configurar una caracterización de estrategias	37
2.1.4. Problema	37
2.1.5. Resolución de problemas	38
2.2. Aspectos metodológicos	40
2.2.1. Estudios de casos como método de investigación	40

2.2.2. Participantes y contexto	40
2.2.3. Problemas matemáticos de la prueba PISA	41
2.2.4. Aplicación	42
Referencias bibliográficas del capítulo	44
Capítulo 3. Análisis de los resultados: Estudio de los casos	
3.1. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema del Carpintero.	48
3.1.1. Caso de Samantha	50
3.1.2. Caso de Ricarda	56
3.2. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema de Exportaciones	61
3.2.1. Caso de Grecia	63
3.2.2. Caso de Samantha	66
3.3. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema de Juventud crece más	70
3.3.1. Caso de Nadxieli	71
3.3.2. Caso de Grecia	75
3.4. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema de Selección	80
3.4.1. Caso de Oxiel	81
3.4.2. Caso de Alexis	83
A manera de reflexión	86
Capítulo 4. Conclusiones	
4.1. Las estrategias y su caracterización	90
4.2. Estrategias desarrolladas por los estudiantes	91
Referencias bibliográficas del capítulo	95

## INTRODUCCIÓN

En esta investigación se discuten los resultados de un estudio que explora las estrategias desarrolladas por estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA<sup>1</sup>. El interés por llevar a cabo este trabajo, proviene, por un lado, de los cuestionamientos que se han hecho acerca del nivel de competitividad que los estudiantes mexicanos presentan al resolver problemas planteados en la prueba PISA, particularmente los que atañen a matemáticas; por otro, en razón de que estos resultados, omiten, como señala Díaz-Barriga (Díaz-Barriga, 2006), el problema de fondo: el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Este trabajo no tiene interés en debatir acerca de los propósitos de prueba PISA, más bien tiene intereses investigativos de carácter exploratorio. En este sentido se interesa en ofrecer evidencia respecto de las estrategias que los estudiantes ponen en juego cuando resuelven problemas de los que se estila plantea en la prueba PISA para el nivel Medio Superior.

Como bien se sabe, el estudio de las estrategias no es nuevo. Se ha ligado a la milicia, a las actividades cotidianas, al ámbito laboral, científico y al educativo por citar algunos ejemplos. En la enseñanza, se vincula a los procesos de aprendizaje. Las estrategias pueden ser objeto de enseñanza, por tanto podemos suponer que se desarrollan, y se estudian sus resultados. Independientemente de ello, algunas estrategias pueden ubicarse en formales e informales.

- Las formales, las concebimos como el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se utilizan conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas.
- Las informales como el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se realizan transformaciones sobre la base de descomposiciones y recomposiciones de formas geométricas (cortar y pegar), estimaciones visuales y aproximaciones de medidas.

---

<sup>1</sup> Program for International Student Assessment

Es en este tenor que clasificamos las estrategias desarrolladas por los estudiantes en esta investigación.

Para llevar adelante este trabajo, nos apoyamos en el concepto de estrategia planteado por Escoriza (Escoriza, 2003), quien a diferencia de varios autores, reconoce algunas características esenciales de las estrategias, las cuales posibilitan el planteamiento definición más completa e integral. Además porque considera importante la cantidad, la calidad y la diversidad de los conocimientos que posee, es decir, las características del resolutor. También fue fundamental tomar como punto de partida qué entendemos por problema y resolución de problema.

El reporte de la investigación se estructuró en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentan los antecedentes de la investigación, así como la problemática que dio origen al estudio. El capítulo dos describe los elementos teóricos y metodológicos en que se apoyó nuestra investigación, que consisten de los conceptos de estrategia, problema y resolución de problemas; sustanciales en este estudio ya que nos permitieron interpretar y explicar los resultados obtenidos. En el capítulo 3 se realiza el análisis de los casos estudiados. En el capítulo 4 se plantean las conclusiones de la investigación, en ellas se encuentran las respuestas encontradas al problema de investigación y el alcance logrado respecto del objetivo general planteado al principio.

# Capítulo 1

Antecedentes y problema de  
investigación



En este capítulo se describen los antecedentes de nuestro estudio y el planteamiento del problema. Los antecedentes los hemos clasificado en dos apartados: algunas investigaciones que se han preocupado por el estudio de las estrategias en la resolución de problemas y estudios relacionados con la prueba PISA. Posteriormente se reportan los resultados que obtuvo nuestro país en esta prueba, puesto que fue una de las motivaciones de este trabajo. Y por último se hace el planteamiento del problema de investigación.

## 1.1. ANTECEDENTES

### 1.1.1. Investigaciones sobre estrategias

En este apartado se analizan algunos estudios respecto de las estrategias que emplean los estudiantes en la resolución de problemas. Estas investigaciones se han realizado en los diferentes niveles educativos, desde el básico hasta el superior.

#### 1.1.1.1. Estrategias exploradas en Nivel Básico

Se reconoce, que una mayoría de investigaciones relativas a las estrategias desarrolladas por estudiantes mientras resuelven problemas matemáticas, se ubican en el nivel básico. Y aun cuando nuestro interés se aleja de explicar el por qué de su centración en este nivel, si se identifica que en nuestro país, estas investigaciones se realizaron cercanas a los procesos de reforma de 1993.

El estudio de Mónaco y Aguirre (1996) es un caso. En su investigación, las autoras exploraron las estrategias desarrolladas por estudiantes de secundaria en nuestro país, mientras resolvían problemas aritméticos y algebraicos. Caracterizaron dos tipos de estrategias, a las que llamaron reflexivas e irreflexivas. Las primeras las entienden como aquellas que requieren de un proceso de análisis previo que le permita a quien resuelve un problema, asociar la vía de solución a factores estructurales, y las otras son concebidas como aquellas que responden a una forma de proceder automatizado. Es así que identificaron y caracterizaron las estrategias siguientes:

- a) *Tanteo*. Consiste en la búsqueda de la solución al problema probando sistemáticamente con distintos valores hasta encontrar la solución. Esta estrategia trata de la búsqueda de soluciones por “ensayo y error”.
- b) *Significados*. Consiste en analizar la situación reflejada en el problema, identificar los significados de las operaciones presentes y utilizar precisamente esas operaciones cuyos significados corresponde a la situación descrita.
- c) *Opera con los números*. Consiste en identificar números en el problema y operar con ellos. Esta estrategia se asocia a la “tendencia ejecutora”, es decir, que cuando al estudiante se le presenta un problema, lo primero que intenta hacer es resolverlo mediante operaciones.

- d) *Busca números cómodos.* Consiste en la adivinación del resultado infiriendo un número que razonablemente puede ser la solución y prueban si lo es. No debe confundirse con la estrategia de tanteo, ya que no se trata de ensayo y error, sino de comprobar si el número es o no la solución. Si lo es el problema queda resuelto, si no lo es se abandona el problema.
- e) *Procedimiento rutinario asociados a indicadores textuales:* Consiste en usar procedimientos que se han estandarizado para resolver determinados problemas, en donde los alumnos identifican el tipo de problema con el cual tiene relación que él sabe con anticipación que le lleva a la solución y reconoce mediante indicadores textuales, después procede a ejecutar el resto de la acción.
- f) *Palabras clave:* Se usa esta estrategia cuando se relacionan ciertas palabras con la acción de operar utilizando para ello los significados de operaciones. El estudiante asigna a estas palabras el significado de una operación.

Las dos primeras estrategias, fueron caracterizadas por las investigadoras como reflexivas, y el resto, como irreflexivas. Sostienen, que de las irreflexivas, la e) y f) en algunos casos pueden conducir a resultados correctos.

Los problemas que usaron en su estudio fueron seleccionados de libros de textos de matemáticas de secundaria de diversos autores. Dos de los que usaron, se muestran enseguida.

Problema 1. El Sr. Dejó \$835,000.00 para sus dos hijos de tal manera que el menor recibiera $\frac{3}{5}$ de los que recibiera el mayor. ¿Cuánto recibió cada uno?	Problema 2. ¿Cuál es la antigüedad de un fósil, si los científicos afirman que esa especie vivió en el año 350 a. C.?
---	---

El proceso de resolución del primer problema está asociado al tema de proporcionalidad y el segundo, a la sustracción de números enteros.

Otra caracterización de estrategias reflexivas e irreflexivas la encontramos en Campistrous y Rizo (1999), quienes las exploraron a través de las explicaciones escritas y verbales presentadas por estudiantes de primaria y secundaria, mientras resolvían problemas matemáticos. Reportan, además de las aisladas por Mónaco y Aguirre (1996), la de *conteo directo de un modelo dado o una modelación previa*, categorizada como

reflexiva. Esta estrategia, en palabras de los autores, consiste en que el alumno observa la representación que le dan o la que construye, y sobre ella, opera mediante conteo.

Los dos problemas siguientes fueron utilizados en la exploración y se aplicaron a estudiantes de cuarto a sexto de primaria, así como a los de secundaria, que participaron en el estudio.

Problema 1. Juanito recogió 48 canicas durante dos días. A lo que recogió el primer día, le agregó 12 canicas. ¿Cuántas canicas recogió el primer día.	Problema 2. Se está imprimiendo un libro de texto de matemáticas. Se han terminado de imprimir 112 páginas que representan el 80% del total. ¿Cuántas páginas tendrá el libro?
--	--

El proceso de resolución del primer problema, está asociado al significado de la suma y la resta (operaciones básicas) y el segundo, a porcentajes.

Arteaga & Guzmán (2005) también exploraron estrategias con alumnos de primaria (5º grado), mientras resolvían problemas algebraicos verbales, clasificación que retoman de Berdnarz y Janvier (1996, citado en Arteaga & Guzmán, 2005). Aislaron las estrategias siguientes, aunque sin describirlas:

- a) *Propuesta de un número y su comprobación o tanteo*
- b) *Separación de una de las cantidades en partes que se deben repartir*
- c) *Apoyo en el diseño de un dibujo*
- d) *Elaboración de un cuadro para comparar los datos*
- e) *Traza de una recta numérica para comparar recorridos*
- f) *Utilización de operaciones aritméticas mecánicamente*
- g) *Uso de la regla de tres*
- h) *Uso Arteaga y Guzmán (2005) de cálculo mental*

Como se puede notar, Arteaga y Guzmán (2005) reporta dos estrategias que ya habían sido identificadas por Mónaco y Aguirre (1996) y Rizo y Campistrous (1999), es la de *tanteo* y la de *opera con los números*, aunque a esta última, la denominaron “*utilización de operaciones aritméticas mecánicamente*”.

Los dos problemas siguientes fueron utilizados en esta investigación.

<p>Problema 1. En una caja hay arañas y escarabajos; hay 8 animales en total. Arturo cuenta el número total de patas y resulta que son 54. Si sabemos que un escarabajo tiene 6 patas y una araña 8, ¿Cuántas arañas y cuántos escarabajos hay en la caja?</p>	<p>Problema 2. Un automóvil sale de la Ciudad de México hacia Nayarit con una velocidad constante de 40 kilómetros por hora. Dos horas después sale, del mismo lugar, otro automóvil con la misma ruta a una constante de 60 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tomará al segundo automóvil alcanzar al primero?</p>
--	---

El proceso de resolución de estos problemas se articula al uso de incógnitas para establecer relaciones y transformaciones implícitas y explícitas con los datos.

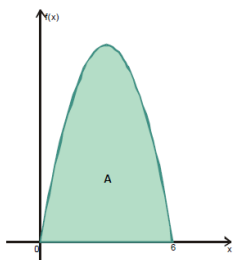
#### 1.1.1.2. Estrategias exploradas en Nivel Medio Superior y Superior

En nivel medio superior, encontramos la investigación de Olave (2005), quien explora las estrategias con estudiantes de un bachillerato diversificado en su país, Uruguay, mientras calculaban el área bajo una curva, un tema que aún no habían estudiado. Sin describir en qué consisten, reconoció las siguientes:

- a) *División de la región en figuras*
- b) *Estimación visual*
- c) *Uso de la expresión analítica*
- d) *Uso de particiones*
- e) *Estimación de la medida*
- f) *Acotar-Aproximar*
- g) *Uso de la tangente*
- h) *Imagen de área como fórmula*

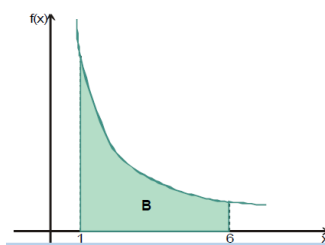
Su exploración, se apoyó de actividades como la 1 y 3 siguientes. El contexto, son regiones de área, limitadas por gráficas —hipérbola y parábola— de funciones continuas y acotas por un intervalo cerrado.

<p>Actividad 1. Este es el gráfico de la función <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x(6 - x)</math></p>	<p>Actividad 3. Es el gráfico de la función <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 6/x</math></p>
--	--



Sea A la región encerrada entre la gráfica de  $f$  y el eje de las abscisas entre los puntos  $(0,0)$  y  $(6,0)$ , como muestra la figura.

- a) Intenta calcular el área de A.
- b) El valor que hallaste en a), ¿Corresponde exactamente al área de A? Justifica tu respuesta.



Sea B la región entre la gráfica de  $f$ , el eje de las abscisas y las rectas de la ecuación  $x = 1$  y  $x = 6$ , como se muestra en la figura.

- a) Intenta calcular el área de B.
- b) En caso de que lo consideres posible, explica ampliamente cómo encontrar mejores aproximaciones de B.

El proceso de realización de estas dos actividades, está asociado al cálculo de áreas bajo curvas.

Morales (2010) también aisló estrategias reflexivas e irreflexivas, aunque con estudiantes de bachillerato —en nuestro país—, al momento en que resolvían problemas algebraicos. Reporta, además de las estrategias b), c), e) y f) caracterizadas tanto en Mónaco y Aguirre (1996) como en Rizo y Campistrous (1999), y la de *conteo directo de un modelo dado o una modelación previa* en Rizo y Campistrous (1999), las siguientes:

- a) *Tanteo no inteligente*. Consiste en probar con diferentes valores, los cuales son arbitrarios ya que no existe un plan definido para emprender la búsqueda.
- b) *Razonamiento hacia atrás*. Consiste en que el alumno desconoce la solución del problema, y parte del último dato dado en el problema, y sucesivamente, llega al primer dato dado.
- c) *Plantar una solución*. Consiste en que estudiante intenta adivinar el resultado, arrojando una solución sin la más mínima reflexión.

Las estrategias que identifica, excepto la de trabajo hacia atrás, en palabras del autor, ya habían sido reportadas en otras investigaciones.

Los problemas que fueron seleccionados de libros de textos de matemáticas usados en las escuelas preparatorias de la UAG, del libro de Álgebra recreativa de Perelman, así como

de actas de congresos (Morales, 2010) de secundaria de diversos autores. Algunos de los que eligió fueron los siguientes.

<p>Problema 1. Un caballo y un mulo caminan juntos llevando pesados sacos. Lamentábase el caballo de su carga, a lo que el mulo le dijo: “¿De qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía”. ¿Cuántos sacos llevaba el caballo y cuántos el mulo?</p>	<p>Problema 2. El perímetro de una sala rectangular es de 56 m. Si el largo se hubiera disminuido en 2.0 m la sala sería cuadrada. Hallar las dimensiones de la sala.</p>
---	---

La resolución de ambos problemas, se articula al uso de sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Otro estudio, es el de Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), quienes exploraron estrategias con estudiantes de último grado de bachillerato y de una licenciatura en matemáticas en su país, Grecia. Estudiaron las estrategias mientras comparaban y conservaban una medida de área sobre objetos geométricos. Los aspectos visuales fueron fundamentales en el diseño de las tareas que propusieron, ya que indagaron acerca de la función de la visualización en la elección y aplicación de las estrategias.

A partir de los procedimientos que usaron los estudiantes en la solución de las tareas, caracterizaron dos tipos de estrategias, las *formales* y las *informales*. Las formales, consistieron del uso de fórmulas para calcular áreas de formas geométricas básicas, así como de conceptos (sobre objetos, relaciones y operaciones), proposiciones y propiedades de las formas geométricas. Las informales consistieron de la simulación de cortar y pegar partes de las formas geométricas, así como de la estimación visual, aproximación de medidas. Las estrategias que identificaron son las siguientes:

- a) *Medir*
- b) *Inferencias deductivas*
- c) *Uso de teoremas o fórmulas*
- d) *Estimación visual*
- e) *Cortar y pegar*

Las tres primeras fueron ubicadas como parte de las estrategias formales y el resto, como informales. Los investigadores reportan que en muchos casos, los argumentos deductivos

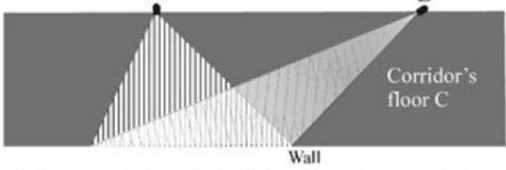
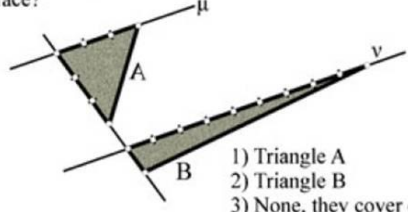
usados fueron incorrectos. Asimismo, que aun cuando en diversos momentos les recordaron a los estudiantes las fórmulas básicas para calcular áreas, no lograron relacionarlas con la tarea a resolver, y por ello, no pudieron usarlas. Por ejemplo, en el caso de la fórmula para calcular el área del triángulo, algunos no pudieron aplicarla porque no tenían una adecuada comprensión del concepto altura.

La estrategia de *estimación visual*, también fue reconocida en Olave (2005). Y aun cuando en ambos estudios fueron exploradas en torno al concepto de área, el contexto de las situaciones fue distinto; en Olave (2005), sobre regiones ligadas a gráficas de funciones y en Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), sobre formas euclídeas.

Respecto de las estrategias que reconocieron, se afirma que están influenciadas fundamentalmente por los aspectos siguientes:

- La dificultad de los problemas
- Lo que saben los estudiantes acerca del tema que involucra el problema
- El contexto en el que se ubican los problemas.

Las dos situaciones siguientes, son de las que se resolvieron en su investigación.

<p>Two spots A and B light the wall of a corridor C. Whose light beam covers greater area on the corridor's floor? <b>T1</b></p>  <p>1) A covers greater area 2) B covers greater area 3) They cover the same area (Indicate the correct answer)</p>	<p><b>T2</b> If the straight lines (<math>\mu</math>) and (<math>\nu</math>) are parallel, which one of the triangles A or B covers greater surface?</p>  <p>1) Triangle A 2) Triangle B 3) None, they cover exactly the same area.</p>
---	---

Ambos, tratan con la igualdad de áreas de formas euclídeas, específicamente triángulos. De modo que su proceso de resolución, está articulado a la fórmula básica y con el concepto de rectas paralelas.



### 1.1.1.3. *A manera de reflexión*

Si bien el análisis previo no agota todas las investigaciones que se han enfocado a ofrecer explicaciones sobre las estrategias empleadas por estudiantes en diferentes etapas de su formación, si da cuenta de que la elección y aplicación de dichas estrategias, está influenciada por:

- El grado de dificultad y profundidad de los problemas o tareas.
- El contexto en que se ubican los problemas o tareas.
- La cantidad, calidad y diversidad de lo que sabe un estudiante acerca del tema involucrado en los problemas o tareas, tal como lo afirma Escoriza (2003).
- Cómo un estudiante, usa y relaciona lo que sabe acerca del tema que abordan los problemas o tareas.

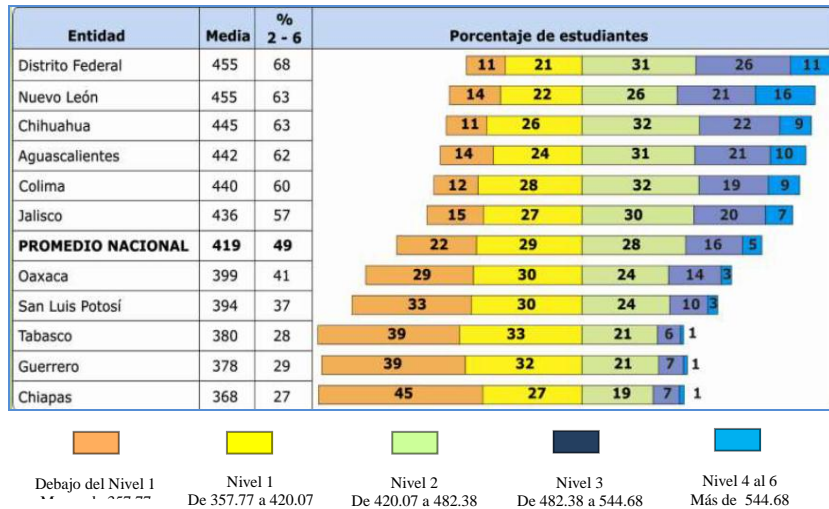
A partir de este análisis, se observan algunas coincidencias en los estudios de Mónaco y Aguirre (1996), Rizo y Campistrous (1999), Arteaga y Guzmán (2005), así como el de Morales (2010) respecto de las estrategias de tanteo y opera con los números. En nuestra opinión, se debe al tipo de problemas o tareas usadas en sus exploraciones, que son típicamente escolares, excepto en Arteaga y Guzmán (2005). Las reportadas en Olave (2005) y Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), por el contrario, difieren, excepto la de *estimación visual*. Los problemas usados en estos dos estudios aun cuando son típicamente escolares y se relacionan con el concepto de área, el contexto difiere por cuanto al tipo de regiones de área, así como por la experiencia que los estudiantes tenían con ese tipo de situaciones. En el de Olave (2005) por ejemplo, el tipo de regiones de área que usó en su exploración, aún no había sido objeto de estudio, el de Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011), fue debido tanto al contenido matemático, como al tipo de reflexión y conexión entre dicho contenido, que los estudiantes debían poner en juego.

Por cuanto a la forma de caracterizarlas como reflexivas e irreflexivas, también hay coincidencia, particularmente en Mónaco y Aguirre (1996), Rizo y Campistrous (1999) y en Morales (2010).

1.1.2. PISA: Resultados e investigaciones

PISA es una prueba promovida por la OCDE<sup>1</sup> y su objetivo es evaluar en qué medida los estudiantes mayores de 15 años, han adquirido conocimientos y habilidades esenciales para participar plenamente en la sociedad, y hasta qué punto son capaces de extrapolar lo aprendido para aplicarlo a situaciones novedosas, tanto del ámbito escolar como extraescolar (OCDE, 2009). Esta evaluación enfoca su atención en las capacidades de los estudiantes para usar sus conocimientos y habilidades al enfrentar los retos de la vida real, más que en saber hasta qué punto dominan los contenidos de un plan de estudio o currículo escolar. Esto es, que en lugar de evaluar los contenidos curriculares, evalúa competencias, específicamente la competencia *lectora*, la *científica* y la *matemática*.

En general, los resultados se reportan mediante datos estadísticos, a partir de los cuales se caracteriza y establecen comparaciones acerca del desarrollo de los países involucrados. Los resultados de la aplicación del año 2009 —reportados por el INEE en el 2010—, en el caso de matemáticas, dan cuenta que en México, los estudiantes con un desempeño superior a la media nacional lo obtuvieron los del Distrito Federal, Nuevo León, Chihuahua, Aguascalientes, Colima y Jalisco, sin embargo, ninguno se ubicó en el promedio establecido por la OCDE, que equivale a 496 puntos (de un rango de puntos que va desde los 200 a 800 puntos). Asimismo, se reporta que los estudiantes de los estados de Oaxaca, San Luis Potosí, Tabasco, Guerrero y Chiapas son los que obtuvieron porcentajes altos en los niveles más bajos de desempeño, y se ubican debajo del nivel 2, tal como se muestra en la gráfica siguiente.



Gráfica 1. Desempeño en la escala global de matemáticas por entidad federativa (INEE, 2010).

<sup>1</sup> Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico

Como se puede observar en la gráfica anterior, en el caso de Tabasco, Guerrero y Chiapas, el porcentaje de estudiantes ubicados en los niveles más bajos, es superior al 70%.

Los estudiantes con niveles bajos de desempeño, son catalogados por PISA como incapaces para tener éxito en las tareas más básicas. No obstante, se reconoce que ello de ningún modo significa que no posean habilidades matemáticas, sino más bien, que la mayoría de ellos, probablemente tendrán serias dificultades para usar las matemáticas como herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida.

Hasta ahora, los datos de la OCDE por cuanto a los resultados de la prueba PISA, han quedado a nivel de comparar el desempeño de los estudiantes que participan en ella; ya sea al interior de un país, entre países o entre regiones. Ello se debe en gran medida, a que el diseño de la prueba abandona la concepción holística original y adopta un enfoque analítico que atomiza la noción de competencia, para evaluar únicamente capacidades. Este tipo de diseño, de acuerdo con Yus et al. (2012) facilita una mayor fiabilidad estadística en su corrección, pero estos criterios, no registran incidencias como: a) *el que no se comprenda el enunciado de un problema;* b) *que no se interprete un gráfico o bien,* c) *si el alumno muestra actitudes negativas hacia la prueba o hacia su contenido.*

Sin duda los datos estadísticos son importantes, pues han incidido en los procesos actuales de reforma tanto en el nivel de enseñanza básico como en el medio superior. No obstante, es claro que dejan de lado explicaciones que den cuenta, además de lo señalado por Yus et al. (2012), acerca de los procesos que desarrollan los estudiantes al resolver los problemas que se plantean en dicha prueba. Esto es, de los procedimientos que usan, cómo lo usan y por qué los usan. Este tipo de información es fundamental tanto para el profesor como para los propios estudiantes, dado que contribuye a evidenciar sobre la cantidad, de la calidad y la diversidad de los conocimientos que poseen y cómo los usan en la resolución de problemas.

La revisión a la literatura especializada, da cuenta de estudios asociados a esta prueba en las tres áreas que evalúa, desde diferentes enfoques, marcos teóricos y puntos de vista. Nuestro interés por analizar algunos de los resultados reportados en investigaciones que se han ocupado del proyecto PISA, está en reconocer la tendencia de este tipo de estudios. A fin de describir los aspectos fundamentales considerados en algunos de estos estudios, así como de sus explicaciones, atendimos a una clasificación esquemática, que desde

nuestra perspectiva, consiste de tres tipos: a) *teórico-metodológicos*, b) *comparativos*, y; c) *descriptivo-explicativo*.

### 1.1.2.1. *Estudios teórico-metodológicos*

Las investigaciones de corte teórico-metodológico discuten aspectos tanto teóricos como de método de la prueba. Algunos enfatizan además, en las capacidades que se miden por medio de los problemas usados como instrumento de evaluación.

Un estudio de este tipo es el de Gallardo, et al. (2010) y Yus, et al. (2012), quienes analizaron los problemas liberados de PISA para el área de ciencias aplicados en los años 2000 al 2006. Para llevar adelante su estudio, emplearon una taxonomía de capacidades científicas similar a la propuesta por Hopmann, Brinek y Retzel (2007, citado en Yus, et al.; 2012), a fin de elaborar una categoría propia de capacidades, mismas que resumen en una tabla (ver tabla I).

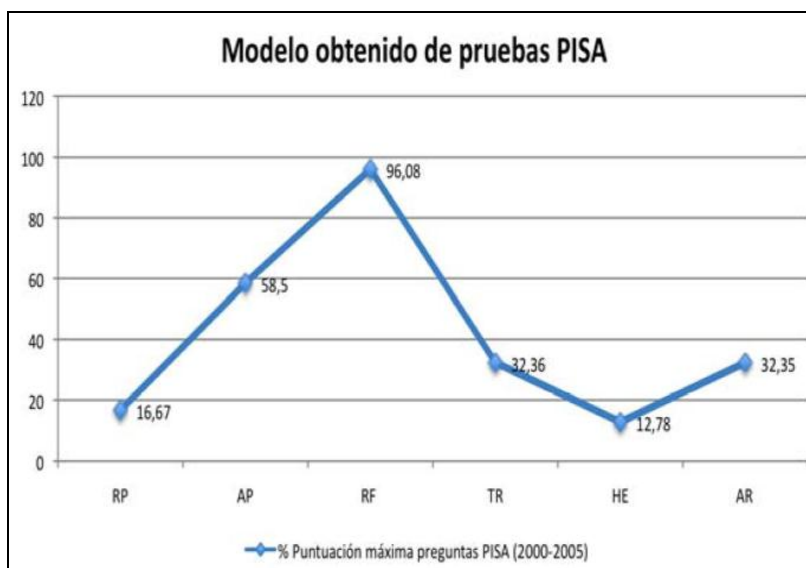
TABLA I  
Capacidades registradas en las pruebas liberadas de PISA (2000-2006)

Orden	Capacidad	Significado
1	Reproducción (RP)	Supone repetir de forma mecánica y memorística los conocimientos científicos.
2	Aplicación (AP)	Consiste en aplicar los conocimientos científicos aprendidos previamente a situaciones sencillas conocidas.
3	Reflexión (RF)	Implica la comprensión del fenómeno científico y reflexionar sobre los conocimientos aprendidos en esta área.
4	Transferencia (TR)	Supone aplicar el conocimiento aprendido a nuevas situaciones, conectando ideas, conceptos o hechos científicos.
5	Heurística (HE)	Requiere el diseño de un plan, o la descripción de los pasos que son necesarios seguir para llegar.
6	Argumentación (AR)	Requiere razonar de forma argumentada para explicar el fenómeno científico que se trate comunicando la conclusión científica a la que se llegue a través del lenguaje escrito.

El orden en que aparecen estas seis capacidades, es según su complejidad. De este modo, el nivel más bajo está representado por RP y el más alto, HE y AR. Estas capacidades, guardan correspondencia con las definidas y evaluadas por PISA para el área de Ciencias.

La investigación reporta, que la capacidad que más se requiere para la resolución de los problemas es la de reflexión (RF), la cual no va más allá de la recuperación de información que aparece en el enunciado, sin necesidad de que el estudiante ponga en relación la información del texto con lo que ya sabe. A su vez, que muy pocos problemas

demandan la capacidad de reproducción (RF) de conocimiento científico, asociada con la memorización mecánica. La capacidad HE es la que aparece en un porcentaje muy bajo en los problemas que analizaron. Dan cuenta además, que las pruebas examinadas no siempre estimulan la argumentación (AR), pareciendo que lo único que interesa es la respuesta aplicada por parte del estudiante, el resultado final y no tanto el proceso que lo lleva a dar una u otra respuesta (véase gráfico siguiente).



Gráfica 2. Porcentaje de las capacidades presentes en los problemas del área de ciencias 2000-2005 (Yus, et al., 2012).

Los investigadores sostienen, que PISA parece alejarse de las capacidades de orden superior, como son la transferencia, la heurística y la argumentación, demandando con mayor frecuencia capacidades científicas de baja complejidad como la aplicación y la reflexión, aunque con escasa presencia de la mera reproducción (Yus, et al., 2012). Consideran además, que debería aprovecharse el potencial crítico de las preguntas.

En esta categoría, también se ubican los estudios de Rico (2006) y el de INECSE (2003), en los que se describen los principales componentes del marco teórico de PISA, analizando para ello la noción de alfabetización matemática o competencia matemática, las diferentes variables que componen el dominio, las variables que organizan los instrumentos de evaluación, y los diferentes significados del término competencia. En INECSE (2003) además, presentan un análisis detallado de los aspectos de tipo teórico y metodológico de la prueba, a través de los problemas matemáticos liberados de PISA 2003.

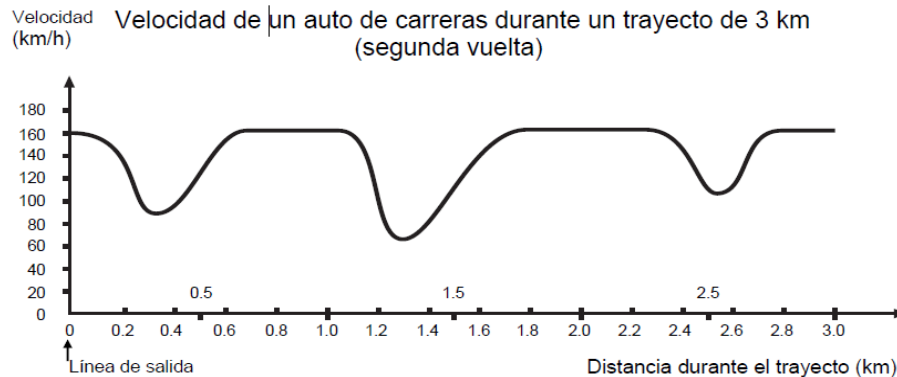
La investigación de Recio (2006) por su parte, analiza el papel que juega el “realismo” en el contexto de la prueba PISA. Se apoya para ello, de un problema tradicional y de dos problemas liberados de la prueba PISA, el del *Carpintero* y el de *Velocidad de un auto de carreras*, ambos del área de matemáticas. El primer problema se enuncia como sigue:

*Vamos a comprar azulejos de dos tipos, A y B, en unas cantidades determinadas por la obra que estamos haciendo (una reforma de la cocina de la casa, por ejemplo, que requiere azulejos en el suelo y en las paredes). Los del tipo A cuestan (impuestos incluidos) 15 euros/m<sup>2</sup>, esto es, la tercera parte que los del tipo B, que cuestan 45 euros/m<sup>2</sup>. Necesitamos comprar 10 m<sup>2</sup> del tipo A y 15 m<sup>2</sup> del tipo B. En un comercio hay una oferta y nos hacen una rebaja del 15% en los del tipo A y del 10% en los del tipo B. En otro comercio, con los mismos precios para los distintos tipos de azulejo, la rebaja que aplican es, simplemente, del 12% del gasto global que hagamos. ¿Dónde resultará más económico realizar la compra?*

El investigador señala que el planteamiento de problemas de este tipo tiene un aire inequívocamente decimonónico<sup>2</sup>, aunque hable de euros y no céntimos ni pesetas. Asimismo, que es un problema trivial y de corte tradicional para su país, España.

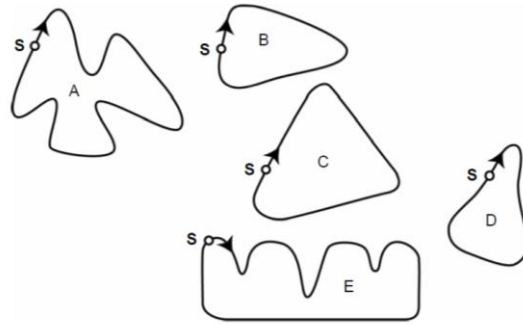
El segundo problema, el de *velocidad de un auto de carreras*, es el siguiente:

*La siguiente gráfica muestra cómo la velocidad de un auto de carreras varía a lo largo de un trayecto plano de 3 kilómetros durante su segunda vuelta.*



- ¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el comienzo del tramo recto más largo que hay en la pista?*
- ¿En cuál de estas pistas se condujo el coche para producir el gráfico de velocidad mostrado anteriormente?*

<sup>2</sup> Anticuado, pasado de moda (Real Academia de la Lengua Española, 2012).



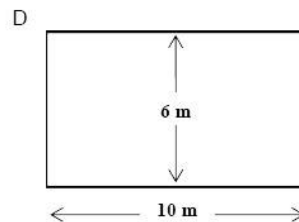
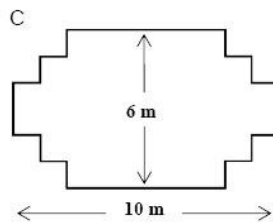
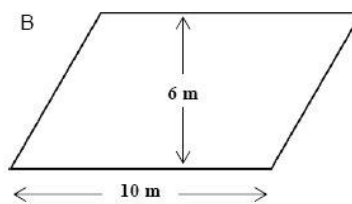
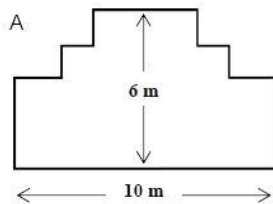
S: Línea de salida

Reporta, que la situación planteada en este problema no tiene el aire decimonónico como el primero. Justifica su argumento en tres aspectos:

- Porque en esa época no se hablaba de coches de carrera.
- Por el tipo de análisis cualitativo que conlleva la situación.
- Porque en la actualidad, una mayoría de ciudadanos está en contacto, a través de los medios de comunicación, con imágenes y argumentos de este tipo.

Por cuanto al tercer problema que analiza, el del *Carpintero*, se enuncia como sigue:

*Un carpintero tiene la madera necesaria para hacer una cerca de 32 metros de largo y quiere colocarla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para ese jardín. Encierra en un círculo “Sí” o “No” para cada diseño, dependiendo si se puede realizar con la cerca de 32 metros.*



A partir de su análisis, da cuenta que aun cuando este problema recae en un contexto educativo, intenta ser un problema real.

El investigador concluye, que el “realismo” presentado en los problemas de las pruebas PISA, es una suerte de manierismo<sup>3</sup>, una peculiar —aunque atractiva— interpretación escolar de la realidad, pero a veces, tan alejada de ella como los problemas de grifos y obreros que eran tradicionales para el aprendizaje de las reglas de tres (directa e inversa) hace 50 años. Señala, que en el primer problema es evidente que un ciudadano en la vida cotidiana, resolvería la pregunta allí planteada, simplemente solicitando en cada tienda el presupuesto correspondiente y comparando las dos cifras obtenidas. También, considera evidente que en el segundo problema, cualquier artículo periodístico sobre una carrera de coches va a ofrecer, como dato más relevante, el trazado del circuito (mucho antes que el gráfico velocidad/espacio), con el que un aficionado al motor va a poder responder directamente a las preguntas planteadas. Respecto del tercer problema, coincide con el contexto en que lo ubican el informe de PISA, en el educativo.

El investigador reconoce además, que el sistema escolar se ha limitado a medir lo que el estudiante sabe, contrario a lo planteado por PISA, que mide lo que el estudiante sabe hacer, y a esto adjudica los resultados deficientes obtenidos por los estudiantes españoles.

#### 1.1.2.2. *Estudios comparativos*

En esta categoría ubicamos la investigación de Uribe, M. (2009), quien analiza la relación que existe entre el currículo oficial de ciencias de su país, Chile, con las competencias de alfabetización científica establecidas en el marco de referencia de la evaluación PISA 2000. Para llevar adelante su investigación realizó las acciones siguientes:

- Analizó en los programas de estudios oficiales de Biología, Física y Química de séptimo y octavo grado, la presencia y énfasis de conceptos, procesos y contextos científicos recogidos en las competencias de la alfabetización científica.
- Estimó la capacidad explicativa de los núcleos de variables del estudiante y de la escuela, que dan cuenta de los resultados de alfabetización científica de los estudiantes de 15 años, en particular de las variables alterables por la institución escolar.

---

<sup>3</sup> Es una interpretación escolar de la realidad (Recio, 2006, p. 269).



Reporta, que los programas y textos de estudios evidencian escasas oportunidades para promover el desarrollo de competencias que potencian la alfabetización científica, ello, en razón de una falta de aplicación de conceptos y procesos a contextos de interés público. Además, reconoce mediante su estudio que las habilidades lingüísticas son indispensables para un buen desempeño en el área ciencias, considerando que la lectura es un factor clave para la alfabetización científica, ya que si los estudiantes no poseen competencias lectoras, difícilmente comprenderán artículos o noticias científicas sobre temas de interés social.

A partir de los resultados, propuso algunas orientaciones, a fin de contribuir en la mejora de los niveles de alfabetización científica, tanto en el currículum vigente, como en la institución escolar.

Sáenz (2007) por su parte, evalúa el conocimiento funcional de las matemáticas que tienen futuros profesores de primaria de su país, España. Su estudio se sustenta de la evaluación PISA 2003 así como del marco metodológico de PISA. Los objetivos que se planteó fueron los siguientes:

- Establecer un perfil de rendimiento en matemáticas de los futuros maestros utilizando el enfoque de competencias de PISA para evaluar dicho rendimiento.
- Analizar cómo influyen las variables de tarea del modelo funcional de PISA, contenido matemático y complejidad teórica del ítem, en el rendimiento de los sujetos.
- Analizar la relación de factores afectivos y actitudinales, como la motivación, el autoconcepto, la ansiedad y las estrategias de aprendizaje, con el rendimiento en matemáticas de los sujetos.
- Analizar la relación de un factor cognitivo como es la capacidad de solución de problemas, en el sentido que utiliza PISA, con el rendimiento en matemáticas de los sujetos.
- Estudiar la relación del tipo de bachillerato cursado por los sujetos con su rendimiento en matemáticas.

Participaron en la exploración 140 estudiantes del magisterio de la Universidad Autónoma de Madrid, seleccionados mediante un muestreo por conglomerados. Para llevar a adelante su estudio utilizó los siguientes instrumentos:

- Prueba de matemáticas.
- Prueba de solución de problemas.
- Un cuestionario de contexto.

La fase experimental consideró 31 problemas de matemáticas y 19 de solución de problemas liberados por PISA. En razón de la cantidad de problemas que usó, procedieron de la misma forma que PISA, es decir, elaboraron tres cuadernillos distintos, de modo que cada participante resolviera la tercera parte del total de los problemas. Esta distribución la realizaron atendiendo a la complejidad y al contenido de los problemas.

El cuestionario de contexto consistió de variables afectivas y actitudinales en relación con las matemáticas. Estuvo compuesto por 28 afirmaciones, correspondientes a los índices que utiliza PISA como son: motivación intrínseca, ansiedad, autoconcepto y estrategias de aprendizaje de las matemáticas.

A partir de la exploración realizada, el investigador afirma que los futuros maestros muestran un perfil bajo de rendimiento con un 64% en las respuestas correctas; y en la mayoría de los problemas los futuros maestros no superaron significativamente el porcentaje obtenido por los estudiantes de 15 años. Además encuentra que tienen un rendimiento del 78% de aciertos en los problemas donde se necesita las competencias de reproducción y en los que se requieren competencias más altas como conexión y reflexión apenas pasan el 50%. Con estos datos afirma que el 11% de los futuros maestros alcanzan un nivel de competencia alta.

En relación con el rendimiento en función de las cuatro áreas de contenido que propone PISA, identifica una caída significativa en el porcentaje de aciertos en las preguntas relacionadas el contenido de incertidumbre.

Por otra parte, el autor encontró que las variables actitudinales y afectivas que entran en el concepto en el modelo predictivo del rendimiento en matemáticas son el autoconcepto (con signo positivo) y la ansiedad (con signo negativo), características localizadas también en los estudiantes españoles de 15 años. La baja autoestima y la elevada ansiedad favorecen el fracaso en las matemáticas. Sin embargo, los resultados no evidencian una relación significativa de la motivación (intrínseca y extrínseca) con el rendimiento en

matemáticas, es decir, que no encontraron que consigan mejores rendimientos las personas que más disfrutaban las matemáticas. No obstante, considera que los profesores que no se sientan atraídos por la actividad matemática será difícil que ayuden a sus estudiantes el placer y la utilidad de las matemáticas para comprender el mundo.

Con relación a las estrategias, encontraron que los maestros en formación siguen moderadamente estrategias de control y de elaboración frente a estrategias de memorización cuando estudian matemáticas, es decir, supervisan de alguna manera su propio aprendizaje comprobando el cumplimiento de sus objetivos. No obstante lo anterior, no se localizó ninguna relación de las estrategias con el rendimiento.

Y respecto de la relación existente entre modalidad de bachillerato cursada y el rendimiento en la prueba, se encontró que los estudiantes que cursaron el bachillerato de ciencias sociales tuvieron un rendimiento más bajo en la prueba y manifestaron unas actitudes más negativas hacia las matemáticas que los que cursaron el de ciencias de la salud o el tecnológico.

Para concluir, el investigador afirma que los futuros maestros no poseen en grado suficiente, ni las competencias matemáticas, ni las actitudes positivas ante la matemática, lo cual le permite conjeturar que esos resultados dan cuenta de las posibles dificultades que van a enfrentarse para dirigir el proceso de aprendizaje por parte de sus estudiantes.

#### 1.1.2.3. *Estudios descriptivos-explicativos*

Varios de los estudios ubicados en esta categoría, se han centrado en explicar el proyecto PISA. Esto es, de su origen, sus objetivos, sus fundamentos teóricos y metodológicos (diseño, población objetivo, período de evaluación, etc), sus resultados, así como de su influencia en la toma de decisiones en el ámbito educativo (e.gr. Schleicher, 2006; Turner, 2006; Bottani, 2006; Bonnet, 2006; Martínez-Arias, 2006; Martínez-Rizo, 2006). Otros, se han centrado en explicar los resultados de PISA en áreas específicas, desde diferentes puntos de vista.

El estudio de Sánchez y García-Rodicio (2006) por ejemplo, explica cómo evalúa PISA la comprensión lectora de los alumnos y cómo se presentan los resultados en su informe. Se plantean para ello, la pregunta siguiente: ¿qué y cómo se evalúa e interpreta el rendimiento de los alumnos en la lectura? Para llevar adelante su investigación,

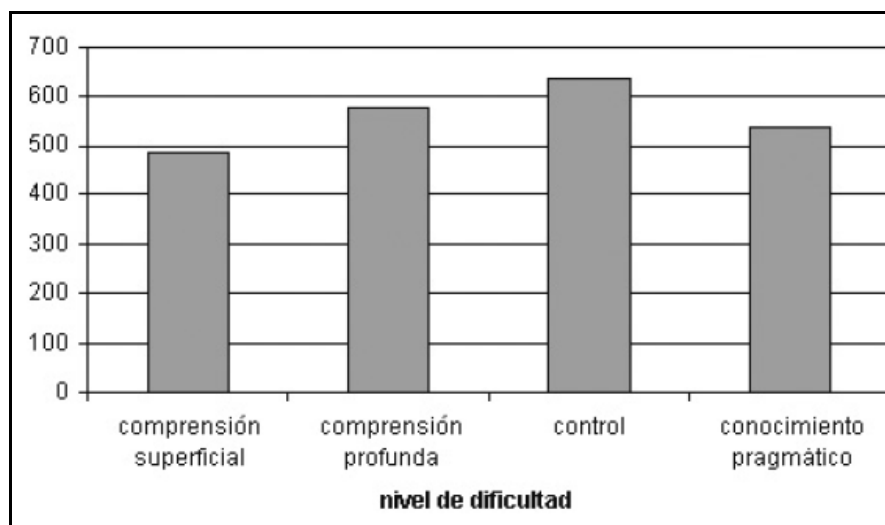
realizaron un **re-análisis** de las tareas utilizadas en el informe, a fin de formular reinterpretaciones y una revisión crítica de estos estudios. Retomaron para su exploración, todos los problemas liberados de la prueba 2000. Sustentaron su análisis en una taxonomía elaborada por los propios investigadores, la cual constó de las categorías siguientes:

- *Comprensión superficial*. Cuando la respuesta a una tarea requiere utilizar conceptos e ideas que están presentes en el texto o son suscitados directamente por él. En ese caso, las ideas suscitadas no añaden información nueva al texto y únicamente, y en el más complejo de los casos, sintetizan o integran información que sí está presente.
- *Comprensión profunda*. La tarea es clasificada en esta categoría si para resolverla no es suficiente con la información contenida en el texto y el lector debe apelar a sus conocimientos y llevar a cabo algún proceso de integración.
- *Metaconocimiento*. Alude a tareas en las que el lector debe reparar y resolver posibles inconsistencias entre dos afirmaciones que aparecen en el texto.
- *Conocimiento pragmático*. Tareas en las que el lector debe reparar en el modo como el autor del texto ha organizado el texto y sus intenciones comunicativas.

A partir del análisis realizado, los investigadores reportan que las tareas que requieren una comprensión superficial son más accesibles que las que requieren una comprensión profunda y que la única tarea que requiere un proceso metacognitivo de control de la comprensión, alcanzan el nivel de dificultad más alto (véase gráfica No. 3).

Respecto del nivel de dificultad, observan que de los ítems incluidos en las dos categorías de conocimiento pragmático son más difíciles que las de comprensión superficial y menos que las de comprensión profunda.

De los resultados ofrecidos en el Informe PISA, concluyen que los estudiantes evaluados muestran una capacidad aceptable para entender el significado de los textos, que dentro de la taxonomía de los investigadores, corresponden a una comprensión superficial. No obstante, si se utiliza la definición profunda de comprensión lectora, el 70% de los estudiantes no logran obtenerla.



Gráfica 3: Puntuaciones medias de dificultad de los ítems asignados a las principales categorías de análisis de la comprensión lectora (Sánchez y García-Rodicio, 2006, p. 213).

Los informes de PISA sin duda son importantes, ya que según los investigadores ayudan a trazar una primera línea sobre el nivel de dificultad que países como los integrados por la OCDE obtienen con su Enseñanza Obligatoria, aunque no se tomar como única referencia para realizar los cambios en la educación.

Gil y Vílchez (2006) por su parte, se interesaron por explicar cómo puede contribuir el proyecto PISA a la mejora de la enseñanza de las ciencias y de otras áreas del conocimiento. El interés por ofrecer este tipo de explicaciones, proviene, de acuerdo con su postura, porque:

“... el proyecto PISA constituye un instrumento potencialmente valioso para la mejora del aprendizaje, la enseñanza y los currículos, que hasta aquí ha sido desaprovechado en nuestro país<sup>4</sup>, dando lugar, incluso, a interpretaciones distorsionadas, perjudiciales para la extensión de una educación de calidad ...” (Gil y Vílchez, 2006, p. 295).

Es así que describen las virtudes del proyecto y su coherencia con las aportaciones de la investigación educativa; indican además, algunas estrategias para que este, pueda jugar su papel de instrumento de mejora del proceso de enseñanza/aprendizaje. Enfatizan en la necesidad de superar el escaso conocimiento por parte del profesorado de las orientaciones y fundamentación de dicho proyecto, ya que consideran, que es lo que ha

<sup>4</sup> Se refieren a su país, España.

impedido que esta evaluación ejerza una influencia positiva en ellos, por lo que recomiendan una amplia campaña informativa, así como una modificación sustancial de la presentación de los resultados.

En este mismo orden de ideas la investigadora española Maestro-Martín (2006), reconoce, que son los países donde los alumnos obtienen mejores resultados en la prueba PISA, donde se han utilizado para ratificar el acierto de sus decisiones recientes en política educativa y muestran con satisfacción su organización, sus prácticas educativas y las que ofrecen como razones de su éxito.

En el contexto del área de lectura, Linnakylä, P. y Välijärvi, J. (2006), investigadores finlandeses, dan cuenta de algunas las posibles razones que subyacen al alto rendimiento de los alumnos de su país. Aun cuando reconocen la existencia de factores diversos interrelacionados, consideran que el rendimiento exitoso de los estudiantes, tiene que ver con la educación comprensiva, los propios intereses y aficiones de los alumnos, la estructura del sistema educativo, la formación del profesorado, las prácticas escolares y, por último, con la cultura.

Finalmente, Martínez-Rizo (2006), reflexiona sobre los resultados obtenidos por México y por otros países de América Latina en PISA, de 2000 a 2006. Sostiene, que estos se sitúan en el rango de lo esperable, debido al peso de los factores socioeconómicos de esos países, así como a los recursos con que pueden contar las escuelas.

#### 1.1.2.4. *A manera de reflexión*

Nuestro interés por analizar algunos de los resultados reportados en investigaciones que se han ocupado del proyecto PISA, está en reconocer la tendencia de este tipo de estudios. De este modo, observamos investigaciones centradas en:

- a) Explicar aspectos teóricos y metodológicos del proyecto PISA.
- b) Comparar datos al interior de un país o entre países, ya sea con los informes de PISA y/o contrastando el curriculum con lo que se evalúa en determinada área en esa prueba, o bien, a fin de comparar datos de los informes, con los obtenidos mediante nuevas exploraciones.
- c) Explicar el por qué de los resultados obtenidos por los estudiantes, en determinadas áreas de evaluación de PISA.

De esta revisión, observamos que las investigaciones han atendido las tres áreas que evalúa PISA, en las que han evidenciado algunas limitaciones de esta evaluación, pero además, han mostrado que los informes han contribuido en la toma de decisiones en algunos sistemas educativos, particularmente en los procesos de reforma. Sin embargo, Gil y Vílchez (2006), sostienen que en general el proyecto PISA ha sido desaprovechado e incluso ha dado a interpretaciones distorsionadas, perjudiciales para la extensión de una educación de calidad.

Por nuestra parte, consideramos que es insuficiente el análisis de datos estadísticos, ya que se requieren explicaciones que evidencien otro tipo de problemática, la relativa a los procesos de aprendizaje, así como variables afectivas y actitudinales.

## 1.2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Si bien los resultados de pruebas masivas como PISA han sido duramente cuestionados por la omisión de aspectos como el nivel de marginación y el contexto cultural de los participantes, también es cierto que han permitido a la sociedad reflexionar acerca de qué se está haciendo en el ámbito de la educación tanto a nivel de una nación como de todo el mundo. Aspectos cualitativos que no son estudiados por PISA son imprescindibles para mejorar la educación. Tales aspectos están directamente vinculados a: el efecto de las evaluaciones en los estudiantes, en los profesores, los directivos y padres de familia; de su uso tanto a nivel interno como externo (por sus funciones) por parte de un sistema educativo; de cómo aprovechar en la mejora de los procesos de enseñanza, la información relacionada con los recursos tanto cognitivos como afectivos que ponen en juego los estudiantes en ese proceso y que hasta ahora han sido obviados; del tipo de prácticas que realiza el profesor y cómo las pone en funcionamiento, tal como la planificación, diseños de situaciones de aprendizaje, y evaluación del aprendizaje, son algunos.

En efecto, si de mejorar la calidad de la educación en general se trata, los resultados de la prueba PISA proporcionan una medición que permite hacer comparaciones. Sin embargo, es insuficiente sólo comparar datos, ya que es necesario además, entender otro tipo de procesos que quedan escondidos detrás de la aplicación y la emisión de los resultados de esta prueba, especialmente aquellos que los estudiantes utilizan al momento que resuelven los problemas. Por ello, es importante estudiar los procesos que despliegan, a fin de entender estrategias que siguen, procedimientos, del uso de símbolos matemáticos, así como de la cantidad, variedad y calidad de los conocimientos que poseen y que usan. El disponer de información cualitativa acerca de aspectos de este tipo, sin duda es importante, pues contribuirá a derivar conclusiones sobre el desarrollo de competencias, pues se constituirían en insumos confiables para el sistema educativo en general y para el profesor en particular.

Más allá de la naturaleza y los objetivos de la prueba PISA, es probable que los resultados que nuestros estudiantes obtienen en esa prueba sean deficientes, porque los estudiantes no sean necesariamente capacitados para en el uso de estrategias para la resolución de esos tipo de problemas. Incluso, es posible que su repertorio de estrategias sea muy limitado. Además la revisión de las investigaciones ha mostrado una marcada escasez en cuanto a estudios específicos que se hayan enfocado en estudiar las estrategias



en la resolución de problemas propuestos en la prueba PISA. Existen varios trabajos relativos a las estrategias pero de problemas matemáticos en general.

La identificación y caracterización de las estrategias es útil para conocer a profundidad procesos cognitivos que suscita la resolución de los problemas o situaciones problemáticas presentes en esta u otro tipo de pruebas, a fin de mejorar procesos de enseñanza.

Es en este contexto en el que se inscribe nuestra investigación. Nos interesamos por estudiar procesos cognitivos desarrollados por estudiantes de Nivel Medio Superior (NMS) mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA. En particular, interesó identificar las estrategias que utilizan al resolver este tipo de problemas. Para ello, nos planteamos la pregunta siguiente:

*¿Qué estrategias desarrollan estudiantes de Nivel Medio Superior mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA?*

El objetivo consistió, en *caracterizar las estrategias que desarrollan los estudiantes de bachillerato mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA.*

## Referencias bibliográficas del capítulo

- Arteaga, J. & Guzmán, J. (2005). Estrategias utilizadas por los alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas, México. *Educación Matemática*, 17 (1), 33-53.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2 (3), 31-45.
- Gallardo-Gil, M., Fernández-Navas, M., Sepúlveda-Ruiz, M., Serván, M., Yus, R., & Barquín, J. (2010). PISA y la competencia científica: Un análisis de las pruebas de PISA en el Área de Ciencias. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*. 16 (2), pág. 1-17.
- Gil Pérez, D. y Vilches, A. (2006). ¿Cómo puede contribuir el proyecto PISA a la mejora de la enseñanza de las Ciencias (y de otras áreas de conocimiento)? *Revista de Educación*, Núm. Extraordinario. 295-311.
- INEE (2010). *Información de México sobre PISA 2009*. México: INEE. Recuperado de: [www.revistas.unam.mx/index.php/perfiles/article/download/.../22662](http://www.revistas.unam.mx/index.php/perfiles/article/download/.../22662)
- Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies Mathematics*. 77 (1), 105–127.
- Linnakylä, P. y Välijärvi, J. (2006). Rendimiento de los estudiantes finlandeses en PISA. Las claves del éxito en lectura. *Revista Educación*. Núm. Extraordinario. Pág. 227-235
- Maestro, C. (2006). La evaluación del sistema educativo. *Revista Educación*. Núm. Extraordinario. Pág. 315-336.
- Mónaco, B. y Aguirre, M. (1996). *Caracterización de algunas estrategias para resolver problemas aritméticos y algebraicos en el nivel medio básico: Un estudio de casos*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Morales, R. (2010). *Estrategias de resolución de problemas matemáticos en el Nivel Medio Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Recio (2006). PISA y la evaluación de las matemáticas. *Revista de Educación*, Núm. Extraordinario. 263-273.
- Rico (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista Educación*. Núm. Extraordinario. 275-294.
- Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de pisa) de los futuros maestros. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 25 (3), 355-366.
- Sánchez y García-Rodicio (2006). Re-lectura del estudio PISA: Qué y cómo se evalúa e interpreta el rendimiento de los alumnos en la lectura. *Revista Educación*. Núm. Extraordinario. Pág. 195-226

- Uribe, M. (2009). Factores explicativos de los resultados de alfabetización científica en estudiantes de 15 años: Estudio basado en la medición PISA 2000. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Católica de Chile.
- Yus, R., Fernández, M., Gallardo, M., Barquín, J., Sepúlveda & M., Serván, M. (2012). La competencia científica y su evaluación. Análisis de las pruebas estandarizadas de PISA. *Revista de Educación*, 360. Recuperado de: [http://www.revistaeducacion.mec.es/doi/360\\_127.pdf](http://www.revistaeducacion.mec.es/doi/360_127.pdf)

# Capítulo 2

Elementos teóricos y  
metodológicos

En este capítulo se discuten los elementos teóricos en que se apoyó nuestra investigación, que consisten de los conceptos de estrategia, problema y resolución de problemas; sustanciales en este estudio ya que nos permitieron interpretar y explicar los resultados obtenidos. La literatura especializada sostiene que en el proceso de resolución de problemas, se ponen en juego métodos, técnicas, procedimientos y estrategias, por ello, nuestra reflexión inicial parte de una discusión breve, en la que distinguimos entre estos conceptos.

En este capítulo se describen además, los aspectos metodológicos que guiaron este trabajo de investigación, los cuales constan de cuatro etapas:

I: *Familiarización*

II: *Preparatoria*

III: *Levantamiento de datos*

IV: *Análisis y discusión de resultados*

## 2.1. Elementos teóricos

Esta investigación tiene como objetivo caracterizar las estrategias que los estudiantes utilizan para resolver problemas de la prueba PISA. Por lo tanto el concepto central, sobre la base del cual se articula y se fundamenta nuestro trabajo es el de estrategia, sin embargo existe un concepto más amplio que éste, el de procedimiento. Pero las estrategias tienen sentido si son aplicadas o utilizadas en la resolución de problemas. Por ello es también necesario adoptar una posición conceptual para fundamentar y explicar estos procesos. Por estas razones los fundamentos teóricos que sustentan este trabajo, son cuatro conceptos: *procedimientos*, *estrategias*, *problemas* y *resolución de problemas*. El concepto de problema, como bien sabemos, es fundamental en esta investigación, en razón de que son el medio por el cual fueron exploradas las estrategias.

### 2.1.1. *Procedimiento*

Un *procedimiento* se entiende como un conjunto de acciones ordenadas y finalizadas, orientadas a la consecución de una meta, y se clasifican en dos tipos: en heurísticos y algorítmicos (Monereo, 1999). Ambos tienen en común que se aplican en la resolución de ejercicios y problemas de diversos tipos. La diferencia esencial consiste, de acuerdo con Ballester, *et al*, (Ballester *et al*, 1992) en que si para una determinada clase de ejercicios se conoce un algoritmo de solución, entonces todo ejercicio de esta clase se puede resolver con seguridad, en la misma forma mediante la aplicación de dicho algoritmo. En cambio, si para un ejercicio no se dispone de ningún algoritmo (porque no existe o no se conoce), entonces primero hay que determinar una vía de solución apropiada. Para ello, puede ser útil tener en cuenta los procedimientos heurísticos que permitan realizar un trabajo sistemático orientado hacia este objetivo, pero sin que sea posible asegurar que de ese modo se encuentre una vía de solución.

### 2.1.2. *El concepto de estrategia y su caracterización o tipos*

El término estrategia procede del griego y etimológicamente significa “el arte de dirigir las operaciones militares”. En la actualidad ha perdido la connotación militar, se ha extendido a otros ámbitos y está más en consonancia con las actuaciones realizadas para el logro de un objetivo o en la resolución de un problema (Sánchez, 2010). En ambos casos, las estrategias se desarrollan a través de una serie de acciones.

El uso, aplicación y desarrollo de estrategias ha variado, de modo tal que las encontramos en situaciones de la vida cotidiana, en la laboral, científica y en la enseñanza de cualquier disciplina del conocimiento, por citar algunos casos. En el plano educativo en el que se ubica este trabajo, se distinguen diferentes tipos de estrategias como son: estrategias de aprendizaje y de enseñanza, que consisten de lo siguiente:

- *Estrategias de aprendizaje.* Son procesos de toma decisiones (conscientes e intencionales) en los cuales el alumno elige y recupera, de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplimentar una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción (Sánchez, 2010).
- *Estrategias de enseñanza.* Serie de acciones sistemáticamente organizadas por el profesor y que tienen la intención de producir aprendizaje en los estudiantes (Monereo, 1994).

Otro aspecto no menos importante acerca de las estrategias, es que han sido conceptualizadas desde diferentes enfoques y puntos de vista. En la investigación, los trabajos pioneros que se han dado a la tarea de caracterizar este concepto, es el de Bruner (1984), quien sostiene que una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención, utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse de que se den esos resultados y no otros. Otra connotación proviene de Piaget e Inhelder (1978), quienes la conciben como todo sistema y secuencia de procedimientos, susceptibles de ser repetidos y transferidos a otras situaciones, que constituyen los medios para alcanzar el fin.

En investigaciones posteriores, Montanero y León (2003) distinguen dos acepciones del término estrategia: la sustantiva y la adjetiva. La primera, se refiere al conjunto de operaciones ordenadas, aunque con un carácter flexible. Y la segunda, se refiere a determinadas formas de actuar. Asimismo destacan que la complementación de ambas acepciones origina algunas características esenciales:

- *La serialidad.* Se relaciona con la forma de conocimiento procedimental, es decir, de las secuencias de las acciones.

- *La interactividad.* Se asocia a la toma de decisiones en condiciones específicas.
- *La funcionalidad.* Se refiere a una función de mediación y regulación de los procesos cognitivos.

Escoriza (2003) manifiesta que las estrategias son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos. Distingue las siguientes características sustanciales en las estrategias:

- a) Son secuencias organizadas de objetivos, acciones y operaciones cognitivas.
- b) Forman parte del conocimiento procedural, es decir, nos indica cómo realizar una acción cognitiva o una acción determinada con la finalidad de conseguir el logro de un objetivo específico.
- c) Son procesos deliberados, es decir, son controlados y regulados por una cognición intencional, las acciones y operaciones son guiadas por las estrategias haciendo posible su regulación y evaluación en la progresión hacia el objetivo previsto.
- d) Son procesos propositivos pues su ejecución está orientada al logro intencional de determinados objetivos. Especificar los objetivos de la actividad es una cuestión esencial en el conocimiento estratégico pues implica intencionalidad y autocontrol.
- e) Son secuencias de operaciones mediadas simbólicamente, en esto el lenguaje juega un papel primordial, ya que regula el comportamiento y con ello supone que las estrategias sean realizadas de manera consciente y por tanto bajo control voluntario.

Un aspecto importante de la caracterización de Escoriza es que reconoce tres características fundamentales en la lectura (de un problema):

- **Cantidad** de conocimiento del lector.



- **Calidad** de lo que sabe.
- **Diversidad de los conocimientos previos que posee.**

Estas características contribuyen en una adecuada interpretación y comprensión del problema.

Por otra parte, en nuestra disciplina también se han realizado estudios que se han ocupado por caracterizar este concepto, uno de ellos es Cervera (1998), quien afirma que estrategia es el conjunto de acciones que en determinado orden realiza un alumno para obtener la respuesta de un problema con un mínimo de esfuerzo, previendo en el caso de que los resultados no sean deseados; Cabañas (2000) menciona que las estrategias son actividades preconcebidas para realizar o ejecutar una acción y de alguna manera se trata de lograr unos objetivos y no otros; Olave (2005) señala que estrategia es el plan o un curso de acción conscientemente deseado y determinado de forma anticipada con la finalidad de asegurar el logro de los objetivos, un conjunto de actividades y procedimientos dirigidos hacia un fin.

De las definiciones anteriores, se perciben rasgos comunes de las estrategias:

- Secuencia de actividades u operaciones mentales
- Planes dirigidos a la consecución de una meta
- Acciones conscientes e intencionales
- Implican procesos de toma de decisiones ajustados al objetivo.

En nuestro trabajo, entenderemos por estrategia al conjunto de procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos (Escoriza, 2003). Asumimos esta postura por varias razones, una de ellas es la distinción que el autor hace de la ejecución de sus acciones garantiza el resultado (las algorítmicas) y las que no lo garantizan (las heurísticas). Además, considera que son conocimiento procedural ya que indican cómo realizar una acción, son deliberados, controlados y orientados hacia un objetivo. Asimismo porque a diferencia de otros autores, reconoce características esenciales de las estrategias, las cuales posibilitan el planteamiento definición más completa e integral. Y finalmente otra de las razones que nos motivó para retomar esa definición es que considera importante las características que posee el lector, en nuestro caso, el resolutor del problema, ya que se considera fundamente en el proceso de resolución.

#### *2.1.2.1 Elementos para configurar una caracterización de estrategias*

Para la caracterización de las estrategias se hizo una adaptación a la propuesta de Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011) descrita en el capítulo previo. De este modo, las caracterizamos como:

- *Estrategias formales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se utilizan conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas.
- *Estrategias informales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se realizan transformaciones sobre la base de descomposiciones y recomposiciones de formas geométricas (cortar y pegar), estimaciones visuales y aproximaciones de medidas.

Es en este tenor que clasificamos las estrategias desarrolladas por los estudiantes en esta investigación.

El estudio de las estrategias toma como base los procesos seguidos por los estudiantes en la resolución de los problemas. Por ello, dos conceptos fundamentales en este trabajo además del de estrategia, son el de problema y proceso de resolución de problemas.

### 2.1.3. Problema

Existen varias concepciones acerca del concepto problema. Polya (1965) por ejemplo, lo define como la búsqueda consciente de alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar. Campistrous y Rizo (1996) por su parte, lo conciben como a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación. Lester (1983) considera que un problema es una situación que un individuo o un grupo, quiere o necesita resolver y para el cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución, postura que compartimos en esta investigación. Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006) lo plantean en función de las características que debe tener un problema, señalan las siguientes: a) Existirá una situación inicial y una situación final; b) La vía de pasar de una situación a otra debe de ser desconocida o que no se pueda acceder a ella de forma inmediata, c) Debe existir el estudiante que quiera resolverlo, y; d) El estudiante dispone de los

elementos necesarios para buscar las relaciones que le permitan transformar la situación.

Entendemos que ninguna de las posturas anteriores acerca del concepto problema se contraponen, dado que consideran aspectos fundamentales, como:

- Consideraciones iniciales y finales, que se reconocen del planteamiento del problema;
- La vía de solución debe ser desconocida para quien resuelve un problema, y además,
- Estar motivado para resolverlo.

Aspectos como estos, son los que consideramos en nuestro estudio, por ello adoptamos la postura de Campistrous y Rizo (1996).

#### *2.1.4. Resolución de problemas*

Al igual que el concepto de estrategia y problema hay investigadores que han caracterizado el concepto de resolución de problemas. Selden, Mason y Selden (1989) afirman que **resolver problemas** consiste en encontrar un método de solución, posiblemente un algoritmo, y llevarlo a cabo, en donde el ejecutante llega equipado de información y de habilidades, quizá incluyendo conceptos erróneos, para intentar realizar la tarea. Por otra parte Polya (1976) establece que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados. Carreras (1998) señala que la resolución de problemas es un proceso constituido por todo el esfuerzo que realiza el resolutor para obtener su solución. Este autor entiende la resolución de problemas como un proceso que comienza para el estudiante desde el momento en que se le presenta el problema y que lleva consigo al conjunto de acciones y operaciones que se desarrollan hasta que lo soluciona, y valora la respuesta encontrada.

A lo largo del tiempo se han distinguido distintas fases en el proceso de resolución de problemas. Dewey (1933), señala las siguientes:

- Se siente una dificultad: localización de un problema.

- Se formula y define la dificultad: delimitar el problema en la mente del sujeto.
- Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución.
- Se obtienen consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.
- Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba.

Por otra parte, Polya (1965) propone un plan general para resolver problemas, el cual es llamado por algunos autores como programa heurístico general como Ballester, et al., 199. Además es considerado de suma importancia para la enseñanza como para el aprendizaje de la matemática.

Polya, señala que para resolver un problema se necesita:

1. Comprender el problema. Se refiere a que se realice una correcta interpretación del enunciado del problema. Este proceso se puede auxiliar de preguntas como ¿Qué se pide?, ¿Qué datos? ¿Cuál es la incógnita? ¿Es este es un problema similar a otro que hayas resuelto antes? ¿Puedes replantear el problema con tus propias palabras?
2. Concebir un plan. Se refiere a la forma en cómo se va resolver el problema, es decir elaborar una estrategia para abordar el problema. Y se utilizan cuestionamientos como ¿Conoces algún problema similar? ¿Puedes hacer uso de él? ¿Puedes enunciar el problema de forma diferente?
3. Ejecutar el plan. Se refiere al camino que llevará a la solución del problema. Se pueden realizar cuestionamientos como para qué hacemos lo que hacemos, además si ese camino no lleva a la solución se abandona y se inicia otro plan.
4. Visión retrospectiva. En este proceso se examina la solución obtenida. Para ello se vuelve a leer el enunciado y valorar si se ha encontrado lo que se pedía. Y se puede preguntar cómo ¿Es lógico el resultado? ¿Existen otras vías de resolución?

En nuestra investigación retomamos a Polya (1965), ya que describe el plan que se debe seguir en la resolución de un problema, para el análisis y discusión de los resultados.

## **2.2. Aspectos metodológicos**

Desde el punto de vista metodológico es una investigación cualitativa con carácter interpretativo. Se sustenta de las explicaciones escritas, verbales y no verbales, como las gestuales, presentadas por los estudiantes en dos momentos de su participación: a) al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA, y; b) durante una entrevista de tipo abierta. A partir de ello, es que se identificaron y caracterizaron las estrategias que desarrollaron en el proceso de solución de las situaciones que se les plantearon.

### *2.2.1. El estudio de casos como método de investigación*

La investigación se inscribe en un estudio de casos, el cual es considerado como una forma de estudiar a un individuo o a una institución en un entorno o situación único y de una forma lo más intensa y detallada posible (Castillo, 2008).

Este tipo estudio es considerado como un método de investigación que facilita la búsqueda de respuestas respecto del “cómo” o del “por qué” de los hechos sociales, ya que se centra en el análisis profundo de uno o varios casos específicos (Yacuzzi, 2005). Por ello, lo creímos como un método adecuado para llevar a cabo nuestro trabajo, ya que nos permitió profundizar en el entendimiento de los procesos desarrollados por los estudiantes durante la resolución de problemas matemáticos, sin buscar una generalización de los resultados, sino más bien, una caracterización de estrategias.

### *2.2.2. Participantes y contexto*

Los participantes en esta investigación fueron seis estudiantes de primer año de Nivel Medio Superior, cuyas edades oscilaban entre los 15 años, tres meses y 16 años, dos meses. Este rango de edad fue fundamental, en razón de que es la que considera la OCDE para la aplicación de la prueba PISA. Esta población, se localiza en tercer año de secundaria y en primer año de bachillerato. La selección de la muestra atendió a los criterios siguientes:

- a) Al rango de edad establecido por la OCDE;
- b) A que fuesen estudiantes de bachillerato y;
- c) Al interés de los estudiantes por participar.

Cuatro de los participantes estaban matriculados en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la UAG y los otros dos, en el Centro de Estudios Tecnológicos y

de Servicios No. 135 (Cetis 135), ambos centros educativos, se ubican en la ciudad de Chilpancingo, Gro (Tabla 3.1).

TABLA II.

**Estudiantes que participaron en la exploración**

<b>Institución</b>	<b>Hombres</b>	<b>Mujeres</b>	<b>Total</b>
Preparatoria No. 1	2	2	4
Cetis 135	0	2	2
<b>Total</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>6</b>

### 2.2.3. Problemas matemáticos de la prueba PISA

Los problemas matemáticos usados en la exploración provienen de la prueba PISA, de los llamados liberados. Este tipo de problemas y su solución, involucran tres dimensiones: *procesos*, *contenido* y *contexto o situación* y consisten de lo siguiente:

- *Procesos*. Se refiere a las capacidades que los estudiantes que pueden activar para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos. Esta dimensión se divide en tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión.
- *Contenido*. Se remite al tipo de tema abordado en los problemas y tareas de matemáticas que se presentan a los estudiantes, y consiste de los temas de cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e Incertidumbre.
- *Contexto*. Alude a los ámbitos en que se sitúan los problemas matemáticos, los cuales se dividen en personal, público, educativo, laboral y científico.

Este tipo de problemas a su vez, se distinguen a través de un título, que es ad hoc a la situación involucrada. Se plantean a través de un enunciado y se apoyan de tablas, gráficas, figuras, etc. En ellos se formulan una o más preguntas, que pueden ser abiertas, cerradas, cortas o de opción múltiple; estas preguntas son las que determinan el nivel de complejidad, según los criterios de OCDE.

La selección de los problemas atendió a los criterios siguientes:

- Que correspondiera a un *contenido* diferente

- Que los procesos que se pusieran en juego en su resolución involucraran a la *reproducción* y a la *conexión*.
- Que atendieran a la mayoría de los *contextos* planteados por PISA.

En la tabla siguiente se presenta de manera resumida las características de los problemas seleccionados.

TABLA III.  
Problemas matemáticos utilizados en la exploración

No.	Problema	Contenido	Situación	Proceso	Tipo de respuesta
1	Carpintero	Espacio y forma	Educativa	Conexión	Elección/ compleja
2 a)	Juventud Crece más	Cambio y relaciones	Científica	Reproducción	Cerrada
2 b)	Juventud Crece más	Cambio y relaciones	Científica	Conexión	Cerrada
2 c)	Juventud Crece más	Cambio y relaciones	Científica	Reproducción	Abierta
3 a)	Exportaciones	Incertidumbre	Pública	Reproducción	Cerrada
3 b)	Exportaciones	Incertidumbre	Pública	Conexión	Elección
4	Selección	Cantidad	Laboral	Conexión	Corta

#### 2.2.4. Aplicación

Los problemas se resolvieron de manera individual, en un ambiente de lápiz y papel, sin el apoyo de la tecnología. El tiempo promedio que emplearon en el proceso de solución fue de 40 minutos. Los problemas se distribuyeron de la siguiente forma:

TABLA IV.  
Distribución de los problemas matemáticos por estudiante

Estudiante	Problema			
	El Carpintero	Exportaciones	Juventud crece más	Selección
Samantha	X	X		
Ricarda	X			
Grecia		X	X	
Nadxieli			X	
Oxziel				X
Alexis				X

#### 3.6. Entrevistas

La entrevista fue otro de los instrumentos usados en la recolección de datos, fue de tipo abierto. El propósito fue indagar de manera más profunda los procesos que

siguieron los estudiantes en la resolución de los problemas. Las preguntas que la guiaron fueron las siguientes:

1. ¿Tenías un plan o una idea inicial para resolver el problema?
2. ¿Qué se pide?
3. ¿Cómo lo resolviste?
4. ¿Cuál o cuáles son las respuestas al problema?
5. ¿Consideras que tu respuesta sea realmente la solución al problema?
6. ¿Crees que haya otra forma de resolverlo?

La primera pregunta se planteó con el fin de indagar si los estudiantes tenían un plan o idea preconcebida para resolverlo. Con la segunda, se investigaba si los estudiantes eran capaces de reconocer los datos y las exigencias del problema, así como las relaciones que se establecen entre ambos. Con la pregunta 3 se pretendió comprender cuáles fueron las acciones que siguieron para resolver el problema y de ese modo reconocer estrategias, así como de lo que sabe, la cantidad y la calidad de lo que sabe acerca de los objetos, propiedades y procedimientos matemáticos. Mediante la pregunta 4 se investigó si el estudiante percibe que el problema puede tener una o más respuestas, según el caso. La pregunta 5 se orientó a comprender si el estudiante había reflexionado sobre el proceso de solución. Y con la última pregunta se indagó si perciben que un problema puede tener más formas de resolución.



## Referencias bibliográficas del capítulo

- Ballester, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I. Arango, C. García, M., Álvarez, A. Rodríguez, M., Batista, L.C., Villegas, E., Almeida B. & Torres, P. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática. Tomo I*. Cuba: Pueblo y Educación.
- Bruner, J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje. Compilación*. José Luis Linaza. pp 232. Alianza editorial: Madrid.
- Cabañas, G. (2000). *Los problemas... ¿cómo enseño a resolverlos?* México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a Resolver problemas aritméticos*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Carreras (1998). *La educación matemática*. Valencia: Servicio de publicaciones UPV.
- Castillo, M. (2008). *Proyectos de Investigación. Metodología de investigación científica USN. Método de estudio de caso*. Recuperado de: [www.itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC](http://www.itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC)
- Cervera, P. (1998). *Estrategias para la solución de problemas geométricos que emplean los alumnos en duodécimo grado. Un estudio de caso*. Tesis de Maestría no publicada. Instituto Superior Politécnico "Julio Antonio Mella". La Habana, Cuba.
- Dewey, J. (1933). *How We Think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process*. Boston: D.C. Heath.
- Escoriza, J. (2003). *Evaluación del conocimiento de las estrategias de comprensión lectora*. España: Edicions Universitat, Pp. 15-17
- Lester, F. K( 1983). Trends and issues in mathematical problems solving research. En: R. Lesh y Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes*. New York: Academic Press
- Montanero, M. & León, J. (2003). *El concepto de estrategia: dificultades de definición e implicaciones psicopedagógicas*. Recuperado de: [http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Montanero\\_Fernandez\\_y\\_Leon.htm](http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Montanero_Fernandez_y_Leon.htm)
- Monereo, C. (coord.), Castelló, M. Clariana, M. Pérez, M.L. (1994). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela*. México D.F.: Graó, Colofón.
- Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Polya (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas
- Rodríguez, A., Santillán, O. & Silva, M. (2009). *Estrategias de resolución de problemas matemáticos empleadas por alumnos de sexto de primaria*. En Memoria Electrónica del X Congreso Nacional de Investigación Educativa.
- Sánchez, G. (2010). Las estrategias de aprendizaje a través del componente lúdico. *MarcoELE Revista Didáctica Español como lengua extranjera*. Núm.11.
- Selden, J, Mason, A. y Selden, A. (1989). Can average calculus students solve nonroutine problems? *Journal of Mathematical Behavior* 8, 45-50.

- Sigarreta, J. M., Rodríguez, J. M., y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. 13(1)
- Yacuzzi, E. (2005). *El estudio de caso como metodología de investigación: teoría, mecanismos causales, validación*. Recuperado de: <http://www.cema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/296.pdf>.

# Capítulo 3

Análisis de los resultados

En este capítulo se presentan los resultados de la exploración, los cuales se sustentan de las producciones escritas realizadas por los estudiantes al momento de justificar sus procedimientos en el proceso de resolución a los problemas planteados. Asimismo, de las explicaciones verbales y no verbales, y de las gestuales, que dieron durante una entrevista de tipo abierta. El análisis se presenta de la siguiente manera:

1. Se enuncia el problema matemático de la prueba PISA que resolvieron los estudiantes.
2. Se describe el problema con base en el contenido en el que se ubica, el contexto y el tipo de respuesta (s).
3. Se presenta el estudio de los casos en los que se exploraron las estrategias. Para ello, nos auxiliamos de aspectos como los siguientes:

¿Cómo resuelve el problema?

¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?

Síntesis. ¿Comprende el problema? ¿Qué relaciones establece entre lo que se conoce con lo que se busca? ¿Qué orden siguen sus acciones?

A partir de aspectos como éstos, se caracterizaron las estrategias desarrolladas durante el proceso de solución de los problemas.

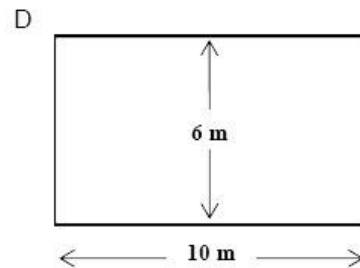
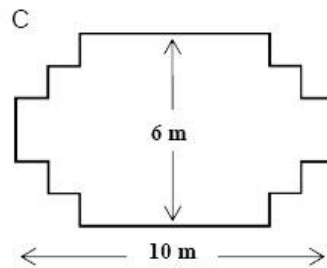
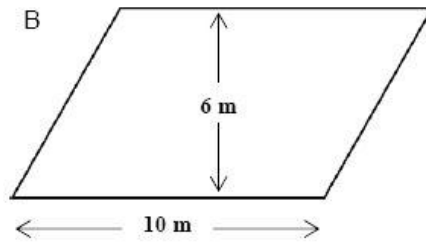
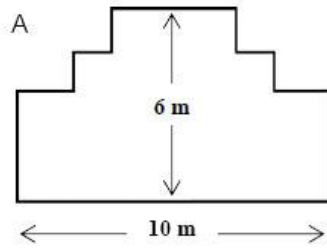
3. ESTUDIO DE LOS CASOS

3. 1. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema del Carpintero.

EL CARPINTERO

Un carpintero tiene la madera necesaria para hacer una cerca de 32 metros de largo y quiere colocarla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para ese jardín.

Encierra en un círculo “Sí” o “No” para cada diseño, dependiendo si se puede realizar con la cerca de 32 metros.



Diseño del jardín	Usando este diseño, ¿se puede realizar con 32 metros de cerca?, argumenta tus respuestas.
<i>Diseño A</i>	
<i>Diseño B</i>	
<i>Diseño C</i>	
<i>Diseño D</i>	

El problema es de elección múltiple, corresponde al contenido de *espacio y forma*, y se ubica en el contexto *educativo*. El planteamiento de la situación combina información discursiva y visual. En la discursiva, se enuncia la construcción de una cerca y la medida que debe tener, en metros lineales. En la visual, se muestran cuatro tipos de diseños

poligonales a analizar, a fin de que elijan el (o los) que cumplan con la exigencia. Tres de estos diseños tienen forma rectangular (uno convexo y dos no convexos) y el otro, es un romboide. Su solución, implica que los estudiantes comprendan que el problema se asocia con perímetro, asimismo, deben reconocer que en algunos casos el perímetro se obtiene de manera directa mediante una fórmula y en otros casos, se requiere de la descomposición y recomposición de las figuras. A partir de ello, deben reconocer que los diseños A, C y D son los que cumplen con la exigencia.

### 3. 1. 1. Caso de Samantha

Samantha tiene 15 años con 7 meses y cursa el segundo semestre de bachillerato en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la UAG.

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

Una primera acción de Samantha fue leer el enunciado del problema. A partir de ello, identifica que la situación está relacionada con perímetro, lo infiere del enunciado, particularmente de la frase: “para hacer una cerca”. Se corroboró a través de la entrevista, como se muestra a continuación:

- 21 Entrevistador: ¿Cómo lo hiciste?
- 22 Samantha: Sumando sus lados... del terreno...
- 23 Entrevistador: ¿Qué sumaste?
- 24 Samantha: Los lados del terreno...
- 25 Entrevistador: ¿Por qué se te ocurrió sumar?
- 26 Samantha: Porque me está pidiendo que... si se puede sacar el perímetro, no el área.

A la vez que explicaba que se trataba de perímetro y no de área, Samantha describía con sus manos el contorno o límites de la cerca.

De la lectura que hace, reconoce datos explícitos tanto en el enunciado como en los diseños. Del enunciado, sabe que el perímetro del jardín debe medir 32 metros, y de los diseños, que el largo mide 10 metros y el ancho 6 metros.

Para determinar cuál (o cuáles) de los diseños cumple con la exigencia del problema, primero explora el diseño D (ver figura 1), porque reconoce en él, una figura “familiar”, el rectángulo, se infiere de la entrevista. También, porque sabe que puede calcular su perímetro de manera directa.

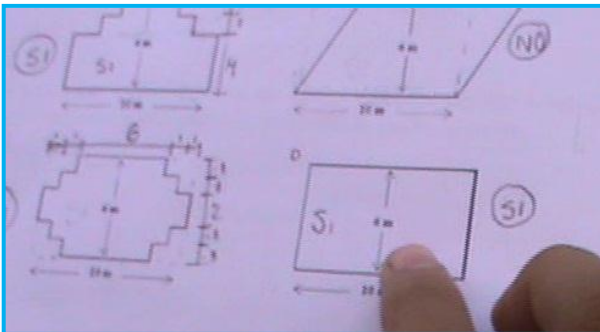


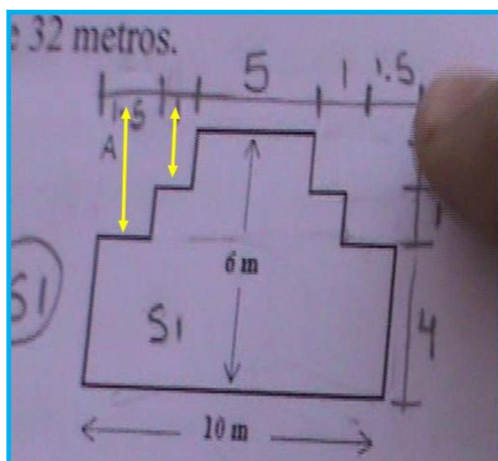
Figura 1: Samantha, indica el diseño con el que trabajó primero.

- 12 Entrevistador: ¿Cuál es el que resolviste primero?
- 13 Samantha: Primero me basé en el D ...
- 14 Entrevista: ¿Te basaste en qué?
- 15 Samantha: De que aquí no... no le hace falta ningún pedazo... y en eso me basé.

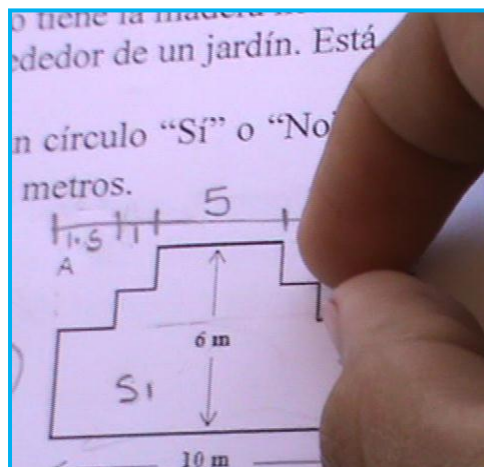
Tal como lo afirma en la entrevista (renglón 22), Samantha suma la medida de los lados del diseño D, para ello, se apoya de la fórmula para calcular perímetros, y con ello comprueba que el contorno mide 32 metros. Ello la lleva a decidir, que este diseño cumple con la exigencia.

Seguidamente, trabaja sobre el diseño A (renglones 28-40). Sus primeras acciones las orienta a descomponer y recomponer la forma geométrica, con el fin de formar un rectángulo, porque a través del diseño D, comprobó que esta figura si cumple con la exigencia. Su proceder fue como sigue:

- Descompone y recompone la figura y forma un rectángulo.
- Compara las longitudes de los segmentos que forman los lados del polígono que tienen forma escalonada (Figuras a y b en figura No. 2)<sup>1</sup>. Con ello, estima sus medidas (renglón 28-32).
- Calcula su perímetro y comprueba que es 32 metros.



a)



b)

Figura 2. Transformación del polígono e inferencias de medidas

- 27 Entrevistador: Ya que tienes resuelto el inciso D, ¿Qué hiciste?
- 28 Samantha: Me fui al inciso A, para ir colocando cuánto mide cada pedazo de este terreno
- 29 Entrevistador: ¿Cómo es que hiciste ese procedimiento? ¿Por qué hiciste esas líneas?
- 30 Samantha: Yo supongo que mide 4, si mide 4 entonces ésta debe medir 1 para dar los 6 metros que me dice aquí. Y aquí igual, pero nada más que estos pedazos están más grandes y por eso le puse que era un metro y medio.
- 31 Entrevistador: ¿Y cuánto te dio la suma de ese lado?
- 32 Samantha: Éste 10 metros.... Y éste 6.

A partir de esta forma de proceder, Samantha comprueba que el perímetro del diseño A también mide 32 metros (renglón 38-40), exigencia del problema.

<sup>1</sup> Las flechas de doble dirección del inciso a en la figura No. 2, es una indicación nuestra, acerca de la estimación que Samantha hace, de la medida de segmentos.



- 37 Entrevistador: Ya que tienes esa división de segmentos ¿Qué haces?  
 38 Samantha: Sumo los lados para encontrar el perímetro.  
 39 Entrevistador: ¿Cuál es tu respuesta?  
 40 Samantha: Si se puede cercar porque al sumar los lados me da 32 metros.

Siguiendo el orden en que fueron ubicados los diseños, Samantha trabaja con el B. A partir de lo que sabe sobre las propiedades de la forma geométrica que tiene el diseño (romboide), reconoce que no cumple con la exigencia. Es decir, ella sabe que la medida de la altura, es diferente a la medida de los lados menores del romboide, incluso lo señala (figura 3). Ese es uno de los argumentos centrales de su respuesta, tal como lo sostiene en la entrevista.

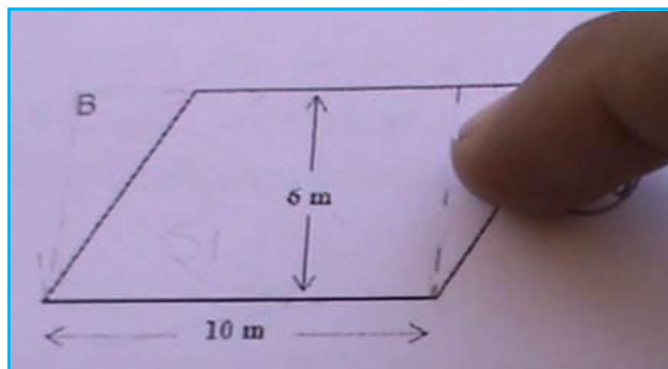


Figura 3: Samantha indica sobre el diseño, que se sabe cuánto mide la altura, pero desconoce cuánto miden los lados de la figura (los lados menores del romboide).

- 42 Samantha: Me fui con éste (señala el diseño B)... y yo pensaba que si se podía cercar porque aquí me dice la altura del... terreno pero luego analicé y me di cuenta que no se podía cercar, porque no sabemos cuánto mide aquí (señala los lados menores del romboide), pues sólo me dan la altura... Este no se podría cercar porque no sabemos los datos del terreno.

Para el diseño C, procede de la misma manera que lo hizo para el caso del diseño A, es decir:

- Descompone y recompone la figura con el fin de formar un rectángulo.
- Compara las longitudes de los segmentos que forman los lados del polígono que tienen forma escalonada. A partir de ello, estima sus medidas (renglón 46-48 de la entrevista), y con ello comprueba que el ancho del rectángulo que formó, mide 6 metros.
- Calcula su perímetro y comprueba que es 32 metros.

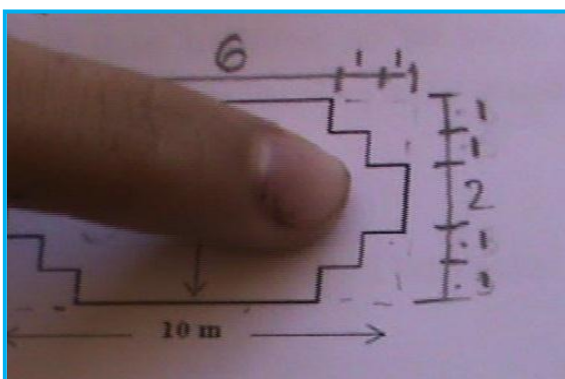


Figura 4: Transformación y estimación de medidas.

- 46 Samantha: Aquí a este pedazo le di un metro y como este está más grande yo suponía que eran dos, porque acá son un metro y un metro, y también ... un metro y un metro y faltan dos metros por eso le di esa cantidad.
- 47 Entrevistador: ¿Y para la otra parte?
- 48 Samantha: Le di un metro un metro y un metro, y también un metro y un metro y le faltan seis para llegar a 10 metros, por eso a la otra parte le di 6 metros.

A partir del análisis que realizó sobre los diseños, Samantha reconoce que son tres los que cumplen con la exigencia, el A, C y D, tal como lo enuncia al final tanto por escrito como en la entrevista (renglón 50).

- 49 Entrevistador: Para ti de estos cuatro diseños, ¿Cuáles se pueden utilizar para cercar el jardín?
- 50 Samantha: El inciso A, C y D.

#### b) ¿Cómo controla y valora el proceso de resolución?

Se observa que Samantha controla su proceso de resolución. Sus acciones están mediadas por:

- Los conocimientos que posee acerca de los polígonos, específicamente del romboide y del rectángulo.
- La comprobación que realiza de la medida del perímetro de los diseños y de ello reconoce que sólo el A, C y el D miden 32 metros.

Una forma en que ella valora sus resultados, es cuando reconoce que pueden existir más formas de diseñar el jardín, con esa medida. Se constata, a través de sus explicaciones en la entrevista.

- 51 Entrevistador: ¿Crees que haya otra forma de diseñar el jardín?
- 52 Samantha: Puede que haya más formas.
- 53 Entrevistador: ¿Cómo cuáles?
- 54 Samantha: Puede que aquí en vez de 10 mida cinco y acá arriba 11...

Es importante resaltar que los diseños referidos por Samantha son rectangulares. Primero piensa en el rectángulo, cuyas medidas pueden variar, siempre que la suma de

sus lados sea 32. A partir de un rectángulo, también piensa que éste puede descomponerse en otro polígono, como los correspondientes a los diseños A y C.

*c) Síntesis*

En general, se observa que Samantha hace una adecuada interpretación del problema, ya que identifica que se relaciona con perímetro, cuya medida debe ser 32 metros. Las acciones que lleva a cabo para resolverlo, siguen un orden:

- 1) Lee el enunciado del problema.
- 2) Decide trabajar primero con un diseño, cuya forma geométrica le es familiar, el rectángulo (diseño D) y calcula su perímetro.
- 3) Enseguida explora el diseño A.
- 4) Descompone y recompone la figura con el fin de “componer” un rectángulo.
- 5) Compara las longitudes de los segmentos que forman los lados en forma escalonada del polígono. A partir de ello, estima sus medidas.
- 6) Calcula el perímetro y comprueba que es 32.
- 7) Continuando con el orden, trabaja con el polígono del inciso B y C.

Una visión integral de las acciones realizadas por Samantha indican que su estrategia general se compone de las siguientes acciones: primero analiza el diseño que tiene una forma familiar, el rectángulo. En seguida, comprueba que cumple con la exigencia, al calcular su perímetro. En función de ello, explora los diseños A, B y C, y que reconoce son los diseños A, C y D los cumplen con la exigencia.

A partir de las acciones realizadas, se infiere que los conocimientos que posee acerca de los polígonos convexos y no convexos involucrados en la situación, son determinantes para la toma de decisiones en el proceso de resolución. Por ejemplo, cuando trabajó con los polígonos no convexos, reconoce que no puede calcular el perímetro de manera directa, por ello, los transforma hasta formar un rectángulo (figura familiar), por medio de su descomposición y recomposición. En seguida, estima las medidas al comparar las longitudes originales con las del polígono transformado.

Las estrategias que desarrolla en el proceso de resolución son:

- La estimación de la medida
- Uso de la fórmula (para calcular perímetros)

- Utiliza propiedades de polígonos (de paralelogramos)
- La comparación (de perímetro de una figura familiar con las figuras que tienen sus lados en forma escalonada)
- Descomposición y recomposición de polígonos.

### 3. 1. 2. Caso de Ricarda

Ricarda tiene 15 años 4 meses, cursa el segundo semestre de bachillerato tecnológico en el Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios 135. Ella también resolvió el problema del carpintero.

a) *¿Cómo lo resolvió el problema?*

La primera acción de Ricarda fue leer el enunciado del problema. A partir de ello, reconoce que está relacionado con el perímetro, se infiere de algunas afirmaciones que hizo durante la entrevista (renglones 62 y 64).

- 62 Ricarda: Hacer una cerca de 32 metros de largo...
- 63 Entrevistador: ¿Era necesario saber para ti saber cuánto medía?
- 64 Ricarda: Si porque... para sacar la medida... para que diera los 32 metros que tenía que medir el ancho.

Primero explora los diseños rectangulares, el A, C y el D. Inicia su análisis sobre el diseño A, en el que identifica una figura no “familiar”. Su análisis se apoya de la comparación de los segmentos que forman los lados del polígono que tienen forma escalonada; a partir de ello, estima sus medidas, y reconoce que su suma no le da los 6 metros que mide el ancho, lo evidencia en la entrevista (renglón 70), a la vez que lo señala sobre el diseño (Figura 5).

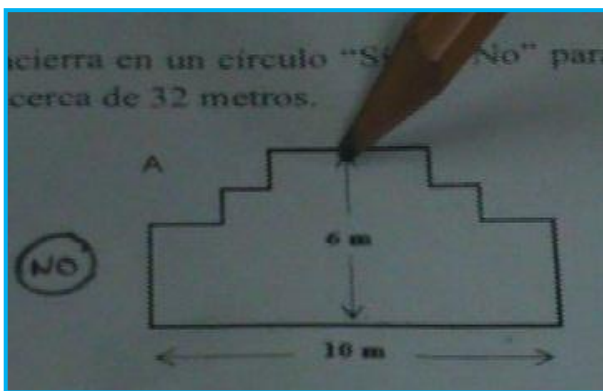
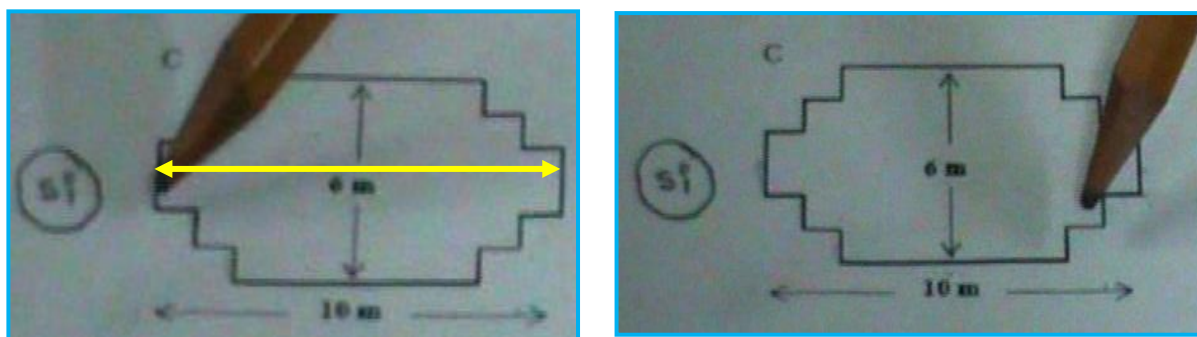


Figura 5. Ricarda realiza comparación e inferencia de las medidas.

- 69 Entrevistador: ¿Por eso dijiste que no... porque no conocías las medidas?
- 70 Ricarda: Sí, porque... aquí le calculé que si, aquí son 10 cm, de aquí a aquí serían 6 cm...pero me falta...

Lo que prevalece en el proceder de Ricarda es la medición. Se observa a partir de su interés por asignarle medidas a los lados del polígono que tienen forma escalonada, para comprobar si suman 6 metros. Este argumento le permite justificar que el diseño A no cumple con la exigencia del problema.

En seguida trabaja sobre el diseño C, del que afirma, mide 32 metros. Para justificar su aseveración, se apoya nuevamente de la medición. Primero, reconoce que mide 10 metros de largo, lo estima de la medida dada y lo señala sobre el diseño (Figura 6a)<sup>2</sup>. Posteriormente, compara e infiere las medidas de las longitudes de los lados del polígono que tienen forma escalonada. De este modo, deduce que los segmentos pequeños miden un metro y los más grandes, el doble (Figura 6b), tal como lo afirma en la entrevista (renglón 88). Con estos datos, calcula el perímetro y comprueba que es 32 metros, lo expresa en términos de “me da 32” (renglón 90 de la entrevista).



a. Identifica que el segmento mide 10 metros.

b. Infiere las medidas de cada uno de los segmentos

Figura 6. Comparación e inferencia de medidas.

87 Entrevistador: ¿Cómo calculaste las medidas?

88 Ricarda: Pues aquí son 10 metros, lo sumaba... si cada pedacito valía... un metro, entonces aquí valdría 2 metros.

89 Entrevistador: ¿Por qué un metro?

90 Ricarda: Porque aquí nos está dando 6 metros entonces si divido esto... si cada pedacito es de un metro, lo sumo y aquí le pongo que son 2 porque la medida casi se van dando igual, se ven iguales, y entonces aquí le puse que serían dos, porque si aquí son dos aquí puede valer uno, entonces los sumé y me daban 6. entonces si tengo 10 acá abajo y 6 de este lado. los sumo. 10 más 6 más 10 más 6 y si me da 32.

Para el diseño D, Ricarda reconoce que es un polígono “familiar”, y lo llama por su nombre, rectángulo (renglón 94). A partir de lo que sabe acerca de esta figura geométrica, estima, que mide 6 metros de ancho, lo indica sobre diseño (Figura 7). En seguida, se apoya en la fórmula para calcular su perímetro (renglón 94) y comprueba que le resulta 32, por ello encierra en un círculo la palabra “sí”.

<sup>2</sup> Las flechas de doble dirección del inciso a en la figura No. 6, es una indicación nuestra, acerca de la deducción que Ricarda hace, de la medida del ancho del polígono, a partir del dato dado.

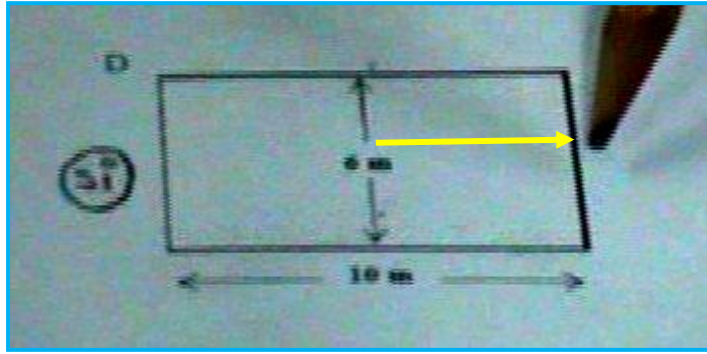


Figura 7. Ricarda Reconoce que el lado también mide 6 metros como el ancho.

- 92 Ricarda: ... le puse que si porque me está dando exactamente las medidas y la figura no es una figura... una figura como las demás...
- 93 Entrevistador: ¿Cómo es esta figura?
- 94 Ricarda: Es una figura, no recuerdo su nombre...es una figura... como compuesta, y ésta es un rectángulo... se sacar el perímetro, entonces lo sumo 10 metros más 6 metros más 10 metros y 6 metros me da 32.

En el caso del diseño B, se apoya de las propiedades que sabe sobre el polígono involucrado, aunque sin explicitarlo. Por un lado, se infiere que reconoce que la medida del ancho es distinta a la medida de la longitud de los lados menores del romboide (Figura 8). Y por otro, que sabe que la medida de los lados menores es mayor que la correspondiente a la medida del ancho, tal como se evidencia en la entrevista, cuando afirma que “si calculara el perímetro de la figura, le daría más de 32 y no le alcanzaría la madera” (renglón 96).

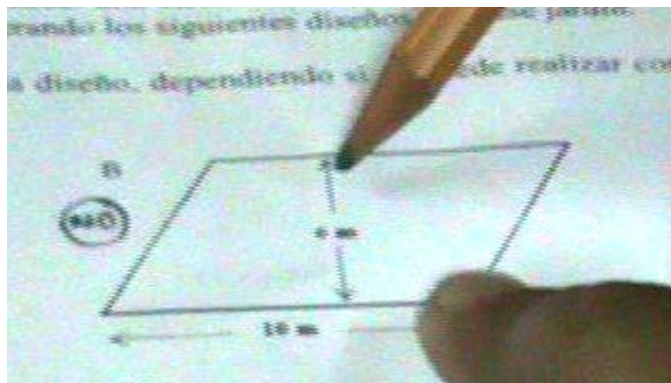


Figura 8. Ricarda reconoce que la medida de los lados menores es

- 96 Ricarda: Y aquí le puse  $q$  no, porque pues aquí no me da esta medida, me da la medida del largo, pero... la medida de aquí a acá no me la da (señala con su dedo un lado menor del polígono), entonces yo no la puedo sumar porque no tengo esa medida y si le sumo... me estaría más de 32... si le pusiera la cerca no alcanzaría la madera.

*b) ¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Se observa que Ricarda tiene control sobre la situación, ya que está consciente de que el perímetro de la figura debe ser 32 metros, lo verifica a través de la medición y ello la lleva a decidir si el diseño es el adecuado para cercar el jardín con la madera disponible. Esta forma de proceder la lleva a cabo sobre los diseños que tienen sus lados en forma escalonada. En el caso del rectángulo y del romboide, aplica lo que sabe sobre esos polígonos, es su forma de controlar la situación.

*c) Síntesis*

Ricarda hace una adecuada interpretación del problema, ya que identifica que se relaciona con perímetro, cuya medida debe ser 32 metros. Las acciones que realiza siguen el orden siguiente:

1. Lee e interpreta el enunciado
2. Identifica datos explícitos del enunciado y del diseño A.
3. Calcula el perímetro de la figura A.
4. Reconoce datos implícitos de la figura del inciso C.
5. Descompone y recompone la figura.
6. Compara las medidas de las longitudes de los lados escalonados del polígono. Y  
Calcula el perímetro y comprueba que es 32.
7. Reconoce en el diseño D un polígono familiar, el rectángulo.
8. Identifica los datos explícitos de inciso D.
9. Calcula el perímetro de la figura del diseño D.
10. Trabaja con el diseño B.
11. Identifica que los lados menores del romboide tienen una longitud mayor que la altura del romboide, y por tanto el perímetro será mayor a 32 metros.

Una visión integral de las acciones realizadas por Ricarda indican que su estrategia general se compone de las siguientes acciones: primero explora las formas rectangulares en el orden en que están ubicadas. De ellas, analiza las irregulares a partir de la inferencia de medidas a fin de verificar si cumple con la exigencia. Y en seguida, trabaja sobre el rectángulo y el romboide, en ese orden. Para determinar si ambos polígonos cumplen con la exigencia, aplica los conocimientos que posee acerca de ellos. Se observa que estos conocimientos son correctos. Lo que predomina en su proceder es la medición. Las estrategias que desarrolla son:



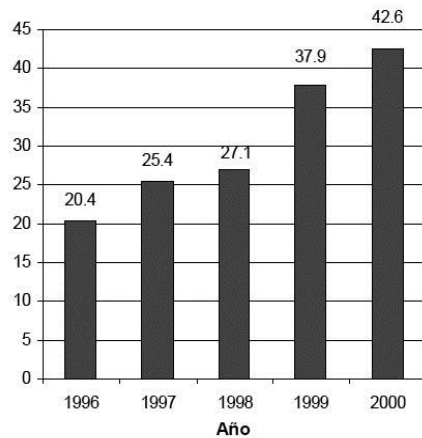
- La estimación de medidas
- La comparación (de medidas)
- El uso de la fórmula (para calcular perímetros)
- Descomposición y recomposición de polígonos
- La aplicación de propiedades (de paralelogramos)

### 3.2. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema de Exportaciones.

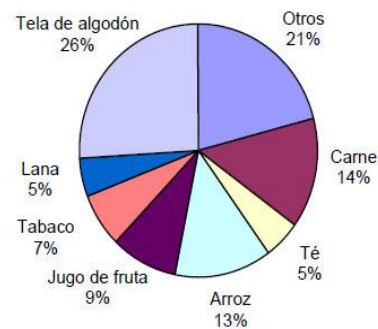
#### EXPORTACIONES

En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el zed como moneda.

Total de exportaciones anuales de Zedlandia en millones de zeds, 1996-2000



Distribución de las exportaciones de Zedlandia en 2000



- a) ¿Cuál es el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998? Argumenta tu respuesta.
- b) ¿Cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000? Argumenta tu respuesta

- 1) 1.8 millones de zeds.
- 2) 2.3 millones de zeds.
- 3) 2.4 millones de zeds.
- 4) 3.4 millones de zeds.
- 5) 3.8 millones de zeds.

Este problema corresponde al contenido de incertidumbre, y se ubica en el contexto público. La solución implica dar respuesta a dos preguntas; una de ellas es cerrada y la otra es múltiple. La situación tiene que ver con las exportaciones anuales de un país ficticio, cuya moneda es el zed. El planteamiento se apoya de dos gráficas: un histograma de frecuencias y una de pastel. En la primera, se registran los datos sobre el valor total en millones de zeds, las exportaciones anuales de ese país, desde 1996 hasta 2000; y en la segunda, se reportan datos en términos porcentuales de las exportaciones de productos como el algodón, lana, tabaco, jugo de fruta y otros en el año 2000.

La respuesta de la primera pregunta requiere de una lectura e interpretación adecuada del histograma. En el caso de la segunda pregunta, deben leerse y analizarse los datos de las dos gráficas, a fin de relacionar el porcentaje correspondiente a la exportación de determinado producto en un año, con el monto total de las exportaciones en ese período.

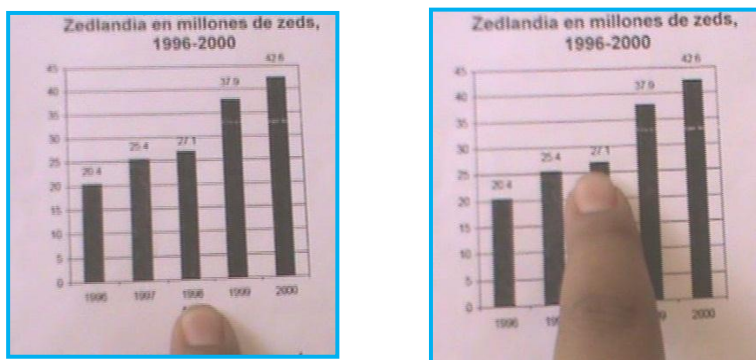
Se reconoce el tipo de lectura que requiere cada una de las gráficas involucradas en la situación, es distinto. En el primer caso por ejemplo, tiene que realizarse una correspondencia entre dos variables, año y millones (de zeds). Para el caso de la segunda, la relación se da entre el todo y la parte (porcentaje) requerida. .

### 3.2.1. Caso de Grecia

Grecia tiene 16 años cursa el segundo semestre de bachillerato en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la UAG.

a) ¿Cómo resolvió el problema?

La primera acción de Grecia fue leer el enunciado del problema. Como parte del proceso de resolución de la primera pregunta, reconoce que el año de las exportaciones a analizar es 1998 y lo ubica en la gráfica (Figura 9a). De la lectura que hace del histograma, identifica que el monto en millones de zeds en ese año es 27.1 (Figura 9b), y lo dice en la entrevista (renglón 150).



- a. Identifica el año de las exportaciones sobre la gráfica.      b. Identifica los millones de Zeds de las exportaciones en realizadas en 1998.

Figura 9. Lectura de datos en la gráfica

- 149 Entrevistador: ¿Qué es lo primero que hiciste para resolverlo?  
 150 Grecia: Primero chequé la gráfica donde quedaba 1998... que tiene el resultado de 27.1...

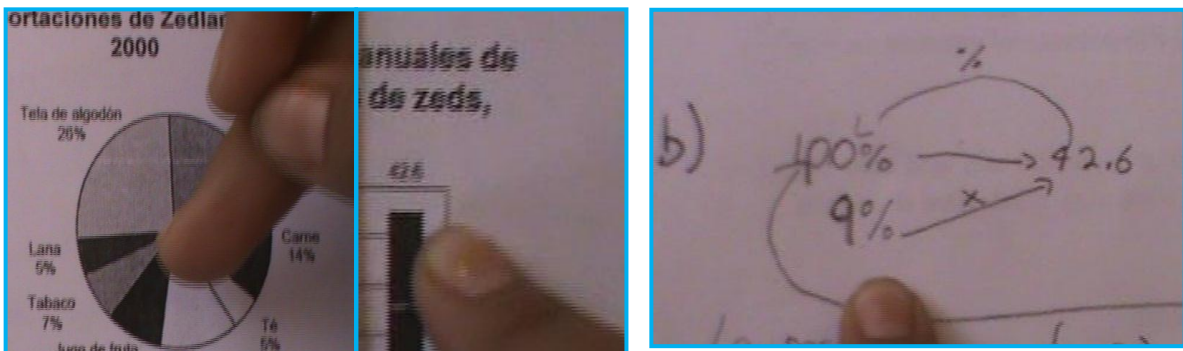
Grecia considera necesario expresar el valor de las exportaciones en forma expandida, por ello multiplica por un millón (Figura 10), y lo dice en la entrevista.

$$\begin{array}{r}
 1000000 \\
 \times 27.1 \\
 \hline
 10000000 \\
 70000000 \\
 20000000 \\
 \hline
 271000000
 \end{array}$$

Figura 10. Multiplicación realizada por Grecia para expresar la cantidad en millones.

- 151 Grecia: Primero multipliqué el millón por 27.1 y me salió que eran 271 millones (271000000). Entonces yo argumenté mi respuesta que... de la multiplicación que es lo que se ocurrió para saber cuánto era el valor que había de exportaciones en millones de Zeds.  
 152 Entrevistador: ¿Tú creíste necesario que debías escribirlo con los ceros?  
 153 Grecia: Si para expresarlo en millones.

Para responder a la segunda pregunta, hace una lectura de los datos en las dos gráficas, de ahí reconoce que el 100% es el total de los productos exportados en el año 2000, y que el porcentaje correspondiente al jugo de fruta, parte que interesa determinar, equivale al 9% (ver renglones 158-162). Seguidamente identifica que el monto total de las exportaciones en ese año fue de 42.6 millones de Zeds (Figura 11a). Con esos datos, utiliza una regla de tres para calcular el valor que se le pide (Figura 11b). Es así que encuentra el valor buscado corresponde a 3.83 millones de zeds y es la respuesta que elige de las opciones dadas. En la entrevista explica esta forma de proceder (renglones 158-162).



a. Grecia identifica datos en las gráficas.

b. Grecia elige la regla de tres para resolver el problema. Para ello usa este esquema.

Figura 11. Identificación de datos y utilización de la regla de tres.

- 157 Entrevistador: ¿Qué te pide el inciso B?
- 158 Grecia: ¿Cuál es valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en el 2000? ... Acá está otra gráfica que representa que el jugo vale 9%, todo el círculo representa el 100%... a mí se ocurrió la regla de tres, porque las reglas de tres sirven para cuando tienes tres valores y necesitas encontrar el otro. Entonces yo lo que hice fue hacer una regla de tres... que si un 100% equivalía a 42.6, un 9% cómo sería... esa era mi pregunta, entonces hice una multiplicación 383.4 de resultado y ese resultado lo dividí entre 100 y el resultado me dio 3.83.
- 159 Entrevistador: ¿Por qué multiplicaste primero y luego dividiste?
- 160 Grecia: Porque así es como me han enseñado como se hacen las reglas de tres... primero multiplicar y luego dividir.
- 161 Entrevistador: Primero ¿Qué multiplicaste?
- 162 Grecia: Primero el 9% por 42.6, y 9% es lo que tiene de valor en la gráfica y el 42.6... lo saqué de todas las exportaciones que había en el 2000. Así que el 42.6 es el 100%, entonces para sacar el 9% hice la regla de tres. Que ya cuando multipliqué 9 por 42.6 fueron 383.4, luego el resultado lo dividí entre 100 y salió 3.83. Que viene siendo la respuesta ...

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Grecia tiene control sobre su forma de proceder en diversos momentos del proceso de solución. Sus acciones están mediadas por su conocimiento acerca de:

- *La lectura e interpretación de datos de gráficas.* Ejemplo de ello, es cuando reconoce que el total de los productos exportados representan el 100%, y que determinado producto, es una parte de ese todo, como el jugo de fruta.
- *Los modelos matemáticos que puede usar en la solución de problemas relacionados con porcentaje,* particularmente, cuando se conocen tres valores y a partir ellos, tiene que encontrar otro valor.

c) *Síntesis*

Grecia hace una adecuada interpretación del problema, ya que reconoce cuáles son las exigencias, y que para su solución se requiere de la lectura de gráficas, así como establecer relaciones entre determinados datos. Una visión global de las acciones realizadas por Grecia indican que su estrategia general se compone de las siguientes acciones:

1. Lee del enunciado del inciso a
2. Identifica las variables representadas
3. Identifica el valor en millones de zeds de las exportaciones en el año 2000.
4. Lee el enunciado del inciso b
5. Identifica en la gráfica de pastel el porcentaje correspondiente al jugo fruta.
6. Identifica en el histograma el valor de las exportaciones en millones de zeds correspondiente al año 2000.
7. Relaciona los datos que extrae de ambas gráficas.
8. Utiliza una regla de tres (según sus expresiones) para encontrar el valor pedido.

Las estrategias que desarrolla en la resolución del problema son:

- Lectura de gráficas
- Uso de la regla de tres.

### 3.2.2. Caso de Samantha

Samantha también resolvió el problema de exportaciones.

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

A partir de la lectura al enunciado del problema, Samantha sabe que para dar respuesta a las preguntas planteadas, debe analizar los datos de las gráficas. En el caso de la pregunta del inciso a, reconoce que es en el histograma de frecuencias donde se ubica el dato que cumple con la exigencia, lo evidencia durante la entrevista, al momento que argumenta por qué dio como respuesta 27.1 millones, a la vez que lo indica sobre el histograma (Figura 12).

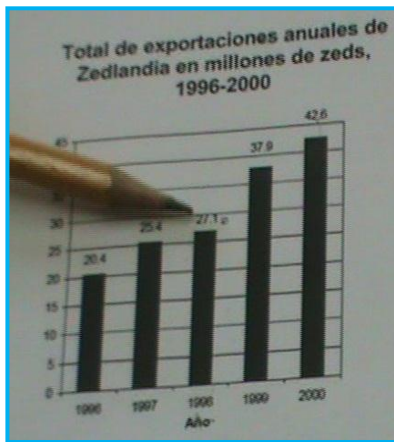


Figura 12. Samantha ubica en la gráfica, el total de exportaciones en el año 1998.

171 Entrevistador: ¿Qué problema resolviste? ¿Y cómo lo hiciste?

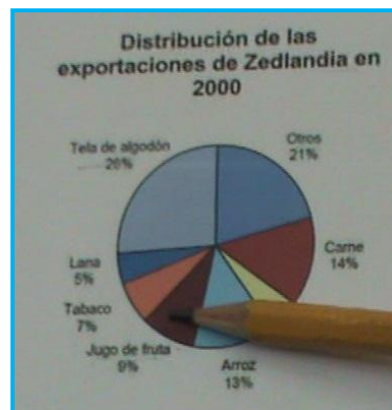
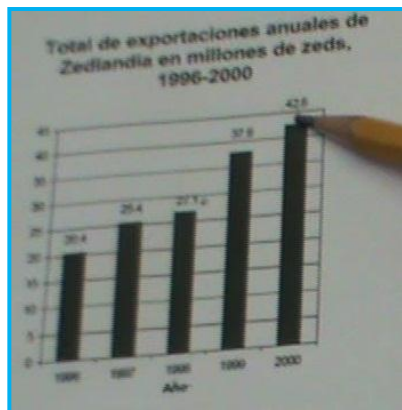
172 Samantha: ... El problema trata de la información sobre las exportaciones de Zedlandia en un país... me tocó primero encontrar el valor en millones de las exportaciones de Zedlandia en 1998... yo lo resolví porque aquí en la gráfica ya me está dando el resultado, aquí te da los millones desde 1996 hasta el 2000, y aquí en 1998 me está diciendo que fueron 27.1 millones.

En el caso de la segunda pregunta, lee el enunciado y se da cuenta que ahora debe apoyarse en los dos gráficos. Por su explicación en la entrevista, se evidencia que ella sabe que debe encontrar un valor y además, que dicho valor es parte de un todo, tanto en dinero como en productos exportados por un país, en un periodo determinado. Por ello, afirma que el todo es el 100% y que en dinero equivale a 42.6 millones; por cuanto a la parte del producto exportado objeto de análisis, reconoce que equivale al 9%. A la vez que explica (renglones 186 a 199), lo señala en ambas gráficas (Figuras 13a y 13b).

185 Entrevistador: Luego ¿Qué hiciste?...

186 Samantha: Me pide el valor de fruta que exportó Zedlandia en el 2000... y pues yo hice una regla de tres... porque... si aquí me muestra que esto es el 100% y en la gráfica el 100% es esto, 42.6 millones... aquí yo digo que 100% es 42.6 millones y me pide sacar el 9% y lo que estov buscando en millones... y multipliqué 42.6 millones por el 9% y de ahí lo dividí entre todo para saber cuánto valía... jugo de fruta.

- 187 Entrevistador: ¿Para saber qué?  
 189 Samantha: El jugo de fruta  
 190 Entrevistador: Te dice ahí que determines el valor del jugo de fruta que se exportó en el 2000. Primero te fuiste a una gráfica, a ¿Fijarte qué?  
 191 Samantha: Cuánto es el total de todo.  
 192 Entrevistador: ¿Y cuánto es el total de todo?  
 193 Samantha: 42.6 millones  
 194 Entrevistador: ... ¿Qué buscabas encontrar en esa gráfica?  
 195 Samantha: El valor de todo en el 2000  
 196 Entrevistador: Y luego ¿Qué hiciste?  
 197 Samantha: Me fui a este gráfica para saber cuánto me pedía calcular, y me pidió que el 9%.  
 198 Entrevistador: ¿De dónde sacas el 9%?  
 199 Samantha: De aquí, de lo que vale el jugo de fruta.



a. Samantha identifica el valor de las exportaciones en el 2000.

b. Reconoce que la parte correspondiente al jugo de fruta.

Figura 13. Identificación de los datos en las gráficas.

Para determinar el valor que se le pide, sabe que puede usar la regla de tres y lo lleva a cabo (Figura 14b). Durante la entrevista explica esta forma de proceder (renglones 201-206). Es así que encuentra que el valor pedido es 3.8 millones de zeds y es la respuesta que elige de las opciones dadas.

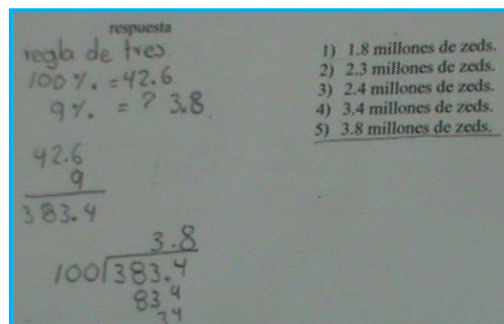


Figura 14: Aplicación de la regla de tres y elección de la respuesta.

201 Entrevistador: Y de ahí ¿Qué hiciste?



- 202 Samantha: De ahí... como me pedía cuánto es lo que valía el jugo de fruta, multipliqué el total de todo por el 9%, y de ahí lo dividí entre 100.
- 203 Entrevistador: ¿Por qué primero multiplicas y luego divides?
- 204 Samantha: Primero lo multipliqué para sacar el por ciento y luego dividí entre todo para sacarlo en millones.
- 205 Entrevistador: ¿Pero por qué? Dice ahí que usaste una regla de tres, ¿Por qué crees que debas de usar una regla de tres?
- 206 Samantha: Porque me pide... aquí según yo el 100% es 42.6 y lo que me está pidiendo el 9%. Yo supongo que para sacar cuánto es en millones tenía que usar una regla de tres.

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Samantha tiene control en las acciones que realiza en el proceso de solución, y están mediadas por sus conocimientos acerca de:

- *La lectura e interpretación de datos sobre gráficas.* Ejemplo de ello, es cuando reconoce que el valor de las exportaciones en el 2000 es de 42.6 millones de zeds.
- *Los modelos matemáticos que puede usar en la solución de problemas relacionados con porcentaje,* específicamente, sabe que puede utilizar la regla de tres.

a) *Síntesis*

Samantha hace una adecuada interpretación del problema, ya que reconoce cuáles son las exigencias, y que para su solución se requiere de la lectura de las gráficas, y establecer relaciones entre determinados datos. Un aspecto importante de destacar es que ella reconoce el todo y las partes, tanto en el total de productos exportados como en valor en millones de las exportaciones en un año determinado. Una visión de conjunto de las acciones realizadas por Grecia indica que su estrategia general se compone de las siguientes acciones:

1. Lee del enunciado del inciso a
2. Identifica las variables representadas
3. Identifica el valor en millones de zeds de las exportaciones en el año 2000.
4. Lee el enunciado del inciso b
5. Identifica en la gráfica de pastel el porcentaje correspondiente al jugo fruta.
6. Identifica en el histograma el valor de las exportaciones en millones de zeds correspondiente al año 2000.
7. Relaciona los datos que extrae de ambas gráficas.
8. Utiliza una regla de tres (según sus expresiones) para encontrar el valor pedido.

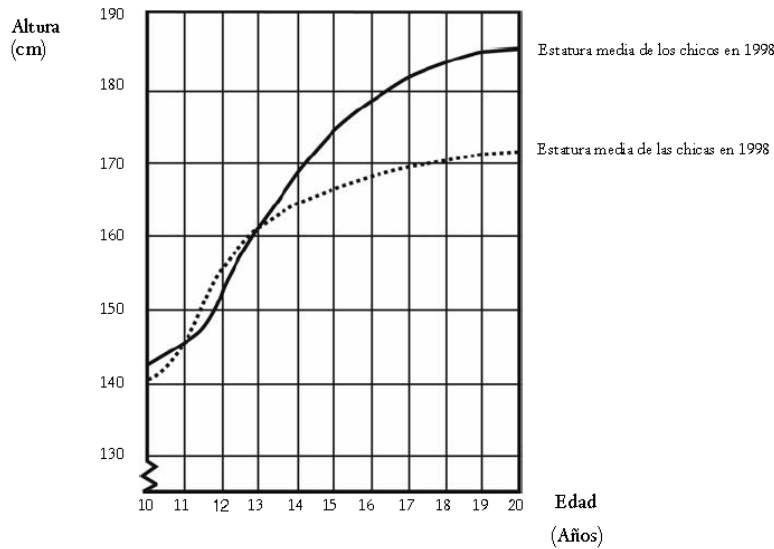
Las estrategias que desarrolla en la resolución del problema son:

- Lectura de gráfica
- Uso de la regla de tres.

### 3.3. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema Juventud crece más.

#### JUVENTUD CRECE MÁS

En esta gráfica se representa la altura promedio de los jóvenes, hombres y mujeres en los Países Bajos para 1998.



- Desde 1980, la altura promedio de las mujeres de 20 años de edad se ha incrementado en 2.3 cm hasta llegar a 170.6 cm. ¿Cuál era la altura promedio de la mujer de 20 años en 1980?, Argumenta tu respuesta.
- Explica cómo es que la gráfica muestra que el crecimiento promedio de las niñas es más lento después de los 12 años de edad. Argumenta tu respuesta.
- De acuerdo con la gráfica, en promedio, ¿Durante qué periodo de su vida las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad?, Argumenta tu respuesta.

Este problema tiene tres respuestas, la primera es cerrada y el resto, abiertas. Corresponde al contenido de cambio y relaciones, y pertenece al contexto científico. Esta situación trata del crecimiento promedio que alcanzan los jóvenes de una región del mundo, en un determinado período de tiempo. Los datos se reportan a través de dos gráficas, ubicadas en un mismo plano. Una de ellas, representa la estatura de los hombres y la otra, de las mujeres. Para responder a la pregunta del inciso a, es suficiente con realizar una resta. Para responder a las preguntas de los incisos b y c, se requiere de la lectura e interpretación de las gráficas, seguidamente comparar las estaturas alcanzadas en determinada edad.

### 3.3.1. Caso de Nadxieli

Nadxieli tiene 15 años, un mes y cursa el segundo semestre de bachillerato tecnológico en el Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios 135.

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

La primera acción que realizó consistió en leer el enunciado del problema. Por la lectura, se da cuenta que para responder a la pregunta del inciso a, puede restar a la estatura alcanzada por las mujeres en cierto período, el incremento que tuvieron desde 1980 (renglones 108 y 120); de ese modo, determina cuánto medían en ese año (Figura 15).

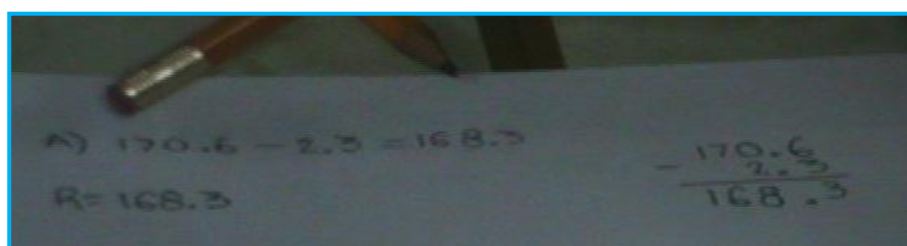


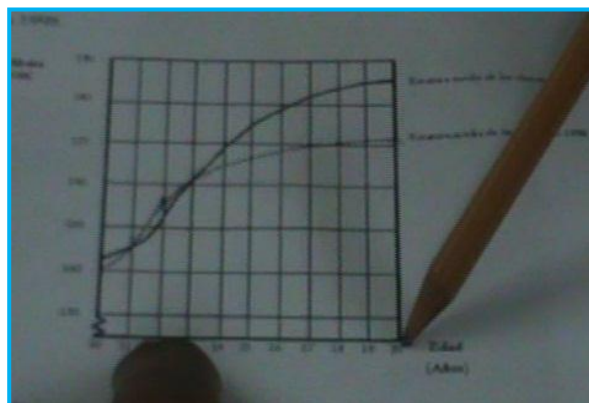
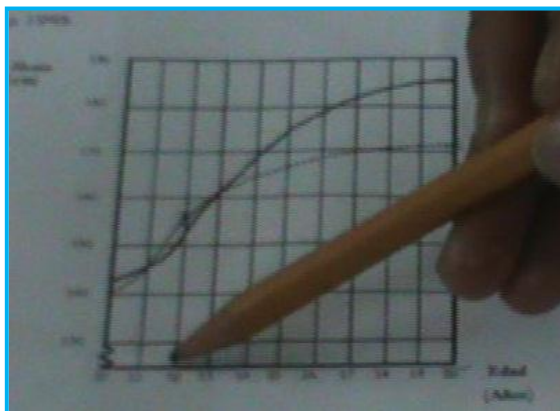
Figura 15. Nadxieli realiza la operación.

- 107 Entrevistador: ¿En qué te basaste para resolver el problema?
- 108 Nadxieli: Hice una resta... utilicé la altura... que nos daba de 170.6 cm... entonces este número le resté los 2.3 que habían incrementado desde 1980.
- ... ..
- 120 Nadxieli: ... Aquí dice desde 1980, la estatura de las mujeres ha incrementado 2.3 hasta llegar hasta 170.6 cm. Entonces como dice la pregunta ¿Cuál era la altura promedio de las mujeres de 20 años en 1980?... entonces... a 170.6 le resto 2.3 para que me de la estatura en la que estaba en 1980...

Para responder a la pregunta del inciso b, hace una lectura de la gráfica. De las acciones posteriores, se infiere que utiliza la noción variación, ya que compara los cambios. De manera que analiza cómo se comporta la variable altura respecto de la variable edad, y además, porque se da cuenta que el incremento de la estatura de las mujeres en dos períodos distintos, es el mismo. Ello, porque en dos años crece 16 cm y en otro período de 8 años también crece 16 cm (Figura 16 y renglones 126-134). En esto se basa para explicar el crecimiento lento de las mujeres después de los 12 años.

- 125 Entrevistador ¿La gráfica por qué te dice que crece o es más lento? ¿Cómo es que te dice la gráfica?
- 126 Nadxieli: Nos muestra que las mujeres de los 12 a los 20 años, va más lento, porque de 10 años a los 20 años avanza 16 cm, y de 10 a 12 años 16 cm también...
- 127 Entrevistador ¿Qué quiere decir eso?
- 128 Nadxieli: Que de ahí las mujeres crecen más rápido, hasta los 12 años... porque aumentan 16 cm, pero de los 12 a los 20 años aumenta 16 también...

- 129 Entrevistador: ¿Eso qué significa?  
 130 Nadxieli: Avanzarían más lento...  
 131 Entrevistador: ¿De 12 a 20 que hay?  
 132 Nadxieli: ... para las mujeres es más lento el crecimiento.  
 133 Entrevistador: Tú dices que 10 a 12 crecen 16 más o menos... ¿Qué significa eso?  
 134 Nadxieli: Que son 2 años los que avanzan, y de 12 a 20 son 8 años los que avanzan y avanzan lo mismo...



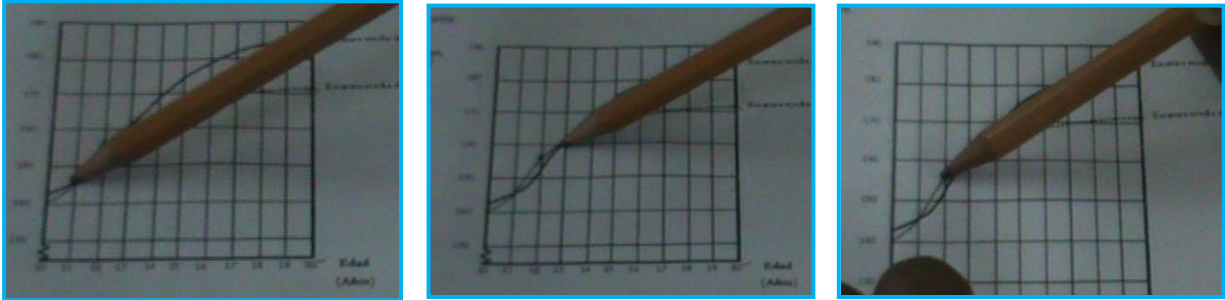
a.. Nadxieli identifica que 10-12 años, crece 16 cm.

b. Nadxieli identifica que 12-20 crece 16 cm.

Figura 16. Comparación de las razones de cambio de la altura respecto al tiempo

Su respuesta a la pregunta del inciso c también se sustenta de la interpretación de la gráfica. Al explorar el período en donde las mujeres son más altas que los hombres, reconoce que se da entre los 11 y 13 años. En ese proceso, compara las estaturas a partir de las medidas que infiere de las gráficas (Figura 17c); es así que sostiene que los hombres a los 12 años son más bajitos que las mujeres (renglón 138). Ante la pregunta de qué significado le da al punto donde se cortan las gráficas, afirma que es donde las mujeres y los hombres tienen la misma estatura (renglones 138 y 140), incluso, lo señala (Figura 17a y 17b).

- 138 Nadxieli: De acuerdo con la gráfica, en promedio... durante qué período de su vida las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad... aquí cuando las mujeres tienen 12 años ... yo le puse ...156 cm, y los hombres ... los hombres ... son más bajitos... las mujeres son más altas que los hombres, ¿por qué?... porque la mujeres miden como 156 cm y los hombres están midiendo como 153 cm cuando tienen 12 años... desde los 11, el hombre casi no crece y como nos muestra la gráfica, de los 11 el hombre casi no crece hasta los 13. Y las mujeres de los 11 a los 13 están más altas que los hombres...  
 139 Entrevistador: Y ese punto donde se junta, ¿Qué significa?  
 140 Nadxieli: Que los hombres con las mujeres son de la misma estatura.



- a. Nadxieli señala que en ese punto, es decir, a los 11 años las mujeres y los hombres tienen la misma estatura.
- b. Nadxieli señala que en ese punto, es decir, a los 13 años las mujeres y los hombres tienen la misma estatura.
- c. Nadxieli comprueba que a los 12 años mujeres son más altas que los hombres.

Figura 17. Período donde las mujeres son más altas que los hombres.

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Nadxieli controla la situación en distintos momentos del proceso de solución. Por ejemplo, sabe cuál de las gráficas representa la estatura de los hombres y cuál la de las mujeres. Las acciones que realiza están mediadas por su conocimiento sobre:

- *La lectura e interpretación de datos de gráficas.* Ejemplo de ello, identifica que el punto donde se cortan las gráficas, tanto los hombres como las mujeres tienen la misma estatura.
- *Las operaciones que debe usar en proceso de solución del problema,* por ejemplo, la sabe que tiene que utilizar la resta para determinar la estatura inicial después de haber incrementado cierta cantidad.

c) *Síntesis*

Nadxieli hace una adecuada interpretación del problema y sabe que para resolverlo debe apoyarse de las gráficas. Las acciones que realiza tienen el siguiente orden:

1. Lee e interpreta el enunciado del problema y el cuestionamiento del inciso A.
2. Identifica datos en el enunciado.
3. Elige a la resta como la operación que debe utilizar y la realiza.
4. Lee el cuestionamiento del inciso B.
5. Hace una lectura de los datos en la gráfica (lectura de puntos en el plano cartesiano), por ejemplo, dice “que cuando tiene 20 años tiene una altura promedio 170.6.

6. Compara los cambios de la altura respecto del tiempo, porque dice “que crece 16 cm de los 10-12 años y lo mismo crece de los 12 -20, infiriendo que aumente aproximadamente la misma longitud, pero una en 2 años y otro en 8 años.
7. Lee el cuestionamiento del inciso C.
8. Ubica los extremos del intervalo donde las mujeres son más altas que los hombres, dice “que en sus extremos sus alturas son iguales”
9. Compara las alturas de las mujeres y hombres cuando tienen 12 años.

Se observa que las explicaciones de Nadxieli se ubican tanto en el contexto discreto como en el continuo; el discreto, al momento que compara las estaturas, y el continuo, cuando determina el período donde las mujeres son más altas que los hombres.

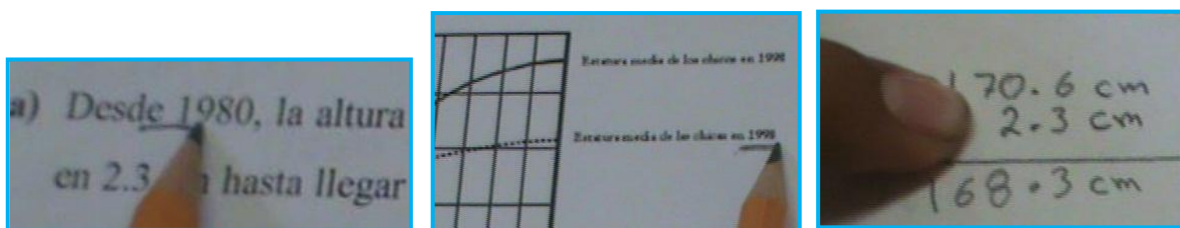
Una estrategia es la que predomina en sus acciones: la comparación de los cambios a través variación.

### 3.3.2. Caso de Grecia

Grecia también resolvió el problema de Juventud crece más.

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

Con la lectura del enunciado, Grecia tiene claro que la pregunta del inciso a, le pide determinar la altura promedio de las mujeres de 20 años, en 1980, en los países bajos. Además, reconoce que de 1980 a 1998 (Figuras 18a y 18b), hubo un incremento de 2.3 cm en la estatura de las mujeres hasta llegar a 170.6 cm. Con estos datos y la relación que identifica respecto del incremento en un período de tiempo determinado, sabe que el problema puede resolverse mediante una resta, y hace uso de ella (renglones 222-226 de la entrevista y figura 18c). Durante la entrevista se remite a la gráfica, con el propósito de explicar dónde se ubica el intervalo de tiempo en el que se incrementa la altura de las mujeres.



a. Señala sobre el enunciado, el año donde inicia el período de crecimiento de las mujeres.

b. Ubica sobre la gráfica, el año donde termina el período de crecimiento de las mujeres.

c. Uso resta para resolver el problema.

Figura 18.

- 220 Entrevistador: ¿Qué te pide el problema? ¿Y cómo lo resolviste?
- 221 Grecia: Bueno en el primer problema me pide, que... ¿Cuál era la altura de las mujeres de 20 años en la época de 1980? Yo lo resolví, ya que me fijé bien en la gráfica y vi que acá decía la estatura media de las chicas en 1998, y decía aquí que media 170.6 cm... entonces tuve leer y leer para poderle en-ten-der que decía que desde este principio, desde 1980 hasta la edad final de 1998 hubo un incremento nada más de 2.3 cm, lo cual me llevó a hacer una simple resta. Que resté 170.6, que fue el resultado final menos lo que se incrementó y me dio el resultado 168.3 cm.
- 223 Entrevistador: ¿Por qué crees que debes de restar
- 224 Grecia: Porque querían saber cuál... era la estatura hasta que llegara al resultado, y como esto aumentó, por eso yo decidí restarle.
- 225 Entrevistador: ¿Cuál es la respuesta a esa pregunta?
- 226 Grecia: 168.3 cm

Para explicar por qué el crecimiento de las niñas después de los 12 años es más lento, pregunta del inciso b, sabe que debe analizar las gráficas. Como resultado de la lectura que hace de dichas gráficas, Grecia distingue cuál representa la estatura de los niños y cuál a la de las niñas (Figura 19).



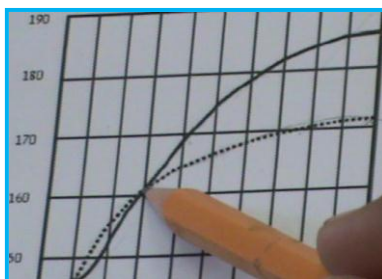


- 242 Grecia: En forma diagonal, como es así, pero sólo que en esta parte es así, pero más curveadita, va a así y la diagonal es así, para arriba, ésta es parecida sólo que lo lleva más lento y más... como que aquí quiere llevar un poquito más recta pero con mas alzamiento pero muy despacito, ... más alta que ésta.
- 243 Entrevistador: Entonces para ti el crecimiento lento es en función de que una ¿Está más qué?
- 244 Grecia: Más inclinada para bajo y la otra más elevada
- 245 Entrevistador: ...¿Cuál sería la que está más inclinada?
- :
- 246 Grecia: Es ésta
- 247 Entrevistador: ¿Qué significa para ti, por ejemplo que una gráfica una esté inclinada o no? ¿Cómo lo pudieras describir con tus manos?
- :
- 248 Grecia: La inclinada como que... como el sol cuando se va metiendo en el ocaso, se ve así, para mí algo así sería... y ésta yo la representaría como una colina cuando va elevándose.
- 249 Entrevistador: Explicame
- :
- 250 Grecia: Así se eleva más o menos
- 251 Entrevistador: ¿Entonces que el crecimiento de las mujeres es más lento que el de los hombres por cómo está la gráfica?... pero... ¿Una porque está menos inclinada y la otra más inclinada? ¿Cuál es la que está menos inclinada? ¿La de las mujeres o la de los hombres?
- 252 Grecia: Ésta
- 253 Entrevistador: La de las mujeres y ¿Cuál es la que está más inclinada?
- :
- 254 Grecia: Ahh ... ¡No! ¡Corrección!, ésta es la más inclinada... porque el inclinado va así y ésta es la que menos porque ésta como que se va elevando.

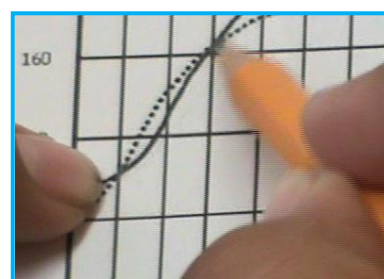
Para dar respuesta a la pregunta del inciso c, primeramente explora y analiza las gráficas, con ello identifica que los puntos donde éstas se cortan, es donde los hombres y las mujeres tiene la misma estatura (véase figura 21a y 21b). Asimismo, determina que el período de tiempo en el que las mujeres son más altas que los hombres es de los 11 a los 13 años como se muestra en la figura 21c. Para justificar esta aseveración, recurre nuevamente al comportamiento de las gráficas, se corrobora en la entrevista.



a. Señala que ese punto las mujeres son del mismo tamaño.



b. Señala que en este punto también las mujeres y los hombres son de la misma estatura.



c. Ubicación del período en el que las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad.

Figura 21.

- 256 Grecia: Bueno de acuerdo con la gráfica en promedio, ¿Durante qué periodo las mujeres son más altas que los hombres de la misma edad? Argumenta tu respuesta. Bueno aquí también, todo era ver en la gráfica, esta línea punteadita es de las mujeres, pero aquí era la de los hombres, pero aquí se entrelazan, se cruzan, hay un cruce, entonces en este cruce la línea de las mujeres se va más para arriba y ésta va avanzando para arriba, pero con una inclinación... un poquito más para la derecha y ésta no, ésta se va subiendo pero con inclinación a la derecha pero elevándose más.
- 257 Entrevistador: ¿Qué significa donde se cortan esas gráficas?
- :

258	Grecia	Aquí es donde hace el cambio, por decirlo aquí llegan al punto medio donde los hombres se vuelven más altos y las mujeres crecen con más lentitud y ya no alcanzan a los hombres.
259	Entrevistador	Pero ahí en ese punto, ¿Qué significa para ti?
	:	
260	Grecia:	Donde las mujeres y los hombres tienen el mismo tamaño
261	Entrevistador	¿Qué te pide encontrar el inciso c?
	:	
262	Grecia:	¿Durante qué periodo las mujeres son más altas que los hombres? Yo le puse que de los 11 a los 13 años... que fue donde vi que hubo más incremento... aquí porque es donde se cortan las líneas y aquí terminan de cruzarse, entonces acá está en 11 y acá está el 13.
263	Entrevistador	A ver me puedes explicar nuevamente eso
	:	
264	Grecia:	Que porque aquí se cruzan las líneas y aquí es donde las mujeres crecen más y aquí está el número 11, y más avanzando aquí donde terminan de cruzarse y las mujeres que tienen el crecimiento más lento acá es donde se vuelven a cruzar y está el número 13. Por eso yo le puse de 11 a 13 años, ese es donde las mujeres son más altas, en ese periodo.

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Grecia tiene control en su forma de proceder en los diferentes momentos del proceso solución, a través del comportamiento que observa en las gráficas. Las acciones que realiza están mediadas por su conocimiento sobre:

- *La lectura e interpretación de datos de gráficas.* Ejemplo de ello, es que ella observa a las gráficas como objetos en movimiento que van variando.
- *Las operaciones que debe usar en proceso de solución del problema,* por ejemplo, la sabe que tiene que utilizar la resta para determinar la estatura inicial después de haber incrementado cierta cantidad.

c) *Síntesis*

Grecia hace una adecuada interpretación del problema, y sabe que para resolverlo debe hacer una lectura e interpretación de las gráficas. Las acciones que realiza tienen el siguiente orden:

1. Identifica datos en el enunciado
2. Aplica el algoritmo de la resta
3. Explora y analiza el comportamiento de las gráficas.

Una estrategia es la que predomina en sus acciones: la comparación del comportamiento de las gráficas.

#### **1.4. Análisis y discusión de los estudios de casos asociados al problema Selección.**

##### SELECCIÓN

En una pizzería se puede elegir una pizza básica con dos ingredientes: queso y tomate. También puedes diseñar tu propia pizza con ingredientes adicionales. Se pueden seleccionar entre cuatro ingredientes adicionales diferentes: aceitunas, jamón, champiñones y salami. Jaime quiere encargar una pizza con dos ingredientes adicionales diferentes.

¿Cuántas combinaciones diferentes podría seleccionar Jaime? Justifique su respuesta

Es un problema de respuesta corta, corresponde al contenido de cantidad y pertenece al contexto laboral. Los datos del problema se sitúan en el enunciado, así como las relaciones que se establecen entre ellos. Por el contexto, los estudiantes deben comprender que en determinada pizzería, se les ofrece como opción elegir una pizza básica con dos ingredientes, a la que pueden añadirle dos ingredientes adicionales de cuatro que proporcionan. Su solución, requiere que el estudiante comprende que se trata de una situación de combinación sin repetición.

### 3.4.1. Caso de Oxiel

Oxiel tiene 16 años, dos meses y cursa el segundo semestre de bachillerato en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la UAG.

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

Una primera acción de Oxiel fue leer e interpretar el enunciado del problema. Mediante ello, reconoce que en una pizzería se puede elegir una pizza a partir de ingredientes básicos y adicionales. De los básicos, identifica al queso y al tomate; y de los adicionales a las aceitunas, el jamón, los champiñones y el salami. De la lectura al problema, Oxiel se da cuenta que para resolverlo, debe hacer combinaciones entre los ingredientes adicionales, a su vez, que estas combinaciones tienen que ser sin repetición. Esto último, lo sabe porque en el problema se dice que “Jaime quiere encargarse de una pizza con dos ingredientes adicionales diferentes”. De modo que en el proceso de solución, tiene presente que las combinaciones establecidas, no se repitieran, lo evidencia en la entrevista (renglones 272, 282).

- 272            Oxiel: ... que según en una pizzería se puede elegir una pizza básica con dos ingredientes, que es el queso y el tomate. También puedes diseñar con dos ingredientes adicionales, se pueden seleccionar entre cuatro ingredientes adicionales que son aceitunas, jamón, champiñones y salami. ... Jaime quiere encargarse de una pizza con dos ingredientes extra, eso quiere decir, que los ingredientes que voy a utilizar son éstos, pero como los quiere diferentes no los puede repetir una vez...
- ...            ...            ...
- 281            Entrevistador: ¿Cuál es lo primero que hiciste?
- 282            Oxiel: Lo primero que hice fue ver cuáles eran los ingredientes que se van utilizar para esta operación, que era aceitunas, jamón, champiñones y salami... los cuales empecé a combinarlos entre sí, sin que repitiera.

En seguida realiza las combinaciones posibles de los dos ingredientes adicionales que pueden agregarse a una pizza básica. Una primera combinación que plantea es con las aceitunas, a las que combina con jamón, champiñones y salami; con ello obtiene tres combinaciones. Seguidamente combina el jamón con champiñones y con salami, y obtiene dos combinaciones y por último, combina los champiñones con el salami. Oxiel sabe que el cuarto ingrediente (salami) ya está incluido en las combinaciones anteriores, por ello omite establecer otra combinación con él, incluso al preguntársele por qué no lo puede combinar, sostiene que “porque se iba a repetir la combinación de una pizza” (renglones 274-276, 291-292).

- 274 Oxiel: Primero fui combinando las aceitunas con sus otros tres ingredientes, luego el jamón y los champiñones, porque salami ya no lo podía combinar porque ya estaba con los otros ingredientes.
- 275 Entrevistador: ¿Por qué no lo podías combinar?
- 276 Oxiel: Porque se iba a repetir combinación de una pizza...
- ...
- 291 Entrevistador: Y luego ¿Qué hiciste?
- 292 Oxiel: Me fui con el otro ingrediente que era el jamón, el cual lo combiné con los Champiñones y el salami, porque ya con las aceitunas ya lo tengo, ya no lo debo de repetir. Y al final de Champiñones con el salami, porque ya los champiñones ya los tengo con el jamón y las aceitunas. Y el salami ya no puedo repetir porque ya los tengo con todas las combinaciones.

Para saber cómo quedan las combinaciones de los ingredientes adicionales, se apoya de un diagrama de árbol, en él ubica a la pizza como el eje de sus combinaciones (Figura 22)

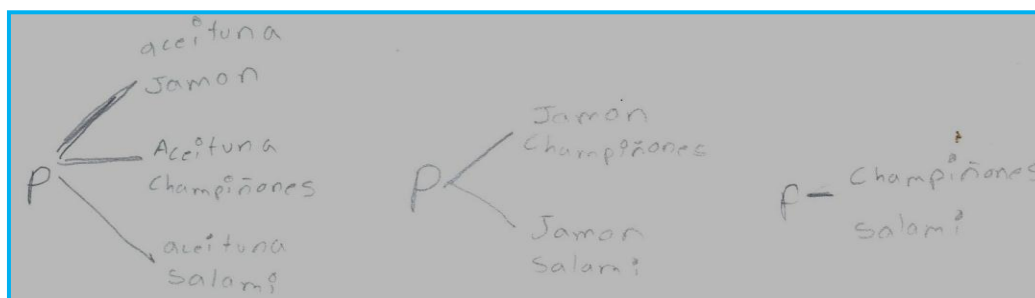


Figura 22. Diagrama que usó para establecer las combinaciones posibles.

Mediante esta forma de proceder, Oxiel concluye que son seis combinaciones posibles las que puede elegir Jaime (renglón 284).

- 284 Oxiel: ... los únicos que encontré que se podían hacer 6 combinaciones diferentes.

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de solución?*

Oxiel tiene control de las acciones que realiza en el proceso de solución del problema, las que están mediadas por los conocimientos que posee acerca de:

- *Combinaciones sin repetición.* Ejemplo de ello, es cuando afirma que el cuarto ingrediente (salami) ya no es necesario combinar porque ya está incluida en las demás combinaciones.
- *Combinaciones con repetición.* Por ejemplo, cuando afirma que si se omite indicar que deben ser diferentes o iguales las combinaciones de los ingredientes adicionales.

c) *Síntesis*

Oxiel hace una adecuada interpretación del problema y reconoce que para resolverlo debe hacer combinaciones diferentes de los ingredientes adicionales que puede tener una pizza. Las acciones que realiza tienen el siguiente orden:

1. Analiza el enunciado del problema e identifica los ingredientes básicos que tiene una pizza, así como los adicionales.
2. Reconoce que para elegir una pizza con los ingredientes adicionales, la combinación de estos, es sin repetición.
3. Elabora un diagrama para establecer la combinación de los ingredientes adicionales.
4. Encuentra que se pueden tener 6 tipos de combinaciones para elegir una pizza con las condiciones dadas.

La estrategia que utilizó es la elaboración de un diagrama.

### 3.4.2. Caso de Alexis

Alexis tiene 15 años, 10 meses y cursa el segundo semestre de bachillerato en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la UAG.

*¿Cómo resolvió el problema?*

Alexis primeramente lee e interpreta el enunciado del problema. Al igual que Oxiel, reconoce que se trata de elegir una pizza con base en dos tipos de ingredientes, básicos y adicionales. De los primeros, sabe que son: el queso y el tomate; y los adicionales: aceitunas, jamón, champiñones y salami. Reconoce además, que la situación trata de combinar ingredientes adicionales aunque no distingue que es sin repetición, por ello aparecen combinaciones repetidas.

- 316 Entrevistador: En el problema que resolviste... ¿Todas son combinaciones diferentes?  
 317 Alexis: Pues si todos son diferentes  
 326 Entrevistador: ¿Qué es lo que te pide el problema? ¿Y cuál es tu respuesta?  
 327 Alexis: El problema me pide las combinaciones diferentes donde podría seleccionar Jaime dos ingredientes adicionales a la pizza, donde la pizza básica tiene queso y tomate. Y Jaime escogería entre 12 combinaciones diferentes para agregarle a la pizza básica.

Para determinar las combinaciones, Alexis se apoya de un diagrama al que le denomina “ramificación” (renglón 307 de la entrevista). En su elaboración, primero pone los dos ingredientes básicos. En seguida, coloca los cuatro ingredientes adicionales y cada uno de ellos los combina con el resto. De esta forma, obtiene 12 combinaciones posibles para que Jaime seleccione la pizza (Figura No. 23).

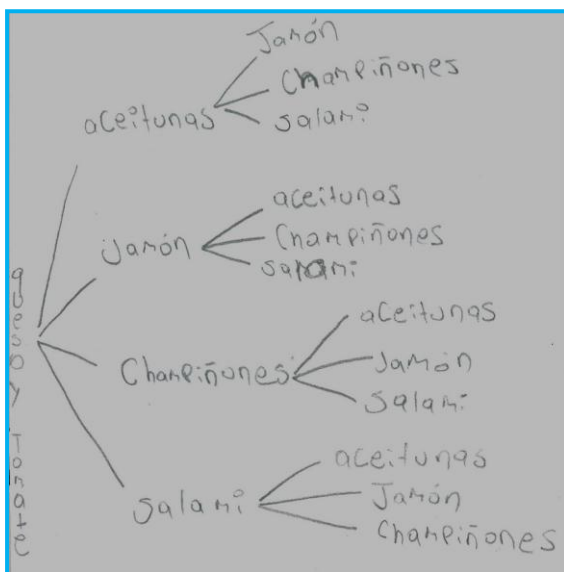


Figura 23. Ramificación en la que se apoya Alexis.



- 306 Entrevistador: ¿Cómo le hiciste?  
307 Alexis: Primero armé una ramificación donde cada ingrediente tiene tres combinaciones, así es que al sumar los cuatro ingredientes y sus tres combinaciones, se llega a la conclusión de que son 12 las combinaciones de las que puede escoger Jaime.

Al preguntársele sobre su forma de proceder para determinar los ingredientes que debía combinar, sostiene que primero toma uno de los adicionales como principal y lo combina con los otros tres (renglones 312-313).

- 312 Entrevistador: ... ¿Cómo es que determinas el ingrediente que tienes que combinar con los otros tres?  
313 Alexis: Porque si son cuatro ingredientes... tendría que tomar primero el principal, que sería las aceitunas y de ahí combinarlo con los otros tres para que formara tres combinaciones diferentes, y así sería con los otros tres, y así serían combinaciones diferentes.

Es importante destacar que para Alexis combinar aceitunas con jamón no es lo mismo que combinar jamón con aceitunas, por ello, todas las combinaciones que encuentra son diferentes (renglón 317).

¿Cómo controla y valora su proceso de solución?

Alexis tiene control sobre ciertas acciones en el proceso de solución del problema, ejemplo de ello es cuando identifica que los ingredientes que tiene que combinar son los adicionales. Las acciones que realiza están mediadas por su conocimiento sobre las combinaciones aunque no distingue entre las que son con repetición de las que son sin repetición.

a) *Síntesis*

Alexis hace una adecuada interpretación del problema, ya que reconoce que la pizza tiene ingredientes básicos y adicionales. Además e identifica que la exigencia del problema es encontrar las combinaciones diferentes de los ingredientes adicionales que podría seleccionar Jaime para encargarse de una pizza. Las acciones que realiza tienen el siguiente orden:

1. Lee e interpreta el enunciado
2. Identifica los ingredientes que debe combinar
3. Elabora un diagrama de árbol

La estrategia que predomina en sus acciones: es la elaboración de un diagrama.

### 3.5. A manera de reflexión

El análisis de las explicaciones escritas, verbales y gestuales, fueron el medio por el cual se exploraron las estrategias desarrolladas por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas matemáticos de PISA 2003. El estudio da cuenta que ante un mismo problema, los estudiantes utilizan estrategias diferentes, como en el caso del problema del carpintero.

Las estrategias que emergieron de las acciones realizadas por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas, de acuerdo con la categoría a la que atendimos, se identificaron cuatro de las denominadas como formales y tres de las informales, tal como se resumen en la tabla IV.

TABLA IV  
CARACTERIZACIÓN DE ESTRATEGIAS EN FORMALES E INFORMALES

Problema	Estrategias	
	Formales	Informales
Carpintero	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Comparación magnitudes.</li> <li>– Uso de fórmulas.</li> <li>– Uso de propiedades</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Descomposición y recomposición de polígonos</li> <li>– Estimación de la medida</li> </ul>
Exportaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Uso de la regla de tres</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Lectura de gráficas</li> </ul>
Juventud Crece Más	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Comparación de cambios a través de la variación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Comparación del comportamiento de las gráficas</li> </ul>
Selección	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Uso de un diagrama</li> </ul>	

El análisis evidencia también, que la comparación es una de las estrategias que prevalece en las acciones de los estudiantes y por la forma de proceder, se ubica tanto en las formales como en las informales. En algunos casos, se asoció a magnitudes lineales y en otros, a comportamientos gráficos.

Respecto de la estrategia informal Descomposición y recomposición de polígonos, es claro que emerge en razón del contexto del problema, que involucra formas no convexas, y que para el cálculo de su perímetro, requiere esa forma de proceder, aun cuando la fórmula aparece articulada en la determinación de la medida del contorno de esas figuras planas. Las estrategias caracterizadas están asociadas al contexto en el que sitúe el problema y a la cantidad, calidad y diversidad de los conocimientos que posee el resolutor.

# Capítulo 4

Conclusiones

En este capítulo presentan las conclusiones del trabajo, describiendo en ellas las reflexiones finales de la revisión de la literatura especializada y respecto al objetivo de caracterizar las estrategias desarrolladas por los estudiantes al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA.

## Conclusiones

Esta investigación se interesó por caracterizar las estrategias desplegadas por estudiantes de Nivel Medio Superior, mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA 2003. Para lograr lo anterior, el trabajo se desarrolló en cuatro etapas:

Etapa I: *Familiarización*. Consistió de dos fases:

- a) *Fase 1*: Revisión de la literatura especializada acerca de los conceptos de problema, resolución de problema y de estrategia, asimismo, de resultados científicos relativos a la exploración y caracterización de estrategias, todo ello, con el propósito de delimitar los antecedentes de la investigación y los elementos teóricos.
- b) *Fase 2: Análisis* de los problemas liberados del área de matemáticas de la prueba PISA 2003 con el fin de:
  - Comprender los aspectos considerados por el proyecto PISA para su clasificación: contenido y contexto.
  - Identificar las condiciones y exigencias planteadas en los problemas, del tipo de información (discursiva y visual), así como de las relaciones que se establecen entre los datos.
  - Determinar las posibles vías de solución.

Etapa II: *Preparatoria*. Consistió de tres fases:

- a) *Fase 1*: Selección de los problemas matemáticos de la prueba PISA 2003, usados en la exploración.
- b) *Fase 2*: Selección de la población y tamaño de la muestra.
- c) *Fase 3*: Diseño del método para la aplicación de los problemas, la toma de datos, la identificación y caracterización de las estrategias, sustentado en aspectos teóricos.

Etapa III: *Levantamiento de datos*. Se llevó a cabo mediante la aplicación de los problemas a la población de estudio, así como de una entrevista de tipo abierto.

Etapa IV: *Análisis y discusión de resultados*. Consistió de tres fases:

- a) *Fase 1*: Análisis de las explicaciones escritas, verbales y gestuales usadas por los estudiantes durante el proceso de resolución de los problemas y la entrevista.

- b) *Fase 2*: Identificación de estrategias.
- c) *Fase 3*: Caracterizaron de las estrategias identificadas.

Los elementos teóricos que sustentan el análisis y discusión de los resultados, este trabajo tomó en consideración las etapas que Polya (1965) identifica en el proceso de resolución de un problema, esto es: *Comprender el problema*, *Configurar un plan*, *Ejecutar un plan* y *Visión retrospectiva*. Asimismo, el concepto de problema y de estrategia, el de problema lo retomamos de Campistrous y Rizo (1999), quienes lo conciben como a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo; y estrategia, la entendemos en el sentido de Escoriza (2003), quien manifiesta que son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos. Además de su definición, interesaron las características que presenta en torno a las estrategias, y los aspectos que considera son fundamentales al momento de la lectura, en este caso de un problema. Estos aspectos tienen que ver con las características del lector: De la cantidad, calidad y diversidad de lo que sabe. Además consideramos que estos aspectos son fundamentales en una interpretación adecuada de un problema, asimismo, en la elección de las estrategias a desarrollar en el proceso de resolución, y esto se evidencia en el análisis de los resultados.

#### 4.1. *Las estrategias caracterizadas*

La identificación de las estrategias se sustenta de las explicaciones verbales y no verbales desarrolladas por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas.

Para la caracterización de las estrategias se adaptó la propuesta de Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011). De este modo, las caracterizamos como *formales* e *informales*.

- *Estrategias formales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se utilizan conceptos sobre objetos, relaciones y operaciones, así como de proposiciones y propiedades matemáticas.
- *Estrategias informales*: Es el conjunto de procedimientos orientados hacia la obtención de la solución de problemas en donde se realizan transformaciones sobre la base de descomposiciones y recomposiciones de formas geométricas (cortar y pegar), estimaciones visuales y aproximaciones de medidas.

#### 4.2. Estrategias desplegadas por los estudiantes

El análisis de las estrategias permitió reconocer una variabilidad en el pensamiento de los estudiantes, el cual está permeado por su experiencia con la matemática. En el proceso de resolución de un problema, reconocemos que intervienen aspectos como los siguientes:

- Una comprensión adecuada del problema.
- La cantidad, calidad y diversidad de los conocimientos que posee quien resuelve el problema.
- Cómo aplica sus conocimientos para resolver un problema.
- Las estrategias que desarrolla en el proceso de resolución de un problema.
- El control del proceso de resolución.

Las investigaciones acerca de este tema, reconocen que en el proceso de resolución de un problema, los estudiantes tienden a aplicar diferentes estrategias incluso ante una misma situación (Kospentaris, Spyrou & Lappas, 2011), independientemente si arriban a una respuesta o si esta cumple o no con las exigencias planteadas (Pastrana & Cabañas-Sánchez, 2012).

Nuestro estudio, da cuenta de que las estrategias dependen además, del tipo de situaciones que se plantean, así como del contexto, tal como se evidencia en la siguiente tabla.

TABLA VI  
ESTRATEGIAS DESPLEGADAS POR LOS ESTUDIANTE SEGÚN EL TIPO PROBLEMA

Estudiante	Problema			
	El Carpintero	Exportaciones	Juventud crece más	Selección
Samantha	-La estimación medidas (de la longitud) -El uso de una fórmula (para calcular perímetros) -El uso de propiedades (de los paralelogramos) -La comparación (de perímetro de una figura familiar con las figuras que tiene forma escalonada) -La descomposición y recomposición de polígonos.	-Lectura de gráfica -Uso de la regla de tres.		

Ricarda	-La estimación de medidas -La comparación (de medidas) -El uso de la fórmula (para calcular perímetros) -La aplicación de propiedades (de paralelogramos)			
Grecia		-Lectura de gráficas -Uso de la regla de tres ibídem	-La comparación del comportamiento de las gráficas.	
Nadxieli			-La comparación de los cambios a través de la variación	
Oxiel				-Elaboración de un diagrama
Alexis				-La elaboración de un diagrama

En el caso del problema de *El carpintero* por ejemplo, en el que se les presentan formas geométricas convexas y no convexas para que decidieran cuál (es) cumple (n) con determinada exigencia, se observó una tendencia por trabajar sobre formas rectangulares primeramente, en seguida, sobre las no rectangulares como el romboide. Dado que el problema trataba con la determinación del perímetro de cuatro tipos de diseños, sus acciones se orientaron a indagar si se conservaba una medida específica, 32 metros, ello a partir de:

- a) Las transformaciones que realizaron sobre las figuras;
- b) La estimación de medidas, o bien;
- c) Al aplicar las propiedades relativas a las figuras geométricas.

Para comprobar si la medida del perímetro era 32 metros, compararon las longitudes de los segmentos. En el caso del problema de *Exportaciones*, la tendencia es la lectura de gráficas y el uso de la regla de tres. La primera, se utilizó como un medio para reconocer datos de las gráficas y la segunda, a fin de determinar un valor. Para el problema de *Juventud crece más*, una tendencia, es el uso de la comparación del comportamiento de las gráficas, así como de razones de cambio de la altura (estatura de personas) respecto del tiempo (en años). Esta comparación es resultado de la lectura e interpretación de las gráficas en las que se representan los datos. Y por último, en el problema de *Selección*



que involucra a las combinaciones, usaron un diagrama, típico en el estudio de combinatoria desde la escuela básica.

El análisis da cuenta que el pensamiento matemático de los estudiantes está caracterizado por la variabilidad, ya que por ejemplo, en el problema del carpintero, Samantha y Ricarda usaron estrategias diferentes. Así, Samantha se apoyó de: a) La comparación de perímetro de una figura familiar con las figuras irregulares, y; b) de la descomposición y recomposición de polígonos. Contrario a Ricarda, quien usó: a) La comparación de longitudes de los segmentos, y; b) la medición de las longitudes de segmentos. Nuestra hipótesis, es que dependen en gran medida de lo que saben, de la calidad de lo que saben y de su experiencia con la resolución de problemas de diferentes tipos. En el caso de los problemas de la prueba PISA, como el del carpintero, aun cuando se ubica en el contexto escolar, se observó que los estudiantes están poco familiarizados con las formas no convexas, por el privilegio que hay en el discurso matemático escolar por trabajar sobre formas convexas, de ahí la tendencia a transformarlas a una forma geométrica familiar. Si reflexionan en otros casos, también se inclinan por las de ese tipo, como lo hizo Samantha, al señalar que el diseño podría tener otra forma y la pensó rectangular.

En este orden de ideas se afirma que el proceso de resolución de un problema involucra:

- El uso de más de una estrategia.
- El uso de determinada estrategia no garantiza la solución a un problema o que la solución cumpla con la exigencia planteada en el problema, ya que depende además, de los conocimientos que posee, de su variedad y de cómo los usa.

Por cuanto a la caracterización de las estrategias que emergieron de las acciones realizadas por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas, de acuerdo con la categoría a la que atendimos, se identificaron cuatro de las denominadas como *formales* y tres de las *informales*, tal como se resumen en la tabla VII.

TABLA VII  
CARACTERIZACIÓN DE ESTRATEGIAS EN FORMALES E INFORMALES

Problema	Estrategias	
	Formales	Informales
Carpintero	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Comparación magnitudes.</li> <li>– Uso de fórmulas.</li> <li>– Uso de propiedades</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Descomposición y recomposición de polígonos</li> <li>– Estimación de la medida</li> </ul>
Exportaciones	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Uso de la regla de tres</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Lectura de gráficas</li> </ul>
Juventud Crece Más	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Comparación de cambios a través de la variación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Comparación del comportamiento de las gráficas</li> </ul>
Selección	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Uso de un diagrama</li> </ul>	

El análisis evidencia también que la *comparación* es una de las estrategias que prevalece en las acciones de los estudiantes y por la forma de proceder, se ubica tanto en las formales como en las informales. En algunos casos, se asoció a magnitudes lineales y en otros, a comportamientos gráficos.

Respecto de la estrategia informal *Descomposición y recomposición de polígonos*, es claro que emerge en razón del contexto del problema, que involucra formas no convexas, y que para el cálculo de su perímetro, requiere esa forma de proceder, aun cuando la fórmula aparece articulada en la determinación de la medida del contorno de esas figuras planas.

### **Referencias bibliográficas**

- Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Cuba. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 2 (3), 31-45.
- Escoriza, J. (2003). *Evaluación del conocimiento de las estrategias de comprensión lectora*. España: Edicions Universitat, Pp. 15-17
- Kospentaris, Spyrou y Lappas (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies Mathematics*. 77 (1), 105–127.
- Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas. México.