ÜBER MUSIKALISCHE

TONBESTIMMUNG UND TEMPERATUR

VON

M. W. DROBISCH.

Die nachfolgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit den Fundamentallehren der theoretischen Musik oder Kanonik. Die neueren musikalischen Schriftsteller pflegen dieselbe als eine völlig abgeschlossene Wissenschaft zu betrachten, deren weiterer Anbau nicht sonderlich der Mühe lohne. Wenn nun zwar für die praktischen Zwecke der Musik als Kunst die nothwendigsten Grundlagen, theils auf empirischem theils auf theoretischem Wege, längst festgestellt sind, so bleibt doch in wissenschaftlicher Beziehung hier noch gar Manches zu thun übrig. Es fehlt zwar nicht an verdienstlichen und in ihrer Art gründlichen Werken über theoretische Musik. Die mir bekannt gewordenen leiden jedoch, soweit sie von Musikern herrühren, an einer Schwerfälligkeit, um nicht zu sagen Unbeholfenheit, welche die Folge einer mangelhaften mathematischen Auffassung des Gegenstandes ist, und von Mathematikern haben, soviel ich weiss, seit Euler nur Wenige einzelnen musikalischen Problemen ihre Aufmerksamkeit zugewendet. Euler's *tentamen novae theoriae musicae* aber ist von den Musikern ungünstig beurtheilt und als ein Werk bezeichnet worden, das mehr mathematische Speculation als musikalisch Brauchbares enthalte. Wenn nun Euler seine Aufgabe allgemeiner fasst, als es der praktische Zweck unmittelbar verlangt, und daher das ganze Feld der möglichen musikalischen Combinationen zu durchmustern beabsichtigt, so liegt hierin kein Grund zum Tadel, vielmehr ist dieses Verfahren echt wissenschaftlich; wenn er aber allerdings nicht überall die Forderungen des musikalischen Gehörs gebührend in Rechnung zieht, so musste dies freilich zu manchen unfruchtbaren Resultaten führen. Insbesondere musste seine ungünstige Beurtheilung der gleichschwebenden Temperatur, die namentlich seit Marpurg zu entschiedenerem Ansehen gelangte, ihn mit den Grundsätzen der Musik, wie sie sich nach ihm immer mehr befestigten, in Widerstreit bringen. Jedenfalls enthält aber Euler's Werk zwei mathematische Bestimmungen, deren Benutzung seine Nachfolger sehr zum Nachtheil der wissenschaftlichen Behandlung der theoretischen Musik vernachlässigt haben; wir meinen seine Massbestimmung der Intervalle durch die Logarithmen der Schwingungsverhältnisse (p. 73) und die genäherten Ausdrücke derselben mit Hülfe der Kettenbrüche (p. 75). Zwar bedienen sich Marpurg, Türk u. A. bei Berechnung der Schwingungsverhältnisse der Logarithmen, jedoch nur zur Abkürzung der Rechnung. Dass aber der Logarithmus des Schwingungsverhältnisses eines Tons, dividirt durch den Logarithmus von 2, als des Schwingungsverhältnisses der Octave, das Intervall selbst ausdrückt, welches der Ton mit dem Grundton bildet, blieb unbeachtet*) und kam in Vergessenheit, so dass diese Bestimmung bei Herbart, der sich ihrer bedient**) und völlig selbständig auf sie gekommen zu seyn scheint, wie eine ganz neue sich darstellt. Gerade durch die allgemeine Anwendung jener beiden Eulerschen Principien erhält nun aber die ganze Lehre von den Tonverhältnissen eine Einfachheit und Klarheit, mit der die weitschweifige Behandlung durch Zusammensetzung der Schwingungsverhältnisse sehr zu ihrem Nachtheil contrastirt. Es ist aber nicht ein blosser methodischer Gewinn, der dadurch erlangt wird, sondern es ergeben sich auch wesentlich neue Resultate. Fürs Erste nämlich lässt sich mit Leichtigkeit nachweisen, dass jede ungleichschwebende Temperatur den innern musikalischen

---

*) Nur Lambert macht hiervon eine Ausnahme; beide Eulersche Bestimmungen kommen in seiner Abhandlung *sur le tempérament en musique (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1774, p. 55)* in Anwendung.

**) Zuerst in den Hauptpuncten der Metaphysik, Göttingen, 1807, § 14. (Werke, herausgegeben von Hartenstein, Bd. 3, S. 46), dann in mehreren psychologisch-musikalischen Abhandlungen, die sich im siebenten Bande der Gesammtausgabe der Werke beisammen finden. Durch Herbart's Schriften lernte ich diese Massbestimmung der Intervalle zuerst kennen und habe sie in der Abhandlung über die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle (Abhandlungen etc. herausgeg. von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft, Leipzig, 1846) benutzt, ohne zu wissen, dass schon im Jahre 1739 Euler auf sie gekommen war. Die Anwendung der Kettenbrüche zur Auffindung abgekürzter Werthe der Intervalle lag so nahe, dass Jeder, dem diese bekannt geworden waren, von selbst darauf geführt werden musste. Im Uebrigen mag bemerkt werden, dass jene frühere Abhandlung in ihrem ersten Theile zwar Manches enthält, was auch hier, obwohl in vervollkommneter Gestalt, eine Stelle finden musste, in der Hauptsache aber einen ganz andern Zweck verfolgt als die gegenwärtige, die mit der Erklärung der ästhetischen Verhältnisse der Töne nichts zu thun hat, daher auch in keiner Weise auf Principien beruht, die als blos hypothetische angesehen werden können.

Zusammenhang der Intervalle nothwendig theilweise zerreisst, und dieser nur bei gleichschwebender Temperatur ungestört bleibt. Dabei findet man aber auch zweitens, dass es nicht blos eine, sondern eine Mehrheit von gleichschwebenden Temperaturen giebt, die in zwei Classen zerfallen, auf deren gemeinsamer Grenze die gewöhnliche gleichschwebende Temperatur steht, die man daher die mittlere nennen kann. In dieser nämlich sind, wie bekannt, die erhöhten Töne *Cis, Dis* u. s. w. von den erniedrigten *Des, Es* u. s. w. nur dem Namen nach verschieden, in jenen beiden Classen dagegen treten sie als wesentlich verschiedene Töne aus einander, und zwar liegen in der einen Classe *Cis, Dis* u. s. w. tiefer als *Des, Es* u. s. w. in der andern aber höher. Durch alle physikalische Schriften zieht sich eine Tabelle der Schwingungsverhältnisse der Töne, in welcher neben den bekannten feststehenden rationalen Verhältnissen der Haupttöne auch für die erhöhten und erniedrigten Töne rationale Schwingungsverhältnisse angegeben werden, und wonach den erhöhten eine tiefere Stelle als den ihnen nächstbenachbarten erniedrigten zugewiesen wird. Auf solche akustische Autorität hin ist diese Ansicht über die Lage jener Töne auch in die theoretisch-musikalischen Schriften übergegangen. Bei näherer Untersuchung erweist sich jedoch jene Tabelle hinsichtlich der Fixirung der erhöhten und erniedrigten Töne als illusorisch. Denn diese Fixirung ist nur für gewisse Tonarten richtig, für andre unrichtig und hat daher nicht absolute, sondern nur relative Gültigkeit. Man kann überhaupt gar nicht die Schwingungsverhältnisse und Intervalle der Töne *Cis, Dis* etc. *Ces, Des* etc. eben so absolut bestimmen wie die von *D, E, F* etc. Denn es ist unmöglich, aus den sieben Haupttönen und ihren einfachen Erhöhungen und Erniedrigungen Tonleitern zu bilden, die in allen Tonarten zugleich rein sind; es würde vielmehr zur Erfüllung dieser Forderung einer weit grössern Anzahl von Tönen bedürfen und selbst dann noch für die Willkür Spielraum übrig bleiben. Die moderne Musik verlangt aber für alle Tonarten aus einer mässigen Anzahl von Tönen wenigstens befriedigende Scalen, die demnach nicht durchaus reine, sondern nur temperirte, und zwar, wie schon bemerkt wurde, nur gleichschwebend temperirte Töne und Intervalle enthalten können. Es kann jedoch, wenn, wie dies auf den Streichinstrumenten geschieht, erniedrigte und erhöhte Töne wirklich unterschieden werden, diese Temperatur nicht die gewöhnliche gleichschwebende seyn. Sie kann aber auch nicht in die erste der beiden genannten Classen fallen, obwohl sich innerhalb derselben eine Temperatur angeben lässt, die mehr als jede andere in der Gesammtheit der die Dur- und Molltonleiter bildenden Töne der Reinheit nahe kommt; denn bei den Modulationen durch enharmonische Verwechselung zeigt es sich, dass die erhöhten Töne *Cis, Dis* etc. höher liegen müssen als die ihnen nächstbenachbarten erniedrigten, also *Cis* höher als *Des*, *Dis* höher als *Es* u. s. f. Werden also diese Töne unterschieden, so muss die Temperatur in die zweite Classe fallen. In dieser Classe stehen aber die Terzen etwas höher als die der gewöhnlichen oder mittleren Temperatur, weichen also etwas mehr als diese von der Reinheit ab. Es kommt nun hierbei darauf an, eine solche Temperatur zu finden, die, bei unmerklicher Abweichung von der gewöhnlichen gleichschwebenden in den Haupttönen, die erhöhten und erniedrigten doch noch merklich genug unterscheidet. Diesen Forderungen scheint nun am besten diejenige Temperatur zu entsprechen, nach welcher das Intervall der Quinte $= \frac{31}{53}$ des Octavenintervalls ist, der Unterschied der nächstbenachbarten erhöhten und erniedrigten Töne $\frac{1}{9}$ des grossen ganzen Tons beträgt und die letzteren fast genau mit den gleichnamigen Tönen der Kirnbergerschen Temperatur zusammenfallen.

Dies sind die hauptsächlichsten Ergebnisse der nachfolgenden Untersuchungen. Nicht um musikalische Neuerungen, sondern um wissenschaftliche Aufklärung des Bestehenden ist es dabei zu thun. Diese ist aber um so mehr ein Bedürfniss, als einerseits namhafte musikalische Schriftsteller die auf den Streichinstrumenten factisch vorhandene Unterscheidung der erhöhten und erniedrigten Töne ganz mit Stillschweigen übergehen, man möchte sagen verleugnen und die Herrschaft der gleichschwebenden Temperatur der Tasteninstrumente auch für sie in Anspruch nehmen, andrerseits aber die gerühmte Reinheit der musikalischen Leistungen der Streichinstrumente die Meinung aufrecht erhält, als ob sich hier die Musik von jeder Temperatur befreien könnte, was unmöglich scheint, indem nicht nur die erhöhten und erniedrigten, sondern selbst mehrere Haupttöne, je nach der Verschiedenheit der Tonarten, verschieden gegriffen werden müssten, dies aber bei dem häufigen Wechsel der Tonarten grosse Unsicherheit erzeugen und ein Spiel *prima vista* unausführbar machen würde.*) Es muss daher allerdings

*) In völligem Gegensatz zu der wenigstens in Deutschland jetzt überwiegenden, wo nicht allgemein angenommenen Ansicht von der Geltung der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur auch für die Streichinstrumente stehen die Resultate, die *Delezenne (Mémoire sur les valeurs numériques des notes de la gamme* im *Recueil de la*

auch diese Instrumente die gleichschwebende Temperatur beherrschen, jedoch nicht die gewöhnliche, sondern eine solche, die sich derselben zwar nahe anschliesst, doch aber die erhöhten und erniedrigten Töne von einander sondert und in solcher Weise fixirt, dass der musikalische Vortrag, wenn auch bald mehr bald weniger von diesen festen Bestimmungen abweichend, doch auf sie, als die mittleren, normalen, immer wieder zurückkommen muss.

---

société des sciences de Lille, 1827*)* aus seinen in Verbindung mit mehreren Künstlern angestellten Versuchen ziehen zu dürfen glaubt. Hiernach soll der geübte Violinist oder Cellist in der Durscale den grossen und kleinen Ton unterscheiden, also in der That eine reine Scala spielen, und sich von aller Temperatur frei halten. Gleichwohl erkennt Delezenne selbst in einer folgenden Abhandlung *(sur le nombre des modes musicaux,* ebendas. p. 67) die Nothwendigkeit einer Temperatur auch für die Streichinstrumente *(la nécessité d'un tempérament, même pour les instrumens à sons libres)* an, ohne jedoch anzugeben, von welcher Art diese Temperatur seyn soll. Eine Wiederholung und Erweiterung seiner Versuche wäre daher äussert wünschenswerth, da sich zuletzt nur auf experimentalem Wege wird feststellen lassen, welcher gleichschwebenden Temperatur sich das Spiel auf jenen Instrumenten am meisten nähert, und unter welchen Umständen etwa der Spieler von ihr zu Gunsten der Reinheit abweicht.

I.

BESTIMMUNG DER TÖNE AUS IHREN EINFACHSTEN SCHWINGUNGSVERHÄLTNISSEN.

§ 1.

Zwei oder mehrere Töne heissen gleich hoch, wenn die tönenden Körper, welche sie hervorbringen, in demselben Zeittheil gleichviele Schwingungen machen. Ist aber die Zahl dieser Schwingungen bei dem einen tönenden Körper grösser als bei dem andern, so nennen wir den Ton des ersteren höher als den des andern, und umgekehrt den des letztern tiefer als den Ton des ersteren Körpers.

Zwei gleichzeitig gegebene Töne machen auf den musikalischen Sinn entweder den Eindruck des Wohlklangs oder des Missklangs. Im ersteren Falle nennen wir sie consonirende, ihre Verbindung eine Consonanz, im andern Falle dissonirende und ihre Verbindung eine Dissonanz. Ob zwei Töne consoniren oder dissoniren, hängt von den Verhältnissen ab, in welchen die ihnen zugehörigen Schwingungsmengen stehen. Je einfacher diese Verhältnisse sind, um so wohlklingender ist die Verbindung der Töne.

§ 2.

Bei dieser nothwendigen Rücksicht auf die Verhältnisse der Schwingungszahlen der tönenden Körper ist es zweckmässig, absolute und relative Schwingungszahlen zu unterscheiden. Jene drücken die Menge der Schwingungen des tönenden Körpers in der Zeiteinheit (der Secunde) aus, diese sind die Verhältnisszahlen, welche angeben, wie viele Schwingungen oder Theile von Schwingungen ein tönender Körper innerhalb desselben Zeittheils macht, in welchem ein andrer nur einmal schwingt. Der dem letzteren zugehörige Ton heisst dann der Grundton. Ist also die absolute Schwingungszahl des Tons $A = a$, die des Tons $B = b$, die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A als den Grundton $= y$, so ist $y = \frac{b}{a}$. Umgekehrt ist die relative Schwingungszahl von A in Bezug auf B als Grundton $= \frac{a}{b} = \frac{1}{y}$. Da, wenn $b \gtrless a$, $y \gtrless 1$ ist, so folgt, dass die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A grösser oder kleiner als 1 ist, je nachdem der Ton B höher oder tiefer ist als der Ton A.

Kommt ein dritter Ton C hinzu, dessen absolute Schwingungszahl $= c$, so ist seine relative in Bezug auf $A = \frac{c}{a}$, in Bezug auf $B = \frac{c}{b}$. Ist $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, so ist C ebensoviel höher als B, wie B höher als A, oder A ebensoviel tiefer als B, wie C höher als B. Da dann die relative Schwingungszahl von A in Bezug auf $B = \frac{a}{b}$, die von C in Bezug auf $B = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, so ist das Product der relativen Schwingungszahlen zweier Töne, von denen der eine ebensoviel höher, wie der andre tiefer ist als ein und derselbe dritte Ton (ihr gemeinsamer Grundton), $= 1$. Ist daher die relative Schwingungszahl des einen $= y$, so ist die des andern der reciproke Werth $\frac{1}{y}$.

Da für beliebige Werthe von a, b, c immer $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a}$, so folgt, dass die relative Schwingungszahl von C in Bezug auf A gleich ist dem Product aus der relativen Schwingungszahl von C in Bezug auf B in die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A.

§ 3.

Zwei Töne A, B bilden Consonanzen, wenn ihre absoluten Schwingungszahlen a, b in einem der Verhältnisse $1:1$, $1:2$, $2:3$, $3:4$, $4:5$, $5:6$ stehen.

1) Ist $a : b = 1 : 1$, also die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A, oder von A in Bezug auf B, $y = 1$, so heisst B die Prime von A, A die Prime von B.

2) Ist $a : b = 1 : 2$, also die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A, $y = 2$, so heisst B die Octave von A.

3) Ist $a : b = 2 : 3$, also $y = \frac{3}{2}$, so heisst B die Quinte von A.

4) Ist $a : b = 3 : 4$, also $y = \frac{4}{3}$, so heisst B die Quarte von A.

5) Ist $a : b = 4 : 5$, also $y = \frac{5}{4}$, so heisst B die grosse Terz von A.

6) Ist $a : b = 5 : 6$, also $y = \frac{6}{5}$, so heisst B die kleine Terz von A.

Da in den Fällen 2 bis 5 die relative Schwingungszahl von A in Bezug auf $B = \frac{1}{y}$, also der Reihe nach $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ ist, so heisst dann beziehungsweise A die umgekehrte oder untere Octave, Quinte, Quarte, grosse Terz, kleine Terz von B. Denn da die relativen Schwingungszahlen dieser Töne die reciproken Werthe derjenigen der Octave, Quinte u. s. f. sind, so liegt ein durch sie in Bezug auf A bestimmter Ton B' um ebensoviel tiefer als A wie B höher als A (§ 2). Im Gegensatz zu den unteren Octaven, Quinten u. s. w. kann man die Octaven, Quinten u. s. w. selbst auch die oberen nennen.

§ 4.

Beziehen sich die relativen Schwingungszahlen 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ auf einen und denselben Grundton, so sind durch sie fünf von diesem verschiedene (höhere), mit ihm aber consonirende Töne bestimmt. Man kann nun weiter aus ihnen die relativen Schwingungszahlen derjenigen Töne bestimmen, die mit jenen der Reihe nach consoniren, wenn man deren obere und untere Terzen, Quarten, Quinten und Octaven sucht, indem man jede der relativen Schwingungszahlen 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ sowohl mit jeder derselben als mit jedem der reciproken Werthe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ multiplicirt. Man erhält hierdurch drei Classen von Tönen, theils nämlich solche, deren relative Schwingungszahlen zwischen denen der Prime und Octave, also zwischen 1 und 2 liegen, theils solche, deren relative Schwingungszahlen > 2, theils endlich solche, für welche diese Zahlen < 1 sind. Wir bedürfen jedoch für unsern Zweck zunächst nur der Töne der ersten Classe und übergehen daher diejenigen Producte der relativen Schwingungszahlen, die > 2 und < 1 sind.

§ 5.

Hiernach erhalten wir nun, wenn wir von der Octave aus successiv zur Quinte, Quarte u. s. f. übergehen und, wo es höhere Töne giebt, diese zuerst bestimmen, folgende Resultate.

1) Die untere kleine Terz der Octave giebt die relative Schwingungszahl $y = 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$. Der Ton, dem sie zugehört, heisst die grosse Sexte.

2) Die untere grosse Terz der Octave giebt $y = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$. Der zugehörige Ton heisst die kleine Sexte.

Die untere Quarte der Octave giebt $y = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, die Quinte.

Ebenso giebt die untere Quinte der Octave $y = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, die Quarte.

3) Die kleine Terz der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$, die grössere kleine Septime.

4) Die grosse Terz der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$, die grosse Septime.

Die Quarte der Quinte giebt, wie schon aus 2 folgt, die Octave.

Die untere kleine Terz der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{4}$, die grosse Terz.

Hieraus folgt von selbst, dass die untere grosse Terz der Quinte die kleine Terz giebt.

5) Die untere Quarte der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$, die grosse Secunde.

Die kleine Terz der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$, die kleine Sexte; die grosse Terz der Quarte $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$, die grosse Sexte.

6) Die Quarte der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$, die kleinere kleine Septime.

Die Quinte der Quarte giebt, wie sich nach 2 von selbst versteht, die Octave.

7) Die untere kleine Terz der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9}$, den kleinen ganzen Ton.

8) Die untere grosse Terz der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, die kleine Secunde.

Dass die kleine Terz der grossen Terz und die grosse der kleinen die Quinte giebt, folgt schon aus 4; eben so aus 5, 4 und 3, dass die Quarte der grossen und kleinen Terz resp. die grosse und kleine Sexte, die Quinte der grossen und kleinen Terz resp. die grosse Septime und grössere kleine Septime. Es giebt aber

9) die grosse Terz der grossen Terz $y = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$, die übermässige Quinte;

10) die untere kleine Terz der grossen Terz $y = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}$, die übermässige Prime;

11) die kleine Terz der kleinen Terz $y = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{36}{25}$, die grössere verminderte Quinte.

§ 6.

Ordnen wir die gewonnenen neuen Töne nach der Grösse ihrer relativen Schwingungszahlen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

grosse Septime, $y = \frac{15}{8}$,
grössere kleine Septime, $y = \frac{9}{5}$,
kleinere kleine Septime, $y = \frac{16}{9}$,
grosse Sexte, $y = \frac{5}{3}$,
kleine Sexte, $y = \frac{8}{5}$,
übermässige Quinte, $y = \frac{25}{16}$,
grössere verminderte Quinte, $y = \frac{36}{25}$,
grosse Secunde, $y = \frac{9}{8}$,
kleiner ganzer Ton, $y = \frac{10}{9}$,
kleine Secunde, $y = \frac{16}{15}$,
übermässige Prime, $y = \frac{25}{24}$.

Vergleicht man diese Bestimmungen, theils unter einander, theils mit denen in § 3, so ergiebt sich, dass Quarte und Quinte, grosse Terz und kleine Sexte, kleine Terz und grosse Sexte, grosse Secunde und kleinere kleine Septime, kleiner ganzer Ton und grössere kleine Septime, endlich kleine Secunde und grosse Septime relative Schwingungszahlen haben, deren Product 2, also gleich der Schwingungszahl der Octave. Wegen der an Einerleiheit grenzenden Verwandschaft der Octave zum Grundton (welche weiter unten näher beleuchtet werden wird), pflegt daher in allen diesen Tonpaaren der eine Ton der umgekehrte des andern genannt zu werden. In diesem Sinne heissen die Sexten umgekehrte Terzen, die Septimen umgekehrte Secunden und die Quarte eine umgekehrte Quinte.

§ 7.

Durch Fortsetzung des in § 5 eingeschlagenen Verfahrens in Bezug auf die gewonnenen elf Töne erhalten wir weitere Tonbestimmungen. Es giebt nämlich

1) die untere Quarte der grossen Septime $y = \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{45}{32}$, die grössere übermässige Quarte;

2) die untere Quarte der grösseren kleinen Septime $y = \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{20}$, eine alterirte Quarte;

3) die untere kleine Terz der kleineren kleinen Septime $y = \frac{16}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{40}{27}$, eine alterirte Quinte;

4) die untere grosse Terz der kleineren kleinen Septime $y = \frac{16}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{45}$, die sogenannte falsche oder kleinere verminderte Quinte;

5) die untere Quinte der kleineren kleinen Septime $y = \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$, eine alterirte kleine Terz;

6) die untere kleine Terz der grossen Sexte $y = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{18}$, die kleinere übermässige Quarte;

7) die kleine Terz der kleinen Sexte $y = \frac{8}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{48}{25}$, die grössere verminderte Octave;

8) die untere grosse Terz der kleinen Sexte $y = \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{25}$, die verminderte Quarte;

9) die grosse Terz der übermässigen Quinte $y = \frac{25}{16} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{64}$, eine alterirte Octave;

10) die untere kleine Terz der übermässigen Quinte $y = \frac{25}{16} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{96}$, die übermässige Terz (da dieser Werth zwischen den beiden gewöhnlichen Bestimmungen $\frac{625}{485}$ und $\frac{675}{512}$ in der Mitte liegt);

11) die untere Quarte der übermässigen Quinte $y = \frac{25}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{64}$, die grössere übermässige Secunde;

12) die kleine Terz der grösseren verminderten Quinte $y = \frac{36}{25} \cdot \frac{6}{5} = \frac{216}{125}$, die grössere verminderte Septime;

13) die untere grosse Terz der grösseren verminderten Quinte $y = \frac{36}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{144}{125}$, die grössere verminderte Terz;

14) die untere Quarte der grösseren vermind. Quinte $y = \frac{36}{25} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{25}$, das grosse Limma;*)

15) die Quinte der grossen Secunde $y = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$, eine alterirte grosse Sexte.

Aus dem kleinen ganzen Ton und der übermässigen Prime ergeben sich nur Töne, die schon zuvor bestimmt sind.

§ 8.

Auch jeder dieser funfzehn neuen Töne kann zu weiteren Tonbestimmungen benutzt werden. Wir übergehen jedoch die als »alterirte« bezeichneten, so wie das grosse Limma, so dass dann, nach der Grösse

*) Genau genommen bezeichnet dieses, so wie die später folgende Diesis, keinen Ton, sondern ein Komma, also im weitern Sinn ein Intervall. Wie indess Secunden, Terzen, Quarten u. s. w. Intervalle und Töne zugleich bezeichnen, so scheint es auch erlaubt, diesen Gebrauch auf die Kommata überzutragen, wo der durch sie bestimmte Ton eine Benennung erfordert.

geordnet, übrig bleiben die grössere verminderte Octave, grössere verminderte Septime, kleinere verminderte Quinte, grössere übrmässige Quarte, kleinere übermässige Quarte, übermässige Terz, verminderte Quarte, grössere übermässige Secunde, grössere verminderte Terz. Es giebt nun

1) die untere gr. Terz der grösseren verminderten Octave $y = \frac{48}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{192}{125}$, die verminderte Sexte (da dieser Werth zwischen den beiden gewöhnlichen Bestimmungen $\frac{972}{625}$ und $\frac{1024}{675}$ fast genau in der Mitte liegt).

Wir übergehen die untere gr. Terz der grösseren verminderten Septime $\frac{864}{625}$ und die untere Quarte derselben $\frac{162}{125}$, da jene der kleineren übermässigen Quarte, diese der übermässigen Terz sehr nahe kommt. Dagegen giebt

2) die kleine Terz der kleineren verminderten Quinte $y = \frac{64}{45} \cdot \frac{6}{5} = \frac{128}{75}$, die kleinere verminderte Septime;

3) die Quarte der kleineren verminderten Quinte $y = \frac{64}{45} \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{135}$, die kleinere verminderte Octave;

4) die untere grosse Terz der kleineren verminderten Quinte $y = \frac{64}{45} \cdot \frac{4}{5} = \frac{256}{225}$, die kleinere verminderte Terz;

5) die grosse Terz der grösseren übermässigen Quarte $y = \frac{45}{32} \cdot \frac{5}{4} = \frac{225}{128}$, die grössere übermässige Sexte;

6) die untere Quarte der grösseren übermässigen Quarte $y = \frac{45}{32} \cdot \frac{3}{4} = \frac{135}{128}$, das kleine Limma;

7) die grosse Terz der kleineren übermässigen Quarte $y = \frac{25}{18} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{72}$, die kleinere übermässige Sexte;

8) die Quarte der kleineren übermässigen Quarte $y = \frac{25}{18} \cdot \frac{4}{3} = \frac{50}{27}$, eine alterirte grosse Septime;

9) die untere kleine Terz der kleineren übermässigen Quarte $y = \frac{25}{18} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{108}$, die kleinere übermässige Secunde.

Wir übergehen die grosse Terz der übermässigen Terz, $\frac{625}{384}$, eine alterirte kleine Sexte, und die untere kleine Terz der übermässigen Terz, $\frac{625}{576}$, welche sehr nahe mit dem grossen Limma zusammentrifft. Dagegen giebt

10) die untere grosse Terz der verminderten Quarte $y = \frac{32}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{125}$, die kleine Diesis.

Wir übergehen die grosse Terz der grösseren übermässigen Secunde, $\frac{375}{256}$, welche nahe mit der alterirten Quinte $\frac{40}{27}$ zusammentrifft.

Die grössere verminderte Terz giebt, wenn man ihre kleine Terz nimmt, $\frac{864}{625}$, welcher Ton, wie schon erwähnt, nahe mit der kleineren übermässigen Quarte zusammentrifft.

§ 9.

Stellen wir jetzt die in den §§ 3 bis 8 bestimmten Töne nach der Grösse ihrer relativen Schwingungszahlen geordnet zusammen und drücken diese, zur leichteren Vergleichung ihrer Werthe, in Decimalbrüchen aus, so erhalten wir folgende Tabelle:

	y
1) Prime,	$\frac{1}{1} = 1{,}00000$
2) kleine Diesis,	$\frac{128}{125} = 1{,}02400$
3) übermässige Prime,	$\frac{25}{24} = 1{,}04167$
4) kleines Limma,	$\frac{135}{128} = 1{,}05469$
5) kleine Secunde,	$\frac{16}{15} = 1{,}06667$
6) grosses Limma,	$\frac{27}{25} = 1{,}08000$
7) kleiner ganzer Ton,	$\frac{10}{9} = 1{,}11111$
8) grosse Secunde,	$\frac{9}{8} = 1{,}12500$
9) kleinere verminderte Terz,	$\frac{256}{225} = 1{,}13778$
10) grössere verminderte Terz,	$\frac{144}{125} = 1{,}15200$
11) kleinere übermässige Secunde,	$\frac{125}{108} = 1{,}15740$
12) grössere übermässige Secunde,	$\frac{75}{64} = 1{,}17188$
13) alterirte kleine Terz,	$\frac{32}{27} = 1{,}18519$
14) kleine Terz,	$\frac{6}{5} = 1{,}20000$
15) grosse Terz,	$\frac{5}{4} = 1{,}25000$
16) verminderte Quarte,	$\frac{32}{25} = 1{,}28000$
17) übermässige Terz,	$\frac{125}{96} = 1{,}30208$
18) Quarte,	$\frac{4}{3} = 1{,}33333$
19) alterirte Quarte,	$\frac{27}{20} = 1{,}35000$
20) kleinere übermässige Quarte,	$\frac{25}{18} = 1{,}38889$
21) grössere übermässige Quarte,	$\frac{45}{32} = 1{,}40625$
22) kleinere verminderte Quinte,	$\frac{64}{45} = 1{,}42222$

	y
23) grössere verminderte Quinte,	$\frac{36}{25} = 1,44000$
24) alterirte Quinte,	$\frac{40}{27} = 1,48148$
25) Quinte,	$\frac{3}{2} = 1,50000$
26) verminderte Sexte,	$\frac{192}{125} = 1,52800$
27) übermässige Quinte,	$\frac{25}{16} = 1,56250$
28) kleine Sexte,	$\frac{8}{5} = 1,60000$
29) grosse Sexte,	$\frac{5}{3} = 1,66667$
30) alterirte grosse Sexte,	$\frac{27}{16} = 1,68750$
31) kleinere verminderte Septime,	$\frac{128}{75} = 1,70667$
32) grössere verminderte Septime,	$\frac{216}{125} = 1,72800$
33) kleinere übermässige Sexte,	$\frac{125}{72} = 1,73611$
34) grössere übermässige Sexte,	$\frac{225}{128} = 1,75781$
35) kleinere kleine Septime,	$\frac{16}{9} = 1,77778$
36) grössere kleine Septime,	$\frac{9}{5} = 1,80000$
37) alterirte grosse Septime,	$\frac{50}{27} = 1,85186$
38) grosse Septime,	$\frac{15}{8} = 1,87500$
39) kleinere verminderte Octave,	$\frac{256}{135} = 1,89630$
40) grössere verminderte Octave,	$\frac{48}{25} = 1,92000$
41) alterirte Octave,	$\frac{125}{64} = 1,95312$
42) Octave,	$\frac{2}{1} = 2,00000$

In dieser Tabelle haben je zwei Töne, von denen der eine eben so weit vom Anfang der ganzen Reihe, wie der andre vom Ende derselben entfernt ist (deren Numern also immer die Summe 43 geben), relative Schwingungszahlen, deren Product $= 2$ ist.

§ 10.

Im Vorstehenden sind aus den relativen Schwingungszahlen der Octave, Quinte, Quarte, grossen und kleinen Terz die aller übrigen Töne abgeleitet worden. Die jener fünf mit dem Grundton consonirenden Töne lassen sich aber auf drei reduciren. Denn sey allgemein die Schwingungszahl der grossen Terz $= T$, die der Quinte $= Q$, wo die der Octave $= 2$ ist, so ist die relative Schwingungszahl der Quarte

$=\frac{2}{Q}$, die der kleinen Terz $= \frac{Q}{T}$. Wiederholt man nun das in den §§ 5 bis 8 angewandte Verfahren in Bezug auf diese allgemeinen Ausdrücke der relativen Schwingungszahlen jener mit dem Grundton consonirenden Töne, und beachtet, dass $Q = \frac{3}{2}$, $T = \frac{5}{2^2}$, so erhält man die folgende Tabelle, welche die Form der Abhängigkeit der relativen Schwingungszahlen der Töne, sowohl von denen der Octave, Quinte und grossen Terz, als auch von den absoluten Zahlen 2, 3, 5 auf einen Blick übersehen lässt und so angeordnet ist, dass sich die Töne, deren relative Schwingungszahlen das Product 2 geben, gegenüberstehen.

	y		y
1) Prime,	$1 = 1$	42) Octave,	$2 = 2$
2) kleine Diesis,	$\frac{2}{T^3} = \frac{2^7}{5^3}$	41) alterirte Octave,	$T^3 = \frac{5^3}{2^6}$
3) übermässige Prime,	$\frac{T^2}{Q} = \frac{5^2}{2^3 . 3}$	40) gröss. vermind. Octave,	$\frac{2 . Q}{T^2} = \frac{2^4 . 3}{5^2}$
4) kleines Limma,	$\frac{Q^3 . T}{2^2} = \frac{3^3 . 5}{2^7}$	39) klr. vermind. Octave,	$\frac{2^3}{Q^3 . T} = \frac{2^8}{3^3 . 5}$
5) kleine Secunde,	$\frac{2}{Q . T} = \frac{2^4}{3 . 5}$	38) grosse Septime,	$Q . T = \frac{3 . 5}{2^3}$
6) grosses Limma,	$\frac{Q^3}{2 . T^2} = \frac{3^3}{5^2}$	37) alter. grosse Septime,	$\frac{2^2 . T^2}{Q^3} = \frac{2 . 5^2}{3^3}$
7) kleiner ganzer Ton,	$\frac{2 . T}{Q^2} = \frac{2 . 5}{3^2}$	36) grössere kl. Septime,	$\frac{Q^2}{T} = \frac{3^2}{5}$
8) grosse Secunde,	$\frac{Q^2}{2} = \frac{3^2}{2^3}$	35) kleinere kl. Septime,	$\frac{2^2}{Q^2} = \frac{2^4}{3^2}$
9) kleinere vermind. Terz,	$\frac{2^2}{Q^2 . T^2} = \frac{2^8}{3^2 . 5^2}$	34) gröss. übermäss. Sexte,	$\frac{Q^2 . T^2}{2} = \frac{3^2 . 5^2}{2^7}$
10) grössere vermind. Terz,	$\frac{Q^2}{T^3} = \frac{2^4 . 3^2}{5^3}$	33) kleinere übermäss. Sexte,	$\frac{2 . T^3}{Q^2} = \frac{5^3}{2^3 . 3^2}$
11) klr. übermäss. Secunde,	$\frac{2 . T^3}{Q^3} = \frac{5^3}{2^2 . 3^3}$	32) gröss. vermind. Septime,	$\frac{Q^3}{T^3} = \frac{2^3 . 3^3}{5^3}$
12) gröss. übermäss. Secunde,	$\frac{Q . T^2}{2} = \frac{3 . 5^2}{2^6}$	31) klr. vermind. Septime,	$\frac{2^2}{Q . T^2} = \frac{2^7}{3 . 5^2}$
13) alterirte kleine Terz,	$\frac{2^2}{Q^3} = \frac{2^5}{3^3}$	30) alter. grosse Sexte,	$\frac{Q^3}{2} = \frac{3^3}{2^4}$
14) kleine Terz,	$\frac{Q}{T} = \frac{2 . 3}{5}$	29) grosse Sexte,	$\frac{2 . T}{Q} = \frac{5}{3}$
15) grosse Terz,	$T = \frac{5}{2^2}$	28) kleine Sexte,	$\frac{2}{T} = \frac{2^3}{5}$
16) verminderte Quarte,	$\frac{2}{T^2} = \frac{2^5}{5^2}$	27) übermässige Quinte,	$T^2 = \frac{5^2}{2^4}$
17) übermässige Terz,	$\frac{T^3}{Q} = \frac{5^3}{2^5 . 3}$	26) verminderte Sexte,	$\frac{2 . Q}{T^3} = \frac{2^6 . 3}{5^3}$
18) Quarte,	$\frac{2}{Q} = \frac{2^2}{3}$	25) Quinte,	$Q = \frac{3}{2}$
19) alterirte Quarte,	$\frac{Q^3}{2 . T} = \frac{3^3}{2^2 . 5}$	24) alterirte Quinte,	$\frac{2^2 . T}{Q^3} = \frac{2^3 . 5}{3^3}$
20) klr. übermäss. Quarte,	$\frac{2 . T^2}{Q^2} = \frac{5^2}{2 . 3^2}$	23) gröss. vermind. Quinte,	$\frac{Q^2}{T^2} = \frac{2^2 . 3^2}{5^2}$
21) gröss. übermäss. Quarte,	$\frac{Q^2 . T}{2} = \frac{3^2 . 5}{2^5}$	22) klr. vermind. Quinte,	$\frac{2^2}{Q^2 . T} = \frac{2^6}{3^2 . 5}$

§ 11.

Man kann diese 40 zwischen der Prime und Octave liegende Töne in folgende acht Classen bringen.

I.

$$25)\quad y = Q = \frac{3}{2}$$
$$8)\quad y = \frac{Q^2}{2} = \frac{3^2}{2^3}$$
$$30)\quad y = \frac{Q^3}{2} = \frac{3^3}{2^4}$$

II.

$$18)\quad y = \frac{2}{Q} = \frac{2^2}{3}$$
$$35)\quad y = \frac{2^2}{Q^2} = \frac{2^4}{3^2}$$
$$13)\quad y = \frac{2^2}{Q^3} = \frac{2^5}{3^3}$$

III.

$$15)\quad y = T = \frac{5}{2^2}$$
$$27)\quad y = T^2 = \frac{5^2}{2^4}$$
$$41)\quad y = T^3 = \frac{5^3}{2^6}$$

IV.

$$28)\quad y = \frac{2}{T} = \frac{2^3}{5}$$
$$16)\quad y = \frac{2}{T^2} = \frac{2^5}{5^2}$$
$$2)\quad y = \frac{2}{T^3} = \frac{2^7}{5^3}$$

V.

$$38)\quad y = Q.T = \frac{3.5}{2^3}$$
$$12)\quad y = \frac{Q.T^2}{2} = \frac{3.5^2}{2^6}$$
$$21)\quad y = \frac{Q^2.T}{2} = \frac{3^2.5}{2^5}$$
$$34)\quad y = \frac{Q^2.T^2}{2} = \frac{3^2.5^2}{2^7}$$
$$4)\quad y = \frac{Q^3.T}{2^2} = \frac{3^3.5}{2^7}$$

VI.

$$5)\quad y = \frac{2}{Q.T} = \frac{2^4}{3.5}$$
$$31)\quad y = \frac{2^2}{Q.T^2} = \frac{2^7}{3.5^2}$$
$$22)\quad y = \frac{2^2}{Q^2.T} = \frac{2^6}{3^2.5}$$
$$9)\quad y = \frac{2^2}{Q^2.T^2} = \frac{2^8}{3^2.5^2}$$
$$39)\quad y = \frac{2^3}{Q^3.T} = \frac{2^8}{3^3.5}$$

VII.

$$3)\quad y = \frac{T^2}{Q} = \frac{5^2}{2^3.3}$$
$$17)\quad y = \frac{T^3}{Q} = \frac{5^3}{2^5.3}$$
$$14)\quad y = \frac{Q}{T} = \frac{2.3}{5}$$
$$36)\quad y = \frac{Q^2}{T} = \frac{3^2}{5}$$
$$23)\quad y = \frac{Q^2}{T^2} = \frac{2^2.3^2}{5^2}$$
$$10)\quad y = \frac{Q^2}{T^3} = \frac{2^4.3^2}{5^3}$$
$$32)\quad y = \frac{Q^3}{T^3} = \frac{2^3.3^3}{5^3}$$
$$19)\quad y = \frac{Q^3}{2.T} = \frac{3^3}{2^2.5}$$
$$6)\quad y = \frac{Q^3}{2.T^2} = \frac{3^3}{5^2}$$

VIII.

$$40)\quad y = \frac{2.Q}{T^2} = \frac{2^4.3}{5^2}$$
$$26)\quad y = \frac{2.Q}{T^3} = \frac{2^6.3}{5^3}$$
$$29)\quad y = \frac{2.T}{Q} = \frac{5}{3}$$
$$7)\quad y = \frac{2.T}{Q^2} = \frac{2.5}{3^2}$$
$$20)\quad y = \frac{2.T^2}{Q^2} = \frac{5^2}{2.3^2}$$
$$33)\quad y = \frac{2.T^3}{Q^2} = \frac{5^3}{2^3.3^2}$$
$$11)\quad y = \frac{2.T^3}{Q^3} = \frac{5^3}{2^2.3^3}$$
$$24)\quad y = \frac{2^2.T}{Q^3} = \frac{2^3.5}{3^3}$$
$$37)\quad y = \frac{2^2.T^2}{Q^3} = \frac{2.5^2}{3^3}$$

Man übersieht sogleich, dass die Töne der ersten und zweiten Classe nur von der Quinte, die der dritten und vierten nur von der grossen Terz, die der vier letzten Classen von Quinte und grosser Terz zugleich abhängig sind. Die Producte aus je zweien einander gegenüberstehenden Ausdrücken sind durchgängig $= 2$. Der zweite Ton in diesen Paaren ist also immer ebenso als unterer Ton der Octave benannt wie der erste als oberer Ton des Grundtons.

§ 12.

Wir können aber auch in noch einfacherer Weise das Bildungsgesetz dieser Töne darstellen. Ueberall nämlich wo in den vorstehenden allgemeinen Ausdrücken durch Q und T der Nenner 2 vorkommt, zeigt dies an, dass der entsprechende Ton die untere Octave eines andern Tons ist, dessen Ausdruck durch Weglassung dieses Nenners erhalten wird. Eben so zeigt der Nenner 2^2 an, dass der entsprechende Ton die zweite untere Octave eines Tons ist, dessen Ausdruck durch Weglassung dieses Nenners sich ergiebt. In gleicher Weise zeigen die allgemeinen Ausdrücke, in denen 2 oder 2^2 als Factor des Zählers vorkommt, an, dass die ihnen entsprechenden Töne erste oder zweite obere Octaven von Tönen sind, deren Ausdrücke durch Weglassung dieser Factoren erhalten werden. Man kann also die im vorigen § aufgeführten Töne auf solche zurückführen, deren Ausdrücke nur Q und T ohne Zahlen-Coefficienten oder Zahlen-Nenner enthalten. Aus diesen Tönen ergeben sich also die vorstehenden, wenn man diejenigen unter ihnen, deren relative Schwingungszahlen > 2 sind, je nachdem sie < 4, oder > 4, aber < 8, resp. um eine oder zwei Octaven erniedrigt, diejenigen aber, deren relative Schwingungszahlen < 1 sind, je nachdem sie $> \frac{1}{2}$, oder $< \frac{1}{2}$, aber $> \frac{1}{4}$, resp. um eine oder zwei Octaven erhöht. Diese Töne nun, die wir mit denselben Numern bezeichnen wie die aus ihnen abzuleitenden, lassen sich mit den übrigen der im Vorigen aufgeführten 40 Töne zusammengenommen in folgende acht Classen bringen.

I.

$$25)\ Q = \frac{3}{2}\,; \quad 8)\ Q^2 = \frac{3^2}{2^2}\,; \quad 30)\ Q^3 = \frac{3^3}{2^3}\,.$$

II.

$$18)\ \frac{1}{Q} = \frac{2}{3}\,; \quad 35)\ \frac{1}{Q^2} = \frac{2^2}{3^2}\,; \quad 13)\ \frac{1}{Q^3} = \frac{2^3}{3^3}\,.$$

III.

15) $T = \frac{5}{2^2}$; 27) $T^2 = \frac{5^2}{2^4}$; 41) $T^3 = \frac{5^3}{2^6}$.

IV.

28) $\frac{1}{T} = \frac{2^2}{5}$; 16) $\frac{1}{T^2} = \frac{2^4}{5^2}$; 2) $\frac{1}{T^3} = \frac{2^6}{5^3}$.

V.

38) $Q.T = \frac{3.5}{2^3}$; 21) $Q^2.T = \frac{3^2.5}{2^4}$; 4) $Q^3.T = \frac{3^3.5}{2^5}$;

12) $Q.T^2 = \frac{3.5^2}{2^5}$; 34) $Q^2.T^2 = \frac{3^2.5^2}{2^6}$.

VI.

5) $\frac{1}{Q.T} = \frac{2^3}{3.5}$; 22) $\frac{1}{Q^2.T} = \frac{2^4}{3^2.5}$; 39) $\frac{1}{Q^3.T} = \frac{2^5}{3^3.5}$;

31) $\frac{1}{Q.T^2} = \frac{2^5}{3.5^2}$; 9) $\frac{1}{Q^2.T^2} = \frac{2^6}{3^2.5^2}$.

VII.

14) $\frac{Q}{T} = \frac{2.3}{5}$; 40) $\frac{Q}{T^2} = \frac{2^3.3}{5^2}$; 26) $\frac{Q}{T^3} = \frac{2^5.3}{5^3}$;

36) $\frac{Q^2}{T} = \frac{3^2}{5}$; 23) $\frac{Q^2}{T^2} = \frac{2^2.3^2}{5^2}$; 10) $\frac{Q^2}{T^3} = \frac{2^4.3^2}{5^3}$;

19) $\frac{Q^3}{T} = \frac{3^3}{2.5}$; 6) $\frac{Q^3}{T^2} = \frac{2.3^3}{5^2}$; 32) $\frac{Q^3}{T^3} = \frac{2^3.3^3}{5^3}$.

VIII.

29) $\frac{T}{Q} = \frac{5}{2.3}$; 7) $\frac{T}{Q^2} = \frac{5}{3^2}$; 24) $\frac{T}{Q^3} = \frac{2.5}{3^3}$;

3) $\frac{T^2}{Q} = \frac{5^2}{2^3.3}$; 20) $\frac{T^2}{Q^2} = \frac{5^2}{2^2.3^2}$; 37) $\frac{T^2}{Q^3} = \frac{5^2}{2.3^3}$;

17) $\frac{T^3}{Q} = \frac{5^3}{2^5.3}$; 33) $\frac{T^3}{Q^2} = \frac{5^3}{2^4.3^2}$; 11) $\frac{T^3}{Q^3} = \frac{5^3}{2^3.3^3}$.

§ 13.

Die Eigenthümlichkeit der Bildung jeder dieser acht Classen lässt sich, wie folgt, näher bezeichnen. In I werden die Töne von der Prime aus durch Aufsteigen, in II durch Herabsteigen nach Quinten bestimmt. In III ergeben sich die Töne ebenfalls von der Prime aus durch Aufsteigen, in IV durch Herabsteigen nach grossen Terzen. Die Töne der Classen I und II sind also nur von der relativen Schwingungszahl der Quinte, die der Classen III und IV nur von der der grossen Terz abhängig. Die Töne in V entstehen sowohl, wenn man von jedem Ton in III nach Quinten, als wenn man von jedem

Ton in I nach grossen Terzen aufsteigt. Die Töne in VI entstehen sowohl, wenn man von jedem Ton in IV nach Quinten, als wenn man von jedem Ton in II nach grossen Terzen herabsteigt. Die Töne in VII ergeben sich sowohl, wenn man von jedem Ton in IV nach Quinten auf-, als wenn man von jedem Ton in I nach grossen Terzen herabsteigt. Die Töne in VIII endlich ergeben sich sowohl, wenn man von jedem Ton in III nach Quinten herab-, als wenn man von jedem Ton in II nach grossen Terzen aufsteigt. Im Uebrigen erhellt von selbst, dass die sich der Reihe nach entsprechenden Töne der Classen I und II, III und IV, V und VI, VII und VIII reciproke Schwingungszahlen haben.

Es leuchtet ferner ein, dass in jeder dieser Classen die Bildung von Tönen ins Unbegrenzte geht, und zwar in I bis IV nur nach einer, in V bis VIII aber nach zwei Richtungen. Denn die ersten vier Classen stellen nur einfache Reihen, die übrigen aber Reihen von Reihen dar. Es ist leicht, das allgemeine Glied jeder dieser einfachen Reihen und Doppelreihen darzustellen. Es findet sich nämlich

$$\begin{array}{llll}
\text{für I,} & Q^m = \frac{3^m}{2^m}\,; & \text{für V,} & Q^m . T^n = \frac{3^m . 5^n}{2^{m+2n}}\,; \\
\text{für II,} & \frac{1}{Q^m} = \frac{2^m}{3^m}\,; & \text{für VI,} & \frac{1}{Q^m . T^n} = \frac{2^{m+2n}}{3^m . 5^n}\,; \\
\text{für III,} & T^n = \frac{5^n}{2^{2n}}\,; & \text{für VII,} & \frac{Q^m}{T^n} = \frac{2^{2n-m} . 3^m}{5^n}\,; \\
\text{für IV,} & \frac{1}{T^n} = \frac{2^{2n}}{5^n}\,; & \text{für VIII,} & \frac{T^n}{Q^m} = \frac{5^n}{2^{2n-m} . 3^m}\,.
\end{array}$$

Hieraus ergiebt sich die wichtige Folge, dass, wie weit man auch in der Bestimmung von den Tönen nach dem angegebenen Bildungsgesetz gehen möge, man doch niemals auf eine obere oder untere Octave eines nach demselben Gesetz bestimmten Tons kommt. Denn da die relative Schwingungszahl der k-ten Octave irgend eines Tons, dessen relative Schwingungszahl $= a$, durch $2^k . a$ ausgedrückt wird, so wäre es nur denkbar, dass Töne der Classen II, IV, VI, VII (wenn $2n > m$) und VIII (wenn $2n < m$) obere Octaven andrer, nach demselben Bildungsgesetz bestimmter Töne wären. Giebt man nun den allgemeinen Gliedern dieser Classen der Reihe nach die Formen k-ter Octaven, nämlich

$$2^k . \frac{2^{m-k}}{3^m}\,; \quad 2^k . \frac{2^{2n-k}}{5^n}\,; \quad 2^k . \frac{2^{m+2n-k}}{3^m . 5^n}\,; \quad 2^k . \frac{2^{2n-m-k} . 3^m}{5^n}\,; \quad 2^k . \frac{5^n}{2^{2n-m+k} . 3^m}\,;$$

so müsste es in den acht Classen Töne geben, deren Schwingungszahlen die Formen

$$\frac{2^{m-k}}{3^m}\,,\quad \frac{2^{2n-k}}{5^n}\,,\quad \frac{2^{m+2n-k}}{3^m\,.\,5^n}\,,\quad \frac{2^{2n-m-k}\,.\,3^m}{5^n}\,,\quad \frac{5^n}{2^{2n-m+k}\,.\,3^m}$$

haben, was nicht der Fall ist, wie die Vergleichung mit den angegebenen Formen der allgemeinen Glieder lehrt. Auf ganz ähnliche Weise lässt sich leicht erweisen, dass eben so wenig ein nach dem angegebenen Bildungsgesetz bestimmter Ton irgend eine untere Octave eines andern seyn kann. Hieraus folgt, dass in der ganzen Reihe der so bestimmten Töne keine Periodicität statt findet. Man kann jedoch jeden erhaltenen Ton um 1, 2, 3 . . . Octaven erhöhen und erniedrigen, und hierdurch zwischen je zwei nächsten Octaven, mögen sie hoch oder tief liegen, immer gleich viele Töne bestimmen, die zu den sie einschliessenden Octaven in denselben Verhältnissen stehen.

Endlich ist auch leicht zu ersehen, dass kein Ton der einen Classe mit einem Ton einer andern Classe zusammenfallen kann. Denn es müsste dann entweder $\frac{3^m}{2^m} = \frac{5^n}{2^{2n}}$, d. i. wenn $2n > m$, $3^m\,.\,2^{2n-m} = 5^n$, wenn $2n < m$, $3^m = 2^{m-2n}\,.\,5^n$, oder $\frac{3^m\,.\,5^n}{2^{m+2n}} = \frac{2^{2n-m}\,.\,3^m}{5^n}$, d. i. $5 = 2^2$ seyn, was beides unmöglich ist.

II.

BESTIMMUNG DER TONINTERVALLE.

§ 14.

Das musikalische Gehör unterscheidet die Höhe der Töne weder nach dem geometrischen noch nach den arithmetischen Verhältnissen ihrer Schwingungszahlen. Denn angenommen das Erste, so müsste das Ohr die Höhe der Octave doppelt, die der Quinte $\frac{3}{2}$mal, die der Quarte $\frac{4}{3}$mal so gross als die der Prime finden u. s. f., was nicht der Fall und überhaupt eine dem Gehör ganz fremde Art der Schätzung der Töne ist. Angenommen das Zweite, so sind, wenn α die absolute Schwingungszahl des Grundtons, die absoluten Schwingungszahlen seiner 1sten, 2ten, 3ten ...... $(n-1)$ten, $n$ten Octave der Reihe nach 2α, 4α, 8α ..... $2^{n-1}\alpha$, $2^n\alpha$. Dann müsste dem Gehör der Unterschied zwischen der 1sten und 2ten Octave 2mal, der zwischen der 2ten und 3ten 4mal, der zwischen der $(n-1)$ten und $n$ten Octave 2^{n-1}mal so gross erscheinen als der Unterschied zwischen der ersten Octave und dem Grundton; es müsste das Gehör nach denselben Verhältnissen zwischen je zwei nächsten Octaven um so mehr Töne unterscheiden, je höher dieselben liegen, indess es doch zwischen denselben, wie hoch oder tief sie liegen mögen, nur immer dieselben Tonunterschiede, nicht mehr und nicht weniger empfindet. Allerdings aber unterscheidet es Differenzen der Töne, die sich auf ihre verschiedenen Höhen beziehen, nur sind dieselben nicht die ihrer Schwingungszahlen, obwohl diese ihre Höhe bestimmen. Heissen nun diese Differenzen die Intervalle der Töne, und wird hierbei der Grundton als derjenige Ton angesehen, in Beziehung auf welchen die Verschiedenheit der übrigen Töne durch Zahlen bestimmt werden soll, so fragt es sich, auf welche Weise dies geschehen muss, und in welchem Zusammenhang diese Zahlenbestimmungen der Intervalle mit den Schwingungszahlen stehen.

§ 15.

Hierauf giebt nun folgende Betrachtung Antwort. Die relativen Schwingungszahlen der successiven Octaven irgend eines angenommenen Grundtons bilden mit diesem die geometrische Reihe

$$2^0, \; 2^1, \; 2^2, \; 2^3, \ldots\ldots 2^n,$$

die Exponenten der Glieder derselben die arithmetische Reihe

$$0, \; 1, \; 2, \; 3, \ldots\ldots n.$$

Ist nun, wie bisher, y die relative Schwingungszahl irgend eines zwischen dem Grundton und seiner ersten Octave liegenden Tons, so kann man sich dieselbe als eine Potenz von 2 vorstellen, deren Exponent x zwischen 0 und 1 liegen muss, so dass also

$$y = 2^x, \tag{1}$$

woraus folgt

$$x = \frac{\log y}{\log 2}. \tag{2}$$

Bedient man sich der gemeinen Briggischen Logarithmen, so ist $\log 2 = 0{,}30103$, daher dann

$$x = 3{,}32190 \,.\, \log y. \tag{3}$$

Bedient man sich aber solcher Logarithmen, deren Basis $= 2$, so wird $\log_2 2 = 1$, daher dann

$$x = \log_2 y. \tag{4}$$

Da die relativen Schwingungszahlen der Töne, die um $1, 2, 3, \ldots n$ Octaven höher liegen, der Reihe nach $2y$, 2^2y, 2^3y, ... 2^ny sind, so ergiebt sich aus der Gleichung (1)

$$2^n y = 2^{x+n},$$

woraus folgt

$$x + n = \frac{\log(2^n y)}{\log 2} = \log_2(2^n y). \tag{5}$$

Eben so folgt für die Töne, welche um 1, 2, 3, ... n Octaven tiefer liegen als der Ton, den y bezeichnet, und deren relative Schwingungszahlen also der Reihe nach $\frac{y}{2}, \frac{y}{2^2}, \frac{y}{2^3}, \ldots \frac{y}{2^n}$ sind,

$$\frac{y}{2^n} = 2^{x-n},$$

daher

$$x - n = \frac{\log\left(\frac{y}{2^n}\right)}{\log 2} = \log_2\left(\frac{y}{2^n}\right). \tag{6}$$

Es kann also mittels der Formeln (2) bis (6) für jeden Ton, dessen relative Schwingungszahl gegeben ist, zwischen welchen Octaven des Grundtons er liegen möge, der Exponent x von 2 gefunden werden, der eine dieser Schwingungszahl gleiche Potenz giebt.

Sey nun die relative Schwingungszahl eines Tons, der höher liegt als der durch y gegebene, $= y'$, der Exponent von 2, der eine dem Werthe von y' gleiche Potenz giebt, $= x'$, so ist nach dem Vorstehenden

$$y' = 2^{x'}, \quad x' = \log_2 y';$$

daher

$$\frac{y'}{y} = 2^{x'-x}; \tag{7}$$

$$x' - x = \log_2 \left(\frac{y'}{y}\right). \tag{8}$$

Offenbar wird $x' - x = 1$, wenn $y' = 2y$, also der zweite Ton die Octave des ersten; es wird $\gtrless 1$, je nachdem $y' \gtrless 2y$. Diese Differenz $x' - x = \log_2 y' - \log_2 y$, also die Differenz der Logarithmen der relativen Schwingungszahlen y', y bestimmt nun, wie sich sogleich deutlicher zeigen wird, die Grösse des Intervalls zwischen den beiden durch y, y' gegebenen Tönen.

§ 16.

Die Musik misst bekanntlich die Grösse der Intervalle der Töne, deren sie sich bedient, nach Zwölfteln der Octave ab, die sie halbe Töne nennt. Wir können nun untersuchen, wie weit diese Bestimmung mit der gegebenen logarithmischen zusammentrifft. Die Töne, welche die Musik, wenigstens auf den Tasteninstrumenten, ausschliesslich verwendet, sind die Prime, kleine und grosse Secunde, kleine und grosse Terz, Quarte, (grössere) übermässige Quarte, Quinte, kleine und grosse Sexte, (kleinere) kleine Septime, grosse Septime und Octave, also die Töne, deren relative Schwingungszahlen in § 9 unter Nr. 1, 5, 8, 14, 15, 18, 21, 25, 28, 29, 35, 38 und 42 angegeben sind. Berechnen wir nun nach der Formel (3) im vorigen § die Werthe ihrer Intervalle x mit dem Grundton, stellen diese mit den Werthen x_1 nach Zwölfteln der Octave zusammen und bemerken endlich die Unterschiede beider Werthe, so ergiebt sich folgende Tabelle:

	x	x_1	$x - x_1$
Prime	0,00000	$0 = 0,00000$	0,00000
kleine Secunde	0,09311	$\frac{1}{12} = 0,08333$	0,00978
grosse Secunde	0,16992	$\frac{2}{12} = 0,16667$	0,00325
kleine Terz	0,26303	$\frac{3}{12} = 0,25000$	0,01303
grosse Terz	0,32193	$\frac{4}{12} = 0,33333$	— 0,01140
Quarte	0,41504	$\frac{5}{12} = 0,41667$	— 0,00163
übermässige Quarte	0,49186	$\frac{6}{12} = 0,50000$	— 0,00814
Quinte	0,58496	$\frac{7}{12} = 0,58333$	0,00163
kleine Sexte	0,67807	$\frac{8}{12} = 0,66667$	0,01140
grosse Sexte	0,73697	$\frac{9}{12} = 0,75000$	— 0,01303
kleine Septime	0,83008	$\frac{10}{12} = 0,83333$	— 0,00325
grosse Septime	0,90689	$\frac{11}{12} = 0,91667$	— 0,00978
Octave	1,00000	$1 = 1,00000$	0,00000

§ 17.

Um zuvörderst diese Differenzen unter $x - x_1$ auf ein fasslicheres Mass zurückzuführen, können wir sie in Theilen der reinen grossen Secunde oder des grossen ganzen Tons, dessen Intervall $= 0,16992$, ausdrücken. Alsdann ergiebt sich

für die	$\underbrace{x - x_1}$
kleine Secunde, grosse Septime	$\pm \frac{1}{17,4}$ grosser ganzer Ton
grosse Secunde, kleine Septime	$\pm \frac{1}{52,1}$,, ,, ,,
kleine Terz, grosse Sexte	$\pm \frac{1}{13}$,, ,, ,,
grosse Terz, kleine Sexte	$\mp \frac{1}{14,9}$,, ,, ,,
Quarte, Quinte	$\mp \frac{1}{103,6}$,, ,, ,,
übermässige Quarte	$- \frac{1}{20,9}$,, ,, ,,

Diese Differenzen sind jedoch weder Abweichungen der Theorie von der Erfahrung, noch zeigen sie eine unvollkommene musikalische

Schätzung der Intervalle an, sondern sie beruhen darauf, dass, wo in der Musik die Messung der Intervalle durch Zwölftel der Octave in aller Strenge richtig ist, die relativen Schwingungszahlen der Töne von den einfachen rationalen Schwingungsverhältnissen in der That abweichen, daher die Töne nicht mehr akustisch reine sind. Wir können die relativen Schwingungszahlen, die ihnen dann zukommen, leicht berechnen. Aus § 15 (2) folgt nämlich, wenn man $x = \frac{m}{12}$ setzt,

$$\log y_1 = 0{,}3010300 \,.\, \frac{m}{12} = 0{,}0250858 \,.\, m$$

Giebt man nun m successiv die Werthe 1, 2, 3, ... 11, so erhält man die folgenden Werthe von y_1, denen wir zur Vergleichung die obengefundenen reinen relativen Schwingungszahlen gegenüberstellen, und die wir zugleich in den irrationalen (genäherten) Verhältnisszahlen ausdrücken, die dann an die Stelle der rationalen Verhältnisse treten.

	y	y_1
kleine Secunde	$\frac{16}{15} = 1{,}06667$	$1{,}05946 = \frac{15{,}89190}{15}$
grosse Secunde	$\frac{9}{8} = 1{,}12500$	$1{,}12246 = \frac{8{,}97968}{8}$
kleine Terz	$\frac{6}{5} = 1{,}20000$	$1{,}18921 = \frac{5{,}94605}{5}$
grosse Terz	$\frac{5}{4} = 1{,}25000$	$1{,}25992 = \frac{5{,}03968}{4}$
Quarte	$\frac{4}{3} = 1{,}33333$	$1{,}33484 = \frac{4{,}00452}{3}$
übermässige Quarte	$\frac{45}{32} = 1{,}40625$	$1{,}41421 = \frac{45{,}25472}{32}$
Quinte	$\frac{3}{2} = 1{,}50000$	$1{,}49831 = \frac{2{,}99662}{2}$
kleine Sexte	$\frac{8}{5} = 1{,}60000$	$1{,}58740 = \frac{7{,}93700}{5}$
grosse Sexte	$\frac{5}{3} = 1{,}66667$	$1{,}68179 = \frac{5{,}04537}{3}$
kleine Septime	$\frac{16}{9} = 1{,}77778$	$1{,}78180 = \frac{16{,}03620}{9}$
grosse Septime	$\frac{15}{8} = 1{,}87500$	$1{,}88775 = \frac{15{,}10200}{8}$

§ 18.

Wir wollen jetzt für sämmtliche in § 9 bestimmte Töne die Grösse ihrer Intervalle mit dem Grundton berechnen. Dies kann auf sehr einfache Weise geschehen, wenn wir die in § 10 aufgefundenen Ausdrücke der relativen Schwingungszahlen sämmtlicher Töne durch diejenigen der Quinte und grossen Terz benutzen. Alle jene Ausdrücke sind nämlich unter der allgemeinen Form

$$y = 2^m \,.\, Q^n \,.\, T^p$$

enthalten, wo m, n, p theils positive, theils negative ganze Zahlen, theils Null sind. Hieraus folgt nun als allgemeiner Ausdruck des Intervalls x zwischen dem durch y bestimmten Ton und dem Grundton

$$x = \frac{\log y}{\log 2} = m + n \cdot \frac{\log Q}{\log 2} + p \cdot \frac{\log T}{\log 2},$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\frac{\log Q}{\log 2} = q$ und $\frac{\log T}{\log 2} = t$ setzen, wo also q und t die Intervalle der Quinte und der grossen Terz mit dem Grundton bezeichnen,

$$x = m + nq + pt.$$

Hierdurch ergiebt sich nun, wenn man die jedem Ton zukommenden Werthe vom m, n und p setzt und dabei, zur Erlangung grösserer Schärfe, die Werthe $q = 0{,}5849625$ und $t = 0{,}3219281$ zum Grunde legt, folgende Tabelle der Intervalle, in welcher je zwei gleich weit vom Anfang und Ende abstehende (deren Numern also die Summe 43 geben) einander zum Octavenintervall ergänzen, indem ihre Summe $= 1$ ist.

		x	
1)	Prime,	0	$= 0{,}00000$
2)	kleine Diesis,	$1 - 3t$	$= 0{,}03422$
3)	übermässige Prime,	$2t - q$	$= 0{,}05889$
4)	kleines Limma,	$3q + t - 2$	$= 0{,}07682$
5)	kleine Secunde,	$1 - q - t$	$= 0{,}09311$
6)	grosses Limma,	$3q - 2t - 1$	$= 0{,}11103$
7)	kleiner ganzer Ton,	$1 - 2q + t$	$= 0{,}15200$
8)	grosse Secunde,	$2q - 1$	$= 0{,}16992$
9)	kleinere verminderte Terz,	$2 - 2q - 2t$	$= 0{,}18622$
10)	grössere verminderte Terz,	$2q - 3t$	$= 0{,}20414$
11)	kleinere übermässige Secunde,	$1 - 3q + 3t$	$= 0{,}21090$
12)	grössere übermässige Secunde,	$q + 2t - 1$	$= 0{,}22882$
13)	alterirte kleine Terz,	$2 - 3q$	$= 0{,}24511$
14)	kleine Terz,	$q - t$	$= 0{,}26303$
15)	grosse Terz,	t	$= 0{,}32193$
16)	verminderte Quarte,	$1 - 2t$	$= 0{,}35614$
17)	übermässige Terz,	$3t - q$	$= 0{,}38082$
18)	Quarte,	$1 - q$	$= 0{,}41504$
19)	alterirte Quarte,	$3q - t - 1$	$= 0{,}43296$
20)	kleinere übermässige Quarte,	$1 - 2q + 2t$	$= 0{,}47393$
21)	grössere übermässige Quarte,	$2q + t - 1$	$= 0{,}49185$

		x
22)	kleinere verminderte Quinte,	$2-2q-t = 0{,}50845$
23)	grössere verminderte Quinte,	$2q-2t = 0{,}52607$
24)	alterirte Quinte,	$2-3q+t = 0{,}56704$
25)	Quinte,	$q = 0{,}58496$
26)	verminderte Sexte,	$1+q-3t = 0{,}61918$
27)	übermässige Quinte,	$2t = 0{,}64386$
28)	kleine Sexte,	$1-t = 0{,}67807$
29)	grosse Sexte,	$1-q+t = 0{,}73697$
30)	alterirte grosse Sexte,	$3q-1 = 0{,}75489$
31)	kleinere verminderte Septime,	$2-q-2t = 0{,}77118$
32)	grössere verminderte Septime,	$3q-3t = 0{,}78910$
33)	kleinere übermässige Sexte,	$1-2q+3t = 0{,}79586$
34)	grössere übermässige Sexte,	$2q+2t-1 = 0{,}81378$
35)	kleinere kleine Septime,	$2-2q = 0{,}83008$
36)	grössere kleine Septime,	$2q-t = 0{,}84800$
37)	alterirte grosse Septime,	$2-3q+2t = 0{,}88897$
38)	grosse Septime,	$q+t = 0{,}90689$
39)	kleinere verminderte Octave,	$3-3q-t = 0{,}92318$
40)	grössere verminderte Octave,	$1+q-2t = 0{,}94111$
41)	alterirte Octave,	$3t = 0{,}96578$
42)	Octave,	$1 = 1{,}00000$

§ 19.

Die theoretische Musik bedient sich noch andrer kleiner Intervalle als der kleinsten unter den hier bestimmten und nennt sie Kommata.*) Obgleich wir ihrer ganz entbehren können, da man ganz einfach eine anschauliche Vorstellung von der Grösse eines Intervalls erhält, wenn man es nach Theilen des grossen ganzen Tons (der reinen grossen Secunde) bestimmt, wovon wir in § 17 bereits Gebrauch gemacht haben, so mögen doch, um die Vergleichung mit manchen Angaben der älteren Theoretiker zu erleichtern, hier einige der am meisten gebrauchten erwähnt und in Theilen der Octave und des grossen ganzen Tons bestimmt werden.

*) Zu ihnen gehören auch schon das grosse und kleine Limma und die kleine Diesis.

1) Das Komma der Alten, der neunte Theil des ganzen Tons, also $= 0{,}01888$ der Octave; es wird eingetheilt in zwei Schismata; ein Schisma ist also $= 0{,}00944$ der Octave.

2) Das syntonische Komma, das Intervall zwischen dem kleinen ganzen Ton und der grossen Secunde, wofür $x = 4q - t - 2$ $= 0{,}01792 = \frac{1}{9{,}4}$ grosser ganzer Ton. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl $y = \frac{Q^4}{2^2 . T} = \frac{3^4}{2^4 . 5} = \frac{81}{80} = 1{,}01250$.

3) Die grosse Diesis, das Intervall zwischen dem syntonischen Komma und der übermässigen Prime, wofür $x = 3t - 5q + 2 = 0{,}04097$ $= \frac{1}{4{,}1}$ grosser ganzer Ton. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl $y = \frac{2^2 . T^3}{Q^5} = \frac{2 . 5^3}{3^5} = \frac{250}{243} = 1{,}02881$.

4) Der diatonische halbe Ton, das Intervall zwischen dem syntonischen Komma und der kleinen Secunde, daher $x = 3 - 5q$ $= 0{,}07519 = \frac{1}{2{,}3}$ grosser ganzer Ton. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl $y = \frac{2^8}{Q^5} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243} = 1{,}05350$.

5) Der verminderte kleine halbe Ton (übermässige Prime), das Intervall zwischen der kleinen Diesis und der übermässigen Prime, daher $x = 5t - q - 1 = 0{,}02468 = \frac{1}{6{,}9}$ grosser ganzer Ton; wozu die relative Schwingungszahl $y = \frac{T^5}{2Q} = \frac{5^5}{3 . 2^{10}} = \frac{3125}{3072} = 1{,}01696$ gehört.

6) Der Drittheilston, das Intervall zwischen der grossen Diesis und der kleinen Secunde, daher $x = 4q - 4t - 1 = 0{,}05214 = \frac{1}{3{,}3}$ grosser ganzer Ton; wozu die relative Schwingungszahl $y = \frac{Q^2}{2 . T^4} = \frac{2^3 . 3^4}{5^4}$ $= \frac{648}{625} = 1{,}03680$ gehört.

Auf das ditonische oder pythagorische Komma werden wir an einer späteren Stelle kommen.

§ 20.

Es mag nicht unbemerkt bleiben, dass man auch ohne Logarithmen wenigstens zu einer genäherten Bestimmung der Intervalle gelangen kann. Für sehr nahe liegende Töne ist nämlich das Intervall proportional dem um 1 verminderten Quotienten aus der (relativen oder absoluten) Schwingungszahl des niedrigeren Tons in die des höheren. Denn setzt man in §15, (8) $y' = y + y' - y$, so wird $x' - x = \log_2 \left(1 + \frac{y' - y}{y}\right)$.

Ist nun $\frac{y'-y}{y}$ so klein, dass seine Potenzen vernachlässigt werden können, so wird*)

$$x' - x = \frac{1}{\log \text{nat } 2} \cdot \frac{y'-y}{y} = 1{,}44269 \cdot \frac{y'-y}{y};$$

woraus erhellt, dass $x' - x$ proportional $\frac{y'}{y} - 1$ ist. Nach dieser Formel wird z. B. gefunden: das Intervall der kleinen Secunde mit dem Grundton, für welches $\frac{y'-y}{y} = \frac{1}{15}$, 0,09618 anstatt 0,09311; das der übermässigen Prime, wo $\frac{y'-y}{y} = \frac{1}{25}$, 0,05770 anstatt 0,05889; das der kleinen Diesis, wo $\frac{y'-y}{y} = \frac{3}{128}$, 0,03350 statt 0,03422; das syntonische Komma, für welches $\frac{y'-y}{y} = \frac{1}{81}$, 0,01781 statt 0,01792 u. s. f. Genauer können wir aus der Proportionalität von $x' - x$ zu $\frac{y'}{y} - 1$ in folgender Weise die Intervalle der in § 16 aufgeführten Haupttöne mit dem Grundton bestimmen. Es ist

für das Intervall zwischen	$\frac{y'}{y} - 1$
Prime und kleiner Secunde,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Secunde und grosser Secunde,	$\frac{7}{128} = 0{,}05469$
grosser Secunde und kleiner Terz,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Terz und grosser Terz,	$\frac{1}{24} = 0{,}04167$
grosser Terz und Quarte,	$\frac{7}{15} = 0{,}06667$
Quarte und übermässiger Quarte,	$\frac{7}{128} = 0{,}05469$
übermässiger Quarte und Quinte,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
Quinte und kleiner Sexte,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Sexte und grosser Sexte,	$\frac{1}{24} = 0{,}04167$
grosser Sexte und kleiner Septime,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Septime und grosser Septime,	$\frac{7}{128} = 0{,}05469$
grosser Septime und Octave,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$

Die Summe aller dieser Werthe ist = 0,71410. Macht man dieselbe, da sie offenbar dem Intervall zwischen Prime und Octave entspricht, zur Einheit und drückt die obigen successiven Intervalle in Theilen dieser Einheit aus, so sind ihre Werthe folgende:

---

*) Wie sich auch unmittelbar durch Differentiation der Formel $x = \frac{\lg n\, y}{\lg n\, 2}$ ergiebt, wenn man $dx = x' - x$ und $dy = y' - y$ setzt.

0,09336; 0,07659; 0,09336; 0,05835; 0,09336; 0,07659;
0,09336; 0,09336; 0,05835; 0,09336; 0,07659; 0,09336.

Bildet man nun successiv die Summen der 2, 3, 4, ... 11 ersten von diesen zwölf Werthen, so erhält man, mit Wiederholung des ersten Werthes der Reihe, folgende Zahlen:

0,09336; 0,16995; 0,26331; 0,32166; 0,41502; 0,49161;
0,58497; 0,67833; 0,73668; 0,83004; 0,90663,

die in der That die Intervalle der kleinen und grossen Secunde, kleinen und grossen Terz, Quarte, übermässigen Quarte, Quinte, kleinen und grossen Sexte, kleinen und grossen Septime theils bis auf drei, theils bis auf vier Decimalen richtig darstellen.

§ 21.

Seyen z, z' die absoluten Schwingungszahlen der Töne, deren relative y, y', und deren Intervalle mit dem Grundton x, x' sind. Da nun $\frac{z'}{z} = \frac{y'}{y}$, so ist nach der im vorigen § angewandten Formel auch

$$x' - x = \log_2 \left(1 + \frac{z' - z}{z}\right),$$

oder, wenn wir $x' - x = \varDelta x$ und $z' - z = \varDelta z$ setzen,

$$\varDelta x = \frac{\log\left(1 + \frac{\varDelta z}{z}\right)}{\log 2}.$$

Diese Formel giebt an, um wie viel sich im Verhältniss zum Intervall der Octave das Intervall x eines Tones, dessen absolute Schwingungszahl $= z$, ändert, wenn sich diese Schwingungszahl um $\varDelta z$ ändert. Um die Aenderung des Intervalls x in Theilen des Intervalls des grossen ganzen Tons zu erhalten, sey $\varDelta x = n \,.\, \frac{\log \frac{9}{8}}{\log 2}$, wo also n das Verhältniss der Aenderung von x zum Intervall des grossen ganzen Tons ausdrückt; alsdann wird

$$n = \frac{\log\left(1 + \frac{\varDelta z}{z}\right)}{\log 9 - \log 8} = 19{,}54994 \,.\, \log\left(1 + \frac{\varDelta z}{z}\right). \qquad (1)$$

Umgekehrt ergiebt sich hieraus

$$\log\left(1 + \frac{\varDelta z}{z}\right) = 0{,}05115 \,.\, n. \qquad (2)$$

Nach dieser Formel ist folgende Tabelle berechnet.

n	$\frac{\Delta z}{z}$		
0,1	0,01185	nahe	$\frac{1}{84,4}$
0,2	0,02384	,,	$\frac{1}{42,6}$
0,25	0,02988	,,	$\frac{1}{33,5}$
0,3	0,03596	,,	$\frac{1}{27,8}$
0,4	0,04824	,,	$\frac{1}{20,7}$
0,5	0,06066	,,	$\frac{1}{16,5}$
0,6	0,07320	,,	$\frac{1}{13,7}$
0,7	0,08594	,,	$\frac{1}{11,6}$
0,75	0,09235	,,	$\frac{1}{10,8}$
0,8	0,09880	,,	$\frac{1}{10,1}$
0,9	0,11182	,,	$\frac{1}{8,9}$
1	0,12500	=	$\frac{1}{8}$

Wenn also die Zahl der Schwingungen eines Tons sich um ihren achten Theil vermehrt, so erhöht sich der Ton um eine grosse Secunde, wenn sie sich aber um $\frac{1}{84,4}$ vermehrt, so erhöht sich der Ton um $\frac{1}{10}$ der grossen Secunde. Die folgende Tabelle enthält eine Reihe kleinerer Werthe, von denen nur der erste nach der Formel berechnet ist, die übrigen nach einfacher Proportion aus ihm abgeleitet sind.

n	$\frac{\Delta z}{z}$		
$\frac{1}{15}$	0,00789	nahe	$\frac{1}{127}$
$\frac{1}{20}$	0,00592	,,	$\frac{1}{169}$
$\frac{1}{25}$	0,00474	,,	$\frac{1}{209}$
$\frac{1}{30}$	0,00395	,,	$\frac{1}{253}$
$\frac{1}{35}$	0,00338	,,	$\frac{1}{296}$
$\frac{1}{40}$	0,00296	,,	$\frac{1}{338}$
$\frac{1}{45}$	0,00263	,,	$\frac{1}{380}$
$\frac{1}{50}$	0,00237	,,	$\frac{1}{422}$
$\frac{1}{60}$	0,00197	,,	$\frac{1}{508}$
$\frac{1}{70}$	0,00169	,,	$\frac{1}{592}$
$\frac{1}{80}$	0,00148	,,	$\frac{1}{676}$
$\frac{1}{90}$	0,00132	,,	$\frac{1}{758}$
$\frac{1}{100}$	0,00118	,,	$\frac{1}{847}$

Das $\bar{a}$ unsrer Stimmgabeln macht im Mittel 880 Schwingungen, folglich das reine $\bar{g}$, wie sich ergiebt, wenn man mit $\frac{9}{10}$ multiplicirt, 792 Schwingungen. Das $\bar{g}$ der Tasteninstrumente aber soll, wie in § 16 gezeigt wurde, um $\frac{1}{103,6}$ des ganzen Tons tiefer stehen. Setzt man daher in der Formel (2) $n = \frac{1}{103,6}$, so ergiebt sich $\frac{\Delta z}{z} = 0{,}001137$, daher $\Delta z = 0{,}900504$; folglich muss das $\bar{g}$ der Tasteninstrumente, genau gestimmt, $\frac{9}{10}$ einer Schwingung weniger machen als das reine $\bar{g}$. Das reine $\bar{e}$ macht, wie sich ergiebt, wenn man 880 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, 660 Schwingungen. Das $\bar{e}$ der Tasteninstrumente soll aber um $\frac{1}{14,9}$ ganzen Ton höher stehen. Die Formel (2) giebt $\frac{\Delta z}{z} = 0{,}007936$, daher $\Delta z = 5{,}23776$; folglich muss das $\bar{e}$ der Tasteninstrumente nahe $5\frac{1}{4}$ Schwingungen mehr machen als das reine $\bar{e}$.*)

*) Nach Delezenne's Versuchen (s. die oben angeführte Abhandlung im *Recueil des travaux de la soc. des sc. de Lille p. 5 ff.*) vermag das feinste musikalische Gehör noch zwei Töne zu unterscheiden, die nur um 0,2807 des syntonischen Komma's differiren, wenn diese Töne nicht gleichzeitig, sondern wechselsweise gehört werden. Diese Differenz ist $= 0{,}00503$ der Octave oder $= \frac{1}{33,8}$ des ganzen Tons und entspricht dem 287sten Theil der Schwingungszahl des tieferen Tons. Nach demselben unterscheidet

§ 22.

Die durch die Intervalle ausgedrückten Unterschiede der Töne lassen sich auf eine dem Gefühlseindruck, den sie machen, entsprechende Weise versinnlichen. Denkt man sich nämlich das Intervall 1 der Octave mit dem Grundton als den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser also $= \frac{1}{2\pi} = 0{,}15915$ seyn muss, so werden alle übrigen Intervalle Bogen dieses Kreises, deren zugehörige Mittelpunktswinkel sich leicht bestimmen lassen. Denn offenbar ist, wenn der dem Intervall x entsprechende Winkel $= w$,

$$360^0 : w = 1 : x; \quad \text{also } w = x \,.\, 360^0.$$

Hiernach ergeben sich für die dreizehn Hauptintervalle folgende Werthe von w, denen wir unter w' die Werthe beifügen, die den durch Zwölftel der Octave ausgedrückten Intervallen der Tasteninstrumente entsprechen.

	w	w'
1) Prime	0° 0′	0°
2) kleine Secunde	33° 31′	30°
3) grosse Secunde	61° 10′	60°
4) kleine Terz	94° 10′	90°
5) grosse Terz	115° 53′	120°
6) Quarte	149° 24′	150°
7) übermässige Quarte	177° 42′	180°
8) Quinte	210° 36′	210°
9) kleine Sexte	244° 7′	240°
10) grosse Sexte	265° 19′	270°
11) kleine Septime	298° 50′	300°
12) grosse Septime	326° 29′	330°
13) Octave	360° 0′	360°

---

dagegen das ungeübte Ohr genau nur die Hälfte dieser Differenz oder $\frac{1}{16,9}$ ganzen Ton. Der Unterschied zweier gleichzeitig gehörter Töne wird bemerkbar, wenn er 0,84 Komma $= \frac{1}{11,3}$ ganzer Ton beträgt, was dem 96sten Theil der Schwingungszahl des tieferen Tons entspricht; er ist mehr als evident bei 1,11 Komma $= \frac{1}{8,5}$ ganzer Ton oder $\frac{1}{64}$ der Schwingungszahl. Grösser ist die Reizbarkeit des Ohrs bei consonirenden Tönen. Das feine Gehör der Musiker unterschied bei Delezenne eine Differenz der Quinte von 0,1461 Komma $= \frac{1}{67,5}$ ganzer Ton, das ungeübte Ohr wieder nur die Hälfte. Bei der grossen Terz betrug der merkbare Unterschied nur 0,284 Komma oder $\frac{1}{33,4}$ ganzer Ton.

Diese Werthe von w und w' mit ihren zugehörigen Bogen stellen die Figuren 1 und 2 dar. Man kann in ihnen den Halbmesser nach seinen verschiedenen Lagen als das der Lage des Tons gegen den Grundton entsprechende Bild ansehen. Oc stellt dann den Grundton, Od^b die kleine Secunde, Od die grosse Secunde, Oe^b die kleine Terz vor u. s. w.; durch Oh, die grosse Septime, kehrt endlich in Oc, der Octave, der Ton zur Lage des Grundtons zurück. Im Uebrigen rechtfertigt sich hier die Benennung der Sexten und Septimen als umgekehrter Terzen und Secunden auch anschaulich. Denn lässt man den Halbmesser, nachdem er den ganzen Umfang des Kreises beschrieben, umkehren, so sind die Secunden und Terzen, die er dann von der Octave aus erzeugt, die Septimen und Sexten des Grundtons. Ebenso fällt die durch diese umgekehrte Drehung beschriebene Quarte mit der Quinte des Grundtons zusammen.*)

§ 23.

Diese Drehung des Halbmessers giebt jedoch von der Veränderung, welche der Ton erleidet, wenn er von dem Grundton allmälig zur Octave übergeht, nur ein unvollständiges Bild; denn die Octave ist bei aller Verwandtschaft mit dem Grundton doch ein von diesem unterscheidbarer Ton. Man sagt nun zwar, sie sey der Grundton in einer höheren Lage, ohne aber darüber eine deutliche Auskunft zu geben. Nahe genug liegt hier die Bemerkung, dass, da die Aenderung der Töne eine allmälige ist, diese höhere Lage nicht plötzlich, erst mit der Octave, eintreten kann, sondern ein stetiger Uebergang zu ihr stattfinden muss.

Wir erhalten hierüber eine völlig genügende Aufklärung, wenn wir der Gleichung $y = 2^x$, die den Zusammenhang zwischen der relativen Schwingungszahl y eines Tons und seinem Intervall x mit dem Grundton darstellt, eine angemessene geometrische Auslegung geben. Wie nämlich die Werthe von x durch Bogen eines Kreises, so können die Werthe von y durch gerade Linien dargestellt werden, die in den Endpunkten jener Bogen senkrecht auf der Ebene des Kreises stehen. Offenbar liegen dann diese die Werthe von y darstellenden Geraden in der krummen Fläche eines Cylinders, der jenen Kreis zur Basis hat, ihre Endpunkte in einer sich um den Cylinder windenden logarithmischen

*) Auf diese bildliche Darstellung hat uns eine Stelle in Newton's Optik (*Lib. I. Pars II. Prop. VI*) geleitet, auf die wir im II. Anhang zurückkommen.

Spirale. Da für $x = 0$, $y = 1$, so ist der Abstand des dem Grundton entsprechenden Punktes dieser Spirale von der Basis des Cylinders $= 1$; und da für $x = 1$, $y = 2$, so ist der Abstand des der Octave entsprechenden Punktes doppelt so gross. Jeder zwischenliegende Ton, für welchen immer $1 > x > 0$ und $2 > y > 1$, hat seinen entsprechenden Punkt in der Spirale. Hiernach stellen also x und y die Coordinaten einer logarithmischen Spirale auf der Fläche eines geraden Cylinders dar, und kann y als die absolute Höhe des Tons, x als seine Abweichung von der Richtung des Grundtons bezeichnet werden.

§ 24.

Setzt man $y - 1 = u$, so drückt u die relative Höhe des durch die relative Schwingungszahl y gegebenen Tons in Bezug auf die Höhe seines Grundtons, oder kürzer die Erhebung des Tons über den Grundton aus; dann ist also

$$u = 2^x - 1.$$

Die Werthe von u werden dargestellt durch die Abstände der Punkte der Spirale von der Ebene des Kreises, die parallel zu der Ebene der Basis durch den Punkt der Spirale gelegt wird, welcher dem Grundton entspricht; oder x und y sind die Coordinaten der Spirale, welche sich auf diesen der Basis parallelen Schnitt des Cylinders beziehen.

Dies veranschaulicht Figur 3, in der $c\ e_1\ g_1\ h\ c$ den eben bezeichneten Kreis, $c\ e\ g\ h\ \bar{c}$ die Spirale auf der Cylinderfläche perspectivisch darstellt. Wie man leicht erkennt, bezeichnen die Buchstaben c, d^b, d, e^b, e u. s. w. die den gleichnamigen Tönen in der Spirale entsprechenden Punkte; die Bogen cd_1^b, cd_1, ce_1^b, ce_1 u. s. f. oder die ihnen zugehörigen Mittelpunktswinkel cOd_1^b, cOd_1, cOe_1^b, cOe_1 u. s. w. stellen die Abweichungen der Töne d_1^b, d_1, e_1^b, e_1 u. s. w. von der Richtung des Grundtons c oder die Intervalle dar; ferner die Geraden $d^bd_1^b$, dd_1, $e^be_1^b$, ee_1 u. s. w. die Erhebungen derselben Töne über den Grundton. Die Töne selbst endlich, deren Verschiedenheit von dem Grundton hiernach eine aus der Abweichung und Erhebung zusammengesetzte ist, werden nach beiden Unterschieden ihrer Lage gegen denselben dargestellt durch die Linien $1d^b$, $2d$, $3e^b$, $4e$ u. s. f., die den Halbmessern Od_1^b, Od_1, Oe_1^b, Oe_1 u. s. f. des Grundkreises resp. parallel sind. Der Octave entspricht also die Linie $12\bar{c}$, welche der Oc parallel ist. Man kann demnach sagen, dass die Octave zwar nicht mit dem Grundton zusammenfällt, aber dessen nächster paralleler Ton ist.

Nach dieser Darstellung ist nun das der stetigen Aufeinanderfolge der Töne entsprechende Bild nicht sowohl die logarithmische Spirale auf der Cylinderfläche, als vielmehr die Schraubenfläche, welche ein Halbmesser des Cylinders beschreibt, wenn er in der Axe des Cylinders sich erhebt und sich zugleich um dieselbe dreht, und zwischen Erhebung und Drehung die Relation $u = 2^x - 1$, oder was dasselbe, $x = \log_2(1 + u)$ stattfindet. Hebt man, wie in der musikalischen Tonfolge c, d, e, f, g, a, h, $\bar{c}$ geschieht, nur eine bestimmte Anzahl von Tönen, mit Ueberspringung der zwischenliegenden, aus, so geben die ihnen entsprechenden Linien das Bild einer Wendeltreppe. Die Ausdrücke Tonleiter, Tonstufen sind also, wenn man zugleich an die Windung der Leiter denkt, in der That sehr treffend gewählt.

Fig. 4 stellt in verkleinertem Massstab der Höhen den auf den Axenschnitt des Cylinders projicirten Lauf der Spirale der Töne durch mehrere Octaven dar. Da die relative Schwingungszahl der ersten unteren Octave des Grundtons der Spirale $= \frac{1}{2}$ ist, so nimmt die zu dieser führende Windung hinsichtlich der Höhe einen halb so grossen Raum ein als die Windung, welche vom Grundton zur ersten oberen Octave führt. Aus gleichem Grunde nimmt die von der ersten zur zweiten unteren Octave führende Windung den vierten Theil des Raums der ersten obern ein; dagegen streckt sich die Windung von der ersten obern Octave zur zweiten obern durch einen doppelt so grossen Raum als der ist, welchen die Windung zwischen dem Grundton und der ersten obern Octave einnimmt u. s. f.*)

*) So viel mir bekannt, hat zuerst W. Opelt (Ueber die Natur der Musik. Plauen und Leipzig, 1834. S. 43) die obige cylindrische Spirale zur Versinnlichung der Tonreihe benutzt. Von der Schraubenfläche, die mir das Bild erst zu vervollständigen scheint, macht er keinen Gebrauch.

III.

VON DER NOTHWENDIGKEIT DER TEMPERATUR ÜBERHAUPT, INSBESONDERE DER GLEICHSCHWEBENDEN.

§ 25.

Die Musik ist, schon um der Leichtigkeit ihrer Ausübung willen, genöthigt, sich auf eine mässige Anzahl von Tönen zu beschränken. Bei der Auswahl derselben geht sie von der Tonreihe aus, welche die diatonische Dur-Scala heisst und als die einfachste natürlich-wohlgefällige Tonfolge (die Grundlage aller Melodie) betrachtet wird. Sie besteht bekanntlich aus dem Grundton oder der Prime, grossen Secunde, grossen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, grossen Septime und Octave. An sie schliesst sich die diatonische Moll-Scala an, deren Bau, wenigstens nach der gewöhnlichen Ansicht, sich dadurch von der Durscala unterscheidet, dass beim Aufsteigen von der Prime zur Octave die kleine Terz an die Stelle der grossen, beim Herabsteigen von der Octave zur Prime aber überdies noch die kleine Septime und Sexte resp. an die Stelle der grossen Septime und Sexte tritt. Die moderne Musik verlangt aber noch weiter, dass die zum musikalischen Gebrauch ausgewählten Töne von der Art seyn sollen, dass von jedem derselben, wenn er zum Grundton oder zur Octave eines Grundtons gemacht wird, mittels der ausgewählten Töne auf- und abwärts sowohl eine Dur- als eine Mollscala sich darstellen lässt. Der Bezeichnung nach unterscheidet die Musik mindestens 21 (mit Einschluss der Octave 22) Töne, nämlich die sieben Haupttöne C, D, E, F, G, A, H und die zwischen liegenden erhöhten und erniedrigten $C^\sharp$, $D^\sharp$, $E^\sharp$, $F^\sharp$, $G^\sharp$, $A^\sharp$, $H^\sharp$; D^b, E^b, F^b, G^b, A^b, H^b, c^b, die in den gangbaren Dur- und Moll-Tonarten vorkommen. Die ungewöhnlicheren Tonarten machen doppelte Erhöhungen und Erniedrigungen der Haupttöne nothwendig und würden also die

Zahl der Töne vermehren. Ob die erhöhten und erniedrigten wirklich oder nur der Bezeichnung nach von einander verschieden sind, lassen wir zunächst unerörtert, eben so dies, wie gross ihre Verschiedenheit von den Haupttönen ist, auf welche sie sich beziehen. Beides wird sich von selbst aus den Stellen ergeben, die sie in den Scalen der Tonarten einnehmen, in denen sie sich als nothwendige Mittelglieder zwischen den Haupttönen einschalten. Denn diese Stellen bestimmen vermöge des Gesetzes der Tonleitern ihr Intervall und ihre relative Schwingungszahl in Bezug auf den Grundton der Tonart und können daher als die Definitionen der in jeder Tonart vorkommenden erhöhten und erniedrigten Töne betrachtet werden.

§ 26.

Setzen wir nämlich, um die Grössen der Intervalle, anstatt durch Decimalbrüche, einfacher durch ganze Zahlen auszudrücken, das Intervall der Octave mit dem Grundton = 1000, so erhalten die Intervalle, welche die Dur-Tonleiter bilden, folgende Werthe:

gr. Secunde,	gr. Terz,	Quarte,	Quinte,	gr. Sexte,	gr. Septime,
170	322	415	585	737	907

deren Genauigkeit, da ein Tausendtel der Octave = $\frac{1}{170}$ des ganzen Tons, für unsern Zweck vollkommen zureichend ist. Eben so sind dann die Werthe der Intervalle, welche die Moll-Tonleiter charakterisiren, folgende:

kleine Terz,	kleine Sexte,	kleine Septime
263	678	830

Wir können nun hieraus für jede Tonart, in welcher das Intervall des Grundtons mit dem absoluten Grundton *C* gegeben ist, die Intervalle finden, welche die Töne ihrer Dur- und Moll-Scala mit *C* bilden, wenn wir das Intervall des Grundtons successiv zu den obigen Intervallen der grossen Secunde, grossen (kleinen) Terz, Quarte, Quinte, grossen (kleinen) Sexte, grossen (kleinen) Septime addiren, und, wenn wir die Töne in der gewöhnlichen musikalischen Weise bezeichnen, die Intervalle der erhöhten und erniedrigten Haupttöne mit *C* bestimmen, woraus sich dann auch ihre relativen Schwingungszahlen ableiten lassen. Wir führen dies zuerst in Bezug auf die erhöhten Töne aus.

1) Für C-dur ist

$$C = 0,\ D = 170,\ E = 322,\ F = 415,\ G = 585,\ A = 737,\ H = 907.$$

2) Für G-dur wird durch Addition von 585 zu diesen Scalenwerthen

$$G = 585,\ A = 755,\ H = 907,\ c = 1000,\ d = 1170,\ e = 1322,\ f^{\#} = 1492;$$

wodurch $f^{\#}$ bestimmt ist und $F^{\#} = 492$ folgt, zugleich aber auch erhellt, dass hier A einen um 18 höhern Werth hat als in C-dur.

3) Für D-dur wird eben so

$$D = 170,\ E = 340,\ F^{\#} = 492,\ G = 585,\ A = 755,\ H = 907,\ c^{\#} = 1077;$$

wo $F^{\#}$ denselben Werth wie in G-dur hat, und $C^{\#} = 77$ wird, E aber einen um 18 höhern Werth erhält als in C- und G-dur.

4) Für A-dur ergiebt sich, wenn nach C-dur $A = 737$ gesetzt wird,

$$A = 737,\ H = 907,\ c^{\#} = 1059,\ d = 1152,\ e = 1322,\ f^{\#} = 1474,\ g^{\#} = 1644,$$

also $C^{\#} = 59$, $F^{\#} = 474$, $G^{\#} = 644$; zugleich $D = 152$.

5) Für E-dur wird, vorausgesetzt, dass $E = 322$,

$$E = 322,\ F^{\#} = 492,\ G^{\#} = 644,\ A = 737,\ H = 907,\ c^{\#} = 1059,\ d^{\#} = 1229;$$

also $C^{\#} = 59$ wie in A-dur, $D^{\#} = 229$, $F^{\#} = 492$, wie in G- und D-dur, $G^{\#} = 644$, wie in A-dur.

6) Für H-dur wird

$$H = 907,\ c^{\#} = 1077,\ d^{\#} = 1229,\ e = 1322,\ f^{\#} = 1492,\ g^{\#} = 1644,\ a^{\#} = 1814;$$

also $C^{\#} = 77$, wie in D-dur; $D^{\#} = 229$, wie in E-dur; $F^{\#} = 492$, wie in G-, D- und E-dur; $G^{\#} = 644$, wie in A- und E-dur; $A^{\#} = 814$.

7) Für *Fis*-dur ergiebt sich eine doppelte Reihe von Bestimmungen, je nachdem $F^{\#} = 474$ oder $= 492$ gesetzt wird, von denen keine der andern vorgezogen werden kann, indess wir in A-, E- und D-dur, da diese Grundtöne fest bestimmt sind, die Werthe $A = 755$, $E = 340$, $D = 152$, die sich aus G-, D- und A-dur ergeben, zum Grunde zu legen nicht wagen konnten. Es ist daher entweder

$$F^{\#} = 474,\ G^{\#} = 644,\ A^{\#} = 796,\ H = 889,\ c^{\#} = 1059,\ d^{\#} = 1211,\ e^{\#} = 1381;$$

woraus die neuen Bestimmungen von $A^\# = 796$, $H = 889$ und $D^\# = 211$ folgen und $E^\# = 381$ sich ergiebt; oder es ist

$$F^\# = 492,\ G^\# = 662,\ A^\# = 814,\ H = 907,\ c^\# = 1077,$$
$$d^\# = 1229,\ e^\# = 1399;$$

wo $E^\# = 399$ wird, die übrigen Bestimmungen aber mit zuvorgefundenen übereinstimmen.

8) Eben so ergiebt sich für *Cis*-dur eine Doppelscala, nämlich entweder

$$C^\# = 59,\ D^\# = 229,\ E^\# = 381,\ F^\# = 474,\ G^\# = 644,$$
$$A^\# = 796,\ H^\# = 966;$$

wo nur $H^\# = 966$ neu ist; oder es wird

$$C^\# = 77,\ D^\# = 247,\ E^\# = 399,\ F^\# = 492,\ G^\# = 662,$$
$$A^\# = 814,\ H^\# = 984;$$

wo also $D^\# = 247$, $H^\# = 984$, die übrigen Werthe nicht neu sind.

Untersuchen wir die Moll-Tonarten, welche auf erhöhte Töne führen, so ergiebt sich

9) Für *A*-moll

$$A = 737,\ H = 907,\ c = 1000,\ d = 1152,\ e = 1322,$$
$$f = 1415,\ g = 1567;$$

wo $G = 567$ eine neue Bestimmung ist.

10) Für *E*-moll wird

$$E = 322,\ F^\# = 492,\ G = 585,\ A = 737,\ H = 709,$$
$$c = 1000,\ d = 1152;$$

woraus keine neuen Bestimmungen folgen.

11) Für *H*-moll wird

$$H = 907,\ c^\# = 1077,\ d = 1170,\ e = 1322,\ f^\# = 1492,$$
$$g = 1585,\ a = 1737;$$

woraus ebenfalls nicht Neues folgt.

12) *Fis*-moll giebt für $F^\# = 474$,

$$F^\# = 474,\ G^\# = 644,\ A = 737,\ H = 889,\ c^\# = 1059,$$
$$d = 1152,\ e = 1304;$$

wo nur $E = 304$ neu ist; für $F^\# = 492$ aber wird

$$F^\# = 492,\ G^\# = 662,\ A = 755,\ H = 907,\ c^\# = 1077,$$
$$d = 1170,\ e = 1322;$$

worin keine neue Bestimmung enthalten ist.

13) *Cis*-moll giebt entweder

$$C^\sharp = 59,\quad D^\sharp = 229,\quad E = 322,\quad F^\sharp = 474,\quad G^\sharp = 644,$$
$$A = 737,\quad H = 889;$$

oder

$$C^\sharp = 77,\quad D^\sharp = 247,\quad E = 340,\quad F^\sharp = 492,\quad G^\sharp = 662,$$
$$A = 755,\quad H = 907;$$

welche Werthe sämmtlich nicht neu sind.

14) Für *Gis*-moll wird entweder

$$G^\sharp = 644,\quad A^\sharp = 814,\quad H = 907,\quad c^\sharp = 1059,\quad d^\sharp = 1229,$$
$$e = 1322,\quad f^\sharp = 1474;$$

oder

$$G^\sharp = 662,\quad A^\sharp = 832,\quad H = 925,\quad c^\sharp = 1077,\quad d^\sharp = 1247,$$
$$e = 1340,\quad f^\sharp = 1492;$$

wo $A^\sharp = 832$ und $H = 925$ neue Bestimmungen sind.

15) *Dis*-moll endlich giebt entweder

$$D^\sharp = 211,\quad E^\sharp = 381,\quad F^\sharp = 474,\quad G^\sharp = 626,\quad A^\sharp = 796,$$
$$H = 889,\quad c^\sharp = 1041;$$

wo $G^\sharp = 626$ und $C^\sharp = 41$ neu sind; oder

$$D^\sharp = 229,\quad E^\sharp = 399,\quad F^\sharp = 492,\quad G^\sharp = 644,\quad A^\sharp = 814,$$
$$H = 907,\quad c^\sharp = 1059;$$

wo keine neuen Werthe erscheinen; oder endlich

$$D^\sharp = 247,\quad E^\sharp = 417,\quad F^\sharp = 510,\quad G^\sharp = 662,\quad A^\sharp = 832,$$
$$H = 925,\quad c^\sharp = 1077;$$

wo $E^\sharp = 417$ und $F^\sharp = 510$ neue Bestimmungen sind.

Offenbar könnten auch die aufgefundenen dritten Werthe von $C^\sharp$, $F^\sharp$, $G^\sharp$ in den gleichnamigen Dur- und Moll-Tonarten zu Grunde gelegt werden, was wiederum zu neuen Bestimmungen führen würde.

§ 27.

Versuchen wir in gleicher Weise die Bestimmung der erniedrigten Haupttöne.

1) *F*-dur giebt

$$F = 415,\quad G = 585,\quad A = 737,\quad H^b = 830,\quad c = 1000,$$
$$d = 1152,\quad e = 1322;$$

wo $H^b = 830$, alles Uebrige schon bekannt ist.

2) Für B-dur wird

$$H^b = 830, \quad c = 1000, \quad d = 1152, \quad e^b = 1245, \quad f = 1415,$$
$$g = 1567, \quad a = 1737;$$

woraus $E^b = 245$ folgt; die übrigen Bestimmungen sind nicht neu.

3) Für Es-dur wird

$$E^b = 245, \quad F = 415, \quad G = 567, \quad A^b = 660, \quad H^b = 830,$$
$$c = 982, \quad d = 1152;$$

wo $A^b = 660$ und $c = 982$ neu sind.

4) Für As-dur wird

$$A^b = 660, \quad H^b = 830, \quad c = 982, \quad d^b = 1075, \quad e^b = 1245,$$
$$f = 1397, \quad g = 1567;$$

woraus folgt $D^b = 75$, $F = 397$.

5) Für Des-dur ergiebt sich

$$D^b = 75, \quad E^b = 245, \quad F = 397, \quad G^b = 490, \quad A^b = 660,$$
$$H^b = 812, \quad c = 982;$$

also $G^b = 490$, $H^b = 812$.

6) Für Ges-dur wird

$$G^b = 490, \quad A^b = 660, \quad H^b = 812, \quad c^b = 905, \quad d^b = 1075,$$
$$e^b = 1227, \quad f = 1397;$$

wo $c^b = 905$ und $E^b = 227$ neu sind.

Die gefundenen zweiten Werthe von $E^b = 227$ und $H^b = 812$ könnten wieder in Es-dur und B-dur zum Grunde gelegt werden. Wir übergehen jedoch die Ausführung und wenden uns zu den Moll-Tonarten. Hier giebt

7) D-moll

$$D = 170, \quad E = 340, \quad F = 433, \quad G = 585, \quad A = 755,$$
$$H^b = 848, \quad c = 1000;$$

wo $F = 433$ und $H^b = 848$ neu sind.

8) G-moll giebt

$$G = 585, \quad A = 755, \quad H^b = 848, \quad c = 1000, \quad d = 1170,$$
$$e^b = 1263, \quad f = 1415;$$

woraus folgt $E^b = 263$.

9) Für C-moll wird

$$C = 0, \quad D = 170, \quad E^b = 263, \quad F = 415, \quad G = 585, \quad A^b = 678,$$
$$H^b = 830;$$

wo $A^b = 678$ neu ist.

10) Für F-moll wird

$$F = 415,\quad G = 585,\quad A^b = 678,\quad H^b = 830,\quad c = 1000,$$
$$d^b = 1093,\quad e^b = 1245;$$

also $D^b = 93$.

11) Für B-moll wird entweder

$$H^b = 830,\quad c = 1000,\quad d^b = 1093,\quad e^b = 1245,\quad f = 1415,$$
$$g^b = 1508,\quad a^b = 1660;$$

wo $G^b = 508$ neu; oder

$$H^b = 848,\quad c = 1018,\quad d^b = 1111;\quad e^b = 1263,\quad f = 1433,$$
$$g^b = 1526,\quad a^b = 1678;$$

wo $c = 1018$, $D^b = 111$, $G^b = 526$ neu.

12) Für Es-moll wird entweder

$$E^b = 227,\quad F = 397,\quad G^b = 490,\quad A^b = 642,\quad H^b = 812,$$
$$c^b = 905,\quad d^b = 1057;$$

wo $A^b = 642$ und $D^b = 57$ neu sind; oder

$$E^b = 245,\quad F = 415,\quad G^b = 508,\quad A^b = 660,\quad H^b = 830,$$
$$c^b = 923,\quad d^b = 1075;$$

wo $c^b = 923$ neu; oder

$$E^b = 263,\quad F = 433,\quad G^b = 526,\quad A^b = 678,\quad H^b = 848,$$
$$c^b = 941,\quad d^b = 1093;$$

wo $c^b = 941$ neu ist.

13) Für As-moll endlich ist entweder

$$A^b = 642,\quad H^b = 812,\quad c^b = 905,\quad d^b = 1057,\quad e^b = 1227,$$
$$f^b = 1320,\quad g^b = 1472;$$

woraus folgt $F^b = 320$ und $G^b = 472$; oder

$$A^b = 660,\quad H^b = 830,\quad c^b = 923,\quad d^b = 1075,\quad e^b = 1245,$$
$$f^b = 1338,\quad g^b = 1490;$$

woraus $F^b = 338$; oder

$$A^b = 678,\quad H^b = 848;\quad c^b = 941,\quad d^b = 1093,\quad e^b = 1263,$$
$$f^b = 1356,\quad g^b = 1508;$$

woraus $F^b = 356$.

Es könnten nun wieder die aus den Moll-Tonarten gefundenen neuen Bestimmungen den Dur-Tonarten zum Grunde gelegt werden, was abermals auf neue Werthe führen würde. Unser Zweck ist jedoch schon durch die gewonnenen Resultate völlig erreicht.

§ 28.

Es zeigt sich nämlich, dass sich die Intervalle zwischen den erhöhten und erniedrigten Haupttönen und dem Grundton, folglich auch ihre relativen Schwingungszahlen gar nicht schlechthin, sondern nur bedingungsweise bestimmen lassen, nämlich unter der Voraussetzung, dass die Scala einer oder der andern Tonart, in der sie vorkommen, rein sey, d. h. aus reinen Intervallen bestehe. Es erhellt nun aber aus dem Vorstehenden, dass wenn jeder dieser Töne nur einen Werth hat, diese Reinheit für alle Tonarten zugleich unmöglich ist, ja dass dieselbe sogar für die Haupttöne mehrfache Werthe erfordern würde, so dass dieselben Tonbezeichnungen, je nach der Verschiedenheit der Tonarten, verschiedene Bedeutung haben müssten. Die Reinheit aller Tonarten ist also eine Forderung, der in praktisch ausführbarer Weise nicht Genüge geleistet werden kann. Es kommt daher zunächst in Frage, ob sich aus den gefundenen mehrfachen Werthen der erhöhten und erniedrigten Haupttöne eine solche Auswahl treffen lässt, dass die Abweichungen von der Reinheit, die dadurch in den meisten Tonarten entstehen müssen, dem musikalischen Gehör entweder unmerklich oder doch erträglich sind.

§ 29.

Eine Auswahl dieser Art bietet nun zunächst folgende Tabelle dar, die sich, soweit sie die relativen Schwingungszahlen (y) betrifft (denen wir die Intervalle (x) beigefügt haben), in allen physikalischen Lehrbüchern und akustischen Schriften, mit geringen Modificationen in einzelnen Bestimmungen, wiederholt.

	y	x		y	x
C	$1 = 1{,}000$	0,000	G^b	$\frac{36}{25} = 1{,}440$	0,526
$C^\sharp$	$\frac{25}{24} = 1{,}042$	0,059	G	$\frac{3}{2} = 1{,}500$	0,585
D^b	$\frac{16}{15} = 1{,}067$	0,093	$G^\sharp$	$\frac{25}{16} = 1{,}562$	0,644
D	$\frac{9}{8} = 1{,}125$	0,170	A^b	$\frac{8}{5} = 1{,}600$	0,678
$D^\sharp$	$\frac{125}{108} = 1{,}157$	0,211	A	$\frac{5}{3} = 1{,}667$	0,737
E^b	$\frac{6}{5} = 1{,}200$	0,263	$A^\sharp$	$\frac{125}{72} = 1{,}736$	0,796
E	$\frac{5}{4} = 1{,}250$	0,322	H^b	$\frac{16}{9} = 1{,}778$	0,830
F^b	$\frac{32}{25} = 1{,}280$	0,356	H	$\frac{15}{8} = 1{,}875$	0,907
F	$\frac{4}{3} = 1{,}333$	0,415	c^b	$\frac{48}{25} = 1{,}920$	0,941
$F^\sharp$	$\frac{25}{18} = 1{,}389$	0,474	c	$2 = 2{,}000$	1,000

Man kann aus ihr für jede Tonart die Grösse der die Dur- und Mollscala bildenden Intervalle bestimmen, wenn man das Intervall des Grundtons von den Intervallen der Töne, welche von ihm die grosse Secunde, kleine und grosse Terz u. s. w. sind, subtrahirt. Hierdurch ergeben sich folgende zwei Tabellen, in denen wieder zur Vereinfachung das Intervall der Octave = 1000 angenommen ist.

I. Dur.

Grundton	gr. Secunde	gr. Terz	Quarte	Quinte	gr. Sexte	gr. Septime
C	170	322	415	585	737	907
G	152	322	415	585	737	889
D	152	304	415	567	737	889
A	170	322	433	585	737	907
E	152	322	415	585	737	889
H	152	304	415	567	737	889
F#	170	322	433	585	737	882 *
C#	152	297 *	415	585	737	882 **
F	170	322	415	585	755	907
H^b	170	340	433	585	755	907
E^b	152	322	415	567	737	907
A^b	152	322	415	585	737	907
D^b	170	322	433	585	737	907
G^b	152	304	415	567	737	889

II. Moll.

Grundton	gr. Secunde	kl. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	kl. Septime
A	170	263	433	585	678	848
E	152	263	415	585	678	848
H	152	263	415	567	678	830
F#	170	263	433	585	696	848
C#	152	263	415	585	678	848
G#	152	263	415	567	678	830
D#	145	263	433	585	696	848
D	152	245	415	567	660	830
G	152	245	415	585	678	830
C	170	263	415	585	678	830
F	170	263	415	585	678	848
H^b	170	263	433	585	696	848
E^b	152	263	415	567	678	830
A^b	152	263	415	585	678	848

*) Es ist hier, so wie in Tab. II, angenommen, dass *E*#, was in der obigen Tabelle übergangen wird, = F^b sey, was ein von den übrigen Bestimmungen der grossen Terz weniger abweichendes Resultat giebt als die Annahme, dass *E*# = *F* sey.

**) Hier ist, wie in Tab. II, angenommen, dass das in der Tabelle übergangene *H*# = c^b und nicht = *c* sey, da erstere Annahme besser mit den übrigen Werthen der grossen Septime übereinstimmt.

§ 30.

Von diesen Tabellen zeigt nun die erste nur in *C*-dur eine Scala, deren Intervalle rein sind. Von den übrigen Dur-Tonarten sind die Scalen in *G*-dur und *E*-dur, in *A*-dur und *Des*-dur, in *D*-dur, *H*-dur und *Ges*-dur unter einander völlig gleich, und zwar weichen *E*-dur und *G*-dur in der grossen Secunde und grossen Septime, *A*-dur und *Des*-dur nur in der Quarte, *D*-dur, *H*-dur und *Ges*-dur aber in der grossen Secunde, grossen Terz, Quinte und grossen Septime von der reinen *C*-dur-Scala ab. Was die andern einzeln stehenden Tonarten betrifft, so weicht *F*-dur nur in der grossen Sexte, *As*-dur nur in der grossen Secunde, *Fis*-dur in der Quarte und grossen Septime, *Cis*-dur in der grossen Secunde, grossen Terz und grossen Septime, *B*-dur in der grossen Terz, Quarte und grossen Sexte, *Es*-dur in der grossen Secunde und Quinte von der Reinheit ab.

Die zweite Tabelle zeigt nur *C*-moll rein. Von den anderen Molltonarten sind die Scalen in *E*-, *Cis*- und *As*-moll, in *Fis*- und *B*-moll, in *H*-, *Gis*- und *Es*-moll unter einander gleich, und zwar weichen *E*,- *Cis*- und *As*-moll in der grossen Secunde und kleinen Septime, *Fis*- und *B*-moll in der Quarte, kleinen Sexte und kleinen Septime, *H*-, *Gis*- und *Es*-moll in der grossen Secunde und Quinte von der reinen Mollscala ab. Was die übrigen Tonarten betrifft, so weicht von der Reinheit ab *F*-moll in der kl. Septime, *A*-moll in der Quarte und kl. Septime, *G*-moll in der grossen Secunde und kleinen Terz, *D*-moll in der grossen Secunde, kleinen Terz, Quinte und kleinen Sexte, *Dis*-moll in der grossen Secunde, Quarte, kleinen Sexte und kleinen Septime.

Untersuchen wir die Grösse dieser Abweichungen, so finden wir die der grossen Secunde in *Dis*-moll $= 0{,}025$ der Octave d. i., da $0{,}170$ der grosse ganze Ton, $= \frac{1}{6{,}8}$ des ganzen Tons, in allen übrigen abweichenden Tonarten $= 0{,}018$ der Octave, nahe $= \frac{1}{9{,}4}$ ganzer Ton, was nach § 19 dem syntonischen Komma entspricht. Die Abweichung der kleinen Terz von der Reinheit ist in *D*- und *G*-moll $= 0{,}018$ Octave, entsprechend dem syntonischen Komma. Die grosse Terz ist in *D*-dur, *H*-dur und *Ges*-dur um ein syntonisches Komma tiefer, in *B*-dur um eben so viel höher als die reine, in *Cis*-dur steht sie um $0{,}025$ Octave $= \frac{1}{6{,}8}$ ganzen Ton tiefer. Alle abweichenden Quarten stehen um ein syntonisches Komma höher, alle abweichenden Quinten um ebensoviel tiefer als die reinen. Um dasselbe Komma steht die kleine Sexte in *D*-moll gegen die reine zu tief, in *Fis*-, *Dis*- und *B*-moll zu hoch; desgleichen steht die grosse Sexte um ebensoviel in *F*- und *B*-dur zu hoch. Die abweichende kleine Septime steht durchgängig um ein syntonisches Komma höher als die reine; die grosse Septime endlich steht in *Fis*- und *Cis*-dur um 0,025 Octave $= \frac{1}{6,8}$ ganzer Ton, in den übrigen abweichenden Tonarten um ein syntonisches Komma zu tief.

Diese Abweichungen von $\frac{1}{9,4}$ und $\frac{1}{6,8}$ ganzer Ton sind viel zu beträchtlich, als dass sie nicht dem musikalischen Gehör, zumal bei Quarten und Quinten, anstössig seyn sollten. Man kann daher behaupten, dass die obigen akustischen Bestimmungen, ausser in *C*-dur und *C*-moll, keine einzige ganz befriedigende Scala geben, daher musikalisch unbrauchbar sind. Eine andre Auswahl unter den gefundenen mehrfachen Werthen der erhöhten und erniedrigten Töne würde zwar für mehrere Tonarten bessere, für andere aber immer wieder mangelhafte Scalen geben.*)

§ 31.

Erhellt nun hieraus die Unmöglichkeit, bei der Annahme von 19 verschiedenen Tönen Werthe derselben zu finden, welche in allen Tonarten reine Scalen geben, so besteht diese Unmöglichkeit fort, auch wenn 21 Töne unterschieden werden, nämlich $E^{\#}$ und $H^{\#}$ selbständige Werthe erhalten, was nur auf *Fis*-dur, *Cis*-dur und *Dis*-moll Einfluss hat. Noch viel weniger aber kann von reinen Scalen die Rede seyn, wenn sich die Zahl der Töne, wie dies auf den Tasteninstrumenten der Fall ist, auf 12 reducirt. Es bleibt also nur übrig zu versuchen, ob sich die Intervalle der die Scalen bildenden Töne, und mit ihnen ihre relativen Schwingungszahlen so abändern lassen, dass mit Aufopferung der völligen Reinheit in allen Tonarten eine genäherte Reinheit der Scalen erhalten wird. Diese nothwendige Abänderung der Tonbestimmungen heisst nun bekanntlich die Temperatur der Töne. Je nachdem durch sie das Intervall eines Tons mit dem Grundton grösser oder kleiner gemacht wird als das reine, sagt man dass der Ton aufwärts oder abwärts schwebe. Die Temperatur kann nun entweder so beschaffen seyn, dass einige Tonarten durch sie reiner werden als die andern, oder von

*) Vgl. hierüber den I. Anhang.

der Art, dass alle Tonarten gleichviel von der Reinheit abweichen, also in allen Tonarten die gleichnamigen Intervalle von den reinen gleichviel verschieden sind. Die erstere Art der Temperatur heisst die ungleichschwebende, die andre die gleichschwebende. Wir wollen zunächst diejenige ungleichschwebende Temperatur in einfacher Weise ableiten, die vor allen andern für die beste gilt, die Kirnbergersche.

§ 32.

Beschränkt man sich auf die zwölf Töne der Tasteninstrumente und setzt also $C^\sharp = D^b$, $D^\sharp = E^b$, $E^\sharp = F$, $F^b = E$, $F^\sharp = G^b$, $G^\sharp = A^b$, $A^\sharp = H^b$, $H^\sharp = c$, $c^b = H$, so bleiben nur zwölf Tonarten in Dur und in Moll übrig, nämlich *C*-, *G*-, *D*-, *A*-, *E*-, *H*-, *F*-, *B*-, *Es*-, *As*-, *Des*-, *Ges*-dur, und *A*-, *E*-, *H*-, *Fis*-, *Cis*-, *Gis*-, *D*-, *G*-, *C*-, *F*-, *B*-, *Es*-moll. Da nun die Intervalle der sieben Haupttöne vollkommen sicher bestimmt sind, so kommt es vor Allem darauf an, ihre akustischen Werthe möglichst beizubehalten und dennoch für die nach ihnen benannten Tonarten möglichst reine Scalen zu finden. Vergleicht man nun zunächst die in § 26 und 27 gefundenen Scalenwerthe für *C*-, *G*-, *D*-, *E*- und *F*-dur, so wie für *E*-, *H*-, *D*- und *G*-moll, so zeigt es sich, dass wenn in allen diesen Tonarten die Scalen rein seyn sollten, in *C*-, *E*-, und *F*-dur, so wie in *E*- und *H*-moll $A = 0{,}737$, dagegen in den übrigen Tonarten $A = 0{,}755$ seyn müsste. Wir werden nun für alle diese Scalen in Bezug auf *A* eine genäherte Reinheit erhalten, wenn wir das Mittel aus diesen Werthen, mit Berücksichtigung der Zahl ihres Vorkommens, nehmen, was $= \frac{1}{9}(5 \,.\, 0{,}737 + 4 \,.\, 0{,}755) = 0{,}745$ ist. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl 1,676, die von $1{,}677 = \frac{270}{161}$ nur wenig differirt.

Durch Annahme dieses Werthes von *A* wird nun in *A*-dur $C^\sharp = 0{,}067$, $F^\sharp = 0{,}482$, $G^\sharp = 0{,}652$. Da nun in *D*-dur, *H*-dur und *H*-moll $C^\sharp = 0{,}077$, dagegen in *E*-dur $C^\sharp = 0{,}059$; da ferner $D^b = C^\sharp$ in *F*-moll $= 0{,}093$, so ergiebt sich im Mittel $C^\sharp = D^b = \frac{1}{6}(0{,}059 + 0{,}067 + 3 \,.\, 0{,}077 + 0{,}093) = 0{,}075$, wozu die relative Schwingungszahl des diatonischen halben Tons (§ 19) $\frac{256}{243}$ gehört.

Ferner ist in *E*-dur und *H*-dur $D^\sharp = 0{,}229$, in *G*-moll und *C*-moll $E^b = 0{,}263$, in *F*-moll aber $E^b = 0{,}245$. Hieraus folgt im Mittel $D^\sharp = E^b = \frac{1}{5}(2 \,.\, 0{,}229 + 0{,}245 + 2 \,.\, 0{,}263) = 0{,}246$, wozu die relative Schwingungszahl 1,186 gehört, welche $\frac{32}{27} = 1{,}185$ nahe kommt.

Weiter ist in *G*-dur, *D*-dur, *E*-dur, *H*-dur, *E*-moll und *H*-moll $F^\sharp = 0{,}492$, in *A*-dur, wie bemerkt, $F^\sharp = 0{,}482$; daher im Mittel $F^\sharp = G^b = \frac{1}{7}(0{,}482 + 6\,.\,0{,}492) = 0{,}491$, wozu die relative Schwingungszahl 1,405 gehört, die nahe gleich $\frac{45}{32} = 1{,}406$ ist.

In *A*-dur wird, wie bemerkt wurde, $G^\sharp = 0{,}652$, in *E*-dur und *H*-dur ist aber $G^\sharp = 0{,}644$; in *C*-moll und *F*-moll $A^b = 0{,}678$. Hieraus folgt im Mittel $G^\sharp = A^b = \frac{1}{5}(2\,.\,0{,}644 + 0{,}652 + 2\,.\,0{,}678) = 0{,}659$. Die zugehörige relative Schwingungszahl ist 1,579, die nahe gleich $\frac{128}{81} = 1{,}580$.

Endlich ist in *H*-dur $A^\sharp = 0{,}814$, in *F*-dur, *C*-moll und *F*-moll $H^b = 0{,}830$, in *D*-moll und *G*-moll aber $H^b = 0{,}848$. Hieraus folgt im Mittel $A^\sharp = H^b = 0{,}833$, wozu die relative Schwingungszahl 1,781 gehört, die sich $\frac{16}{9} = 1{,}778$ nähert.

Stellen wir nun alle diese Werthe mit denen der unverändert gebliebenen Haupttöne zusammen, so ergiebt sich folgende Tabelle, in der die Werthe unter x genau der vorstehenden Berechnung entsprechen, die unter y' (welche die eigentliche Kirnbergersche Temperatur darstellen) die nächsten, jenen zukommenden relativen Schwingungszahlen sind, x' endlich die genauen Werthe darstellt, die zu den Werthen von y' gehören.

	x	y'	x'
C	0,000	$1 = 1{,}000$	0,000
$C^\sharp = D^b$	0,075	$\frac{256}{243} = 1{,}053$	0,075
D	0,170	$\frac{9}{8} = 1{,}125$	0,170
$D^\sharp = E^b$	0,246	$\frac{32}{27} = 1{,}185$	0,245
$E = F^b$	0,322	$\frac{5}{4} = 1{,}250$	0,322
$E^\sharp = F$	0,415	$\frac{4}{3} = 1{,}333$	0,415
$F^\sharp = G^b$	0,491	$\frac{45}{32} = 1{,}406$	0,492
G	0,585	$\frac{3}{2} = 1{,}500$	0,585
$G^\sharp = A^b$	0,659	$\frac{128}{81} = 1{,}580$	0,660
A	0,745	$\frac{270}{161} = 1{,}677$	0,746
$A^\sharp = H^b$	0,833	$\frac{16}{9} = 1{,}778$	0,830
$H = c^b$	0,907	$\frac{15}{8} = 1{,}875$	0,907
$H^\sharp = c$	1,000	$2 = 2{,}000$	1,000

§ 33.

Um die Güte dieser Temperatur zu prüfen, brauchen wir blos zu untersuchen, welche Werthe sie den die Scalen bildenden Intervallen in jeder der zwölf Tonarten beilegt. Es ist zu diesem Behuf nur nöthig, für jeden Ton den ihm nach der vorstehenden Tabelle unter x' zukommenden Werth zu setzen und in jeder Tonart den Werth des Grundtons von den Werthen der übrigen ihr zugehörigen Töne abzuziehen. Zur Abkürzung setzen wir auch hier die Octave = 1000. Wir erhalten dann folgende Tabelle:

Grundton	gr. Sec.	kl. Terz	gr. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	gr. Sext.	kl. Sept.	gr. Sept.
C	170	245	322	415	585	660	746	830	907
G	161	245	322	415	585	660	737	830	907
D	152	245	322	415	576	660	737	830	907
A	161	254	329	424	576	669	746	839	914
E	170	263	338	424	585	678	753	848	923
H	168	263	338	415	585	678	753	839	923
F	170	245	322	415	585	660	755	830	907
H^b	170	263	340	415	585	678	755	839	906
$D^\sharp = E^b$	170	247	340	415	585	660	755	830	925
$G^\sharp = A^b$	170	254	340	415	585	662	755	832	925
$C^\sharp = D^b$	170	245	340	417	585	671	755	832	925
$F^\sharp = G^b$	168	254	338	415	583	678	753	832	923

Vergegenwärtigt man sich nun, dass die reinen Intervalle, der grossen Secunde = 170, der kleinen Terz = 263, der grossen Terz = 322, der Quarte = 415, der Quinte = 585, der kleinen Sexte = 678, der grossen Sexte = 737, der kleinen Septime = 830, der grossen Septime = 907 sind, so lässt die vorstehende Tabelle den Grad der Reinheit, den nach dieser Temperatur jede Tonart hat, leicht erkennen. Nur in Einem Intervall weichen von der Reinheit ab *C*-dur (in der grossen Sexte), *G*-dur (in der grossen Secunde), *B*-moll (in der kleinen Septime) und *H*-moll (in der kleinen Septime), wenn wir die geringe Abweichung in der grossen Secunde nicht beachten. Dagegen sind schon *E*-dur und *H*-dur, noch mehr *B*-, *Es*-, *As*- und *Des*-dur, eben so *C*-, *G*-, *D*-, *F*- und *Des*-moll wegen der Abweichungen der grossen und resp. der kleinen Terz, die hier die Grösse eines syntonischen Komma's erreichen, sehr hart. Man kann diese Härte mildern und die Temperatur verbessern, wenn man die in der Tabelle des vorigen §'s unter x enthaltenen Werthe annimmt. Noch geringer werden die anstössigen Abweichungen von der Reinheit, wenn man auf dieselbe Weise für *E* und *D* einen temperirten Werth sucht, wie dies im vorigen § für *A* geschehen ist, und mit Rücksicht hierauf die erhöhten und erniedrigten Haupttöne bestimmt. Aber indem hiermit die härtesten Tonarten gemildert werden, vermindert sich die Reinheit der übrigen, zwar nicht über die erlaubte Grenze, aber doch so, dass der Charakter der Temperatur, der auf der fast völligen Reinheit mehrerer Tonarten beruht, verloren geht und dieselbe sich mehr einer gleichschwebenden Temperatur nähert, ohne doch deren Vollkommenheit zu erreichen.

Abgesehen hiervon bleibt aber auch noch die Ausstellung übrig, dass diese Temperatur den innern Zusammenhang der Intervalle grossentheils zerreisst. Denn die Tabelle zeigt z. B., dass schon für die Grundtöne *C*, *G*, *D* kleine Terz und grosse Sexte, grosse Terz und kleine Sexte sich nicht genau zur Octave ergänzen, dass für den Grundton *D* dies nicht einmal in Beziehung auf Quarte und Quinte, und für die Grundtöne D^b und G^b dies in Bezug auf dieselben Intervalle wenigstens nicht genau statt hat. Aehnliches findet sich bei den übrigen Grundtönen. Dieser Mangel ist aber, wie wir sogleich zeigen werden, nothwendiger Weise allen ungleichschwebenden Temperaturen gemeinsam und wird nur durch gleichschwebende Temperatur verhütet.

§ 34.

Den inneren Zusammenhang der Intervalle stellen die in § 18 entwickelten allgemeinen Ausdrücke derselben dar, welche die Abhängigkeit aller von der Octave, Quinte und grossen Terz nachweisen, und durch welche alle zwischen den Intervallen möglichen Beziehungen gegeben sind. Zu diesen Beziehungen gehören nun die, dass die Intervalle der Quarte und Quinte, der Terzen und Sexten, Secunden und Septimen einander zum Intervall der Octave ergänzen müssen. Wir können an dem Beispiel der Quarte und Quinte leicht zeigen, dass dieser Zusammenhang zwischen beiden nothwendig aufgehoben ist, sobald diesen Intervallen in verschiedenen Tonarten verschiedene Grössen beigelegt werden, also eine ungleichschwebende Temperatur statt findet. Aus § 18 ergeben sich nämlich folgende allgemeine Bestimmungen der Intervalle der Haupttöne mit dem Grundton $C = 0$.

$$D = 2q - 1,\quad E = t,\quad F = 1 - q,\quad G = q,\quad A = 1 - q + t,$$
$$H = q + t,\quad c = 1,\quad d = 2q,\quad e = 1 + t \text{ u. s. w.}$$

Hiernach ist nun in C-dur das Intervall der Quarte $= 1 - q$, das der Quinte $= q$. In G-dur ist die Quarte $= c - G = 1 - q$, die Quinte $= d - G = q$. In beiden Tonarten ergänzen sich also, welchen Werth auch q haben mag, die Intervalle von Quarte und Quinte zur Octave. In D-dur dagegen wird die Quarte $= G - D = 1 - q$, die Quinte $= A - D = 2 - 3q + t$, wovon die Summe $= 3 - 4q + t$; in A-dur wird die Quarte $= d - A = 3q - t - 1$, die Quinte $= e - A = q$, die Summe beider also $= 4q - t - 1$. In diesen beiden Tonarten sind also die Intervalle von Quarte und Quinte zusammengenommen, nicht unabhängig von den Werthen, die q und t haben mögen, sondern nur dann gleich der Octave 1, wenn $t = 4q - 2$. Alsdann aber wird $2 - 3q + t = q$ und $3q - t - 1 = 1 - q$; d. i. das Intervall der Quinte in D-dur und das der Quarte in A-dur ist so gross als die gleichnamigen Intervalle in C-dur und G-dur. Da nun, wenn q das Intervall der reinen Quinte bedeutet, $q = 0{,}585$ ist, folglich dann $t = 4q - 2 = 0{,}340$ wird, was die reine grosse Terz $0{,}322$ um das syntonische Komma übertrifft, so muss, wenn in den genannten vier Tonarten die Intervalle $F - C$, $c - G$, $G - D$, $d - A$ einerseits, $G - C$, $d - G$, $A - D$, $C - A$ andrerseits unter einander gleich seyn sollen, nothwendig q einen temperirten Werth haben. Die Aufrechthaltung der Beziehung, wonach Quarte und Quinte einander zur Octave ergänzen sollen, fordert also gleichschwebende Temperatur.

§ 35.

Auf dieselbe Temperatur werden wir geführt, wenn wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die verschiedenen Bestimmungen, welche den erhöhten und erniedrigten Tönen in verschiedenen Tonarten zukommen, einander gleich werden.

In G-dur ist nämlich $f^\# = G +$ gr. Septime $= G + q + t = 2q + t$; derselbe Werth folgt aus D-, E- und H-dur, E-moll und H-moll. Dagegen ist in A-dur $f^\# = A +$ gr. Sexte $= A + 1 - q + t = 2 - 2q + 2t$. Die Gleichheit beider Werthe von $f^\#$ fordert $t = 4q - 2$.

In D-dur ist $c^\# = D +$ gr. Septime $= D + q + t = 3q + t - 1$. Dasselbe giebt H-dur und H-moll. In A-dur aber ist $c^\# = A +$ gr. Terz

$= A + t = 1 - q + 2t$. Eben so in E-dur. Die Gleichsetzung beider Werthe giebt $t = 4q - 2$.

In F-dur ist $H^b = F +$ Quarte $= F + 1 - q = 2 - 2q$; dasselbe giebt F- und C-moll. In D-moll ist aber $H^b = D +$ kl. Sexte $= D + 1 - t = 2q - t$. Die Gleichsetzung beider Werthe führt also wieder auf $t = 4q - 2$.

In C-moll ist $E^b = C +$ kl. Terz $= q - t$; dasselbe folgt aus G-moll. In F-moll ist aber $e^b = F +$ kl. Septime $= F + 2 - 2q = 3 - 3q$; daher $E^b = 2 - 3q$. Auch hier giebt die Gleichsetzung beider Werthe $t = 4q - 2$.

Durch Einführung dieses Ausdrucks von t wird nun $E = 4q - 2$, $A = 3q - 1$, $H = 5q - 2$, so dass nun alle Haupttöne nur durch q bestimmt werden.

Ferner wird, nach dem Obigen, $F^\# = 2q + t - 1 = 6q - 3$; $C^\# = 3q + t - 2 = 7q - 4$; $H^b = 2 - 2q$; $E^b = 2 - 3q$.

Hieraus ergeben sich nun auch für die übrigen erhöhten und erniedrigten Töne Ausdrücke, die nur von q abhängen. Aus A-dur folgt nämlich $g^\# = A +$ gr. Septime $= A + q + t = 1 + 2t = 8q - 3$; daher $G^\# = 8q - 4$. Aus E-dur folgt $d^\# = E +$ gr. Septime $= 2t + q = 9q - 4$; daher $D^\# = 9q - 5$. Aus H-dur folgt $a^\# = H +$ gr. Septime $= 5q - 2 + q + t = 10q - 4$; daher $A^\# = 10q - 5$. Aus Fis-dur ergiebt sich $e^\# = F^\# +$ gr. Septime $= 6q - 3 + q + t = 11q - 5$; daher $E^\# = 11q - 6$. Aus Cis-dur endlich folgt $H^\# = C^\# +$ gr. Septime $= 7q - 4 + q + t = 12q - 6$. Die Molltonarten geben dasselbe.

Eben so folgt aus Es-dur $A^b = E^b +$ Quarte $= 3 - 4q$; aus As-dur $d^b = A^b +$ Quarte $= 4 - 5q$; daher $D^b = 3 - 5q$; aus Des-dur $G^b = D^b +$ Quarte $= 4 - 6q$; aus Ges-dur $c^b = G^b +$ Quarte $= 5 - 7q$; endlich aus As-moll $f^b = A^b +$ kl. Sexte $= 3 - 4q + 1 - t = 6 - 8q$; daher $F^b = 5 - 8q$. Die andern Tonarten, welche erniedrigte Haupttöne enthalten, geben dieselben Werthe.

Ordnen wir nun alle diese Bestimmungen nach den darin enthaltenen Vielfachen von q, so ergeben sich folgende zwei von C ausgehende Reihen:

$$\overbrace{\begin{array}{llll} G = q & & F = 1 - q \\ D = 2q - 1 & & H^b = 2 - 2q \\ A = 3q - 1 & & E^b = 2 - 3q \\ E = 4q - 2 & & A^b = 3 - 4q \\ H = 5q - 2 & & D^b = 3 - 5q \\ F^\sharp = 6q - 3 & & G^b = 4 - 6q \\ C^\sharp = 7q - 4 & & c^b = 5 - 7q \\ G^\sharp = 8q - 4 & & F^b = 5 - 8q \\ D^\sharp = 9q - 5 & & \\ A^\sharp = 10q - 5 & & \\ E^\sharp = 11q - 6 & & \\ H^\sharp = 12q - 6 & & \end{array}}^{C = 0}$$

§ 36.

Diese Bestimmungen geben nun für alle Tonarten gleichmässig folgende Werthe der die Dur- und Moll-Scalen bildenden Intervalle:

gr. Secunde,	gr. Terz,	Quarte,	Quinte,	gr. Sexte,	gr. Septime
$2q - 1$	$4q - 2$	$1 - q$	q	$3q - 1$	$5q - 2$
	kl. Terz,	kl. Sexte,	kl. Septime		
	$2 - 3q$	$3 - 4q$	$2 - 2q$.		

Hiernach ist also das allgemeine Schema der Durscala:

$$0,\ 2q - 1,\ 4q - 2,\ 1 - q,\ q,\ 3q - 1,\ 5q - 2,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$$2q - 1,\ 2q - 1,\ 3 - 5q,\ 2q - 1,\ 2q - 1,\ 2q - 1,\ 3 - 5q;$$

das allgemeine Schema der Mollscala (in der Form des Herabsteigens)

$$0,\ 2q - 1,\ 2 - 3q,\ 1 - q,\ q,\ 3 - 4q,\ 2 - 2q,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$$2q - 1,\ 3 - 5q,\ 2q - 1,\ 2q - 1,\ 3 - 5q,\ 2q - 1,\ 2q - 1.$$

In beiden kommen also nur zwei Stufen, $2q - 1$ und $3 - 5q$ vor. Das Schema der reinen Durscala dagegen ist

$$0,\ 2q - 1,\ t,\ 1 - q,\ q,\ 1 - q + t,\ q + t,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$$2q - 1,\ 1 - 2q + t,\ 1 - q - t,\ 2q - 1,\ 1 - 2q + t,\ 2q - 1,\ 1 - q - t;$$

das Schema der reinen Mollscala

$$0,\ 2q - 1,\ q - t,\ 1 - q,\ q,\ 1 - t,\ 2 - 2q,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$$2q-1,\ 1-q-t,\ 1-2q+t,\ 2q-1,\ 1-q-t,\ 1-2q+t,\ 2q-1.$$

Die reinen Scalen enthalten also drei verschiedene Stufen, nämlich $2q-1$, $1-2q+t$ und $1-q-t$, von denen die beiden ersten nur gleich sind, wenn $t=4q-2$, wo dann die dritte $=3-5q$ wird. Dass in der ungleichschwebenden Temperatur die Zahl und Grösse der Stufen, je nach der verschiedenen Reinheit der Tonarten, viel mannichfaltiger seyn muss, liegt in der Natur der Sache und findet in der oben ausgeführten Kirnbergerschen Temperatur seine Bestätigung. Tonleitern mit nicht mehr als zweierlei Stufen, $2q-1$ und $3-5q$, von denen die erstere grösser ist als die zweite, wenn $q>\frac{4}{7}>0{,}5714285\ldots$, besitzt also nur die gleichschwebende Temperatur. Die grössere Stufe ist das Doppelte der kleineren nur, wenn $q=\frac{7}{12}$.

§ 37.

Ohne für jetzt schon zu erörtern, ob die a. E. des § 35 bestimmten Töne der gleichschwebenden Temperatur sämmtlich von einander verschieden sind oder zum Theil zusammenfallen, geht aus jenen Ausdrücken hervor, dass bei dieser Temperatur, welchen Werth auch immerhin das Intervall der temperirten Quinte q haben mag, sämmtliche Töne durch Fortschreitungen nach Quinten und Quarten (unteren Quinten) bestimmt werden können. Schreiben wir nämlich um der grösseren Einfachheit willen statt $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, ..., $\bar{d}$, $\bar{\bar{d}}$, $\bar{\bar{\bar{d}}}$ ... u. s. w. c_1, c_2, c_3 ..., d_1, d_2, d_3 ... u. s. w., so erhalten wir aus jenen Formeln folgende Bestimmungen:

$$C=0,\ G=q,\ d=2q,\ a=3q,\ e_1=4q,\ h_1=5q,\ f_2^\sharp=6q,$$
$$c_3^\sharp=7q,\ g_3^\sharp=8q,\ d_4^\sharp=9q,\ a_4^\sharp=10q,\ e_5^\sharp=11q,\ h_5^\sharp=12q;$$

andrerseits, wenn wir zur Abkürzung $1-q=q'$ setzen,

$$F=q',\ H^b=2q',\ e^b=3q',\ a^b=4q',\ d_1^b=5q',\ g_1^b=6q',$$
$$c_2^b=7q',\ f_2^b=8q'.$$

In beiden Reihen ist aber hiermit die Fortschreitung nicht schlechthin geschlossen. Bezeichnen wir nämlich die doppelt, dreifach, vierfach erhöhten Haupttöne durch $c^{\sharp\sharp}$, $c^{3\sharp}$, $c^{4\sharp}$, $d^{\sharp\sharp}$, $d^{3\sharp}$, $d^{4\sharp}$ u. s. f. und eben so die doppelt, drei- und vierfach erniedrigten durch c^{bb}, c^{3b}, c^{4b} u. s. w., so kann man die Tonbestimmungen in beiden Reihen, wie folgt, fortsetzen. Es folgt auf $h_5^\sharp$

$f_6^{\#\#\#} = 13q$, $c_7^{\#\#\#} = 14q$, $g_7^{\#\#\#} = 15q$, $d_8^{\#\#\#} = 16q$, $a_8^{\#\#\#} = 17q$, $e_9^{\#\#\#} = 18q$, $h_9^{\#\#\#} = 19q$,

$f_{10}^{3\#} = 20q$, $c_{11}^{3\#} = 21q$, $g_{11}^{3\#} = 22q$, $d_{12}^{3\#} = 23q$, $a_{12}^{3\#} = 24q$, $e_{13}^{3\#} = 25q$, $h_{13}^{3\#} = 26q$,

$f_{14}^{4\#} = 27q$, $c_{15}^{4\#} = 28q$ u. s. f.

Eben so folgt auf f_2^b

$h_2^{bb} = 9q'$, $e_3^{bb} = 10q'$, $a_3^{bb} = 11q'$, $d_4^{bb} = 12q'$, $g_4^{bb} = 13q'$, $c_5^{bb} = 14q'$, $f_5^{bb} = 15q'$,

$h_5^{3b} = 16q'$, $e_6^{3b} = 17q'$, $a_6^{3b} = 18q'$, $d_7^{3b} = 19q'$, $g_7^{3b} = 20q'$, $c_8^{3b} = 21q'$, $f_8^{3b} = 22q'$,

$h_8^{4b} = 23q'$, $e_9^{4b} = 24q'$ u. s. f.

Alle diese mehrfach erhöhten und erniedrigten Haupttöne können nun auf den Raum zwischen dem Grundton und seiner Octave übergetragen werden, und so würden zwischen diese Grenzen unendlich viele Töne fallen, wenn alle diese Bestimmungen wirklich verschiedene Töne gäben. Es lässt sich aber zeigen, dass dies zwar der Fall ist, wenn q das Intervall der reinen Quinte bezeichnet, dass jedoch die Verschiedenheit eine endliche Grenze erreicht, wenn q das Intervall einer irgendwie temperirten Quinte darstellt.

Da nämlich nach § 15, (2) der genaue Ausdruck des Intervalls der reinen Quinte $= \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$, des Intervalls der reinen Quarte $= \frac{\log \frac{4}{3}}{\log 2}$ ist, so verhält sich das Intervall der Quinte zu dem der Octave wie $\log \frac{3}{2} : \log 2$, das Intervall der Quarte zu dem der Octave wie $\log \frac{4}{3} : \log 2$. Hieraus folgt die Incommensurabilität der Intervalle der reinen Quinte und Quarte mit dem der Octave. Dasselbe Resultat giebt die Vergleichung ihrer relativen Schwingungszahlen. Ständen nämlich die genannten Intervalle in rationalen Verhältnissen, so müsste die Vervielfachung des Quintenintervalls auf irgend eine Octave des Grundtons führen, daher es irgend eine ganze positive Zahl n geben, für welche $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ oder $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ einer ganzen positiven Potenz von 2 gleich würde, was unmöglich ist.

Wird dagegen die Quinte temperirt, so dass ihr Intervall zu dem der Octave in dem rationalen Verhältniss $m : n$ steht, also $= \frac{m}{n}$ ist, wo m und n relative Primzahlen sind, so müssen dann immer n temperirte Quinten genau gleich m Octaven seyn, so dass die $n$te Quinte irgend eines Tons mit der $m$ten Octave desselben Tons, die $(n+1)$te, $(n+2)$te, $(n+3)$te Quinte u. s. f. mit der $m$ten Octave der 1sten, 2ten, 3ten Quinte

u. s. w. jenes Tons zusammenfällt. Dasselbe gilt von der Quarte, Terz u. s. w. Ein solcher Cyclus von temperirten Quinten, Quarten, Terzen, die eine runde Zahl von Octaven ausfüllen, heisst ein **Quinten-, Quarten-, Terzen-Cirkel.**

§ 38.

Aus den vorstehenden allgemeinen Ausdrücken der erhöhten und erniedrigten Haupttöne der gleichschwebenden Temperatur ergeben sich nun auch eben so allgemeine Bestimmungen der Werthe ihrer einfachen und mehrfachen Erhöhungen und Erniedrigungen d. i. der Grösse der Intervalle zwischen den Haupttönen selbst und den erhöhten und erniedrigten Haupttönen. Es sind nämlich

1) die Intervalle

$C^{\#} - C$, $D^{\#} - D$, $E^{\#} - E$, $F^{\#} - F$, $G^{\#} - G$, $A^{\#} - A$, $H^{\#} - H$,
$C^{\#\#} - C^{\#}$, $D^{\#\#} - D^{\#}$, $E^{\#\#} - E^{\#}$, $F^{\#\#} - F^{\#}$, $G^{\#\#} - G^{\#}$, $A^{\#\#} - A^{\#}$, $H^{\#\#} - H^{\#}$,
$C^{3\#} - C^{\#\#}$, $D^{3\#} - D^{\#\#}$, $E^{3\#} - E^{\#\#}$ u. s. w.,

desgleichen die Intervalle

$C - C^{b}$, $D - D^{b}$, $E - E^{b}$, $F - F^{b}$, $G - G^{b}$, $A - A^{b}$, $H - H^{b}$,
$C^{b} - C^{bb}$, $D^{b} - D^{bb}$, $E^{b} - E^{bb}$, $F^{b} - F^{bb}$, $G^{b} - G^{bb}$, $A^{b} - A^{bb}$, $H^{b} - H^{bb}$,
$C^{bb} - C^{3b}$, $D^{bb} - D^{3b}$, $E^{bb} - E^{3b}$ u. s. w.,

sämmtlich unter einander gleich, nämlich $= 7q - 4$. Hieraus folgt

2) dass die Intervalle

$C^{\#\#} - C$, $D^{\#\#} - D$, $E^{\#\#} - E$ u. s. w. doppelt so gross als die Intervalle
$C^{\#} - C$, $D^{\#} - D$, $E^{\#} - E$ u. s. w.,

desgleichen, dass die Intervalle

$C - C^{bb}$, $D - D^{bb}$, $E - E^{bb}$ u. s. w. doppelt so gross als die Intervalle
$C - C^{b}$, $D - D^{b}$, $E - E^{b}$ u. s. w.,

also sämmtlich $= 2(7q - 4)$; eben so, dass die Intervalle

$C^{3\#} - C$, $D^{3\#} - D$, $E^{3\#} - E$ u. s. w. dreimal so gross als die Intervalle
$C^{\#} - C$, $D^{\#} - D$, $E^{\#} - E$ u. s. w.

und eben so, dass

$C - C^{3b}$, $D - D^{3b}$, $E - E^{3b}$ u. s. w. dreimal so gross als
$C - C^{b}$, $D - D^{b}$, $E - E^{b}$ u. s. w.,

also sämmtlich $= 3(7q - 4)$ sind u. s. f.

3) Die Intervalle

$D - C$, $E - D$, $G - F$, $A - G$, $H - A$,
$D^{\sharp} - C^{\sharp}$, $E^{\sharp} - D^{\sharp}$, $G^{\sharp} - F^{\sharp}$, $A^{\sharp} - G^{\sharp}$, $H^{\sharp} - A^{\sharp}$,
$D^{\sharp\sharp} - C^{\sharp\sharp}$, $E^{\sharp\sharp} - D^{\sharp\sharp}$, $G^{\sharp\sharp} - F^{\sharp\sharp}$, $A^{\sharp\sharp} - G^{\sharp\sharp}$, $H^{\sharp\sharp} - A^{\sharp\sharp}$,
$D^{3\sharp} - C^{3\sharp}$, $E^{3\sharp} - D^{3\sharp}$ u. s. w.,

desgleichen die Intervalle

$D^{b} - C^{b}$, $E^{b} - D^{b}$, $G^{b} - F^{b}$, $A^{b} - G^{b}$, $H^{b} - A^{b}$,
$D^{bb} - C^{bb}$, $E^{bb} - D^{bb}$, $G^{bb} - F^{bb}$, $A^{bb} - G^{bb}$, $H^{bb} - A^{bb}$,
$D^{3b} - C^{3b}$, $E^{3b} - D^{3b}$ u. s. w.

sind ebenfalls unter einander gleich, nämlich $= 2q - 1$, also gleich der grössern Tonstufe.

4) Eben so sind endlich die Intervalle

$F - E$, $c - H$, $F^{\sharp} - E^{\sharp}$, $c^{\sharp} - H^{\sharp}$, $F^{\sharp\sharp} - E^{\sharp\sharp}$, $c^{\sharp\sharp} - H^{\sharp\sharp}$,
$F^{3\sharp} - E^{3\sharp}$, $c^{3\sharp} - H^{3\sharp}$ u. s. w.,

desgleichen die Intervalle

$F^{b} - E^{b}$, $c^{b} - H^{b}$, $F^{bb} - E^{bb}$, $c^{bb} - H^{bb}$, $F^{3b} - E^{3b}$, $c^{3b} - H^{3b}$ u. s. w.

sämmtlich unter einander gleich, nämlich $= 3 - 5q$, also gleich der kleineren Tonstufe. Sie sind den Intervallen unter 1) aber nur dann gleich, wenn $q = \frac{7}{12}$.

§ 39.

Führen wir jetzt den die gleichschwebende Temperatur allgemein charakterisirenden Werth des Intervalls der grossen Terz $t = 4q - 2$ in die Tabelle des § 18 ein, so erhalten die dort benannten Intervalle folgende Ausdrücke, die wir, wie sie sich zum Intervall der Octave ergänzen, paarweise gegenüberstellen.

	x		x
Prime	0	Octave	1
kl. Diesis	$7 - 12q$	alterirte Octave	$12q - 6$
übermäss. Prime kls. Limma	$7q - 4$	gröss. klr. } vermind. Octave	$5 - 7q$
kl. Secunde grs. Limma	$3 - 5q$	gr. Septime alter. gr. Septime	$5q - 2$
klr. ganz. Ton gr. Secunde	$2q - 1$	gröss. klr. } kl. Septime	$2 - 2q$
kl. gr. } vermind. Terz	$6 - 10q$	gröss. klr. } übermäss. Sexte	$10q - 5$
klr. gr. } übermäss. Secunde	$9q - 5$	gröss. klr. } vermind. Septime	$6 - 9q$
alter. kl. Terz kl. Terz	$2 - 3q$	alter. gr. Sexte gr. Sexte	$3q - 1$
gr. Terz	$4q - 2$	kl. Sexte	$3 - 4q$
vermind. Quarte	$5 - 8q$	übermäss. Quinte	$8q - 4$
übermäss. Terz	$11q - 6$	vermind. Sexte	$7 - 11q$
Quarte alterirte Quarte	$1 - q$	Quinte alter. Quinte	q
klr. gröss. } übermäss. Quarte	$6q - 3$	gröss. klr. } vermind. Quinte	$4 - 6q$

Die Buchstabenbezeichnungen der Töne, welche durch diese Ausdrücke bestimmt werden, finden sich, mit Ausnahme derer für $6 - 9q$, $6 - 10q$, $7 - 11q$, $7 - 12q$, a. E. des § 35. Was diese noch übrigen vier betrifft, so ersieht man aus § 37 leicht, dass $6 - 9q = H^{bb}$, $6 - 10q = E^{bb}$, $7 - 11q = A^{bb}$ und $7 - 12q = D^{bb}$ ist. Da ferner eine Reihe von Intervallen, die, wenn t und q rein sind, verschiedene Werthe haben, wie die vorstehende Tabelle zeigt, zusammenfallen, sobald $t = 4q - 2$ wird, so gestattet dies für die gleichschwebende Temperatur eine vereinfachte Benennung der Intervalle, welche folgende Tafel zugleich mit den Bezeichnungen der dadurch bestimmten Töne übersehen lässt. Dass hier, gleichwie E^{bb} die verminderte Terz und H^{bb} die verminderte Septime heisst, so D^{bb} die verminderte Secunde genannt wird, rechtfertigt sich eben so von selbst, wie dass, nach Analogie von $E^{\#}$, als der übermässigen Terz, und $A^{\#}$, der übermässigen Sexte, $H^{\#}$ der Name der übermässigen Septime beigelegt ist.

		x			x
C,	Prime,	0	c,	Octave,	1
D^{bb},	vermind. Secunde,	$7-12q$	$H^{\#}$,	übermäss. Septime,	$12q-6$
$C^{\#}$,	übermäss. Prime,	$7q-4$	c^{b},	vermind. Octave;	$5-7q$
D^{b},	kleine Secunde,	$3-5q$	H,	grosse Septime,	$5q-2$
D,	grosse Secunde,	$2q-1$	H^{b},	kleine Septime,	$2-2q$
E^{bb},	vermind. Terz,	$6-10q$	$A^{\#}$,	übermäss. Sexte,	$10q-5$
$D^{\#}$,	übermäss. Secunde,	$9q-5$	H^{bb},	vermind. Septime,	$6-9q$
E^{b},	kleine Terz,	$2-3q$	A,	grosse Sexte,	$3q-1$
E,	grosse Terz,	$4q-2$	A^{b},	kleine Sexte,	$3-4q$
F^{b},	vermind. Quarte,	$5-8q$	$G^{\#}$,	übermäss. Quinte,	$8q-4$
$E^{\#}$,	übermäss. Terz,	$11q-6$	A^{bb},	vermind. Sexte,	$7-11q$
F,	Quarte,	$1-q$	G,	Quinte,	q
$F^{\#}$,	übermäss. Quarte,	$6q-3$	G^{b},	vermind. Quinte,	$4-6q$

IV.

VON DEN VERSCHIEDENEN ARTEN DER GLEICHSCHWEBENDEN TEMPERATUR.

§ 40.

Wir haben bisher die gleichschwebende Temperatur nach ihrem allgemeinen Begriffe aufgefasst, wonach sie diejenige Modification der reinen Intervalle und relativen Schwingungszahlen der Töne ist, wodurch die gleichbenannten Intervalle in allen Tonarten gleiche Grösse erhalten, mithin alle Scalen von der reinen Scala gleichviel abweichen. Es ergab sich, dass diese Modification durch die Gleichung $t = 4q - 2$ bestimmt ist, in der aber, wenn die grosse Terz nicht um ein syntonisches Komma oder $\frac{1}{9,6}$ gr. ganz. Ton von der Reinheit abweichen soll, q kleiner als das Intervall der reinen Quinte seyn muss. Ohne nun hier schon näher zu erörtern, ob diese Abweichung unter allen Umständen unstatthaft ist, leuchtet doch von selbst ein, dass, wenn es einen Werth von q giebt, der, ohne die Reinheit der Quinte merklich zu vermindern, nicht nur die grosse Terz, sondern auch die übrigen scalenbildenden Töne der Reinheit möglichst nahe bringt, dieser allen andern (unter übrigens gleichen Umständen) vorzuziehen seyn wird. Bevor wir aber einen solchen Werth zu finden versuchen, wird es nicht unzweckmässig seyn, allgemein zu erörtern, welchen Einfluss die Temperirung der Quinte auf die übrigen scalenbildenden Töne ausübt. Was nun zuerst die Quarte betrifft, so schwebt sie, da ihr Intervall $= 1 - q$, immer um ebensoviel auf- oder abwärts als die Quinte ab- oder aufwärts schwebt. Von den übrigen Tönen kommen nur noch in Betracht die grosse Secunde, deren temperirtes Intervall $= 2q - 1$, und deren reines $= 0,16992$; ferner die kleine Terz, deren temperirtes Intervall $= 2 - 3q$, und deren reines $= 0,26303$; die grosse Terz, deren temperirtes Intervall $= 4q - 2$, und deren reines $= 0,32193$; die grosse Septime, deren temperirtes

Intervall $= 5q - 2$, und deren reines $= 0{,}90689$ ist. Durch diese Töne sind kleine und grosse Sexte und kleine Septime vermöge der Ergänzungen zur Octave gegeben.

Hiernach ist nun die Abweichung der grossen Secunde von der Reinheit, oder ihre Schwebung $0{,}16992 - 2q + 1$, und die grosse Secunde schwebt $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem dieser Ausdruck $\gtrless 0$, also je nachdem

$$1{,}16992 - 2q \gtrless 0, \text{ d. i. } q \lessgtr 0{,}58496.$$

Da nun 0,58496 das Intervall der r e i n e n Quinte, so schwebt die grosse Secunde zugleich mit der Quinte ab- und aufwärts. Ferner ist die Schwebung der kleinen Terz

$$0{,}26303 - 2 + 3q \gtrless 0, \text{ je nachdem } q \gtrless 0{,}57899.$$

Die kleine Terz schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem die temperirte Quinte $\gtrless 0{,}57899$.

Ebenso ist die Schwebung der grossen Terz

$$0{,}32193 - 4q + 2 \gtrless 0, \text{ je nachdem } q \lessgtr 0{,}58048.$$

Die grosse Terz schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem die temperirte Quinte $\lessgtr 0{,}58048$.

Endlich ist die Schwebung der grossen Septime

$$0{,}90689 - 5q + 2 \gtrless 0, \text{ je nachdem } q \lessgtr 0{,}58138.$$

Die grosse Septime schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem die temperirte Quinte $\lessgtr 0{,}58138$.

Hieraus folgt: 1) wenn $q > 0{,}58496$, also die Quinte aufwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz aufwärts, die grosse Septime aufwärts;

2) wenn $q < 0{,}58496$, aber $> 0{,}58138$, also die Quinte um weniger als $0{,}00358 = \frac{1}{47{,}2}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz aufwärts, die grosse Septime aufwärts;

3) wenn $q < 0{,}58138$, aber $> 0{,}58048$, also die Quinte um weniger als $0{,}00448 = \frac{1}{34{,}7}$ gr. ganz. Ton, aber um mehr als $\frac{1}{47{,}2}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz aufwärts, die grosse Septime abwärts;

4) wenn $q < 0{,}58048$, aber $> 0{,}57899$, also die Quinte um weniger als $0{,}00597 = \frac{1}{28{,}3}$ gr. ganz. Ton, aber um mehr als $\frac{1}{34{,}7}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz abwärts, die grosse Septime abwärts;

5) wenn $q < 0{,}57899$, also die Quinte um mehr als $\frac{1}{28{,}3}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz aufwärts, die grosse Terz abwärts, die grosse Septime abwärts.

§ 41.

Die erste und einfachste Bestimmung von q, welche zu einer befriedigenden gleichschwebenden Temperatur führt, erhält man, wenn man auf das Bedürfniss der Musik, sich auf eine möglichst kleine Anzahl von Tönen zu beschränken, Rücksicht nimmt und dabei insbesondere die Tasteninstrumente ins Auge fasst. Da diese nämlich erhöhte und erniedrigte Haupttöne nicht unterscheiden können, sondern die nächstbenachbarten in einen mittleren Ton zusammenziehen, so ist für sie, wovon schon in § 32 Gebrauch gemacht wurde,

$$C^\# = D^b,\ D^\# = E^b,\ E^\# = F,\ F^b = E,\ F^\# = G^b,\ G^\# = A^b,\ A^\# = H^b,$$
$$H^\# = c,\ c^b = H.$$

Setzen wir nun in diese Gleichungen die a. E. des § 35 für die gleichschwebende Temperatur ganz im Allgemeinen gefundenen Intervallwerthe ein, so giebt jede derselben die Bedingungsgleichung

$$12q = 7;\ \text{woraus also folgt } q = \tfrac{7}{12}.$$

Dies giebt nun die bis jetzt allein bekannte gleichschwebende Temperatur, bei welcher die grosse Secunde $= \frac{2}{12}$, die kleine Terz $= \frac{3}{12}$, die grosse Terz $= \frac{4}{12}$ und die grosse Septime $= \frac{11}{12}$ wird, also die zwölf Töne und ihre Intervalle diejenigen Besiimmungen erhalten, die schon in § 16 und 17 bemerkt und hinsichtlich ihrer Abweichungen von den reinen Intervallen und den relativen Schwingungszahlen der dieselben bildenden Töne untersucht worden sind. Eine unmittelbare Folge dieser Zusammenziehung der Töne (die also auch für die Bestimmung derselben nach ungleichschwebender Temperatur gilt) ist, dass die in § 39 unterschiedenen 26 Intervalle sich auf 13 reduciren. Es wird nämlich

Prime verminderte Secunde	$= 0$	Octave übermäss. Septime	$= 1$
übermässige Prime kleine Secunde	$= \frac{1}{12}$	vermind. Octave grosse Septime	$= \frac{11}{12}$
grosse Secunde vermind. Terz	$= \frac{2}{12}$	kleine Septime übermäss. Sexte	$= \frac{10}{12}$
übermäss. Secunde kleine Terz	$= \frac{3}{12}$	vermind. Septime grosse Sexte	$= \frac{9}{12}$
grosse Terz verminderte Quarte	$= \frac{4}{12}$	kleine Sexte übermäss. Quinte	$= \frac{8}{12}$
übermässige Terz Quarte	$= \frac{5}{12}$	vermind. Sexte Quinte	$= \frac{7}{12}$
übermäss. Quarte verminderte Quinte	$= \frac{5}{12}$		

Hiernach sind dann diese paarweise zusammenfallenden Intervalle und die durch sie bestimmten Töne nur dem Namen nach von einander verschieden, und so entsteht als eine Folge dieser gleichschwebenden Temperatur das, was man jetzt ziemlich allgemein die »Mehrdeutigkeit der Töne« zu nennen pflegt. Die heutige theoretische Musik macht diese gleichschwebende Temperatur ausschliesslich zur Basis der Compositionslehre, wozu sie sich sowohl durch ihre Einfachheit als durch ihre Verwirklichung auf dem universellsten Instrument, dem Pianoforte, vorzüglich empfiehlt. Die praktische Musik dagegen weicht auf allen Instrumenten, welche die Hervorbringung des richtigen Tons der Geschicklichkeit des Spielers überlassen und daher nicht zu einer Zusammenziehung der erhöhten und erniedrigten Haupttöne genöthigt sind, von dieser Temperatur wesentlich ab. Denn es ist Thatsache, dass auf den Streichinstrumenten und im Gesange *Cis* und *Des*, *Dis* und *Es* u. s. w. *wirklich* unterschieden werden, und dass gerade durch diese Unterscheidung der feinere musikalische Sinn sich vorzüglich befriedigt fühlt.*) Es fragt sich nun, wie

*) Es muss befremden, diese Thatsache nicht nur in den musikalischen Lehrbüchern, sondern selbst in praktischen Anleitungen gänzlich ignorirt, ja geradezu verleugnet zu sehen. So sagt z. B. Marx (allgemeine Musiklehre, 4. Aufl. S. 41): »*c* — *cis* klingt wie *c* — *des*, *h* — *c* ist ebenso gross wie *b* — *h* oder *c* — *cis*.« Die Wahrheit ist aber, dass nur *c* — *cis* und *b* — *h* einerseits, *c* — *des* und *h* — *c* andrerseits streng gleich, nicht aber jene Intervalle diesen im Allgemeinen gleich sind; denn die Grösse

diese Thatsache mit der gleichschwebenden Temperatur, an welche die moderne Musik unabänderlich gebunden ist, sich vereinigen lässt: ob jene Abweichungen nur als gelegentliche Ausnahmen von der Regel zu betrachten sind, oder ihnen ein bestimmtes Gesetz, ein festes Princip zum Grunde liegt.

§ 42.

Um nun zu untersuchen, ob es ausser dem Werthe $\frac{7}{12}$, der auf die bekannte gleichschwebende Temperatur führt (die wir von jetzt an zur Abkürzung die gewöhnliche Temperatur nennen wollen), noch andre Werthe von q giebt, welche den allgemeinen Forderungen einer gleichschwebenden Temperatur gnügen, bieten sich uns zwei Wege dar. Da nämlich $q = \frac{7}{12}$ einen Näherungswerth der reinen Quinte darstellt, so kann zuerst in Frage kommen, welche andre genäherte Werthe der reinen Quinte es ausserdem giebt, und welche von ihnen den musikalischen Forderungen entsprechen. Die Gleichung $q = \frac{7}{12}$ hat aber auch die Bedeutung, dass 12 Quinten nahe gleich 7 Octaven sind, dass also, wenn man vom Grundton aus nach temperirten Quintenintervallen von der Grösse $\frac{7}{12}$ fortschreitet, die 12te Quinte mit der 7ten Octave zusammentrifft, woraus der gemeine Quintencirkel entsteht (vgl. § 37). Da bis auf 8 Decimalstellen genau das reine Quintenintervall $= 0{,}58496250$ ist, so wird das Zwölffache hiervon $= 7{,}0195500$. Es übertrifft also das Intervall von 12 Quinten das von 7 Octaven um $0{,}01955$ oder nahe um $\frac{1}{8{,}7}$ gr. ganz. Ton, ein Intervall, welches das ditonische oder pythagorische Komma heisst, und dem die relative Schwingungszahl $\frac{531441}{524288}$ entspricht. Es kann nun nach dieser Auslegung des Werthes $\frac{7}{12}$ der temperirten Quinte zweitens untersucht werden, ob es ausser dem gemeinen noch andre Quintencirkel giebt, die in noch grösserer Schärfe auf ein rationales Verhältniss des Intervalls der Quinte zu dem der Octave führen und sonst den musikalischen Anforderungen entsprechen. Ob diese beiden Wege zu einem und demselben Endziele leiten, oder einer dem andern vorzuziehen ist, kann sich erst durch den weiteren Verfolg derselben ergeben.

---

jener ersteren wird durch $7q - 4$, die der letzteren durch $3 - 5q$ ausgedrückt, welche Werthe nur wenn $q = \frac{7}{12}$, also nur in der gleichschwebenden Temperatur der Tasteninstrumente zusammenfallen. Aehnliche Behauptungen wie die vorstehenden kann man in Spohr's Violinschule lesen.

§ 43.

Was nun den ersten dieser beiden Wege betrifft, so giebt es zwar unzählig viele genäherte Werthe des reinen Quintenintervalls, die sich in rationalen Brüchen ausdrücken lassen. Diejenigen aber, welche sich diesem Werth mit steigender Genauigkeit nähern und ihn in den kleinsten Zahlen darstellen, erhält man, wenn jenes Intervall durch einen Kettenbruch ausgedrückt wird. Nun ist das Intervall der reinen Quinte $= \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$. Man könnte also diesen Ausdruck in einen Kettenbruch verwandeln. Da jedoch derselbe mit mehr als zureichender Genauigkeit durch 0,5849625 oder $\frac{46797}{80000}$ dargestellt wird, so ist es einfacher, diesen Werth durch einen Kettenbruch auszudrücken. Hierdurch wird nun

$$\frac{46797}{80000} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{23+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}}$$

woraus sich nach bekannter Methode die genäherten Werthe

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5;\quad \tfrac{3}{5} = 0{,}6;\quad \tfrac{7}{12} = 0{,}5833333;\quad \tfrac{24}{41} = 0{,}5853659;$$
$$\tfrac{31}{53} = 0{,}5849057;\quad \tfrac{179}{306} = 0{,}5849673;\quad \tfrac{389}{665} = 0{,}5849624;\ \text{u. s. f.}$$

ergeben, die abwechselnd kleiner und grösser als der wahre Werth sind. Von diesen Werthen ist nun der dritte das Quintenintervall der gewöhnlichen Temperatur. Der vierte $\frac{24}{41}$ giebt eine um 0,0004034 oder $\frac{1}{424{,}8}$ gr. ganz. Ton aufwärts schwebende, also so gut als völlig reine Quinte, aus der das Intervall der grossen Terz $\frac{14}{41} = 0{,}34146$ folgt, so dass also die grosse Terz um 0,01953 oder $\frac{1}{8{,}7}$ gr. ganz. Ton (nahe das pythagorische Komma) aufwärts schwebt. Der fünfte Werth $\frac{31}{53}$ giebt eine um 0,0000568 oder $\frac{1}{2991{,}7}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebende Quinte, die auf das Intervall der grossen Terz $\frac{18}{53} = 0{,}33962$ führt, so dass diese um 0,01769 oder $\frac{1}{9{,}6}$ gr. ganz. Ton aufwärts schwebt, u. s. f. Bevor wir nun die Brauchbarkeit dieser Werthe in nähere Betrachtung ziehen, wollen wir erst untersuchen, ob auf dem zweiten angegebenen Wege sich Näherungswerthe des Intervalls der Quinte finden lassen, die zwar nothwendig weniger genau seyn können, vielleicht aber dasselbe mit schärferer Genauigkeit als $\frac{7}{12}$ und zugleich in kleineren Zahlen, als es durch $\frac{24}{41}$ und $\frac{31}{53}$ geschieht, darstellen.

§ 44.

Zu diesem Zwecke bilden wir eine Tafel aller Vielfachen des Intervalls der reinen Quinte, von dem 13fachen bis zum 53fachen derselben. Bezeichnen wir das reine Quintenintervall 0,5849625 zum Unterschied vom temperirten, q, durch q_1, so erhalten wir folgende bis auf die letzte Decimale genaue Ergebnisse. Es ist

$13q_1 = 7,60451$	$34q_1 = 19,88873$
$14q_1 = 8,18948$	$35q_1 = 20,47369$
$15q_1 = 8,77444$	$36q_1 = 21,05865$
$16q_1 = 9,35940$	$37q_1 = 21,64361$
$17q_1 = 9,94436$	$38q_1 = 22,22858$
$18q_1 = 10,52933$	$39q_1 = 22,81354$
$19q_1 = 11,11429$	$40q_1 = 23,39850$
$20q_1 = 11,69925$	$41q_1 = 23,98346$
$21q_1 = 12,28421$	$42q_1 = 24,56843$
$22q_1 = 12,86918$	$43q_1 = 25,15339$
$23q_1 = 13,45414$	$44q_1 = 25,73835$
$24q_1 = 14,03910$	$45q_1 = 26,32331$
$25q_1 = 14,62406$	$46q_1 = 26,90828$
$26q_1 = 25,20903$	$47q_1 = 27,49324$
$27q_1 = 15,79393$	$48q_1 = 28,07820$
$28q_1 = 16,37895$	$49q_1 = 28,66316$
$29q_1 = 16,96391$	$50q_1 = 29,24813$
$30q_1 = 17,54888$	$51q_1 = 29,83309$
$31q_1 = 18,13384$	$52q_1 = 30,41805$
$32q_1 = 18,71880$	$53q_1 = 31,00301$
$33q_1 = 19,30376$	

Von diesen Vielfachen kommen nun zuvörderst $24q_1$, $36q_1$, $48q_1$, nicht in Betracht, da sie blos die Vielfachen des Cirkels von 12 Quinten sind. Von den übrigen nähern sich bis auf weniger als 0,2 einer ganzen Zahl von Octaven $17q_1$, $19q_1$, $22q_1$, $29q_1$, $31q_1$, $39q_1$, $41q_1$, $43q_1$, $46q_1$, $51q_1$, $53q_1$, von denen $41q_1$ und $53q_1$ schon aus dem vorigen § bekannt sind. Unter den übrig bleibenden geben aber nur $19q_1$, $31q_1$, $43q_1$ abwärts schwebende Quinten, die der andern schweben aufwärts. Denn ist allgemein $mq_1 = n \pm \omega$, wo m und n ganze positive Zahlen sind und $\pm\omega$ die kleinste Differenz zwischen dem Vielfachen mq_1 und der ganzen Zahl n von Octavenintervallen ausdrückt, und soll $mq = n$ seyn, so folgt $q = q_1 \mp \frac{\omega}{m}$; die temperirte Quinte schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\\text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem $mq_1 \gtrless n$ ist; es fordert also die abwärts schwebende Quinte $mq_1 > n$. Dies ist nun aber nur bei den drei bezeichneten Vielfachen der Fall, von denen $19q_1 > 11$, $31q_1 > 18$, $43q_1 > 25$ ist, indess $17q_1 < 9$, $22q_1 < 13$, $29q_1 < 17$, $39q_1 < 23$, $46q_1 < 27$, $51q_1 < 30$. Es können also nur jene drei Vielfache, welche die temperirten Quintenintervalle $\frac{11}{19}$, $\frac{18}{31}$, $\frac{25}{43}$ geben, für Temperaturbestimmungen tauglich seyn. In welchem Grade sie sich dazu eignen, wollen wir specieller untersuchen.

§ 45.

Der Werth des Intervalls der temperirten Quinte $q = \frac{11}{19} = 0{,}57895$ giebt folgendes Tonsystem:

$C = 0 = 0{,}00000$	$H^{\sharp} = c = 1 = 1{,}00000$
$C^{\sharp} = \frac{1}{19} = 0{,}05263$	$c^{b} = \frac{18}{19} = 0{,}94737$
$D^{b} = \frac{2}{19} = 0{,}10536$	$H = \frac{17}{19} = 0{,}89474$
$D = \frac{3}{19} = 0{,}15790$	$H^{b} = \frac{16}{19} = 0{,}84210$
$D^{\sharp} = \frac{4}{19} = 0{,}21053$	$A^{\sharp} = \frac{15}{19} = 0{,}78947$
$E^{b} = \frac{5}{19} = 0{,}26316$	$A = \frac{14}{19} = 0{,}73684$
$E = \frac{6}{19} = 0{,}31579$	$A^{b} = \frac{13}{19} = 0{,}68421$
$F^{b} = \frac{7}{19} = 0{,}36842$	$G^{\sharp} = \frac{12}{19} = 0{,}63168$
$E^{\sharp} = F = \frac{8}{19} = 0{,}42105$	$G = \frac{11}{19} = 0{,}57895$
$F^{\sharp} = \frac{9}{19} = 0{,}47368$	$G^{b} = \frac{12}{19} = 0{,}52632$

Die Abweichung des Quintenintervalls von der Reinheit beträgt hier 0,00601 oder $\frac{1}{28,2}$ gr. ganz. Ton; die des Intervalls der grossen Terz, welche abwärts schwebt, 0,00614 oder $\frac{1}{27,7}$ gr. ganz. Ton. Für die kleine Terz, welche aufwärts schwebt, ist sie $= 0,00013$ oder $\frac{1}{130,7}$ gr. ganz. Ton; für die abwärts schwebende grosse Secunde $= 0,01203$ oder $\frac{1}{14,1}$ gr. ganz. Ton; für die abwärts schwebende grosse Septime $= 0,01215$ oder $\frac{1}{14}$ gr. ganz. Ton. Hiernach ist in diesem System die kleine Terz und grosse Sexte so gut als völlig rein, Quinte und Quarte, grosse Terz und kleine Sexte weichen von der Reinheit fast unmerklich, grosse Secunde und kleine Septime, kleine Secunde und grosse Septime um weniger ab als die kleine Terz und grosse Sexte in der gewöhnlichen Temperatur, also um eine zulässige Grösse. Das System bietet also hinsichtlich des Grades seiner Reinheit keinen erheblichen Anstoss dar. Die grössere Stufe seiner Scala (§ 36) $2q - 1$ ist $= \frac{3}{19}$, die kleinere $3 - 5q = \frac{2}{19}$, die letztere also $= \frac{2}{3}$ der ersteren, so dass die Stufenfolge der Durscala ist:

$$3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,$$

die Bewegung durch die Tonleiter also sich dem gleichmässigen Fortschritt mehr nähert als in der Tonleiter 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1 der gewöhnlichen Temperatur, darum aber auch träger, weniger rhythmisch erscheint. Kann nun diese Eigenschaft des Systems bedenklich scheinen, so stehen ihm noch zwei andre Ausstellungen entgegen. Erstens nämlich ist das Intervall der zwei nächst benachbarten Töne $C^\sharp$ und $D^\flat$, $D^\sharp$ und $E^\flat$ u. s. w. $= \frac{1}{19} = 0,05263$, oder $\frac{1}{3,2}$ g. g. T., was ohne Zweifel ein viel zu bedeutender Unterschied ist. Sodann aber sind die Abweichungen von der gewöhnlichen Temperatur für mehrere Töne so bedeutend, dass beim Zusammenspiel von Streich- und Tasteninstrumenten, wenn die ersteren sich nach der vorliegenden Temperatur richteten, Missklänge unvermeidlich wären. Denn diese Abweichungen sind z. B. für $C^\sharp = \frac{1}{5,5}$, für $D^\sharp = \frac{1}{4,3}$, für $F^\sharp = \frac{1}{6,5}$, für $G^\sharp = \frac{1}{4,8}$ g. g. T.

§ 46.

Das temperirte Quintenintervall $q = \frac{18}{31} = 0,58065$ führt auf folgendes Tonsystem:

$C = 0 = 0,00000$	$c = 1 = 1,00000$
$H^{\#\#} = D^{bb} = \frac{1}{31} = 0,03226$	$H^{\#} = \frac{30}{31} = 0,96774$
$C^{\#} = \frac{2}{31} = 0,06452$	$c^{b} = \frac{29}{31} = 0,93548$
$D^{b} = \frac{3}{31} = 0,09677$	$H = \frac{28}{31} = 0,90323$
$C^{\#\#} = \frac{4}{31} = 0,12903$	$A^{\#\#} = c^{bb} = \frac{27}{31} = 0,87097$
$D = \frac{5}{31} = 0,16129$	$H^{b} = \frac{26}{31} = 0,83871$
$E^{bb} = \frac{6}{31} = 0,19355$	$A^{\#} = \frac{25}{31} = 0,80645$
$D^{\#} = \frac{7}{31} = 0,22581$	$H^{bb} = \frac{24}{31} = 0,77419$
$E^{b} = \frac{8}{31} = 0,25807$	$A = \frac{23}{31} = 0,74193$
$D^{\#\#} = F^{bb} = \frac{9}{31} = 0,29032$	$G^{\#\#} = \frac{22}{31} = 0,70968$
$E = \frac{10}{31} = 0,32258$	$A^{b} = \frac{21}{31} = 0,67742$
$F^{b} = \frac{11}{31} = 0,35484$	$G^{\#} = \frac{20}{31} = 0,64516$
$E^{\#} = \frac{12}{31} = 0,38710$	$A^{bb} = \frac{19}{31} = 0,61290$
$F = \frac{13}{31} = 0,41935$	$G = \frac{18}{31} = 0,58065$
$E^{\#\#} = G^{bb} = \frac{14}{31} = 0,45161$	$F^{\#\#} = \frac{17}{31} = 0,54839$
$F^{\#} = \frac{15}{31} = 0,48387$	$G^{b} = \frac{16}{31} = 0,51613$

Es mag hier zuvörderst eine Bemerkung ihre Stelle finden, die nicht blos dieses Tonsystem, sondern auch die nachfolgenden betrifft: diese nämlich, dass es nicht als ein Tadel eines Tonsystems gelten kann, wenn es auf doppelt und mehrfach erhöhte Haupttöne und somit auf Töne führt, die in der Musik nicht vorkommen. Denn wenn sich von diesen Tönen ihnen eigenthümliche Zahlwerthe angeben lassen, so sind sie nicht blos in der Einbildung vorhandene (sogenannte papierne), sondern wirkliche, reelle. Dass die Musik von diesen Tönen keinen Gebrauch macht, rührt nur daher, dass sie sich auf 12 oder höchstens 14 Tonarten beschränkt, die übrigen aber, wegen ihrer geringen Verschiedenheit von jenen bräuchlichen und der Schwierigkeit des Spiels in ihnen auf den Instrumenten, welche eine feinere Unterscheidung der Töne gewähren, unberücksichtigt lässt. Sie leugnet aber nicht und kann nicht leugnen, dass in der Consequenz ihres Princips doppelt und mehrfach erhöhte und erniedrigte Töne liegen, denn sie kann nicht behaupten, dass z. B. *Gis*-dur, der auf $F^{\#\#}$, *Dis*-dur, der auf $F^{\#\#}$ und $C^{\#\#}$, *Des*-moll, der auf H^{bb}, *Ges*-moll, der auf H^{bb} und E^{bb} führt, unmögliche Tonarten sind. Diese ungebraucht liegen bleibenden Töne werden dem System, in welchem sie vorkommen, auf keine Weise zum Hinderniss, wofern nur die Bestimmung der in Gebrauch kommenden musikalisch genügend erscheint. Man kann sie, wo es nicht auf Vollständigkeit der Uebersicht ankommt, ganz übergehen, zum System aber gehören sie, als Glieder des zum Grunde liegenden Quintencirkels, wesentlich.

Was nun das vorliegende besondre System betrifft, so ist die Abweichung von der Reinheit: für die Quinte $= 0{,}00431 = \frac{1}{39{,}4}$ g. g. T.; für die aufwärts schwebende grosse Terz $= 0{,}00065 = \frac{1}{251{,}4}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende kleine Terz $= 0{,}00496 = \frac{1}{34{,}3}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende gr. Secunde $= 0{,}00864 = \frac{1}{19{,}7}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende gr. Septime $= 0{,}00366 = \frac{1}{46{,}4}$ g. g. T. Es ist hier also die gr. Terz und kl. Sexte so gut als völlig rein, die übrigen scalenbildenden Töne aber weichen von der Reinheit noch weniger ab als in dem System des vorigen §'s. Die grössere Stufe der Tonleiter wird hier $= \frac{5}{31}$, die kleinere $= \frac{3}{31}$, also $= \frac{3}{5}$ der grösseren. Hierdurch wird die Stufenfolge der Durscala

5, 5, 3, 5, 5, 5, 3

und nähert sich somit mehr der der gewöhnlichen Temperatur. Die Intervalle zwischen $C^{\#}$ und D^{b}, $D^{\#}$ und E^{b} u. s. w. betragen hier $\frac{1}{31} = 0{,}03226$ oder $\frac{1}{5{,}2}$ g. g. T., sind also bedeutend kleiner als im vorigen System. Endlich sind auch die Abweichungen von der gewöhnlichen Temperatur geringer als dort; denn diese betragen: für $C^{\#}$ nur $\frac{1}{9}$, für $D^{\#}$ noch $\frac{1}{7}$, für $F^{\#}$ noch $\frac{1}{10{,}5}$, für $G^{\#}$ noch $\frac{1}{7{,}9}$ g. g. T. Dieses Tonsystem erscheint also in jeder Hinsicht vollkommener als das im vorigen § entwickelte.

§ 47.

Das temperirte Quintenintervall $q = \frac{25}{43} = 0{,}58140$ endlich giebt folgendes Tonsystem:

$C = 0 = 0{,}00000$	$c = 1 = 1{,}00000$
$D^{bb} = \frac{1}{43} = 0{,}02326$	$H^{\#} = \frac{42}{43} = 0{,}97674$
$\underline{H}^{\#\#} = \frac{2}{43} = 0{,}04651$	$A^{3\#} = d^{bb} = \frac{41}{43} = 0{,}95349$
$C^{\#} = \frac{3}{43} = 0{,}06977$	$c^{b} = \frac{40}{43} = 0{,}93023$
$D^{b} = \frac{4}{43} = 0{,}09302$	$H = \frac{39}{43} = 0{,}90698$
$\underline{H}^{3\#} = E^{3b} = \frac{5}{43} = 0{,}11628$	$A^{\#\#} = \frac{38}{43} = 0{,}88372$
$C^{\#\#} = \frac{6}{43} = 0{,}13953$	$c^{bb} = \frac{37}{43} = 0{,}86047$
$D = \frac{7}{43} = 0{,}16279$	$H^{b} = \frac{36}{43} = 0{,}83721$
$E^{bb} = \frac{8}{43} = 0{,}18605$	$A^{\#} = \frac{35}{43} = 0{,}81395$
$C^{3\#} = F^{3b} = \frac{9}{43} = 0{,}20930$	$G^{3\#} = c^{3b} = \frac{34}{43} = 0{,}79070$
$D^{\#} = \frac{10}{43} = 0{,}23256$	$H^{bb} = \frac{33}{43} = 0{,}76744$
$E^{b} = \frac{11}{43} = 0{,}25581$	$A = \frac{32}{43} = 0{,}74419$
$F^{bb} = \frac{12}{43} = 0{,}27907$	$G^{\#\#} = \frac{31}{43} = 0{,}72093$
$D^{\#\#} = \frac{13}{43} = 0{,}30233$	$H^{3b} = \frac{30}{43} = 0{,}69767$
$E = \frac{14}{43} = 0{,}32558$	$A^{b} = \frac{29}{43} = 0{,}67442$
$F^{b} = \frac{15}{43} = 0{,}34884$	$G^{\#} = \frac{28}{43} = 0{,}64116$
$D^{3\#} = G^{3b} = \frac{16}{43} = 0{,}37209$	$F^{3\#} = \frac{27}{43} = 0{,}62791$
$E^{\#} = \frac{17}{43} = 0{,}39535$	$A^{bb} = \frac{26}{43} = 0{,}60465$
$F = \frac{18}{43} = 0{,}41860$	$G = \frac{25}{43} = 0{,}58140$
$G^{bb} = \frac{19}{43} = 0{,}44187$	$F^{\#\#} = \frac{24}{43} = 0{,}55813$
$E^{\#\#} = \frac{20}{43} = 0{,}46512$	$E^{3\#} = A^{3b} = \frac{23}{43} = 0{,}53488$
$F^{\#} = \frac{21}{43} = 0{,}48837$	$G^{b} = \frac{22}{43} = 0{,}51163$

In diesem System ist die Abweichung von der Reinheit: für die Quinte $= 0{,}00356 = \frac{1}{47{,}7}$ g. g. T.; für die aufwärts schwebende grosse Terz $= 0{,}00365 = \frac{1}{46{,}5}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende kleine Terz $= 0{,}00722 = \frac{1}{23{,}5}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende gr. Secunde $= 0{,}00714 = \frac{1}{23{,}7}$ g. g. T.; für die aufwärts schwebende gr. Septime $= 0{,}00009 = \frac{1}{1888}$ g. g. T. Quinte, Quarte, gr. Terz und kl. Sexte weichen also hier von der Reinheit fast gleich und halb so viel ab, als kl. Terz, gr. Sexte, gr. Secunde und kl. Septime, deren Abweichungen ebenfalls fast gleich sind. Die Grösse aller dieser Abweichungen ist so gering, dass sie für völlig unmerklich gelten können; die gr. Septime aber ist so gut als vollkommen rein. Die grössere Stufe der Tonleiter ist in diesem System $= \frac{7}{43}$, die kleinere $= \frac{4}{43}$, also $= \frac{4}{7}$ der grösseren. Demnach ist hier die Stufenfolge der Durscala:

$$7,\ 7,\ 4,\ 7,\ 7,\ 7,\ 4,$$

und nähert sich also der der gewöhnlichen Temperatur noch mehr als in dem System des vorigen §'s. Die Intervalle zwischen $C^\#$ und D^b, $D^\#$ und E^b u. s. w. sind hier $= \frac{1}{43} = 0{,}02326$ oder $\frac{1}{7{,}3}$ g. g. T. Die Abweichung von der gewöhnlichen Temperatur endlich beträgt für $C^\#$ nur noch $\frac{1}{12{,}5}$, für $D^\#$ noch $\frac{1}{9{,}7}$, für $F^\# \ldots \frac{1}{15}$, für $G^\# \ldots \frac{1}{6{,}6}$ g. g. T. Nur die letztere also ist grösser als im vorigen System. Mit diesem verglichen, erscheint demnach das System, welches auf dem Cirkel von 43 Quinten beruht, in einzelnen Tönen zwar weniger, im Ganzen aber gleichmässiger rein, als das aus dem Cirkel von 31 Quinten hervorgehende, insbesondere aber in Bezug auf die grössere Reinheit der Quinte und Quarte und das Verhältniss der beiden Tonstufen vollkommener als dieses letztere.

§ 48.

In Folge dieser steigenden Vollkommenheit der drei ausgeführten Systeme*) erhebt sich nun von selbst die Frage, ob nicht ein Tonsystem möglich ist, welches sich in Bezug auf die scalenbildenden Töne und ihre Intervalle der Reinheit mehr nähert als jedes andere. Es giebt in der That ein solches System, und wir können es ohne Schwierigkeit nachweisen. Da nämlich durch die grosse Secunde, grosse Terz, Quinte, grosse Septime und kleine Terz oder grosse Sexte die übrigen scalenbildenden Töne gegeben sind, so wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate diejenigen Intervallwerthe dieser Töne, welche die grösstmögliche Annäherung der Gesammtheit derselben an die reinen Intervalle darstellen, erhalten, wenn man das Quintenintervall q so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den allgemeinen, von q abhängigen Ausdrücken der temperirten

---

*) Zu ihnen könnte als viertes auch noch das aus 50 Quinten gezählt werden, welches $q = \frac{29}{50} = 0{,}58000$ giebt, demnach zwischen den Systemen aus 19 und 31 Quinten fast genau in der Mitte liegt und darum der Ausführung nicht bedarf.

Intervalle jener fünf Töne mit den gleichnamigen reinen Intervallen ein Minimum wird. Da nun das temperirte Intervall der grossen Secunde $= 2q - 1$, das der grossen Terz $= 4q - 2$, das der Quinte $= q$, das der grossen Sexte $= 3q - 1$, das der grossen Septime $= 5q - 2$ war (§ 39), so fordert die angegebene Bedingung, wenn wir die reinen Intervalle der genannten Töne der Reihe nach durch d, e, g, a, h bezeichnen, dass die Summe

$$(d - 2q + 1)^2 + (e - 4q + 2)^2 + (g - q)^2 + (a - 3q + 1)^2 + (h - 5q + 2)^2$$

ein Minimum sey. Dieser Forderung wird Gnüge geleistet, wenn wir den Differentialquotienten dieser Summe in Bezug auf die Veränderliche q gleich Null setzen. Hieraus ergiebt sich

$$q = \frac{23 + 2d + 4e + g + 3a + 5h}{55}.$$

Setzt man nun für die Intervalle d, e, g, a, h ihre logarithmischen Ausdrücke $\frac{\log \frac{9}{8}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{5}{4}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{15}{8}}{\log 2}$, so erhält man nach einigen Reductionen

$$q = \frac{\log\left(\frac{3^7 \cdot 5^{12}}{2^7}\right)}{55 \cdot \log 2},$$

woraus sich ergiebt

$$q = 0{,}5810541,$$

was der gesuchte Werth des temperirten Quintenintervalls ist. Offenbar können nun die den beiden in den §§ 46 und 47 entwickelten Tonsystemen zum Grunde liegenden Werthe $q = \frac{18}{31} = 0{,}58065$ und $q = \frac{25}{43} = 0{,}58140$ als Annäherungen an den so eben gefundenen Werth von q angesehen werden. Die schärfsten Näherungswerthe in den kleinstmöglichen Zahlen aber erhält man durch Verwandlung des gefundenen Werths von q in den Kettenbruch

$$0{,}5810541 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}}}}}}}}}.$$

aus dem wir, wenn wir uns auf diejenigen Näherungswerthe beschränken, die aus ein- oder zweiziffrigen Zahlen bestehen, erhalten

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{7}{12},\ \frac{18}{31},\ \frac{43}{74},$$

so dass also unter diesen Brüchen $\frac{43}{74} = 0{,}58108$ dem genauen Werthe der gefundenen temperirten Quinte am nächsten kommt.

§ 49.

Aus diesem Werthe von q ergiebt sich nun ein Tonsystem, welches wir als das der möglich reinsten gleichschwebenden Temperatur werden bezeichnen dürfen. Wir begnügen uns, dasselbe bis zu den doppelt erhöhten und erniedrigten Haupttönen und denjenigen dreifach erniedrigten, welche einige von ihnen zur Octave ergänzen, darzustellen und den scharfen Bestimmungen der Intervalle die genäherten, durch 74stel ausgedrückt, in Klammern beizufügen.

C	$= 0{,}00000;$		c	$= 1{,}00000;$	
D^{bb}	$= 0{,}02735;$	$\left(\frac{2}{74}\right)$	$H^{\sharp}$	$= 0{,}97265;$	$\left(\frac{72}{74}\right)$
$H^{\sharp\sharp}$	$= 0{,}04003;$	$\left(\frac{3}{74}\right)$	D^{3b}	$= 0{,}95997;$	$\left(\frac{71}{74}\right)$
$C^{\sharp}$	$= 0{,}06738;$	$\left(\frac{5}{74}\right)$	c^{b}	$= 0{,}93262;$	$\left(\frac{69}{74}\right)$
D^{b}	$= 0{,}09473;$	$\left(\frac{7}{74}\right)$	H	$= 0{,}90527;$	$\left(\frac{67}{74}\right)$
E^{3b}	$= 0{,}12208;$	$\left(\frac{9}{74}\right)$	$A^{\sharp\sharp}$	$= 0{,}87792;$	$\left(\frac{65}{74}\right)$
$C^{\sharp\sharp}$	$= 0{,}13476;$	$\left(\frac{10}{74}\right)$	c^{bb}	$= 0{,}86524;$	$\left(\frac{64}{74}\right)$
D	$= 0{,}16211;$	$\left(\frac{12}{74}\right)$	H^{b}	$= 0{,}83789;$	$\left(\frac{62}{74}\right)$
E^{bb}	$= 0{,}18946;$	$\left(\frac{14}{74}\right)$	$A^{\sharp}$	$= 0{,}81054;$	$\left(\frac{60}{74}\right)$
$D^{\sharp}$	$= 0{,}22949;$	$\left(\frac{17}{74}\right)$	H^{bb}	$= 0{,}77051;$	$\left(\frac{57}{74}\right)$
E^{b}	$= 0{,}25684;$	$\left(\frac{19}{74}\right)$	A	$= 0{,}74316;$	$\left(\frac{55}{74}\right)$
F^{bb}	$= 0{,}28419;$	$\left(\frac{21}{74}\right)$	$G^{\sharp\sharp}$	$= 0{,}71581;$	$\left(\frac{53}{74}\right)$
$D^{\sharp\sharp}$	$= 0{,}29687;$	$\left(\frac{22}{74}\right)$	H^{3b}	$= 0{,}70313;$	$\left(\frac{52}{74}\right)$
E	$= 0{,}32422;$	$\left(\frac{24}{74}\right)$	A^{b}	$= 0{,}67578;$	$\left(\frac{50}{74}\right)$
F^{b}	$= 0{,}35157;$	$\left(\frac{26}{74}\right)$	$G^{\sharp}$	$= 0{,}64843;$	$\left(\frac{48}{74}\right)$
$E^{\sharp}$	$= 0{,}39160;$	$\left(\frac{29}{74}\right)$	A^{bb}	$= 0{,}60840;$	$\left(\frac{45}{74}\right)$
F	$= 0{,}41895;$	$\left(\frac{31}{74}\right)$	G	$= 0{,}58105;$	$\left(\frac{43}{74}\right)$
G^{bb}	$= 0{,}44630;$	$\left(\frac{33}{74}\right)$	$F^{\sharp\sharp}$	$= 0{,}55370;$	$\left(\frac{41}{74}\right)$
$E^{\sharp\sharp}$	$= 0{,}45897;$	$\left(\frac{34}{74}\right)$	A^{3b}	$= 0{,}54103;$	$\left(\frac{40}{74}\right)$
$F^{\sharp}$	$= 0{,}48632;$	$\left(\frac{36}{74}\right)$	G^{b}	$= 0{,}51368;$	$\left(\frac{38}{74}\right)$

Die Abweichungen von der Reinheit sind nun hier: für die Quinte $= 0{,}00391 = \frac{1}{43{,}4}$ g. g. T.; für die grosse Terz $= 0{,}00229 = \frac{1}{74{,}2}$ g. g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}00619 = \frac{1}{27{,}4}$ g. g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}00782 = \frac{1}{21{,}7}$ g. g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}00162 = \frac{1}{104{,}9}$ g. g. T. — Gegen das System aus 43 Quinten gehalten ist also hier die Reinheit der Quinte, grossen Secunde und grossen Septime etwas geringer, die der beiden Terzen jedoch grösser. Dass aber dieses System in der Totalität der scalenbildenden Töne reiner ist als jedes der zuvor dargestellten, erhellt deutlich, wenn man die Summe der Quadrate der (theils positiven, theils negativen) Abweichungen, welche hier auf ein Minimum gebracht ist, sowohl für dieses System als für die andern wirklich berechnet. Es ergiebt sich dann:

für $q = 0{,}58105 \left(\frac{43}{74}\right)$ die Summe der Quadrate der Abweichungen $= 0{,}0001225$;
„ $q = 0{,}58140 = \frac{25}{43}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0001290$;
„ $q = 0{,}58065 = \frac{18}{31}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0001315$;
„ $q = 0{,}57895 = \frac{11}{19}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0003659$;
„ $q = 0{,}58333 = \frac{7}{12}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0004089$.

Diese Uebersicht weist also die steigende Reinheit der entwickelten Tonsysteme von dem der gewöhnlichen Temperatur aus bis zu dem der möglich reinsten nach. Es kann an der letzteren auch nicht für einen gewichtigen Tadel gelten, dass die Quinte weniger rein ist als die grosse Terz und grosse Septime; denn das Ohr empfindet eine Abweichung um $\frac{1}{43}$ des ganzen Tons fast so wenig als die um $\frac{1}{74}$ und $\frac{1}{105}$. — Die grössere Stufe dieses Systems ist sehr nahe $= \frac{12}{74}$, die kleinere $= \frac{7}{74}$ der Octave, also $= \frac{7}{12}$ der grösseren, daher die Stufenfolge der Durscala

12, 12, 7, 12, 12, 12, 7,

die sich der der gewöhnlichen Temperatur mehr nähert als alle vorigen. — Die Intervalle zwischen $C^{\#}$ und D^{b}, $D^{\#}$ und E^{b} u. s. w. sind hier $= 0{,}02735 = \frac{1}{6{,}2}$ g. g. T., also grösser als in den Systemen aus 31 und 43 Quinten. Die Abweichung von der gewöhnlichen Temperatur endlich beträgt für $C^{\#} \ldots \frac{1}{10{,}7}$ g. g. T., für $D^{\#} \ldots \frac{1}{8{,}3}$ g. g. T., für $F^{\#} \ldots \frac{1}{12{,}4}$ g. g. T., für $G^{\#} \ldots \frac{1}{9{,}3}$, ist also für die drei ersten von diesen Tönen etwas grösser, für den letzten aber geringer als im System aus 43 Quinten.

§ 50.

Erfüllt nun dieses letzte unter den vier dargelegten Tonsystemen, welche erhöhte und erniedrigte Töne unterscheiden, die musikalische Forderung möglichst reiner Scalen in allen Tonarten so vollständig, als es der Natur der Sache nach überhaupt möglich ist, so steht doch seiner Anwendbarkeit in der Musik ein Bedenken entgegen, das zugleich die drei anderen Temperaturen derselben Art trifft, auf das aber, obgleich diese letztgenannten nicht neu sind,*) die theoretischen Schriften über Musik, so weit sie uns bekannt wurden, nicht aufmerksam machen. In allen diesen Tonsystemen nämlich liegt, eben so wie in der oben (§ 29 f.) erwähnten und beurtheilten akustischen Tontabelle, $C^{\#}$ tiefer als D^{b}, $D^{\#}$ tiefer als E^{b}, $F^{\#}$ tiefer als G^{b} u. s. f. Diese Lage wird auch in den Schriften über Compositionslehre, sofern sie überhaupt des ganzen Unterschiedes gedenken, als die richtige anerkannt.**) Gegen diese Angabe hat Herbart in einer Abhandlung „über die Tonlehre"***) folgenden Einwand gemacht: »Wir stellen — sagt er — in Abrede, was die physikalischen Schriften von der sogenannten enharmonischen Tonfolge zu sagen pflegen. Nach ihnen sollen die Töne so auf einander folgen: *c*, *cis*, *des*, *d*, *dis*, *es*, *e* u. s. w., anstatt dass sie folgen müssen: *c*, *des*, *cis*, *d*, *es*, *dis*, *e* u. s. w. Fortschreitungen wie diese

$$\begin{array}{cccc} \bar{d}, & \bar{e}^{b}, & \bar{d}^{\#}, & \bar{e} \\ b & \bar{c} & h & h \\ f & f & f^{\#} & e \\ B & A & A & G^{\#} \end{array}$$

sind in der Musik nicht selten. Nun weiss Jedermann, dass die falsche Quinte *es* im Sext-Quinten-Accorde sich unterwärts auflösen muss, hingegen *dis* nach Oben zu *e* hinstrebt. Wenn also ein Violinspieler oder

---

*) Es hat z. B. das aus 43 Quinten entstehende schon Sauveur in den *Mém. de l'Acad. de Paris*, 1701, angegeben (vgl. Opelt über die Natur der Musik S. 39); das aus 31 Quinten Galin (s. Delezenne in dem *Receuil des travaux de la société des sciences de Lille*, 1827, *p.* 20).

**) So sagt z. B. G. Weber (Theorie der Tonsetzkunst Bd. I. S. 35. 2. Aufl.): die Taste zwischen *C* und *D*, wenn sie als *Cis* vorkommt, soll eigentlich nicht ganz so hoch klingen, wie wenn sie als *Des* erscheint; *Fis* nicht ganz so hoch wie *Ges*, *Es* nicht so tief wie *Dis*, *Eis* nicht ganz so hoch wie *F* u. s. w.

***) Psychologische Untersuchungen, I, S. 101 (Werke, I, S. 260).

Sänger *es* spielt oder singt, so treibt ihn sein Gefühl nach Unten (? soll wol heissen Oben); soll er nun *es* in *dis* verwandeln, so bekommt er einen Impuls nach Oben. In Folge dieses Impulses muss er den Ton *es* nicht erniedrigen (denn es wird ihm verboten, nach Unten sich zu wenden), sondern ihn erhöhen, denn nach Oben hin wird er getrieben in demselben Augenblick, wo ihm vorgeschrieben ist, *dis* anstatt *es* zu denken und zu spielen. Dagegen fordert jene physikalische Lehre von ihm, er solle rückwärts nach Unten gehen, in demselben Augenblick, wo er einen Antrieb aufwärts bekommt« u. s. w.*) In der That kommt der hier bezeichnete Fall bei Modulationen durch enharmonische Verwechselung sehr häufig vor. Wenn auf dem Tasteninstrument diese Verwechselung nur eine Vertauschung des Namens eines und desselben wiederholten Tons ist, so gewinnt sie auf dem Streichinstrument die Bedeutung eines vermittelnden Uebergangs zum nächstfolgenden höheren oder tieferen Tone, die aber nur möglich ist, wenn die erniedrigten Töne tiefer liegen als die ihnen nächsten erhöhten. Wir sind hierin überdies durch die Versicherung tüchtiger Musiker bestätigt worden, dass der Violinist nicht blos gelegentlich, sondern stets *Cis* höher als *Des*, *Dis* höher als *Es* u. s. w. greife. Wir können daher die entgegengesetzte Ansicht nur aus dem Respect vor der angeführten akustischen Tabelle erklären, in der die Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne für eben so sicher gehalten wurden, wie es die der Haupttöne sind. Vielleicht scheute man sich auch vor der Folgerung, dass ja dann die übermässige Prime höher liege als die kleine Secunde, die übermässige Secunde höher als die kleine Terz u. s. w.; wovor man jedoch nicht zurückzuschrecken braucht, wenn man bedenkt, dass diese Benennungen von den reinen Tönen und Intervallen auf die temperirten übergegangen sind (vgl. § 39), und es daher nicht zu verwundern ist, wenn ihr Wortsinn mit ihrer sachlichen Bedeutung nicht mehr ganz zusammenstimmt, obgleich ihr Zusammenhang mit den (nun temperirten) Haupttönen und deren Intervallen unverändert geblieben ist.

---

*) Herbart, selbst schon theoretisch und praktisch mit der Musik vertraut, fand für diese Ansicht Beistimmung bei einem Manne vom Fach, seinem Freund Griepenkerl in Braunschweig. Dieser ist es, der (a. a. O. S. 120) an Herbart schreibt: *Cis* ist höher als *des*, *dis* höher als *es* u. s. w. Es gilt dies von jedem zufällig erhöhten und zufällig erniedrigten Tone, wenn beide auf dem Clavier dieselbe Taste haben.

§ 51.

Aus der Tabelle a. E. von § 39 geht hervor, dass die Differenzen oder Intervalle $D^b - C^\#$, $E^b - D^\#$, $F^b - E$, $F - E^\#$, $G^b - F^\#$, $A^b - G^\#$, $H^b - A^\#$, $c^b - H^\#$ für jede Art von gleichschwebender Temperatur gleich, nämlich, wenn q das Intervall der temperirten Quinte, $= 7 - 12q$ sind. Es sind daher diese Differenzen positiv, null oder negativ, je nachdem q kleiner, gleich oder grösser als $\frac{7}{12}$. Die gewöhnliche Temperatur also, in der $q = \frac{7}{12}$ und $C^\#$ und D^b, $D^\#$ und E^b u. s. w. zusammenfallen, scheidet alle übrigen gleichschwebenden Temperaturen in zwei Classen, in deren einer $q < \frac{7}{12}$ und D^b höher als $C^\#$, E^b höher als $D^\#$ liegt u. s. w., indess in der andern $q > \frac{7}{12}$ ist und D^b tiefer als $C^\#$, E^b tiefer als $D^\#$ liegt u. s. f. Die in den vorgehenden §§ angegebenen vier Temperaturen gehören sämmtlich in die erste Classe. Wir haben uns also jetzt nach Temperaturen der zweiten Classe umzuthun, in denen, wenn die Quinte abwärts schweben soll, $q > 0{,}58333$ und $< 0{,}58496$ seyn muss. Dass hierbei die Intervalle der grossen Secunde, $2q - 1$, der grossen Terz, $4q - 2$, grossen Sexte, $3q - 1$, und grossen Septime $5q - 2$ nothwendig grösser und, was hieraus unmittelbar folgt, die der kleinen Secunde, kleinen Terz, Quarte, kleinen Sexte und kleinen Septime kleiner als in der gewöhnlichen Temperatur werden müssen, leuchtet von selbst ein. Es folgt daraus aber, wie sich sogleich zeigen wird, nicht, dass deshalb alle diese Intervalle sich durch die Erhöhung der Quinte mehr von der Reinheit entfernen müssten, als es in der gewöhnlichen Temperatur geschieht. Man hat sich überhaupt des Vorurtheils zu entschlagen, als ob diese Temperatur die vollkommenste wäre, da sie es in der That nur für die Tasteninstrumente ist, die auf zwölf Töne beschränkt sind, im Uebrigen ihr aber nur die Bedeutung der mittleren gleichschwebenden Temperatur zwischen den angeführten zwei Classen zukommt, von denen die zweite näher zu untersuchende jedenfalls noch reinere Quinten und Quarten hat, im Uebrigen aber schon (§ 49) gezeigt worden ist, dass diese mittlere Temperatur in der Gesammtheit ihrer Bestimmungen den Temperaturen der ersten Classe an Reinheit nachsteht.

§ 52.

Von den in § 44 ausgezeichneten Quintencirkeln ist eigentlich nur einer vorhanden, der eine Temperatur der zweiten Classe giebt, nämlich der, dessen Quinte $= \frac{31}{53}$. Da jedoch der Werth $q = \frac{24}{41}$ sich in der Reihe der schärfsten Näherungswerthe der reinen Quinte befindet und seine Schwebung aufwärts sehr klein ist (vgl. § 43), so steht er so dicht an der obern Grenze der Classe, dass er wohl mit berücksichtigt zu werden verdient. Dieser Quintenwerth giebt nun folgendes Tonsystem:

c	$= 0$	$= 0{,}00000$	c	$= 1$	$= 1{,}00000$
$H^{\#}$	$= \frac{1}{41}$	$= 0{,}02439$	d^{bb}	$= \frac{40}{41}$	$= 0{,}97561$
$A^{3\#} = E^{3b}$	$= \frac{2}{41}$	$= 0{,}04878$	$A^{\#\#}$	$= \frac{39}{41}$	$= 0{,}95122$
D^{b}	$= \frac{3}{41}$	$= 0{,}07317$	H	$= \frac{38}{41}$	$= 0{,}92683$
$C^{\#}$	$= \frac{4}{41}$	$= 0{,}09756$	c^{b}	$= \frac{37}{41}$	$= 0{,}90244$
$H^{\#\#}$	$= \frac{5}{41}$	$= 0{,}12195$	$G^{3\#} = d^{3b}$	$= \frac{36}{41}$	$= 0{,}87805$
E^{bb}	$= \frac{6}{41}$	$= 0{,}14634$	$A^{\#}$	$= \frac{35}{41}$	$= 0{,}85366$
D	$= \frac{7}{41}$	$= 0{,}17073$	H^{b}	$= \frac{34}{41}$	$= 0{,}82927$
$C^{\#\#}$	$= \frac{8}{41}$	$= 0{,}19512$	c^{bb}	$= \frac{33}{41}$	$= 0{,}80488$
$H^{3\#} = F^{bb}$	$= \frac{9}{41}$	$= 0{,}21951$	$G^{\#\#}$	$= \frac{32}{41}$	$= 0{,}78049$
E^{b}	$= \frac{10}{41}$	$= 0{,}24390$	A	$= \frac{31}{41}$	$= 0{,}75610$
$D^{\#}$	$= \frac{11}{41}$	$= 0{,}26829$	H^{bb}	$= \frac{30}{41}$	$= 0{,}73171$
$C^{3\#} = G^{3b}$	$= \frac{12}{41}$	$= 0{,}29268$	$F^{3\#} = c^{3b}$	$= \frac{29}{41}$	$= 0{,}70732$
F^{b}	$= \frac{13}{41}$	$= 0{,}31707$	$G^{\#}$	$= \frac{28}{41}$	$= 0{,}68293$
E	$= \frac{14}{41}$	$= 0{,}34146$	A^{b}	$= \frac{27}{41}$	$= 0{,}65854$
$D^{\#\#}$	$= \frac{15}{41}$	$= 0{,}36585$	$E^{3\#} = H^{3b}$	$= \frac{26}{41}$	$= 0{,}63425$
G^{bb}	$= \frac{16}{41}$	$= 0{,}39024$	$F^{\#\#}$	$= \frac{25}{41}$	$= 0{,}60976$
F	$= \frac{17}{41}$	$= 0{,}41463$	G	$= \frac{24}{41}$	$= 0{,}58537$
$E^{\#}$	$= \frac{18}{41}$	$= 0{,}43902$	A^{bb}	$= \frac{23}{41}$	$= 0{,}56098$
$D^{3\#} = A^{3b}$	$= \frac{19}{41}$	$= 0{,}46341$	$E^{\#\#}$	$= \frac{22}{41}$	$= 0{,}53659$
G^{b}	$= \frac{20}{41}$	$= 0{,}48780$	$F^{\#}$	$= \frac{21}{41}$	$= 0{,}51220$

Die Abweichungen von der Reinheit sind hier: für die Quinte $= 0{,}00041 = \frac{1}{412{,}5}$ g. T. $\left(\text{genauer nach § 43 nur } \frac{1}{424{,}8}\right)$; für die grosse Terz $= 0{,}01953 = \frac{1}{8{,}7}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}01913 = \frac{1}{8{,}9}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}00080 = \frac{1}{212{,}4}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}01994 = \frac{1}{8{,}5}$ g. T. Quinte, Quarte, grosse Secunde und kleine Septime sind also so gut als völlig rein; dagegen weichen die beiden Terzen, die grosse Septime und kleine Secunde beträchtlicher von der Reinheit ab, als nach den gewöhnlichen Ansichten zulässig scheint. Bewährte Theoretiker, wie Marpurg u. A., geben nämlich an, dass die grosse Terz um nicht mehr als höchstens $\frac{10}{21}$ der kleinen Diesis, die kleine Terz um nicht mehr als $\frac{10}{32}$ des Drittheilstons abwärts schweben dürfe. Es ist nicht wahrscheinlich, dass diese Vorschrift auf Versuchen beruht; denn es hätte dann bemerklich werden müssen, dass beide Bestimmungen völlig gleich sind, da aus den Intervallgrössen der kleinen Diesis $= 0{,}03422$ (§ 18) und des Drittheilstons $= 0{,}05214$ (§ 19) sofort sich ergiebt, dass $\frac{10}{21}$ der ersteren gleich $\frac{10}{32}$ der zweiten, nämlich $= 0{,}01629$ d. i. $= \frac{1}{10{,}4}$ g. T. ist. Angenommen jedoch diese Vorschrift sey in ihrer ganzen Bestimmtheit begründet, so bezieht sie sich, wie die bisherigen Untersuchungen über Temperatur überhaupt, vorzugsweise auf die Stimmung der Tasten- und eines Theils der Blasinstrumente. Wo nun, wie da, erhöhte und erniedrigte Töne zusammenfallen, ist es wohl begreiflich, dass der Zwischenraum zwischen der aufwärts schwebenden grossen und der abwärts schwebenden kleinen Terz nicht so gross seyn darf, als da, wo zwei Mitteltöne Platz finden. Wenn ferner an der Kirnbergerschen Temperatur getadelt worden ist, dass in einigen Tonarten die grossen Terzen um ein syntonisches Komma $= \frac{1}{9{,}4}$ g. T. höher sind als die reinen, so ist auch dies ein andres Verhältniss als im vorliegenden Falle. Denn da auf einem nach dieser Temperatur gestimmten Instrument (eine Stimmung, die vor Scheibler's Stimmmethode gar nicht genau ausführbar war) das Ohr bei jeder Ausweichung aus einer reineren Tonart in eine unreinere oder umgekehrt aus dieser in jene reinere Terzen mit unreineren unmittelbar zu vergleichen Gelegenheit hat, so muss dann ohnfehlbar ein weit grellerer Eindruck entstehen, als wo in allen Tonarten alle grossen Terzen und ebenso alle übrigen gleichnamigen Intervalle gleichviel sich von der Reinheit entfernen; daher wird hier selbst eine grössere Abweichung keine auffallende Wirkung hervorbringen. Es ist überhaupt zu beachten, dass unsre moderne Musik uns nur temperirte Töne und Intervalle hören lässt und hieraus ohne Zweifel eine gewisse Gewöhnung entsteht. Diese schwächt nun zwar nicht oder verdirbt gar die Empfänglichkeit für die reinen Consonanzen und Accorde; dass aber der, welcher solche Reinheit hört, wie Scheibler*) sagt, sein »frohes Erstaunen über diese wohlthuende Reinheit ausspricht«, verräth sehr deutlich, wie wenig wir sie zu hören gewohnt sind und — nach der Natur unsrer heutigen Musik — sie hören können. Es ist daher mindestens eben so wichtig die grössten Abweichungen des vorliegenden Systems von der gewöhnlichen oder mittleren Temperatur zu untersuchen als die von der Reinheit. Sie sind folgende: für die Quinte $= 0{,}00204 = \frac{1}{83{,}3}$ g. T.; für die grosse Terz $= 0{,}00813 = \frac{1}{20{,}9}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}00610 = \frac{1}{27{,}9}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}01594 = \frac{1}{10{,}6}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}01016 = \frac{1}{16{,}7}$. Diese Abweichungen sind also, mit Ausnahme der grossen Secunde, kleiner als die, um welche die gewöhnliche Temperatur in den Terzen von der Reinheit sich entfernt. Für $C^\sharp$ beträgt der Unterschied $0{,}01423 = \frac{1}{11{,}9}$ g. T., für $D^\sharp$ ist er $= 0{,}01829 = \frac{1}{9{,}2}$ g. T., für $F^\sharp = 0{,}01220 = \frac{1}{13{,}9}$ g. T., für $G^\sharp = 0{,}01626 = \frac{1}{10{,}4}$ g. T. Diese Abweichungen sind also grösser als die vorigen. Es ist aber auch bekannt, dass der Violinist beim Zusammenspiel mit dem Pianoforte die erhöhten und erniedrigten Töne weniger scharf zu nehmen pflegt, als er sonst gewohnt ist, sondern sich der Temperatur des Pianoforte anbequemt. — Die grössere Stufe dieses Systems ist $= \frac{7}{41}$, die kleinere $= \frac{4}{41}$, also $= \frac{4}{7}$ der grösseren; die Durscala hat demnach dieselbe Form wie in dem System aus 43 Quinten (§ 47). Die Grösse der Intervalle zwischen D^b und $C^\sharp$, E^b und $D^\sharp$ u. s. w. ist hier $= \frac{1}{43}$ der Octave oder $\frac{1}{7}$ der grossen Secunde, was zugleich sehr nahe $= \frac{1}{7}$ g. T. ist.

§ 53.

Was endlich die temperirte Quinte betrifft, deren Intervall $q = \frac{31}{53}$ ist, so führt sie auf folgendes Tonsystem:

*) Ueber mathematische Stimmung, Temperatur und Orgelstimmung, S. 23.

$C = 0 = 0{,}00000$

$H^{\#} = \frac{1}{53} = 0{,}01887$

$A^{3\#} = F^{4b} = \frac{2}{53} = 0{,}03774$

$E^{3b} = \frac{3}{53} = 0{,}05660$

$D^{b} = \frac{4}{53} = 0{,}07547$

$C^{\#} = \frac{5}{53} = 0{,}09434$

$H^{\#\#} = \frac{6}{53} = 0{,}11321$

$A^{4\#} = F^{3b} = \frac{7}{53} = 0{,}13208$

$E^{bb} = \frac{8}{53} = 0{,}15094$

$D = \frac{9}{53} = 0{,}16981$

$C^{\#\#} = \frac{10}{53} = 0{,}18868$

$H^{3\#} = G^{4b} = \frac{11}{53} = 0{,}20755$

$F^{bb} = \frac{12}{53} = 0{,}22642$

$E^{b} = \frac{13}{53} = 0{,}24528$

$D^{\#} = \frac{14}{53} = 0{,}26415$

$C^{3\#} = \frac{15}{53} = 0{,}28302$

$H^{4\#} = G^{3b} = \frac{16}{53} = 0{,}30189$

$F^{b} = \frac{17}{53} = 0{,}32076$

$E = \frac{18}{53} = 0{,}33962$

$D^{\#\#} = \frac{19}{53} = 0{,}35849$

$C^{4\#} = A^{4b} = \frac{20}{53} = 0{,}37736$

$G^{bb} = \frac{21}{53} = 0{,}39623$

$F = \frac{22}{53} = 0{,}41509$

$E^{\#} = \frac{23}{53} = 0{,}43496$

$D^{3\#} = \frac{24}{53} = 0{,}45283$

$A^{3b} = \frac{25}{53} = 0{,}47170$

$G^{b} = \frac{26}{53} = 0{,}49057$

$c = 1 = 1{,}00000$

$d^{bb} = \frac{52}{53} = 0{,}98113$

$G^{4\#} = e^{4b} = \frac{51}{53} = 0{,}96226$

$A^{\#\#} = \frac{50}{53} = 0{,}94340$

$H = \frac{49}{53} = 0{,}92453$

$c^{b} = \frac{48}{53} = 0{,}90566$

$d^{3b} = \frac{47}{53} = 0{,}88679$

$G^{3b} = \frac{46}{53} = 0{,}86792$

$A^{\#} = \frac{45}{53} = 0{,}84906$

$H^{b} = \frac{44}{53} = 0{,}83019$

$c^{bb} = \frac{43}{53} = 0{,}81132$

$F^{4\#} = d^{4b} = \frac{42}{53} = 0{,}79245$

$G^{\#\#} = \frac{41}{53} = 0{,}77358$

$A = \frac{40}{53} = 0{,}75472$

$H^{bb} = \frac{39}{53} = 0{,}73585$

$E^{4\#} = c^{3b} = \frac{38}{53} = 0{,}71698$

$F^{3\#} = \frac{37}{53} = 0{,}69811$

$G^{\#} = \frac{36}{53} = 0{,}67924$

$A^{b} = \frac{35}{53} = 0{,}66038$

$H^{3b} = \frac{34}{53} = 0{,}64151$

$E^{3\#} = c^{4b} = \frac{33}{53} = 0{,}62264$

$F^{\#\#} = \frac{32}{53} = 0{,}60377$

$G = \frac{31}{53} = 0{,}58491$

$A^{bb} = \frac{30}{53} = 0{,}56504$

$D^{4\#} = H^{4b} = \frac{29}{53} = 0{,}54717$

$E^{\#\#} = \frac{28}{53} = 0{,}52830$

$F^{\#} = \frac{27}{53} = 0{,}50943$

Dieses System hat wesentlich denselben Charakter wie das vorige, nur nähert es sich mehr sowohl der Reinheit als der mittleren Temperatur. Die Abweichungen von der Reinheit sind nämlich: für die jetzt abwärts schwebende Quinte $= 0{,}00006 = \frac{1}{2832}$ g. T.; für die grosse

Terz $= 0{,}01769 = \frac{1}{9{,}6}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}01775 = \frac{1}{9{,}6}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}00011 = \frac{1}{1544{,}4}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}01764 = \frac{1}{9{,}6}$ g. T. Quinte, Quarte, grosse Secunde und kleine Septime sind also als völlig rein zu betrachten, Terzen und Sexten, sowie die kleine Secunde und grosse Septime weichen um etwas weniger als das syntonische Komma ab. Die Abweichungen von der gewöhnlichen oder mittleren Temperatur sind: für die Quinte $= 0{,}00157 = \frac{1}{108{,}2}$ g. T.; für die grosse Terz $= 0{,}00629 = \frac{1}{27}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}00472 = \frac{1}{36}$ g. T.; für die gr. Secunde $= \frac{1}{54}$ g. T.; für die grosse Septime $= \frac{1}{21{,}6}$ g. T., also sämmtlich unmerklich klein. Für $C^{\#}$ beträgt der Unterschied von der mittleren Temperatur $0{,}01101 = \frac{1}{15{,}3}$ g. T.; für $D^{\#}$ ... $0{,}01414 = \frac{1}{12}$ g. T.; für $F^{\#}$ ... $0{,}00943 = \frac{1}{18}$ g. T.; für $G^{\#}$ ... $0{,}01257 = \frac{1}{13{,}1}$ g. T.; der Unterschied ist also für alle diese Töne sehr gering und fast unmerklich. — Sehr kurz lässt sich die Lage der einfach erhöhten und erniedrigten Töne durch die Bemerkung angeben, dass die erniedrigten Töne D^b, E^b, F^b, G^b, A^b, H^b, c^b fast genau mit ihren Bestimmungen nach der Kirnbergerschen Temperatur zusammenfallen, die ihnen (§ 32) nächstbenachbarten erhöhten aber sämmtlich um $\frac{1}{9}$ g. T. (das Komma der Alten) höher liegen.

Die grössere Stufe dieses Systems ist $= \frac{9}{53}$, die kleinere $= \frac{5}{53}$, also $= \frac{5}{9}$ der grösseren, folglich ziemlich nahe $= \frac{1}{2}$. Die Stufenfolge der Durscala ist also hier

$$9, \quad 9, \quad 5, \quad 9, \quad 9, \quad 9, \quad 5,$$

und nähert sich demnach der Stufenfolge der mittleren mehr als die aller anderen im Vorigen dargelegten Temperaturen.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, dass dieses Tonsystem (und mit weniger Schärfe auch das vorige aus 41 Quinten) in der Tonfolge

$$C, \quad D, \quad F^b, \quad F, \quad G, \quad H^{bb}, \quad c^b, \quad c$$

mit unmerkbaren Abweichungen die *reine* C-durscala, und eben so in der Tonfolge

$$c, \quad H^b, \quad G^{\#}, \quad G, \quad F, \quad D^{\#}, \quad D, \quad C,$$

die absteigende *reine* C-mollscala darstellt. Es besitzt aber diese genäherten reinen Scalen auch in jeder andern Tonart. Denn da, um bei der Durscala stehen zu bleiben, diese durch die Intervalle

$$0,\ \frac{9}{53},\ \frac{17}{53},\ \frac{22}{53},\ \frac{31}{53},\ \frac{39}{53},\ \frac{48}{53},\ 1$$

bezeichnet ist, so braucht man nur diese Werthe zu dem Intervallwerth des zum Grundton angenommenen Tons zu addiren, um die Intervalle zu erhalten, welche die für diesen Grundton die Durscala bildenden Töne mit C haben, und daraus diese selbst nach der Tabelle zu finden. Sey z. B. E^b der Grundton, dessen Intervall $= \frac{13}{53}$, so sind die Töne der *Es*-durscala bestimmt durch die Intervalle

$$\frac{13}{53},\ \frac{22}{53},\ \frac{30}{53},\ \frac{35}{53},\ \frac{44}{53},\ \frac{52}{53},\ \frac{61}{53},\ \frac{66}{53},$$

denen die Töne

$$E^b,\ F,\ A^{bb},\ A^b,\ H^b,\ d^{bb},\ e^{bb},\ e^b$$

entsprechen, welche also die nahe reine *Es*-durscala darstellen.

§ 54.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen übrig, ob es nicht vielleicht noch ein andres Tonsystem giebt, welches bei derselben enharmonischen Tonfolge sich der Reinheit und der mittleren Temperatur noch mehr nähert. Dass die in § 43 gefundenen Näherungswerthe der Quinte $\frac{179}{306} = 0{,}5849673$, $\frac{389}{665} = 0{,}5849624$ u. s. f., welche auf $\frac{31}{53} = 0{,}5849057$ folgen, die Hauptintervalle nicht reiner geben können als $q = \frac{31}{53}$, geht sofort daraus hervor, dass sie grösser als dieser Werth sind, also, in den Ausdrücken $2q - 1$, $3q - 1$, $4q - 2$, $5q - 2$ der Intervalle der grossen Secunde, Sexte, Terz und Septime substituirt, nothwendig stärker abweichende Werthe geben müssen. Da nun in dem Vorigen erwiesen ist, dass es keinen Cirkel von weniger als 53 Quinten giebt, der, bei gleicher enharmonischer Tonfolge wie dieser, sich der Reinheit mehr näherte, so kann nur ein Cirkel, dessen Quintenzahl zwischen 53 und 306 oder 306 und 665 u. s. f. liegt, grössere Reinheit gewähren, die Grösse seines Quintenintervalls aber wird zwischen den Grenzen $\frac{31}{53}$ und $\frac{7}{12}$ enthalten seyn müssen. Solcher Cirkel giebt es nun in der That unzählig viele, aber es lässt sich zeigen, dass *bei merklicher Zunahme der Reinheit des Systems die Unterscheidbarkeit der erhöhten Töne von den erniedrigten in stärkerem Masse sich vermindert.* Wir können nämlich nach der Reinheit der grossen Terz die Reinheit des Systems beurtheilen, da ihr Intervall von dem Vierfachen der temperirten Quinte abhängt, indess in der grossen Sexte nur das Dreifache, in der grossen Secunde nur das Doppelte, in der grossen Septime aber zwar das Fünffache der temperirten Quinte vorkommt, diese aber eine stärkere Abweichung verträgt als die grosse Terz, die nächst der Quinte am reinsten seyn soll. Aendert sich nun q um Δq, so ist die Aenderung des Intervalls der grossen Terz $-4\Delta q$. Es ist aber nach der Tabelle a. E. des § 39 das Intervall zwischen D^b und $C^\#$, E^b und $D^\#$ u. s. w. $\doteq 12q-7$, daher ändert sich dieses gleichzeitig mit q um $-12\Delta q$; also ist die Abnahme dieses Intervalls dreimal so gross als die Annäherung des Intervalls der grossen Terz an das der mittleren temperirten, und somit die Zunahme ihrer Reinheit.

Sey die Differenz von D^b und $C^\#$ d. i. $12q-7$ gleich $\frac{1}{n}$ der grossen Secunde, also $=\frac{2q-1}{n}$, so folgt hieraus

$$q=\frac{1}{2}\left(\frac{7n-1}{6n-1}\right).$$

Setzt man nun successiv $n = 4, 5, 6 \ldots 15$, so erhält man folgende Tabelle, in der u die Abweichung des Intervalls der grossen Terz von der Reinheit bezeichnet, und $12q-7$ die Differenz $C^\# - D^b$ sowohl in Theilen der temperirten grossen Secunde als des reinen ganzen Tons angiebt.

n	q	$4q-2$	u	$12q-7$
4	$\frac{27}{46}=0{,}58696$	$\frac{16}{46}=0{,}34783$	$\frac{1}{6{,}4}$ g. T.	$\frac{1}{4}$ gr. Sec. $=\frac{1}{3{,}9}$ g. T.
5	$\frac{17}{29}=0{,}58621$	$\frac{10}{29}=0{,}34483$	$\frac{1}{7{,}4}$,,	$\frac{1}{5}$,, ,, $=\frac{1}{4{,}9}$,,
6	$\frac{41}{70}=0{,}58571$	$\frac{24}{70}=0{,}34286$	$\frac{1}{8{,}1}$,,	$\frac{1}{6}$,, ,, $=\frac{1}{5{,}9}$,,
7	$\frac{24}{41}=0{,}58536$	$\frac{14}{41}=0{,}34146$	$\frac{1}{8{,}7}$,,	$\frac{1}{7}$,, ,, $=\frac{1}{7}$,,
8	$\frac{55}{94}=0{,}58511$	$\frac{32}{94}=0{,}34043$	$\frac{1}{9{,}2}$,,	$\frac{1}{8}$,, ,, $=\frac{1}{8}$,,
9	$\frac{31}{53}=0{,}58491$	$\frac{18}{53}=0{,}33962$	$\frac{1}{9{,}6}$,,	$\frac{1}{9}$,, ,, $=\frac{1}{9}$,,
10	$\frac{69}{118}=0{,}58475$	$\frac{40}{118}=0{,}33898$	$\frac{1}{10}$,,	$\frac{1}{10}$,, ,, $=\frac{1}{10}$,,
11	$\frac{38}{65}=0{,}58462$	$\frac{22}{65}=0{,}33846$	$\frac{1}{10{,}3}$,,	$\frac{1}{11}$,, ,, $=\frac{1}{11{,}1}$,,
12	$\frac{83}{142}=0{,}58451$	$\frac{48}{142}=0{,}33803$	$\frac{1}{10{,}6}$,,	$\frac{1}{12}$,, ,, $=\frac{1}{12{,}1}$,,
13	$\frac{45}{77}=0{,}58442$	$\frac{26}{77}=0{,}33766$	$\frac{1}{10{,}8}$,,	$\frac{1}{13}$,, ,, $=\frac{1}{13{,}1}$,,
14	$\frac{97}{166}=0{,}58434$	$\frac{56}{166}=0{,}33735$	$\frac{1}{11}$,,	$\frac{1}{14}$,, ,, $=\frac{1}{14{,}1}$,,
15	$\frac{52}{89}=0{,}58427$	$\frac{30}{89}=0{,}33708$	$\frac{1}{11{,}2}$,,	$\frac{1}{15}$,, ,, $=\frac{1}{15{,}1}$,,

Hieraus erhellt nun, in Uebereinstimmung mit dem Vorigen, dass die grosse Terz viel langsamer der Reinheit sich nähert, als der Unterschied der benachbarten erhöhten und erniedrigten Töne sich vermindert. Für $n = 13$ ist dieser schon geringer als die Abweichung der gewöhnlichen temperirten kleinen Terz von der reinen, für $n = 15$ geringer als die Abweichung der gewöhnlichen temperirten grossen Terz. Man sieht hieraus, dass das Tonsystem von 53 Quinten mit der möglichsten Reinheit der grossen Terz noch hinlängliche Unterscheidbarkeit der erhöhten Haupttöne von den erniedrigten verbindet, dass aber, wenn dieser Unterschied grösser als $\frac{1}{9}$ g. T. genommen wird, consequenter Weise auch die grosse Terz weniger rein seyn muss.

§ 55.

Es könnte in Zweifel gezogen werden, ob so kleine Unterschiede wie $\frac{1}{9}$ des ganzen Tons auf der Violine, bei der Kürze ihrer Saiten, sich mit Sicherheit greifen lassen. Um dies zu untersuchen, sind die Saitenlängen zu bestimmen, die den vorkommenden Tönen entsprechen. Sey die Länge einer Violinsaite, vom Steg bis zum Sattel genommen, $= l$; die Länge, welche ihr zukommt, wenn sie einen Ton angiebt, der um das Intervall $x' - x$ höher ist als der Ton der ganzen freischwingenden Saite, $= l'$, so ist, da sich die Saitenlängen der Töne umgekehrt wie ihre Schwingungszahlen verhalten,

$$\frac{l'}{l} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{2^{x'-x}},$$

daher $\quad \log \frac{l'}{l} = -(x' - x)\log 2 = -0{,}30103 \,.\, (x' - x).$

Setzt man nun für die Temperatur aus 53 Quinten $x' - x = \frac{\lambda}{53}$, wo λ die ganze positive Zahl ist, die in 53steln der Octave die Grösse des Intervalls des Tons ausdrückt, dessen Saitenlänge man sucht, so wird

$$\log \frac{l'}{l} = -0{,}0056798 \,.\, \lambda.$$

Ebenso wird für die Temperatur aus 41 Quinten, wenn man $x' - x = \frac{\lambda}{41}$ setzt, $\quad \log \frac{l'}{l} = -0{,}0073422 \,.\, \lambda.$

Endlich giebt für die gewöhnliche mittlere Temperatur $x' - x = \frac{\lambda}{12}$

$$\log \frac{l'}{l} = -0{,}0250858 \,.\, \lambda.$$

Da auf der Violine die vier Saiten, wenn sie frei schwingen, die Töne g, $\overline{d}$, $\overline{a}$, $\overline{\overline{e}}$ angeben, so ist das Intervall $x' - x$ in Bezug auf diese als Grundtöne zu nehmen, also für g, in der Temperatur aus 53 Quinten zu setzen, $x = \frac{31}{53}$; für $\overline{d}$, $x = \frac{9}{53}$; für $\overline{a}$, $x = \frac{40}{53}$; für $\overline{\overline{e}}$, $x = \frac{18}{53}$; für

x' aber der Intervallwerth des Tons, dessen Saitenlänge bestimmt werden soll zu setzen, woraus sich dann λ ergiebt. Es wird also z. B. für die Töne a, $\bar{e}$, $\bar{h}$, $\bar{\bar{f}}^{\#}$ x' resp. $= \frac{40}{53}, \frac{18}{53}, \frac{49}{53}, \frac{27}{53}$ zu setzen seyn, woraus für alle vier folgt $x' - x = \frac{9}{53}$, also $\lambda = 9$. Hiernach sind nun in den folgenden zwei Tabellen die Zahlen in den Columnen $\log \frac{l'_{53}}{l}$, $\log \frac{l'_{41}}{l}$, $\log \frac{l'_{12}}{l}$, die, wie man von selbst sieht, sich auf die drei angeführten Temperaturen beziehen, berechnet. Addirt man zu diesen Zahlen $\log l$, nachdem l durch wirkliche Messung bestimmt ist, so ergeben sich die Logarithmen von l'_{53}, l'_{41}, l'_{12}, d. i. die Logarithmen der den nebenstehenden Tönen entsprechenden Saitenlängen und hieraus diese selbst. In den folgenden zwei Tabellen ist $l = 329$ Millimeter angenommen.*)

				$\log \frac{l'_{53}}{l}$	$\log \frac{l'_{41}}{l}$	l'_{53}	l'_{41}
g	$\bar{d}$	$\bar{a}$	$\bar{\bar{e}}$	0,00000	0,00000	$329{,}^{mm}00$	$329{,}^{mm}00$
$f^{\#\#}$	$\bar{c}^{\#\#}$	$\bar{g}^{\#\#}$	$\bar{d}^{\#\#}$	— 0,00568	— 0,00734	324, 73	323, 48
h^{3b}	$\bar{f}^{bb}$	$\bar{\bar{c}}^{bb}$	$\bar{\bar{g}}^{bb}$	— 0,01704	— 0,01468	316, 35	318, 07
a^{b}	$\bar{e}^{b}$	$\bar{h}^{b}$	$\bar{\bar{f}}$	— 0,02272	— 0,02203	312, 23	312, 73
$g^{\#}$	$\bar{d}^{\#}$	$\bar{a}^{\#}$	$\bar{\bar{e}}^{\#}$	— 0,02840	— 0,02937	308, 17	307, 49
h^{bb}	$\bar{f}^{b}$	$\bar{\bar{c}}^{b}$	$\bar{\bar{g}}^{b}$	— 0,04544	— 0,04405	296, 32	297, 27
a	$\bar{e}$	$\bar{h}$	$\bar{\bar{f}}^{\#}$	— 0,05112	— 0,05140	292, 47	292, 13
$g^{\#\#}$	$\bar{d}^{\#\#}$	$\bar{a}^{\#\#}$	$\bar{\bar{e}}^{\#\#}$	— 0,05680	— 0,05874	288, 67	286, 72
$\bar{c}^{bb}$	$\bar{g}^{bb}$	$\bar{\bar{d}}^{bb}$	$\bar{\bar{a}}^{bb}$	— 0,06816	— 0,06608	281, 22	282, 56
h^{b}	$\bar{f}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{g}}$	— 0,07384	— 0,07342	277, 56	277, 64
$a^{\#}$	$\bar{e}^{\#}$	$\bar{h}^{\#}$	$\bar{\bar{f}}^{\#\#}$	— 0,07952	— 0,08076	273, 95	273, 17
$\bar{c}^{b}$	$\bar{g}^{b}$	$\bar{\bar{d}}^{b}$	$\bar{\bar{a}}^{b}$	— 0,09656	— 0,09545	263, 41	264, 09
h	$\bar{f}^{\#}$	$\bar{\bar{c}}^{\#}$	$\bar{\bar{g}}^{\#}$	— 0,10224	— 0,10279	259, 99	259, 66
$a^{\#\#}$	$\bar{e}^{\#\#}$	$\bar{h}^{\#\#}$	$\bar{\bar{f}}^{3\#}$	— 0,10792	— 0,10913	256, 61	255, 90
$\bar{d}^{bb}$	$\bar{a}^{bb}$	$\bar{\bar{e}}^{bb}$	$\bar{\bar{h}}^{bb}$	— 0,11928	— 0,11748	249, 99	251, 60
$\bar{c}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{a}}$	— 0,12496	— 0,12482	246, 74	246, 82
$h^{\#}$	$\bar{f}^{\#\#}$	$\bar{\bar{c}}^{\#\#}$	$\bar{\bar{g}}^{\#\#}$	— 0,13064	— 0,13216	243, 52	242, 68
$\bar{e}^{3b}$	$\bar{h}^{3b}$	$\bar{\bar{f}}^{bb}$	$\bar{\bar{c}}^{bb}$	— 0,14199	— 0,13950	237, 25	238, 61
$\bar{d}^{b}$	$\bar{a}^{b}$	$\bar{\bar{e}}^{b}$	$\bar{\bar{h}}^{b}$	— 0,14767	— 0,14684	234, 16	234, 76
$\bar{c}^{\#}$	$\bar{g}^{\#}$	$\bar{\bar{d}}^{\#}$	$\bar{\bar{a}}^{\#}$	— 0,15335	— 0,15419	231, 12	230, 68

*) Nach einer Mittheilung von Herrn Dr. med. V. Carus, dessen musikalische Erfahrung mir, wie ich hiermit dankbar anerkenne, bei der vorliegenden Arbeit in mehreren Punkten förderlich war.

				$\log \frac{l'_{12}}{l}$	l'_{12}
g	$\bar{d}$	$\bar{a}$	$\bar{\bar{e}}$	0,00000	329,^{mm}00
a^b	$\bar{e}^b$	$\bar{h}^b$	$\bar{\bar{f}}$	— 0,02509	310, 54
$g^\#$	$\bar{d}^\#$	$\bar{a}^\#$	$\bar{\bar{e}}^\#$		
h^{bb}	$\bar{e}^b$	$\bar{\bar{c}}^b$	$\bar{\bar{g}}^b$	— 0,05017	293, 11
a	$\bar{e}$	$\bar{h}$	$\bar{\bar{f}}^\#$		
h^b	$\bar{f}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{g}}$	— 0,07526	276, 65
$a^\#$	$\bar{e}^\#$	$\bar{h}^\#$	$\bar{\bar{f}}^\#$		
$\bar{c}^b$	$\bar{g}^b$	$\bar{\bar{d}}^b$	$\bar{\bar{a}}^b$	— 0,10034	261, 13
h	$\bar{f}^\#$	$\bar{\bar{c}}^\#$	$\bar{\bar{g}}^\#$		
$\bar{c}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{a}}$	— 0,12543	246, 47
$h^\#$	$\bar{f}^{\#\#}$	$\bar{\bar{c}}^{\#\#}$	$g^{\#\#}$		
$\bar{d}^b$	$\bar{a}^b$	$\bar{\bar{e}}^b$	$\bar{\bar{h}}^b$	— 0,15052	232, 64
$\bar{c}^\#$	$\bar{g}^\#$	$\bar{\bar{d}}^\#$	$\bar{\bar{a}}^\#$		

Hieraus ist nun ersichtlich, dass auch die kleinsten räumlichen Unterschiede, nämlich die, welche $\bar{c}^\#$ und $\bar{d}^b$ auf der g-Saite, $\bar{g}^\#$ und $\bar{a}^b$ auf der $\bar{d}$-Saite, $\bar{\bar{d}}^\#$ und $\bar{\bar{e}}^b$ auf der $\bar{a}$-Saite und $\bar{\bar{a}}^\#$ und $\bar{\bar{h}}^b$ auf der $\bar{\bar{e}}$-Saite entsprechen, für die Temperatur aus 53 Quinten immer noch 3 Millimeter ($\frac{1}{8}$ Lpz. Zoll), für die Temperatur aus 41 Quinten 4 Millimeter ($\frac{1}{6}$ Zoll) betragen, also immer noch eine merkliche Verrückung des Fingers fordern; dass sich aber mit gleicher, ja zum Theil mit weit grösserer Sicherheit nicht nur alle doppelt erhöhten und erniedrigten Töne, sondern sogar die dreifachen h^{3b}, $\bar{e}^{3b}$, $\bar{\bar{f}}^{3\#}$ auf dem Griffbret von ihren nächsten Nachbarn unterscheiden lassen, also die Angabe eines Tonunterschieds von $\frac{1}{9}$ g. T. keine praktischen Schwierigkeiten hat.*)

*) In den vorstehenden Tabellen ist auf die Verschiedenheit der Spannung, welche die Saite erleidet, je nachdem sie näher ihrer Mitte, wo diese Spannung am kleinsten ist, oder näher am Stege niedergedrückt wird, keine Rücksicht genommen. Wollte man jene Tabellen zu Versuchen benutzen, so müsste ihnen, zumal für die grösseren Werthe von l', noch eine kleine Correction beigefügt werden, die indess auf die Differenzen der Saitenlängen benachbarter Töne keinen Einfluss haben wird.

§ 56.

Ob das Tonsystem aus 53 Quinten dasjenige ist, dessen sich der Violinist unbewusst bedient, lässt sich natürlich mit voller Gewissheit *a priori* nicht bestimmen. Auch ist kaum anzunehmen, dass er dieses oder ein ihm nahe liegendes immer in aller Schärfe einhalten werde, da der musikalische Vortrag bald zur Schärfung, bald zur Abstumpfung der Intervalle treibt. Wie aber bei der Bestimmung des elliptischen Sphäroids des Erdkörpers die Aufgabe ist, die Gestalt der idealen Oberfläche zu bestimmen, die sich zwischen den Höhen der Gebirge und den Tiefen des Meeres mitten hindurchzieht, so kann es sich auch hier, bei Instrumenten, die eines so freien Ausdrucks der Empfindung fähig sind wie die Streichinstrumente, um nichts Andres handeln, als die mittlere Höhe der Töne zu bestimmen, welche der Spieler durchschnittlich beobachten mag. Es bedarf übrigens kaum der Bemerkung, dass, wenn sich durch Versuche der mittlere Unterschied, den der Violinist oder Cellist zwischen $C^{\#}$ und D^{b} u. s. w. einhält (das $\frac{1}{n}$ in § 54), mit zureichender Genauigkeit festsetzen lässt, dadurch die temperirte Quinte und mit dieser die Temperatur der Streichinstrumente empirisch gegeben ist.

In dasjenige Gebiet aber, das der blossen mathematischen Betrachtung zugänglich ist, fällt noch eine Untersuchung, die als Gegenstück zu der in § 48 f. geführten angesehen werden kann. Es wurde nämlich in § 53 bemerkt, dass das System aus 53 Quinten neben der temperirten auch in genäherten Werthen die reine Dur- und Mollscala enthalte. Man kann sich nun die Aufgabe stellen: die Temperatur zu finden, in welcher die Tonfolgen C, D, F^{b}, F, G, H^{bb}, c^{b}, c und c, H^{b}, $G^{\#}$, G, F, $D^{\#}$, D, C in möglich grösster Reinheit die aufsteigende C-dur- und absteigende C-mollscala darstellen. Mit der Lösung dieser Aufgabe möge unsre Untersuchung geschlossen werden.

§ 57.

Es kommt auch hier, wie in § 48, nur auf die Temperirung von fünf Tönen, nämlich D, F^{b}, G, H^{bb}, c^{b} an, da C und c fest stehen und F durch G, H^{b} durch D, $G^{\#}$ durch F^{b}, $D^{\#}$ durch H^{bb} gegeben ist. Nun ist, nach § 39 a. E. für jede gleichschwebende Temperatur das Intervall von $D = 2q - 1$, das von $F^{b} = 5 - 8q$, das von $G = q$, das von

$H^{bb} = 6 - 9q$, das von $c^b = 5 - 7q$. Da nun diese Töne der Reihe nach jetzt die grosse Secunde, Terz, Quinte, Sexte und Septime möglichst rein darstellen sollen, so muss, wenn wieder d, e, g, a, h die reinen Intervalle derselben bezeichnen,

$$(d - 2q + 1)^2 + (e - 5 + 8q)^2 + (g - q)^2 + (a - 6 + 9q)^2 + (h - 5 + 7q)^2$$

ein Minimum, mithin der Differentialquotient dieser Summe nach q null seyn. Hieraus folgt

$$q = \frac{131 + 2d + g - 8e - 9a - 7h}{199 \,.\, \log 2};$$

oder, wenn für d, g, u. s. w. ihre logarithmischen Werthe gesetzt werden,

$$q = \frac{\log\left(\frac{2^{161} \,.\, 3^{7}}{5^{24}}\right)}{199 \,.\, \log 2} = 0{,}5847652.\text{*)}$$

Es bedarf hier nicht der Umwandlung dieses Werths in einen Kettenbruch, um einen ihm nahe gleichen gemeinen Bruch zu erhalten; denn die Tabelle in § 54 weist nach, dass ein solcher in grosser Schärfe $\frac{69}{118}$ ist. Substituirt man den genauen Werth in der obigen Quadratsumme, so ergiebt sich die

Summe der Quadrate der Abweichungen $= 0{,}0000002760$, **)

woraus erhellt, dass die Reinheit der durch diese Quinte bestimmten und durch die bezeichneten Töne des Systems aus 118 Quinten gebildeten Scalen ungleich grösser ist als die, welche im System aus 74 Quinten die gewöhnlichen scalenbildenden Töne C, D, E u. s. w., c, h^b, a^b u. s. w. darstellen. Dies, so wie was das System sonst charakterisirt, wird deutlicher hervortreten, wenn wir dasselbe bis zu den zweiten Erhöhungen und Erniedrigungen und deren Ergänzungen zur Octave entwickeln.

§ 58.

Wir erhalten dann nämlich folgende Tabelle:

---

*) Mit 10stelligen Logarithmen berechnet.

**) Für das System aus 53 Quinten ist diese Summe $= 0{,}0000038559$.

C	$= 0,00000$		c	$= 1,00000$	
$\underline{H}^{\sharp}$	$= 0,01718$	$\left(\frac{2}{118}\right)$	d^{bb}	$= 0,98282$	$\left(\frac{116}{118}\right)$
E^{3b}	$= 0,05899$	$\left(\frac{7}{118}\right)$	$A^{\sharp\sharp}$	$= 0,94101$	$\left(\frac{111}{118}\right)$
D^{b}	$= 0,07617$	$\left(\frac{9}{118}\right)$	H	$= 0,92383$	$\left(\frac{109}{118}\right)$
$C^{\sharp}$	$= 0,09336$	$\left(\frac{11}{118}\right)$	c^{b}	$= 0,90664$	$\left(\frac{107}{118}\right)$
$\underline{H}^{\sharp\sharp}$	$= 0,11054$	$\left(\frac{13}{118}\right)$	d^{3b}	$= 0,88946$	$\left(\frac{105}{118}\right)$
E^{bb}	$= 0,15235$	$\left(\frac{18}{118}\right)$	$A^{\sharp}$	$= 0,84765$	$\left(\frac{100}{118}\right)$
D	$= 0,16953$	$\left(\frac{20}{118}\right)$	H^{b}	$= 0,83047$	$\left(\frac{98}{118}\right)$
$C^{\sharp\sharp}$	$= 0,18671$	$\left(\frac{22}{118}\right)$	c^{bb}	$= 0,81329$	$\left(\frac{96}{118}\right)$
F^{bb}	$= 0,22852$	$\left(\frac{27}{118}\right)$	$G^{\sharp\sharp}$	$= 0,77148$	$\left(\frac{91}{118}\right)$
E^{b}	$= 0,24570$	$\left(\frac{29}{118}\right)$	A	$= 0,75430$	$\left(\frac{89}{118}\right)$
$D^{\sharp}$	$= 0,26289$	$\left(\frac{31}{118}\right)$	H^{bb}	$= 0,73711$	$\left(\frac{87}{118}\right)$
F^{b}	$= 0,32188$	$\left(\frac{38}{118}\right)$	$G^{\sharp}$	$= 0,67812$	$\left(\frac{80}{118}\right)$
E	$= 0,33906$	$\left(\frac{40}{118}\right)$	A^{b}	$= 0,66094$	$\left(\frac{78}{118}\right)$
$D^{\sharp\sharp}$	$= 0,35624$	$\left(\frac{42}{118}\right)$	H^{3b}	$= 0,64376$	$\left(\frac{76}{118}\right)$
G^{bb}	$= 0,39805$	$\left(\frac{47}{118}\right)$	$F^{\sharp\sharp}$	$= 0,60195$	$\left(\frac{71}{118}\right)$
F	$= 0,41523$	$\left(\frac{49}{118}\right)$	G	$= 0,58477$	$\left(\frac{69}{118}\right)$
$E^{\sharp}$	$= 0,43242$	$\left(\frac{51}{118}\right)$	A^{bb}	$= 0,56758$	$\left(\frac{67}{118}\right)$
A^{3b}	$= 0,47423$	$\left(\frac{56}{118}\right)$	$E^{\sharp\sharp}$	$= 0,52577$	$\left(\frac{62}{118}\right)$
G^{b}	$= 0,49141$	$\left(\frac{58}{118}\right)$	$F^{\sharp}$	$= 0,50859$	$\left(\frac{60}{118}\right)$

Die Abweichungen von der Reinheit sind: für die Quinte $= 0,00019 = \frac{1}{894,3}$ g. T.; für die grosse Terz $= 0,01713 = \frac{1}{9,9}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0,01733 = \frac{1}{9,8}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0,00039 = \frac{1}{435,7}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0,00039 = \frac{1}{435,7}$ g. T. Die Abweichungen von der mittleren Temperatur dagegen sind: für die Quinte $= 0,00133 = \frac{1}{127,7}$ g. T.; für die grosse Terz $= 0,00573 = \frac{1}{29,7}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0,00430 = \frac{1}{39,5}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0,00286 = \frac{1}{59,4}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0,00286 = \frac{1}{59,4}$ g. T.; sämmtlich unmerklich. Für $C^{\sharp}$ beträgt die Abweichung von der mittleren Temperatur $0,01003 = \frac{1}{16,9}$; für $D^{\sharp}$ ... $0,01289 = \frac{1}{13,2}$ g. T.; für $F^{\sharp}$ ... $0,00859 = \frac{1}{19,7}$ g. T.; für $G^{\sharp}$ ... $0,01145 = \frac{1}{14,9}$ g. T. Auch diese Abweichungen sind also fast unmerkbar. Sämmtliche einfach erniedrigte Töne aber liegen um 0,01719 = $\frac{1}{9,9}$ g. T. tiefer als ihre nächstbenachbarten erhöhten und fallen mit den gleichnamigen Tönen der Kirnbergerschen Temperatur noch genauer zusammen, als die Töne des Systems aus 53 Quinten, das wie man sieht, in jeder Hinsicht sich dem vorliegenden sehr nahe anschliesst. Die grössere Stufe des letzteren ist $\frac{20}{118}$, die kleinere $\frac{11}{118}$, also $\frac{11}{20}$ der grösseren. Die Stufenfolge der Durscala ist also hier

20, 20, 11, 20, 20, 20, 11.

Ohne zu behaupten, dass dieses System dasjenige sey, dem sich die Musik der Streichinstrumente am meisten näherte, da vielleicht der Unterschied zwischen $C^{\#}$ und D^{b} u. s. w. zu gering ist, besitzt es doch unter allen Systemen, die diese Töne in gehöriger enharmonischer Folge unterscheiden, die grösste theoretische Vollkommenheit, indem es in allen Tonarten neben den temperirten Scalen auch die reinen in der grösstmöglichen Annäherung darstellt.

I. ANHANG.

ÜBER DIE BESTMÖGLICHE AKUSTISCHE BESTIMMUNG DER ERHÖHTEN UND ERNIEDRIGTEN TÖNE.

1. Es ist oben (§ 26 ff.) ausführlich gezeigt worden, dass es unmöglich ist, für die einfach erhöhten und erniedrigten Töne solche Bestimmungen zu finden, durch welche sie, in Verbindung mit den akustisch reinen Haupttönen, für alle Tonarten reine Scalen geben. Man kann sich aber die Aufgabe stellen: bei festgehaltener Reinheit der Haupttöne ihre einfachen Erhöhungen und Erniedrigungen so zu bestimmen, dass jede Tonleiter, wie die reine, eine Stufenfolge darstellt, die aus drei grossen ganzen, zwei kleinen ganzen und zwei halben Tönen besteht, von denen die letzteren in der Durscala die 3te und 7te, in der (absteigenden) Mollscala die 2te und 5te Stelle einnehmen müssen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe können wir, ohne der Schärfe der Resultate das Mindeste zu entziehen, vorläufig zur Abkürzung des Verfahrens, wie sich aus § 18 und § 53 ergiebt, das Intervall des grossen ganzen Tons mit dem Grundton $2q - 1 = 9$, das des kleinen ganzen Tons $1 - 2q + t = 8$, das des halben Tons $1 - q - t = 5$ setzen, wofern das Octavenintervall $= 53$ angenommen wird. Alsdann sind, wie wir sogleich erläutern werden, für die Tonarten der sieben Haupttöne nach den Bedingungen der Aufgabe nur folgende Stufenfolgen möglich.

I. In Dur.

C	9	*D*	8	*E*	5	*F*	9	*G*	8	*A*	9	*H*	5	*c*
G	8	*A*	9	*H*	5	*c*	9	*d*	8	*e*	9	$f^{\#}$	5	*g*
D	8	*E*	9	$F^{\#}$	5	*G*	8	*A*	9	*H*	9	$c^{\#}$	5	*d*
A	9	*H*	9	$c^{\#}$	5	*d*	8	*e*	9	$f^{\#}$	8	$g^{\#}$	5	*a*
E	9	$F^{\#}$	8	$G^{\#}$	5	*A*	9	*H*	9	$c^{\#}$	8	$d^{\#}$	5	*e*
H	9	$c^{\#}$	8	$d^{\#}$	5	*e*	9	$f^{\#}$	8	$g^{\#}$	9	$a^{\#}$	5	*h*
F	9	*G*	8	*A*	5	H^b	9	*c*	9	*d*	8	*e*	5	*f*

II. In Moll.

A	9	*H*	5	*c*	9	*d*	8	*e*	5	*f*	9	*g*	8	*a*
E	9	$F^{\#}$	5	*G*	8	*A*	9	*H*	5	*c*	9	*d*	8	*e*
H	9	$c^{\#}$	5	*d*	8	*e*	9	$f^{\#}$	5	*g*	8	*a*	9	*h*
D	8	*E*	5	*F*	9	*G*	8	*A*	5	H^b	9	*c*	9	*d*
G	8	*A*	5	H^b	9	*c*	9	*d*	5	e^b	8	*f*	9	*g*
C	9	*D*	5	E^b	8	*F*	9	*G*	5	A^b	8	H^b	9	*c*
F	9	*G*	5	A^b	8	H^b	9	*c*	5	d^b	9	e^b	8	*f*

Um die Richtigkeit dieser Bestimmungen einzusehen, ist nur nöthig zu bemerken, dass, da die Stellen der beiden halben Töne ein für allemal fixirt sind, es nur auf die Bestimmung der Stellen der drei grossen und kleinen ganzen Töne ankommt. Diese sind aber theils durch die Intervalle der reinen Haupttöne unmittelbar gegeben, theils ergeben sie sich successiv mit Nothwendigkeit. In E-moll z. B. sind die Stufen GA, AH, Hc, cd, de aus der reinen C-durscala unmittelbar gegeben; die Stufe $F^{\#}G$ muss $= 5$ seyn, da in Moll auf diese Stelle ein halber Ton fällt. Da nun die Scala drei grosse und zwei kleine ganze Töne haben soll und die gegebenen Stufen schon zwei kleine ganze Töne enthalten, so muss die Stufe $EF^{\#}$ ein grosser ganzer Ton, also $= 9$ seyn. In H-moll sind die Stufen de, ga, ah aus der reinen Durscala unmittelbar gegeben, die Stufen $c^{\#}d$ und $f^{\#}g$ müssen halbe Töne seyn, die Stufe $ef^{\#}$ ist, wie so eben gezeigt wurde, ein grosser ganzer Ton; es muss daher, da die übrigen Stufen nur zwei grosse ganze Töne enthalten, die Stufe $Hc^{\#}$ den dritten grossen ganzen Ton $= 9$ darstellen. Auf diese Weise kann man sich leicht überzeugen, dass in allen Tonarten der Haupttöne die Stufenfolge keine andre seyn kann als die in den vorstehenden tabellarischen Uebersichten angegebene.

2. Aus den entwickelten Scalen ergeben sich nun die Intervalle der in ihnen vorkommenden erhöhten und erniedrigten Töne mit C. Setzen wir nämlich statt der abgekürzten Werthe 9, 8, 5 ihre wahren, $2q - 1$, $1 - 2q + t$, $1 - q - t$ und ebenso für C, D, E, F, G, A, H ihre genauen Intervallwerthe 0, $2q - 1$, t, $1 - q$ q, $1 - q + t$, $q + t$, so erhält man folgende Bestimmungen:

In G-dur ist $f^{\#} = g - (1 - q - t)$, daher $F^{\#} = G - (1 - q - t) = 2q + t - 1$;
in D-dur $c^{\#} = d - (1 - q - t)$, daher $C^{\#} = D - (1 - q - t) = 3q + t - 2$;
in A-dur $g^{\#} = a - (1 - q - t)$, daher $G^{\#} = A - (1 - q - t) = 2t$;
in E-dur $d^{\#} = e - (1 - q - t)$, daher $D^{\#} = E - (1 - q - t) = q + 2t - 1$;
in H-dur $a^{\#} = h - (1 - q - t)$, daher $A^{\#} = H - (1 - q - t) = 2q + 2t - 1$.
In D-moll ist $H^{b} = d - 2\,(2q - 1) = D + 1 - 2\,(2q - 1) = 2 - 2q$;
in G-moll $e^{b} = g - (2q - 1) - (1 - 2q + t)$, daher $E^{b} = q - t$;
in C-moll $A^{b} = c - (2q - 1) - (1 - 2q + t) = 1 - t$;
in F-moll $d^{b} = f - (2q - 1) - (1 - 2q + t)$, daher $D^{b} = 1 - q - t$.

Es ist aber wichtig, zu bemerken, dass d i e s e l b e n Bestimmungen dieser Töne sich ergeben, wenn man die andern von den angeführten Tonarten, in denen sie vorkommen, zum Grunde legt, so dass hier nicht, wie in § 26 und 27, von einander verschiedene Bestimmungen erhalten werden. So ist z. B. in E-dur $F^{\#} = E + 2q - 1 = 2q + t - 1$, wie zuvor; in C-moll $H^{b} = c - (2q - 1) = 2 - 2q$, wie zuvor u. s. f.

3. Auf dieselbe Weise findet man nun auch die Stufenfolgen für die Tonarten, deren Grundtöne die eben bestimmten erhöhten und er-

niedrigten Töne sind, und aus ihnen die Intervalle von $E^{\#}$ und $H^{\#}$, G^{b}, C^{b} und F^{b} mit C. Diese Stufenfolgen sind nämlich:

I. In Dur.

$F^{\#}$	8	$G^{\#}$	9	$A^{\#}$	5	H	9	$c^{\#}$	8	$d^{\#}$	9	$e^{\#}$	5	$f^{\#}$
$C^{\#}$	8	$D^{\#}$	9	$E^{\#}$	5	$F^{\#}$	8	$G^{\#}$	9	$A^{\#}$	9	$H^{\#}$	5	$c^{\#}$
H^{b}	9	c	9	d	5	e^{b}	8	f	9	g	8	a	5	h^{b}
E^{b}	8	F	9	G	5	A^{b}	8	H^{b}	9	c	9	d	5	e^{b}
A^{b}	8	H^{b}	9	c	5	d^{b}	9	e^{b}	8	f	9	g	5	a^{b}
D^{b}	9	E^{b}	8	F	5	G^{b}	9	A^{b}	8	H^{b}	9	c	5	d^{b}
G^{b}	9	A^{b}	8	H^{b}	5	c^{b}	9	d^{b}	9	e^{b}	8	f	5	g^{b}
C^{b}	9	D^{b}	9	E^{b}	5	F^{b}	8	G^{b}	9	A^{b}	8	H^{b}	5	c^{b}

II. In Moll.

$F^{\#}$	8	$G^{\#}$	5	A	9	H	9	$c^{\#}$	5	d	8	e	9	$f^{\#}$
$C^{\#}$	8	$D^{\#}$	5	E	9	$F^{\#}$	8	$G^{\#}$	5	A	9	H	9	$c^{\#}$
$G^{\#}$	9	$A^{\#}$	5	H	9	$c^{\#}$	8	$d^{\#}$	5	e	9	$f^{\#}$	8	$g^{\#}$
$D^{\#}$	9	$E^{\#}$	5	$F^{\#}$	8	$G^{\#}$	9	$A^{\#}$	5	H	9	$c^{\#}$	8	$d^{\#}$
$A^{\#}$	9	$H^{\#}$	5	$c^{\#}$	8	$d^{\#}$	9	$e^{\#}$	5	$f^{\#}$	8	$g^{\#}$	9	$a^{\#}$
H^{b}	9	c	5	d^{b}	9	e^{b}	8	f	5	g^{b}	9	a^{b}	8	h^{b}
E^{b}	8	F	5	G^{b}	9	A^{b}	8	H^{b}	5	c^{b}	9	d^{b}	9	e^{b}
A^{b}	8	H^{b}	5	c^{b}	9	d^{b}	9	e^{b}	5	f^{b}	8	g^{b}	9	a^{b}

Aus *Fis*-dur ergiebt sich nun $E^{\#} = F^{\#} - (1 - q - t) = 3q + 2t - 2$; aus *Cis*-dur $H^{\#} = c^{\#} - (1 - q - t) = 4q + 2t - 2$; aus *B*-moll $G^{b} = H^{b} - (2q - 1) - (1 - 2q + t) = 2 - 2q - t$; aus *Es*-moll $c^{b} = e^{b} - 2(2q - 1) = 3 - 3q - t$; endlich aus *As*-moll $F^{b} = A^{b} - (2q - 1) - (1 - 2q + t) = 1 - 2t$.

4. Setzen wir nun in sämmtlichen für die erhöhten und erniedrigten Töne gefundenen Ausdrücken die Zahlenwerthe von q und t ein und fügen die zugehörigen relativen Schwingungszahlen bei, so erhalten wir, wenn wir noch, zur Vervollständigung der Uebersicht, die bekannten Bestimmungen der Haupttöne wiederholen, folgende Tabelle, in der, wie früher, x die Grösse des Intervalls, y die der relativen Schwingungszahl bezeichnet.

	x	y
C	0,00000	$1 = 1 = 1{,}00000$
$C^{\#}$	0,07682	$\frac{3^3 . 5}{2^7} = \frac{135}{128} = 1{,}05461$
D^b	0,09311	$\frac{2^4}{3 . 5} = \frac{16}{15} = 1{,}06667$
D	0,16992	$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} = 1{,}12500$
$D^{\#}$	0,22882	$\frac{3 . 5^2}{2^6} = \frac{75}{64} = 1{,}17188$
E^b	0,26303	$\frac{3 . 2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}20000$
E	0,32193	$\frac{5}{2^2} = \frac{5}{4} = 1{,}25000$
F^b	0,35614	$\frac{2^5}{5^2} = \frac{32}{25} = 1{,}28000$
$E^{\#}$	0,39875	$\frac{3^3 . 5^2}{2^9} = \frac{675}{512} = 1{,}35742$
F	0,41504	$\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} = 1{,}33333$
$F^{\#}$	0,49185	$\frac{3^2 . 5}{2^5} = \frac{45}{32} = 1{,}40625$
G^b	0,50815	$\frac{2^6}{3^2 . 5} = \frac{64}{45} = 1{,}42222$
G	0,58496	$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}50000$
$G^{\#}$	0,64386	$\frac{5^2}{2^4} = \frac{25}{16} = 1{,}56250$
A^b	0,67807	$\frac{2^3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}60000$
A	0,73697	$\frac{5}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}66667$
$A^{\#}$	0,81378	$\frac{3^2 . 5^2}{2^7} = \frac{225}{128} = 1{,}75781$
H^b	0,83008	$\frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9} = 1{,}77778$
H	0,90689	$\frac{3 . 5}{2^3} = \frac{15}{8} = 1{,}87500$
c^b	0,92318	$\frac{2^8}{3^3 . 5} = \frac{256}{135} = 1{,}89630$
$H^{\#}$	0,98371	$\frac{3^4 . 5^2}{2^{10}} = \frac{2025}{1024} = 1{,}97991$
c	1,00000	$2 = 2 = 2{,}00000$

Hiernach sind nun die Intervalle der nächstbenachbarten Töne $D^b - C^{\#}$, $F - E^{\#}$, $G^b - F^{\#}$, $H^b - A^{\#}$, $c^b - H$, $c - H^{\#}$ einander gleich und betragen 0,01629 des Octavenintervalls oder $\frac{1}{10{,}4}$ g. T., weniger als das syntonische Komma. Hierzu gehört die rel. Schwingungszahl $\frac{2^{11}}{3^4 \cdot 5^2} = \frac{2048}{2025} = 1{,}01135$. Ebenso sind die Intervalle E^b — $D^\#$, F^b — E, A^b — $G^\#$ unter sich gleich und betragen 0,03421 O.i., nahe $= \frac{1}{5}$ g. T., die kleine Diesis, mit der rel. Schwingungszahl $\frac{2^7}{5^3} = \frac{128}{125} = 1{,}02400$.

5. Bildet man nun aus den in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Werthen für alle Tonarten die Scalen, so geben diese für die Intervalle der ihnen zugehörigen Töne mit dem Grundton die in den folgenden beiden Tabellen enthaltenen Bestimmungen, die sich auf das Octavenintervall 1000 beziehen.

I. Dur.

Grundton	gr. Secunde	gr. Terz	Quarte	Quinte	gr. Sexte	gr. Septime
C	170	322	415	585	737	907
G	152	322	415	585	737	907
D	152	322	415	567	737	907
A	170	340	433	585	755	907
E	170	322	415	585	755	907
H	170	322	415	585	737	907
$F^\#$	152	322	415	585	737	907
$C^\#$	152	322	415	567	737	907
F	170	322	415	585	755	907
H^b	170	340	433	585	755	907
E^b	152	322	415	567	737	907
A^b	152	322	415	585	737	907
D^b	170	322	415	585	737	907
G^b	170	322	415	585	755	907
c^b	170	340	433	585	755	907

II. Moll.

Grundton	gr. Secunde	kl. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	kl. Septime
A	170	263	433	585	678	848
E	170	263	415	585	678	848
H	170	263	415	585	678	830
$F^\#$	152	245	415	585	678	830
$C^\#$	152	245	415	567	660	830
$G^\#$	170	263	433	585	678	848
$D^\#$	170	263	415	585	678	848
$A^\#$	170	263	415	585	678	830
D	152	245	415	567	660	830
G	152	245	415	585	678	830
C	170	263	415	585	678	830
F	170	263	415	585	678	848
H^b	170	263	433	585	678	848
E^b	152	245	415	567	660	830
A^b	152	245	415	585	678	830

6. Wie aus diesen Tabellen hervorgeht, geben die ihnen zum Grunde liegenden, in Nr. 4 angegebenen Werthe eine ungleichschwebende oder richtiger eine gemischte Temperatur, da immer mehrere Tonarten genau dieselben Intervallgrössen gemein haben; — wenn anders im eigentlichen Sinne von einer Temperatur die Rede seyn kann, wo die Haupttöne, für die allein sich absolute Werthbestimmungen geben lassen, vollkommen rein bleiben. Das Intervall der grossen Septime ist hier das einzige, das in allen Tonarten vollkommen rein bleibt, alle übrige scalenbildende Intervalle sind, je nach den Tonarten, bald rein, bald genau um ein syntonisches Komma zu gross oder zu klein. Es sind nämlich

I. die Durtonarten in

C, H, D^b völlig rein,
E, F, G^b unrein in der grossen Sexte,
G, $F^\#$, A^b unrein in der grossen Secunde,
D, $C^\#$, E^b unrein in der grossen Secunde und Quinte,
A, H^b, c^b unrein in der grossen Terz, Quarte und grossen Sexte;

II. die Molltonarten in

H, $A^\#$, C völlig rein,
E, $D^\#$, F unrein in der kleinen Septime,
G, $F^\#$, A^b unrein in der grossen Secunde und kleinen Terz,
A, $G^\#$, H^b unrein in der Quarte und kleinen Septime,
$C^\#$, D, E^b unrein in der grossen Secunde, kleinen Terz; Quinte und kleinen Sexte.

Stellen wir diesen Ergebnissen die in § 30 aus den gewöhnlichen akustischen Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne gezogenen Resultate gegenüber, so sind nach diesen

I. die Durtonarten in

C völlig rein,
A^b unrein in der grossen Secunde,
F unrein in der grossen Sexte,
A, D^b unrein in der Quarte,
E, G, c^b unrein in der grossen Secunde und grossen Septime,
$F^\#$ unrein in der Quarte und grossen Septime,
E^b unrein in der grossen Secunde und Quinte,

$C^{\#}$ unrein in der gr. Secunde, gr. Terz und gr. Septime,
H^{b} unrein in der grossen Terz, Quarte und grossen Sexte,
D, H, G^{b} unrein in der gr. Secunde, gr. Terz, Quinte und gr. Septime;

II. die Molltonarten in

C völlig rein,
F unrein in der kleinen Septime,
A unrein in der Quarte und kleinen Septime,
E, $C^{\#}$, A^{b} unrein in der grossen Secunde und kleinen Septime,
H, $G^{\#}$, E^{b} unrein in der grossen Secunde und Quinte,
G unrein in der grossen Secunde und kleinen Terz,
$A^{\#}$ unrein in der gr. Secunde, Quinte und kl. Septime,*)
$F^{\#}$, H^{b} unrein in der Quarte, kl. Sexte und kl. Septime,
$D^{\#}$ unrein in der gr. Secunde, Quarte, kl. Sexte und kl. Septime,
D unrein in der gr. Secunde, kl. Terz, Quinte und kl. Sexte.

Offenbar fällt hier die Vergleichung zum Vortheil der in Nr. 4 gegebenen Bestimmungen aus. Denn nach diesen sind in Dur 3 Tonarten völlig rein, 6 nur in Einem Intervall unrein, 3 in zweien, 3 in dreien; in Moll sind 3 Tonarten völlig rein, 3 nur in Einem Intervall unrein, 6 in zweien, 3 in vieren. Dagegen ist nach den gewöhnlichen akustischen Bestimmungen in Dur nur Eine Tonart völlig rein, 4 sind unrein in nur Einem Intervall, 5 in zweien, 2 in dreien, 3 in vier Intervallen; in Moll ist Eine Tonart völlig rein, Eine unrein in nur Einem Intervall, 8 in zweien, 3 in dreien und 2 in vier Intervallen. Ueberdies aber betragen bei unsern Werthen die Abweichungen von der Reinheit stets nur ein syntonisches Komma $= \frac{1}{9,4}$ g. T., indess sie bei den herkömmlichen Bestimmungen bis auf $\frac{1}{6,8}$ g. T. steigen.

7. Untersuchen wir endlich noch die Formen, welche nach den gegebenen Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne den verschiedenen Tonarten in Bezug auf die Folge ihrer drei Stufen (die wir hierbei wieder durch die Zahlen 9, 8, 5 darstellen können) zukommen, so ergiebt sich aus Nr. 1 und 3 unmittelbar folgende Zusammenstellung der Stufenfolgen:

---

*) In Bezug auf *Ces*-dur und *Ais*-moll ist die nachträgliche Bemerkung S. 120 zu vergleichen.

I. Dur.

$$\left.\begin{matrix} C \\ H \\ D^b \end{matrix}\right\} \quad 9,\ \ 8,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 5; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} E \\ F \\ G^b \end{matrix}\right\} \quad 9,\ \ 8,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 9,\ \ 8,\ \ 5; \qquad (2)$$

$$\left.\begin{matrix} G \\ F^{\#} \\ A^b \end{matrix}\right\} \quad 8,\ \ 9,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 5; \qquad (3)$$

$$\left.\begin{matrix} D \\ C^{\#} \\ E^b \end{matrix}\right\} \quad 8,\ \ 9,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 9,\ \ 5; \qquad (4)$$

$$\left.\begin{matrix} A \\ H^b \\ c^b \end{matrix}\right\} \quad 9,\ \ 9,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 8,\ \ 5. \qquad (5)$$

II. Moll.

$$\left.\begin{matrix} H \\ C \\ A^{\#} \end{matrix}\right\} \quad 9,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 9; \qquad (6)$$

$$\left.\begin{matrix} E \\ F \\ D^{\#} \end{matrix}\right\} \quad 9,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 8; \qquad (7)$$

$$\left.\begin{matrix} G \\ F^{\#} \\ A^b \end{matrix}\right\} \quad 8,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 9,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 9; \qquad (8)$$

$$\left.\begin{matrix} D \\ C^{\#} \\ E^b \end{matrix}\right\} \quad 8,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 8,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 9; \qquad (9)$$

$$\left.\begin{matrix} A \\ G^{\#} \\ H^b \end{matrix}\right\} \quad 9,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 8,\ \ 5,\ \ 9,\ \ 8. \qquad (10)$$

Der halbe Ton hat in allen Arten der beiden Tongeschlechter seine zwei unveränderlichen Stellen, so dass sich die Tonarten desselben Geschlechts nur durch die Ordnung, in welcher die drei grossen und zwei kleinen ganzen Töne auf einander folgen, unterscheiden. Diese fünf Töne lassen im Allgemeinen 10 Versetzungen zu, nämlich:

1)	8	8	9	9	9
2)	8	9	8	9	9
3)	8	9	9	8	9
4)	8	9	9	9	8
5)	9	8	8	9	9
6)	9	8	9	8	9
7)	9	8	9	9	8
8)	9	9	8	8	9
9)	9	9	8	9	8
10)	9	9	9	8	8

Von diesen kommen in den 10 angegebenen Formen der 30 Tonarten nur folgende vor: die 2te in (4) und (9), die 3te in (3) und (8), die 6te in (1) und (6), die 7te in (2) und (7), die 9te in (5) und (10). Hieraus erhellt zugleich, dass die Dur-Tonarten (1), (2), (3), (4), (5) sich der Reihe nach von den Moll-Tonarten (6), (7), (8), (9), (10) nur durch die Stellung der halben Töne unterscheiden. Ferner ist zu bemerken, dass die Ordnung der ganzen Töne in (3) und (8) die umgekehrte von der in (2) und (7), eben so die Ordnung derselben in (5) und (10) die umgekehrte von der in (4) und (9) ist, die Ordnung der ganzen Töne in (1) und (6) aber sich durch die Umkehrung nicht ändert. Alle zur Anwendung kommende Stufenfolgen haben hinsichtlich der ganzen Töne das mit einander gemein, dass die zwei kleinen in keiner derselben unmittelbar auf einander folgen. Das gemeinsame der ausgeschlossenen Stufenfolgen besteht aber darin, dass entweder die beiden kleinen oder die drei grossen sich unmittelbar an einander reihen. Die Ausschliessung dieser Stufenfolgen ist übrigens dadurch bedingt, dass die reine Scala weder drei auf einander folgende grosse, noch zwei auf einander folgende kleine Töne hat.

8. Das Princip, aus welchem diese Resultate hervorgehen, ist so einfach und rational, dass es sich in theoretischer Hinsicht von selbst empfiehlt, und das dadurch erhaltene System von Tonbestimmungen kann als das vollkommenste angesehen werden, das aus untemperirten Haupttönen möglich ist. Dass die völlige Reinheit von sechs Tonarten auf Kosten der übrigen erlangt wird, liegt in der Natur der Sache und kann

nicht zum Tadel gereichen. Man könnte sich vielmehr versucht finden, in dieser Unreinheit den Schlüssel zur Erklärung des verschiedenen Charakters der Tonarten zu suchen, die sich bei gleichschwebender Temperatur nicht durch ihren Bau, sondern nur durch die höhere oder tiefere Lage aller Tonverhältnisse unterscheiden,*) und somit das System dieser Tonbestimmungen als die Norm anzusehen, der sich das Spiel der Streichinstrumente, wenn sie nicht mit temperirten Instrumenten zusammenwirken, möglichst anzunähern habe oder vielleicht wirklich annähere. Diese Ansicht würde sogar durch das, was Delezenne, wie im Eingange zur vorstehenden Abhandlung bemerkt wurde, aus seinen Versuchen schliessen zu dürfen glaubt, wesentlich unterstützt werden. Indess steht auch hier mindestens der Einwand entgegen, dass nach den Bestimmungen von Nr. 4 jeder erhöhte Ton tiefer liegt als der erniedrigte des nächsthöheren Happttons, also diese Töne nicht diejenige Lage haben, welche bei den Modulationen durch enharmonische Verwechselung nach § 50 nothwendig scheint. Entweder also werden sie nach Umständen bald in dieser bald in jener Lage gespielt, und dann lässt sich über ihre Lage etwas Allgemeines nicht angeben, oder sie haben eine feste Lage, und dann gilt auch für die Streichinstrumente eine gleichschwebende Temperatur. Selbst aber wenn ihre Lage veränderlich wäre, würden die in § 46 bis 49 dargestellten Temperaturen eine gleichmässigere Reinheit aller Tonarten bewirken, als es die vorstehenden Bestimmungen vermögen. Theoretisch genommen wäre zwar diese Reinheit nur eine genäherte, aber für das Ohr (vorzüglich die in § 49) so gut als vollkommen und jedenfalls vollkommener als sie der beste Spieler im Fluge des Vortrags mit Sicherheit hervorzubringen vermag.

*) Hierbei verdient bemerkt zu werden, dass die Gleichsetzung der in Nr. 2 und 3 gefundenen Ausdrücke für $D^\#$ und E^b, $G^\#$ und A^b, ... $t = \frac{1}{3}$, die von $C^\#$ und D^b, $E^\#$ und F, $F^\#$ und G^b u. s. f. $4q = 3 - t$ giebt, woraus, wenn $t = \frac{1}{3}$, $q = \frac{7}{12}$ folgt, die Zusammenziehung der erhöhten und erniedrigten Töne also auch hier auf die mittlere gleichschwebende Temperatur führt.

II. ANHANG.

ÜBER DIE NEWTON'SCHE ANALOGIE ZWISCHEN FARBEN- UND TONVERHÄLTNISSEN.

1. Newton glaubte durch Versuche gefunden zu haben,*) dass, wenn man die Länge des Rechteckes, welches das Farbenspectrum nach Abrechnung seiner gerundeten Enden darstellt, verdoppelt und die Abstände der äusseren Grenze des Violett, der Grenzen zwischen Violett und Indigo, Indigo und Blau, Blau und Grün, Grün und Gelb, Gelb und Orange, Orange und Roth, endlich der äusseren Grenze des Roth von dem Endpunkt der jene verdoppelte Länge darstellenden Geraden misst, diese sich verhalten wie die Zahlen

$$1, \frac{8}{9}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{9}{16}, \frac{1}{2},$$

d. i. resp. wie die Saitenlängen der Prime, grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, kleinen Septime und Octave.**) Da sich die Saitenlängen umgekehrt wie die relativen Schwingungszahlen der Töne verhalten, so kann man auch sagen, dass jene Abstände resp. den relativen Schwingungszahlen der Octave, kleinen Septime, grossen Sexte, Quinte, Quarte, kleinen Terz, grossen Secunde, Prime, nämlich den Zahlen

$$2, \frac{16}{9}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{9}{8}, 1$$

proportional sind.

---

*) *Optic. Lib. II. P. II. Prop. III. Exper. VII.*

**) Man findet nicht selten die Angabe, Newton habe zwischen den Dimensionen der prismatischen Farben im Spectrum und den Tönen der diatonischen Scala eine Analogie finden wollen. Dieser Ausdruck ist nicht genau, denn die obige Folge stellt weder die Dur- noch die Mollscala dar.

Gegen diese Analogie zwischen den prismatischen Farben und den bezeichneten Tönen (die weder die Dur- noch die Mollscala vollständig geben, da grosse Terz, kleine Sexte und grosse Septime fehlen) ist mit Grund eingewendet worden, dass sie schon deshalb nicht als allgemeines Naturgesetz gelten könne; weil die verhältnissmässige Grösse der Theile des prismatischen Farbenbildes von dem eigenthümlichen Zerstreuungsvermögen der Substanz des angewendeten Prisma's abhängig sey, die Dimensionsverhältnisse des Spectrum sich daher gar nicht im Allgemeinen bestimmen lassen. Gleichwohl wird zugestanden, dass mehrere Anwendungen, die Newton von dieser Analogie macht (indem er z. B. daraus eine Regel ableitet, nach welcher, wenn zwei prismatische Farben nach Qualität und Quantität gegeben sind, die Qualität ihrer Mischungsfarbe bestimmt werden kann,*) desgleichen sie seiner Erklärung der farbigen Ringe zum Grunde legt,**)) mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate geben. Wie gegründet daher auch jener Einwand ist, so scheint doch die gedachte Analogie mehr zu seyn als ein blosses Spiel der Phantasie, die den nüchternen Newton wohl eben so selten als den poetischen Kepler häufig täuschte.

2. Gerade diejenige Theorie des Lichtes, welche über die Newton'sche endlich den Sieg davon getragen hat, die Undulationstheorie, bringt Farben und Töne in eine nähere Beziehung zu einander, indem sie für jene ähnliche Ursachen nachweist wie für diese. Man kann daher die Bestimmungen der Undulationstheorie über die Vibrationszahlen der Lichtwellen, welche den sieben prismatischen Farben entsprechen, benutzen, um ganz einfach und ohne alle vorgefasste Meinung zu prüfen, ob zwischen denselben ähnliche Verhältnisse statt finden wie zwischen den von Newton angegebenen Tönen.

Cauchy giebt***) folgende Tafel der Vibrationszahlen der prismatischen Farben, die sich auf Fresnel's Messungen der lichten Streifen im Farbenbilde gründet, und in der die Zahlen Billionen bezeichnen und sich auf die Sexagesimalsecunde beziehen:

---

*) *Lib. I. Pars II. Prop. VI.*

**) *Lib. II. Pars I. Obs. XIV. Pars IV. Obs. VIII.*

***) *Sur la dispersion de la lumière, Prag, 1836, p. 198.*

Grenzen der Hauptfarben		Hauptfarben	
äusserstes Violett	764	Violett	735
Violett — Indigo	707	Indigo	691
Indigo — Blau	676	Blau	653
Blau — Grün	630	Grün	607
Grün — Gelb	583	Gelb	563
Gelb — Orange	543	Orange	532
Orange — Roth	520	Roth	500
äusserstes Roth	481		

Nach Herschel's Angabe sind diese Vibrationszahlen, in derselben Weise angeordnet, folgende:*)

Grenzen der Hauptfarben		Hauptfarben	
äusserstes Violett	727	Violett	699
Violett — Indigo	672	Indigo	658
Indigo — Blau	644	Blau	622
Blau — Grün	600	Grün	577
Grün — Gelb	555	Gelb	535
Gelb — Orange	517	Orange	506
Orange — Roth	495	Roth	477
äusserstes Roth	458		

*) Vom Licht, übers. von E. Schmidt, Stuttgart, 1828. S. 307. Diese Angaben scheinen auf der Abmessung der Halbmesser der Farbenringe zu beruhen (vgl. Brandes in Gehler's n. phys. Wörterbuch, Bd. 6. S. 348). Cauchy bemerkt a. a. O. nur, dass der Herschelschen Tafel grössere Bestimmungen der Länge der Lichtwellen zum Grunde liegen.

3. Bei der Prüfung der Newton'schen Analogie kommt es nun blos auf die Vergleichung der Vibrationszahlen an, die den Grenzen der Hauptfarben zukommen, da sie sich nur auf die zwischen diesen liegenden Intervalle bezieht. Dass nun die Vibrationszahl 764 (oder 727) nicht das Doppelte von 481 (458), die Zahl 630 (600) nicht das halbe Dreifache von 481 (458) ist u. s. f. und also in diesem Sinne nicht das äusserste Violett die Octave, die Uebergangsfarbe vom Blau zum Grün nicht die Quinte des äussersten Roth u. s. w. genannt werden kann, leuchtet von selbst ein. Anders stellt sich jedoch die Lage der Sache aus folgendem Gesichtspunkte dar. Sehen wir die Formel $y = 2^x$, welche den Zusammenhang der relativen Schwingungszahl y eines Tons in Bezug auf den Grundton mit dem Intervall x zwischen beiden Tönen darstellt, als besondern Fall der allgemeineren $u = a^x$ an, und setzen für die Farben, je nachdem wir die Fresnelsche oder Herschelsche Tabelle zum Grunde legen, $a = \frac{764}{481}$ oder $a = \frac{727}{458}$, so wird im ersten Falle

$$u = \left(\frac{764}{481}\right)^x, \text{ folglich } x = \frac{\log u}{\log 764 - \log 481};$$

im zweiten

$$u = \left(\frac{727}{458}\right)^x, \text{ folglich } x = \frac{\log u}{\log 727 - \log 458}.$$

Setzt man nun in der ersten von diesen beiden Formeln successiv $481 . u = 764, 707, 676, \ldots. 481$, in der zweiten $458 . u = 727, 672, 644, \ldots. 458$, so ergeben sich für x die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe

$481 . u$	x	$458 . u$	x
764	1,00000	727	1,00000
707	0,83242	672	0,82974
676	0,73552	644	0,73764
630	0,58321	600	0,58447
583	0,41565	555	0,41575
543	0,26203	517	0,26225
520	0,16849	495	0,16824
481	0,00000	458	0,00000

Vergleicht man diese Werthe von x mit den Intervallen der kleinen Septime $= 0,83006$, der grossen Sexte $= 0,73696$, der Quinte $= 0,58496$, der Quarte $= 0,41504$, der kleinen Terz $= 0,26303$, der grossen Secunde $= 0,16992$, so zeigt sich eine Uebereinstimmung, die zumal bei den aus der Herschelschen Tafel abgeleiteten Werthen wahrhaft überraschend, aber auch bei den aus der Fresnelschen Tafel folgenden viel zu gross ist, als dass sie für zufällig gehalten werden könnte.

4. Wir wollen jedoch untersuchen, welche Aenderungen die Vibrationszahlen beider Tabellen erleiden müssten, wenn die ihnen zugehörigen Werthe von x mit den genannten musikalischen Intervallen vollkommen übereinstimmen sollten.

Bezeichnen wir diese Intervalle, in umgekehrter Ordnung genommen, durch

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,$$

so dass also x_1 das der grossen Secunde, x_2 das der kleinen Terz in Bezug auf den Grundton zukommende Intervall ist u. s. w., wobei das Intervall der Octave selbstverständlich $= 1$ angenommen wird; seyen ferner

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7,$$

die diesen Intervallen resp. einschliesslich der Prime und Octave zukommenden Vibrationszahlen; seyen endlich die gegebenen Vibrationszahlen, nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet,

$$b,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7,$$

so ist, wenn zur Abkürzung $\frac{b_7}{b} = a$ gesetzt wird,

$$v_1 = va^{x_1},\ v_2 = va^{x_2},\ v_3 = va^{x_3},\ v_4 = va^{x_4},\ v_5 = va^{x_5},\ v_6 = va^{x_6},\ v_7 = va. \quad \text{(A)}$$

Nehmen wir nun a als constant, v aber als variabel an, so kann letzteres so bestimmt werden, dass die Summe

$$(b - v)^2 + (b_1 - va^{x_1})^2 + (b_2 - va^{x_2})^2 + \ldots\ldots + (b_6 - va^{x_6})^2 + (b_7 - va)^2$$

ein *Minimum* wird. Setzen wir nämlich den Differentialquotienten dieser Summe nach v gleich Null, so wird

$$v = \frac{b + b_1 a^{x_1} + b_2 a^{x_2} + \ldots\ldots + b_6 a^{x_6} + b_7 a}{1 + a^{2x_1} + a^{2x_2} + \ldots\ldots + a^{2x_6} + a^2}. \quad \text{(B)}$$

Da nun nach Fresnel $b = 481$, $b_1 = 520$, $b_2 = 543$, ... $b_7 = 764$, nach Herschel aber $b = 458$, $b_1 = 495$, $b_2 = 517$, ... $b_7 = 627$ ist, so giebt die vorstehende Formel für die erstere Zahlenreihe $v = 480,96$, für die zweite $v = 457,97$. Hieraus ergeben sich nun weiter nach den Formeln unter (A) die folgenden Werthe von v_1, v_2 u. s. w., denen wir ihre Abweichungen von b_1, b_2 u. s. w. beifügen.

$v = 480,96$;	$b - v = 0,04$	$v = 457,97$;	$b - v = 0,03$
$v_1 = 520,30$;	$b_1 - v_1 = -0,30$	$v_1 = 495,37$;	$b_1 - v_1 = -0,37$
$v_2 = 543,20$;	$b_2 - v_2 = -0,20$	$v_2 = 517,16$;	$b_2 - v_2 = -0,16$
$v_3 = 582,78$;	$b_3 - v_3 = 0,22$	$v_3 = 554,78$;	$b_3 - v_3 = 0,22$
$v_4 = 630,45$;	$b_4 - v_4 = -0,45$	$v_4 = 600,09$;	$b_4 - v_4 = -0,09$
$v_5 = 676,39$;	$b_5 - v_5 = -0,39$	$v_5 = 643,75$;	$b_5 - v_5 = 0,25$
$v_6 = 706,16$;	$b_6 - v_6 = 0,84$	$v_6 = 672,05$;	$b_6 - v_6 = -0,05$
$v_7 = 763,93$;	$b_7 - v_7 = 0,17$	$v_7 = 726,95$;	$b_7 - v_7 = -0,09$

Mit Ausnahme von v_6 in der ersten dieser beiden Tafeln, das von b_6 fast um eine ganze Vibration abweicht, betragen die Differenzen aller übrigen Werthe höchstens etwas über ein Drittel einer Vibration.

5. Die Uebereinstimmung der nach Fresnel's Vibrationszahlen berechneten Werthe wird noch grösser, wenn man bemerkt, dass diese Zahlen abgerundet sind, sich aber aus den Fresnelschen Bestimmungen der Wellenlängen leicht genauer angeben lassen. Da nämlich, wenn v' die Vibrationszahl, l' die Wellenlänge, Ω die Geschwindigkeit des Lichts bedeutet, $v' = \frac{\Omega}{l'}$ ist, so ergeben sich aus den in Millionteln des Meters ausgedrückten Wellenlängen*) l, l_1, l_2, ... l_7, wenn nach Cauchy $\log \Omega = 8,4916103$ angenommen wird, folgende genauere Bestimmungen der Vibrationszahlen:

$l = 645$;	$b = 480,8953$
$l_1 = 596$;	$b_1 = 520,4320$
$l_2 = 571$;	$b_2 = 543,2180$
$l_3 = 532$;	$b_3 = 583,0404$
$l_4 = 492$;	$b_4 = 630,4420$
$l_5 = 459$;	$b_5 = 675,7680$
$l_6 = 439$;	$b_6 = 706,5546$
$l_7 = 406$;	$b_7 = 763,9840$.

*) Bei Cauchy p. 197.

Aus diesen Werthen von b, b_1, b_2 u. s. w. erhält man nun nach (B) und (A):

$$\begin{aligned}
v &= 480{,}9065; & b - v &= -\,0{,}0112\\
v_1 &= 520{,}2597; & b_1 - v_1 &= 0{,}1723\\
v_2 &= 543{,}1735; & b_2 - v_2 &= 0{,}0445\\
v_3 &= 582{,}7707; & b_3 - v_3 &= 0{,}2697\\
v_4 &= 630{,}4599; & b_4 - v_4 &= -\,0{,}0179\\
v_5 &= 676{,}1170; & b_5 - v_5 &= -\,0{,}6490\\
v_6 &= 706{,}2048; & b_6 - v_6 &= 0{,}3498\\
v_7 &= 764{,}0017; & b_7 - v_7 &= -\,0{,}0177.
\end{aligned}$$

Die grösste Abweichung beträgt also hier (für v_5) noch nicht ein Drittel einer Vibration. Berechnet man endlich nach der Formel $l' = \frac{\Omega}{v'}$ die zu den vorstehenden Werthen von v_1, v_2, v_3 u. s. w. zugehörigen Wellenlängen, die wir durch λ, λ_1, λ_2 u. s. w. bezeichnen wollen, so erhält man folgende Zahlen nebst den beigefügten Abweichungen von l, l_1, l_2 u. s. w.

$$\begin{aligned}
\lambda &= 644{,}9850; & l - \lambda &= 0{,}0150\\
\lambda_1 &= 596{,}0974; & l_1 - \lambda_1 &= -\,0{,}0974\\
\lambda_2 &= 571{,}0468; & l_2 - \lambda_2 &= -\,0{,}0468\\
\lambda_3 &= 532{,}2462; & l_3 - \lambda_3 &= -\,0{,}2462\\
\lambda_4 &= 491{,}9862; & l_4 - \lambda_4 &= 0{,}0138\\
\lambda_5 &= 458{,}5595; & l_5 - \lambda_5 &= 0{,}4405\\
\lambda_6 &= 439{,}2175; & l_6 - \lambda_6 &= -\,0{,}2175\\
\lambda_7 &= 405{,}9906; & l_7 - \lambda_7 &= 0{,}0094.
\end{aligned}$$

Die grösste Differenz der Wellenlänge erreicht also noch nicht ein halbes Milliontel eines Millimeters. Für die Herschelsche Tafel, die ohnedies kleinere Abweichungen giebt, müssen wir auf die genauere Berechnung verzichten, da hier der Werth von Ω nicht scharf angegeben ist. Es erhellt aber schon völlig genügend, welche geringe Aenderungen in den Angaben Fresnel's sowohl als Herschels erforderlich sind, um sie mit den nach der Newton'schen Analogie berechneten Zahlen in vollkommene Uebereinstimmung zu bringen. Wenn daher auch diese Analogie durch die Hinweisung auf die Dimensionen der Theile des Spectrums nicht hinlänglich begründet war, so erhält sie doch durch Vergleichung der Vibrationsmengen der den Farbengrenzen zugehörigen Strahlen vollständige Bestätigung, so dass wenn diesen Zahlen selbst nur in ihren

Verhältnissen absolute Gültigkeit zukommt, auch Newton's Analogie ohne alle Beschränkung gilt. Da die Zahl $a = \frac{b_7}{b}$ bei Fresnel und Herschel dem rationalen Bruch $\frac{27}{17}$ nahe kommt, so kann man die Newton'sche Analogie jetzt so ausdrücken: die relativen Vibrationszahlen der den Grenzen der prismatischen Farben zugehörigen Strahlen in Bezug auf die Vibrationszahl des äussersten Roth sind Potenzen von $\frac{27}{17}$, welche dieselben Exponenten wie diejenigen Potenzen von 2 haben, welche die relativen Schwingungszahlen der reinen Töne D, Es, F, G, A, B, c in Bezug auf den Grundton C ausdrücken.*) Diese Exponenten können daher Farbenintervalle genannt werden.

6. Es führt jedoch diese Analogie auf eine noch viel einfachere merkwürdige Beziehung zwischen den Vibrationen der farbigen Strahlen und den Schwingungen der genannten Töne. Wenn nämlich für die Töne $y = 2^x$ und für die Farben $u = a^x$ ist, so folgt hieraus

$$\log u = \frac{\log a}{\log 2} \cdot \log y;$$

und ferner, wenn wir zur Abkürzung $\frac{\log a}{\log 2} = m$ setzen,

$$u = y^m.$$

Nun ist aber $a = \frac{b_7}{b} = \frac{l}{l_7}$, wo l und l_7, wie zuvor, die Wellenlängen für das äusserste Roth und Violett bedeuten. Da nun nach Fresnel's Angabe in Millionteln des Millimeters $l = 645$, $l_1 = 406$, nach Herschel aber in Zehnmillionteln des englischen Zolls $l = 266$, $l_1 = 167$ ist, so wird zufolge der ersteren Zahlen $m = \frac{\log a}{\log 2} = \frac{0{,}2010337}{0{,}3010300}$, zufolge der letzteren $m = \frac{\log a}{\log 2} = \frac{0{,}2021651}{0{,}3010300}$. Beide Werthe sind, der erstere genauer als der zweite, nahe $= \frac{2}{3}$; daher näherungsweise $u = y^{\frac{2}{3}}$. Setzt man daher für y die relativen Schwingungszahlen der grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte u. s. w., so folgt für die absoluten Vibrationszahlen v_1, v_2 u. s. w.

$$\text{(C)} \begin{cases} v_1 = b\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_2 = b\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_3 = b\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_4 = b\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ v_5 = b\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_6 = b\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_7 = b \cdot 2^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

---

*) Oder auch der Töne E, F, G, A, H, c, d in Bezug auf den Grundton D. Es sey mir verstattet zu bemerken, dass ich auf diese Bestätigung der Newton'schen Analogie durch die Verhältnisse der Vibrationszahlen schon i. J. 1845 bei den Vorstudien zu der oben angeführten Abhandlung über die musikalischen Intervalle gekommen bin.

Um nun zu prüfen, wie genau diese Ausdrücke die Vibrationszahlen darstellen, setzen wir zuerst nach Fresnel $v = b = 480,8953$, $b_1 = 520,43$, $b_2 = 543,22$ u. s. w. Hieraus ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 520,18; & b_1 - v_1 &= 0,25 \\
v_2 &= 543,01; & b_2 - v_2 &= 0,21 \\
v_3 &= 582,56; & b_3 - v_3 &= 0,44 \\
v_4 &= 630,15; & b_4 - v_4 &= 0,29 \\
v_5 &= 676,00; & b_5 - b_5 &= -0,23 \\
v_6 &= 705,73; & b_6 - v_6 &= 0,82 \\
v_7 &= 763,36; & b_7 - v_7 &= 0,62.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nach Herschel $v = b = 458$, $b_1 = 495$, $b_2 = 517$ u. s. w., so kommt

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 495,41; & b_1 - v_1 &= -0,41 \\
v_2 &= 517,15; & b_2 - v_2 &= -0,15 \\
v_3 &= 554,83; & b_3 - v_3 &= 0,17 \\
v_4 &= 600,15; & b_4 - v_4 &= -0,15 \\
v_5 &= 643,82; & b_5 - v_5 &= 0,18 \\
v_6 &= 672,13; & b_6 - v_6 &= -0,13 \\
v_7 &= 727,03; & b_7 - v_7 &= -0,03.
\end{aligned}
$$

7. Obwohl nun hieraus hervorgeht, dass die aus der Relation $u = y^{\frac{2}{3}}$ folgenden Werthe der Vibrationszahlen mit den gegebenen nahe übereinstimmen, so wollen wir doch noch untersuchen, welche Aenderungen der gegebenen Vibrationszahlen erforderlich sind, wenn die nach jener Relation berechneten mit ihnen möglichst nahe zusammentreffen sollen.

Man findet leicht auf dieselbe Weise, welche zu der Formel (B) geführt hat, dass die Quadratsumme der Unterschiede der berechneten Werthe v, v_1, v_2, ... von den gegebenen b, b_1, b_2 .... ein Minimum wird, wenn

$$v = \frac{b + b_1\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + b_2\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \ldots\ldots + b_6\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{2}{3}} + b_7\, 2^{\frac{2}{3}}}{1 + \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{4}{3}} + \ldots\ldots + \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}}. \tag{D}$$

Setzen wir in dieser Formel zuerst die genaueren Fresnelschen Werthe $b = 480,8953$, $b_1 = 520,4320$ u. s. w. ein, so erhalten wir aus ihr und den Formeln unter (C)

$$
\begin{aligned}
v &= 481{,}1424; & b - v &= -\ 0{,}2471\\
v_1 &= 520{,}4456; & b_1 - v_1 &= -\ 0{,}0136\\
v_2 &= 543{,}3269; & b_2 - v_2 &= -\ 0{,}1089\\
v_3 &= 582{,}8624; & b_3 - v_3 &= -\ 0{,}1780\\
v_4 &= 630{,}4750; & b_4 - v_4 &= -\ 0{,}0330\\
v_5 &= 676{,}3520; & b_5 - v_5 &= -\ 0{,}5840\\
v_6 &= 706{,}0878; & b_6 - v_6 &= -\ 0{,}4668\\
v_7 &= 763{,}7662; & b_7 - v_7 &= \ 0{,}2178.
\end{aligned}
$$

Die Herschelschen Werthe $b = 458$, $b_1 = 495$ u. s. w. geben

$$
\begin{aligned}
v &= 457{,}9525; & b - v &= -\ 0{,}0475\\
v_1 &= 495{,}3695; & b_1 - v_1 &= -\ 0{,}3695\\
v_2 &= 517{,}1400; & b_2 - v_2 &= -\ 0{,}1400\\
v_3 &= 554{,}7700; & b_3 - v_3 &= \ 0{,}2300\\
v_4 &= 600{,}0875; & b_4 - v_4 &= -\ 0{,}0875\\
v_5 &= 643{,}7536; & b_5 - v_5 &= \ 0{,}2464\\
v_6 &= 672{,}0560; & b_6 - v_6 &= -\ 0{,}0560\\
v_7 &= 726{,}9545; & b_7 - v_7 &= -\ 0{,}0455.
\end{aligned}
$$

8. Diese Resultate zeigen nun, dass die Gleichung $u = y^{\frac{2}{3}}$ in vollkommen befriedigender Weise sowohl mit den Fresnelschen als mit den Herschelschen Bestimmungen der absoluten Vibrationszahlen der den Farbengrenzen zugehörigen Strahlen übereinstimmt. Beide Werthreihen geben $a = \frac{v_7}{v} = 1{,}587401 = 2^{\frac{2}{3}}$, wie es seyn muss. Wir können daher jetzt folgenden Satz als begründet ansehen:

Die Cubi der relativen Schwingungszahlen der Strahlen, welche dem äussersten Roth, den Grenzen von Roth und Orange, Orange und Gelb, Gelb und Grün, Grün und Blau, Blau und Indigo, Indigo und Violett, endlich dem äussersten Violett zugehören, sind gleich den Quadraten der relativen Schwingungszahlen der reinen Prime, grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, kleinen Septime und Octave; oder, was dasselbe sagt: *die Cubi der absoluten Schwingungszahlen der bezeichneten Farbenstrahlen sind den Quadraten der absoluten Schwingungszahlen der genannten Töne proportional.*

Da die Längen der Lichtwellen den Vibrationszahlen und eben so die Längen der Tonwellen ihren Schwingungszahlen umgekehrt proportional sind, so folgt auch, dass die Cubi der Wellenlängen der Farbengrenzen den Quadraten der Wellenlängen der vorgenannten Töne oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Saitenlängen direct proportional seyn müssen.

Wenn nun Newton*) aus seinen Messungen berechnet, dass die Dicken der Luftschichten zwischen den die Farbenringe zeigenden Gläsern für die acht Grenzen der Farben den Cubikwurzeln aus den Quadraten der Saitenlängen der Töne *C*, *D*, *Es*, *F*, *G*, *A*, *B*, *c* proportional sind, so bedeutet dies nichts Andres, als dass sie sich direct verhalten wie die Wellenlängen der diesen Stellen entsprechenden Farbenstrahlen, was vollkommen der Wahrheit gemäss ist.**)

Wie die relativen Schwingungszahlen der Töne durch die Gleichung $y = 2^x$, so werden also die relativen Schwingungszahlen der Strahlen der Farbengrenzen durch die fast eben so einfache Gleichung

$$u = 2^{\frac{2}{3}x}$$

dargestellt. Da nun die relativen Schwingungszahlen der grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, kleinen Septime, Octave der Reihe nach $\frac{9}{8}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{16}{9}$, 2 sind, so sind die relativen Schwingungszahlen der den Farbengrenzen zugehörigen Strahlen der Reihe nach

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{2}{3}},\ 2^{\frac{2}{3}},$$

also sämmtlich irrational, so dass also hier nicht die relativen Schwingungszahlen selbst, sondern nur ihre dritten Potenzen in rationalen Verhältnissen stehen, nämlich in den quadratischen Verhältnissen, welche einfach genommen für die den Farben entsprechende Tonfolge gelten.

9. Da die Farben eben so stetig in einander übergehen wie die Töne, so gilt die Gleichung $u = 2^{\frac{2}{3}x}$ auch für die zwischen den Farbengrenzen liegenden Farben selbst. Die dritte Potenz der relativen Schwingungszahl jeder Farbe, deren Intervall in Bezug auf die äussere Grenze des Roth $= x$, ist also gleich dem Quadrat der relativen Schwingungszahl desjenigen Tons, der um dasselbe Intervall höher liegt als der an-

*) *Opt. Lib. II. Pars I. Obs. XIV.*

**) Vgl. Herschel, vom Licht, § 644. Es lag hier ausserordentlich nahe, den Schluss zu ziehen, der den obigen Satz giebt; es scheint fast, als habe man eben keine Analogie haben wollen.

genommene Grundton. Dieselbe Formel drückt aber auch aus, dass die relative Schwingungszahl einer Farbe, deren Intervall in Bezug auf die äussere Grenze des Roth $= x$, gleich ist der relativen Schwingungszahl des Tons, der mit dem Grundton das Intervall $\frac{2}{3}x$ bildet. Daher ist die relative Schwingungszahl der äussern Grenze des Violett gleich der relativen Schwingungszahl des Tons, dessen Intervall mit dem Grundton $= \frac{2}{3}$ des Octavenintervalls ist, was genau der gewöhnlichen gleichschwebend temperirten kleinen Sexte entspricht.

Diejenigen Farben, welche Fresnel als »Hauptfarben«, Herschel als »mittlere« Farben aufführt, haben, wie man leicht bemerkt, Vibrationszahlen, welche die arithmetischen Mittel zwischen denen der sie einschliessenden Grenzfarben sind, die hier sehr nahe mit den geometrischen Mitteln zusammenfallen. Gehen wir nun von dem so bestimmten Roth aus und nennen seine Vibrationszahl b, so ist die Vibrationszahl einer Farbe, deren Intervall mit diesem Roth $= x$, welche v' heissen mag, bestimmt durch die Gleichung $v' = b \,.\, 2^{\frac{2}{3}x}$. Geben wir nun x successiv die der grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte und kleinen Septime entsprechenden Intervallwerthe und bezeichnen die zugehörigen Werthe von v' durch v'_1, v'_2, ... v'_6, so ergeben sich, mit Hinzufügung des zu $x = 0$ gehörigen Werthes $v' = b$, je nachdem wir mit Fresnel $b = 500$ oder mit Herschel $b = 477$ setzen, folgende Werthreihen:

$b = 500$	$b = 477$
$v'_1 = 540{,}84$	$v'_1 = 515{,}96$
$v'_2 = 564{,}62$	$v'_2 = 538{,}65$
$v'_3 = 605{,}72$	$v'_3 = 577{,}84$
$v'_4 = 655{,}03$	$v'_4 = 625{,}05$
$v'_5 = 702{,}86$	$v'_5 = 670{,}53$
$v'_6 = 733{,}76$	$v'_6 = 700{,}01$

Vergleicht man diese Werthe mit denen der in Nr. 2. aufgeführten »Hauptfarben«, so sieht man, dass v'_2, v'_3, v'_4 und v'_6 mit ihnen nahe zusammentreffen, v'_3 und v'_5 aber höhere Vibrationszahlen haben als resp. das mittlere Orange und Indigo. Man kann also sagen, dass das mittlere Gelb, Grün, Blau und Violett mit dem mittleren Roth Intervalle bilden, welche resp. denen der kleinen Terz, Quarte, Quinte und kleinen Septime entsprechen, dass aber das Orange, welches mit jenem Roth eine grosse Secunde und das Indigo, was mit ihm eine grosse Sexte bildet, vom Roth aus genommen, etwas über die Mitte zwischen den benachbarten Farbengrenzen hinaus liegt. Diese Resultate ändern sich nicht wesentlich, wenn man statt der angewandten Zahlen diejenigen setzt, welche sich als Mittel aus den in Nr. 7 berechneten Werthen von v, v_1, v_2 u. s. w. ergeben.

10. Bezeichnen wir diese berechneten Mittelfarben der Reihe nach durch ihre Anfangsbuchstaben R, O, G, g, B, I, V, die zwischen ihnen liegenden Intervalle durch die Differenzen $O-R$, $G-R$, $g-R$ u. s. w., so ist also, wenn wir die Werthe dieser Intervalle nach § 18 der vorstehenden Abhandlung beisetzen,

$O - R = 0{,}16992 = 2q - 1$ = grosse Secunde,
$G - R = 0{,}26303 = q - t$ = kleine Terz,
$g - R = 0{,}41504 = 1 - q$ = Quarte,
$B - R = 0{,}58496 = q$ = Quinte,
$I - R = 0{,}73697 = 1 - q + t$ = grosse Sexte,
$V - R = 0{,}83008 = 2 - 2q$ = (kleinere) kleine Septime.

Hieraus folgt weiter durch Subtraction des ersten Glieds von allen folgenden:

$G - O = 0{,}09311 = 1 - q - t$ = kleine Secunde,
$g - O = 0{,}24512 = 2 - 3q$ = alterirte kleine Terz,
$B - O = 0{,}41504 = 1 - q$ = Quarte,
$I - O = 0{,}56705 = 2 - 3q + t$ = alterirte Quinte,
$V - O = 0{,}66016 = 3 - 4q$ = alterirte kleine Sexte.

Durch dasselbe Verfahren ergiebt sich aus dieser Reihe weiter:

$g - G = 0{,}15201 = 1 - 2q + t$ = kleiner ganzer Ton,
$B - G = 0{,}32193 = t$ = grosse Terz,
$I - G = 0{,}47394 = 1 - 2q + 2t$ = kleinere übermäss. Quarte,
$V - G = 0{,}56705 = 2 - 3q + t$ = alterirte Quinte.

Hieraus folgt ferner auf dieselbe Weise:

$B - g = 0{,}16992 = 2q - 1$ = grosse Secunde,
$I - g = 0{,}32193 = t$ = grosse Terz,
$V - g = 0{,}41504 = 1 - q$ = Quarte;

woraus endlich sich noch ergiebt:

$$I - B = 0{,}15201 = 1 - 2q + t = \text{kleiner ganzer Ton,}$$
$$V - B = 0{,}24512 = 2 - 3q = \text{alterirte kleine Terz,}$$

und

$$V - I = 0{,}09311 = 1 - q - t = \text{kleine Secunde.}$$

Sämmtliche hier vorkommende alterirte Intervalle sind um ein syntonisches Komma kleiner als die reinen.

Nachträgliche Bemerkung.

In den §§ 26, 27 und 29 sind zwei Tonarten übergangen, die, wenn es sich um Vollständigkeit handelt, gleiche Berücksichtigung verdienen wie die übrigen seltner in Gebrauch kommenden. Es sind dies *Ces*-dur und *Ais*-moll, welche die gleiche Vorzeichnung haben wie resp. *As*-moll und *Cis*-dur. In § 26 fanden sich nun für $A^{\#}$ die drei verschiedenen Werthe 796, 814, 832. Hieraus erhält man drei verschiedene Scalen für *Ais*-moll, von denen jedoch nur die letzte als neue Bestimmungen $C^{\#} = 95$ und $H^{\#} = 1002$ giebt. — In § 27 giebt Nr. 6 ... $c^b = 905$, woraus eine Scala für *Ces*-dur folgt, in der die Werthe $F^b = 320$, $A^b = 642$ neu sind, welche sich jedoch auch in Nr. 13 und 12 finden. — In § 29 endlich erhalten durch Berücksichtigung der genannten Tonarten die beiden Tabellen S. 47 folgende Zusätze:

I. Dur:	Grundton,	gr. Secunde,	gr. Terz,	Quarte,	Quinte,	gr. Sexte,	gr. Septime.
	c^b,	152,	322,	415,	585,	737,	889.
II. Moll:	Grundton,	gr. Secunde,	kl. Terz,	Quarte,	Quinte,	kl. Sexte,	kl. Septime.
	$A^{\#}$,	145,	263,	415,	560,	678,	848.

Es hat also nach der gewöhnlichen akustischen Tabelle die Scala von *Ces*-dur dieselbe Form wie die von *G*-dur und weicht demnach in der gr. Secunde und gr. Septime um ein syntonisches Komma von der Reinheit ab; *Ais*-moll dagegen weicht nur in der kl. Septime um das syntonische Komma ab, in der gr. Secunde und Quinte aber um 0,025 Octave $= \frac{1}{6{,}8}$ g. T.
