Eine vor Kurzem erschienene kleine Schrift »Zur Theorie der Musik« von Dr. J. N. Möhring in Lüneburg, welche sich eng an meine Abhandlung »über musikalische Tonbestimmung und Temperatur« anschliesst, sie gründlich prüft und ihr mehrere werthvolle Bemerkungen beifügt, hat mich zu den nachfolgenden Untersuchungen veranlasst, durch welche jene frühere Arbeit, so wie die im 90sten Bande von Poggendorff's Annalen der Physik gegebene Darstellung der musikalischen Temperaturlehre, einige Ergänzungen erhält, auf mehrere Punkte derselben ein neues Licht fällt, und, wie ich hoffe, die mathematische Bestimmung der Grundlagen der Musik ihrem Abschluss noch näher gebracht werden wird.

1.

Es ist von Nutzen, daran zu erinnern, dass unsre heutige diatonische Tonleiter verhältnissmässig neuen Ursprungs ist, und dass bis in die Mitte des sechszehnten Jahrhunderts die von ihr an drei Stellen abweichende Tonleiter der Griechen, oder, näher bestimmt, der Pythagoreer in Geltung war. Es werden in derselben der (ganze) Ton $\frac{9}{8}$ und der Halbton $\frac{256}{243}$ unterschieden, und es wechseln diese beiden Tonstufen in derselben Zahl und Ordnung wie der ganze und halbe Ton unsrer jetzigen Clavierscala. Die pythagorische Tonleiter hat daher, wenn man die jetzt üblichen Benennungen der Töne anwendet, folgende, den Akustikern wohlbekannte Form:

C	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*H*	*c*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

mit den Tonstufen

$$\frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{256}{243}.$$

Bezeichnet man die relative Schwingungszahl der reinen Quinte allgemein durch Q, so findet man leicht, dass die vorstehende Scala unter folgendem Schema enthalten ist:

$$1 \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{Q^4}{4} \quad \frac{2}{Q} \quad Q \quad \frac{Q^3}{2} \quad \frac{Q^5}{4} \quad 2,$$

und dass die ganze und die halbe Tonstufe den Werthen von $\frac{Q^2}{2}$ und $\frac{8}{Q^5}$ entsprechen. Hieraus ersieht man nun sogleich, dass die Töne der pythagorischen Scala durch Fortschreiten und Rückschreiten nach reinen Quinten vom Grundton C aus gewonnen werden können. Es erhalten nämlich alsdann

die Töne:	$\underline{F}$	C	G	d	a	e	h
die Werthe:	$\frac{1}{Q}$	1	Q	Q^2	Q^3	Q^4	Q^5,

die man nur auf den Umfang der ersten Octave von C zu reduciren braucht, um auf die obigen Bestimmungen von D, E, F etc. zu kommen. Durch Fortsetzung der Tonreihe aufwärts gelangt man successiv von $\bar{h}$ zu $\bar{\bar{f}}^{\#}$, $\bar{\bar{c}}^{\#}$, $\bar{\bar{g}}^{\#}$ etc. und abwärts von $\underline{F}$ zu $\underline{H}^b$, $\underline{E}^b$, $\underline{A}^b$ etc., und so erhält man für die erhöhten und erniedrigten Haupttöne folgende Werthe ihrer relativen Schwingungszahlen:

$C^{\#}$	$D^{\#}$	$E^{\#}$	$F^{\#}$	$G^{\#}$	$A^{\#}$	$H^{\#}$
$\frac{Q^7}{2^4}$	$\frac{Q^9}{2^5}$	$\frac{Q^{11}}{2^6}$	$\frac{Q^6}{2^3}$	$\frac{Q^8}{2^4}$	$\frac{Q^{10}}{2^5}$	$\frac{Q^{12}}{2^6}$
D^b	E^b	F^b	G^b	A^b	H^b	c^b
$\frac{2^3}{Q^5}$	$\frac{2^2}{Q^3}$	$\frac{2^5}{Q^8}$	$\frac{2^4}{Q^6}$	$\frac{2^3}{Q^4}$	$\frac{2^2}{Q^2}$	$\frac{2^5}{Q^7}$

*) Man vergl. z. B. den Artikel »Ton« im älteren physikalischen Wörterbuch von Gehler S. 383. D. Möhring leitet diese Scala durch Umkehrung der von Böckh in seinem »Philolaos« angegebenen Tonfolge ab, bemerkt aber hierüber in einer brieflichen Mittheilung noch Folgendes: »Bei der Ableitung der alten griechischen Scala habe ich nur die eine Autorität von Böckh's Philolaos anführen können, weil mir seine *Metra Pindarica* nicht zu Gebote standen, wo ich gewiss noch andre Nachweisungen gefunden haben würde. Erst jetzt habe ich aus einer andern Schrift, die wohl auch als Autorität gelten kann, »die Tonleitern und Musiknoten der Griechen« von Dr. Fr. Bellermann, Berlin 1847, mich eines Bessern belehrt. Sind nämlich die von Dr. Bellermann S. 8 gegebenen Tonleitern des lydischen und hypodorischen Tongeschlechts fest begründet (worüber mir bis jetzt noch kein Urtheil zusteht), so stimmen sie genau mit der Dur- und Mollscala des reinen Quintensystems überein, und die von mir vorgenommene

Man kann eben so, wenn man will, durch weitere Fortsetzung dieses Verfahrens die doppelt und mehrfach erhöhten und erniedrigten Haupttöne bestimmen.

Vergleicht man nun C, D, E etc. resp. mit $C^\#$, $D^\#$, $E^\#$ etc., so findet sich, dass die Quotienten aus den relativen Schwingungszahlen der Haupttöne in die ihrer resp. Erhöhungen constant, nämlich $=\frac{Q^7}{2^4}$ sind. Zugleich ist dies auch der Werth der Quotienten aus C^b, D^b, E^b u. s. w. in C, D, E u. s. w. Daher ist hier die Erhöhung jedes Tons eben so gross als seine Erniedrigung, und beide sind für alle Töne gleich. Dieser Werth $\frac{Q^7}{2^4}=\frac{3^7}{2^{11}}=\frac{2187}{2048}=1{,}06790$ ist die Apotome der Pythagoreer. Sie ist nur wenig grösser als die kleine Secunde $\frac{16}{15}=1{,}06667$, indess der pythagorische halbe Ton $\frac{256}{243}=1{,}05350$ kleiner als diese ist und der übermässigen Prime $\frac{25}{24}=1{,}04167$ nahe, dem kleinen Limma $\frac{135}{128}=1{,}05469$ aber am nächsten kommt. In Theilen des Octavenintervalls ausgedrückt ist die Apotome $=0{,}08123$, in Theilen des grossen ganzen Tons $=\frac{1}{2{,}09}$; der Intervallwerth von $\frac{16}{15}$ dagegen ist in Theilen des Octavenintervalls $=0{,}09311$, der Intervallwerth von $\frac{256}{243}$ gleich $0{,}01519$, $=\frac{1}{2{,}26}$ g. T., der von $\frac{25}{24}$ gleich $0{,}05889$, der des kleinen Limma $=0{,}07682$. Die Intervallwerthe, welche in diesem System den 21 Tönen zukommen, stellt folgende Uebersicht dar:

C	0	$C^\#$	0,09474	D^b	0,07518
D	0,16992	$D^\#$	0,26466	E^b	0,24511
E	0,33985	$E^\#$	0,43459	F^b	0,32030
F	0,41504	$F^\#$	0,50978	G^b	0,49032
G	0,58496	$G^\#$	0,67970	A^b	0,66015
A	0,75489	$A^\#$	0,84963	H^b	0,83007
H	0,92481	$H^\#$	1,01955	c^b	0,90526

Nach dieser Ableitung erweist sich nun das pythagorische Tonsystem als reines Quintensystem, d. h. als ein solches, in dem die Werthe aller Töne ausser der Octave von dem der reinen Quinte $Q=\frac{3}{2}$ abhängen. Es ist bemerkenswerth, dass in diesem System die erhöhten

Umkehrung der griechischen Scala würde dann nur bei dem dorischen Tongeschlecht (welches allerdings das rein griechische giebt) nöthig sein, um sie in Uebereinstimmung mit der Durscala des reinen Quintensystems zu bringen.«

Töne $C^\sharp$, $D^\sharp$ u. s. f. der Reihe nach höher liegen als die ihnen nächsten erniedrigten D^b, E^b u. s. w. Denn es ist

$$\frac{C^\sharp}{D^b} = \frac{D^\sharp}{E^b} \text{ etc.} = \frac{Q^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288},$$

was > 1 und zwar das pythagorische Komma ist, dessen Intervallwerth $= 0{,}01955$ oder nahe $= \frac{1}{8{,}7}$ des grossen ganzen Tons. Um soviel stehen also hier die erhöhten Töne höher als die ihnen nächsten erniedrigten.

Zugleich entspringt aber auch aus diesem System die gleichschwebende Temperatur im weitesten Sinne. Denn giebt man zuerst Q einen solchen Werth, dass die relative Schwingungszahl des pythagorischen Komma's $= 1$, sein Intervall also $= 0$ wird, was geschieht, wenn man $Q = 2^{\frac{7}{12}}$, also $\frac{2{,}99662}{2}$ statt $\frac{3}{2}$ setzt, so wird $C^\sharp = D^b$, $D^\sharp = E^b$ u. s. f., und man erhält das System der gewöhnlichen oder mittleren gleichschwebenden Temperatur mit seinen 12 Tönen. Setzt man $Q < 2^{\frac{7}{12}}$, so wird der Werth des pythagorischen Komma's $\frac{Q^{12}}{2^7} < 1$, und man erhält gleichschwebende Temperaturen, in denen die erhöhten Töne tiefer liegen als die ihnen nächsten erhöhten. Setzt man endlich $Q > 2^{\frac{7}{12}}$, so erhält man gleichschwebende Temperaturen, in welchen, wie im reinen Quintensystem selbst, die erhöhten Töne höher liegen als die ihnen nächsten erniedrigten.

2.

Seitdem durch Zarlino im Jahr 1558 *) statt der pythagorischen grossen Terz $\frac{81}{64}$ die reine $\frac{5}{4}$ eingeführt, die grosse Sexte, als Umkehrung der reinen kleinen Terz $\frac{6}{5}$, gleich $\frac{5}{3}$ gesetzt, und die grosse Septime als reine grosse Terz der Quinte betrachtet, daher $= \frac{15}{8}$ bestimmt wurde, erhielt die diatonische Tonleiter ihre jetzige Gestalt, in welcher die relativen Schwingungszahlen der Haupttöne folgende sind:

C	D	E	F	G	A	H	c
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Setzt man die rel. Schwingungszahl der grossen Terz allgemein $= T$, die der Quinte, wie zuvor, $= Q$, so wird das Schema dieser Scala

---

*) Kiesewetter, Geschichte unsrer heutigen Musik S. 112.

$$1 \quad \frac{Q^2}{2} \quad T \quad \frac{2}{Q} \quad Q \quad \frac{2T}{Q} \quad QT \quad 2,$$

mit den Stufen

$$\frac{Q^2}{2} \quad \frac{2T}{Q^2} \quad \frac{2}{QT} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2T}{Q^2} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2}{QT},$$

so dass hier drei Tonstufen, nämlich der grosse ganze Ton $\frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}$, der kleine ganze Ton $\frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9}$ und der halbe Ton $\frac{2}{QT} = \frac{16}{15}$ unterschieden werden. Wie man aus dieser Scala die erhöhten und erniedrigten Töne bestimmen kann, indem man der Reihe nach jeden Ton derselben zum Grundton macht und nach dem Schema der Scala für jeden solchen Grundton die Töne aufsucht, die seine Scala bilden, dann auch die gefundenen erhöhten und erniedrigten Töne wieder zu Grundtönen macht und ihre Scalentöne bestimmt, ist in den früheren beiden Abhandlungen ausführlich entwickelt worden. Es zeigte sich aber dabei, dass sich für die erhöhten und erniedrigten Töne nicht Werthe angeben lassen, die allen Tonarten zugleich völlig Genüge leisten, sondern verschiedene Tonarten verschiedene Werthe jener Nebentöne, ja zum Theil sogar der Haupttöne selbst, fordern, wenn ihre Scala rein sein, d. h. dem Schema der *C*-dur-Scala genau entsprechen soll. D. Möhring giebt mir hierbei, ohne im Uebrigen die Richtigkeit dieses Resultats in Zweifel zu stellen, Schuld, dass ich in der Beztimmung der kleinen Secunde D^b, der übermässigen Secunde $D^\#$ und der kleinen Septime H^b durch die Verhältnisszahlen $\frac{16}{15}$, $\frac{125}{108}$, $\frac{16}{9}$ von den Angaben der physikalischen Lehrbücher abgewichen sei, und dass ich das jetzt übliche Intervall der kleinen Secunde $\frac{27}{25}$ das grosse Limma genannt habe. Diese Ausstellung ist jedoch unbegründet; denn ich habe meine Benennungen jener Verhältnisszahlen nicht nach eigner Willkür gewählt, sondern bin dabei Autoritäten wie Euler, Marburg, Chladni u. A. gefolgt, und die in Art. 29 meiner ersten Abhandlung so wie in Poggendorff's Annalen (B. 90. S. 360) aufgestellte Tafel ist, mit einziger Veränderung der grossen Secunde (für die ich mit Chladni u. v. A. den ältern Werth $\frac{9}{8}$ beibehalten habe), dieselbe, welche Muncke im neuen physikalischen Wörterbuch (Bd. 8. S. 340) als die »gewöhnliche« aufführt.*) Indess muss ich doch Herrn M. in so fern

*) Muncke setzt die grosse Secunde $= \frac{10}{9}$, giebt ihr aber fälschlich den Decimalwerth 1,125, der zu $\frac{9}{8}$ gehört. Es muss derselbe entweder 1,11111 heissen, oder die gr. Secunde $= \frac{9}{8}$ gesetzt werden.

eine Berechtigung zu seiner Bemerkung zugestehen, als er sich auf ein Tonsystem berufen konnte, auf welches mich auch schon Fechner aufmerksam gemacht hat,*) und das ich, da es, wie ich im Folgenden (Art. 4) nachweisen werde, in Frankreich allgemein angenommen ist, das französische nennen will, wogegen das eben angeführte das deutsche heissen mag. Nach diesem System erhält man die Verhältnissquotienten der erhöhten Töne aus denen der Haupttöne durch Multiplication mit $\frac{25}{24}$, die der erniedrigten Töne durch Division mit $\frac{25}{24}$. Ebenso kann man aus den hierdurch gefundenen Werthen der Töne mit Kreuzen und Been die der Töne mit Doppelkreuzen und Doppelbeen u. s. w. bestimmen. Der Grund dieses Verfahrens scheint folgender. In dem pythagorischen oder reinen Quintensystem ist die Apotome, durch welche die rel. Schwingungszahlen der Haupttöne multiplicirt die erhöhten, dividirt die erniedrigten Töne geben, gleich dem Quotienten aus der relativen Schwingungszahl von E^b in die von E. Behält man diese Bestimmung bei und beachtet, dass in dem modernen Tonsystem E den Werth $\frac{5}{4} = T$, E^b den Werth $\frac{6}{5} = \frac{Q}{T}$ hat, so ist der Werth der Apotome $= \frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$ und demnach das Verfahren, die Erhöhungen und Erniedrigungen zu bestimmen, dem im Quintensystem eingeführten ganz analog. Hiernach haben nun im französischen System die 21 Töne (mit Ausschluss der Octave, die immer $= 2$) folgende relative Schwingungszahlen.

$C = 1$	$C\# = \frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$	$D^b = \frac{Q^3}{2T^2} = \frac{27}{25}$
$D = \frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}$	$D\# = \frac{QT^2}{2} = \frac{75}{64}$	$E^b = \frac{Q}{T} = \frac{6}{5}$
$E = T = \frac{5}{4}$	$E\# = \frac{T^3}{Q} = \frac{125}{96}$	$F^b = \frac{2}{T^2} = \frac{32}{25}$
$F = \frac{2}{Q} = \frac{4}{3}$	$F\# = \frac{2T^2}{Q^2} = \frac{25}{18}$	$G^b = \frac{Q^2}{T^2} = \frac{36}{25}$
$G = \frac{2T}{Q} = \frac{3}{2}$	$G\# = T^2 = \frac{25}{16}$	$A^b = \frac{2}{T} = \frac{8}{5}$
$A = \frac{2T}{Q} = \frac{5}{3}$	$A\# = \frac{2T^3}{Q^2} = \frac{125}{72}$	$H^b = \frac{Q^2}{T} = \frac{9}{5}$
$H = QT = \frac{15}{8}$	$H\# = T^3 = \frac{125}{64}$	$c^b = \frac{2Q}{T^2} = \frac{48}{25}$

Die Grössen der Intervalle dieser Töne sind folgende:

*) Centralblatt für Naturwissenschaft und Anthropologie 1854. Nr. 16. S. 299, mit Hinweisung auf Biot's Physik II. S. 35 d. 3. Aufl. v. Fechner's Uebersetzung. Hieraus mag dieses System wol auch in deutsche Lehrbücher der Physik übergegangen sein, in denen es allerdings, namentlich in neuerer Zeit, häufig gefunden wird.

C	0	$C^\#$	0,05889	D^b	0,11103
D	0,16992	$D^\#$	0,22882	E^b	0,26303
E	0,32193	$E^\#$	0,38082	F^b	0,35614
F	0,41504	$F^\#$	0,47393	G^b	0,52607
G	0,58496	$G^\#$	0,64386	A^b	0,67807
A	0,73697	$A^\#$	0,79586	H^b	0,84800
H	0,90689	$H^\#$	0,96578	c^b	0,94111

Dieses System weicht nun von dem deutschen in der That an den drei von D. Möhring bezeichneten Stellen ab. In dem letztern nämlich ist

$$D^\# = \frac{2T^3}{Q^3} = \frac{125}{108}\,;\quad D^b = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15}\,;\quad H^b = \frac{2^2}{Q^2} = \frac{16}{9}\,.$$

Die Töne $E^\#$ und $H^\#$ werden im deutschen System mit Stillschweigen übergangen. Wir werden diese Lücke im Folgenden (Art. 5) ergänzen. Zunächst aber kommt es darauf an, zu prüfen, was das französische System in Absicht auf die Reinheit der verschiedenen Tonarten leistet.

3.

Begnügen wir uns hierbei mit den vierundzwanzig gangbarsten Tonarten, so erhalten wir für die relativen Schwingungszahlen, welche die Intervalle zwischen den Tönen der Dur- und Mollscala und dem Grundton bestimmen, folgende Werthe:

I. Dur.

Grundton	gr. Sec.	gr. Terz	Quarte	Quinte	gr. Sexte	gr. Septime
C	$\frac{Q^2}{2}$	T	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2T}{Q}$	QT
G	$\frac{2T}{Q^2}$	T	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2T}{Q}$	$\frac{4T^2}{Q^3}$
D	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{4T^2}{Q^4}$	$\frac{2}{Q}$	$\frac{4T}{Q^3}$	$\frac{2T}{Q}$	$\frac{4T^2}{Q^3}$
A	$\frac{Q^2}{2}$	T	$\frac{Q^3}{2T}$	Q	$\frac{2T}{Q}$	QT
E	$\frac{2T}{Q^2}$	T	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2T}{Q}$	QT
H	$\frac{2T}{Q^2}$	T	$\frac{2}{Q}$	$\frac{4T}{Q^3}$	$\frac{2T}{Q}$	$\frac{4T^2}{Q^3}$
F	$\frac{Q^2}{2}$	T	$\frac{Q^3}{2T}$	Q	$\frac{Q^3}{2}$	QT
H^b	$\frac{2T}{Q^2}$	T	$\frac{2}{Q}$	$\frac{4T}{Q^3}$	$\frac{2T}{Q}$	$\frac{4T^2}{Q^3}$
E^b	$\frac{2T}{Q^2}$	T	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2T}{Q}$	QT
A^b	$\frac{Q^2}{2}$	T	$\frac{Q^3}{2T}$	Q	$\frac{2T}{Q}$	QT
D^b	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{4T^2}{Q^4}$	$\frac{2}{Q}$	$\frac{4T}{Q^3}$	$\frac{2T}{Q}$	$\frac{4T^2}{Q^3}$
G^b	$\frac{2T}{Q^2}$	T	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2T}{Q}$	$\frac{4T^2}{Q^3}$

II. Moll.

Grundton	gr. Sec.	kl. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	kl. Septime
A	$\frac{Q^2}{2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{Q^3}{2T}$	Q	$\frac{2}{T}$	$\frac{Q^2}{T}$
E	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2}{T}$	$\frac{Q^2}{T}$
H	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	$\frac{4T}{Q^4}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{4}{Q^2}$
$F^{\#}$	$\frac{Q^2}{2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{Q^3}{2T}$	Q	$\frac{Q^4}{2T^2}$	$\frac{Q^2}{T}$
$C^{\#}$	$\frac{Q^2}{2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2}{T}$	$\frac{Q^2}{T}$
$G^{\#}$	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2}{T}$	$\frac{4}{Q^2}$
D	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{4}{Q^3}$	$\frac{2}{Q}$	$\frac{4T}{Q^4}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{4}{Q^2}$
G	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2}{T}$	$\frac{4}{Q^2}$
C	$\frac{Q^2}{2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2}{T}$	$\frac{Q^2}{T}$
F	$\frac{Q^2}{2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{Q^3}{2T}$	Q	$\frac{Q^4}{2T^2}$	$\frac{Q^2}{T}$
H^b	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	$\frac{4T}{Q^4}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{4}{Q^2}$
E^b	$\frac{2T}{Q^2}$	$\frac{Q}{T}$	$\frac{2}{Q}$	Q	$\frac{2}{T}$	$\frac{Q^2}{T}$

Hieraus ergeben sich nun hinsichtlich der Reinheit der Tonarten folgende Resultate.

I. Dur.

C, völlig rein;
E, E^b, gr. Secunde zu tief;
A, A^b, Quarte zu hoch;
G, G^b, gr. Secunde und gr. Septime zu tief;
F, Quarte und gr. Sexte zu hoch;
H, H^b, gr. Secunde, Quinte und gr. Septime zu tief;
D, D^b, gr. Secunde, gr. Terz, Quinte und gr. Septime zu tief.

II. Moll.

C, $C^{\#}$, völlig rein;
E, E^b, gr. Secunde zu tief;
A, Quarte zu hoch;
G, $G^{\#}$, gr. Secunde und kl. Septime zu tief;
F, $F^{\#}$, Quarte und kl. Sexte zu hoch;
H, H^b, gr. Secunde, Quinte und kl. Septime zu tief;
D, gr. Secunde, kl. Terz, Quinte und kl. Septime zu tief.

Man erkennt auch in diesen Abweichungen, die immer das syntonische Komma $\frac{Q^4}{4T} = \frac{81}{80}$ betragen, den regelmässigen Bau des Systems. Unter den 72 Intervallen jedes der beiden Tongeschlechter sind in Dur 8 gr. Secunden, 2 gr. Terzen, 3 Quarten, 4 Quinten, 1 gr. Sexte und 6 gr. Septimen, also zusammen 24 Intervalle unrein. In Moll sind 7 gr. Secunden, 1 kl. Terz, 3 Quarten, 3 Quinten, 2 kl. Sexten und 5 kl. Septimen, also zusammen 21 Intervalle unrein. Wollte man noch $F^{\#}$- und $C^{\#}$-Dur, E^b- und A^b-Moll in Betracht ziehen, so würde sich in Dur und Moll die Zahl der unreinen Intervalle gleich stellen, nämlich in beiden 26 unter 84 Intervallen betragen. Vergleicht man diese Resultate mit denen, welche das deutsche System giebt,*) so zeigt sich das französische im Vortheil. Denn jenes hat unter denselben 24 Tonarten nur 2 völlig reine, und in jedem der beiden Tongeschlechter unter 72 Intervallen 25 unreine, nämlich in Dur 7 gr. Secunden, 4 gr. Terzen, 3 Quarten, 4 Quinten, 2 gr. Sexten, 5 gr. Septimen; in Moll 7 gr. Secunden, 2 kl. Terzen, 3 Quarten, 4 Quinten, 3 kl. Sexten und 6 kl. Septimen. Nicht nur in der Gesammtzahl der reinen Intervalle, sondern auch insbesondre in den wichtigen Intervallen der Terzen verdient daher das französische System vor dem deutschen den Vorzug.

4.

Das französische Tonsystem steht jedoch wiederum im Ganzen an Reinheit dem Systeme nach, das ich im Anhang I. zu meiner ersten Abhandlung und bei Poggendorff (S. 364) angegeben habe. In diesem sind nämlich unter den 28 Tonarten 3 in Dur und 2 in Moll völlig rein, die Anzahl der unreinen Intervalle in Dur beträgt nur 15, nämlich 4 gr. Secunden, 2 gr. Terzen, 2 Quarten, 2 Quinten, 5 gr. Sexten; in Moll 21, nämlich 5 gr. Secunden, 5 kl. Terzen, 3 Quarten, 3 Quinten, 3 kl. Sexten und 2 Septimen. Nur in Moll kann in Frage kommen, ob die völlige Reinheit einer Tonart mehr nicht ein zu theurer Preis für 4 Tonarten mehr sei, in denen die charakteristische kleine Terze zu tief steht. Ich darf aber hierbei nicht mit Stillschweigen übergehen, dass dieses System, auf das ich selbständig gekommen bin, schon Delezenne aufgestellt hat,**) wie mir erst jetzt, bei wiederholtem Studium seiner Abhandlung,

*) Poggendorff's Annalen B. 90. S. 364.

**) *Recueil de travaux de la soc. d. sciences de Lille.* 1827, p. 51.

bemerklich geworden ist. Die Art und Weise, nach der es Delezenne ableitet, ist aber von der meinigen völlig verschieden und lässt den eigenthümlichen Bau desselben nicht durchschauen. Sein Verfahren ist folgendes. Nach dem Schema der C-durscala bestimmt er die Durscalen für die Grundtöne G, D, A, E, H und findet durch die erste $F^\sharp$, durch die zweite $C^\sharp$, die dritte $G^\sharp$, die vierte $D^\sharp$, die fünfte $A^\sharp$. Auf die gefundenen Werthe von $F^\sharp$ und $C^\sharp$ baut er ferner die Durscalen dieser Grundtöne wieder nach dem Schema von C-dur und erhält dadurch resp. $E^\sharp$ und $H^\sharp$. Weiter bestimmt er H^b aus der Durscala für F und, da $E^b = \frac{6}{5}$ gegeben ist, aus der Durscala für E^b den Werth von A^b; ebenso D^b aus A^b-dur, G^b aus D^b-dur, c^b aus H^b-dur und F^b aus E^b-dur. Er bedient sich also durchgängig nur der diatonischen Durscala. Dass die hierdurch erhaltenen Werthe der Töne nicht in allen Tonarten reine Scalen geben, entgeht ihm nicht, aber er sieht sie als die Normalwerthe an und bestimmt in Kommaten die Abweichungen von denselben, die durch gewisse Tonarten, wenn sie rein sollen, gefordert werden. Wie sehr er dieses System als eine Verbesserung des in Frankreich bräuchlichen ansieht, geht aus folgenden Worten hervor (S. 38): *Ces détails élémentaires me donnent l'occasion de rectifier une erreur qui se trouve répétée dans tous les ouvrages d'acoustique que j'ai pu consulter. On y lit, en effet, que pour diéser une note, il faut la multiplier par* $\frac{25}{24}$, *et la diviser par* $\frac{25}{24}$, *pour la bémoliser. Cette règle est vraie lorsqu'on veut insérer soit un dièse soit un bémol entre r é et mi ou entre s o l et l a, dont l'intervalle est un ton mineur* $\frac{10}{9}$; *mais elle est fausse dans les autres cas. L'erreur est d'un comma sur une note portant un ou deux dièses ou bémols etc.*

5.

Das Verhältniss aller drei angeführten Systeme, des französischen, deutschen und Delezenne'schen zu einander, so wie zum reinen Quintensystem, lässt sich durch folgende Betrachtung ins Licht setzen. Bezeichnen wir die ersten, zweiten etc. obern Octaven von C, D etc. durch $\overset{1}{C}, \overset{1}{D}$ etc., $\overset{2}{C}, \overset{2}{D}$ etc., die untern durch C_1, D_1 etc., C_2, D_2 etc., so haben die nach der Quintenfolge geordneten Töne $F_1, C, G, \overset{1}{D}, \overset{1}{A}, \overset{2}{E}, \overset{2}{H}$, vermöge der modernen Tonleiter, folgende Werthe:

$$\frac{1}{Q},\ 1,\ Q,\ Q^2,\ \frac{4T}{Q},\ 4T,\ 4QT;$$

folglich sind die Quotienten aus jedem derselben in den nächstfolgenden der Reihe nach

$$Q,\ Q,\ Q,\ \frac{4\,T}{Q^3},\ Q,\ Q,$$

anstatt dass das pythagorische System lauter Quinten zeigt. Der Werth $\frac{4\,T}{Q^3} = \frac{40}{27}$ ist eine alterirte, nämlich um das syntonische Komma $\frac{81}{80}$ verminderte Quinte $\frac{40}{27}$, deren Intervall $= 0{,}56704$. Bestimmt man nun $\overset{3}{F}$# aus $\overset{2}{H}$ durch Multiplication mit $\frac{4T}{Q^3}$, und daraus durch successive Multiplication mit derselben Folge von reinen und alterirten Quinten Q, Q, Q, $\frac{4\,T}{Q^3}$ etc. die Töne $\overset{4}{C}$#, $\overset{4}{G}$#, $\overset{5}{D}$#, $\overset{5}{A}$#, $\overset{6}{E}$#, $\overset{6}{H}$#, ebenso andrerseits zuerst H_2^b aus F_1 durch Division mit $\frac{4\,T}{Q^3}$, und hieraus durch succesive Division mit derselben, aber in umgekehrter Ordnung zu nehmenden Reihe der reinen und alterirten Quinten die Töne E_2^b, A_3^b, D_3^b, G_4^b, C_4^b, F_5^b und reducirt alle Töne, die ausserhalb des Umfangs der ersten Octave von C liegen, auf diesen, so erhält man die Werthe, welche die französische Scala giebt. Stellen wir nach dieser Angabe alle Töne des Systems zusammen, so ergeben sich folgende Fortschreitungen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
F_5^b & & C_4^b & & G_4^b & & D_3^b & & A_3^b & & E_2^b & & H_2^b & & F_1 \\
 & Q & & Q & & Q & & \frac{4\,T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4\,T}{Q^3} & \\
F_1 & & C & & G & & \overset{1}{D} & & \overset{1}{A} & & \overset{2}{E} & & \overset{2}{H} & & \overset{3}{F}\# \\
 & Q & & Q & & Q & & \frac{4\,T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4\,T}{Q^3} & \\
\overset{3}{F}\# & & \overset{4}{C}\# & & \overset{4}{G}\# & & \overset{5}{D}\# & & \overset{5}{A}\# & & \overset{6}{E}\# & & \overset{6}{H}\# & & \\
 & Q & & Q & & Q & & \frac{4\,T}{Q^3} & & Q & & Q & & &
\end{array}$$

Statt der 20 reinen Quinten, die im pythagorischen System zwischen F_5^b und $\overset{6}{H}$# liegen und 11,69925 Octaven umfassen, finden wir hier nur 15 reine Quinten $= 8{,}77444$ Octaven und 5 alterirte Quinten $= 2{,}83520$ Oct. Der Umfang des Systems beträgt also nur 11,60964 Octaven. Dividirt man diese Zahl durch 20, so erhält man den mittleren Werth des Quintenintervalls $= 0{,}58048$, was dem Werth $\frac{18}{31} = 0{,}58065$ dieses Intervalls in der gleichschwebenden Temperatur von 31 Stufen sehr nahe kommt. Es ist auch $\frac{\overset{6}{H}\#}{F_5^b} = Q^{15}\left(\frac{4\,T}{Q^3}\right)^5 = 4^5T^5 = 5^5$, daher die rel. Schwingungszahl der mittleren Quinte die 20ste Wurzel hieraus, also $= \sqrt[4]{5}$.

In dem deutschen System ist für die Haupttöne der Wechsel der reinen und alterirten Quinten derselbe wie im französischen, für die erhöhten und erniedrigten Töne aber befolgt er eine andre Ordnung. Es sind nämlich hier die Fortschreitungen folgende:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
F^b_5 & & C^b_4 & & G^b_4 & & D^b_3 & & A^b_3 & & E^b_2 & & H^b_2 & & F_1 \\
& Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & \\
F_1 & & C & & G & & \overset{1}{D} & & \overset{1}{A} & & \overset{2}{E} & & \overset{2}{H} & & \overset{3}{F}\# \\
& Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & \\
\overset{3}{F}\# & & \overset{4}{C}\# & & \overset{4}{G}\# & & \overset{5}{D}\# & & \overset{5}{A}\# & & \overset{6}{E}\# & & \overset{6}{H}\# & & \\
& Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & &
\end{array}$$

Der Umfang dieses Systems enthält 14 reine Quinten = 8,18948 Octaven und 6 alterirte Quinten = 3,40224 Octaven, beträgt also 11,59172 Octaven, woraus die mittlere Quinte = 0,57959 folgt, welche der der gleichschwebenden Temperatur von 50 Stufen $\frac{29}{50}$ = 0,58000 nahe kommt. Da hier $\frac{\overset{6}{H}\#}{F^b_5} = Q^{14}\left(\frac{4T}{Q^3}\right)^6 = \frac{4^6T^6}{Q^4}, = \frac{2^4 \cdot 5^6}{3^4}$, so ist die relative Schwingungszahl der mittleren Quinte, als die 20ste Wurzel aus diesem Werthe, $= \sqrt[10]{\frac{2^2 \cdot 5^3}{3^2}} = \sqrt[10]{\frac{500}{9}}$. Aus obiger Quintenfolge ergiebt sich nun

$C\# = \frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24} = C \cdot \frac{T^2}{Q}$	$D^b = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15} = D : \frac{Q^3T}{4}$
$D\# = \frac{2T^3}{Q^3} = \frac{125}{108} = D \cdot \frac{4T^3}{Q^5}$	$E^b = \frac{Q}{T} = \frac{6}{5} = E : \frac{T^2}{Q}$
$E\# = \frac{T^3}{Q} = \frac{125}{96} = E \cdot \frac{T^2}{Q}$	$F^b = \frac{2}{T^2} = \frac{32}{25} = F : \frac{T^2}{Q}$
$F\# = \frac{2T^2}{Q^2} = \frac{25}{18} = F \cdot \frac{T^2}{Q}$	$G^b = \frac{Q^2}{T^2} = \frac{36}{25} = G : \frac{T^2}{Q}$
$G\# = T^2 = \frac{25}{16} = G \cdot \frac{T^2}{Q}$	$A^b = \frac{2}{T} = \frac{8}{5} = A : \frac{T^2}{Q}$
$A\# = \frac{2T^3}{Q^2} = \frac{125}{72} = A \cdot \frac{T^2}{Q}$	$H^b = \frac{4}{Q^2} = \frac{16}{9} = H : \frac{Q^3T}{4}$
$H\# = \frac{4T^4}{Q^4} = \frac{625}{324} = H \cdot \frac{4T^3}{Q^5}$	$c^b = \frac{2Q}{T^2} = \frac{48}{25} = c : \frac{T^2}{Q}$

Wir haben also hier drei Werthe der Apotome, nämlich $\frac{4T^3}{Q^5} = \frac{250}{243}$, zur Erhöhung von D und H; $\frac{Q^3T}{4} = \frac{135}{128}$, zur Erniedrigung von D und H; und $\frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$ zur Erhöhung und Erniedrigung aller übrigen Haupttöne. Das nunmehr durch Bestimmung der Werthe von $E\#$ und $H\#$ vervollständigte System weicht also von dem französischen, dessen Apotome durchgängig $= \frac{T^2}{Q}$ ist, in den vier Tönen $D\#$, D^b, $H\#$ und H^b ab. Diesen kommen hier der Reihe nach zu die Intervalle 0,21090; 0,09311; 0,94786 und 0,83008.

Das System Delezenne's endlich hat folgende Abwechslungen der reinen und alterirten Quinten:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
F^b_5 & & C^b_4 & & G^b_4 & & D^b_3 & & A^b_3 & & E^b_2 & & H^b_2 & & F_1 \\
& \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & \\
F_1 & & C & & G & & \overset{1}{D} & & \overset{1}{A} & & \overset{2}{E} & & \overset{2}{H} & & \overset{3}{F}\# \\
& Q & & Q & & Q & & \frac{4T}{Q^3} & & Q & & Q & & Q & \\
\overset{3}{F}\# & & \overset{4}{C}\# & & \overset{4}{G}\# & & \overset{5}{D}\# & & \overset{5}{A}\# & & \overset{6}{E}\# & & \overset{6}{H}\# & & \\
& Q & & \frac{4T}{Q^3}. & & Q & & Q & & Q & & Q & & &
\end{array}$$

Es folgen hier also immer vier reine Quinten auf eine alterirte, und das ganze Tonsystem umfasst 16 reine Quinten $=$ 9,35940 Octaven und 4 alterirte $=$ 2,26816 Octaven, also im Ganzen 11,62756 Octaven, woraus für den Mittelwerth der Quinte 0,58138 folgt, der dem der gleichschwebenden Temperatur von 43 Stufen $\frac{25}{43} = 0{,}58140$ sehr nahe kommt. Da hier $\frac{\overset{6}{H}\#}{F^b_5} = Q^{16}\left(\frac{4T}{Q^3}\right)^4 = (4QT)^4 = \frac{3^4 \,.\, 5^4}{2^4}$, so ist die relative Schwingungszahl der mittleren Quinte $= \sqrt[5]{\frac{15}{2}}$. Nach obiger Quintenfolge wird nun hier

$$\begin{array}{ll|ll}
C\# = \frac{Q^3T}{4} = \frac{135}{128} = C \,.\, \frac{Q^3T}{4} & & D^b = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15} = D : \frac{Q^3T}{4} & \\
D\# = \frac{QT^2}{2} = \frac{75}{64} = D \,.\, \frac{T^2}{Q} & & E^b = \frac{Q}{T} = \frac{6}{5} = E : \frac{T^2}{Q} & \\
E\# = \frac{Q^3T^2}{4} = \frac{675}{512} = E \,.\, \frac{Q^3T}{4} & & F^b = \frac{2}{T^2} = \frac{32}{25} = F : \frac{T^2}{Q} & \\
F\# = \frac{Q^2T}{2} = \frac{45}{32} = F \,.\, \frac{Q^3T}{4} & & G^b = \frac{4}{Q^2T} = \frac{64}{45} = G : \frac{Q^3T}{4} & \\
G\# = T^2 = \frac{25}{16} = G \,.\, \frac{T^2}{Q} & & A^b = \frac{2}{T} = \frac{8}{5} = A : \frac{T^2}{Q} & \\
A\# = \frac{Q^2T^2}{2} = \frac{225}{128} = A \,.\, \frac{Q^3T}{4} & & H^b = \frac{4}{Q^2} = \frac{16}{9} = H : \frac{Q^3T}{4} & \\
H\# = \frac{Q^4T^2}{4} = \frac{2025}{1024} = H \,.\, \frac{Q^3T}{4} & & c^b = \frac{8}{Q^3T} = \frac{256}{135} = c : \frac{Q^3T}{4} &
\end{array}$$

Dieses System, dessen Intervalle in der ersten Abhandlung S. 100 angegeben sind, hat demnach zwei Werthe der Apotome, nämlich $\frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$, zur Erhöhung von D und G, und zur Erniedrigung von E, F und A, und $\frac{Q^3T}{4} = \frac{135}{128}$, zur Erhöhung von C, E, F, A, H, und zur Erniedrigung von D, G, H und c.

6.

Hinsichtlich der Einfachheit des Baues ist nun unbedingt das französische System den beiden übrigen vorzuziehen, aber auch selbst hinsichtlich der approximativen Reinheit möchten am Ende die Vorzüge und Mängel desselben im Vergleich mit dem System Delezenne's sich mindestens die Wage halten. Die Abweichungen des deutschen Systems von ihm glaubt D. Möhring daraus erklären zu müssen, dass man einen Ergänzungston zur Octave sowohl für D als für H vermisst habe, der doch allen übrigen Tönen zukommt, und dass man, um diesen zu erhalten, $H^b = \frac{2}{D} = \frac{16}{9}$, $D^\# = \frac{2}{H} = \frac{16}{15}$ gesetzt habe. Um dem französischen System nun auch diese Regelmässigkeit zuzuwenden, schlägt Dr. M. vor, als den Werth der grossen Secunde $\frac{2T}{Q^3} = \frac{10}{9}$ anzunehmen und damit als die reine Durscala folgende anzusehen:

$$1,\ \frac{10}{9},\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{15}{8},\ 2,$$

also $D = \frac{10}{9}$ zu setzen; ein Vorschlag, in dem er bekanntlich schon Vorgänger gehabt hat. In der That wird dadurch nicht nur der beabsichtigte Zweck erreicht, sondern man findet auch bei weiterer Untersuchung, dass nach dieser Veränderung genau noch eben so viel Tonarten rein bleiben wie zuvor und die übrigen in gleicher Zahl und Art der Intervalle von der Reinheit abweichen,*) wofern man nun die vorstehende Scala als die völlig reine betrachtet. Der Höhenunterschied der Töne $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$ ist an sich nicht unmerklich, sondern gleich dem syntonischen Komma, also $\frac{1}{9,5}$ des gr. ganzen Tons; es fragt sich also, ob die diatonische Tonleiter diese Vertauschung der grösseren ganzen Tonstufe mit der kleineren in dem Uebergange von C zu D und die umgekehrte Vertauschung im Uebergange von D zu E verträgt. Denn dass sich nicht durch Accorde die reine grosse Secunde, als eine Dissonanz, mit gleicher Sicherheit experimental feststellen lässt wie die Consonanzen, wird wol zugegeben werden müssen. Gleichwohl scheint doch aus Delezenne's Versuchen, die derselbe in aller Ausführlichkeit beschreibt, hervorzugehen, dass eine solche Abänderung der Scala unzulässig ist. Diese Versuche nämlich sollen gegen Galin, welcher lehrte, dass alle ganze

*) In dem Schema des vorigen Artikels vertauscht nur in jeder der drei Zeilen das dritte Q seine Stelle mit dem darauf folgenden $\frac{4T}{Q^3}$.

Stufen der diatonischen Scala gleich seien, beweisen, dass factisch von tüchtigen Künstlern auf den Streichinstrumenten diese Scala genau so ausgeführt werde, wie es die Zahlen 1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$ u. s. w. fordern, d. h. mit sorgfältiger, wenn auch natürlich unbewusster Unterscheidung des grösseren und kleineren ganzen Tons. Die vier geschickten Musiker Baumann, Delannoy, Rebier und Noguer wenigstens, die an Delezenne's Versuchen Theil nahmen, spielten auf allen Streichinstrumenten und in verschiedenen Tonarten die Durscala, wenn sie sie langsam und mit Aufmerksamkeit vortrugen, völlig im Einklang mit den Tönen, welche Delezenne, jenen Maassen entsprechend, auf dem Tonometer angab. Liess sich also hier mit Sicherheit erkennen, dass das erste Intervall dem zweiten nicht gleich, sondern grösser als dieses war, so spricht dies gegen die Vertauschbarkeit dieser Intervalle, denn um diese für zulässig zu erachten, hätten mindestens eben so oft diese Intervalle gleich gefunden werden müssen. So lange daher nicht durch andre Versuchsreihen nachgewiesen ist, dass namhafte Künstler eine Intonation haben, die von der der genannten abweicht, glaube ich allerdings die Durscala in ihrer herkömmlichen Form für unantastbar halten zu müssen, wenn es sich darum handelt, die dem musikalischen Gehör unsrer Künstler, mag dasselbe nun auf tiefer liegenden ästhetischen Principien oder blosser Gewöhnung beruhen, am meisten zusagende Tonfolge anzugeben. Aus diesem Grunde habe ich in meinen Abhandlungen nicht nur die Consonanzen, sondern auch die Secunden und Septimen als akustisch feststehende Töne behandelt.

7.

D. Möhring stimmt mir jedoch völlig bei, wenn ich behaupte, dass alle diese Systeme zuletzt, im Ganzen betrachtet, unbefriedigende Resultate geben, weil die Intervalle, die in der grösseren Anzahl der Tonarten unrein bleiben müssen, viel zu stark von der Reinheit abweichen. Auch erklärt er sich einverstanden mit der von mir zur festen Bestimmung aller erhöhten und erniedrigten Töne in Anwendung gebrachten Methode der kleinsten Quadratsummen, welche ein Tonsystem giebt, das ich das der möglich reinsten gleichschwebenden Temperatur genannt habe, und in dem das Intervall der temperirten Quinte = 0,5810541 oder nahe $= \frac{43}{74}$ ist. Ich füge hinzu, dass, wenn man die grosse Secunde $= \frac{10}{9}$ setzt, das temperirte Quintenintervall

$$\frac{\lg\left(\frac{2 \cdot 5^{14}}{3}\right)}{55 \cdot \lg 2} = 0{,}5804005$$

wird, was unmerklich von $\frac{18}{31}$ abweicht. Da Dr. M. bezweifelt, dass sich die Werthe der Secunden mit gleicher Präcision experimental bestimmen lassen, wie die der Consonanzen, so ist es natürlich, dass er nach derselben Methode untersucht, wie gross das temperirte Quintenintervall sein muss, wenn nur die Summe der Quadrate der Abweichungen der Quinte und der beiden Terzen von der Reinheit ein Minimum sein soll. Er findet dann das Quintenintervall

$$\frac{\lg\left(\frac{2^2 \cdot 5^7}{3^2}\right)}{26 \cdot \lg 2} = 0{,}5801377$$

und setzt dies näherungsweise $= \frac{29}{50}$, was indess nur bis auf 3 Decimalen genau den gefundenen Werth darstellt. Dieses Resultat zeigt aber, dass, wenn man die Secunden unberücksichtigt lässt, man eine von der Reinheit entferntere Quinte erhält.

Dagegen scheint mir meine eigne Rechnung noch einer kleinen Verbesserung fähig. Ich habe zur Bestimmung des Quintenintervalls q nicht die Quarte zugezogen, weil diese die Octavenergänzung der Quinte ist. Wenn man sich jedoch die Aufgabe stellt, denjenigen Werth von q zu finden, bei welchem die Summe der Quadrate der Abweichungen aller Töne der Durscala von der Reinheit ein Minimum ist, so kann die Quarte nicht unberücksichtigt bleiben. Weil aber das Quadrat ihrer Abweichung, welches, wenn f das Intervall der reinen Quarte, durch $(1 - q - f)^2$ auszudrücken ist (da die Abweichungen der Quarte und Quinte immer entgegengesetzt sind), auch, weil $1 - f = g$, gleich $(g - q)^2$ gesetzt werden kann, so kommt es nun darauf an, q so zu bestimmen, dass, wenn d, e, a, h die reinen Intervalle der grossen Secunde, grossen Terz, grossen Sexte und grossen Septime bedeuten, die Summe

$$(d - 2q + 1)^2 + (e - 4q + 2)^2 + 2(g - q)^2 + (a - 3q + 1)^2 + (h - 5q + 2)^2$$

ein Minimum wird. Bildet man nun ihren Differentialquotienten und setzt denselben $= 0$, so erhält man

$$q = \frac{23 + 2d + 4e + 2g + 3a + 5h}{56}$$

oder, wenn man für d, e, g, a, h ihre logarithmischen Ausdrücke durch die relativen Schwingungszahlen setzt,

$$q = \frac{\lg\left(\frac{3^2 . 5^3}{2^2}\right)}{14 . \lg 2} = 0,5811220,$$

ein Werth, der der Reinheit etwas näher kommt als der, welcher sich ohne Berücksichtigung der Quarte ergiebt, indem hier die Abweichung der Quinte $\frac{1}{44,25}$ g. g. T. ist, die dort $\frac{1}{43,4}$ beträgt; ein freilich sehr geringer Unterschied. Der Näherungswerth von q lässt sich in zweiziffrigen Zahlen auch nicht anders als durch $\frac{43}{74}$ ausdrücken. Der ihm entsprechende Werth von Q ist $\sqrt[14]{\frac{3^2 . 5^3}{2^2}}$. Nach dem scharfen Werth von q erhält man aber für die Intervalle der 21 Töne mit dem Grundton folgende Bestimmungen:

C	0	$C^\sharp$	0,06785	D^b	0,09439
D	0,16224	$D^\sharp$	0,23010	E^b	0,25663
E	0,32449	$E^\sharp$	0,39234	F^b	0,35102
F	0,41888	$F^\sharp$	0,48673	G^b	0,51327
G	0,58112	$G^\sharp$	0,64898	A^b	0,67551
A	0,74337	$A^\sharp$	0,81122	H^b	0,83776
H	0,90561	$H^\sharp$	0,97346	c^b	0,93215

Wie gering der Einfluss dieser Verbesserung auf die Reinheit der Scala im Ganzen ist, geht aus der Summe der Quadrate der Abweichungen der sechs benutzten Töne hervor. Denn dieser findet sich hier $= 0,00013762$, für $q = 0,58105$ aber, wenn man ebenfalls die Quarte mit in Rechnung zieht, $= 0,00013774$.

8.

Betrachtet man aber nicht alle Töne der C-durscala als feststehend, so ist ohne Zweifel Folgendes die einfachste Lösung des Problems, die 21 Töne zu fixiren.

Der Mangel, den die Temperatur beseitigen soll, besteht darin, dass in allen drei zuvor geprüften Systemen (im deutschen wenigstens innerhalb der 24 gebräuchlichsten Tonarten) ein Theil der Töne, welche die Scalen bilden, bald um das syntonische Komma $\frac{81}{80}$ zu hoch, bald um dasselbe zu tief liegen. Nun ist aber der allgemeine Ausdruck dieses Komma's $\frac{Q^4}{4T}$, folglich die Grösse seines Intervalls, wenn $\frac{\lg Q}{\lg 2} = q$, $\frac{\lg T}{\lg 2} = t$

gesetzt wird, $4q - t - 2$. Es müssen daher, wenn die zuvor erwähnten Abweichungen verschwinden sollen, q und t so bestimmt werden, dass

$$4q - t - 2 = 0.$$

Sollen nun zugleich q und t von ihren reinen Werthen g und e möglichst wenig abweichen, so muss $(g-q)^2 + (e-t)^2$, oder, da nach der vorstehenden Gleichung $t = 4q - 2$,

$$(g-q)^2 + (e - 4q + 2)^2$$

ein Minimum werden. Differentiirt man daher diese Summe nach q und setzt den Differentialquotienten gleich Null, so erhält man

$$q = \frac{8 + 4e + g}{17} = \frac{\lg\left(\frac{3\cdot 5^4}{2}\right)}{17\cdot\lg 2} = 0{,}5807454,$$

oder nahe $= \frac{18}{31} = 0{,}5806484$. Es ist damit zugleich ein neuer und einfacher Beweis gegeben, dass nur durch gleichschwebende Temperatur (deren charakteristisches Kennzeichen die Gleichung $t = 4q - 2$ ist) die 24 Töne sich fixiren lassen,*) und dass, wenn man dabei nur die Quinte und grosse Terz als maassgebend ansieht, dieses am besten die Temperatur leistet, deren Quinte nahe das Intervall $\frac{18}{31}$ hat, oder deren relative Schwingungszahl genau gleich $\sqrt[17]{\frac{3\cdot 5^4}{2}}$ ist. Dieses System ist in § 46 meiner ersten Abhandlung dargestellt. Es ist das von Delezenne besprochene Galin's. Die Summe der Quadrate der Abweichungen der 6 Töne D, E, F, G, A, H, welche $q = 0{,}58075$ giebt, ist $= 0{,}00014540$; die von E und G allein $= 0{,}00018827$.

9.

Fast genau dieselben Werthbestimmungen und jedenfalls solche, die von denen des vorigen Artikels ganz unmerkbar abweichen, erhält man aber auch, wenn man ganz einfach die Quinte von der reinen grossen Terz abhängig macht, indem man das syntonische Komma $\frac{Q^4}{4T} = 1$ setzt und hieraus Q durch T bestimmt, was

$$Q = \sqrt[4]{4T} = \sqrt[4]{5} = \frac{2{,}99070}{2}$$

und

$$q = \frac{\lg 5}{4\cdot\lg 2} = 0{,}5804819$$

*) Was auf etwas andre Weise schon in § 35 der ersten Abhandlung erwiesen ist.

giebt, wovon ebenfalls $q = \frac{18}{31}$ als genäherter Werth anzusehen ist, wie, nach Delezenne (a. a. O. S. 19), schon Galin bemerkt haben muss. Man kann dieses System mit D. Möhring, der auf dasselbe durch andre, nicht so einfache Betrachtungen kommt, das reine Terzensystem nennen. Bezeichnet man die kleine Terz durch T', so folgt in diesem System, da $Q = TT'$, zwischen beiden Terzen die Relation

$$T^3 T'^4 = 4,$$

die Möhring ebenfalls bemerkt hat. Die Apotome, durch die hier, wie in allen vom reinen Quintensystem abhängigen Tonsystemen, die erhöhten und erniedrigten Töne bestimmt werden, ist

$$\frac{T}{T'} = \frac{T^2}{\sqrt[4]{4T}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{4^2}.$$

Hiernach lassen sich die relativen Schwingungszahlen der 21 Töne durch Irrationalzahlen genau bestimmen. Die Intervallwerthe derselben, die, wie aus dem Vorgehenden hervorgeht und durch die Vergleichung mit § 46 der ersten Abhandlung bestätigt wird, von denen der gleichschwebenden Temperatur, deren Quintenintervall $= \frac{18}{31}$, ganz unmerkbar abweichen, sind folgende:

C	0	$C^\sharp$	0,06337	$D^\flat$	0,09759
D	0,16096	$D^\sharp$	0,22434	$E^\flat$	0,25855
E	0,32193	$E^\sharp$	0,38530	$F^\flat$	0,35614
F	0,41952	$F^\sharp$	0,48289	$G^\flat$	0,51711
G	0,58048	$G^\sharp$	0,64386	$A^\flat$	0,67807
A	0,74145	$A^\sharp$	0,80482	$H^\flat$	0,83904
H	0,90241	$H^\sharp$	0,96578	$c^\flat$	0,93663

Aber auch von dem möglichreinsten System in Art. 7 weicht das vorstehende sehr wenig ab. Denn die Haupttöne beider Systeme sind schlechthin ununterscheidbar, und die stärksten Abweichungen der Nebentöne, die auf $E^\sharp$ und $H^\sharp$ fallen, betragen noch nicht resp. $\frac{1}{28}$ und $\frac{1}{22}$ g. T. Man kann daher sagen, dass das reine Terzensystem mit einer dem Ohr völlig genügenden Genauigkeit das möglichreinste System selbst darstellt.

Bemerkenswerth scheint endlich noch Folgendes. Sucht man das Tonsystem, dessen Töne relative Schwingungszahlen haben, welche die geometrischen Mittel zwischen den gleichbenannten Tönen des reinen Quinten- und reinen Terzensystems, deren Intervalle mit dem Grundton daher die arithmetischen Mittel zwischen den Intervallen derselben Töne sind, so erhält man dasselbe aus den Werthbestimmungen der Quinte, durch welche die aller andern Töne gegeben sind. Diese giebt nun für die Quinte des gesuchten mittleren Systems die relative Schwingungszahl $\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}}$ und das Intervall $\frac{1}{2}(0{,}58496 + 0{,}58048) = 0{,}58272$. Dieser Werth ist aber von dem Quinteninterval der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur 0,58333 noch nicht um $\frac{1}{273}$ g. T., also völlig unmerkbar verschieden; auch beträgt die Differenz der nächsten erhöhten und erniedrigten Töne nur noch $\frac{1}{23}$ g. T. Die zwölfstufige gleichschwebende Temperatur verdient daher auch in dieser Beziehung den Namen der mittleren, den ich ihr in der früheren Abhandlung deshalb beigelegt habe, weil sie die beiden Classen von Temperaturen scheidet, von denen die eine die erhöhten Töne tiefer, die andre höher setzt als die erniedrigten (vgl. oben Art. 4). Das reine Terzensystem gehört in die erste Classe, wie das reine Quintensystem in die zweite.

10.

Man könnte gegen die vorstehenden Resultate den Einwurf machen, dass, wie gerechtfertigt sie auch in mathematischer Hinsicht seien, sie doch in musikalischer nicht ganz befriedigten. Denn es ergebe sich, in Art. 7., für die Abweichung der Quinte $\frac{1}{44{,}25}$ g. T., für die der grossen Terz aber $\frac{1}{66{,}3}$; es verlange aber das Ohr gerade umgekehrt die Quinte reiner als die Terz, und zwar sei, nach Delezenne, die Empfindlichkeit für die Unreinheit der Quinte 1,94mal oder fast zweimal so gross als für die der grossen Terz.*) Dies führt auf den Gedanken, den Werth des

*) S. 35 meiner ersten Abhandlung ist der nach Delezenne noch bemerkbare Unterschied einer unreinen Quinte von der reinen richtig = 0,1464 Komma angegeben, aber nicht genau reducirt. Er beträgt 0,00262 Octave, was = $\frac{1}{63{,}6}$ des grossen ganzen Tons ist, nicht, wie dort steht, $\frac{1}{67{,}5}$. Die übrigen Reductionen sind richtig, nur muss es Z. 6 v. u. heissen 1,42 Komma = $\frac{1}{8{,}5}$ g. T. statt 1,41 Komma etc. Der Werth des syntonischen Komma's, den ich S. 30 zu $\frac{1}{9{,}4}$ g. T. angegeben habe, ist genauer $\frac{1}{9{,}5}$ g. T. Ich trage noch nach, dass Delezenne für die Octave als Grenze der Unterscheidbarkeit 0,31 Komma = $\frac{1}{30{,}6}$ g. T. fand. Für die grosse Sexte lag diese Grenze

Quintenintervalls q so zu bestimmen, dass der absolute Fehler desselben sich zu dem des Intervalls der grossen Terz wie $1:1,94$ verhalte. Hieraus ergiebt sich, wenn e und g die vorige Bedeutung behalten, die Bedingungsgleichung

$$1,94 \,.\, (g - q) = 4q - e - 2\,,$$

woraus folgt

$$q = \frac{2 + e + 1,94 \,.\, g}{5,94}$$

$$= \frac{\lg\left(5 \,.\, \left(\frac{3}{2}\right)^{1,94}\right)}{5,94 \,.\, \lg 2} = 0,5819468\,.$$

Dies giebt folgende Intervallwerthe:

C	0	$C^\sharp$	0,07363	$D^\flat$	0,09026
D	0,16389	$D^\sharp$	0,23752	$E^\flat$	0,25416
E	0,32779	$E^\sharp$	0,40142	$F^\flat$	0,34442
F	0,41805	$F^\sharp$	0,49163	$G^\flat$	0,50832
G	0,58195	$G^\sharp$	0,65558	$A^\flat$	0,67221
A	0,74584	$A^\sharp$	0,81947	$H^\flat$	0,83610
H	0,90973	$H^\sharp$	0,98336	$c^\flat$	0,92637

Die Quinte ist hier um $\frac{1}{56,4}$ g. g. T. zu tief, die Quarte um ebensoviel zu hoch, die grosse Terz um $\frac{1}{29}$ zu hoch, die grosse Sexte $\frac{1}{19,2}$ zu hoch, die grosse Secunde um $\frac{1}{28,2}$ zu tief, die grosse Septime um $\frac{1}{59,9}$ zu hoch.

Im System des Art. 7, in welchem die Abweichungen in dem nämlichen Sinne stattfinden, betragen sie für die Quinte und Quarte $\frac{1}{44,25}$, für die grosse Terz $\frac{1}{66,3}$, für die grosse Sexte $\frac{1}{26,6}$, für die grosse Secunde $\frac{1}{22,1}$, für die grosse Septime $\frac{1}{132,75}$.

Hiernach findet im vorliegenden System allerdings eine gleichmässigere Vertheilung der Abweichungen statt, aber für die Quinte ist an absoluter Reinheit wenig gewonnen, und die Terzen, die im möglichreinsten System so gut als rein sind, haben hier merklich verloren. Die Summe der Quadrate aller Fehler muss natürlich grösser sein. In der That beträgt sie 0,00024815, ist also fast doppelt so gross.

---

zwischen 0,299 Komma $= \frac{1}{31,7}$ g. T. und 0,441 Komma $= \frac{1}{21,5}$ g. T. Von der Quarte giebt er (S. 13) nur beiläufig an, dass sie eine Aenderung von $\frac{1}{3}$ Komma $= \frac{1}{28,5}$ g. T. nicht verträgt.

11.

Man erhält eine anschauliche und zugleich sehr genaue Uebersicht von der Grösse der Intervalle, die den 21 Tönen in den verschiedenen Systemen zukommen, wenn man, wie in § 22 der ersten Abhandlung, diese Intervalle als Bogenlängen eines Kreises ansieht, dessen Umfang dem Intervall der Octave entspricht. Es genügt dann eigentlich schon die Angabe dieser Bogenlängen nach Graden. Denn es ist 1 Grad $= 0{,}00278$ Octave $= \frac{1}{61{,}1}$ ganz. Ton; ferner 0,00262 Octave, der kleinste hörbare Unterschied in der Stimmung der Quinte, $= 56' 35''$, und das syntonische Komma $\frac{81}{80} = \frac{1}{9{,}5}$ g. T. gleich $6^0 27'$. Es ist daher eine mehr als zureichende Schärfe, wenn in den folgenden Täfelchen die Grössen der Intervalle bis auf Zehntel des Grads berechnet sind.

1) Französisches Tonsystem (Art. 2).

C	0°	*C*#	21°,2	*D*♭	40°,0
D	61,2	*D*#	82,4	*E*♭	94,7
E	115,9	*E*#	137,1	*F*♭	128,2
F	149,4	*F*#	170,6	*G*♭	189,4
G	210,6	*G*#	231,8	*A*♭	244,1
A	265,3	*A*#	286,5	*H*♭	305,3
H	326,5	*H*#	347,7	*c*♭	338,8

2) Deutsches Tonsystem (Art. 5).

Weicht von dem französischen nur ab in den Tönen

D#	75°,9	*D*♭	33°,5
H#	341,2	*H*♭	298,8

3) Delezenne's Tonsystem (Art. 5)

hat die Haupttöne mit dem französischen und deutschen System gemein. Die Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne sind folgende:

C#	27°,6	*D*♭	33°,5
D#	82,4	*E*♭	94,7
E#	143,5	*F*♭	128,2
F#	177,0	*G*♭	182,9
G#	231,8	*A*♭	244,1
A#	293,0	*H*♭	298,8
H#	354,1	*c*♭	323,4

4) Möglichreinstes Tonsystem (Art. 7).

C	0^0	$C^\sharp$	24,°4	D^b	34,°0
D	58,4	$D^\sharp$	82,8	E^b	92,4
E	116,8	$E^\sharp$	141,2	F^b	126,4
F	150,8	$F^\sharp$	175,2	G^b	184,8
G	209,2	$G^\sharp$	233,6	A^b	243,2
A	267,6	$A^\sharp$	292,0	H^b	301,6
H	326,0	$H^\sharp$	350,4	c^b	335,6

5) Reines Terzensystem (Art. 9).

C	0^0	$C^\sharp$	22,°8	D^b	35,°1
D	57,9	$D^\sharp$	79,6	E^b	93,1
E	115,9	$E^\sharp$	138,7	F^b	128,2
F	151,0	$F^\sharp$	173,8	G^b	186,2
G	209,0	$G^\sharp$	231,8	A^b	244,1
A	266,9	$A^\sharp$	289,7	H^b	302,0
H	324,9	$H^\sharp$	347,7	c^b	337,2

6) Reines Quintensystem (Art. 1).

C	0^0	$C^\sharp$	34,°1	D^b	27,°1
D	61,2	$D^\sharp$	95,3	E^b	88,2
E	122,3	$E^\sharp$	156,5	F^b	115,3
F	149,4	$F^\sharp$	183,5	G^b	176,5
G	210,6	$G^\sharp$	244,7	A^b	237,7
A	271,8	$A^\sharp$	305,9	H^b	298,8
H	332,9	$H^\sharp$	370,0	c^b	325,9

7) Mittlere Temperatur.

C	0^0	$C^\sharp = D^b$	30^0
D	60	$D^\sharp = E^b$	90
$F^b = E$	120	$F^\sharp = G^b$	180
$E^\sharp = F$	150	$G^\sharp = A^b$	240
G	210	$A^\sharp = H^b$	300
A	270	$H^\sharp = c$	360
$c^b = H$	330		

12.

Weder das möglichreinste Tonsystem (Art. 7), noch das ihm nahe kommende reine Terzensystem (Art. 9) entspricht den Bedürfnissen unsrer heutigen Musik. Denn es liegen in ihm, wie in den zuvor ausgeführten drei Systemen und in allen gleichschwebenden Temperaturen, in denen das Quintenintervall kleiner als $\frac{7}{12}$ ist, die erhöhten Töne tiefer als ihre nächstbenachbarten erniedrigten, und es stehen ihm daher die Bedenken entgegen, die sich nach Herbart, Griepenkerl u. A. gegen diese Lage geltend machen lassen. D. Möhring tritt diesen Bedenken nicht nur bei, sondern giebt auch eine schätzbare Thatsache, durch welche die umgekehrte Lage dieser Töne als die von dem Musiker wirklich beobachtete nachgewiesen wird. Er verband sich nämlich mit dem Musikdirector Meyer in Lüneburg, einem geschickten Violonspieler, um nach dessen Griffen auf der G-Saite die Unterschiede der Saitenlängen der Töne G, $G^{\#}$, A^b und A durch directe Messung zu bestimmen. Er fand $G - A^b = 2'' \, 6'''$ rheinl. Duodecimalmass, $G - G^{\#}$ nahe $= 3''$, und $G - A = 5''$. Obgleich Dr. M. diese Messung nicht als eine vollkommen genaue betrachtet, so hält er sie doch für sicher genug, um darüber keinen Zweifel zu lassen, dass der praktische Musiker wirklich A^b tiefer nimmt als $G^{\#}$. Es lässt sich aber auch zeigen, dass diese Maassbestimmungen mit den Differenzen, welche diese Saitenlängen nach dem reinen Quintensystem oder der demselben sehr nahe kommenden gleichschwebenden Temperatur, deren Quintenintervall $= \frac{31}{53}$, haben müssen, so nahe übereinstimmen, wie es bei der Unvollkommenheit der Messungsart, welche die Schärfe nicht erreichen kann, die sich bei Vergleichung der Töne des Instruments mit dem Unisono des Tonometers erlangen lässt, immerhin nur erwartet werden kann. Seien nämlich x, x', x'', x''' die den Tönen G, A^b, $G^{\#}$, A der Reihe nach zukommenden Intervalle mit C, wie gewöhnlich in Theilen des Octavenintervalls ausgedrückt, ferner l, l', l'', l''' der Reihe nach die Saitenlängen dieser Töne, so ist

$$\lg \frac{l'}{l} = -(x' - x) \lg 2, \quad \lg \frac{l''}{l} = -(x'' - x) \lg 2, \quad \lg \frac{l'''}{l} = -(x''' - x) \lg 2.$$

Nach dem reinen Quintensystem sowohl als für jede gleichschwebende Temperatur ist nun, da x das Intervall der Quinte,

$$x' = 3 - 4x, \quad x'' = 8x - 4, \quad x''' = 3x - 1.$$

Ist daher die Quinte rein, also $x = 0{,}58496$, so folgt

$$x' = 0{,}66015\,,\quad x'' = 0{,}67970\,,\quad x''' = 0{,}75489\,;$$

daher ist

$$\lg\frac{l'}{l} = -\,0{,}07519\,.\lg 2\,,\quad \lg\frac{l''}{l} = -0{,}09474\,.\lg 2\,,\quad \lg\frac{l'''}{l} = 0{,}16993\,.\lg 2.$$

Berechnet man hieraus $\frac{l'}{l}$, $\frac{l''}{l}$, $\frac{l'''}{l}$, so erhält man

$$\frac{l-l'}{l-l'''} = \frac{0{,}05078}{0{,}11111} = 0{,}46\,;\quad \frac{l-l''}{l-l'''} = \frac{0{,}06313}{0{,}11111} = 0{,}57.$$

Nach Dr. M.'s Messung ist aber $l - l' = 30'''$, $l - l'' = 36'''$, $l - l''' = 60'''$. Dies giebt also

$$\frac{l-l'}{l-l'''} = 0{,}5 \text{ und } \frac{l-l''}{l-l'''} = 0{,}6\,,$$

was als eine vollkommen befriedigende Uebereinstimmung angesehen werden kann.*)

13.

Jedes System der gleichschwebenden Temperatur, in dem das Quintenintervall grösser ist als $\frac{7}{12}$, nähert sich dem Charakter des reinen Quintensystems; denn von den Terzen schwebt die grössere aufwärts, die kleinere abwärts, d. h. jene ist grösser, diese kleiner als die gleichnamige reine Terz, und dasselbe gilt von den Terzen des Quintensystems; zugleich haben die erhöhten Töne zu den erniedrigten hier wie dort dieselbe relative Lage. Da nun (Art. 10 Anm.) die Quinte erst bei einer Abweichung ihres Intervalls, die $> 0{,}00262$, anfängt merkbar unrein zu werden, so sind alle Quinten, deren Intervall grösser als 0,58234 und kleiner als 0,58758, als völlig rein zu betrachten. Da aber aufwärts schwebende Quinten, da sie die grosse Terz noch mehr von der Reinheit entfernen als die reine Quinte, auszuschliessen sind, und übrigens nach dem Vorstehenden nur solche in Betracht kommen, deren Intervall grösser als $\frac{7}{12} = 058333$, so sind nur alle diejenigen Temperaturen als brauchbare Annäherungen an das reine Quintensystem anzusehen, deren Quintenintervall zwischen diesem letzteren Grenzwerth und 0,58496 liegt. Für den Grenzwerth $\frac{7}{12}$ (die mittlere gleichschw. Temperatur) schwebt die grosse Terz um $\frac{1}{14{,}9}$ g. g. T. aufwärts, die kleine Terz um $\frac{1}{18}$ g. T. abwärts; im reinen Quintensystem dagegen steht die

*) Noch genauere und vermehrte Messungen, die zu denselben Resultaten führen, theilt die Beilage zu dieser Abhandlung mit.

grosse Terz sogar um ein syntonisches Komma oder $\frac{1}{9,5}$ g. T. zu hoch, die kleine Terz um eben so viel zu tief. Für beide Systeme und alle zwischenliegende weichen also die Terzen nicht unmerklich von der Reinheit ab, und zwar um so mehr, je mehr sich das System von der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur entfernt und dem reinen Quintensystem nähert. Aber in demselben Maasse treten auch die erhöhten und erniedrigten Töne, die jene Temperatur gleichsetzt, auseinander, bis ihr Unterschied zuletzt dem pythagorischen Komma oder $\frac{1}{8,7}$ g. T. gleichkommt. Auf dieser Unterscheidung beruht nun aber gerade die Feinheit der Musik der Streichinstrumente. Diese ist demnach mit reinen Terzen, deren relative Schwingungszahlen $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$, völlig unvereinbar. Aus diesen Gründen, und weil in unsrer Musik die erhöhten Töne höher liegen müssen als die ihnen nächsten erniedrigten, habe ich in meiner grössern Abhandlung als das Tonsystem, dem die Musik der Streichinstrumente höchst wahrscheinlich am nächsten komme, diejenige gleichschwebende Temperatur bezeichnet, in welcher das Quintenintervall $= \frac{31}{53}$ ist, was von dem der reinen Quinte nur um $\frac{1}{2832}$ g. T. abweicht, und in dem der Unterschied der nächsten erhöhten und erniedrigten Töne $\frac{1}{9}$ g. T. beträgt. D. Möhring tritt dieser Annahme im Wesentlichen vollkommen bei, giebt ihr aber einen fasslicheren und entschiedeneren Ausdruck, indem er geradezu sagt: d a s S y s t e m d e r S t r e i c h i n s t r u m e n t e i s t d a s r e i n e Q u i n t e n s y s t e m, von dem ja in der That die angeführte Temperatur so gut als nicht verschieden ist. Ich bin hiermit ganz einverstanden. Wenn derselbe aber hinzusetzt: diese Instrumente könnten also der Temperatur ganz entbehren, so ist dies ein Ausdruck, der mindestens leicht Missverständnisse zulässt. Allerdings ist er jedenfalls approximativ richtig, wenn man die Töne der Streichinstrumente mit denen des reinen Q u i n t e n systems vergleicht, unrichtig aber, wenn man sie der m o d e r n e n diatonischen Scala mit ihren reinen T e r z e n gegenüberstellt. Mit diesen verglichen, ist d a s r e i n e Q u i n t e n s y s t e m s e l b s t a l s e i n S y s t e m d e r g l e i c h s c h w e b e n d e n T e m p e r a t u r a n z u s e h e n, nämlich als dasjenige, in welchem zwar nicht Quinte, Quarte und grosse Secunde, wohl aber die grosse Terz, grosse Sexte und grosse Septime temperirt sind. D i e M u s i k d e r S t r e i c h i n s t r u m e n t e i s t a l s o a l l e r d i n g s r e i n i m S i n n e d e r a n t i k e n d i a t o n i s c h e n T o n l e i t e r d e r P y t h a g o r e e r, a b e r n i c h t r e i n i m V e r g l e i c h m i t d e r m o d e r n e n v o n Z a r l i n o e i n g e f ü h r t e n und von der heutigen Akustik anerkannten Tonleiter. Ist es nun, wie man doch wohl annehmen darf, durch unparteiische, von aller Vorliebe für einfache rationale Zahlenverhältnisse völlig freie Versuche wirklich erwiesen, dass sich die Schwingungsmengen der Töne des Dreiklangs in seiner grössten Reinheit genau wie die Zahlen 4, 5, 6 verhalten, folglich die grosse Terz durch $\frac{5}{4}$, die kleine durch $\frac{6}{5}$ auszudrücken ist, so kann das System der Streichinstrumente als akustisch rein nicht gelten; denn es muss, um erhöhte und erniedrigte Töne zu unterscheiden und diese in den Lagen zu haben, welche die enharmonischen Verwechselungen bei gewissen Uebergängen fordern, die grosse Terz höher, die kleine tiefer setzen als die reine.

14.

Aber wie lässt sich dies mit Delezenne's oben (Art. 6) angeführten Versuchen vereinigen? — Man muss wol hierbei zunächst bedenken, dass der intelligente Musiker auf den Streichinstrumenten nicht blos mechanisch und sklavisch ein angelerntes System von Griffen befolgt, sondern dass er dieses, von seinem musikalischen Gefühl geleitet, nach den Umständen modificirt. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass, wenn er aufgefordert wird, mit möglichster Sorgfalt und Ruhe eine sein Gehör völlig befriedigende Scala zu spielen, er etwas anders greifen wird, als wenn er im raschen Tempo nur seiner Gewohnheit folgt, oder die Töne ausser der Ordnung der Scala anzugeben hat. Dies bestätigen auch Delezenne's eigne Worte. Er sagt z. B. (S. 46 seiner Abhandlung): *Si le morceau est lent, quelle que soit la note sur laquelle on s'arrête, on la trouve presque toujours juste et rarement en erreur d'un demi-comma, dans les positions faciles. Si après un grand nombre de mesures, on s'arrête sur une note voisine du chevalet, l'erreur monte quelquefois à un comma, et jamais à deux. Quand le mouvement est très-rapide et que la main s'élance du haut en bas de la touche pour attaquer la note à verifier, on trouve parfois une erreur de deux commas, si l'on a joué long-temps avant de s'arrêter. — Quand on parcourt différens tons et qu'on s'arrête avant d'être rentré en ut; quand le prélude est prolongé et rapide; quand les doigts franchissent toutes les distances, on trouve encore plus de notes justes que de fausses, et l'erreur de ces dernières s'est quelquefois élevée jusqu'à un demi-ton majeur.* — Ueber die relative Lage der erhöhten und erniedrigten Töne bemerkt

Delezenne nichts Besondres; man müsste daher nach seinen Angaben annehmen, dass sie immer seinem Tonsystem entsprechend gegriffen worden wären, was doch kaum glaublich, ja in manchen Fällen unmöglich ist. Zwar bemerkt er (S. 24): *D'autres veulent même que le dièse soit plus aigu que le bémol, ce qui a lieu en effet, comme nous venons de le dire, quand cette note diésée est sensible* (die grosse Septime) *et qu'elle conduit à la tonique.* Und dies führt ihn auf die Construction der Scala des Quintensystems, deren historische Stellung ihm aber so völlig unbekannt ist,*) dass er sie nur für seine eigne versuchsweise Neuerung hält. Jedoch verwirft er sie, als dem Ohr nicht genügend. Er sagt von ihr (S. 25): *En la jouant sur la basse dont j'ai parlé plus haut, elle a séduit plus d'un artiste à la première audition; mais ils ne tardaient pas à reconnaitre que le mi et le la étaient un peu trop hauts; bien qu'ils fussent contents du si en montant.* Man sieht hieraus wenigstens, dass diese Scala für das Ohr verführerisch war und daher in der praktischen Musik, der die ideale Reinheit der Tonleiter nicht das höchste und letzte Ziel ist, wohl eine Stelle finden kann. Ob dies aber wirklich der Fall sei, wird durch weitere Versuche ermittelt werden müssen.

15.

Hierzu scheint mir nun folgender Vorschlag sehr geeignet. Ich habe in § 53 meiner ersten Abhandlung nachgewiesen, dass in der gleichschwebenden Temperatur, deren Quintenintervall $= \frac{31}{53}$, welche mit dem reinen Quintensystem fast zusammenfällt, durch die Tonfolge

$$C \quad D \quad F^b \quad F \quad G \quad H^{bb} \quad c^b \quad c$$

sehr nahe die reine C-durscala $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$ dargestellt wird. Es lässt sich dies auch leicht für das reine Quintensystem selbst zeigen. In diesem kommen nämlich den vorstehenden Tönen der Reihe nach folgende Werthe zu:

*) Irrig sagt er (S. 3): *Depuis Pythagore et Ptolemée, tous les physiciens, tous les auteurs d'acoustique pure ou appliquée à la musique, admettent l'inégalité d'ut à ré, de ré à mi etc.* Die Verhältnisse der reinen Terzen waren zwar nicht nur dem Ptolemäus bekannt, sondern schon früher von Didymus (38 v. Chr.) aufgefunden worden, allein sie galten bis ins sechzehnte Jahrhundert für unvollkommene Consonanzen und erhielten nicht das Bürgerrecht in der Scala. S. Kiesewetter's Geschichte der heutigen Musik S. 112.

$$1 \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2^5}{Q^8} \quad \frac{2}{Q} \quad Q \quad \frac{2^6}{Q^9} \quad \frac{2^5}{Q^7} \quad 2\,.$$

Diese Tonleiter hat die Stufen

$$\frac{Q^2}{2} \quad \frac{2^6}{Q^{10}} \quad \frac{Q^7}{2^4} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{2^6}{Q^{10}} \quad \frac{Q^2}{2} \quad \frac{Q^7}{2^4}\,.$$

Der grosse ganze Ton wird also streng richtig durch $\frac{Q^2}{2}$ dargestellt. Den kleinen ganzen Ton aber, der nach der modernen Scala $\frac{2T}{Q^2}$, vertritt hier der Werth $\frac{2^6}{Q^{10}}$, und den halben Ton $\frac{2}{QT}$ der Werth $\frac{Q^7}{2^4}$. Demnach weicht der kleine ganze Ton um $\frac{Q^8T}{2^5} = \frac{3^8.5}{2^{15}}$, der halbe Ton um $\frac{2^5}{Q^8T} = \frac{2^{15}}{3^8.5}$ von seinem wahren Werthe ab, der erstere steht also um eben so viel zu hoch, als der letztere zu tief. Das dieser Abweichung entsprechende Intervall ist aber

$$\frac{\lg\left(\frac{3^8.5}{2^{15}}\right)}{\lg 2} = \frac{\lg \frac{32805}{32768}}{\lg 2} = 0{,}0016280\,,$$

d. i. $\frac{1}{103{,}7}$ des grossen ganzen Tons. Die Abweichung der obigen Tonfolge des Quintensystems von der modernen diatonischen Tonleiter ist also unter allen Umständen völlig unmerkbar, und diese Tonfolge stellt genau diejenige Scala dar, die Delezenne als die normale ansieht. Es kommt nun darauf an, wie sich der Musiker verhalten wird, wenn man ihm aufgiebt, auf seinem Streichinstrument die obige Tonfolge C, D, F^b, F etc. zu spielen, und um wie viel diese Töne, wenn man ihre Folge mit der Scala C, D, E, F etc. wechseln lässt, durch das Unisono mit dem Tonometer verglichen, von den Tönen dieser letztern Scala differiren. Nach allem Vorstehenden wird der Musiker die Tonreihe C, D, E, F etc. nahe nach dem Quintensystem spielen, die Tonreihe C, D, F^b, F etc. aber die reine Durscala sein, die, nach Delezenne, das musikalische Gefühl am meisten befriedigt, und die der Künstler unbewusst spielen mag, wenn er sich allein von seinem Gehör leiten lässt. Bestätigen nun wirkliche Versuche diese Erwartung, so ist bewiesen, dass das Spiel der Streichinstrumente sich in der Regel dem Quintensystem anschliesst und nur etwa da, wo es auf grösstmögliche Reinheit der Scala ankommt, davon zu Gunsten der modernen Tonleiter abweicht. Mit Hinsicht auf die in der Beilage enthaltenen Beobachtungen des D. Möhring kann aber wenigstens der erstere Theil dieses Satzes schon jetzt als bewiesen angesehen werden.

16.

Als das Endergebniss aller im Vorstehenden und in der ersten Abhandlung enthaltenen Untersuchungen stellt sich nun folgender Satz heraus: die von Zarlino begründete und von den Akustikern anerkannte diatonische Tonleiter mit der grossen Terz $\frac{5}{4}$, der grossen Sexte $\frac{5}{3}$ und der grossen Septime $\frac{15}{8}$ kann für unsre heutige Musik nicht als maassgebend, sondern nur als exceptionell gelten, und alle darauf gebaute Systeme der 21 bräuchlichen Töne sind für diese Musik weder in theoretischer, noch in praktischer Beziehung brauchbar: das normative System derselben ist vielmehr das reine Quintensystem, also das alte pythagoreische. Ueber den ersten dieser drei Punkte ist schon in Art. 13 und 14 das Nöthige gesagt. Was den zweiten und dritten betrifft, so mag zur Recapitulation noch Folgendes beigefügt werden. Die auf die moderne diatonische Scala gegründeten Systeme (Art. 11, 1 bis 5) können nicht maassgebend sein, weil sie sämmtlich die erhöhten Töne tiefer setzen als ihre nächsten erniedrigten, der praktische Musiker aber auf den Streichinstrumenten factisch jene höher setzt als diese. Zugleich ist diese Lage in theoretischer Hinsicht nothwendig, weil sonst jene Unklarheit und Verwirrung entsteht, die bis jetzt über diesen Punkt in den Grundlehren der theoretischen Musik herrschte. Denn von der Unmöglichkeit, nach jenen Systemen die Uebergänge durch die sogenannte enharmonische Verwechselung gründlich zu begreifen, wird man zu der Lehre von der »Mehrdeutigkeit der Töne« getrieben, die den reellen Unterschied der erhöhten und erniedrigten Töne für einen blos nominellen ausgiebt und sich der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur in die Arme wirft, die diese Unterscheidung der Sache nach ganz fallen lässt. Dieser Widerstreit zwischen einer ungenügenden Theorie und einer Praxis, die das Bessere richtig zu treffen gewusst hat, wird nun vollständig gelöst, wenn man zu der Einsicht gelangt, dass es eine ganze Classe von gleichschwebenden Temperaturen giebt, welche die erhöhten und erniedrigten Töne in der theoretisch nothwendigen und von dem Praktiker befolgten Lage enthalten, eine Classe, deren äusserste Grenzen einerseits die gewöhnliche zwölfstufige Temperatur, andrerseits das reine Quintensystem ist. Zwischen diesen Grenzen muss sich die Praxis, wie sie ist, bewegen. Weil aber selbst für das reine Quintensystem der Unterschied der erhöhten Töne von ihren nächsten erniedrigten, der hier am grössten ist, nicht mehr als $\frac{1}{8,7}$ des ganzen Tons beträgt, so ist es unzweifelhaft, dass das Spiel des Musikers, wenn es diesen Unterschied hörbar darstellen soll, dieser Grenze mindestens sehr nahe kommen muss,*) und dass dieses reine Quintensystem als die Norm der Praxis anzusehen ist. Es ist aber auch die einzig richtige Basis der Compositionslehre, die nicht von den 12 Tönen der Clavierscalen ausgehen darf, bei welchen doppelte Benennungen für dieselben Töne unvermeidlich sind, aber es auch ganz unbegreiflich bleibt, warum man sich nicht mit einfachen begnügt (daher wol auch neuerdings ein unglücklicher Versuch auftauchte, die Zeichensprache der Musik zu vereinfachen). Sie darf sich nicht einmal von vorn herein auf die 21 bräuchlichen Töne beschränken und doppelt, dreifach, vielfach erhöhte oder erniedrigte Töne für blosse Bezeichnungen ohne reelle Unterscheidung von den einfachen ausgeben wollen, denn sie sind eben so reell und selbständig wie diese. Sie muss vielmehr von dem Quintensystem ausgehen, in dem an sich die Zahl der Töne unbegrenzt ist, indess freilich davon meistens nur 21 (selten Doppelkreuze und Doppelbee) in musikalischen Gebrauch kommen. Die ganze musikalische Notation steht mit dem Fortschreiten und Rückschreiten nach Quinten im engsten Zusammenhang. Denn von *C*-dur, ohne Vorzeichnung, ausgehend, giebt die obere Quinte von *C*, *G*-dur mit einem Kreuz, die

*) Für die zwischen beiden äussersten Grenzen die Mitte haltende Temperatur, deren Quintenintervall $= 0,58415$, würde der Unterschied der mehrgenannten Töne nur noch $\frac{1}{17,3}$ g. T. betragen. Es mag hier folgender Zusatz zu § 54 der früheren Abhandlung eine Stelle finden. Setzt man die Differenz des Intervalls der temperirten grossen Terz $4q - 2$ von dem der reinen $0,32193$, also $4q - 2,32193 = u$, die Differenz der Intervalle von je zwei nächsten erhöhten und erniedrigten Tönen, wie $C\sharp - D^b$, d. i. $12q - 7 = p$, so erhält man durch Elimination von q

$$u = 0,01140 + \tfrac{1}{3}p.$$

Hieraus erhellt, dass die Aenderung des Werthes von u immer nur ein Drittel der Aenderung des Werthes von p beträgt. Für $q = \frac{7}{12}$ ist $p = 0$, $u = 0,01140 = \frac{1}{14,9}$ g. T.; für $q = 0,58496$ ist $p = 0,01955 = \frac{1}{8,7}$ g. T., $u = 0,01792 = \frac{1}{9,5}$ g. T. Während also, beim Uebergang von der Quinte der mittleren Temperatur zu der reinen, p von 0 bis $\frac{1}{8,7}$ g. T. wächst, wächst u nur von $\frac{1}{14,9}$ bis $\frac{1}{9,5}$ g. T. Für das zuvor erwähnte mittlere Quintenintervall $q = 0,58415$, für welches $p = \frac{1}{17,3}$, ist $u = \frac{1}{11,6}$ g. T.

zweite Quinte, *D*-dur mit 2 Kreuzen u. s. f., eben so die untere Quinte von *C*, *F*-dur mit einem Be, die zweite untere Quinte *B*-dur mit 2 Been u. s. f. Dasselbe findet, wie bekannt, in Bezug auf die Molltonarten statt, wenn man nach Quinten von *A* aus vor- und rückschreitet. Es ist auch hier, wenn man die Sache allgemein fasst, zunächst nicht an eine beschränkte Zahl von Tönen und Tonarten, etwa nach einem Quintencirkel, zu denken. Um zu einem solchen zu gelangen, muss man erst die reine Quinte temperiren, d. h. das Intervall $\frac{\lg \frac{3}{2}}{\lg 2}$, das sich in aller Strenge nur durch einen unendlichen Decimalbruch darstellen lässt, durch einen genäherten endlichen oder den ihm gleichen gemeinen Bruch ausdrücken. So kommt man auf die Cirkel von 12, 19, 31, 41, 43, 53 Quinten u. s. w., die sämmtlich gleichschwebende Temperaturen von eben so viel Tönen geben, wobei es ganz gleichgültig ist, ob die Musik sie alle oder nur zum Theil anwendet. Die gewöhnliche gleichschwebende Temperatur ist daher nur ein höchst specieller Fall des Quintensystems überhaupt und eignet sich demnach auf keine Weise dazu, der allgemeinen theoretischen Tonlehre zu Grunde gelegt zu werden; denn sie beschränkt den Gesichtskreis und giebt zu grossen Missverständnissen, Irrthümern und Unklarheiten Veranlassung. Ihr Werth für die Tasteninstrumente bleibt unbestritten; er beruht aber nur darauf, dass die Complication des Mechanismus zu gross werden würde, wenn jeder der 21 Töne seine eigne Taste erhalten sollte. Dasselbe gilt von den Blasinstrumenten mit fixirten Tönen. Denn dass man eine weit harmonischere Orchestermusik erhalten würde, wenn sich die Blasinstrumente so einrichten liessen, dass sie, wie die Streichinstrumente, dem Quintensystem folgten, kann nach dem Vorstehenden nicht mehr bezweifelt werden. Kenner haben schon die Bemerkung gemacht, dass die Verdrängung der frischen Naturtöne der Hörner und Trompeten durch die temperirten der Ventilinstrumente der Orchestermusik hinsichtlich der Reinheit ihrer Harmonie keinen Gewinn gebracht hat. In der That kann diese niemals vollkommen sein, wo neben den Tönen des Quintensystems zugleich die der 12stufigen gleichschwebenden Temperatur auftreten. Ob aber die Behauptung mancher musikalischen Schriftsteller, dass diese leise Verschiedenheit der Stimmung der Streich- und Blasinstrumente die Quelle von neuen und eigenthümlichen Schönheiten werde, in der Wahrheit begründet ist, oder auf Täuschung und Einbildung beruht, möchte doch wol erst einer, freilich nicht leicht zu führen-den nähern Untersuchung bedürfen. Wie leicht hier Täuschungen möglich sind, geht schon daraus hervor, dass man die pythagoreische Tonleiter als eine unserm Ohr gänzlich fremd gewordene betrachtet und die Vermuthung ausgesprochen hat, die unreinen Terzen müssten in der Harmonie der Alten eine eigenthümliche Wirkung hervorgebracht haben,*) indess wir doch in unserm Streichquartett, nach den vorstehenden Ergebnissen, diese Terzen und ihre harmonische Wirkung noch immer hören und uns ihrer erfreuen.

*) Gehler sagt (phys. Wörterbuch, Art. Ton, S. 383): »Man hat dieses System (das reine Quintensystem) bis ins sechzehnte Jahrhundert beibehalten, woraus freilich ein ganz eigner Charakter der alten Musik entstehen musste, die überhaupt mehr auf Melodie als auf Harmonie beruhte, bei welcher die unreinen Terzen eine eigne Wirkung thun mussten. Alles dieses schränkt sich blos auf die Töne der Instrumente ein, die den Gesang begleiteten; der freie Sänger, der die Töne hervorbringen darf, wie sie das Gehör verlangt, wird unstreitig auch bei den Alten, selbst ohne Absicht, die Terzen nach seinem Gefühl temperirt, und statt der systematischen unreinen die gefälligeren reinen gesungen haben.« Bei wieviel Sängern mag aber die Intonation bis auf $\frac{1}{10}$ des ganzen Tons richtig und zuverlässig sein?

BEILAGE.

Das wichtige Resultat, das Herr D. Möhring durch die in Art. 12 angeführten Messungen gewonnen hatte, veranlasste mich, ihm den Wunsch vorzulegen, dass er jene Messungen nicht nur mit Sorgfalt wiederholen, sondern auch auf die grosse und kleine Terz ausdehnen möchte. Die Bestimmung dieser beiden letzteren Intervalle durch Messung schien mir ein wahres *experimentum crucis;* denn es musste sich dadurch entscheiden, ob der Musiker auf den Streichinstrumenten reine oder irgendwie temperirte Terzen spiele. Herr D. Möhring hat meiner Aufforderung aufs bereitwilligste und mit völlig befriedigendem Erfolge entsprochen, wie aus folgender Mittheilung hervorgeht, von der er mir gestattet hat beliebigen Gebrauch zu machen.

Er schreibt: »Um unbefangen bei der Messung zu sein, hatte ich meinen Freund, den Dr. med. Stieck gebeten, an derselben Theil zu nehmen. Die nachfolgenden Angaben sind auf diese Weise entstanden, dass wir abwechselnd massen und uns gegenseitig controlirten. Weder der Musikdirector Meyer noch der Dr. Stieck wussten bei dem Experiment, wobei ich dieses Mal Ihrem Wunsche gemäss mein Augenmerk besonders auf die Bestimmung der grossen und kleinen Terz richtete, etwas von der Rechnung und hatten beide kein Urtheil darüber, ob das Resultat mit der Berechnung nach dem Quintensystem übereinstimmen würde oder nicht. Ich hatte Herrn Meyer gebeten, sich einfach nach dem Gehör zu richten und die Töne so anzugeben, wie er sie gewöhnlich spiele; während der Dr. Stieck, wie schon gesagt, mir zur Controle der Messung diente. Als Maassstab benutze ich einen officiellen Maassstab der Hannoverschen Chaussee-Verwaltung vom Jahre 1847 (Calenberger Duodecimalmaass) und daneben einen kleineren, der aber ganz genau mit dem obigen übereinstimmte. Ich muss übrigens bemerken, dass eine ganz genaue Messung dadurch schwierig wurde, dass bei verschiedenen Tönen, je nach ihrer Entfernung vom Sattel, von Herrn Meyer verschiedene Finger zum Druck benutzt werden mussten, was allerdings nicht ohne Bedeutung ist, wegen der verschiedenen Breite der drückenden Finger. Am einfachsten ergab sich die Bestimmung derjenigen Töne, deren Lage weiter vom Sattel sich entfernt, weil hierbei der kleine Finger (der schmalste) benutzt werden konnte, während bei *As* der Zeigefinger zum Druck verwandt werden musste. Bei *Gis* benutzte Herr Meyer den Mittelfinger. Herr Meyer zeigte uns nun, dass, bei unveränderter Lage des Fingers, nach Verschiedenheit des Drucks, je nachdem er die dem Leibe zugewandte oder abgewandte Seite des Fingers stärker an die Saite andrückte, der Ton sich etwas erhöhte oder erniedrigte. Diese Modification des Tons ist den Violinspielern wohl bekannt, wie ich selbst aus früherer Erfahrung weiss. Deshalb bat ich Herrn Meyer, immer nur mit der Mitte des Fingers den Hauptdruck auszuüben, und nahm deshalb auch bei der Messung an, dass immer nur der mittlere Theil des Fingers beim Druck vollständig wirksam sei. Ich denke, Sie werden darin mit mir übereinstimmen. Die Anwendung etwa eines Klemmers schien mir bei diesen Versuchen, wo der Musiker durch sein musikalisches Gehör zur Hervorbringung der Töne bestimmt werden soll, deshalb unthunlich, weil ihm bei der Auffindung der Töne in ihren verschiedenen Lagen, in Dur und Moll, der Gebrauch der zu benutzenden Saite nicht immer abgeschnitten werden darf.

»Die folgenden Angaben enthalten alle Messungen, die ich vorgenommen habe, wobei ich noch bemerke, dass der Zoll auf dem Maassstabe in 8 gleiche Theile getheilt war. Ich hätte gern bei der Messung noch mehrere Wiederholungen vorgenommen, allein ich scheute mich, die Güte des Herrn Meyer noch mehr in Anspruch zu nehmen, da die vorgenommenen Messungen circa zwei Stunden erforderten.

Länge der *G*-saite	A	H	H^b	A^b	$G\#$
45 Zoll	$5\frac{3}{16}''$	$9\frac{4}{8}''$	$7\frac{3}{8}''$	$2\frac{1}{8}''$	$3''$
45	5	$9\frac{3}{8}$	7	$2\frac{4}{8}$	$2\frac{7}{8}$
$45\frac{4}{8}$	$5\frac{1}{8}$	$9\frac{3}{8}$	$7\frac{3}{8}$	$2\frac{2}{8}$	3
45	$5\frac{1}{16}$	$9\frac{3}{8}$	$7\frac{1}{8}$		
45	5		.		
45					

Die dritte Messung der *G*-saite scheint mir mangelhaft, jedoch musste ich sie Ihnen mittheilen. Nehme ich $45''$ als genaue Länge der *G*-saite, so erhalte ich nach dem reinen Quintensystem für

$$A = 5'',\quad H = 9''\ 5''',3\,,\quad H^b = 7''\ 0''',4\,,\quad A^b = 2''\ 3''',4\,,\quad G\# = 2''\ 10''',3.$$

Sie sehen aus diesen Zusammenstellungen, dass die Messung entschieden günstig für das Quintensystem ausgefallen, wobei die grösste Abweichung von der Berechnung die kleine Terz trifft, die etwas über $1\frac{1}{2}$ Linien beträgt.

»So scheint denn auch die Praxis im Spiel auf den Saiten- (Streich-) Instrumenten für die Theorie des reinen Quintensystems zu sprechen. Oder sollte die Praxis an verschiedenen Orten so verschieden sein, dass man verschiedene Schulen unterscheiden müsste? Dann würde doch wohl nichts weiter übrig bleiben, als denjenigen Schulen den Vorzug einzuräumen, die in ihrem Spiele dem Quintensystem folgen, da diese die

Theorie für sich haben. Dass Herr Meyer ein tüchtiger Musiker ist und namentlich die Bassgeige, die doch bei einem Concert von blossen Streichinstrumenten maassgebend ist, vorzüglich zu behandeln versteht, wird hier Niemand in Abrede stellen können.

Ich erläutere diese werthvollen Resultate, welche Herr D. Möhring gewonnen hat, und die, wie mich dünkt, auf Jeden den Eindruck der vollen Zuverlässigkeit machen müssen, noch durch einige Berechnungen, welche, wie ich glaube, noch mehr klar machen werden, von welcher entscheidenden Bedeutung sie sind. Als die Differenzen zwischen der Saitenlänge von G und den Saitenlängen von A^b, $G\sharp$, A, H^b, H ergeben sich im Mittel aus den obigen Messungen für

$$\begin{array}{ccccc} G - A^b, & G - G\sharp, & G - A, & G - H^b, & G - H \\ 27''',5 & 35''',5 & 60''',9 & 86''',25 & 112''',8 \end{array}$$

Nimmt man nun mit Dr. M. die Länge der G-saite $= 45'' = 540'''$ an, so erhält man mittels der aus Art. 12 folgenden Formel

$$x' - x = \frac{\lg \frac{l}{l'}}{\lg 2}$$

die Intervalle zwischen G und A^b, $G\sharp$, A, H^b, H, wenn man $l = 540$ und der Reihe nach $l' = l - 27,5 = 512,5$; $l' = l - 35,5 = 504,5$; $l' = l - 60,9 = 479,1$; $l' = l - 86,25 = 453,75$; $l' = l - 112,8 = 427,2$ setzt. Hieraus ergiebt sich folgende Tabelle, in welcher die zweite Columne die Grösse des Intervalls nach der Messung, die dritte nach dem Quintensystem, die vierte die Abweichung von dem letzteren in Theilen des grossen ganzen Tons enthält.

Intervall	nach Messung	nach d. Quintsyst.	Abweichung
$G - A^b$	0,07541	0,07519	$+\frac{1}{772}$ g. T.
$G - G\sharp$	0,09811	0,09474	$+\frac{1}{50}$ „
$G - A$	0,17262	0,16992	$+\frac{1}{63}$ „
$G - H^b$	0,25106	0,24511	$+\frac{1}{28}$ „
$G - H$	0,33804	0,33985	$-\frac{1}{94}$ „

Man bemerkt hier eine, wiewohl sehr schwache Tendenz, sowohl die kleine Terz der reinen 0,26303 als die grosse der reinen 0,32193 etwas näher zu bringen. Doch liegt die gemessene kleine Terz unter der reinen immer noch um $\frac{1}{11,2}$ g. T., weicht also von ihr doppelt so stark ab als von der des Quintensystems, indess die gemessene grosse Terz um $\frac{1}{10,6}$ g. T. über der reinen liegt, also fast neunmal so viel von ihr abweicht als von der des Quintensystems.

Noch schlagender dürfte Folgendes sein. Aus der obigen Formel ergiebt sich, wenn man $2^{x'-x} = y'$ setzt, wo y' die relative Schwingungszahl der Töne über G in Bezug auf dieses ist,

$$l' = \frac{l}{y'},$$

eine Formel, die auch schon von selbst klar ist. Setzt man nun für y' successiv die Werthe, die A^b, $G\#$, A, H^b, H sowohl nach dem Quintensystem als nach dem französischen haben, so erhält man die folgende Tabelle, in der die dritte Columne ganz mit der Berechnung des Dr. M. übereinstimmt, die drei letzten die von ihm gemessenen Werthe von l' enthalten.

Intervall	Quintensystem		Französ. System		Messung		
	y'	l'	y'	l'	Maximum	Minimum	Mittel
$G - A^b$	$\frac{256}{243}$	512,58	$\frac{16}{15}$	506,25	514,5	510,0	512,5
$G - G\#$	$\frac{2187}{2048}$	505,68	$\frac{25}{24}$	518,39	505,5	504,0	504,5
$G - A$	$\frac{9}{8}$	480,00	$\frac{10}{9}$	486,00	480,0	477,75	479,1
$G - H^b$	$\frac{32}{27}$	455,62	$\frac{6}{5}$	450,00	456,0	451,5	453,75
$G - H$	$\frac{81}{64}$	426,67	$\frac{5}{4}$	432,00	427,5	426,0	427,2

Im deutschen System und dem Delezenne's ist das Intervall $G - H^b$, wie im Quintensystem, durch $\frac{32}{27}$ bestimmt. Man sieht hier auf einen Blick, wie genau das Quintensystem mit der Messung zusammentrifft, und wie stark die andern Systeme davon abweichen. Beiläufig zeigt sich aber auch, dass die von Herrn D. Möhring (vgl. Art. 6) befürwortete grosse Secunde $\frac{10}{9}$ durch seine eigne Messung nicht bestätigt wird.

Ich füge endlich noch folgende Bemerkungen aus einem Briefe des Herrn D. Möhring bei: »In Bezug auf das Quintensystem erlaube ich mir, Ihnen noch einen kleinen, ganz einfachen, wie mir aber scheint, schlagenden Beweis mitzutheilen, dass die Streichinstrumente, eben weil sie nach Quinten eingestimmt werden, auch der Scala des Quintensystems für die beiden Terzen $c - e$, $\bar{a} - \bar{\bar{c}}$ sich bedienen müssen. Nehmen wir z. B. an, dass beim Orchester die Bratsche und die beiden Violinen folgende Noten neben einander zu spielen hätten:

Bratsche,	zweite Violine,	erste Violine,
c	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{e}}$

(wobei die Blasinstrumente die Doppeloctave zwischen dem c der Bratsche und dem $\bar{\bar{c}}$ der zweiten Violine ausfüllen mögen), so ist doch klar, dass, da die Töne auf der Bratsche und ersten Violine durch blosses Anstreichen der nach Quinten eingestimmten Saiten hervorgebracht werden, während dass $\bar{\bar{c}}$ auf der zweiten Violine durch den richtigen Griff auf der a-Saite hervorzubringen ist, dieses $\bar{\bar{c}}$ offenbar mit dem c auf der

Bratsche harmoniren muss, da eine fehlerhafte Octave unser Ohr ohne Frage am empfindlichsten berühren würde. Sind nun die Quinten auf der Bratsche und den Violinen r e i n eingestimmt, und ist $\bar{\bar{c}}$ als reine Doppeloctave zu c gegriffen, so muss $c : e$ $= 64 : 81$ sein. Für die Bestimmung der kleinen Terz möchte sich in ähnlicher Weise folgende Zusammenstellung eignen:

Bratsche,	zweite Violine,	erste Violine.
c	$\bar{a}$	$\bar{\bar{c}}$

Dieser Beweis enthält freilich für Sie nichts Neues und ist dazu ein specieller, könnte aber vielleicht zu Anfang, bei der Begründung der Scala nach dem Quintensystem, benutzt werden, um die gangbare Ansicht von den relativen Schwingungszahlen der beiden Terzen $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$ in Bezug auf die Streichinstrumente zu erschüttern, und möchte sich zur Ueberzeugung derjenigen Musiker empfehlen, die nicht alles wissenschaftlichen Sinnes baar sind.«