

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IV**, 9.

ÜBER DIE KONSTRUKTION DER
SCHATTENLINIEN AUF HORIZONTALLEN
SONNENUHREN VON TĀBIT BEN QURRA

VON

E. WIEDEMANN UND J. FRANK

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*
Kgl. Hof-Boghandel, København.



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1922

Aus der Antike einschliesslich der byzantinischen Zeit sind uns zahlreiche Sonnenuhren in den verschiedensten Konstruktionen erhalten¹, auf denen die Linien, die der Schatten von dem Ende eines Gnomons im Laufe des Jahres beschreibt, mit grosser Genauigkeit verzeichnet sind. Zum Teil sind diese Linien wohl durch Versuche an Modellen ermittelt und dann auf andere Sonnenuhren übertragen worden, zum Teil sind sie aber wohl auch auf Grund von theoretischen Betrachtungen konstruiert worden. Soweit diese Linien Kegelschnitte sind, werden sie in der vorislamischen Zeit punktweise gezeichnet², da erst von den Arabern Kegelschnittzirkel erfunden wurden.³ Schriften über die Theorie dieser Schattenkurven sind uns aus dem Altertum auch nicht dem Titel nach, soweit wir wissen, erhalten. Jedenfalls haben aber PTOLEMAEUS u. a. die Theorie gekannt, ergab sie sich doch im wesentlichen aus dem Werk von APOLLONIUS über die Kegelschnitte. Die älteste Schrift über die Theorie, die wir kennen, stammt von dem hochbedeutenden arabischen Gelehrten TĀBIT B. QURRA⁴ (826—901),

¹ Vgl. hierzu H. DIELS, Antike Technik S. 155. 1920.

² Zwar kannte schon ANTHEMIUS († 534) die Konstruktion der Ellipse mit dem um zwei Punkte gelegten Faden, doch ist uns nicht bekannt, ob die Konstruktion damals schon praktische Anwendung fand. Vgl. F. WIEDEMANN, Weltall 20, 26. 1919.

³ Vgl. E. WIEDEMANN, Zeitschr. für Vermessungswesen Heft 22-23, 1-16. 1910 und F. WOEPCKE, Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque impériale etc. 22, 23 und 123. 1874.

⁴ E. WIEDEMANN, Beitr. LXIV. Sitzgsbr. d. phys. med. Soz. in Erlangen 52-53, 1921, und H. SÜTER, Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften Heft 10, 34. 1900.

der durch seine berühmten Übersetzungen des Werkes von APOLLONIUS die Araber mit diesem bekannt machte. Die Schrift von TĀBIT ist in dem Escorial vorhanden und in dem Katalog von CASIRI I, 386, Nr. 955 aufgeführt; jetzt hat die Handschrift die Nr. 960.

Aus dem Titel »Thabeti Ben Corrah Tractatus De Horometria« in dem Katalog von CASIRI ist zunächst wenig zu entnehmen. Der eine von uns hatte sich die vorhergehenden Seiten der arabischen Übersetzung der Schrift von MENELAUS mit dem Titel: Das Werk des Menelaus gerichtet an König DOMITIAN »Über den Kunstgriff, durch den man die Menge eines jeden Körpers bestimmen kann, der in einer Anzahl von gemischten Körpern enthalten ist« — sie wird in deutscher Bearbeitung von Prof. J. WÜRSCHMIDT im Philologus veröffentlicht — photographieren lassen. Dabei war auch die erste Seite der Schrift von Tābit mit dem unten mitgeteilten Titel abgebildet, deren Inhalt unser lebhaftes Interesse erregte. Dank der Vermittelung von Herrn Prof. Dr. WINTZ in Erlangen und der Güte von Herrn P. KNAPPE in Madrid erhielten wir aus dem Escorial eine weiss-schwarze Photographie unseres Textes, der von fol. 51 r bis 54 r reicht; an ihm schliesst sich bis 54 v eine kurze mathematische Abhandlung. Die Handschrift ist in magrebinischer (nordafrikanischer) Schrift nicht schlecht geschrieben und enthält kaum Fehler; dagegen lassen die Zeichnungen zu wünschen übrig; sie waren auch als räumliche Darstellungen schwierig herzustellen. Indessen zeigt sich, sei es, dass die Figuren von TĀBIT selbst, sei es, dass sie von einem Abschreiber herrühren, ein lebhaftes Bestreben, sie perspektivisch zu zeichnen. So werden die Kreise als Ellipsen, die allerdings aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt sind, wiedergegeben. Wir teilen die zu der

Proposition B 2 gehörende Figur mit. Siehe weiter unten und Figur 1.

Statt im folgenden etwa die arabischen Figuren in entsprechende moderne umzuzeichnen und an ihnen die Gedankengänge zu verfolgen, ist nur ihr Schnitt mit der Meridianebene gezeichnet. Ihr Schnitt mit der Ebene des Horizonts ist der Übersichtlichkeit wegen unverhältnismässig weit entfernt von der Gnomonspitze gezeichnet. Die

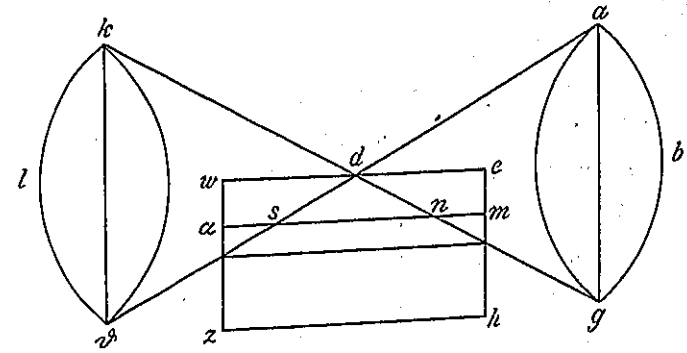


Fig. 1.

vorkommenden kleinen Buchstaben sind dem arabischen Text entnommen, die grossen sind von uns hinzugefügt.

TĀBIT stellt sich in seiner Schrift die Aufgabe, die Kurven zu ermitteln, die der Schatten des Endes eines Gnomons auf einer horizontalen Fläche beschreibt und zwar für alle Orte der Erde und für alle möglichen Stellungen der Sonne im Tierkreis. Er behandelt daher folgende Fälle:¹

- Welchen Schatten beschreibt die Gnomonspitze,
- A. wenn die Sonne in einem der beiden Äquinoktialpunkte steht, an allen Orten,
 - B. wenn die Sonne sich in irgend einem anderen Punkte des Tierkreises befindet,

¹ Die Nummerierung der einzelnen Abschnitte ist der grösseren Übersichtlichkeit wegen von uns eingeführt.

- 1) am Nord- bzw. Südpol,
- 2) an einem Ort, für den das Komplement der Polhöhe ($90-\varphi$) grösser als die Ekliptikschiefe (ε) ist,
- 3) an einem Ort, für den $90-\varphi$ gleich ε ist,
- 4) an einem Ort, für den $90-\varphi$ kleiner als ε ist.

Die Ergebnisse werden von Tābit nicht auf rechnerischem Wege, sondern aus der Anschauung gefunden. Die Betrachtungen geben erneut einen Beweis für die grosse Fähigkeit der damaligen Mathematiker, sich räumliche Gebilde vorzustellen.

Zur Erleichterung für den Leser sei der Gedankengang Tābits kurz wiedergegeben. Er greift einen der Sonnenstrahlen heraus, der die Gnomonspitze trifft. Bewegt sich die Sonne im Laufe eines Tages auf ihrem zum Äquator parallelen Umlaufskreis, so beschreibt dieser Sonnenstrahl einen geraden Kreiskegel, dessen Spitze in der Gnomonspitze liegt, dessen Basis der Umlaufskreis ist und dessen Achse mit der Weltachse zusammenfällt und deshalb senkrecht zur Basis steht. Diesen Kegel nennt Tābit »Strahlenkegel«. Die einzelnen Mantellinien dieses Kegels denkt er sich über die Spitze hinaus verlängert. Die Verlängerungen treffen auf einen Kreis der Himmelskugel, der so gross wie der Umlaufskreis ist und darum vom Äquator um den gleichen Betrag absteht, wie dieser. Dieser Kreis ist der Umlaufskreis der Sonne, wenn sie die gleich grosse Deklination hat, wie im ersten Fall, die jedoch entgegengesetzt gerichtet ist. Tābit erhält somit einen 2. Kegel, der die gleiche Spitze, die gleiche Achse und eine gleich grosse Basis, wie der erste hat. Da die Mantellinien des zweiten Kegels die Projektionsstrahlen der Gnomonspitze sind, liefern sie beim Auftreffen auf eine Fläche den Schatten der Spitze. Tābit nennt den zweiten Kegel den »Schattenkegel«.

Strahlenkegel und Schattenkegel können vertauscht werden, wenn die Sonne sich auf der Basis des vorgenannten zweiten Kegels bewegt. In diesem Fall ist der zweite Kegel der Strahlenkegel und der erste der Schattenkegel. Der Schnitt der Horizontebene mit dem Schattenkegel liefert die Schattenkurve für die Spitze während eines Tages. Tābit verlegt die Ebene des Himmelsäquators in die Spitze des Gnomons, die damit zum Mittelpunkt des Äquatorkreises wird, mit demselben Recht, mit dem man z. B. die Ebene des Horizonts bei astronomischen Berechnungen in den Mittelpunkt der Himmelskugel verlegt, ohne zu grosse Fehler dabei zu begehen.

In den schematischen Zeichnungen bedeutet $agdk\vartheta$ den Schnitt des Doppelkegels mit der Meridianebene, d die Kegelspitze und zugleich die Gnomonspitze, AA' den Schnitt des Äquatorkreises, ew den des Horizonts. Den Kegeln agd und $k\vartheta d$ in Fig. 1 entsprechen also die Achsendreiecke agd und $k\vartheta d$ in den anderen Figuren und der schneidenden Horizontebene $ewzh$ in der 1. Fig. die gerade Linie ew in den anderen. Die Strecken ag und $k\vartheta$ sind die Durchmesser der Grundflächen der Kegeln. Die Lage des Gnomons ist der Übersichtlichkeit wegen nur in Fig. 3 angegeben.

Die im folgenden mitgeteilte Übersetzung schliesst sich eng an den Text an; nur an wenigen Stellen ist sie, um das Verständnis zu erleichtern, etwas freier gehalten. Am Schluss sind Erläuterungen für die Stellen, für die uns dies erforderlich schien, beigelegt.

Übersetzung.

Abhandlung (maqāla) von Tābit b. Qurra al Ḥarrānī über die Eigenschaft der Figuren (Kurven), die an jedem Tag und an jedem Ort dadurch entstehen, dass sich das

Ende des Schattens eines Gnomons über die Ebene des Horizontes^{a)} bewegt, es können dies eine Hyperbel, eine Ellipse, eine Parabel, ein Kreis und eine gerade Linie sein; weiter wird behandelt die Grösse der Durchmesser der erwähnten Kurven, die Lagen ihrer Mittelpunkte und, welche der erwähnten Hyperbeln einander gegenüberliegen.

A. Befindet sich die Sonne in einem der beiden Äquinoxialpunkte, so beschreibt an diesem Tage der Schatten der Gnomonspitze auf jedem Horizont, über den er hin- geht, [wenigstens] soweit es die Sinne wahrnehmen können¹⁾, eine gerade Linie, ausser auf dem Horizont des Ortes, der senkrecht unter dem [Welt-]Pol liegt; denn an diesem Ort treffen die Sonnenstrahlen überhaupt nicht auf die Erde (s. Nr. B₁).

Hier, wie bei den späteren Propositionen beruhen die Betrachtungen darauf, dass die Bewegung der Sonne während eines Tages nicht eine derartige ist, dass sie [merklich] von einem Kreis abweicht, der parallel zum Äquator liegt^{b)}.

Es sei abg der Kreis des Äquators, auf dem die Sonne sich [gerade] bewegt, wenn sie sich in einem der beiden Äquinoxialpunkte befindet; sein Mittelpunkt sei d . Zwischen dem Punkt d und dem Ende des Gnomons besteht kein Unterschied [s. o.]. Der Horizont sei $ewzh$. Ich behaupte, dass der Schatten von d zu allen Zeiten des Tages auf der Ebene $ewzh$ eine gerade Linie beschreibt.

Beweis. Die Sonne bleibt bei ihrem Umlauf an diesen beiden Tagen stets in der Ebene des Kreises abg und das Gnomonende, nämlich d , liegt [ebenfalls] in dieser Ebene.

^{a)} Wir werden in Zukunft statt »Ebene des Horizontes« stets »Horizont« übersetzen; gemeint ist immer derjenige des betreffenden Ortes.

^{b)} Die Sonne beschreibt in Wirklichkeit bei ihrem täglichen Lauf keinen Parallellkreis zum Äquator.

Daher bilden die Strahlenlinien, die an diesen beiden Tagen von der Sonne nach d gehen, die Ebene abg ; ferner liegt der Schatten, der von d ausgeht, in dieser Ebene; denn der Schatten liegt stets mit dem leuchtenden Gegenstand und dem diesen verdeckenden [d. h. dem Schatten werfenden] Gegenstand in einer Ebene²⁾ mag dieser Gegenstand ein Punkt oder eine Linie sein. Jede beliebige [Horizont-]Ebene, auf der der Schatten von d an diesen beiden Tagen liegt, schneidet die Fläche des Kreises abg und der durch sie erzeugte Schatten fällt auf die Schnittlinie [der Fläche] des Horizonts und der Ebene des Kreises abg . Die Schnittlinie der beiden Ebenen ist aber eine gerade Linie. Der Schatten von d bewegt sich also auf der Ebene $ewzh$ auf einer geraden Linie, und das wollten wir beweisen.

B₁). Steht die Sonne nördlich vom Äquator, so beschreibt an jedem Tage der Schatten eines Gnomons auf dem Horizont dessen, der [gerade] unterhalb des Nordpoles des Äquators sich befindet, einen Kreis. Der Mittelpunkt des letzteren ist der Fusspunkt des Lotes von dem Gnomonende auf diesen Horizont. Steht die Sonne südlich vom Äquator, so tritt das Gleiche für den Horizont dessen ein, der sich unter dem Südpol des Äquators befindet.

Die Sonne stehe an irgend einem Tage nördlich vom Äquator. Der zum Äquator parallele Kreis, auf dem sich die Sonne an diesem Tage bewegt, sei abg und das Gnomonende d . Dann liegt offenbar d nicht in der Ebene von abg , da es in der Äquatorebene liegt. Der Horizont sei für den, der sich unter dem nördlichen Äquatorpol befindet, für den also dieser Nordpol im Zenit liegt, die Ebene $ewzh$.

Beweis. Wir legen die Sonne zu irgend einer Zeit des erwähnten Tages in den Punkt a und ziehen von ihm aus den Strahl nach d , nämlich ad und verlängern ad auf der

anderen Seite bis ϑ . Offenbar gelangt dieser Strahl zu einem Punkt, der auf einem Kreis liegt, der parallel zum Äquator ist und [auf der südlichen Seite des Äquators] dem Kreis abg gegenüber liegt und dessen Abstand vom Äquator gleich demjenigen von abg von diesem ist. Es ist der Kreis ϑkl .

Bewegt sich die Sonne auf dem Kreis abg , so dreht sich durch ihre Bewegung die Linie $ad\vartheta$; dabei sind der Punkt d und der Kreis abg beide fest; der Punkt ϑ bewegt sich dagegen auf der Linie, die den Kreis ϑkl umgibt. Die Linie

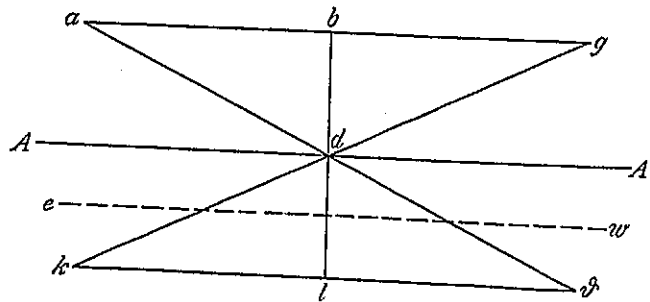


Fig. 2.

$ad\vartheta$ erzeugt durch ihre Umdrehung zwei Kegelflächen, deren Spitze der Punkt d ist¹⁾. Die Basis des einen Kegels ist der Kreis abg , und die Basis des anderen der Kreis ϑkl ; er liegt ihnen [in der eben angegebenen Weise in bezug auf die Äquatorebene] gegenüber und ist parallel zum Äquator. Sein Abstand von diesem ist gerade so gross, wie der Abstand des Kreises abg [vom Äquator]. Über die Fläche des einen von diesen beiden Kegeln, nämlich desjenigen mit dem Kreis abg als Basis, bewegt sich der Sonnenstrahl, über die Fläche des anderen Kegels, nämlich desjenigen mit dem Kreis ϑkl als Basis, der Schatten des Punktes d . Jede Ebene, die einen Kegel schneidet und parallel zu seiner Basis liegt, liefert als Schnitt einen Kreis, wie dies

APOLLONIUS in der ersten Proposition des ersten Buches (*maqâla*) über den Kegel bewiesen hat. Die Ebene des Horizontes, auf der sich $ewzh$ befindet, ist aber parallel zu den erwähnten Grundflächen der beiden Kegel; denn sie liegt auf dem Äquator. Durch den Schnitt des Kegels, dessen Basis der Kreis ϑkl und dessen Spitze der Punkt d ist, [mit der Ebene des Horizontes] wird ein Kreis erzeugt. Auf der Fläche dieses Kegels bewegt sich während dieses Tages der Schatten, ohne sich von ihr zu trennen. Es ist nämlich ad die Erzeugende des Schattens von d , d. h. der Spitze des Gnomon, und zwar bewegt er sich auf der Linie, die den Kreis begrenzt, der die gemeinsame Schnittlinie der erwähnten Kegelfläche und der Fläche $ewzh$ ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Ort des Lotes, das wir von dem Punkt d auf die Fläche $ewzh$ fällen; das ist was wir beweisen wollten.

Das folgende soll hier als Erläuterung dienen:

Durch den Umlauf der Sonne entstehen an jedem Tage zwei Kegel, wie wir das beschrieben haben. Der eine befindet sich auf der Fläche des Strahles und der andere auf der Fläche des von der Gnomonspitze entworfenen Schattens. Den Kegel, auf dem die Strahlen liegen, d. h. den Kegel mit dem Kreis abg als Basis, nennen wir den Strahlenkegel und den anderen ihm gegenüberliegenden, nämlich denjenigen mit dem Kreis ϑkl als Basis, den Schattenkegel.

B₂) Steht die Sonne nicht in einem der Äquinoktialpunkte, so liefert der Schnitt des Schattenkegels, nämlich des Kegels mit dem Kreis ϑkl als Basis und dem Punkt d als Spitze, mit der Ebene $ewzh$ eine Hyperbel. Erfolgt der Umlauf der Sonne auf dem Kreis ϑkl , so wird zum Schattenkegel derjenige mit dem Kreis abg als Basis und

den Punkt d als Spitze. Seine Fläche schneidet die Fläche $ewzh$ in einer Hyperbel, die der ersten Hyperbel gegenüberliegt. Auf dieser Kurve wandert der Schatten. [Es sei der Punkt s (Fig. 3) der Schatten des Punktes d] zu Mittag, wenn die Sonne sich auf dem Kreis abg befindet, und n der Schatten des Punktes d zu Mittag, wenn die Sonne sich auf dem Kreis kl befindet. Der Mittelpunkt der beiden Hyperbeln ist der Mittelpunkt der Linie sn und das wollten wir beweisen.

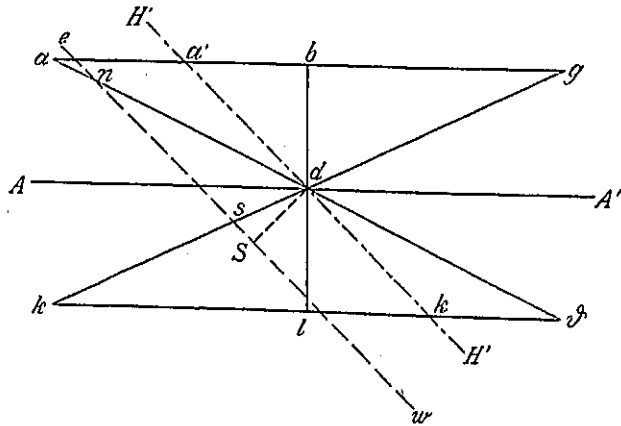


Fig. 3.

B₃). Die Sonne stehe nicht in einem der Äquinoktialpunkte, dann beschreibt [der Schatten] der Gnomonspitze auf dem Horizont an allen Orten, für die die Polhöhe gleich ist der Differenz zwischen der Neigung eines der Wendepunkte [= ϵ] und 90° (d. h. = $90 - \epsilon$) an diesem Tag ein Stück einer Hyperbel, ausser an zwei Tagen des Jahres; nämlich an den zwei Tagen des Jahres, an denen die Neigung [Deklination] der Sonne gleich derjenigen der beiden Wendepunkte ist. An dem einen von diesen Tagen gelangen die Strahlen an diesem Ort gar nicht auf die Erdoberfläche und nicht auf den Schatten irgend eines Gegenstandes (d. h. es entsteht überhaupt kein Schatten). An den an-

deren beschreibt das Ende des [Schattens vom] Gnomon auf dem Horizont dadurch, dass er (der Schatten) sich über ihn hinbewegt, ein Stück einer Parabel. Mit den gegenüberliegenden Hyperbeln verhält sich die Sache so, wie in der vorhergehenden Proposition (Nr. B₂).

Die Sonne möge sich an irgend einem Tage ausser demjenigen des Äquinoktiums auf einem Kreis, der parallel zum Äquatorkreis liegt, befinden, nämlich auf abg (Fig. 4). Die Gno-

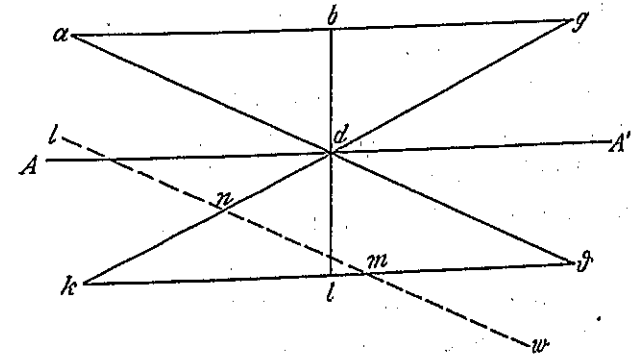


Fig. 4.

mons Spitze ist d , der erwähnte Horizont $ewzh$. Dann behaupte ich, dass an diesem Tage der Schatten von d sich über ein Stück einer Hyperbel auf der Fläche $ewzh$ bewegt, es sei denn, dass dieser Tag einer der beiden Tage ist, an denen sich die Sonne in [einem der] beiden Wendepunkte [n] sich befindet. An dem einen von den beiden Tagen fallen die Strahlen gar nicht auf die Erde, und an dem anderen beschreibt der Schatten des Punktes d dadurch, dass er sich über die Ebene $ewzh$ bewegt, ein Stück einer Parabel. Mit den beiden gegenüberliegenden Hyperbeln verhält sich die wie in der vorhergehenden Proposition (Nr. B₂)¹).

Beweis: Wir verfahren mit den beiden Kegeln, dem Strahlenkegel und dem Schattenkegel in derselben Weise wie in der vorhergehenden Proposition. Bei dem einen ist

die Basis der Kreis abg , bei dem anderen aber der Kreis $\mathcal{D}kl$. Ebenso zeigen wir, dass, wenn die Sonne sich nicht in einem der beiden Äquinoktial- oder Wendepunkte befindet, der Schatten des Punktes d sich über eine Hyperbel bewegt; denn in diesem Fall schneidet der Horizont jeden der beiden Kreise abg und $\mathcal{D}kl$.²⁾ Mit den beiden gegenüberliegenden Hyperbeln verhält sich die Sache wie in der vorhergehenden Proposition (Nr. B₂).

Befindet sich die Sonne in einem der beiden Wendepunkte, so ist es klar, dass, wenn sie sich in dem einen von ihnen befindet, die Strahlen nicht auf den erwähnten Ort fallen und dass, wenn sie sich in dem anderen befindet, sie nicht untergeht.

Wir verlegen für diesen Fall ihren Verlauf in den Kreis abg . Der Meridian schneidet die beiden erwähnten Kegel und geht durch ihre Spitze³⁾; dabei erzeugt er in ihnen zwei Dreiecke, diese beiden Dreiecke seien agd und $\mathcal{D}kl$. Sie gehen durch die Achse der beiden Kegel. Der Horizont schneidet die Ebene des Meridians unter einem rechten Winkel; ferner berührt ein Punkt des Kreises abg den Horizont; denn die Sonne geht an diesem Tag nicht unter.

Es ist klar, dass der Punkt, in dem der Kreis abg dem Horizont berührt, einer der beiden Punkte a und g ist; denn die beiden Punkte liegen auf dem Meridian; es sei der Punkt g ; dann wird die Linie gd parallel zu der Fläche $ewzh$, die die Stelle des Horizonts vertritt. Dann schneidet die Fläche $ewzh$ den Kegel mit dem Kreis $\mathcal{D}kl$ als Basis und erzeugt auf ihr (dem Horizont) eine Parabel; denn der Schnitt zwischen ihm (dem Horizont) und dem Dreieck $d\mathcal{D}k$, d. h. die Linie mn wird parallel zu $ad\mathcal{D}$, die Bahn [des Schattens] von d liegt an diesem Tage auf der Linie dieser Schnitt[-kurve], und das wollen wir beweisen.

B₄) Befindet sich die Sonne nicht in einem der Äquinoktialpunkte, so beschreibt das Ende des Schattens eines Gnomons an jedem Tage auf dem Horizont an allen Orten, bei denen die Polhöhe φ grösser ist als der Unterschied zwischen einem Viertelkreis und der Neigung eines der Wendepunkte ($90-\varepsilon$) und kleiner als ein Viertelkreis ist, bei seinem Wandern über die Ebene eine Hyperbel und zwar an allen Tagen, an denen die Neigung $[\delta]$ der Sonne gegen den Äquator kleiner ist als die Differenz zwischen einem Viertelkreis und der Polhöhe $[\delta < 90-\varphi]$. Mit diesem Schnitt verhält es sich so, wie bei der 3. Proposition (Nr. B₂).

An den beiden Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach jener Seite gerichtet ist, nach der sich der Horizont neigt und zwar um den Betrag der Vollendung der Polhöhe zu einem Viertelkreis ($90-\varphi$), so beschreibt er (das Ende des Schattens) bei seiner Wanderung eine Parabel. An den zwei Tagen ferner, an denen die Neigung der Sonne gleich der erwähnten ist, aber nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist, als derjenigen, nach der sich der Horizont neigt, und zwar um mehr als der Unterschied der Polhöhe von einem Viertelkreis ($90-\varphi$) beträgt, geht die Sonne dort nicht auf. An den anderen Tagen wandert er [das Ende des Schattens] auf dem Umfang einer Ellipse. Ihre längste Achse ist die Linie, die die beiden Stellen, auf dem das Ende des Schattens liegt, verbindet und zwar, wenn sich die Sonne an diesem Tage auf dem Meridian befindet. Ihr Mittelpunkt ist die Mitte dieser Linie.

Es sei die Bahn der Sonne an irgend einem Tage ausser dem der Äquinoktien der Kreis abg , parallel zum Äquator; das Ende des Gnomon sei d und der Horizont $ewzh$. Ich behaupte: Der Schatten des Punktes d verhält sich so, wie wir in der Proposition oben ausgeführt haben.

Beweis. Wir zeichnen die beiden Kegel, von denen der eine der Strahlen- der andere der Schattenkegel ist; es sind Kegel, von denen der eine den Kreis abg , der andere den Kreis $\mathcal{J}kl$ zur Basis hat, ihre Spitzen sind der Punkt d .

Falls die Neigung der Sonne gegen den Äquator kleiner ist, als der Unterschied zwischen einem Viertelkreis und der Polhöhe ($90-\varphi$), so geht die Sonne auf und unter und der Horizont, nämlich $ewzh$, schneidet die beiden Kreise abg

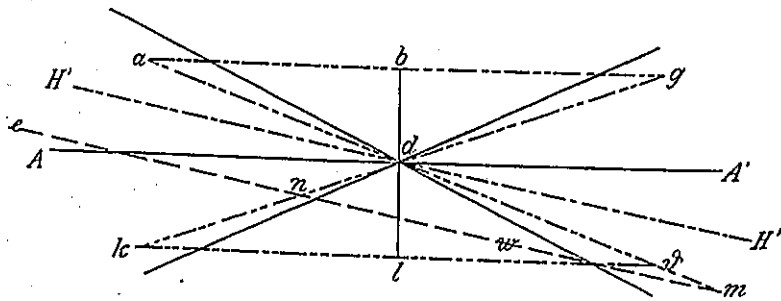


Fig. 5.

und $\mathcal{J}kl$. Nach dem, was wir in der früheren Proposition (Nr. B₂) auseinandergesetzt haben, ist klar, dass der Punkt für die beiden Flächen der beiden Kegel, deren Spitze der Punkt d ist, zwei gegenüberliegende Hyperbeln auf dem Horizont erzeugt; über sie geht das Ende des Schattens hin. Sie entstehen entsprechend dem früheren.

An den beiden Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach derselben Seite hin liegt, nach der sich der Horizont neigt, und gleich ist der Differenz der Polhöhe von einem Viertelkreis ($90-\varphi$), geht die Sonne nicht unter. Lassen wir sie sich auf dem Kreis abg bewegen, so berührt abg den Horizont $ewzh$ in einem Punkt. Hieraus ergibt sich klar, wie aus der vorhergehenden Proposition (Nr. B₃), dass der Schatten des Punktes auf der Ebene $ewzh$ auf einer Parabel sich bewegt.

An den beiden Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach der entgegengesetzten Seite, wie der Horizont liegt, und zwar um ebensoviel, als die Differenz der Polhöhe von einem Viertelkreis [$90-\varphi$] beträgt, fallen offenbar keine Strahlen auf die Erde und kein Gegenstand entwirft einen Schatten.

An den Tagen, an denen die Neigung der Sonne nach der Seite liegt, die derjenigen entgegengesetzt ist, nach der der Horizont sich neigt und zwar um einen die Differenz der Polhöhe von einem Viertelkreis ($90-\varphi$) übersteigenden Betrag, verhält sich die Sache so, dass die Sonne dort nicht aufgeht.

An den anderen Tagen, nämlich denjenigen, an denen die Neigung der Sonne nach der Seite zu liegt, nach der der Horizont sich neigt, und grösser ist als der Unterschied zwischen einem Viertelkreis und der Polhöhe [$90-\varphi$], beschreibt der Schatten des Punktes d , dadurch, dass er über die Ebene $ewzh$ gleitet, eine Ellipse. Dies rührt daher, dass die Sonne an diesen Tagen nicht untergeht und der Horizont den Kreis abg weder schneidet noch berührt; daher fällt der Schatten des Punktes d zu allen Zeiten des Tages auf die Ebene $ewzh$. Alle Seiten des Schattenkegels mit der Basis $\mathcal{J}kl$ werden geschnitten; seine Spitze ist der Punkt d . Dann entsteht aber auf ihr [der Ebene $ewzh$] eine Ellipse.

Zeichnen wir das Dreieck, das von diesem Kegel auf dem Meridiankreis entsteht, nämlich das Dreieck $\mathcal{J}dk$, es ist das Dreieck, das durch die Achse des Kegels geht, [so ist sein Schnittpunkt mit der Ebene $ewzh$] der längste Pfeil (die grosse Achse) jener Ellipse; denn es [das Dreieck] steht senkrecht auf der Ebene $ewzh$. Ist die Schnittlinie des Dreiecks mit der Ellipse die Linie mn , so ist mn die grosse Achse; ihre beiden [End-]Punkte liegen an diesem Tage auf dem Meridiankreis. Der Halbierungspunkt dieser Linie ist der Mittelpunkt der Ellipse; das wollten wir beweisen.

Bemerkungen.

ad A) Wenn die Sonne in den Äquinoktialpunkten steht, sich an diesem Tage also auf dem Himmelsäquator bewegt, degeneriert der Doppelkegel zu einer Ebene, die diejenige des Horizonts in einer Geraden schneidet.

1) TĀBIT denkt wohl vor allem an die nicht genau in der Äquatorebene sich vollziehende Bewegung, dann aber vielleicht an die Abweichungen, die sich ergeben, da die Äquatorebene durch die Gnomonspitze, die Horizontebene durch den Mittelpunkt gelegt gedacht ist usw.

2) TĀBIT würde sich genauer ausdrücken, wenn er sagte, leuchtender Punkt, beleuchteter Punkt und Schatten dieses Punktes liegen in einer geraden Linie.

ad B₁) Für den Nord- und Südpol der Erdkugel fallen die Ebenen des Himmelsäquators und des Horizonts zusammen, bzw. sind sie zueinander parallel. Steht die Sonne in den Äquinoktialpunkten, so verweilt sie während ihres Umlaufs an diesen beiden Tagen im Horizont. Die Schatten eines Gegenstandes sind unendlich lang, da die Strahlen parallel zum Horizont verlaufen. Am Nordpol erhebt sich die Sonne über den Horizont, wenn sie in den nördlichen Tierkreiszeichen steht, am Südpol, wenn sie in den südlichen Zeichen sich befindet. In diesen Fällen fällt der Schatten eines Gegenstandes auf den Horizont. Da an den beiden Erdpolen die Horizontebene parallel zu der Ebene des Äquators und zu der Basis des zum Äquator senkrechten Schattenkegels ist, ist der Schnitt der ersten Ebene mit ihm ein Kreis, dessen Mittelpunkt in die Kegellachse, die Weltachse, fällt. Da sie hier mit dem Lot zusammenfällt, liegt der Mittelpunkt des Schattenkreises im Fusspunkt des Lotes von der Gnomonspitze auf den Horizont (Fig. 2).

1) Auf die klare Schilderung der kinetischen Erzeugung des Kegels sei besonders hingewiesen.

ad B₂) Dieser Abschnitt ist auffallend kurz. TĀBIT erwähnt nicht, dass es sich hier eigentlich um den Fall handelt, bei dem das Komplement der Polhöhe ($90-\varphi$) grösser als die Ekliptischiefe (ε) ist. Er gibt auch keinen eigentlichen Beweis. Da $\sphericalangle de'w = 90-\varphi > \sphericalangle A'd\vartheta$ und $< \sphericalangle A'dk$ (Fig. 3), kann man durch d zu ew eine Parallele legen, die innerhalb des Achsendreiecks verläuft. Die durch diese senkrecht zur Meridianebene gelegte Ebene schneidet den Doppelkegel in zwei Erzeugenden. Die Horizontebene ist also zu zwei Erzeugenden parallel und schneidet demnach den Schattenkegel $dk\vartheta$ in einer Hyperbel (Hyperbelast). Ist die Deklination der Sonne kleiner als ε , so bleibt erst recht die obige Beziehung gelten. In der Fig. ist $a'g$ die zur Meridianebene senkrechte Projektion des Tagbogens, wenn die Sonne im Aufgang des Krebses steht, also für ihre grösste nördliche Deklination, und $k'\vartheta$ die des Tagbogens, wenn die Sonne im Anfang des Steinbocks steht, wenn sie also ihre grösste südliche Deklination hat. In g befindet sich die Sonne bei der Kulmination, wenn sie im Anfang des Krebses steht. Der Schatten von d fällt auf den Punkt s im Horizont. Da die Sonne auf ihrem Tagbogen zu g symmetrische Stellungen einnimmt, muss der Schatten von d auf der zum Achsenschnitt senkrechten Horizontalebene symmetrische Lagen zu s zeigen, d. h. s ist der Scheitelpunkt der Hyperbel. Steht die Sonne im Anfang des Steinbocks, so ist agd der Schattenkegel, der nach obigen von der Horizontalebene in dem zweiten Ast der oben erwähnten Hyperbel geschnitten wird; n ist der Scheitel dieses Astes, Der Halbierungspunkt der Strecke ns ist der Mittelpunkt der Hyperbel. Die beiden Äste nennt TĀBIT einander gegenüberliegend. Bezüglich der Lage der beiden Hyperbeläste ist zu vergleichen, das Bild einer horizontalen

Sonnenuhr in C. A. NALLINO, AL BATTÂNĪ, opus astronomicum, I, 137, Mailand 1903 und insbesondere die Abbildungen in der ausführlichen Behandlung der verschiedenen Sonnenuhren von F. COMMANDINUS, die er der lateinisch übersetzten Schrift von PTOLEMAEUS »de Analemmate« anfügt, in der PTOLEMAEUS die auf Orthogonalprojektion beruhende graphische Konstruktion der für die Verfertigung einer Sonnenuhr nötigen Grössen behandelt, (CL. PTOLEMAEI, liber de analemmate etc, Rom 1562.).

ad B₃) Wenn das Komplement der Polhöhe gleich der Ekliptikschiefe ist, so berührt der Horizont wie die Ekliptik den Wendekreis des Krebses und den des Steinbocks und der eine von ihnen verläuft ganz unterhalb des Horizonts d. h. die Sonne geht, wenn sie in diesem Zeichen steht, garnicht auf. An diesem Ort ist die Horizontebene parallel einer Erzeugenden des Kegels $dk\delta$ (Fig. 4). Ihr Schnitt mit ihm ist daher eine Parabel. n ist der Schatten von d , wenn die Sonne, wie in der Fig. 4, im Anfang des Krebses stehend kulminiert, (s. Anm. B₂) und der Scheitel der Parabel. Ist die Deklination δ der Sonne kleiner als ε , so ist $90-\varphi > \delta$; es liegt dann der Fall B₂ vor, wo $\delta = \varepsilon$ ist. Es entstehen dann als Schattenfiguren immer Hyperbeln, ausgenommen natürlich den Fall $\delta = 0$, wo der Schatten eine gerade Linie durchläuft. Der Schatten beschreibt also an diesem Ort im Laufe des Jahres, angefangen vom Steinbock (seinen Anfang ausgeschlossen) bis zum Anfang des Krebses Hyperbeln, eine gerade Linie, Hyperbeln, die ersteren Hyperbeln gegenüberliegen, eine Parabel.

1) Wie in vielen anderen Fällen der arabischen mathematischen Literatur wird auch hier das, was vorher unabhängig von der Fig. dargelegt wird, noch einmal unter deren Zugrundlegung behandelt, Es hängt dies wohl damit

zusammen, dass den damaligen Gelehrten das Verständnis mancher Probleme noch grosse Schwierigkeiten machte und ihre zeichnerischen Darstellungen unübersichtlich waren.

2) TÂBIT drückt sich hier etwas ungenau aus; er müsste sagen, wenn die zum Horizont parallele Ebene durch d die beiden Grundflächen schneidet; denn es ist kaum anzunehmen, dass er unter Kreis abg bzw. δkl die durch sie gelegte Ebene versteht. Und wenn dem so wäre, so müsste er doch nochmals betonen, dass d nicht in der Horizontebene liegt.

3) Hier führt TÂBIT auch den Meridianschnitt ein. In der Handschrift sind die Buchstaben b und g mit einander vertauscht; in der Übersetzung ist der Gleichmässigkeit wegen ein für allemal die gleiche Reihenfolge beibehalten.

ad B₁) Hier wird der Fall betrachtet; dass das Komplement der Polhöhe kleiner als die Ekliptikschiefe ist also $90-\varphi < \varepsilon$, φ muss kleiner wie 90° sein; denn wenn $\varphi = 90^\circ$ wird, liegt der Fall B₁ vor. Im Laufe des Jahres wird die Deklination δ der Sonne gleich $90-\varphi$ werden. Wir haben den gleichen Fall, wie in B₃, wo δ den speziellen Wert ε hat. Da die Sonne diesen Wert δ zweimal im Jahre erreicht, so wird die Schattenkurve an diesen beiden Tagen eine Parabel beschreiben. In B₁ sahen wir auch, dass die Sonne mit einem südlichen Äquatorabstand $= \varepsilon$ für nördliche Orte garnicht aufgeht. So wird auch in diesem Fall die Sonne mit dem südlichen Äquatorabstand von dem Betrag $= \delta$ an diesen speziellen Orten nicht mehr aufgehen, natürlich auch nicht, wenn sie einen noch grösseren südlichen Abstand hat. An Orten mit südlicher Breite liegen die Verhältnisse umgekehrt. Ist für Orte mit nördlicher Breite die nördliche Deklination δ kleiner als $90-\varphi$, so

liegt der Fall B_2 vor, wo δ den speziellen Wert ϵ hat. Die Schattenkurven werden also Hyperbeln; ist aber δ grösser als $90-\varphi$, so wird die Sonne an Orten mit nördlicher Breite zirkumpolar. a und g (Fig. 5) seien die Orte der unteren und oberen Kulmination, m und n der Schatten von d für diese Lage der Sonne. Da die Neigung des Horizonts gegen die Basis des Schattenkegels $\mathcal{J}dk$ kleiner ist als der Basiswinkel der einzelnen Mantellinien, so schneidet der Horizont sie alle. Sein Schnitt mit dem Schattenkegel ist daher eine Ellipse. Der Schatten beschreibt also in diesen Fällen eine Ellipse. Ähnlich wie in B_2 lässt sich ohne mathematische Betrachtungen wie z. B. in der darstellenden Geometrie zeigen, dass nm eine Achse der Ellipse ist. Da die schneidende Horizontebene senkrecht zum Achsendreieck $dk\mathcal{J}$ des Schattenkegels ist, steht die andere Achse senkrecht zur Ebene des Dreiecks $dk\mathcal{J}$. Wie sich aus der bekannten zeichnerischen Konstruktion der Schnittellipse ergibt, ist diese Achse kleiner als der Durchmesser des Schnittkreises, in dem die Ebene, die durch den Halbpunkt von nm senkrecht zum Achsendreieck gelegt wird, den Kegel schneidet; dieser Durchmesser ist aber die senkrechte Projektion der im Achsenschnitt gelegenen Achse nm . Also ist diese grösser als die andere Achse. Dass der Schatten eine geschlossene, im Endlichen liegende, Kurve sein muss, ergibt sich schon daraus, dass die Sonne in diesen Stellungen des Tierkreises den Horizont garnicht erreicht; daher entwirft der Gnomon keinen unendlich langen Schatten.

Betrachten wir die verschiedenen Schattenkurven im Laufe des Jahres, beginnend mit der Stellung der Sonne in dem südlichen Tierkreiszeichen, das sich gerade über den Horizont erheben kann, so erhalten wir zuerst Hyperbeln,

dann eine Gerade, wieder Hyperbeln (zu den eben genannten gegenüberliegende), dann eine Parabel und schliesslich Ellipsen und dann bei Abnahme der Deklination diese Schattenkurven in umgekehrter Reihenfolge.

Aus dem vorhergehenden ist ersichtlich, dass Fall B_4 der allgemeine Fall ist, während B_2 und B_3 nur Spezialfälle sind, wenn die Deklination δ der Sonne gleich ϵ ist.

Die Schattenkurven für die Orte am Erdäquator betrachtet TÂBIT nicht. Es ist dies auch garnicht nötig, da dieser Fall unter B_2 fällt. Denn die Polhöhe ist $=0^\circ$, also $90-\varphi > \epsilon$. Wir erhalten als Schattenkurven gegeneinander liegende Hyperbeln. Die geradlinige Schattenkurve geht an diesen Orten durch den Fusspunkt des Gnomons.

Schluss.

Aus der Zusammenfassung des Vorstehenden ergibt sich, dass TÂBIT in ausserordentlich gründlicher und, soweit es ohne besondere mathematischen Hilfsmittel¹ möglich war, auch in erschöpfender Weise, die sich gestellte Aufgabe gelöst hat. Er hat die manigfaltigen Kurven, die sich der Beobachtung des Schattenverlaufs ergeben und die bei den Sonnenuhren eine grosse Rolle spielen, in vollkommener Weise gedeutet. Dabei war es nicht seine Absicht, für jeden einzelnen Ort der Erdoberfläche die Gestalt der einzelnen auftretenden Kegelschnitte zu untersuchen. Es genügte ihm zu bestimmen, wie die Natur dieser Kurven durch die Polhöhe des Beobachtungsortes und die Deklination der Sonne

¹ Die mathematische Behandlung der verschiedenen Sonnenuhren seitens der Araber gibt C. SCHÖY besonders im Anschluss an die händlichen Tafeln des JUN JÛNUS und AL MARRÂKUSCHI in einem Band der »Geschichte der Zeitmessung und der Uhren« von E. VON BASSERMANN-JORDAN. Dort findet sich auch eine moderne Bearbeitung der ganzen Theorie der Sonnenuhren.

gegeben ist. Dem Stand der damaligen Wissenschaft entsprechend wird aber nicht der bei uns allgemein übliche Weg eingeschlagen, formal den allgemeinsten Fall zunächst zu behandeln, das Ergebnis in eine mathematische Formel zu fassen und daraus deduktiv die einzelnen Fälle abzuleiten, sondern es werden zunächst die typischen Einzelfälle untersucht und dann wird zum Schluss, sei es bewusst oder unbewusst, der allgemeinste Fall behandelt. Es ist dieses der Weg, der auch jetzt noch bei neu entstehenden Wissensgebieten immer und immer wieder eingehalten wird. Es sei noch erwähnt, dass TÄBIT bei seinen Betrachtungen stillschweigend die Sonne punktförmig annimmt. TÄBITs Arbeit reiht sich würdig den anderen Schriften aus der ersten Zeit muslimischer Tätigkeit auf dem Gebiete der Naturwissenschaften an.

In den obigen Ausführungen haben wir uns bemüht, einen kleinen Beitrag zu einem Wissensgebiet zu liefern, auf dem so hervorragende dänische Philologen und Mathematiker wie Professor HEIBERG und der leider verstorbene Professor ZEUTHEN unsere Kenntnisse nach den verschiedensten Richtungen hin in ungewöhnlichem Masse bereichert haben.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (Kr. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKESSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÅL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.....	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7. RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluyilsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLÉRUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkenspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometers Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse » $\text{NH}_4\text{COONH}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons (\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ « und » $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{CO}_3$ «. 1921	3.75