MEMORIE

DELL'

ISTITUTO NAZIONALE ITALIANO

CLASSE

DI FISICA E MATEMATICA

Tomo primo. Parte seconda

BOLOGNA. 1806

PRESSO I FRATELLI MASI E COMPAGNO

TIPOGRAFI DELL' ISTITUTO

DELLA DISCESA DE' GRAVI

PER LA LEMNISCATA

E della dimostrazione che questa curva è una della famiglia dell' Ellissi Cassiniane.

DEL CANONICO GIROLAMO SALADINI

Presentata ai 16 Luglio 1804.

CELEBRE tra' geometri è la curva, a cui, per cagione di sua figura che emula due lemnischi, fu dato il nome di Lemniscata. Gl' illustri fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli fecero uso degli archi di lei, per costruire le curve isocrone paracentriche, ed elastiche; ma più copiosamente di ogni altro parlò di essa l' insigne conte Giulio Carlo di Fagnano marchese de' Toschi e di S. Onofrio, padre dell' altro insigne mattematico Gio: Francesco. Tanto egli si compiacque di questa curva, che in Sinigaglia vedesi sul suo sepolcro delineata la lemniscata, come la sfera inscritta al cilindro già videsi sul sepolcro d' Archimede, e come la spirale logaritmica adorna la tomba di Jacopo Bernoulli in Basilea. Noi stessi nell' istituzioni analitiche composte insieme coll' immortale Riccati non trascurammo una curva sì rinomata. Nell' indagare le leggi della discesa de' gravi per questa linea, m' avvenni in una assai elegante, che non so se siavi stata riconosciuta da alcuno. Una tal legge fu scoperta ancora dal dottor Malfatti chiarissimo mattematico in Ferrara, nella discesa de' gravi per una dell' ellissi cassiniane, come leggesi nel trattato sintetico della curva cassiniana dedicato a monsig. Bonfioli Malvezzi. Il celebre sig. Bonati mattematico ferrarese pubblicò su ciò un opuscolo analitico molto elegante, in cui trattò il problema inverso di una tal curva, che volle chiamare isocrona. La legge esige che la discesa per l' arco si compia nel tempo stesso che la discesa per la corda a quest' arco corrispondente. Una tale somiglianza di discesa mi fece nascere il sospetto, che la lemniscata fosse una delle curve cassiniane, così dette da Domenico Cassini famoso astronomo, il quale voleva sostituirle in cielo all' ellissi Chepleriane. Noi vedremo esser vera la medesimezza delle tre curve, la cassiniana del sig. Malfatti, l' isocrona del sig. Bonati, e la lemniscata del sig. Fagnani, dopo aver dimostrato in questa verificarsi la legge dianzi detta.

Molte sono le maniere di descrivere la lemniscata per infiniti punti, come si suol dire; ne daremo ciò non ostante qui una nuova che sembraci non del tutto inelegante, che servirà per giungere più speditamente al fine propostoci. La retta AQ (fig. 1) divisa per metà in C che esprimeremo con $2a$, sia prolungata nelle due estremità A, Q in L, R, in maniera che ciascuno dei rettangoli $QL \times LA$, $AR \times RQ$ sia eguale al quadrato CA. Centro C, intervallo CA, si delinei il circolo $AMQH$. Dal punto L si tirino le seganti LSM, LSM ec. e la tangente LB che sarà eguale a CA. Centro A, intervallo SL, si descriva il circolo $PYGX$; e centro Q, intervallo LM, si descriva l' altrò circolo YVG. I punti Y, G notati dalla comune intersecazione di questi circoli, sono nel ramo $LYCGL$ della lemniscata che ha per diametro CL. Facciasi la stessa operazione per riguardo al punto R; avremo descritta l' intera lemniscata della forma $LYCTRZCGL$ consistente in due rami che s' intersecano in C, che rappresenta la figura della cifra otto. Da qualunque punto G si cali GK normale ad AQ, e si ponga $CK = z$, $GK = r$; sarà

$$GA = \sqrt{[(CA - CK)^2 + \overline{GK}^2]} = \sqrt{[(a-z)^2 + rr]}, \text{ e}$$

$$GQ = \sqrt{[(CQ + CK)^2 + \overline{GK}^2]} = \sqrt{[(a+z)^2 + rr]}$$

Essendo per costruzione $GQ = LM$; $GA = LS$; sarà $QG \times GA = ML \times LS$; e perchè il rettangolo $ML \times LS$ eguaglia il quadrato di LB, essendo ciò una notissima proprietà del circolo, sarà pertanto il rettangolo $QG \times GA = LB^2 = CA^2$; ed analiticamente $\sqrt{[(a-z)^2 + rr]} \times \sqrt{[(a+z)^2 + rr]} = aa$; dal che si ricava $(zz + rr)^2 = 2a^2(zz - rr)$, che è appunto l' equazione della lemniscata, come si può rilevare dal cap. 12; l. 3 delle nostre instituzioni analitiche, tom. 1; pag. 371.

Sia (fig. 2) $AQKPDSA$ un ramo della lemniscata, il cui asse AP formi un angolo semiretto colla verticale AH: da qualunque punto Q della curva si cali sull' asse AP la QM normale; e sia $AM = z$, $QM = r$, ed $AP = a\sqrt{2}$; avremo per le cose dette di sopra l' equazione della curva riferita all' asse AP

te, che non so se siavi stata riconosciuta da alcuno. Una tal legge fu scoperta ancora dal dottor Malfatti chiarissimo mattematico in Ferrara, nella discesa de' gravi per una dell' ellissi cassiniane, come leggesi nel trattato sintetico della curva cassiniana dedicato a monsig. Bonfioli Malvezzi. Il celebre sig. Bonati mattematico ferrarese pubblicò su ciò un opuscolo analitico molto elegante, in cui trattò il problema inverso di una tal curva, che volle chiamare isocrona. La legge esige che la discesa per l' arco si compia nel tempo stesso che la discesa per la corda a quest' arco corrispondente. Una tale somiglianza di discesa mi fece nascere il sospetto, che la lemniscata fosse una delle curve cassiniane, così dette da Domenico Cassini famoso astronomo, il quale voleva sostituirle in cielo all' ellissi Chepleriane. Noi vedremo esser vera la medesimezza delle tre curve, la cassiniana del sig. Malfatti, l' isocrona del sig. Bonati, e la lemniscata del sig. Fagnani, dopo aver dimostrato in questa verificarsi la legge dianzi detta.

Molte sono le maniere di descrivere la lemniscata per infiniti punti, come si suol dire; ne daremo ciò non ostante quì una nuova che sembraci non del tutto inelegante, che servirà per giungere più speditamente al fine propostoci. La retta AQ (fig. 1) divisa per metà in C che esprimeremo con $2a$, sia prolungata nelle due estremità A, Q in L, R, in maniera che ciascuno dei rettangoli $QL \times LA$, $AR \times RQ$ sia eguale al quadrato CA. Centro C, intervallo CA, si delinei il circolo $AMQH$. Dal punto L si tirino le seganti LSM, LSM ec. e la tangente LB che sarà eguale a CA. Centro A, intervallo SL, si descriva il circolo $PYGX$; e centro Q, intervallo LM, si descriva l' altro circolo YVG. I punti Y, G notati dalla comune intersecazione di questi circoli, sono nel ramo $LYCGL$ della lemniscata che ha per diametro CL. Facciasi la stessa operazione per riguardo al punto R; avremo descritta l' intera lemniscata della forma $LYCTRZCGL$ consistente in due rami che s' intersecano in C, che rappresenta la figura della cifra otto. Da qualunque punto G si cali GK normale ad AQ, e si ponga $CK = z$, $GK = r$; sarà

$$GA = \sqrt{[(CA - CK)^2 + \overline{GK}^2]} = \sqrt{[(a-z)^2 + rr]}, \text{ e}$$

$$GQ = \sqrt{[(CQ + CK)^2 + \overline{GK}^2]} = \sqrt{[(a+z)^2 + rr]}$$

Essendo per costruzione $GQ = LM$; $GA = LS$; sarà $QG \times GA = ML \times LS$; e perchè il rettangolo $ML \times LS$ eguaglia il quadrato di LB, essendo ciò una notissima proprietà del circolo, sarà pertanto il rettangolo $QG \times GA = LB^2 = CA^2$; ed analiticamente $\sqrt{[(a-z)^2 + rr]} \times \sqrt{[(a+z)^2 + rr]} = aa$; dal che si ricava $(zz + rr)^2 = 2a^2(zz - rr)$, che è appunto l' equazione della lemniscata, come si può rilevare dal cap. 12; l. 3 delle nostre instituzioni analitiche, tom. I; pag. 371.

Sia (fig. 2) $AQKPDSA$ un ramo della lemniscata, il cui asse AP formi un angolo semiretto colla verticale AH: da qualunque punto Q della curva si cali sull' asse AP la QM normale; e sia $AM = z$, $QM = r$, ed $AP = a\sqrt{2}$; avremo per le cose dette di sopra l' equazione della curva riferita all' asse AP

$(zz+rr)^2 = 2a^2(zz-rr)$; e chiamata la corda $AQ = \sqrt{(zz+rr)} = u$, sarà $u^4 = 2a^2(zz-rr)$. Si prolunghi QM finchè concorra colla verticale AH in L; e da Q si cali QC normale ad AH, che sarà una orizzontale; si nomini $AC = x$, $CQ = y$. Nel triangolo rettangolo LMA essendo l' angolo MAL semiretto, lo sarà ancora l' angolo MLA; onde avremo $ML = z$, $CL = y$; e perciò

$AL = x + y = z\sqrt{2}$, ed $LM = z = r + y\sqrt{2}$, onde

$y = \frac{z-r}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{z+r}{\sqrt{2}}$; fatta la sostituzione nell' equazione della curva, si ottiene $u^4 = 4aaxy$. Si noti che u è eguale a $\sqrt{(xx+yy)}$. Ecco adunque un' altra equazione della lemniscata riferita alle coordinate x, y, o sia alla tangente AH del punto A; poichè è dimostrato da' soprallodati autori che hanno trattato della lemniscata, essere la retta che nel punto A fa un angolo di quarantacinque gradi coll' asse AP, la tangente della curva nel punto A.

Differenziando l'equazione $(xx+yy)^2 = 4aa.xy$, e sostituendo in vece di $4aa$ il suo valore $\frac{(xx+yy)^2}{xy}$, si ritrova

$$dy = y\frac{dx}{x}\left(\frac{3xx-yy}{xx-3yy}\right), \text{ e}$$

$$ds = \frac{dx}{x}\left(\frac{u^3}{xx-3yy}\right), \text{ e}$$

$$du = \frac{u\,dx}{x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2-3y^2}\right).$$

Ciò posto, al punto Q della curva, sia QR tangente, la cui espressione è $\frac{u^3}{u^2-4x^2}$, e chiamata la gravità assoluta d'un corpo $= g$, sarà essa alla gravità relativa che sollecita il corpo alla discesa in Q per la direzione della tangente, o sia del latercolo della curva $= ds$, come $QR : RC :: ds : dx :: u^3 : x^3 - 3yyx$; onde tal forza verrà espressa per

$$g\left(\frac{x^3-3yyx}{u^3}\right) = gx\left(\frac{uu-4yy}{u^3}\right);$$ la forza poi relativa con cui la gravità preme la curva, è

$$\frac{gCQ}{QR} = gy\left(\frac{uu-4xx}{u^3}\right).$$

La velocità d'un grave che dal punto A scenda per qualunque curva, è eguale in qualsivoglia punto Q, a quella di cui è dotato un corpo nel punto C, che sia disceso per la verticale corrispondente AC, proprietà insigne dei gravi dal Galileo dimostrata; onde esprimendosi la velocità in C per $2\sqrt{AC} = 2\sqrt{x}$, ancora la velocità in Q si dovrà esprimere per $2\sqrt{x}$.

Si esprima per ϕ un minuto secondo, e per π lo spazio percorso nel tempo ϕ con moto accelerato da un grave che parta dalla quiete, e T disegni il tempo della discesa per $AC = x$, sarà $\frac{\phi\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} = T$; come esigono le leggi galileane del moto de' gravi; e perciò avremo l'equazione $dT = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, espressione del tempicello della discesa per dx. Ora essendo le velocità in C e Q eguali, il tempo per dx sta al tempo per ds, come $dx : ds$, secondo la teoria del moto variabile; dunque se si chiami dt il tempo per ds, avremo

$$dt = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{ds}{2\sqrt{x}} = \frac{\phi}{2\sqrt{\pi x}} \times \frac{u^3 \cdot dx}{x(xx - 3yy)}, \text{ e}$$

$$t = \frac{\phi}{2\sqrt{\pi}} \int \frac{u^3\, dx}{x^{\frac{3}{2}}(xx - 3yy)}$$ sarà l'espressione del tempo per l'arco AQ.

Acciocchè possiamo integrare questa formola

$\frac{u^3\, dx}{2x^{\frac{3}{2}}(xx - 3yy)}$, la dispongo così;

$$\frac{u\, dx}{2x^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2x^2 - 2y^2 - x^2 + 3y^2}{x^2 - 3y^2}\right) = \frac{u\, dx}{x^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{xx - yy}{xx - 3yy}\right) - \frac{u\, dx}{2x^{\frac{3}{2}}};$$

ma abbiamo detto di sopra che du sia uguale

$\frac{u\, dx}{x}\left(\frac{xx - yy}{xx - 3yy}\right)$; dunque la nostra formola diviene

$\frac{du}{\sqrt{x}} - \frac{u\, dx}{2x^{\frac{3}{2}}}$, il cui integrale è $\frac{u}{\sqrt{x}}$; sarà per tanto il tempo della discesa per l'arco $AQ = t = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u}{\sqrt{x}}$

Non è sì facile determinare se l'integrale $\frac{u}{\sqrt{x}}$ richieda costante alcuna, poichè non potendosi avere sì facilmente il valore di y dato per x, a cagione del grado alto dell' equazione, sarà malagevole ancora avere l' integrale espresso per la sola variabile x. Ciò non ostante avendosi nel nodo A della curva il flesso contrario, ed essendo la linea dell' ascisse tangente, sarà per le cose che ho dimostrate nel libro 3°. della geometria degl' infinitesimi, vicino a questo punto l' ordinata y infinitamente piccola rispettivamente all' ascissa x; onde avremo $x = u$. Se dunque supporremo $t = o$, quando x sia zero; diventando vicino al vertice A la $t = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{x}$, troveremo $o = o$. Da ciò si conchiude che l' integrale $\frac{u}{\sqrt{x}}$ non esiga costante alcuna. Arrivato il corpo in K, e terminato lo scendere, sale per l' arco KPD colla celerità acquistata mentre cadde dall' altezza AH; tuttavia riman costante la legge, che il tempo in cui vien trascorso qualunque arco $AQKPD$, pareggi il tempo dello scendere per la sua corda, perchè rimane invariata l' espressione del tempo per l' arco, cioè $t = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u}{\sqrt{x}}$ che è la stessa che esprime il tempo per la sua corda; proprietà elegante della nostra curva.

Abbiamo veduto che il tempo per la verticale AC sia eguale $\frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{x}$; ma il Galileo ha dimostrato che il tempo per AC è al tempo della caduta per la corda AQ, come AC ad AQ: dunque il tempo della discesa per la corda AQ avrà per espressione $\frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u}{\sqrt{x}}$; dal che si vede chiaramente che la corda AQ e l'arco corrispondente AQ vengono percorsi dal grave cadente da A nello stesso tempo.

Il sig. dottor Bonati, come abbiam detto, scioglie il problema inverso, e incontra un'equazione che è appunto la stessa che nasce dalla nostra descrizione della Lemniscata; onde la Cassiniana del sig. Malfatti, l'Isocrona del sig. Bonati, e la Lemniscata del sig. Fagnani sono una stessa identica curva. Quantunque niente siavi nella risoluzione del problema inverso del sig. Bonati, che non corrisponda alla sua dottrina, ciò non ostante non mi si deve imputare ad inutilità, se riassumo la risoluzione per altra via, onde consolidare le dimostrate proprietà del nostro isocronismo, e scoprirne di nuove.

PROBLEMA.

Si cerca (fig. III) una Curva AQL, per cui cadendo il Grave da A, consumi a percorrere l'arco AQ quel tempo, che consuma a percorrere la corda corrispondente AQ, se liberamente cada per questa.

Sia AH la linea dell' ascisse, in cui si prenda $AC = x$, $CQ = y$; alla quale sia infinitamente vicina BS. Si ponga l'arco infinitesimo $SQ = ds$, Poichè la celerità per questo spazietto si può reputare costante, dalle leggi del moto equabile avremo $dt = \frac{ds}{c}$; chiamata la celerità in $Q = c$, e il tempicello in cui si percorre ds, $= dt$; ma abbiamo veduto essere $c = 2\sqrt{x}$;

dunque $dt = \frac{ds}{2\sqrt{x}}$; e $t = \int \frac{ds}{2\sqrt{x}}$.

Il tempo poi della discesa per la verticale AC sta al tempo per la corda AQ, come $AC : AQ$, come $x : u$; ed essendo il tempo per la verticale espresso per $\sqrt{x}$,

sarà il tempo per la corda $AQ = \frac{u}{\sqrt{x}}$. Quindi sorge

l' equazione $\int \frac{ds}{2\sqrt{x}} = \frac{u}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{\sqrt{x}}$;

e differenziando, si ritrova

$x\,ds\sqrt{(xx+yy)} = x^2dx + 2xy\,dy - yy\,dx$, equazione differenziale della curva ricercata.

Vediamo se si possa integrare questa equazione, il che avverrà sicuramente per essere omogenea. Fo pertanto $p\,dx = dy$, $xq = y$. Eseguite le sostituzioni, ricaviamo l' equazione

$x^2dx\sqrt{(1+pp)}\times\sqrt{(1+qq)} = x^2dx - x^2q^2dx + 2x^2qp\,dx$,

cioè

$\sqrt{(1+pp)}\times\sqrt{(1+qq)} = 1 - qq + 2qp$.

Se si ordini l' equazione per p, si ritroverà di secondo grado; e sciolta, dà $p-q=o$, e $p-q=\frac{2q^3+2q}{1-3qq}$.

Si differenzii adesso l' equazione $y=xq$, ed avremo $xdq+qdx=dy=pdx$; onde $\frac{dq}{p-q}=\frac{dx}{x}$; e sostituiti i valori di $p-q$, nascono due equazioni

$$\frac{dx}{x}=\frac{dq}{o},\quad \frac{dx}{x}=\frac{1-3qq}{2q^3+2q}dq$$

La prima di queste equazioni ci mostra essere $xdq=o$; onde in questo caso l' equazione $dy=xdq+qdx$ diviene $dy=qdx=\frac{ydx}{x}$; e perciò $xdy-ydx=o$; ed integrando sarà $\frac{x}{y}+C=o$, equazione alla linea retta, la quale in un certo senso è dotata della proprietà meccanica di cui parliamo.

L' equazione seconda $\frac{dx}{x}=\frac{1-3qq}{2q^3+2q}dq$ si può cangiare in questa $\frac{dx}{x}=\frac{dq}{2q}-\frac{2qdq}{qq+1}$, che integrata, diventa $Lx=L\frac{Cq^{\frac{1}{2}}}{qq+1}$; quindi $x=\frac{Cq^{\frac{1}{2}}}{qq+1}$; ma è $q=\frac{y}{x}$; dunque $yy+xx=C\sqrt{xy}$, ed $(yy+xx)^2=CCxy$, equazione alla Lemniscata.

Niuna curva pertanto fuori di questa, permette a' gravi che per essa discendono, l' impiegare lo stesso tempo; o discendano per l' arco, ovvero per la corda corrispondente.

Ma piace di ritornare all' esame della discesa de' gravi per la nostra curva. Oltre la pressione che dalla curva si sostiene in Q, (fig. II) prodotta dalla gravità, che di sopra trovammo essere $g\,y\,(\frac{u\,u-4\,x\,x}{u^3})$, havvi un' altra pressione nata dalla forza centrifuga, che determino così. Chiamata la velocità in $Q=c$, e il raggio d' osculo R, e la forza centrifuga f, si sa dalla teorìa delle forze centrifughe, che se un corpo cada per uno spazio eguale alla metà del raggio d' osculo, sollecitato da una forza costante eguale alla centrifuga, acquista esso in fine di tal discesa una velocità eguale a quella che ha il corpo nel punto Q; quindi per le leggi del Galileo sarà $f\times\frac{R}{2}=\frac{c\,c}{2}$, o sia $f\,R=c\,c$; ma essendo c quella velocità ancora, che ha un grave in C cadendo dall' altezza $A\,C$; perciò avremo per le leggi galileane, l' equazione $g\,x=\frac{c\,c}{2}$; chiamata al solito la gravità assoluta g, sarà $2\,g\,x=f\,R$, ed $f=\frac{2\,g\,x}{R}$: ma il raggio d' osculo R della lemniscata è uguale al quadrato del diametro $A\,P$ diviso per il triplo della corda, cioè $= \frac{u^3}{6xy}$, come con poco giro di calcolo si può dedurre dall' equazione differenziale sopra trovata della curva; dunque sarà l' espressione della forza centrifuga f, che preme perpendicolarmente la curva in Q, $f = \frac{12gx^2y}{u^3}$, a cui aggiunta la pressione perpendicolare contro la curva, nata dalla gravità, otterremo che la pressione totale contro la curva si rappresenti per $gy\left(\frac{u^2+8x^2}{u^3}\right)$

Fa d' uopo quì avvertire che la pressione perpendicolare contro la curva, originata dalla gravità ed espressa per $gy\left(\frac{uu-4xx}{u^3}\right)$ cresce fino al punto infimo della curva K, in cui il latercolo e la tangente hanno la posizione orizzontale: da questo punto in su, per l'arco KD una tal pressione continuamente si diminuisce, e finalmente svanisce nel punto D, dove la tangente divenendo verticale, riesce parallela alla AH; per determinare i punti K, D respettivamente alla linea delle ascisse AH, o sia per determinare le ascisse AC, AH, notiamo che nel punto K l' ascissa AH diviene massima, e nel punto D diviene massima l' ordinata CD. Differenziata l' equazione della curva $(yy+xx)^2 = 4aaxy$, abbiamo $\frac{dx}{dy} = \frac{y^3+xxy-aax}{aay-x^3-yyx}$. Posto, come esige il metodo de' massimi e de' minimi, $dx = o$, avremo $y^3 + x^2 y = aax$. Se questo valore di aax si metta nell' equazione della curva, avrassi $(yy + xx)^2 = 4yy(yy + xx)$, o sia $yy + xx = 4yy$; da cui si ricava $x = y\sqrt{3}$. Quindi nel punto K, dove l' ascissa è massima, e dove la tangente orizzontale è confusa coll' ordinata, e la pressione perpendicolare contro la curva, originata dalla gravità, similmente è massima ed eguale alla gravità assoluta del corpo, cioè dove è $dx = o$, l' ascissa sta all' ordinata come $\sqrt{3} : 1$, ovvero come l' altezza del triangolo equilatero sta alla metà della base.

Si ponga ora $dy = o$; sarà $x^3 + yyx = aay$, e fatto il calcolo come sopra, si ritrova che nel punto D, in cui la tangente diviene verticale, e la pressione cagionata dalla gravità è nulla, e l' ordinata CD massima, l' ascissa AC sta all' ordinata CD, come la metà del lato del triangolo equilatero alla sua altezza. Se adunque dal punto A dell' ascissa AH si conducano le rette AK, AD, che facciano con essa l' angolo HAK di trenta gradi, e l' angolo HAD di sessanta, i punti K, D, che le rette AK, AD segneranno nella curva, sono i punti ricercati, dove la pressione della gravità è massima, e dove svanisce del tutto. L' ascissa che corrisponde al punto K, cioè AH, si trova eguale ad

$\frac{a}{2} \times \sqrt[4]{27}$, e l' ordinata $HK = \frac{a}{2} \times \sqrt[4]{3}$. Il contrario avviene nel punto D, cioè CD è eguale ad

$\frac{a}{2} \times \sqrt[4]{27}$, $CA = \frac{a}{2} \times \sqrt[4]{3}$. Le corde poi AK, AD sono eguali ad $a\sqrt[4]{3}$, e il rettangolo $AHL'O$ è un quadrato, la cui diagonale AL' è $\frac{a}{2}\times\sqrt[4]{108}$.

Essendo nel punto D annientata la pressione della gravità contro la curva, e continuando il corpo a camminare per essa, poichè in D la velocità acquistata dalla caduta per l' arco AK non è ancora estinta, rimanendovi quella che conviene all'altezza AC, il corpo non potrà stare attaccato alla curva, che in vigore della forza centrifuga, anzi per meglio dire, in vigore dell' eccesso della forza centrifuga sopra la gravità relativa del corpo perpendicolare alla curva; quindi si deduce che non debbansi dal punto D in su sommare le due espressioni della forza centrifuga $\frac{12gx^2y}{u^3}$, e della gravità relativa $gy\left(\frac{uu-4xx}{u^3}\right)$; ma debbasi dalla prima sottrarre la seconda, onde sia la pressione contro la curva $= gy\left(\frac{16x^2-u^2}{u^3}\right)$

Se mai avvenga, che questa espressione sia $= o$, prima che il corpo giunga in A, sarà esso costretto ad abbandonare la curva, continuando il suo cammino liberamente per una parabola, come insegna la dottrina de' projettili. Per vedere se siavi e dove un tal punto, che chiamiamo di distacco, si ponga $gy\left(\frac{16x^2-u^2}{u^3}\right)=o$, avremo $16x^2-u^2=o$, ed $x\sqrt{15}=y$. Nel punto pertanto di distacco avremo l' ascissa all' ordinata, come $1:\sqrt{15}$. Se dunque qualunque ordinata CQ si prolunghi indefinitamente, e fatto centro in A coll' intervallo eguale a quattro ascisse AC si descriva un circolo che noti nella CQ prolungata il punto G, congiunti il punto A ed il punto G colla retta AG, taglierà essa la curva in S, dove cessando ogni pressione, il corpo sarà costretto dalle forze che l'agitano, ad abbandonarla. L'equazione $gy\left(\frac{16x^2-u^2}{u^3}\right)=o$ dà y ancora eguale a zero; il che altro indicare non vuole che sul principio del moto la pressione contro la curva sia eguale a zero.

Mi sia permesso di fingere che il corpo giunto in S continui il suo moto per la parte convessa della curva AS: il corpo sarebbe spinto in questo caso contro la curva, e sarebbe costretto a stare attaccato alla parte convessa dall' eccesso della gravità rispettiva sopra la forza centrifuga, continuando il suo moto ritardato colla stessa legge, cioè che il tempo impiegato nello scorrere l'arco $AQKPDS$ sia eguale a quello che impiegherebbe, cadendo per la corda AS; cioè se due corpi dal punto A cadessero nello stesso punto di tempo, ed uno percorresse l' arco $AQKPDS$, e l' altro la corda AS, s'incontrerebbero in S dotati della stessa celerità.

Da ciò si raccoglie che il grave non ritornerebbe al punto A, se non dopo un tempo infinito, imperciocchè nel punto A, il raggio d' osculo è perpendicolare alla tangente orizzontale AO, e perciò si confonde colla verticale AH, ed è infinito; ed in fatti la sua espressione da noi sopra usata è $\frac{u^3}{6uy}$; ma dall' equazione della curva abbiamo $xy = \frac{u^4}{4aa}$; dunque il raggio d' osculo sarà $= \frac{2aa}{3u}$, e svanendo la corda u, sarà

$\frac{2aa}{o} =$ all' infinito; dunque la corda infinitesima AS

della curva si confonde colla corda infinitesima del circolo che ha per raggio la verticale AH prolungata all' infinito. Ma nel circolo qualunque corda AS condotta dall' estremità d' un diametro, comecchè infinitesima, si percorre nel tempo stesso, che mette il grave a discendere per il diametro verticalmente collocato, come esigono le leggi galileane; ed essendo il tempo della discesa pel diametro infinito AH, esso pure infinito; sarà il tempo per la corda infinitesima AS, e perciò il tempo dell' intera rivoluzione per la lemniscata $AQKPDSA$, infinito. Questa verità sembra sottoposta a qualche dubbiezza, per quanto si stabilisce nel libro 3°. della geometria degl' infinitesimi, dove dimostrasi che ne' punti di flesso contrario delle curve (e tale è il punto A, come si può rilevare dalla fig. 1) non siavi alcun circolo osculatore, e che non senza paralogismo in tali punti si confonda la curvatura con quella d' un circolo di raggio infinito. Ma se vegganst le cose dimostrate nel libro terzo, cap. 9. tom. 1 delle

Istituzioni analitiche, vedrassi altresì che gli archetti minori di qualunque dato di quà e di là da questi punti singolari, hanno essi ancora veri circoli osculatori, i quali nel nostro caso essendo dotati di raggio infinito, la discesa per le loro corde infinitesime che son quelle della curva, si farà in tempo infinito, presi i termini dell' infinito e infinitesimo nel loro vero senso, cioè di quantità indeterminate che ponno a piacimento prendersi maggiori o minori di qualunque data. Onde da questa dottrina altro non si ricava che il corpo non possa tornare alla pristina altezza per curve di curvatura più accostante alla linea retta di quella di qualsivoglia circolo finito.

L' ipotesi, che il corpo nel punto S dal concavo della curva vada a scorrere la parte convessa AS, niente ha di contradittorio; anzi sarebbe un caso della natura, se si facesse cadere un globo per un canale che abbia la figura $AQKDSA$ della lemniscata, e che abbia la situazione rispetto alla verticale, che ha colla tangente AH; in tal circostanza il globo per l' arco $AQKPDS$ premerebbe la parete concava del tubo colla forza che fu da noi espressa per $gy\left(\frac{u^2 + 8xx}{u^3}\right)$ fino al punto D; e per $gy\left(\frac{16x^2 - u^2}{u^3}\right)$ dal punto D fino al punto S; onde scorrerebbe pel cavo della parete del tubo. Nel punto S nessuna parte della parete del tubo verrebbe premuta; per la porzione poi del tubo SA verrebbe premuta la parete convessa con forza espressa per $g y \left(\frac{u^2 - 16 x x}{u^3}\right)$ come quella con cui viene premuta la parte concava $D S$ presa negativamente: onde il globo sarebbe costretto a salire per la convessità interiore del tubo. Le quali cose essendo assai chiare per se stesse, non esigono ulteriore spiegazione.

Vogliasi ora determinare l' ascissa $A T$ corrispondente al punto del distacco S. Abbiamo detto che in questo luogo $x : y :: 1 : \sqrt{15}$, o sia $y = x \sqrt{15}$; sostituito questo valore di y nell' equazione della curva $(x x + y y)^2 = 4 a a x y$, avremo $(16 x^2)^2 = 4 x^2 \sqrt{15} \times a a$; e perciò $x = \frac{a}{8} \times 15^{\frac{1}{4}}$

Resta che determiniamo il tempo in cui il corpo percorre l' arco $A K P D S$, cioè percorre la curva fino al punto del distacco S. Essendo il tempo per la corda $A S$ eguale $\frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \times \frac{A S}{\sqrt{A T}}$; ed essendo $A S = 4 A T$, sarà il tempo per $A S$

$$= \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \times 4 \sqrt{A T} = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{2 a \,.\, 15^{\frac{1}{4}}}$$

Supponghiamo che sia $\frac{\pi}{2} = a$, cioè a eguale alla metà dello spazio che un grave percorre in un secondo, da noi espresso per ϕ; sarà il tempo della discesa per $A S, = \phi \,.\, 15^{\frac{1}{8}}$, cioè sarà eguale a un secondo e due quinti prossimamente; ed in questo tempo il grave da A giungerà in S, scorrendo l' arco della lemniscata $AQKPDS$.

Se si eseguisca lo sperimento dell' isocronismo della nostra curva, facendo discendere una palla levigata per una lemniscata metallica o di qualunque altra materia solida ben pulita e liscia, e situata colla tangente del centro verticalmente, si vedrebbero verificati gli effetti dalla teoria stabiliti; lo che potrebbe servire a consolidare viemaggiormente le famose leggi galileane, che per altro oramai non hanno bisogno di maggior conferma.

Fig. 1

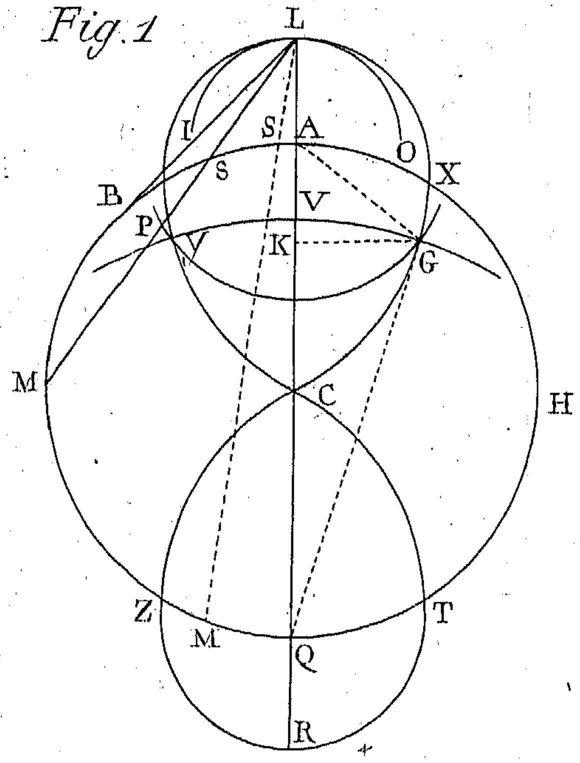

Fig. 3

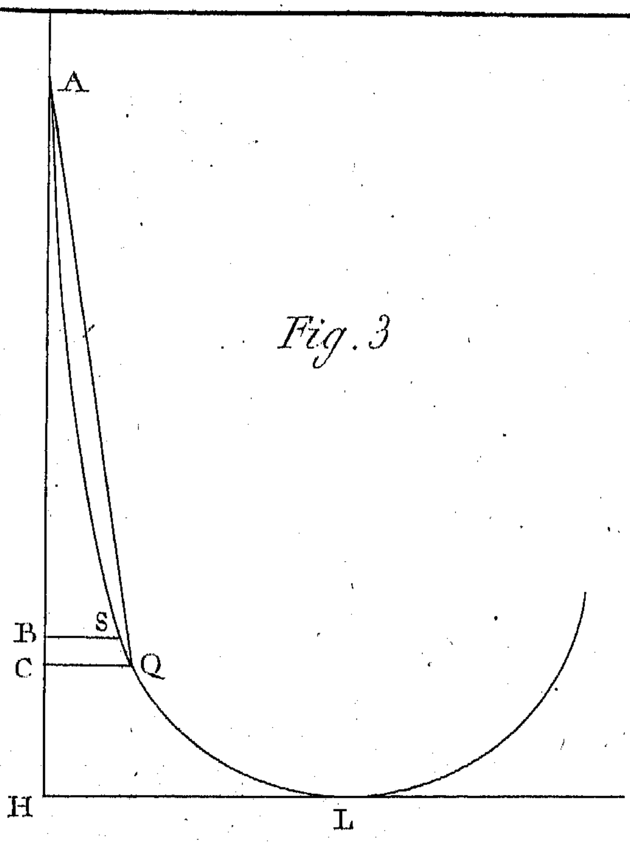

Fig. 2