aus: *Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)* 19(2-3): 220-237

„Zwei Dreiviertelstunden sind kürzer als zwei drei Viertel Stunden.“

Interdisziplinäre Überlegungen zur Problematik von Bruchzahlen, Zahlwörtern und Bruchzahlkonzepten[1]

Heike Wiese / Ilse Wiese

Abstract

The use of the *Bruchalbum*, an exercise book for fractional numbers, as a part of mathematics instruction in the German 6th grade revealed an interesting phenomenon about fractional numbers and their designation: some pupils understand certain number words for fractions in German multiplicatively instead of additively. For instance, they refer to five twelfths of a circle as in (i) instead of (i'), and similarly give designations like (ii) instead of (ii'):

(i) “fünf einzwölftel” (literally: *five one twelfths*); “$5\frac{1}{12}$”
(i') “fünf Zwölftel” (*five twelfths*); “$\frac{5}{12}$”
(ii) “zwei dreiviertel” (literally: *two three quarters;* “two and three quarters”); “$2\frac{3}{4}$”
(ii') “zwei mal drei Viertel” (*two times three quarters*); “$2 \cdot \frac{3}{4}$”

We believe that an interdisciplinary approach to this phenomenon is productive. Employing linguistic analyses in the investigation, we claim that the pupils' deviations are due to a specific problem in the relation between fractional numbers and number words in German. To help pupils avoid difficulties in this domain, it is not only important to further the knowledge of fractional numbers themselves, but also to teach them the *designation* of fractional numbers by certain numeral constructions. Based on this analysis we present two *math's games* that concentrate primarily on language; these *math's games* are meant to support the teaching of fractional numbers in the 6th grade.

1 Überblick

Die vorliegende Untersuchung behandelt ein spezifisches Problem aus dem Bereich des Bruchunterrichts, nämlich das Problem der Bezeichnungsweise sogenannter „gemischter Zahlen“. Wir werden – nach der Klärung der Terminologie – zunächst die relevanten Daten vorstellen, die wir den Bruchalben von Schüler(innen) einer 6.Klasse entnommen haben (Abschnitt 3). Nach der Darstellung des *Fehlerphänomens* werden wir dann die *kognitiven Fehlerursachen* analysieren:[2] Die aufgefundenen Normabweichungen werden als Folge eines spezifischen „Interpretationsproblems“ diskutiert, das wir mithilfe linguistischer Analysen auf verbalsprachliche Parallelen der betreffenden Bruchzahlbezeichnungen mit Anzahlangaben zurückführen (Abschnitt 4); auf dieser Basis skizzieren wir Vorschläge für den Mathematikunterricht, die zur Bewältigung des diskutierten Problems beitragen sollen (Abschnitt 5).

---

[1] Die Autorinnen danken Bernd Wollring für die konstruktive und sehr hilfreiche Kritik an einer früheren Fassung des vorliegenden Artikels. Für nützliche Hinweise danken wir zudem Klaus Hasemann sowie zwei anonymen Gutachtern des JMD. Sämtliche verbliebenen Unklarheiten etc. gehen selbstverständlich auf unser Konto.

[2] Vgl. Heink/Reitberger (1990): Unter *Fehlerphänomen* werden dort die „beobachtbaren Teile des fehlerhaften Denkvorganges“ (S.301) verstanden; hierzu zählen unter anderem „Notizen und Zeichnungen des Schülers“ (S.269), also Eigenproduktionen, wie wir sie etwa in den Bruchalben aufgefunden haben. Als *kognitive Fehlerursachen* sind die „Dispositionen [...], Absichten und psychisch-physische[n] Bedingungen“ (S.301) definiert, die dem Fehlerphänomen zugrundeliegen und aus diesem indirekt durch Kausalattribution erschlossen werden.

2 Terminologie

Wir beschäftigen uns in der folgenden Untersuchung mit Bruchzahlen und ihren (mathematischen und außermathematischen, verbalsprachlichen) Bezeichnungen. Bruchzahlen können mithilfe von Ziffern oder durch bestimmte Zahlwörter bezeichnet werden, die wir „Partitiv-Numeralia“ oder kurz „Partitiva“ nennen. Partitiva haben - als sprachliche Elemente - unter anderem eine bestimmte phonologische und morphosyntaktische Struktur.

Die *Differenzierung zwischen Bezeichnung (Partitiv-Numeralia) und Bezeichnetem (Bruchzahlen)* ist für die vorliegende Untersuchung von grundlegender Bedeutung. Man kann sich den Unterschied an dem folgenden Beispiel verdeutlichen; in (1) geht es um ein Partitiv-Numerale, in (2) um eine Bruchzahl:

(1) „Ein Drittel“ reimt sich auf „Mittel“. (*Partitivum*; Bezeichnung);
(2) Ein Drittel ist das Doppelte von einem Sechstel. (*Bruchzahl*; Bezeichnetes).

Bezeichnungen *ganzer Zahlen*, wie sie in mathematischen Kontexten auftreten (etwa: „Vier mal zwölf ist achtundvierzig.“), bezeichnen wir im folgenden als „Γ-Numeralia“. Der Terminus „Kardinalia“ schließlich bezieht sich auf Numeralia, die in konkreten *Anzahlangaben* auftreten („sieben Zwerge“).

3 Beschreibung des Phänomens: Erkenntnisse aus dem Bruchalbum

Das im folgenden diskutierte Phänomen zeigte sich beim Einsatz des „Bruchalbums“, das von I. Wiese (1995; 1996a) in Anlehnung an das „Zahlenalbum“ von Geering (1994) entwickelt und in den letzten Jahren als Element des Mathematikunterrichts in der Jahrgangsstufe 6 erprobt wurde. Wir werden im folgenden Abschnitt zunächst das Konzept des Bruchalbums kurz vorstellen, bevor wir in 3.2 die für die Untersuchung relevanten Daten zusammenfassen.

3.1 Das Bruchalbum als Element des Mathematikunterrichts

Im „Bruchalbum“ sammeln die Schüler(innen) ihre ersten Erfahrungen und Erkenntnisse beim Umgang mit konkreten Bruchteilen und Brüchen und ihre Auffassungen von Bruchzahlen. Mehrere Doppelseiten des Albums sind jeweils für ausgewählte Brüche reserviert; auf weiteren Seiten sollen Themen diskutiert werden wie die Gegenüberstellung „Erweitern - Multiplizieren“ bzw. „Kürzen - Dividieren“, die Einbettung der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen und schließlich Dezimalbrüche. Einige Seiten sind für besondere Ideen der Schüler(innen) vorgesehen.

Das Bruchalbum ist durch Eigenproduktionen der Schüler(innen) bestimmt. Sie schreiben Geschichten und Reflexionen zu Bruchzahlen auf und können dabei ihre außerschulischen Erfahrungen einbringen; sie gestalten so das Album weitgehend nach ihren eigenen Vorstellungen.

Das Bruchalbum bietet dadurch nicht nur den Lernenden die Gelegenheit, ihre Kenntnisse über Brüche und Bruchteile zu formulieren und mit außerschulischen Erfahrungen zu verknüpfen, sondern erlaubt es zugleich den Lehrenden, die Überlegungen der einzelnen Schüler(innen) kennenzulernen und die Erkenntnisse, die sich heraus ergeben, gegebenenfalls in den Unterricht einfließen zu lassen. Probleme können auf diese Weise frühzeitig bemerkt und behandelt werden. Das Bruchalbum ist damit ein wirksames Instrument der Rückkoppelung im Mathematikunterricht.

3.2 Daten aus dem Bruchalbum

Im vorliegenden Fall konnte mithilfe der Daten aus den Bruchalben einer 6.Klasse eine spezifische Problematik aus dem Bereich der Bruchzahlbezeichnungen (im folgenden kurz: „Partitiva-Konstruktionen“[3]) erkannt werden, die sonst möglicherweise übersehen worden wäre: In den Reflexionen zu einzelnen Brüchen, die die Schüler(innen) im Bruchalbum anstellten, tauchen immer wieder Paraphrasen auf, die eine *multiplikative* Auffassung von Partitiva-Konstruktionen wie „zwei drei Viertel“ ($2\,\frac{3}{4}$) im Sinne von „zwei mal drei Viertel“ ($2 \cdot \frac{3}{4}$) vermuten lassen.

Beispielsweise wird zu zwei Kreisen, die jeweils zu drei Vierteln schraffiert wurden, die Erläuterung „zwei dreiviertel ($\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$)“ gegeben. Die graphische Darstellung von fünf Zwölfteln wird als „fünf einzwölftel“ paraphrasiert, die von einem Fünftel als „ein $\frac{1}{5}$“. An anderer Stelle treten Schreibweisen wie „3 $\frac{1}{5}$“ und „Drei einfünftel“ für drei Fünftel auf, die ebenfalls auf ein Verständnis der Partitiva-Konstruktion als „drei Einheiten zu je einem Fünftel“ hinweisen. Aufschlußreich sind in diesem Zusammenhang auch Explikationen wie „1 Ganzes sind 3 ein $\frac{1}{3}$.“.

Die folgende Aufstellung gibt exemplarische Paraphrasen aus den untersuchten Bruchalben wider; es handelt sich hierbei um Eigenproduktionen von Schülern und Schülerinnen einer 6.Klasse zu Beginn der Unterrichtseinheit „Bruchzahlen“:

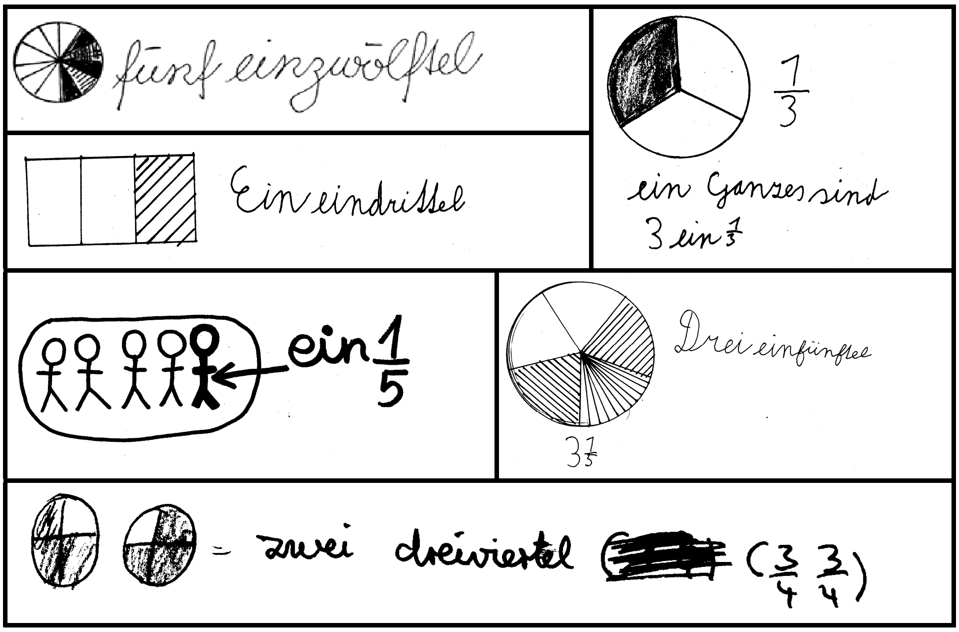

Abbildung 1: Daten aus den Bruchalben einer 6.Klasse

[3] Da der Terminus „Partitivkonstruktionen“ in der Linguistik bereits für Konstruktionen wie „drei der Zwerge“; „vier von den Frauen“ etc. verwendet wird, nennen wir Konstruktionen, in denen Partitiva auftreten, kurz „Partitiva-Konstruktionen“.

Solchen Paraphrasen, wie sie hier aufgeführt sind, liegt offensichtlich ein Verständnis von Partitiva-Konstruktionen zugrunde, das vom konventionellen Sprachgebrauch abweicht: *Partitiva wie „drei Viertel" oder „ein Zwölftel" (bzw. in Ziffern-Schreibweise: $\frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{12}$)*[4] *werden als Einheiten aufgefaßt, die durch ein weiteres Zahlwort quantifiziert werden können.*

Partitiva-Konstruktionen wie „zwei drei Viertel" werden entsprechend multiplikativ interpretiert; „zwei drei Viertel" bezeichnet nach diesem Verständnis dann - abweichend von der konventionellen Sprechweise - dasselbe wie „sechs Viertel". Es handelt sich hierbei gewissermaßen um eine *Übergeneralisierung* des „quasikardinalen" Aspekts der Bruchrechnung,[5] die zu Normabweichungen führt. Dieses Phänomen und seine Ursachen sollen im folgenden genauer beleuchtet werden; wir werden zunächst eine Analyse der abweichenden Interpretation von Partitiva-Konstruktionen geben und auf dieser Basis dann Anregungen für den Mathematikunterricht entwickeln, die speziell auf die konstatierten Lernschwierigkeiten bezogen sind.

4 Analyse: Bruchzahlen, Zahlwörter und Anzahlangaben

4.1 Interpretation von Partitiva-Konstruktionen

Die aufgefundenen Schwierigkeiten lassen sich generell als Interpretationsphänomen charakterisieren: Die Schüler(innen) interpretieren in den genannten Fällen zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen wie „zwei drei Viertel" ($2\frac{3}{4}$)[6] in nicht-konventioneller Weise, nämlich multiplikativ als „zwei mal drei Viertel" und nicht additiv als „zwei und drei Viertel". Seien A, B und C Zahlwörter, die die Zahlen x, y und z bezeichnen, dann bezeichnet ein Ausdruck wie „A_B_C-tel" konventionell x *plus* $\frac{y}{z}$ (etwa $2 + \frac{3}{4}$). Nach Interpretation der Schüler(innen) steht „A_B_C-tel" in den fraglichen Fällen dagegen offensichtlich für x *mal* $\frac{y}{z}$ (etwa $2 \cdot \frac{3}{4}$).

---

[4] Auf die Korrelation von Ziffern und Numeralia und die Probleme, die sich für Lernende bei ihrer Zuordnung stellen können, gehen wir hier nicht näher ein. Dies betrifft Diskrepanzen, die sich beispielsweise aus dem Stellenwertsystem ergeben, das Ziffern, aber nicht Numeralia zugrundeliegt, etwa: „410" ≙ „vierhundert-zehn" ≠ „400-10"; ein zweiter Problembereich ist die unterschiedliche Reihenfolge der Konstituenten in komplexen Ziffern und (deutschen) Numeralia; etwa „41" vs. „ein-und-vierzig" und „14" vs. „vier-zehn" (vgl. hierzu auch die Diskussion und Modellierung bei McCloskey et al. (1986) und Campbell/Clark (1992)). Für eine ausführliche Diskussion der Problematik und eine formale Darstellung der betreffenden Bereiche des Zahlkonzepts vgl. H. Wiese (1997).

[5] Vgl. Griesel (1981); der „quasikardinale Aspekt" kommt zum Tragen, wenn beispielsweise bei Brüchen wie „$\frac{3}{7}$" die „Siebtel" als Einheiten aufgefaßt werden (deren Anzahl „drei" dann der Zähler angibt). Die von uns beobachteten Normabweichungen können entstehen, wenn nicht nur „Siebtel", sondern „drei Siebtel" u.ä. als neue Einheiten aufgefaßt und durch eine weitere Zahl quantifiziert werden.

[6] Es handelt sich bei den von uns diskutierten Fällen demnach um „gemischte Zahlen" oder genauer: um „gemischte Zahlzeichen" (vgl. hierzu etwa Padberg 1989:87). Da die Differenzierung zwischen Zeichen und Bezeichnetem in unserer Untersuchung eine zentrale Rolle spielt, sprechen wir von „Zahlen" bzw. „Bruchzahlen" nur dann, wenn es um die mathematischen Objekte selbst geht, und bezeichnen die erwähnten *Bezeichnungen* bestimmter Zahlen als „zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen". Diese – möglicherweise etwas umständlich anmutende – Unterscheidung dient nicht nur der terminologischen Genauigkeit; wie sich im folgenden zeigen wird, bildet sie darüber hinaus eine wesentliche Basis für die Analyse des behandelten Phänomens.

Das Problem liegt hier also in erster Linie auf der Ebene des sprachlichen Ausdrucks; die nicht-konventionellen Formulierungen rühren aus einer spezifischen Weise der Zuordnung von Bruchzahlen und Zahlwörtern. Das Phänomen läßt sich daher linguistisch erfassen; im vorliegenden Abschnitt soll es unter dieser Perspektive eingehender untersucht werden. Es wird sich dabei herausstellen, daß *das genannte Interpretationsphänomen auf die engen Parallelen von zusammengesetzten Partitiva-Konstruktionen und Anzahlangaben zurückgeführt werden kann.* Wie wir im folgenden zeigen, legen die Zusammenhänge zwischen den Konstruktionstypen eine multiplikative statt additive Interpretation von Partitiva-Konstruktionen nahe.

Es handelt sich hierbei vermutlich um eine Übertragung des Sprachgebrauchs aus nicht-mathematischen Kontexten auf mathematische Aussagen. In Anlehnung an das Konzept der „$\mathbb{N}$-Verführer"[7] könnte man hier von „verbalsprachlichen Verführern" oder kurz „Vs-Verführern" sprechen.

4.2 Die Grundlagen des Interpretationsphänomens: Zusammenhänge von Anzahlangaben und Partitiva-Konstruktionen

Im vorliegenden Abschnitt sollen mithilfe linguistischer Analysen die Grundlagen der nicht-konventionellen Interpretation von Partitiva-Konstruktionen untersucht werden. Wir werden zunächst die wesentlichen Merkmale von Anzahlangaben und zusammengesetzten Partitiva-Konstruktionen zusammenfassen und auf dieser Basis die Parallelen, die zwischen den beiden Konstruktionstypen bestehen, im einzelnen beleuchten.

4.2.1 Klassifizierung der Konstruktionen

Anzahlangaben und zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen lassen sich generell folgendermaßen charakterisieren:

Zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen
- Beispiel: „sieben drei Viertel"
- Schema: „A_B_C-tel";
  - „A" ist ein Γ-Numerale, das eine ganze Zahl γ bezeichnet (etwa: 7);
  - „B_C-tel" ist ein Partitiv-Numerale, das eine Bruchzahl θ (etwa: $\frac{3}{4}$) bezeichnet;
  - *θ wird mit γ additiv verknüpft* („sieben drei Viertel" bezeichnet: $7 + \frac{3}{4}$).

Anzahlangaben
- Beispiel: „sieben Zwerge"
- Schema: „A_M";
  - „A" ist ein Kardinale, das sich auf eine Quantität α bezieht;
  - „M" ist eine Nomen-Konstruktion, die eine Menge μ bezeichnet;[8]
  - *μ wird durch α quantifiziert*. („A" gibt die Anzahl der Elemente von μ an; Bsp.: „Die Anzahl der Zwerge ist sieben.")

---

[7] Unter dem Begriff „$\mathbb{N}$-Verführer" behandelt Streefland (1986) die normabweichende Übertragung von Rechenoperationen für natürliche Zahlen auf den Bereich der Bruchzahlen.

[8] Dies ist eine recht grobe Charakterisierung, die jedoch für die vorliegende Untersuchung genügt. Für eine ausführliche Diskussion von Anzahlkonzepten und der semantischen Struktur von Kardinal-Konstruktionen und der in ihnen auftretenden Nomen vgl. H. Wiese (1995a,b; 1997).

Partitiv-Numeralia können sowohl *konkret*, d.h. bezogen auf bestimmte Objekte, als auch *abstrakt* gebraucht werden. (3) und (4) geben Beispiele für die beiden Varianten:

(3a)	„eine *dreiviertel* Stunde.“	(konkreter Gebrauch);
(3b)	„ein *dreiviertel* langer Ärmel“	(konkreter Gebrauch);
(4)	„*Drei Viertel* mal zwei sind sechs Viertel.“	(abstrakter Gebrauch).

Während abstrakte Partitiva-Konstruktionen in erster Linie in mathematischen Kontexten auftreten und daher primär im Mathematikunterricht erworben werden, sind konkrete Partitiva-Konstruktionen wie in (3) aus nicht-schulischen, alltagssprachlichen Kontexten bereits bekannt. In beiden Fällen bestehen Parallelen zu Anzahlangaben; diese Zusammenhänge werden in den folgenden Abschnitten im einzelnen diskutiert.

4.2.2 Parallelen der Konstruktionstypen

Der Übersichtlichkeit halber führen wir an dieser Stelle zwei Abkürzungen für die uns hier interessierenden *zusammengesetzten Partitiva-Konstruktionen* ein: „*a*-Konstruktion“ stehe im folgenden für *abstrakte* zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen (etwa: „sieben drei Viertel“; $7\,\frac{3}{4}$), „*k*-Konstruktion“ bezeichne *konkrete* zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen (etwa: „sieben drei Viertel Stunden“; $7\,\frac{3}{4}$ Stunden).

4.2.2.1 a-Konstruktionen und Anzahlangaben

Die Zusammenhänge zwischen *a*-Konstruktionen der Form „A_B_C-tel“ und Anzahlangaben der Form „A_M“ betreffen in erster Linie die Komponente „A“; es bestehen hier enge Parallelen zwischen dem *Kardinale* A (konkreter Gebrauch von A: „A“ bezeichnet die Quantität einer bestimmten Menge, etwa „sieben Zwerge“) und dem *Γ-Numerale* A (abstrakter Gebrauch von A: „A“ bezeichnet eine ganze Zahl, etwa „sieben“):

(i) Kardinalia sind im Deutschen *morphologisch* weitgehend identisch mit Γ-Numeralia (beispielsweise hat das Kardinale „sieben“ in „sieben Zwerge“ dieselbe Wortstruktur wie das Γ-Numerale „sieben“ in „sieben drei Viertel“).

(ii) Durch die Kombination mit „B_C-tel“ ähnelt das Γ-Numerale in *a*-Konstruktionen *syntaktisch* einem Kardinale in Anzahlangabe (beispielsweise wird das Kardinale „sieben“ in „sieben Zwerge“ ebenso mit einer nachgestellten Konstruktion kombiniert wie das Γ-Numerale „sieben“ in „sieben drei Viertel“).

Im Rahmen des Spracherwerbs sind Anzahlangaben bereits bekannt, wenn Partitiva-Konstruktionen erworben werden. Die genannten Parallelen könnten daher dazu führen, daß die Interpretation von „A“ als Kardinale in Anzahlangaben der Form „A_M“ (etwa: *sieben Zwerge*) auf Partitiva-Konstruktionen der Form „A_B_C-tel“ (*sieben drei Viertel*) übertragen wird. „B_C-tel“ (*drei Viertel*) wird entsprechend mit „M“ (*Zwerge*) parallel gesetzt, so daß „A“ (*sieben*) als Quantitätsangabe zu „B_C-tel“ aufgefaßt wird. Bei dieser Interpretation bestehen dann multiplikative Zusammenhänge zwischen „A“ (*sieben*) und „B“ (*drei*); vgl. die Parallele zwischen der Anzahlangabe in (5) und der nicht-konventionell interpretierten Partitiva-Konstruktion in (6):

(5)	sieben Zwerge:	Wie viele Zwerge?	–	Sieben.	[*konventionell*]
(6)	sieben drei Viertel:	Wie viele drei Viertel?	–	Sieben.	[*nicht- konventionell*]

4.2.2.2 *k-Konstruktionen und Anzahlangaben*

Einfache konkrete Partitiva-Konstruktionen wie „dreiviertel Stunde“ oder „dreiviertel lang“ haben die Form „B_C-tel_Nom“ bzw. „B_C-tel_Adj“, wobei „Nom“ für ein Nomen (*Stunde*) und „Adj“ für ein Adjektiv (*lang*) steht.

In einfachen (nicht-zusammengesetzten) Konstruktionen verhalten sich Partitiv-Numeralia im Deutschen in etwa wie Attribute zu dem betreffenden Nomen (*Stunde*) bzw. Adjektiv (*lang*); sie stehen vor dem Bezugswort und bestimmen es semantisch näher. Eine Konstruktion wie in (7a) besitzt daher Ähnlichkeit mit solchen wie unter (7b); (8a) entsprechend mit (8b) [„eine“ bzw. „ein“ ist hier der Artikel zu „Stunde“ bzw. „Ärmel“; „dreiviertel“ ist ein Partitiv-Numerale]:

(7a) eine *dreiviertel* Stunde (Schreibvariante: eine Dreiviertelstunde);
(7b) eine *schöne* Stunde; eine *knappe* Stunde.

(8a) ein *dreiviertel* langer Ärmel (Schreibvariante: ein dreiviertel-langer Ärmel);
(8b) ein *ziemlich* langer Ärmel; ein *80 cm* langer Ärmel.

In zusammengesetzten Konstruktionen, „*k*-Konstruktionen“, tritt - nach dem Schema aus 4.2.1 - zu dem einfachen Partitiv-Numerale „B_C-tel“ ein Γ-Numerale, etwa: „zwei drei Viertel Stunden“ (Γ-Numerale *zwei*, Partitiv-Numerale *drei Viertel*; Schreibvariante: „2 $\frac{3}{4}$ Stunden“).

Einfache konkrete Partitiva-Konstruktionen wie unter (7a) und (8a) treten jedoch auch selbst wieder in Anzahlangaben auf: Nominalkonstruktionen wie die unter (7) und (8) können reguläre Kombinationen mit Kardinalia eingehen; dies gilt nicht nur für die (b)-, sondern auch für die (a)-Beispiele:

(7a´) zwei dreiviertel Stunden (Schreibvariante: zwei Dreiviertelstunden);
(7b´) zwei schöne Stunden; zwei knappe Stunden.

(8a´) zwei dreiviertel lange Ärmel (Schreibvariante: zwei dreiviertel-lange Ärmel);
(8b´) zwei ziemlich lange Ärmel; zwei 80 cm lange Ärmel.

Die Anzahlangaben in (7a´) und (8a´) haben die Form „A_B_C-tel_(Adj)_Nom“; sie besitzen daher große Ähnlichkeit mit den erwähnten *k*-Konstruktionen der Form „A_B_C-tel_Nom“ (*zwei drei Viertel Stunden*). In verbalsprachlichen Kontexten können Angaben wie „zwei Dreiviertelstunden“ / „zwei drei Viertel Stunden“ infolgedessen sowohl als *k*-Konstruktion als auch als Anzahlangabe verstanden werden.[9]

Anders als in *k*-Konstruktionen bestehen in Anzahlangaben mit Partitiva multiplikative Zusammenhänge zwischen dem Kardinale „A“ (*zwei*) und dem Partitiv-Numerale „B_C-tel“ (*dreiviertel*); *A_B_C-tel_Nom* entspricht *A mal ein B_C-tel Nom* („Nom“ ist ein Nomen, etwa *Stunde*; analog für Adjektivkonstruktionen): Zwei Dreiviertelstunden sind

---

[9] Wie einer der Gutachter feststellt, zeichnen sich die beiden Konstruktionstypen in der gesprochenen Sprache durch eine unterschiedliche Akzentverteilung aus (Dies weist auf unterschiedliche syntaktische Strukturen hin: Während in *k*-Konstruktionen ein Element wie *zwei drei Viertel* eine Konstituente bildet, zu der das Nomen *Stunden* tritt, bildet in Anzahlangaben zunächst das Partitivum *drei viertel* eine Konstituente mit dem Nomen, die dann mit dem Kardinale *drei* verknüpft wird). Die Übereinstimmungen zwischen den beiden Konstruktionstypen gehen jedoch so weit, daß sie eine *kritische Ähnlichkeit* etablieren, die zur Übertragung der Interpretation von einem Kontext auf den anderen führt (vgl. die Diskussion in 5.1 unten).

zwei Mal so viel wie eine Dreiviertelstunde, zwei dreiviertel-lange Ärmel sind zusammen doppelt so lang wie ein dreiviertel-langer Ärmel.

Die große Ähnlichkeit der beiden Konstruktionstypen kann dazu führen, daß diese Zusammenhänge auch für *k*-Konstruktionen angenommen werden: Die Auffassung von „B_C-tel“ als Attribut in Nominal- (oder Adjektiv-) Konstruktionen wird von Anzahlangaben (*zwei Dreiviertelstunden*) auf *k*-Konstruktionen der Form „A_B_C-tel_Nom“ (*zwei drei Viertel Stunden*) übertragen; diese werden dementsprechend nicht additiv ($2 + \frac{3}{4}$), sondern multiplikativ ($2 \cdot \frac{3}{4}$) interpretiert: „A_B_C-tel_Nom“ wird verstanden als „A mal ein B_C-tel_Nom“.

Die folgende Aufstellung faßt die Charakteristika der beiden Konstruktionstypen zusammen:

***k*-Konstruktionen**

- Bsp.: „zwei drei Viertel Stunden“ (Schreibvariante: „$2\frac{3}{4}$ Stunden“)
- Schema: „A_B_C-tel_Nom“;
  - „A_B_C-tel“ („zwei drei Viertel“) ist eine zusammengesetzte Partitiva-Konstruktion:
    - „A“ („zwei“) ist ein Γ-Numerale, das eine ganze Zahl γ bezeichnet;
    - „B_C-tel“ („drei Viertel“) ist ein Partitiv-Numerale, das eine Bruchzahl θ bezeichnet;
    - θ wird mit γ additiv verknüpft: „A_B_C-tel“ steht für $\theta + \gamma$ (etwa: $2 + \frac{3}{4}$);
  - „Nom“ ist eine Nominalkonstruktion, die eine Menge μ („Stunden“) bezeichnet;
  - *μ wird durch $\theta + \gamma$ quantifiziert:*

    „Wie viele Stunden? - Zwei drei Viertel.“.

Anzahlangaben mit (konkreten) einfachen Partitiva-Konstruktionen

- Bsp.: „zwei dreiviertel Stunden“; „zwei dreiviertel lange Ärmel“
  (Schreibvarianten: „zwei Dreiviertelstunden“; „zwei dreiviertel-lange Ärmel“)
- Schema: „A_B_C-tel_(Adj)_Nom“;
  - „A“ („zwei“) ist ein Kardinale, das sich auf eine Quantität α bezieht;
  - „B_C-tel_(Adj)_Nom“ ist eine Nominalkonstruktion, die eine Menge μ bezeichnet („dreiviertel Stunden; dreiviertel lange Ärmel“):
    - „Nom“ ist ein Nomen („Stunde“; „Ärmel“), „Adj“ ein Adjektiv („lang“);
    - „B_C-tel“ ist ein Partitiv-Numerale („dreiviertel“);
    - „B_C-tel_Adj“ („dreiviertel lang“) bzw. „B_C-tel_Nom“ („dreiviertel Stunde“) ist eine konkrete Partitiva-Konstruktion;
  - *μ wird durch α quantifiziert:*

    „Wie viele dreiviertel Stunden? - Zwei.“.

Da die Konzepte ganzer Zahlen und Bruchzahlen sich durch Abstraktion von konkreten Anzahlen und Bruchteilen entwickeln,[10] wird die multiplikative Interpretation konkreter Partitiva-Konstruktionen mitunter auf abstrakte zusammengesetzte Konstruktionen der Form „A_B_C-tel“ (*zwei drei Viertel*) ausgedehnt; „A_B_C-tel“ wird dann nicht in konventioneller Weise als „A *und* B_C-tel“ verstanden, sondern als „A *mal* ein B_C-tel“.

4.3 Fazit: Parallelen mit Anzahlangaben als Ursache abweichender Interpretationen

Auf der Basis der vorangegangenen Untersuchung läßt sich nun festhalten:

- *a*-Konstruktionen wie „sieben drei Viertel“ gleichen in ihrer Struktur natürlichsprachlichen Anzahlangaben wie „sieben Zwerge“ (≙ „sieben mal ein Zwerg“), nicht aber additiven (bzw. konjunktionalen) Konstruktionen wie „sieben Zwerge und drei Männer“ oder „Hinz und Kunz“. Insbesondere verhält sich das Γ-Numerale in *a*-Konstruktionen („sieben“ in „sieben drei Viertel“) ähnlich wie das Kardinale in Anzahlangaben („sieben“ in „sieben Zwerge“).
- *k*-Konstruktionen wie „zwei drei Viertel Stunden“ (≙ „zwei plus drei Viertel Stunden“) gleichen (multiplikativen) Anzahlangaben wie „zwei Dreiviertelstunden“ (≙ „zwei mal eine Dreiviertelstunde“), nicht aber additiven Konstruktionen wie „zwei ganze und eine dreiviertel Stunde“.

Diese Zusammenhänge können die Ursache für eine multiplikative statt additive Auffassung zusammengesetzter Bruchzahlbezeichnungen sein; die engen Parallelen zu Anzahlangaben führen in diesen Fällen vermutlich zur Übertragung der multiplikativen Interpretation auf Partitiva-Konstruktionen. Eine solche Übertragung wird noch dadurch begünstigt, daß den Schülern und Schülerinnen die multiplikative Interpretation für Anzahlangaben aus nicht-mathematischen Kontexten wohlvertraut ist, während das noch neue Gebiet der Bruchrechnung sie zu dem Zeitpunkt, zu dem das Phänomen beobachtet wurde, sie mitunter vor größere Schwierigkeiten stellt.[11] In zusammengesetzten Kon-

---

[10] Vgl. Hughes (1984); Hurford (1987) für die Entwicklung der Konzepte ganzer Zahlen und Anzahlen; Saenz-Ludlow (1990) sowie die Beiträge in Carpenter et al. (1993) zu Bruchzahlkonzepten. Nach Resnick (1989), Resnick/Singer (1993) basieren Bruchkonzepte auf frühen *protoquantitative schemas*, die relevante Aspekte von Bruchteilen repräsentieren, ohne daß Bezug auf Zahlen genommen werden müßte; diese werden später mit formalem Zahlwissen verbunden. Zur Definition numerischer Konzepte, insbesondere zur formalen Herleitung von Konzepten ganzer Zahlen und Dezimalzahlen aus der Abstraktion von Anzahlkonzepten vgl. H. Wiese (1995b, 1997).

[11] Dies gilt in besonderem Maße für den hier diskutierten Bereich der zusammengesetzten Bruchzahlbezeichnungen. So stellen etwa Daubert/Gerster (1983) auf der Basis zahlreicher diagnostischer Tests zur Bruchrechnung unter anderem fest: „Die gemischte Schreibweise für unechte Brüche (z.B. $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$) wirkt bei der Entstehung zahlreicher Fehlermuster mit.“ (S.761); Padberg (1989) faßt als Ergebnis einer Untersuchung zur Bruchrechnung zusammen, daß die „Kombination von natürlicher Zahl und Bruch [...] generell bei *allen vier* Rechenoperationen *fehlerträchtiger* ist als der Standardfall (Bruch kombiniert mit Bruch).“ (S.118; zu ähnlichen Ergebnissen kommt auch Lörcher 1982). Dieses Phänomen kann unseres Erachtens zumindest teilweise auf das diskutierte Interpretationsproblem zurückgeführt werden. Verschiedene Daten, die Gerster/Grevsmühl (1983:657ff) anführen, lassen beispielsweise vermuten, daß den betreffenden Fehlerstrategien eine *multiplikative* Auffassung zusammengesetzter Bruchzahlbezeichnungen zugrundeliegt, etwa in Rechnungen wie „$2\frac{2}{3} = \frac{8}{6}$“ (S.657) oder „$2\frac{4}{15} = 2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$“ (S.659).

struktionen der Form „A_B_C-tel“ (*zwei drei Viertel*) verstehen Schüler(innen) „A“ (*zwei*) daher z.T. als Anzahlangabe zu „B_C-tel“ (*drei Viertel*); „A_B_C-tel“ wird als „A mal B_C-tel“ bzw. „A mal ein B_C-tel“ interpretiert.
Die hier entwickelten Thesen ermöglichen damit eine plausible Deutung der Befunde aus dem Bruchalbum: Bei einer solchen multiplikativen Auffassung zusammengesetzter Partitiva-Konstruktionen sind Paraphrasen genau der Art zu erwarten, wie sie in Abschnitt 3 zusammengefaßt wurden; „fünf einzwölftel“ steht dann z.B. für „fünf mal ein Zwölftel“ ($\triangleq \frac{5}{12}$); „zwei dreiviertel“ bzw. „2 $\frac{3}{4}$“ für „zwei mal drei Viertel“ ($\triangleq \frac{2\bullet 3}{4}$).
Die folgende Textaufgabe aus einem Bruchalbum, die von einer Schülerin zum Thema „$\frac{3}{4}$“ entworfen wurde, illustriert die Problematik noch einmal:

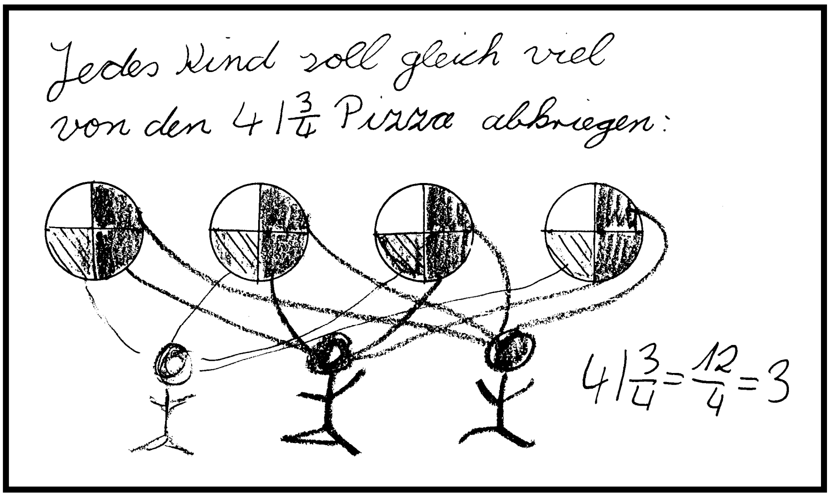

Abbildung 2: Textaufgabe aus einem Bruchalbum

Die Schülerin stand hier genau vor dem Problem, die multiplikative Interpretation („vier dreiviertel Pizzas“ / „vier Dreiviertel-Pizzas“) von der additiven („vier drei Viertel Pizzas“ / „4 $\frac{3}{4}$ Pizzas“) abzugrenzen. Sie fügte daher nachträglich einen senkrechten Strich zwischen „4“ und „$\frac{3}{4}$“, um durch diese Trennung der beiden Konstituenten die multiplikative „Anzahl“-Interpretation zu determinieren.
Aufschlußreich ist in diesem Zusammenhang der folgende Beleg aus einem Bruchalbum; der betreffende Schüler formulierte hier Überlegungen zu Brüchen, wobei die Auswahl der Brüche und die Art der Reflexion freigestellt war. Während bei der Ziffern-Darstellung additive und multiplikative Konstruktion bereits differenziert werden – „$\frac{2}{3}$“ vs. „$2\frac{1}{3}$“ –, wird der verbalsprachliche Ausdruck – nämlich die Partitiva-Konstruktion „zweieindrittel“ – noch als mehrdeutig aufgefaßt (Abbildung 3 unten).

Das Problem der Differenzierung additiver und multiplikativer Konstruktionen, das hier noch einmal deutlich wurde, ist Gegenstand des folgenden Abschnitts; wir werden in 5.1 und 5.2 einige Forderungen, die sich hieraus für den Mathematikunterricht ergeben, erörtern und Anregungen zu ihrer Umsetzung skizzieren.

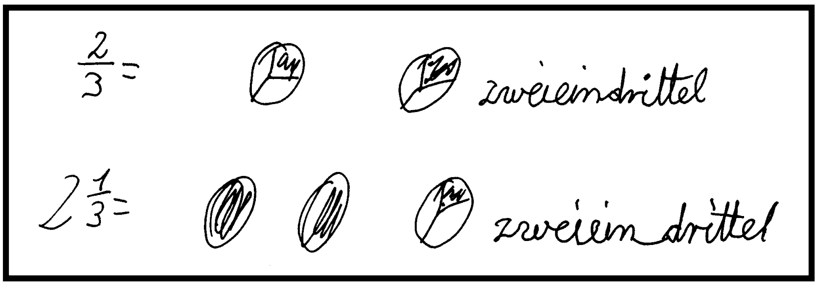

Abbildung 3: Reflexion aus einem Bruchalbum

5 Anregungen für den Mathematikunterricht

5.1 Charakterisierung des Phänomens aus lernpsychologischer Perspektive

Als Ursache für das Auftreten abweichender Paraphrasen, wie sie im Bruchalbum deutlich wurden, konnte somit eine nicht-konventionelle Interpretation von Partitiva-Konstruktionen identifiziert werden, die vermutlich aus der Übertragung von einer bestimmten Klasse von Anzahlangaben herrührt, die im Deutschen enge Parallelen zu zusammengesetzten Partitiva-Konstruktionen (*a*- und *k*-Konstruktionen) aufweisen.
Solche Phänomene sind aus dem Bereich des Spracherwerbs bekannt; sie werden dort als „negativer Transfer“ bezeichnet: die Übertragung sprachlichen Wissens in neue Kontexte, die dort zur Abweichung von der zielsprachlichen Norm führt.[12] Eine solche Abweichung als Ergebnis negativen Transfers bezeichnet man als „Interferenz“. [13] Eine Quelle für das Auftreten negativen Transfers ist insbesondere die *kritische Ähnlichkeit* zwischen den jeweiligen sprachlichen Kontexten, wie sie in den vorangegangenen Abschnitten auch für Partitiva- und Anzahlkonstruktionen festgestellt wurde.
Generell ist Transfer in der pädagogischen Psychologie definiert als „Prozeß, in dem [...] eine Umsetzung und Anwendung von Gelerntem in ähnlichen oder neuen Situationen erfolgt“ (Schiefele/Krapp 1981:384). Es handelt sich hierbei um eine universelle kognitive Strategie, die die Voraussetzung für die Anwendung einmal erworbenen Wissens in neuen Kontexten bildet. Positiver Transfer als Anwendung des Gelernten unter neuen Bedingungen wird daher aus pädagogischer Sicht angestrebt.
Führt Transfer dagegen - wie im Fall von Anzahlangaben und zusammengesetzten Partitiva-Konstruktionen - zu Interferenzen, so besteht die Aufgabe der Lernenden im *Diskriminationslernen*, das die Differenzierung zwischen den ähnlichen Elementen zum Ziel hat. Ziel des Unterrichts muß es im vorliegenden Fall daher sein, zusammengesetzte Bruchzahlbezeichnungen als eigenen, *additiven* Konstruktionstyp zu etablieren und von Anzahlangaben deutlich abzugrenzen.[14] Einige Vorschläge zur Unterstützung des Lern-

[12] Vgl. hierzu exemplarisch Juhász (1970); Zobl (1980).
[13] Vgl. H. Wiese (1994) für eine Diskussion von Transfer und Interferenz aus psycholinguistischer und lernpsychologischer Sicht.
[14] Vgl. in diesem Zusammenhang auch die Diskussion in Cohors-Fresenborg (1996) zur Rolle des Mathematikunterrichts bei der Formalisierung und Präzisierung umgangssprachlich und vortheoretisch codierten intuitiven Wissens. Vgl. Hasemann (1997) zu den Schwierigkeiten, denen Schüler(innen) bei der Formalisierung und Symbolisierung bei Einführung der Bruchrechnung gegenüber stehen.

prozesses werden im folgenden Abschnitt exemplarisch vorgestellt; wir greifen hierbei auf das Konzept der sog. „Mathe-Spiele“ zurück und werden uns dabei insbesondere auf die *Freiarbeit* im Mathematikunterricht konzentrieren.

5.2 Möglichkeiten zur Unterstützung des Lernprozesses

5.2.1 Freiarbeit bei der Behandlung der Bruchrechnung; das Konzept der Mathe-Spiele

Ein wesentliches Merkmal der Freiarbeit ist die *individuelle Differenzierung*: Durch die eigenständige Auswahl aus dem angebotenen Lehrmaterial können die Schüler(innen) einen Lernplan gestalten, der speziell auf ihre Bedürfnisse zugeschnitten ist. Sie haben so die Möglichkeit, sich unabhängig vom Lernniveau ihrer Mitschüler(innen) intensiv mit den Gebieten zu beschäftigen, die ihnen noch Schwierigkeiten bereiten. Diese Unterrichtsform bietet sich deshalb besonders als eine Maßnahme des „lückenschließenden Lehrens“ an, wie es etwa Daubert /Gerster (1983:758) fordern, wenn beim Rechnen mit Brüchen unterschiedliche Lerndefizite innerhalb der Gruppe festgestellt werden.
Ein solcher Fall liegt bei der Interpretation zusammengesetzter Partitiva-Konstruktionen vor: Das oben besprochene Interpretationsproblem läßt sich bei einigen Schülerinnen und Schülern deutlich und regelmäßig konstatieren, während andere mit diesem Bereich offensichtlich kaum Schwierigkeiten haben. Unsere Vorschläge zur Unterstützung des Lernprozesses sind daher speziell auf diese Unterrichtsform zugeschnitten.

Wir werden hierzu im folgenden verschiedene „Mathe-Spiele“ vorstellen, die im Rahmen der Freiarbeit eingesetzt werden können, um die zielsprachlich konventionelle Interpretation von Partititva-Konstruktionen zu üben. Solche „Mathe-Spiele“ sind bereits in früheren Arbeiten ausführlich besprochen worden;[15] ihr Einsatz wird seit etlichen Jahren im Unterricht erprobt. Es handelt sich allgemein um Übungsformen mit zumeist mehreren Teilnehmer(innen), in denen Aufgaben zu bewältigen sind, die verschiedene Bereiche des mathematischen Verständnisses fördern. Im Rahmen der Freiarbeit können die Schüler(innen) zwischen unterschiedlichen Spielen auswählen, die jeweils bestimmte Problemfelder fokussieren und sie so bei ihrem individuellen Lernprozeß unterstützen.
Ein wesentlicher Vorteil ist der Spielcharakter der angebotenen Materialien, der nicht nur in besonderem Maße zur Motivation der Schüler(innen) beiträgt, sondern darüber hinaus die Partner- und Gruppenarbeit fördert. Mathe-Spiele helfen damit nicht zuletzt auch, Hemmungen und Vorbehalte gegenüber dem Lerngegenstand oder dem Mathematikunterricht generell zu vermeiden bzw. abzubauen.
Die freie Auswahlsmöglichkeit führt dabei keinesfalls dazu, daß die Schüler(innen) stets nur die Aufgaben üben, die sie bereits beherrschen. Beim Einsatz im Unterricht konnte vielmehr festgestellt werden, daß Lernende sich im allgemeinen gerade mit den Bereichen beschäftigen, die sie noch vor einige Schwierigkeiten stellen, ohne sie dabei jedoch zu überfordern. Mathe-Spiele haben sich daher als geeignete Unterstützung im Fall spezifischer, individuell unterschiedlich ausgeprägter Lernprobleme erwiesen.
Für den Bereich der Partitiva-Konstruktionen haben wir einige Spiele entwickelt, die sich besonders auf den Zusammenhang zwischen sprachlichem und konzeptuellem Wis-

---

[15] Etwa I. Wiese (1996b); zum Einsatz von Spielen im Mathematikunterricht vgl. auch exemplarisch Floer (1992); Oerter (1996); Radatz/Schipper (1983).

sen, der Verknüpfung von Zahlwörtern und Bruchzahlen, konzentrieren und damit zur Bewältigung des konstatierten Interpretationsproblems beitragen können. Ein spezifisches Charakteristikum dieser Spiele ist daher die Thematisierung unterschiedlicher *Bezeichnungen* von Bruchzahlen; sie fokussieren primär den *sprachlich-konzeptuellen Bereich*. Sie sind als Ergänzung zu anderen Mathe-Spielen gedacht, die nicht so sehr auf die Bezeichnungsproblematik, sondern eher auf das anschauliche Verständnis der Bruchzahlen selbst abheben. Zur Illustration werden in den folgenden Abschnitten zwei der Spiele exemplarisch vorgestellt.

5.2.2 Mathe-Spiele für den Bereich der Partitiva-Konstruktionen

Das Hantieren mit konkreten Bruchteilen - etwa Teilen von Kreisen -, das Vergleichen und Zusammenlegen dieser Teile fällt Lernenden wesentlich leichter als das Umgehen mit Bruchzahlbezeichnungen (Ziffern oder Partitiv-Numeralia). Die Spiele, die wir im folgenden vorstellen, zielen deshalb darauf ab, die Schüler(innen) zu Handlungen anzuregen, in deren Verlauf sie Repräsentanten von Brüchen und unterschiedliche Paraphrasen und graphische Darstellungen zueinander in Bezug setzen müssen, um sie so allmählich an die abstraktere Ebene der Bruchzahlbezeichnungen - genauer: der oben diskutierten „*a*-Konstruktionen“ - heranzuführen.
Auf der Grundlage vielfältiger Erfahrungen kann so ein *angemessener Umgang mit Bruchzahlen und Bruchzahlbezeichnungen* erlernt werden. Dies soll insbesondere die Bewältigung des konstatierten Interpretationsproblems unterstützen; nach den Erkenntnissen der vorangegangenen Abschnitte liegt ein Schwerpunkt auf der deutlichen Kennzeichnung des *additiven* - und nicht multiplikativen - Charakters von Partitiva-Konstruktionen (und damit auf ihrer Abgrenzung von Anzahlbezeichnungen) sowie auf der *Korrelation der verschiedenen Bezeichnungen* für Bruchzahlen.

I. Dino-Spiel

Im Rahmen dieses Spieles werden Bruchzahlbezeichnungen verschiedenen Formats über die Repräsentantenebene zueinander in Bezug gesetzt. Bruchzahlen, die durch unterschiedliche verbalsprachliche Bezeichnungen und mithilfe von Ziffern (als echter oder unechter Bruch) benannt sind, werden zunächst mit konkreten Bruchteilen repräsentiert und auf dieser Basis dann anderen, äquivalenten Bezeichnungen zugeordnet. Die Repräsentanten schlagen eine Brücke zwischen den unterschiedlichen Bezeichnungsformaten und unterstützen beim Umrechnen; das Hantieren mit konkreten Bruchteilen soll dabei die betreffende Bruchzahl be*greif*bar machen und so die Verknüpfung der zugrundeliegenden Konzepte untermauern.

Material:

- sechs Holz-Quadrate,
- 30 dreieckige Viertel-Quadrate aus Moosgummi (zum Auslegen der Quadrate; Größe zu den Quadraten passend),
- zehn blaue Aufgabenkarten, auf denen eine Bruchzahl jeweils sowohl verbalsprachlich (als Partitiva-Konstruktion) als auch mithilfe von Ziffern benannt ist,
- zehn grüne Ergebniskarten, auf denen die betreffenden Bruchzahlen noch einmal in anderer, jeweils äquivalenter Form mithilfe von Ziffern bezeichnet sind (etwa: „$\frac{5}{4}$“

vs. „$1\frac{1}{4}$“) und graphisch illustriert werden (durch Abbildungen von Bruch-Repräsentanten).

Beispiele für Aufgabenkarten (in der Abbildung grau) und Ergebniskarten (weiß):

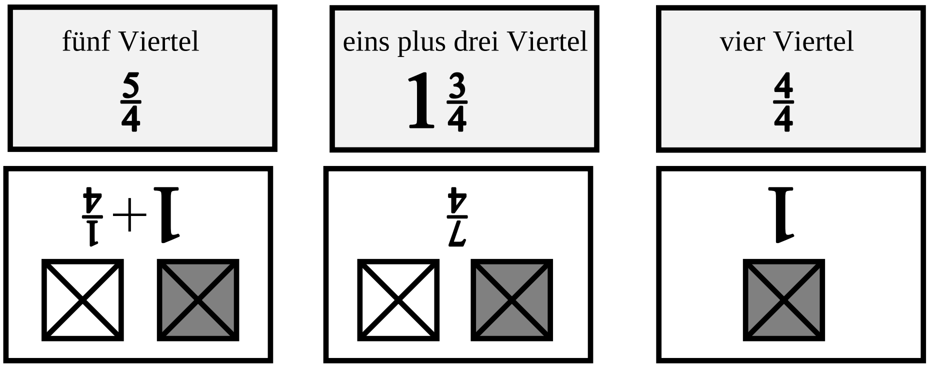

Abbildung 4: Aufgaben- und Ergebniskarten zum „Dino-Spiel“

Spielverlauf:
Eine Aufgabenkarte mit Bruchzahlbezeichnungen wird gezogen; der betreffende Bruch wird mit den Moosgummi-Vierteln repräsentiert. Dann muß die passende Ergebniskarte (d.h. diejenige, auf der dieselbe Bruchzahl dargestellt ist) an die Aufgabenkarte angelegt werden.

Kontrollmöglichkeit:
Auf den Rückseiten der passenden Karten ist, wenn sie richtig zusammengesetzt sind, jeweils das Bild eines Dinosauriers zu sehen.

II. Sechseck-Puzzle
Auch in diesem Spiel werden unterschiedliche Bruchzahlbezeichnungen zueinander in Bezug gesetzt. Der Fokus liegt hier jedoch stärker auf der Ziffern-Schreibweise; verbalsprachliche Bezeichnungen von Bruchzahlen und graphische Illustrationen treten seltener auf. Das Spiel eignet sich daher für etwas fortgeschrittenere Schüler(innen).

Die Abgrenzung multiplikativer und additiver Konstruktionen wird anhand ähnlicher, äquivalenter und nicht-äquivalenter, Bezeichnungen (etwa „$2\ \frac{3}{4}$“ und „$2 + \frac{3}{4}$“ versus „$2 \cdot \frac{3}{4}$“) geübt und gefestigt. Um den Lernprozeß zu unterstützen, werden unterschiedliche Bezeichnungen in Ziffernschreibweise jeweils mit einer graphischen Illustration oder einer verbalsprachlichen Partitiva-Konstruktion zusammengefaßt. Als Hilfe stehen Kreisteile zur Verfügung, mit denen die Brüche veranschaulicht werden können.

Material:
- 14 sechseckige Karten mit unterschiedlichen Bruchzahlbezeichnungen sowie graphischen Illustrationen verschiedener Bruchteile;
- je 15 Drittel-, Viertel-, Fünftel-, Sechstel- und Halbkreise (Karton).

Spielverlauf:
Die Sechsecke sollen so zusammengesetzt werden, daß immer Felder mit demselben Wert (d.h. mit Bezeichnungen bzw. graphischen Illustrationen derselben Bruchzahl) zusammenstoßen. Als Ergebnis erscheint der Schriftzug „MATHE-ASS“ auf den äußeren Feldern:

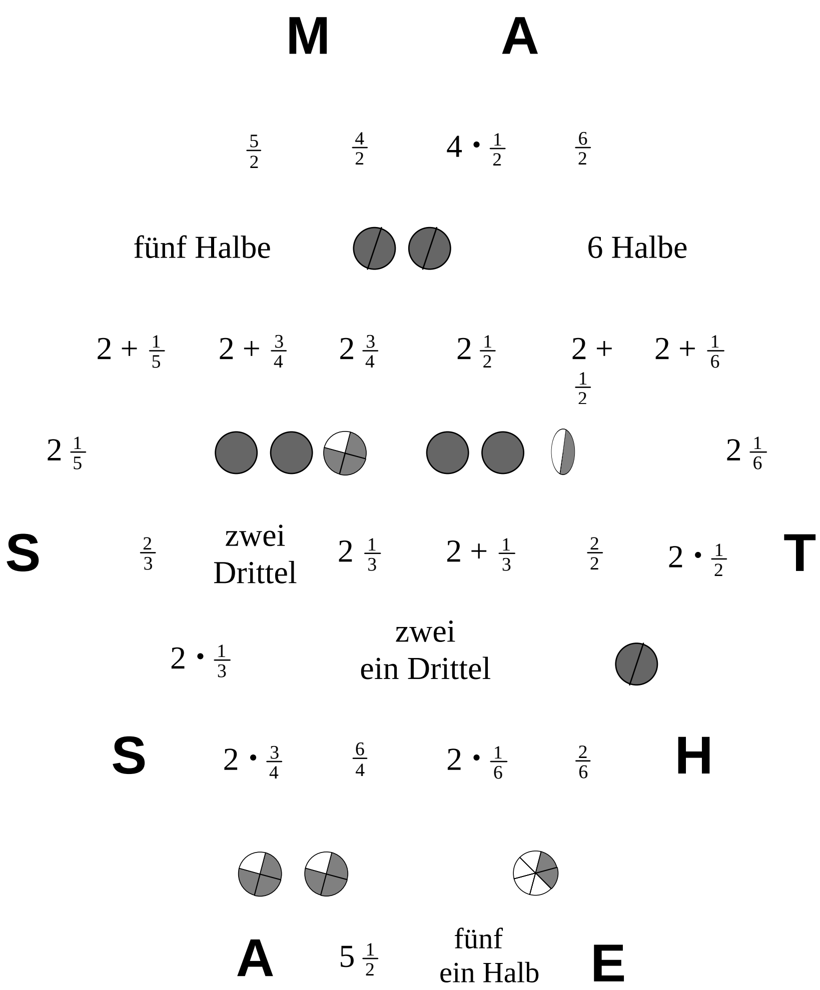

Abbildung 5: Sechseck-Puzzle

6 Fazit und Ausblick

Die vorliegende Untersuchung bezog sich auf ein Phänomen, das durch den Einsatz des „Bruchalbums“ deutlich wurde, in dem die Schüler(innen) im Rahmen des Mathematikunterrichts ihre Reflexionen zu ausgewählten Brüchen festhalten: An diesen Eigenproduktionen der Schüler(innen) wurde deutlich, daß Partitiva-Konstruktionen des Typs „A_B_C-tel“ (bzw. in Ziffernschreibweise: $A\frac{B}{C}$) in Abweichung vom konventionellen Gebrauch z.T. *multiplikativ statt additiv* aufgefaßt werden; die Schüler(innen) verstehen beispielsweise eine Konstruktion wie „zwei drei Viertel“ ($2\ \frac{3}{4}$) als „zwei mal drei Viertel“ ($2 \cdot \frac{3}{4}$) statt - konventionell - als „zwei plus drei Viertel“ ($2 + \frac{3}{4}$).

Nach unserer Analyse betrifft dieses Phänomen weniger das Bruchzahlverständnis selbst, sondern liegt eher auf der Ebene des *sprachlichen Ausdrucks*. Die Schwierigkeiten ergeben sich bei der Zuordnung von Bruchzahlen und Zahlwörtern, sie lassen sich also letztlich als *Interpretationsproblem* für Partitiva-Konstruktionen charakterisieren.

Es handelt sich hier um ein Phänomen an der Schnittstelle zwischen Didaktik der Mathematik, kognitiver Psychologie und Linguistik. Durch die interdisziplinäre Herangehensweise konnte gezeigt werden, daß Partitiva-Konstruktionen im Deutschen *enge Parallelen zu Anzahlangaben* aufweisen, die zu negativem Transfer führen können und dann eine multiplikative Interpretation auslösen.

Wir haben daher für zur Ergänzung des Mathematikunterrichts bei der Einführung der Bruchrechnung verschiedene „Mathe-Spiele“ entwickelt, die die Schüler(innen) im Rahmen von freiem Arbeiten dabei unterstützen sollen, Partitiva-Konstruktionen als separaten, additiven Konstruktionstyp zu erkennen.

Für weitere Forschungen wäre es einerseits interessant, die verschiedenen Stufen des Lernprozesses bei Partitiva-Konstruktionen im einzelnen zu analysieren. Andererseits könnten kontrastiv zum Deutschen entsprechende Daten in Sprachen wie etwa dem *Englischen* untersucht werden, in denen zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen nicht die diskutierten Parallelen zu multiplikativen Konstruktionen aufweisen.

Das Pendant zu einer deutschen Konstruktion wie „eine Dreiviertelstunde“ wäre beispielsweise im Englischen „three quarters of an hour“ (wörtlich: „drei Viertel von einer Stunde“); entsprechende Anzahlangaben mit Kardinalia ab „zwei“, wie „zwei Dreiviertelstunden“, besitzen im Englischen kein unmittelbares Pendant, sondern werden umschrieben. Zusammengesetzte Partitiva-Konstruktionen sind dagegen deutlich additiv gekennzeichnet, vgl.: „two and three quarters of an hour“ (wörtlich: „zwei und drei Viertel einer Stunde“; deutsch: „zwei drei Viertel Stunden“). Unser Ansatz sagt vorher, daß in diesem Fall Interferenzen wie die hier besprochenen nicht auftreten sollten; das Interpretationsproblem dürfte damit nicht so groß sein wie für deutsche Schüler(innen).

Ein weiteres Desiderat ist der kontrollierte Einsatz der diskutierten Mathe-Spiele im Unterricht in Form einer Langzeitstudie, die den Effekt auf das Interpretationsproblem ermittelt. Eine solche Studie ist zur Zeit in Vorbereitung.

Literaturnachweis

Campbell, Jamie I. D. / Clark, James M. (1992): Cognitive Number Processing: An Encoding-Complex Perspective. In: Campbell, J. I. D. (Hg.): The Nature and Origins of Mathematical Skills. Amsterdam. [= Advances in Psychology, 91]. S.457-491.

Carpenter, Thomas P. / Fennema, Elizabeth / Romberg, Thomas A. (Hg.) (1993): Rational Numbers: An Integration of Research. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cohors-Fresenborg, Elmar (1996): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Eine neue Sicht der Schulmathematik. In: Kadunz, G. et al. (Hg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 23. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. S.85-90.

Daubert, Kurt / Gerster, Hans-Dieter (1983): Differenzierende Maßnahmen zur Vorbeugung und zur Behebung von Schülerfehlern beim Rechnen mit Brüchen. In: Pädagogische Welt 1983/37;12: S.758-763.

Floer, Jürgen (1992): Im Einmaleins-Land, Beispiele und Erfahrungen zu Spielen im Mathematikunterricht. In: Die Grundschulzeitschrift 1992/52: S.10-13.

Geering, P. (1994): Das „Erste Zahlenalbum“, ein Mathematik-Journal für Schulanfänger. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1994: S.112-115.

Gerster, Hans-Dieter / Grevsmühl, Ulrich (1983): Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen. In: Pädagogische Welt 1983/37;11: S.654-660.

Griesel, Heinz (1981): Der quasikardinale Aspekt in der Bruchrechnung. In: Der Mathematikunterricht 1981/27; 4: S.87-95.

Hasemann, Klaus (1997): Verständnis und Rechenfertigkeiten. Ist die Bruchrechung angesichts von Computeralgebrasystemen noch zeitgemäß? In: Mathematik in der Schule 1997/35;1: S.7-18.

Heink, G. / Reitberger, W. (1990): Untersuchungen zum Verständnis des Bruchzahlbegriffs. Bad Salzdetfurth: Verlag franzbecker.

Hughes, M. (1984): Learning about Number. In: ESRC Newsletter 1984/52: S.9-11.

Hurford, James R. (1987): Language and Number. The Emergence of a Cognitive System. Oxford.

Juhász, Janós (1970): Probleme der Interferenz. München: Hueber.

Lörcher, Gustav Adolf (1982): Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen. In: Pädagogische Welt 1982/36;3: S.172-180.

McCloskey, M. / Sokol, J. M. / Goodman, Roberta A. (1986): Cognitive Processes in Verbal-Number Production: Inferences from Brain Damaged Subjects. In: Journal of Experimental Psychology 1986/115: S.307-330.

Oerter, Rolf (1996): Spielendes Lernen, gibt es das? In: Praxis Schule 5-10, 1996/4: S.6-9.

Padberg, Friedhelm (1989): Didaktik der Bruchrechnung. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Radatz, Hendrik / Schipper, Wilhelm (1983): Spielen im Mathematikunterricht. In: dies.: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel. S.164-189.

Resnick, Lauren B. (1989): Developing Mathematical Knowledge. Special Issue: Children and Their Development: Knowledge Base, Research Agenda, and Social Policy Application. In: American Psychologist 1989/44;2: S.162-169.

Resnick, Lauren B. / Singer, Janice A. (1993): Protoquantitive Origins of Ratio Reasoning. In: Carpenter et al. (Hg.) (1993): S.107-130.

Saenz-Ludlow, Adalira (1990): Children´s Fraction Schemes: An Elaboration of Their Number Sequence. Diss., University of Georgia, Athens.

Schiefele, Hans / Krapp, Andreas (1981): Handlexikon zur Pädagogischen Psychologie. München: Ehrenwirth.

Streefland, Leen (1986): Über die $\mathbb{N}$-Verführer in der Bruchrechnung und Maßnahmen zu ihrer Bekämpfung. In: Der Mathematikunterricht 1986/32;3: S.45-52.

Wiese, Heike (1994): Integration des Transfers in eine Theorie des Zweitspracherwerbs. In: Info-DaF 1994/21;4: S.397-408.

Wiese, Heike (1995a): Analyse natürlichsprachlicher Numeralkonstruktionen. In: Max, Ingolf / Stelzner, Werner (Hg.): Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium Jena 1993. Berlin, New York: de Gruyter. S.220-232.

Wiese, Heike (1995b): Semantische und konzeptuelle Strukturen von Numeralkonstruktionen. In: Zeitschrift für Sprachwissenschaft 1995/14;2: S.181-235.
Wiese, Heike (1997): Zahl und Numerale. Eine Untersuchung zur Korrelation konzeptueller und sprachlicher Konstruktionen. Diss., Humboldt-Universität. Berlin: Akademie-Verlag.
Wiese, Ilse (1995): „Mein erstes Bruchalbum". In: mathematik lehren 1995/73: S.17-19.
Wiese, Ilse (1996a): Ein „Bruchalbum" für Schüler der Klasse 6. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1996: S.468-471.
Wiese, Ilse (1996b): Bruchrechnen: Freies Arbeiten - gezieltes Üben. In: mathematik lehren 1996/79: S.18-22.
Zobl, H. (1980): The Formal and Developmental Selectivity of L1 Influence on L2 Acquisition. In: Language Learning 1980/30;1: S.43-57.

Anschriften der Autorinnen:

Heike Wiese
Institut für deutsche Sprache und Linguistik
der Humboldt-Universität zu Berlin
[Sitz: Schützenstr.21]
D-10099 Berlin
Tel. +49-30-20196 721
Fax +49-30-20196 729
heike.wiese@rz.hu-berlin.de

Ilse Wiese
Bert-Brecht-Schule
Immanuel-Kant-Str.44
D-37083 Göttingen
Tel. +49-5551-912 091
Fax +49-5551-912 611
ilse.wiese@t-online.de