in:
Max, Ingolf / Stelzner, Werner (Hg.): Akten des Frege-Kolloquiums 1993: "100 Jahre GRUNDGESETZE DER ARITHMETIK". Berlin, New York: de Gruyter. [In: Meggle, G. et al. (Hg.): Perspectives in Analytical Philosophy.]

Analyse natürlichsprachlicher Numeralkonstruktionen[1]

Heike Wiese

0. Einleitung

Die Bezeichnung von Anzahlen durch Numeralia und andere sprachliche Mittel ist ein universelles Charakteristikum natürlicher Sprachen, ein Sachverhalt, der bereits auf die große Bedeutung des Zahlkonzepts für das menschliche Denken hinweist:[2] Der Begriff der Zahl, der in der Auffassung diskreter Objekte wurzelt, bildet nach neueren kognitionswissenschaftlichen Ansätzen neben dem Begriff des Raumes - der kontinuierlichen Einheit - das grundlegende Mittel zur Erfassung der Wirklichkeit.[3]

Der Status von Zahlen wird primär im Rahmen der Grundlegung der Mathematik diskutiert. Die verschiedenen Ansätze lassen sich dabei grob in zwei Richtungen einteilen:

Nach der auf Frege (1884;1893) zurückgehenden Sichtweise enthält eine Zahlangabe eine Aussage von einem Begriff; Zahlen seien als Mengen[4] gleichzahliger Begriffe, d.h. solcher, bei denen eine eineindeutige Relation zwischen den unter sie fallenden Gegenständen bestehe, anzusehen.

Dagegen besagt die von Dedekind (1887) vertretene relationale Auffassung, die Menge N der natürlichen Zahlen als Ganzes stelle ein einfach unendliches, durch eine ähnliche Abbildung geordnetes System von Elementen dar, von denen nur ihre Unterscheidbarkeit und die Reihenfolgebeziehung, in der sie zueinander stehen, erfaßt werde.

Wiewohl jede Analyse, nach der die Menge der natürlichen Zahlen als Progression aufzufassen ist, den Begriff der natürlichen Zahl für den Bereich der Mathematik korrekt zu

[1] Diese Arbeit wurde unter anderem durch ein Stipendium der Graduiertenförderung der Georg-August-Universität Göttingen ermöglicht.

[2] So bezeichnet schon Frege (1884:21) "das Gebiet des Zählbaren [als] das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare", und folgert: "Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?"

[3] vgl. etwa Rucker (1987)

[4] Ich verwende hier und im folgenden die "Mengen"-Sprechweise als abkürzende Formulierung in Aussagen über Fregesche Begriffsumfänge.

erfassen vermag[5], und damit auch die beiden vorgestellten Zahlexplikationen dieser Anforderung gerecht werden, soll im folgenden der Frage nachgegangen werden, inwieweit sie darüberhinaus zur Analyse natürlichsprachlicher Anzahl- und Stellenwertangaben dienen können. Die hier durchgeführte Untersuchung gehört damit nicht in den Bereich der Grundlegung der Mathematik, ihr Ziel ist vielmehr die logische Darstellung von Zahlangaben im Kontext natürlichsprachlicher Aussagen. Philosophisch-mathematische Überlegungen zum Zahlstatus sollen dabei die Basis primär linguistischer Fragestellungen aus dem Gebiet der Numeralsemantik bilden.

Ausgangspunkt der Untersuchung ist Freges Definition der Anzahl in den "Grundgesetzen der Arithmetik"; im weiteren Verlauf werden dann auch Ergebnisse aus Dedekinds Überlegungen zum System N der natürlichen Zahlen einbezogen.

1. Freges Definition der Anzahl in den "Grundgesetzen der Arithmetik"

Die Definition, die Frege in den "Grundgesetzen der Arithmetik" [GgA] für eine Zahl - oder genauer: eine Anzahl[6] - *n* gibt, charakterisiert diese als Umfang des Begriffs "gleichzahlig dem Begriff F", wobei F so gewählt ist, daß n Gegenstände unter ihn fallen. Gleichzahligkeit ist dabei als eine Relation definiert, die genau dann zwischen zwei Begriffen vorliegt, wenn es möglich ist, die unter sie fallenden Gegenstände einander eineindeutig zuzuordnen. Zahlen werden demnach als Begriffsumfänge analysiert, d.h. nach Frege als Gegenstände; Zahlwörter sind somit Eigennamen für Mengen gleichzahliger Begriffe.

GgA I,§41/42 gibt dementsprechend eine Definition der Anzahl 0 als Umfang des Begriffs "gleichzahlig dem Begriff "sich selbst ungleich"" und der 1 als Anzahl des Begriffs "gleich 0", d.h. als Menge aller dem Begriff "gleich 0" gleichzahligen Begriffe. Hierauf aufbauend können alle folgenden Zahlen als Nachfolger der ihnen jeweils vorhergehenden definiert werden: Ist n eine endliche Anzahl, so ist n+1 nach Frege die Menge aller Begriffe, die dem Begriff "der mit n endenden Anzahlenreihe angehörend" gleichzahlig sind.[7] Der Ausgangspunkt für Freges Anzahlexplikation ist damit die oben vorgestellte Definition der 0. Der für diese Definition zentrale Begriff "sich selbst ungleich" ist dabei unabhängig von Überlegungen zum Zahlbegriff festgesetzt; er muß lediglich der Forderung genügen, ein rein logischer Begriff zu sein, der selbstwidersprüchlich ist, also keinen Gegenstand unter sich befaßt.

Vor dem Hintergrund dieser Definitionen besagt die Aussage, daß einem Begriff eine bestimmte Anzahl zukomme, demnach, daß die unter ihn fallenden Gegenstände eineindeutig den unter einen angegebenen Begriff fallenden zugeordnet werden können, wobei dieser per definitionem so gewählt ist, daß seine Anzahl auf der 0 und deren Vermehrung um eins aufbaut.

---

5 vgl. Quine (1960,§54): "The condition upon all acceptable explications of number (that is, of the natural numbers 0,1,2,...) [...]: any *progression* - i.e. any infinite series each of whose members has only finitely many precursors - will do nicely."

6 Frege unterscheidet die natürlichen Zahlen als "Anzahlen" von anderen Zahlen.

7 vgl. GgA I,§46

2. Logische Darstellung von Numeralkonstruktionen: Schnittmengen und Aufzählungen

In modernen Ansätzen, die auf Freges Analyse zurückgehen, wird eine Zahl n als Menge aller n-elementigen Mengen angesehen (etwa Bartsch (1973); Link (1991); Zifonun (1986)). Natürlichsprachliche Anzahlangaben werden dementsprechend als Schnittmengen einer Menge durch ein Prädikat erzeugter Mengen mit einer - als Menge gleichmächtiger Mengen verstandenen - Zahl analysiert. Numeral-Nomen-Konstruktionen der Form "*n F*s" denotieren danach Schnittmengen zwischen der Menge aller Mengen von *F*s und der aller *n* Elemente enthaltenden Mengen. So gibt etwa Bartsch (1973) folgende Formel als Extension des Ausdrucks "zwei Häuser" an:

$$\lambda X\ (X \subset \lambda x\ \text{house}'(x)\ \&\ f^M(X) = 2)$$

f^M bezeichnet dabei eine Funktion, die Mengen auf ihre Mächtigkeit, d.h. auf eine Menge gleichmächtiger Mengen, abbildet; λx house'(x) bildet die Menge aller Häuser, $X \in \lambda x$ house'(x) bezeichnet eine Teilmenge aus dieser Menge, d.h. eine Menge von Häusern, die geschnitten mit der Menge aller zweielementigen Mengen dann die Menge aller zwei Häuser enthaltenen Mengen ergibt.

Neben dieser "intersektiven"[8] Analyse hat sich in Anlehnung an Russells (1905) Analyse eindeutiger Kennzeichnungen eine "iterative" Darstellung der logischen Struktur von Anzahlangaben mithilfe von Existenzquantoren und dem Identitätszeichen durchgesetzt. Numeral-Nomen-Konstruktionen werden hier als synkategorematische Ausdrücke charakterisiert, die - im Gegensatz zu Eigennamen - erst im Kontext eine Bedeutung erhalten.

So analysiert Russell (1905) z.B. die Aussage "Scott ist der Autor von *Waverley*" als "Es existiert genau ein Autor von *Waverley* und Scott ist identisch mit diesem.". Die logische Struktur einer solchen Aussage läßt sich dann folgendermaßen darstellen:

Vx (A_W(x) & y (A_W(y) -> y=x) & A_W(s)),

d.h. "es gibt mindestens ein x, für das gilt: x ist der Autor von *Waverley*, und für alle y gilt: wenn y der Autor von *Waverley* ist, ist y identisch mit x, und Scott ist der Autor von *Waverley*."

Die Existenz- und Einzigkeitsbedingungen dieser Russellschen Analyse - "es gibt genau ein x, so daß F(x)" - verwendet etwa Kutschera (1967) zur Definition indizierter Existenzquantoren für die Behandlung von Numeralkonstruktionen. Einen Ausdruck wie "zwei Hunde" analysiert er im Satzzusammenhang als "$V^{=2}x$ H(x)", die Kurzform für:

Vxy (H(x) & H(y) & x≠y) &
Λxyz (H(x) & H(y) & H(z) -> x=y v x=z v y=z).

Der erste Teil der Formel steht dabei für die Aussage, es gäbe *mindestens* zwei Hunde, d.h. zwei nicht-identische Entitäten x und y, für die gelte: x ist ein Hund und y ist ein Hund; der zweite Teil besagt, daß es *höchstens* zwei Hunde gäbe, indem er für alle Entitäten x, y und z, auf die das Prädikat "Hund" zutrifft, festlegt, daß mindestens zwei von ihnen identisch sein müssen (x=y oder x=z oder y=z).

---

[8] Link (1991:424)

An die Stelle einer Zahlzuweisung tritt hier somit die Aufzählung einer entsprechenden Anzahl von Entitäten; die Mächtigkeit der durch sie gebildeten Menge ergibt sich dadurch erst indirekt, sie folgt aus der Identität und Nicht-Identität einer Reihe von Objekten, die die für die Mengenzugehörigkeit charakteristische Eigenschaft aufweisen.

3. Alternative Analyse mit dem "Ockhamschen Messer": Numeralia als Zahlen

Während in Freges Ansatz die Anzahl der Elemente einer gezählten Menge durch die Möglichkeit ihrer Zuordnung zu Elementen einer bestimmten anderen - in der Definition vorgegebenen - Menge festgelegt wird, wird somit in der zweiten hier vorgestellten Analyse die Anzahl der Elemente gleichsam indirekt durch eine Aufzählung angegeben: Anstelle einer Zahlzuweisung wird nacheinander die Existenz voneinander unterschiedener Entitäten postuliert, auf die das betreffende Prädikat zutrifft.

Wenn auch beide Analysen die Wahrheitsbedingungen für Numeralkonstruktionen wiederzugeben vermögen, treffen sie m.E. doch nicht das Wesen natürlichsprachlicher Zahlzuweisungen. Die vorgestellten Zahldarstellungen sind damit in *Frege*scher Terminologie zwar bedeutungsgleich mit den Anzahlangaben natürlicher Sprachen, können deren Sinn jedoch nicht hinlänglich erfassen und reichen daher für ein Verständnis solcher Zahlzuweisungen nicht aus. Wohl basieren diese auf der Möglichkeit einer eineindeutigen Zuordnung von Elementen einer Menge zu denen einer anderen und setzen im Satzzusammenhang die Existenz nicht-identischer Entitäten voraus, auf die ein bestimmtes Prädikat zutrifft. Eine Aufzählung allein macht jedoch das Wesen der Zahlangabe noch nicht aus, ebensowenig wie die Zuordnung zu Elementen einer unabhängig festgesetzten Menge.

Anzahlangaben beinhalten neben der Postulation diskreter Entitäten noch die explizite Angabe der Mächtigkeit der durch diese Entitäten gebildeten Menge, gehen dabei jedoch nicht den Umweg über eine zusätzliche "Beispielmenge", auf deren Basis die entsprechende Zahl als Begriffsumfang definiert wäre. Eine Zahlangabe in natürlichen Sprachen besteht vielmehr in der direkten Zuweisung einer Zahl an eine Menge bzw. - in ordinalen Kontexten - an ein Element einer Reihenfolge. Diese basiert auf einer eineindeutigen Zuordnung von Elementen der Menge / Reihe zu einer geordneten Abfolge von Zahlen.

Notwendige und hinreichende Voraussetzungen einer Sequenz, die als Zahlenreihe fungieren soll, sind dabei nach Dedekind (1887) lediglich ihre Unendlichkeit sowie die Unterscheidbarkeit und Geordnetheit ihrer Elemente. Dedekind geht in seinem Ansatz von einem einfach unendlichen System N aus, das durch eine ähnliche - eineindeutige - Abbildung þ geordnet ist, und stellt die These auf, wenn von der besonderen Beschaffenheit der Elemente dieses Systems abgesehen und lediglich ihre Unterscheidbarkeit und die Beziehungen, in die sie durch þ gesetzt seien, erfaßt würden, seien die Elemente von N die natürlichen Zahlen.[9]

Diese Bedingungen werden von den Numeralsequenzen natürlicher Sprachen bereits erfüllt: Im Unterschied zu anderen sprachlichen Ausdrücken stehen Numeralia in einer festen Abfolge zueinander, sie bilden daher anders als diese kein semantisches Feld, sondern eine

[9] vgl. Dedekind (1887:34)

Reihe. Wenn Elemente dieser Reihe auch - diachron betrachtet - auf andere, referierende, Ausdrücke, etwa Körperteilbezeichnungen, zurückgeführt werden können[10], so besitzen sie doch in der Verwendung als Numerale keine über die Zahlfunktion hinausgehende Bedeutung. Ein weiterer gravierender Unterschied zu anderen Bereichen natürlicher Sprachen ist der induktive Aufbau von Numeralsequenzen, der sie zu unendlichen Systemen macht. Numeralia bilden demnach eine geordnete, unendliche Reihe von unterscheidbaren Entitäten und stellen so ein von Dedekind als Menge der natürlichen Zahlen definiertes System dar.

Numeralia bezeichnen daher keine zusätzlichen Entitäten "Zahlen", sondern erfüllen in natürlichsprachlichen Aussagen selbst alle Funktionen von Zahlen, eine Erweiterung des Universums um abstrakte, "Zahlen" genannte Gegenstände als Referenten von Numeralia ist nicht notwendig.[11] Numeralsequenzen verschiedener Sprachen etablieren dabei nicht unterschiedliche "Zahlen", sondern entsprechen einander, indem sie dieselbe Funktion erfüllen; die Systeme sind aufeinander abbildbar.

4. Logische Analyse natürlichsprachlicher Numeralkonstruktionen mithilfe der Funktionen ANZ und NU

Der hier entwickelte Ansatz erlaubt eine Behandlung sowohl von kardinalen als auch von ordinalen Zahlangaben, indem zwei Funktionen, ANZ ("Anzahl") und NU ("Nummer") eingeführt werden können, die eine Menge bzw. ein Element einer Reihenfolge auf ein Numerale abbilden. Bei der Zuordnung einer Zahl / eines Numerals zu einer Menge oder Reihenfolge entspricht dabei jedem der Numeralia, die dem zugeordneten Numerale vorhergehen, ein Element dieser Menge bzw. - in ordinalen Kontexten - dieser Reihe.

Die Menge der Numeralia N, deren Definition ich hier nur andeute, sei dabei als einfach unendliches System definiert, das durch die "<"-Relation geordnet ist:

N sei die Menge der Numeralia,

d.h. N = {eins, zwei, drei, ...} und

N sei durch eine konnexe Ordnungsrelation (N;<) geordnet.

Der induktive Aufbau von N kann auf der Basis einer Montague-Grammatik, wie sie z.B. Löbner (1976) für die deutschen Zahlwörter angibt, dargestellt werden.

"Abstrakte", d.h. nicht auf eine bestimmte Menge oder Reihe bezogene Zahlen, wie sie mathematischen Aussagen gebraucht werden, können in Anlehnung an Frege (1884;1893) als Mengen gleichmächtiger Mengen charakterisiert werden; anders als bei Frege wird die Mächtigkeit einer Menge hier jedoch über die Funktion ANZ definiert, basiert also auf der Zuordnung eines Numerals, d.h auf der Abbildbarkeit der Elemente auf Numeralia und nicht auf Elemente einer vorgegebenen Menge.

[10] vgl. Winter (1992)

[11] Eine ähnliche Auffassung vertritt Benacerraf (1965) für den Bereich der Arithmetik.

4.1. Kardinalzahlen

Die logische Struktur von Numeralia in natürlichsprachlichen Anzahlzuweisungen läßt sich mithilfe der Funktion ANZ folgendermaßen explizieren:

$$\lambda P\ \lambda v\ \lambda u\ \lambda n\ ((u \subseteq \lambda x Px)\ \&\ ANZ(v(u),n))\ .$$

Die Funktion ANZ ("Anzahl") sei dabei auf der Grundlage der Überlegungen aus Abschnitt 3 folgendermaßen definiert:

Sei n ein Numerale ($n \in N$),
A = v(u) eine gegliederte Menge, wobei
u über ein Prädikat P eine Menge konstituiere und
v ein Individuierungskriterium für u sei,
d.h. eine Funktion, die u auf Individuen abbildet ($v(u) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,...\}$),
und sei N_n eine Teilmenge von N ($N_n \subset N$), für die gelte:
für alle $y \in N$: $y \in N_n$ genau dann, wenn $y \leq n$,
dann sei ANZ(A,n) wahr genau dann, wenn
es möglich ist, eine eineindeutige Abbildung von A auf N_n zu konstruieren,
d.h. wenn es möglich ist, jedem $x \in A$ genau ein $y \in N_n$ zuzuordnen.

Die gezählte Menge A (= v(u)) besteht nach dieser Analyse aus einem "begrifflichen Aspekt" u, einer Teilmenge der durch das charakteristische Prädikat P gebildeten Menge, und einem "Individuierungskriterium" v für u, das Zugriff auf Elemente der Menge ermöglicht, indem es vom sie konstituierenden Begriff zu einzelnen Objekten führt, die unter diesen Begriff fallen. Mithilfe dieser Darstellung läßt sich die Tatsache berücksichtigen, daß eine Anzahl einer Menge stets bezüglich einer bestimmten Aufteilung in Elemente zugewiesen wird:[12]

> "Number attaches not to the class as many, but to the class as one, that is, it attaches to the aggregat of the members [...] taken as exemplifying a certain (strongly) particularizing property or properties. The particularizing property or properties divide the aggregate into *a certain number of parts*." (Armstrong (1978:74))

u und v stehen so für die beiden - scheinbar widersprüchlichen - Voraussetzungen, die eine Menge erfüllen muß, um "gezählt" werden zu können, d.h. eine Anzahl zugewiesen zu bekommen: u sichert die *Gleichheit* der Elemente in Bezug auf einen bestimmten Aspekt - oder, um mit Frege zu sprechen, bestimmt, daß sie unter einen gemeinsamen Begriff fallen -, während v für ihre *Unterscheidung* sorgt und sie so einer Zahlzuweisung überhaupt erst zugänglich macht.[13]

Eine Numeralkonstruktion wie "zwei Stück Vieh" wird nach der obigen Formel etwa folgendermaßen analysiert:

$$\lambda u\ ((u \subset \lambda x VIEH(x))\ \&\ ANZ(STÜCK(u),zwei))\ .$$

[12] vgl. Frege (1884,§23): "[...] es gibt sehr verschiedene Weisen, wie man ein Aggregat zerlegen kann, und man kann nicht sagen, daß Eine allein charakteristisch wäre."

[13] Einen ähnlichen Zweck wie v erfüllt die Relation NE ("natürliche Einheit") bei Krifka (1991).

("VIEH" und "STÜCK" stehen hierbei für die Denotate der entsprechenden sprachlichen Ausdrücke, während "zwei" direkt für das Numerale steht, da dieses nach der hier vertretenen Auffassung nicht Eigenname einer Zahl ist, sondern selbst - als sprachlicher Ausdruck - bereits Zahlfunktion erfüllt.)

v wird in natürlichsprachlichen Ausdrücken nur dann analytisch, d.h. als *classifier* (Numeralklassifikator/Zähleinheit; etwa "Stück"), realisiert, wenn es nicht aus der Bezeichnung für u abgeleitet werden kann.[14] Dies ist möglich, wenn u durch ein pluralisches Zählnomen bezeichnet wird: Die Bezeichnung für v entspricht dann der singularischen Form dieses Nomens und braucht daher nicht mehr explizit zu erscheinen,[15] u und v sind sprachlich quasi verschmolzen.

Die logische Struktur eines Ausdrucks wie "zwei Hunde" ist damit die folgende:

$$\lambda u\ ((u \subset \lambda x HUND_1(x))\ \&\ ANZ(HUND_2(u),zwei))\ .$$

(Die Indices bei "HUND" dienen der Unterscheidung zwischen dem der Menge zugehörigen Prädikat - $HUND_1$ - und dem Individuierungskriterium - $HUND_2$.)

Steht der Ausdruck für u jedoch bereits im Singular bzw. Transnumeral[16], so kann keine (singularische) Form für v mehr abgeleitet werden, und v wird explizit (als *classifier*) ausgedrückt.[17] Der Plural als vom Singular abgeleitete Form stellt demnach eine Menge stets als gegliedert dar, indem er bewirkt, daß das Nomen ein Zählkriterium bereits implizit mit sich führt, während transnumeralen Formen eine solche Ableitbarkeit fehlt.[18]

4.2. Ordinalzahlen

Natürlichsprachliche Stellenwertzuweisungen mithilfe von Ordinalia basieren auf folgender logischen Struktur:

$$\lambda P\ \lambda v\ \lambda u\ \lambda a\ \lambda n\ (u \subseteq \lambda x Px)\ \&\ a \in v(u)\ \&\ NU(a,v(u),n))\ .$$

Die Funktion NU ("Nummer") sei dabei folgendermaßen definiert:

Sei n ein Numerale ($n \in N$),
A = v(u) eine gegliederte Menge, wobei

[14] Unterbeck (1992:213) bezeichnet diese Verfahren als "analytische Kodierung von F (Form) und S (Substanz)" im Gegensatz zu FS-Synthese und FS-Fusion.

[15] Diese singularische Form muß in der betreffenden Sprache nicht realisiert sein, es genügt, wenn der Plural des Nomens als solcher empfunden wird; die entsprechende Numeralkonstruktion (mit pluralischem Nomen) wird dann jedoch - insbesondere bei kleineren Anzahlen - als weniger akzeptabel empfunden, vgl. "fünfzehn Leute" vs. ?"zwei Leute".

[16] Der Begriff der Transnumeralität wurde von Greenberg (1972) entwickelt und insbesondere im Rahmen des UNITYP-Modells unter Leitung von Hansjakob Seiler ausgearbeitet (vgl. Seiler/Lehmann (Hg.) (1982)). Im Gegensatz zur Singular/Plural-Opposition wird bei Transnumeralität eines Substantivs der Gegensatz "Einheit vs. Vielheit" nicht signalisiert.

[17] Kölver (1982:78) charakterisiert daher classifier als "Bezeichnungen, die die begrifflichen Inhalte in Klassen, die dann primär als Objektbezeichnungen handhabbar sind, umsetzen".

[18] Die sog. "Begriffsbezogenheit" des Transnumeral ist somit eher eine fehlende "Individuierung"; *begriffsbezogen* , d.h. auf die für die Menge charakteristische Funktion bezogen, sind pluralische Formen ebenso wie transnumerale, nur liefern sie darüberhinaus ein Kriterium zur Individuierung der durch sie bezeichneten Menge.

u über ein Prädikat P eine Menge konstituiere,

v ein Individuierungskriterium für u sei und

A durch eine konnexe Ordnungsrelation geordnet sei, und

sei a eines der Elemente von A ($a \in A$)

und sei N_p eine Teilmenge von N ($N_p \subset N$), für die gelte: $p \in N$ und für alle $y \in N$: $y \in N_p$ genau dann, wenn $y \leq p$, und sei $n \leq p$,

dann sei NU(a,A,n) wahr genau dann, wenn

eine eineindeutige Abbildung f von A auf N_p existiert,

d.h. wenn jedem $x \in A$ genau ein $y \in N_p$ zugeordnet ist,

und wenn f(a) = n ist.

Der Ausdruck "dritter Mann" erhält beispielsweise folgende Darstellung:

$$\lambda u\ \lambda a\ ((u \subset \lambda x MANN_1(x))\ \&\ a \in v(u)\ \&\ NU(a, MANN_2(u), drei)).$$

Die hier postulierte Struktur für Ordinalia entspricht damit in weiten Teilen der in 4.1. für Kardinalia angegebenen; der Unterschied zu diesen liegt in der Tatsache, daß bei natürlichsprachlichen Stellenwertangaben ein Numerale nicht einer Menge A zugewiesen wird, sondern einem ihrer Elemente (hier *a*), wobei diese Zuweisung voraussetzt, daß A geordnet ist. Eine Abbildung der Numeralia von "eins" bis "p" auf die Elemente von A - bzw. der von "eins" bis "n" auf eine Teilmenge von A, die a enthält - wird daher in der Definition von NU nicht nur als möglich, sondern als aktual bestehend gefordert.

4.3. Logische Analyse für Zahlen in mathematischen Aussagen der natürlichen Sprache

Auf der Analyse natürlichsprachlicher Anzahlzuweisungen basierend lassen sich die natürlichen Zahlen, wie sie etwa in arithmetischen Aussagen gebraucht werden, folgendermaßen logisch darstellen:

$$n_m = u\ v\ (ANZ(v(u),n)) \text{ bzw. } n_m = \alpha\ (ANZ(\alpha,n))$$

Der Index "m" verweise hierbei auf den Anwendungsbereich der mathematischen Aussagen für diese Zahlen und grenze sie so von den in Anzahl- und Stellenwertangaben auftretenden Numeralia ab. Verwendet man Ziffern zur Bezeichnung der Zahlen_m, so erhält man beispielsweise folgende Analysen für die Zahlen 1 und 2:

$$1 = \alpha\ (ANZ(\alpha, eins))$$

$$2 = \alpha\ (ANZ(\alpha, zwei))$$

Diese Analyse versteht sich - wie eingangs betont - nicht als Beitrag zu einer Grundlegung der Mathematik, sondern als Darstellung natürlichsprachlicher Strukturen. Im Bereich arithmetischer Aussagen kann eine solche Analyse jedoch den Zusammenhang zwischen dem Zahlausdruck natürlicher Sprachen und der Entwicklung mathematischen Denkens beleuchten.

Ähnlich Freges Analyse stellt auch diese Zahlexplikation natürliche Zahlen$_m$ als Mengen gleichmächtiger Mengen dar, etwa die 4 als Menge der vier-elementigen Mengen; anders als bei Frege basiert hier jedoch die Zuweisung des Prädikats "n-elementig" für eine Menge nicht auf der Zuordnung ihrer Elemente zu denen einer anderen n-elementigen, die durch die Definition der 0, der 1 und des Nachfolgers vorgegeben ist. Eine n-elementige Menge ist nach der hier vorgestellten Analyse eine solche, deren *Anzahl* n ist, d.h. nach der obigen Explikation, deren Elementen die Numeralia von "eins" bis "n" eineindeutig zugeordnet werden können.

Einen Sonderfall stellt bei dieser Vorgehensweise die 0 dar, die kein Numeral-Äquivalent i.e.S. besitzt, sondern bei natürlichsprachlichen Anzahlaussagen durch das Negationswort kein- vertreten wird. Sie muß daher gesondert behandelt werden und könnte die folgende Analyse erhalten:

$$0 = \alpha\ (\neg \bigvee x\ (x \in \alpha))$$

Diese Explikation entspricht in etwa einer mit kein- gemachten Aussage. Um 0 - anders als kein- - in die Zahlenreihe$_m$ einzuordnen, muß nun noch durch ein zusätzliches Postulat ihre Relation zu 1 festgelegt werden, etwa:

$$0 < 1 \quad .$$

5. Ausblick; Konsequenzen der vorgestellten Analyse

Ergebnisse aus Anthropologie und Spracherwerbsforschung zur Entstehung von Numeralsystemen und dem individuellen Erwerb der Numeralsequenzen stehen in Einklang mit der hier vertretenen "holistischen" Auffassung, eine Bedeutung bzw. Funktion käme primär nicht einzelnen Zahlwörtern, sondern dem System N als Ganzem zu, und Anzahlangaben müßten auf das Zählen, d.h. die Zuweisung von Elementen dieses Systems zu denen der betreffenden Menge rekurrieren. So stellt etwa Seidenberg (1962) die These auf, Numeralsequenzen hätten ihren Ursprung in Riten, in deren Verlauf bestimmte Wörter in fester Reihenfolge ausgesprochen wurden, die außer ihrer Funktion im Ritus - etwa dem Zusammenrufen der Teilnehmer - keine gesonderte Bedeutung besessen hätten.[19] Numeralia basierten damit auf einer Wortsequenz, deren primäres Merkmal die Unterscheidbarkeit und Geordnetheit ihrer Elemente wäre.[20] In eine ähnliche Richtung weisen Daten aus dem Erstspracherwerb im Bereich der Zahlwörter: Numeralia werden zuerst als feste, noch sinnlose Wortsequenz erlernt, bevor einzelne Elemente dieser Sequenz mit einer bestimmten Mächtigkeit von Mengen verbunden werden.[21] Hurford (1987) geht davon aus, daß beim Erstspracherwerb die angeborenen - und auch bei höheren Tierarten vorhandenen[22] - Konzepte der Einheit, Zweiheit und Dreiheit nach dem Erwerb von Zählsequenzen mit den ersten drei Numeralia verbunden werden; sobald die Nachfolger-

[19] Vgl. auch Flegg (1983), der den Ursprung von Zählsystemen z.T. in Fruchtbarkeitsritualen sieht.

[20] Dies erklärt den Umstand, daß ebenso andere feste Wortsequenzen, z.B. die Anfangsworte des islamischen Gebets oder die Buchstaben des hebräischen Alphabets, als Numeralsequenz verwendet werden können (vgl. Ifrah 1987).

[21] Vgl. Fuson et al. (1982:35), die die Auffassung vertreten, Numeralsequenzen würden anfangs als "an arbitrary, long sequence having a conventional order" gelernt.

[22] vgl. hierzu Simons (1981)

Relation erworben wurde, könne auf dieser Basis eine induktive Generalisierung stattfinden, die zur Ausbildung neuer Konzepte für Zahlen > 3 führe. Diese Zahlkonzepte werden somit systemhaft und auf der Grundlage von Zählsequenzen erworben, ein Umstand, der in Übereinstimmung mit der hier vorgestellten Auffassung steht, nach der Zählen als die Grundlage von Anzahlzuweisungen fungiert - d.h. nach der die entsprechende Funktion ANZ auf der Basis der Zuordnung von Numeralia zu Elementen der gezählten Menge definiert ist.

Numeralia unterscheiden sich nach der hier vertretenen Ansicht von anderen natürlichsprachlichen Ausdrücken hinsichtlich ihres Status grundlegend: Sie dienen nicht als Bezeichnungen außersprachlicher Entitäten, Sachverhalte oder Beziehungen, sondern stehen schon als Wortsequenz selbst auf einer Stufe mit diesen. Eine solche spezielle Klassifizierung kann auf linguistischem Gebiet zur Erklärung des auffälligen Verhaltens von Numeralia beitragen, die z.B. im Deutschen hinsichtlich ihrer Wortartzugehörigkeit kaum einzuordnen sind, da sie eine sowohl von natürlichsprachlichen Quantoren als auch von prototypischen Adjektiven und Nomen abweichende Morphosyntax aufweisen.[23] Die Annahme einer Wortart "Numeralia" parallel zu Wortarten wie "Adjektiv" ist wegen des induktiven Aufbaus von Numeralsequenzen und der daraus resultierenden engen Zusammengehörigkeit der einzelnen Zahlwörter recht unplausibel, da eine solche Klasse streng genommen nur ein Element - nämlich das oben charakterisierte System N der Numeralia - umfassen würde. Indem Numeralsequenzen jedoch eine grundsätzliche Sonderstellung gegenüber anderen sprachlichen Ausdrücken eingeräumt wird, erscheint das spezielle Verhalten ihrer Elemente innerhalb der einzelnen Wortarten in einem neuen Licht.[24] Eine genauere Untersuchung der Syntax und Semantik von Numeral-Konstruktionen unter diesem Aspekt steht noch an.

Literatur

Armstrong, David Malet (1978): Universals and Scientific Realism. Vol.II: A Theory of Universals. Cambridge.

Bartsch, Renate (1973): The Semantics and Syntax of Number and Numbers. In: Kimball, P. (Hg.): Syntax and Semantics. New York: 1973. S.51-93.

Benacerraf, Paul (1965): What Numbers Could not Be. In: Philosophical Review 1965/74;1: S.47-73.

Corbett, G. G. (1978): Universals in the Syntax of Cardinal Numbers. In: Lingua 1978/46: S.355-368.

Dedekind, Richard (1887): Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig.

Flegg, Graham (1974): Numbers and Counting. Milton Keynes.

Flegg, Graham (1983): Numbers: Their history and meaning. London.

[23] Vgl. Corbett (1978) zu universellen Problemen der Wortartenklassifikation von Numeralia; Lipczuk (1980) weist die Numeralia im Deutschen sechs verschiedenen Wortarten zu; Schmid (1987) nimmt eine eigene Wortart "Kardinalia" an.

[24] Die Annahme einer solchen Sonderstellung für Numeralia hat ein Gegenstück in dem besonderen Status, der ihrer Verschriftung gegenüber der anderer Ausdrücke zukommt: Ziffernsysteme stehen außerhalb der Schriftsysteme; sie stellen im Gegensatz zur Schrift ein sprachübergreifend - wenn auch nicht universell - verständliches Mittel der Fixierung von Ausdrücken dar und sind unabhängig von und möglicherweise vor der Schrift entstanden (vgl. Ifrah (1987), Flegg (1974)).

Frege, Gottlob (1884): Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau.

Frege, Gottlob (1893): Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Band 1. Jena.

Fuson, Karen C. / Richards, John / Briars, Diane J. (1982): The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence. In: Brainerd, Charles J. (Hg.) (1982): Children's Logical and Mathematical Cognition. New York: Springer. S.33-92.

Greenberg, Joseph H. (1972): Numeral Classifier and Substantival Number: Problems in the Genesis of a Lingustic Type. In: Heilmann, Luigi (Hg.) (1974): Proceedings of the 11th International Cogress of Linguists Bologna-Florence, Aug. 28 - Sept. 2, 1972. Bologna: Mulino. S.17-37.

Hurford, James R. (1987): Language and Number. The Emergence of a Cognitive System. Oxford.

Ifrah, Georges (1981): Histoire Universelle des Chiffres. Paris: Seghers.

Kölver, Ulrike (1982): Klassifikatorkonstruktionen in Thai, Vietnamesisch und Chinesisch. Ein Beitrag zur Dimension der Apprehension. In: Seiler / Lehmann (Hg.) (1982): S.160-184.

Krifka, Manfred (1991): Massennomina. In: Stechow, Arnim von / Wunderlich, Dieter (Hg.): Semantik. Ein Handbuch der zeitgenössischen Forschung. Berlin, New York: de Gruyter 1991. S.399-417.

Kutschera, Franz von (1967): Elementare Logik. Wien: Springer.

Link, Godehard (1991): Plural. In: Stechow, Arnim von / Wunderlich, Dieter (Hg.): Semantik. Ein Handbuch der zeitgenössischen Forschung. Berlin, New York: de Gruyter 1991. S.418-440.

Lipczuk, Ryszard (1980): Die Stellung der Zahlwörter im Rahmen der Wortarten. Eine deutsch-polnische Konfrontation. Göppingen.

Löbner, Sebastian (1976): Montague-Grammatik für die deutschen Zahlwörter. In: ders.: Einführung in die Montague-Grammatik. Kronberg/Ts.: Scriptor 1976. Kap.5.4.

Quine, Willard van Orman (1960): Word and Object. Cambridge, Mass.: M.I.T.

Rucker, Rudy (1987): Mind Tools. The Five Levels of Mathematical Reality. Boston.

Russell, Bertrand (1905): On Denoting. In: Mind 1905/14: S.479-493.

Schmid, Wolfgang P. (1987): Zur Wortart der Kardinalia. In: Bergmann, Rolf / Tiefenbach, Heinrich / Voetz, Lothar (Hg.) (1987): Althochdeutsch. Heidelberg. Band 1, S.458-463.

Seidenberg, A. (1962): The Ritual Origin of Counting. In: Archive for History of Exact Sciences 1962/2: S.1-40.

Seiler, Hansjakob / Lehmann, Christian (Hg.) (1982): Apprehension: Das sprachliche Erfassen von Gegenständen. Tübingen: Narr.

Simons, Dietrich (1981): Vergleichende Betrachtung über die Genese des Zahlbegriffs. In: Psychologische Beiträge 1981/23: S.595-617.

Unterbeck, Barbara (1992): Plurale im Koreanischen. Überlegungen zur Dimension der APPREHENSION. In: Zeitschrift für Phonetik, Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung (ZPSK) 1992/45;2: S.207-216.

Winter, Werner (1992): Some Thoughts about Indo-European Numerals. In: Gvozdanovic, Jadranka (Hg.): Indo-European Numerals. Berlin, New York: 1992. S.11-28.

Zifonun, Gisela (1986): Nominale Gruppen mit Zahladjektiven. In: dies. (Hg.): Vor-Sätze zu einer neuen deutschen Grammatik. Tübingen: 1986. S.280-300.

Heike Wiese, Humboldt-Universität zu Berlin