SITZUNG AM 7. MÄRZ 1887.

Walther Dyck, *Beiträge zur Analysis situs.* III. Mittheilung. (Vorgelegt von *A. Mayer.*) Mit 1 lithogr. Tafel.

Die beiden vorangehenden Untersuchungen zur Analysis situs, welche ich die Ehre hatte der hohen Societät vorzulegen [1]), behandelten im Wesentlichen die Definition der »Grundzahl« einer Mannigfaltigkeit (insbesondere von zwei und drei Dimensionen) und deren Bestimmung, falls die Mannigfaltigkeit in analytischer Form gegeben ist.

Durch Aufstellung der Grundzahl ist nun selbstverständlich eine Mannigfaltigkeit keineswegs »im Sinne der Analysis situs vollständig« bestimmt. So lässt sich z. B. aus der Bestimmung der Grundzahl für den »Innenraum« einer ebenen Curve (A. S. II. pag. 63) noch keineswegs die Anzahl der Zweige, aus welchen die betr. Curve besteht, angeben, oder aus der Grundzahl einer Fläche sich ein Schluss auf die Anzahl oder die Grundzahl ihrer einzelnen Theile machen. So wird man allgemeiner die Frage aufwerfen können:

Welche Anzahl-Bestimmungen sind — unter Voraussetzung eines analytischen Datums — an einer Mannigfaltigkeit durchzuführen, um dieselbe im Sinne der Analysis situs hinreichend und vollständig zu charakterisiren?

Diese Frage ist in den folgenden Zeilen für ebene Curven und für Flächen eines ebenen dreidimensionalen Raumes behandelt. Es werden Anzahlbestimmungen (im Wesentlichen in wiederholten Anwendungen des *Sturm*'schen Satzes bestehend) be-

---

1) Beiträge zur Analysis situs I und II, vom 6. Juli 1885 und 8. Februar 1886; im Folgenden A. S. I. und II. citirt.

zeichnet, durch welche die betr. Mannigfaltigkeit bis auf Verbiegungen und Verzerrungen (ohne Zerreissen) eindeutig definirt wird. Die zu Grunde gelegte Methode ist in der Ebene wie im Raume dieselbe, nur habe ich für die Discussion in der Ebene eine an die früheren Entwickelungen unmittelbar anschliessende Darstellung gewählt, während ich im Raume die Ableitung der fraglichen Charakteristiken mit Hülfe einer Projection der Fläche mehr habe hervortreten lassen.

Die Frage, wie nun die so definirten Mannigfaltigkeiten in gewisse *Normalformen* übergeführt werden können, deren Aufstellung und Classification uns über die überhaupt vorhandenen gestaltlichen Möglichkeiten orientiren würde, berühre ich in der vorliegenden Untersuchung nicht. Insofern man nun (eben anknüpfend an eine solche Aufstellung gewisser Normalformen) die hier gestellte Aufgabe auch durch die Ueberführung gegebener Curven und Flächen in gewisse Normalformen behandelt denken kann, wo dann die Gebilde als *beweglich* gewisse Umformungen erleiden, mag man im Vergleich damit den hier eingeschlagenen Weg dadurch bezeichnen, dass wir für die Discussion unsere Mannigfaltigkeiten zwar durch das analytische Datum als *starr* gegeben betrachten, aber ihre gestaltlichen Eigenschaften nur insoweit rechnerisch verfolgen, als wir sie eben zu einer Charakteristik im Sinne der Analysis situs bedürfen [1]).

Zum Schlusse habe ich in § 3 einige Bemerkungen über die Gestalten, welche die ebenen Projectionen von Flächen besitzen können, angefügt. Sie sollen nur den Umfang der eintretenden Möglichkeiten an Beispielen bezeichnen, ohne irgendwie erschöpfen zu wollen. Eine ausführliche Darstellung möchte ich einer anderen Gelegenheit vorbehalten.

§ 1.

Ebene Curven.

Die Gleichung der Curve sei

$$f(x, y) = 0,$$

wobei zur Vereinfachung des Ausdruckes (wie in den früheren

---

1) Man vergleiche übrigens hierzu die Schlussbemerkungen des § 2 pag. 49.

Abhandlungen) vorausgesetzt sei, dass die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

(wo f_1 und f_2 die partiellen Ableitungen von f nach x und y bezeichnen) nicht gleichzeitig für reelle Werthepaare x, y zu befriedigen seien[1]).

Wir betrachten ferner (ebenso wie früher A. S. I. p. 322) die Ebene als Kugel, d. h. mit nur einem unendlich fernen Punkte, welcher im »Aussen-Raume« $f > 0$ der Curve gelegen sei.

Wir legen der Betrachtung wieder einen schon früher (A. S. II. p. 62) gebrauchten Entstehungsprocess der Curve zu Grunde, den wir wieder der einfacheren Ausdrucksweise wegen in einer speciellen Gestalt voraussetzen: Eine Gerade $y = y_a$ möge von einer »obersten« Lage beginnend, für welche noch kein Schnittpunkt mit der Curve statthat, parallel zur Anfangslage bleibend mit abnehmendem y über die Curve hinweggeschoben werden. Wir betrachten dann den jedesmal oberhalb der Geraden befindlichen Theil der Curve als entstanden und achten darauf, wie bei der Bewegung neue Stücke der Curve entstehen und schon vorhandene sich vereinigen. Das Entstehen neuer Curventheile findet jedesmal statt, wenn die Curve von »oben« berührt wird, die Vereinigung zweier Theile jedesmal dann, wenn eine Berührung von »unten« statt hat. Die betreffenden Stellen sind also durch die Gleichungen

$$f = 0, \; f_1 = 0$$

charakterisirt und die Art der Berührung von »oben« bez. »unten« durch das positive bez. negative Vorzeichen von

$$f_2 \cdot f_{11}.$$

Seien nun $y_1, y_2 \ldots y_n$ der Grösse nach geordnet die Ordinaten für welche Berührungen eintreten, *so lässt sich zunächst aus der Kenntniss der jedem dieser Werthe entsprechenden Vorzeichen von $f_2 \cdot f_{11}$ die Anzahl σ der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $y = y_a$ mit der Curve bestimmen.* Versteht man nämlich unter $[f_2 \cdot f_{11}]$ die Grösse ± 1, je nachdem $f_2 \cdot f_{11}$ positiv oder negativ ist, so ist diese Zahl sofort gegeben durch

$$(1.) \qquad 2 \cdot \Sigma\, [f_2 \cdot f_{11}],$$

---

1) Indess sei ausdrücklich bemerkt, dass ein Beibehalten solcher singulärer Punkte keinerlei Schwierigkeiten bietet.

die Summe ausgedehnt über alle Punkte y_i, $(f = 0, f_1 = 0)$, für welche $y > y_a$ ist.

Die Intervalle von y_1 bis y_2, y_2 bis y_3 . . . , y_{n-1} bis y_n sind dergestalt jedes von einer bestimmten Anzahl von Curvenstücken durchsetzt, die unter sich eben an jenen Berührungspunkten zusammenhängen. Zur *vollständigen* Charakteristik der Curven ist es also noch nothwendig, die Lage der Berührungspunkte auf den einzelnen Geraden $y = y_1 \ldots y = y_n$ zu kennen, d. h. zu wissen, wie viele, λ, von allen Schnittpunkten einer solchen Geraden mit der Curve »rechts« (und damit auch gleichzeitig wie viele »links«) vom Berührungspunkte liegen.

Die Kenntniss dieser Zahlen λ für die sämmtlichen Tangenten $y = y_i$ ist zur Charakterisirung jedenfalls hinreichend. Denn sie ermöglicht unmittelbar und nur auf eine Weise ein Schema der gegenseitigen Lage der einzelnen Curvenzweige zu entwerfen (vergl. Fig. 1). Zunächst etwa beim obersten Berührungspunkte (für welchen $f_2 \cdot f_{11}$ positiv ist) beginnend und auf dem einen der dort auslaufenden Aeste (etwa nach rechts) fortschreitend bezeichnen wir einen ersten Curvenzug in ganz bestimmter Weise dadurch, dass wir beim Ueberschreiten jeder Tangente angeben, wie viele Schnittpunkte der Curve mit dieser Tangente rechts (bez. links) des jeweils durchlaufenen Curvenzuges liegen — und diese Anzahlen bestimmen sich sofort aus der Kenntniss der obengenannten Zahlen. Diese lassen nämlich erkennen, ob ein Berührungspunkt »rechts« von dem durchlaufenen Curvenzweige auftritt (bezw. verschwindet), ob er auf dem durchlaufenen Zweige liegt, oder endlich links davon gelegen ist[1]. So ordnen sich in bestimmter Reihenfolge schliesslich alle jene Be-

---

1) Sei, um dies näher auszuführen, an einer bestimmten Stelle der Curve (die wir uns in der Richtung nach »abwärts« durchlaufen denken) m die Zahl der »rechts«liegenden Curvenzweige; sei ferner für die nächstfolgende horizontale Tangente μ die Zahl der Zweige »rechts« vom Berührungspunkte. Nehmen wir dann an, diese Tangente berühre von »oben«, so wächst die Zahl der »rechts«liegenden Curvenzweige für den durchlaufenen Zweig um 2, wenn $\mu \leqq m$ und bleibt ungeändert für $\mu > m$. Berührt die Tangente von »unten«, so nimmt die Zahl der »rechts«liegenden Zweige um 2 ab, wenn $\mu < m - 1$; wenn aber $\mu = m - 1$ bez. $\mu = m$ ist, so liegt der betr. Berührungspunkt auf dem Curvenzweige und die Curve wendet sich von da nach *oben* und zwar nach rechts bez. nach links; ist $\mu > m$, so bleibt die Zahl der »rechtsliegenden« Curvenzweige ungeändert.

rührungspunkte auf geschlossenen Theilen der Curve an, deren gegenseitige Lage durch unsere Angaben völlig fixirt ist.

Unsere Anzahlbestimmungen sind aber nicht bloss *hinreichend*, sondern auch *nothwendig*, um *mit Hülfe der gewählten horizontalen Tangenten* die Curve im Sinne der Analysis situs vollständig zu definiren. Denkt man sich nämlich die Zahl n der horizontalen Tangenten und für jede den Charakter der eintretenden Berührung (als obere bez. untere) gegeben, so lassen sich nur unter Berücksichtigung der obigen Relation (1), welche die *Gesammtzahl* σ der Schnittpunkte der Curve in jedem Intervalle angiebt, die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ der rechts von jedem Berührungspunkte liegenden Schnittpunkte der Curve mit diesen Tangenten noch *willkürlich* festsetzen und führen jedesmal zu einem und nur einem ganz bestimmten Schema einer Curve.

Fassen wir die hiermit gewonnene Methode zur Charakterisirung einer Curve zusammen, *so haben wir für die Curve* $f(x, y) = 0$ *ausser der Bestimmung ihrer horizontalen Tangenten und des Charakters der jedesmaligen Berührung (als »oberer« bez. »unterer« Berührung) auf jeder dieser Tangenten das Lagenverhältniss des Berührungspunktes zu den übrigen Schnittpunkten auf der Tangente durch die Bestimmung der Zahlen* λ_i *zu fixiren, eine Bestimmung, die jedesmal die Anwendung des Sturm'schen Satzes erfordert.*

Besitzt die Curve *Doppelpunkte*, so ist für diese gleichfalls auf einer durchgelegten Horizontalen je eine Zahl λ_i zu bestimmen. Ebenso lassen sich weitere singuläre Vorkommnisse leicht in die allgemeine Theorie einbegreifen.

Unmittelbar ist ersichtlich, dass unser System von horizontalen Geraden, das wir der »Beschreibung der Curve« zu Grunde gelegt haben, durch irgend ein anderes, die Curve einfach überdeckendes Curvensystem zu analoger Formulirung ersetzt werden kann, wo dann der speciellen Curve irgend ein specielles System für die Discussion am angemessensten sein wird[1].

§ 2.

Flächen im ebenen dreidimensionalen Raume.

Indem wir dazu übergehen, eine analoge Methode zur Charakterisirung einer (im ebenen dreidimensionalen Raume ge-

---

1) Man vergl. übrigens die Schlussbemerkungen von § 2.

legenen) *Fläche* (die wir uns auch wieder als aus einer Anzahl geschlossener, einander in mannigfachster Weise durchdringender und umschliessender Theile bestehend zu denken haben) übergehen, sei im Folgenden eine etwas veränderte Darstellungsform — mit Hülfe einer »Projection« der Fläche — gewählt, die unmittelbar auch in den voranstehenden Entwicklungen hätte gebraucht werden können.

Denken wir uns eine Fläche (die wir, wenn es sich um eine rechnerische Ausführung handelt, wieder durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben voraussetzen) von irgend einem Punkte aus betrachtet, so können wir dieselbe »von diesem Punkte aus« dadurch beschreiben, dass wir zunächst die Umrisscurve, in ihrer Projection auf irgend eine Ebene, vollständig charakterisiren und dann angeben, wie sich in diese Curve die einzelnen Theile der Fläche, die als verschiedene über der Projectionsebene liegende Blätter zu denken sind, einspannen.

Wir zerlegen diese Discussion in folgende Schritte:

1. Die »*Umrisscurve*« (in welcher wir gleichzeitig auch etwa vorhandene Rückkehrcurven der Fläche einbegreifen) sowie die »*Doppelcurve*« — die wir beide als aus einer Anzahl geschlossener, sich mannigfach überkreuzender Theile bestehend anzunehmen haben — müssen zunächst nach den soeben in § 1 ausgeführten Methoden in der Projectionsebene festgelegt werden.

2. Längs der Umrisscurve gehen nun (vom Projectionscentrum aus gesehen) zwei Flächentheile in einander über, so zwar, dass wir längs der Curve noch diejenige Seite, auf welcher der Uebergang statthat (mit Hülfe einer Vorzeichenbestimmung, die für jeden getrennten Theil der Curve an *einer* Stelle auszuführen ist) fixiren können; wir wollen diese Seite der Curve kurz die »*Flächenseite*« nennen.

Nach diesen Bestimmungen lässt sich für jeden beliebigen Projectionsstrahl die Anzahl σ seiner Schnittpunkte mit der Fläche angeben, wenn wir die Bestimmung einmal für einen Projectionsstrahl ausgeführt haben.

Jede Ueberschreitung der Umrisscurve (man sehe hier etwa Fig. 2, 5) ändert nämlich die Anzahl der Schnittpunkte um $+2$ bez. -2, je nachdem sie durch die längs des Umrisses fixirte »Flächenseite« als Eintritt oder Austritt zu bezeichnen ist. Ueberschreitungen der Doppelcurve ändern selbstverständlich diese Anzahl nicht.

3. Nun denken wir uns für alle Doppelpunkte der Umrisscurve und Doppelcurve (die im Allgemeinen scheinbare Doppelpunkte sein werden) in der Projectionsebene den dort »überkreuzenden« und den »unterkreuzenden« Curvenzug bezeichnet; weiter sei für etwa vorhandene Berührungen der Projection von Doppelcurve und Umrisscurve bestimmt, ob (im Raume) die Doppelcurve, in bestimmter Richtung durchlaufen, den Umriss von »oben nach unten« bez. von »unten nach oben« durchsetzt[1]).

4. Es handelt sich jetzt noch um die Entscheidung, *welche* Blätter der Fläche jedesmal längs der einzelnen Ränder zusammenhängen.

Diese Entscheidung wird dadurch getroffen, dass wir für jeden in sich geschlossenen Theil der Umrisscurve und der Doppelcurve an einer (übrigens willkürlichen) Stelle bestimmen, in wie vielen (λ) Punkten der zugehörige Projectionsstrahl in dem Stücke zwischen dem Projectionscentrum und jenem Punkte der Umriss- (Doppel-) Curve (seinem Berührungspunkte) die Fläche schneidet.

Dann sind nämlich (man vergl. etwa Figur 5), wenn wir uns (3) ausgeführt denken, jedesmal längs des betreffenden in sich geschlossenen Curvenzuges die dort zusammenhängenden Blätter bestimmt. Man beachte nämlich, dass die ebenerwähnte Schnittpunktszahl λ für einen Projectionsstrahl längs eines geschlossenen Theiles der Umrisscurve sich jedesmal ändert, so oft ein scheinbarer Doppelpunkt (mit einem andern Stück der Umrisscurve) auftritt, in welchem der durchsetzende Curventheil *zwischen* Projectionscentrum und Berührungspunkt liegt. Und zwar wächst die Zahl jener Schnittpunkte λ um 2, bez. nimmt um 2 ab, je nachdem die betr. Stelle einen Eintritt oder Austritt bezeichnet. Dagegen bleibt die Zahl jener Schnittpunkte an denjenigen scheinbaren Doppelpunkten ungeändert, für welche der durchsetzende Zweig ausserhalb des oben erwähnten Stückes den Projectionsstrahl schneidet. Ferner ändert sich die Zahl λ um eins an den Stellen, in welchen die Umrisscurve von der Doppelcurve der Fläche berührt wird und zwar um $+1$ bez. -1, je nachdem im Sinne der Durchlaufung der Umrisscurve gerechnet die Doppelcurve (die ja im Raume den

---

1) Wir werden weiter unten für eine rechnerische Durchführung die Ausführung der Bestimmungen (3) denen in (4) nachsetzen; doch formuliren sich die Bestimmungen (4) übersichtlicher, wenn wir für den Augenblick (3) als bekannt voraussetzen.

Umriss durchsetzt) von unten nach oben bez. von oben nach unten tritt. Analog lässt sich jene Zahl λ längs eines geschlossenen Theiles einer Doppelcurve bestimmen, wenn sie an einer Stelle bekannt ist. Dabei ist für diejenigen geschlossenen Theile der Doppelcurve, welche mit Theilen des Umrisses eine Berührung eingehen, eben an jener Berührungsstelle die Zahl der Schnittpunkte λ für die Doppelcurve gleichzeitig mit der für die betreffende Umrisscurve gegebenen Zahl λ bestimmt. Weiter ist selbstverständlich die Zahl λ ohne Rechnung gegeben für alle diejenigen Curvenzüge, die an ein Gebiet grenzen, in welchem die Zahl der überdeckenden Blätter 0 ist.

Nach Bestimmung der Zahlen λ kann die Verbindung der einzelnen Flächenstücke, welche über den verschiedenen Gebieten der Projectionsebene ausgebreitet sind, zur Gesammtfläche nur mehr auf *eine* Weise erfolgen, wie man dies sofort durch ähnliche Ueberlegungen wie die auf pag. 43 für ebene Curven gegebenen übersieht.

Wir erkennen also, dass zur Festlegung der Fläche im Sinne der Analysis situs jedenfalls hinreichend ist: 1) Den Umriss und die Doppelcurve (im Sinne von § 1) zu charakterisiren. 2) Für jedes geschlossene Stück des Umrisses die »Flächenseite« zu bestimmen. 3) Die Art der Ueberkreuzungen des entstandenen Curvensystems und der Berührungen von Doppelcurven und Umriss zu fixiren, und endlich 4) die Zahlen λ zu bestimmen.

Es handelt sich noch darum, zu discutiren, in wie weit für die Beschreibung der Fläche aus ihrer Projection diese Bestimmungen im Allgemeinen *nothwendig* zur Charakteristik sind.

Hat man durch die Bestimmungen 1 und 2 die Anordnung der Umriss- und Doppelcurven in der Projectionsebene und daraus die Blätterzahlen σ in den einzelnen Gebieten festgelegt, so geht man zweckmässig zur Bestimmung der Zahlen λ über. Ausser dem oben schon erwähnten speciellen Falle, in welchem sich die längs einer geschlossenen Theilcurve statthabenden Zahlen λ unmittelbar ergeben, wird es im *Allgemeinen* an einer bestimmten Stelle einer Theilcurve immer eine (durch die zugehörige Zahl σ begrenzte) Anzahl von Möglichkeiten für λ geben, aus welchem Umstande sich die *Nothwendigkeit*, die Bestimmung von λ (an einer Stelle) für jede Theilcurve zu treffen, ergiebt[1].

---

1) Im *speciellen* Falle kann allerdings eine solche Configuration des Umrisses vorliegen, dass aus ihr mit Nothwendigkeit die Zusammengehörig-

Erst nach Bestimmung der Zahlen λ je für eine Stelle jeder Theilcurve wenden wir uns nun zu 3) der Bestimmung des Charakters der Berührung etwa vorhandener Doppelcurven mit Umrisscurven, in dem pag. 46 angedeuteten Sinne und dann zur Bestimmung der *Ueberkreuzungen* des Curvensystems. Von diesen letzteren werden sich eine Anzahl *ohne Rechnung*, aus den Zahlen λ herleiten lassen. Denken wir z. B. für zwei sich überkreuzende Curvenzweige in der Ueberkreuzungsstelle jene Zahlen λ gegeben, so ist damit ohne Weiteres entschieden, welcher Curvenzweig »oberhalb«, welcher »unterhalb« verläuft. Weiter werden sich (je nach den *speciell* vorliegenden Configurationen) gewisse Ueberkreuzungen aus der Bedingung bestimmen lassen, dass die entstehende Fläche keine weiteren Umrisse und Doppelcurven als die zuerst (durch 1 und 2) bestimmten haben darf. Ueber solche aus der speciellen Configuration abzulesende Ueberkreuzungen hinaus werden aber im Allgemeinen stets noch Ueberkreuzungen existiren, wo die Art des Uebereinandergreifens der betreffenden Curvenzüge rechnerisch durch Bestimmung der Lage der den beiden Zweigen im scheinbaren Doppelpunkt entsprechenden Schnittpunkte fixirt werden muss; dabei wird für jede specielle Configuration jede solche Bestimmung nach den vorhin ausgesprochenen Sätzen gewisse andere nach sich ziehen. So sind in Fig. 3 diejenigen Ueberkreuzungsstellen der als zwei in einandergreifende Ringe gedachten Fläche durch Punkte hervorgehoben, welche allein rechnerisch bestimmt werden müssen, während sich die Art der Ueberkreuzung für die übrigen Durchkreuzungen hieraus ohne Rechnung ergiebt. Ueberdies beachte man den Satz, dass die *Gesammtänderung* der Zahl λ (wie wir sie für die verschiedenen Ueberkreuzungsstellen und Berührungspunkte mit Doppelcurven auf pag. 46 verfolgt haben) beim Durchlaufen einer geschlossenen Theilcurve gleich Null sein muss, da wir nicht voraussetzen, dass eine Umrisscurve mehrfach zählend als Umriss auftritt.

---

keit zweier Theilcurven zu einem einzigen geschlossenen Flächentheile folgt. In einem solchen Falle — wie er in Figur 2, wo die Curven C_1 und C_2 nothwendig zusammengehören, vorliegt — zieht dann eine auf der einen Curve bestimmte Zahl λ eine entsprechende Zahl auf der andern Curve nach sich.

Der im Vorstehenden gegebene Weg der Discussion der gestaltlichen Verhältnisse von Curven und Flächen mag noch auf die mannigfaltigste Art durch die Auswahl anderer Curvensysteme an Stelle der hier zu Grunde gelegten Geradenbüschel in der Ebene und im Raume abgeändert werden und selbstverständlich wird speciellen Daten das eine oder andere System für die Discussion angemessener sein. *Allen Anordnungen aber ist gemeinsam die Art der Verwendung des Sturm'schen Satzes,* welche — mag sie nun auf dem einen oder anderen Wege in grösserer oder geringerer Wiederholung nothwendig sein — die schliessliche Charakterisirung der Curven und Flächen herbeiführt. Auch wenn man sich etwa vor einer speciellen Discussion eine gegebene Curve oder Fläche im Sinne der Analysis situs umgewandelt denkt (etwa bei einer Curve durch Aufhebung von Wendepunkten, bei einer Fläche durch Reduction gewisser auflösbarer Verschlingungen), so lassen sich auch solche Umformungen durch die Auswahl specieller Curvensysteme durch eine Discussion im obigen Sinne ersetzen, und so führen die schliesslich nothwendigen Anzahlbestimmungen wieder auf Formulirungen der vorstehend gegebenen Art. *Insofern lassen sich also unsere Methoden der Bestimmung der gestaltlichen Verhältnisse von Curven und Flächen nicht nur als hinreichende, sondern auch als nothwendige bezeichnen.*

§ 3.

Anschliessende Bemerkungen.

Es seien der allgemeinen Discussion noch einige Sätze beigefügt über ebene Curvensysteme, welche als vollständige Umrisse von Flächen (in der Projection auf eine Ebene) betrachtet werden können.

Wir denken uns in der Ebene ein Curvensystem gegeben, in welchem die *einzelne* geschlossene Theilcurve sich nicht selbst durchsetzt, welches aber sonst ganz willkürlich angenommen ist, so dass sich also die verschiedenen Theilcurven auf die mannigfachste Art durchkreuzen mögen; wir setzen ferner für jede einzelne Theilcurve in übrigens völlig willkürlicher Weise die »Flächenseite« fest — dann *lässt sich — und zwar im Allgemeinen noch auf mannigfache Weise — ein solches Curvensystem stets als der vollständige Umriss einer Fläche betrachten;* dabei kann auch verlangt werden, dass die Fläche keine Doppelcurven besitzen soll.

Fixirt man in einem der Gebiete, in welche durch den Umriss die Ebene zerlegt erscheint, die (über einer gewissen unteren Grenze willkürliche) Zahl σ der überdeckenden Blätter der Fläche, so ist (nach pag. 45) die betreffende Zahl für alle Gebiete der Ebene bestimmt[1]. Sie wird in gewissen Gebieten einen *kleinsten* Werth erreichen; wählen wir diesen gleich Null, setzen also voraus, dass die betreffenden Gebiete von der Fläche *nicht* überdeckt werden sollen, *so lässt sich auch unter dieser Voraussetzung, bei welcher alle Gebiete mit der kleinstmöglichen Blätterzahl überdeckt erscheinen, stets und zwar im Allgemeinen noch auf mannigfache Art eine Fläche construiren, welche das gewählte Curvensystem zum vollständigen Umriss besitzt.* Dabei können wir auch hier noch verlangen, dass die Fläche keine Doppelcurve besitzt. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten ist wegen der endlichen Blätterzahl hierbei stets eine *endliche.*

Der Beweis dieser Sätze wird in einfachster Art durch die wirkliche Aufstellung zugehöriger Flächen geführt. So lässt sich etwa für den allgemeinen Fall sofort jede einzelne Theilcurve als vollständiger Umriss eines Flächenstückes betrachten, welches die Gestalt einer »Kugel« (im Sinne der Analysis situs) besitzt, wenn das durch die Flächenseite der betr. Theilcurve definirte Curveninnere den unendlich fernen Punkt der Ebene ausschliesst, welches andererseits die Gestalt eines einschaligen Hyperboloids (etwa mit der Kehlellipse als Umriss) besitzt, sofern das »Innere« der zugehörigen Theilcurve den unendlich fernen Punkt einschliesst. Die so construirten Flächen besitzen, wenn man von der Möglichkeit etwa vorhandener Flächentheile, die *keinen* Umriss in die Projectionsebene liefern[2]), absieht, das

---

1) Es ist sofort deutlich, dass für die Fixirung der Zahl σ in einem beliebigen Gebiete auch bei unserer ganz willkürlichen Eintheilung und beliebiger Wahl des Randes der einzelnen Theilcurven kein Widerspruch entstehen kann aus der Abänderung des Weges, auf welchem wir vom Ausgangsgebiet nach dem betreffenden Gebiete, in welchem wir σ bestimmen wollen, fortschreiten; da jeder geschlossene Weg — insofern auf ihm gleich viel Eintritte und Austritte mit jeder einzelnen Theilcurve liegen — die Charakteristik Null ergiebt.

2) Kugeln, von einem inneren Punkte projicirt.

Maximum von Theilen bei gegebenem Umriss. In Figur 4 sind in die einzelnen Theilgebiete die dieser Annahme entsprechenden Zahlen eingetragen, wo dann jeder Punkt von doppelt so vielen Blättern überdeckt erscheint, als es (mit Berücksichtigung der »Flächenseite«) ihn umschliessende Curvenzüge giebt.

Für die Flächen mit einer Minimalzahl von Ueberdeckungen der Ebene beachte man, dass man einander durchschneidende Theilcurven des Umrisses nicht als (auf der Fläche) aufeinanderfolgende Umrisse eines Flächenstückes betrachten kann, wohl aber eine umfassende Theilcurve und vollständig von ihr eingeschlossene, welche sich die »Flächenseiten« zukehren, als aufeinanderfolgende Stücke des Umrisses eines Flächentheiles. Da nun für die Gebiete, welche $\sigma = 0$ erhalten sollen, die begrenzenden Curvenstücke des Umrisses ihre Flächenseite sämmtlich von dem Gebiete abkehren, übersieht man, dass in der That bei geeigneten (und noch mannigfach zu treffenden) Verbindungen einzelner Theilcurven durch ein Flächenstück jene Gebiete unbedeckt bleiben können. Man vergleiche etwa Fig. 5, wo der Umriss dieselbe Configuration wie in Fig. 4 zeigt. In die einzelnen Gebiete sind jetzt die der neuen Annahme, die hier ersichtlich noch auf mannigfache Weise erfüllt werden kann, entsprechenden Zahlen eingetragen; weiter ist durch specielle Annahme einer Zahl λ (welche dem Rande des entsprechenden Curvenzuges beigesetzt ist) die Darstellung eines speciellen leicht übersichtlichen Falles (die ganze Fläche besteht aus zwei kugelförmigen, einem ringförmigen und einem doppelringförmigen Theile) festgelegt.

Für Curvensysteme, bei welchen die einzelnen Theilcurven sich selbst durchsetzen, sind die hier gegebenen Sätze zu modificiren. Für ihre Discussion ist zu beachten, dass eine beliebig sich selbst durchkreuzende, geschlossene Curve zwar auch als der vollständige Umriss einer geschlossenen Fläche betrachtet werden kann, aber im Allgemeinen nur mit Zuhülfenahme gewisser singulärer Punkte auf der Umrisscurve, die gestaltlich durch Zusammenziehung kleiner Schleifen (etwa von der in Fig. 6 vorliegenden Art) entstehen, oder etwa auch durch Zuhülfenahme von Doppelcurven, die im Innern der Fläche in Verzweigungspunkten (pinch-points) endigen.

Es sei zum Schlusse noch eine Bemerkung gestattet über die Beziehung der Anzahl der Umrisscurven einer (aus *einem* geschlossenen Stücke bestehenden) Fläche und der Grundzahl derselben.

Herr *Klein* hat in seiner Schrift über »*Riemann's* Theorie der algebraischen Functionen« und in zwei Noten »Ueber die conforme Abbildung von Flächen« und »Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich« Annalen XIX p. 159 und 565, auf die Classification der *symmetrischen Riemann*schen Flächen nach ihren »Symmetrielinien« hingewiesen und gezeigt, dass *orthosymmetrische Flächen*[1]) vom »Geschlechte p« stets

$$\lambda = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ p+1$$

Symmetrielinien, wenn p gerade, und

$$\lambda = 2,\ 4,\ 6\ \ldots\ p+1$$

Symmetrielinien, wenn p ungerade, besitzen. Herr *Weichold* hat in seiner Dissertation »Ueber symmetrische *Riemann*'sche Flächen« (*Schlömilch's* Zeitschr. Bd. 28) typische Gestalten für diese Flächen aufgestellt, in denen jene Symmetrielinien für eine Orthogonalprojection als *Umrisse* auftreten, aber so, dass ausser diesen die Fläche noch weitere (zu einander symmetrisch gelegene) Umrisscurven besitzt. Es liegt die Frage nahe, ob es nicht gelingt, derartige typische Gestalten aufzustellen, für welche jene Symmetrielinien als der *alleinige* Umriss auftreten, so also, dass alle jene Flächen wieder durch doppelte Ueberdeckung eines mehrfach zusammenhängenden *ebenen* Flächenstückes vorgestellt werden können. Dies gelingt in der That auf die einfachste Weise. Die Figuren 6 — 8 zeigen die extremsten Fälle, in denen also die Anzahl der Umrisscurven $\lambda = 1$ bez. $\lambda = 2$ ist, für Flächen vom Geschlechte 2, 4 bez. 3, aus welchen sich sofort alle übrigen analogen Darstellungen ergeben. Fig. 6 ist dabei die schon von *Riemann* in der Theorie der *Abel*'schen Functionen (Werke pag. 89) angewandte Figur. Fig. 8 kann auch ersetzt werden durch eine den Fig. 6 und 7 analoge Darstellung, die in diesem Falle *zwei* Umrisscurven besitzt.

München, 5. März 1887.

1) Man vergl. bezüglich der Bezeichnungen die sogleich zu erwähnende Dissertation von *Weichold*.