Walther Dyck, *Beiträge zur Analysis situs.* II. Mittheilung. (Vorgelegt von *F. Klein.*)

Die nachfolgenden Entwickelungen sind im weiteren Verfolge der Untersuchungen zur Analysis situs entstanden, von denen ich einen ersten Bericht der hohen Societät im Juli vorigen Jahres vorzulegen die Ehre hatte [1]).

Die Beziehung der *Grundzahl einer Fläche* zu der *Kronecker-schen Characteristik eines gewissen Functionensystems* zu kennzeichnen, war der wesentliche Zweck jener Mittheilung. Das weitere Studium jener Kronecker'schen Untersuchungen [2]) hat mich nun auch jene geometrischen Fragen in einer allgemeinen Form zurecht legen lassen, welche es ermöglicht, auf rein geometrischem Wege für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen eine characteristische Zahl zu definiren. Es sind schliesslich die *hier* besprochenen Zahlen keine *wesentlich* anderen, als die, welche schon in den Riemann-Neumann'schen Entwicklungen für die Grundzahl einer Fläche, in den Listing'schen [3]) und Betti'schen [4]) Untersuchungen für mehrdimensionale Gebilde enthalten sind [5]). Doch habe ich absichtlich auch die geometrische Entwickelung der Characteristik (im I. Abschnitte) etwas ausführlicher behandelt, *weil für meine gegenwärtigen Fragestellungen die Form der Ableitung solcher Zahlen wesentlich ist. Diese wird nämlich gegeben mit Hülfe eines Ent-*

---

1) Beiträge zur Analysis situs I. Mittheilung; im Folgenden stets A. S. I. citirt.

2) Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1869 u. 1878.

3) Census räumlicher Complexe. Man sehe insbesondere den Lehrsatz auf pag. 77.

4) Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di matematica Se 2. tom. 4.

5) Auf Characteristiken von der in meiner Note »On the Analysis situs of threedimensional spaces« (Report of the British Association, Montreal 1884) angedeuteten Art gehe ich hier nicht ein.

stehungsprocesses der Mannigfaltigkeit, welcher, von einem Elementargebilde beginnend, in den verschiedenen Stadien die Aenderung der characteristischen Zahl zu verfolgen gestattet[1]. *Diese Ableitung ermöglicht es dann — sofern nur analytisch zugängliche Entwickelungsarten eines geometrischen Gebildes zu Grunde gelegt werden — sofort auch zur analytischen Formulirung der Characteristik überzugehen* (Abschnitt II) *und diese ist eben keine andere als die Kronecker'sche, welche die Characteristik eines Systems von* $(n+1)$ *eindeutigen reellen Functionen*

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0\,, \quad f_2 = 0\,, \ldots f_n = 0$$

von n reellen Veränderlichen (*wo die* f_i *die ersten Ableitungen von* f *nach den Variabeln bedeuten*) *angiebt. Die Betrachtung eines solchen Entstehungsprocesses führt dabei — zunächst für zwei- und dreidimensionale lineare Gebiete ausgesprochen — zu je zwei Relationen zwischen den »besonderen Punkten«* (*Doppelpunkten*) *eines beliebigen im Endlichen gelegenen ebenen Curvensystems* $f(x, y, z) = 0$ *mit einem Parameter* z, *und zu zwei analogen Relationen für die »besonderen Punkte«* (*Knotenpunkte*) *eines in unserem Raume im Endlichen gelegenen Flächensystems* $f(x, y, z, w) = 0$ *mit einem Parameter* w — Beziehungen, von denen ich einen speciellen Fall für Systeme *sich nicht schneidender Curven* in der Ebene (und auch auf beliebiger Fläche) in der ersten Abhandlung bereits formulirt habe[2]. Zum Schlusse ist noch auf die Weiterführung dieser Untersuchungen hingewiesen, welche in der vorliegenden Form nur die wesentlichen systematischen Betrachtungen für die Behandlung aller solchen Fragen entwickeln wollen.

---

1) Dabei erscheint es dann auch geometrisch berechtigt, wenn ich in der Folge für eine Fläche *die Kronecker'sche Characteristik K statt der Neumann'schen Grundzahl G* einführe, insoferne es naturgemäss erscheint, dem »*Nichtvorhandensein*« einer Mannigfaltigkeit die Characteristik *Null* zu ertheilen. Auch gestaltet sich die Formel, welche die Characteristik einer aus mehreren getrennten Theilen bestehenden Mannigfaltigkeit angiebt, unter Zugrundelegung der Kronecker'schen Zahl einfacher — nämlich direct als Summe der Characteristiken der Bestandtheile (vergl. pag. 59) — als für die Neumann'sche Grundzahl, die sich aus den Grundzahlen der einzelnen Theile *und der Anzahl der Theile* zusammensetzt (vergl. z. B. A. S. I. § 1).

2) Man vergl. hierzu die dort erwähnten auf solche Curvensysteme bezüglichen Untersuchungen von Reech, Möbius und Poincaré.

I. Abschnitt.

Geometrische Ableitung der Characteristik einer Mannigfaltigkeit.

Der vorliegende Abschnitt enthält zunächst die Ableitung der Characteristik *linearer* Mannigfaltigkeiten aus einem Entstehungsprocess der Mannigfaltigkeit, geht dann (§ 5) zu »*geschlossenen*« Mannigfaltigkeiten über und kennzeichnet schliesslich (§ 6) die Abzählung der Characteristik an der *fertigen* Mannigfaltigkeit.

§ 1.

Punktgruppen als Mannigfaltigkeiten M_0.

Nur der Uebersichtlichkeit einiger nachfolgender Formulirungen wegen erwähnen wir als Anfangsglied unserer Mannigfaltigkeiten diejenigen nullter Dimension, *die Punkte, deren Characteristik K_0 gleich ihrer Anzahl ist.*

§. 2.

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten M_1.

Das Elementargebilde E_1 einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit ist geometrisch vorgestellt durch ein begrenztes Stück einer Geraden.

Das Entstehen des Elementargebildes zählt $+1$, das Verschwinden -1. Die Trennung eines E_1 in zwei Stücke kommt dem Entstehen eines weiteren E_1 gleich und zählt somit für die Characteristik der Mannigfaltigkeit M_1 mit $+1$, die Vereinigung zweier E_1 entsprechend mit -1. Man kann sich die »Trennung« eines E_1 hergestellt denken durch Ausschaltung eines Punktes, also einer M_0 aus der Strecke, durch eine »Punktirung«, und mag dann den Satz formuliren[1]):

»Punktirungen« zählen für die Characteristik K_1 einer M_1 im S i n n e ihrer Punktcharacteristik.

Die entgegengesetzte Zählung tritt ein für die inverse Operation des Aufhebens einer Punktirung.

1) Der Satz ist in dieser Form nur mit Rücksicht auf die in § 3 und 4 gegebenen analogen Sätze ausgesprochen.

§ 3.

Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten M_2.

Das Elementargebilde E_2 einer ebenen Mannigfaltigkeit M_2 ist geometrisch gegeben durch das Innere einer geschlossenen, sich nicht selbst durchsetzenden ebenen Curve.

Das Entstehen des Elementargebildes zählt $+1$, sein Verschwinden -1. Die Trennung eines E_2 durch einen von Rand zu Rand geführten Schnitt »Querlinie« kommt dem Entstehen eines neuen E_2 gleich, und zählt also $+1$, die Vereinigung zweier Elementargebilde längs einer solchen Strecke zählt entsprechend -1 für die Characteristik K_2. Soferne eine solche Vereinigung zweier Randstücke auch an *einem* E_2 durch Zusammenbiegen statthaben kann und das entstehende ringförmige Ebenenstück auch durch Anbringung einer Oeffnung »Punktirung« in einem E_2 herzustellen ist, folgt, dass »Anbringung einer Oeffnung« als -1, Schliessen einer Oeffnung — eine Operation, die einer »Trennung« durch eine Querlinie im obigen Sinne gleichkommt — als $+1$ zu zählen ist.

Sonach kommen für die Abzählung der Charakteristik K_2 einer ebenen Mannigfaltigkeit M_2 die Sätze:

1. *Ein System von »Punktirungen« zählt für die Flächencharacteristik K_2 im entgegengesetzten Sinne seiner Punktcharacteristik K_0.*

2. *Ein System von »Querlinien« zählt für K_2 im Sinne seiner Curvencharacteristik K_1.*

Die entgegengesetzten Zählungen treten für die Aufhebung der besprochenen Operationen ein.

Weiter entnehmen wir den vorstehenden Ausführungen den Satz:

3. *Schneiden wir aus dem Innern unserer Mannigfaltigkeit M_2 eine andere Mannigfaltigkeit M_2' von gegebener Characteristik K_2' heraus, so ist dieses Entfernen von M_2' im entgegengesetzten Sinne der zugehörigen Characteristik K_2' zu zählen, und umgekehrt ist das Ausfüllen von eingeschlossenen Lücken im Sinne der zugehörigen Characteristik in Rechnung zu bringen.*

§ 4.

Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten M_3.

Das Elementargebilde E_3 ist geometrisch ein von einer Kugel oder einer daraus durch Biegung und Dehnung ohne Zerreissung ableitbaren Fläche begrenzter linearer Raum.

Das Entstehen von E_3 zählt $+1$, sein Verschwinden -1. Die Trennung eines E_3 durch eine ebene Lamelle E_2 »Querfläche«, deren Rand in der Begrenzung von E_3 liegt, zählt, weil damit ein weiteres E_3 hergestellt wird, $+1$ für die Characteristik K_3 von M_3; die Vereinigung zweier E_3 in einem solchen E_2 ist entsprechend -1 zu zählen. Die Vereinigung kann wieder an einem einzigen E_3 in zwei Stücken E_2 der Begrenzungsfläche vorgenommen werden und führt zu einem von einer Ringfläche begrenzten Raume, dessen Characteristik sonach Null beträgt. Wir können uns diese Umformung dadurch hergestellt denken, dass eine Durchbohrung an einem E_3 ausgeführt wird, dergestalt, dass zwei Punkte der Begrenzungsfläche von E_3 durch ein E_1 verbunden werden. Eine solche Durchbohrung oder *die Anbringung einer Querlinie* zählt demnach -1. Umgekehrt ist das Zuwachsen einer solchen Durchbohrung, also das Wegnehmen einer Querlinie E_1 mit $+1$ zu zählen. Um zu entscheiden, wie *die Anbringung einer Punktirung* für die Characteristik unserer M_3 zu zählen ist, denken wir uns einen von zwei concentrischen Kugeln begrenzten schalenförmigen Raum. Wir können denselben dadurch zu einem Elementargebilde E_3 umformen, dass wir beide begrenzende Schalen durch eine Querlinie verbinden, dass wir also durch eine Durchbohrung den innerhalb der Schalen gelegenen Raum mit dem Aussenraume vereinigen. Diese Durchbohrung ändert die Characteristik der von jenen beiden Kugeln begrenzten M_3 um -1. Die Characteristik des dabei entstandenen Raumes E_3 ist aber $+1$, also kommt dem erstgenannten Raume die Characteristik $+2$ zu. Soferne dieser aber auch durch Anbringung einer Punktirung aus einem E_3 abgeleitet werden kann, schliessen wir, dass eine solche hier $+1$ zu zählen ist. Jetzt können wir sofort auch entscheiden, wie sich die Characteristik einer M_3 ändert, wenn wir die M_3 mit solchen Querflächen schneiden, deren Flächencharacteristik nicht mehr gleich 1 ist.

Denken wir uns nämlich das E_3 durch n Punktirungen in eine M_3 von der Characteristik $n+1$ verwandelt, so lässt sich diese sofort in eine von $n+1$ Kugeln begrenzte M_3 (durch Erweiterung jener Punktirungen) verwandeln. Legen wir nun eine Querfläche, welche alle Kugeln schneidet, so besitzt diese Querfläche nach den Zählungen in § 3 die Characteristik $-n+1$. Nach Ausführung des Schnittes ist der Raum in zwei E_3 zerfällt, woraus folgt, dass der Schnitt in jener Querfläche für die Characteristik der M_3 nach Massgabe seiner Flächencharacteristik K_2 zu zählen ist.

Stellen wir die hiermit gewonnenen Sätze zusammen, so sind es die folgenden:

Für die Bestimmung der Characteristik K_3 einer M_3 zählen:

1. *Punktirungen im Sinne ihrer Characteristik K_0.*

2. *Querlinien im entgegengesetzten Sinne ihrer Characteristik K_1;*

3. *Querflächen im Sinne ihrer Characteristik K_2.*

Umgekehrt sind die Aufhebungen der bezeichneten Operationen zu zählen.

Weiter erschliessen wir aus den bisherigen Ausführungen den Satz:

4. *Schneiden wir aus dem Innern unserer Mannigfaltigkeit M_3 eine andere Mannigfaltigkeit M_3' von gegebener Characteristik K_3' heraus, so ist dieses Verschwindenlassen von M_3' im Sinne der zugehörigen Characteristik K_3' zu zählen, und umgekehrt ist das Ausfüllen von eingeschlossenen Hohlräumen im entgegengesetzten Sinne der zugehörigen Characteristik in Rechnung zu bringen.*

§ 5.

Uebergang zu »geschlossenen« Mannigfaltigkeiten M_2 und M_3.

Die hiermit gegebenen Sätze, welche die Characteristik der linearen Mannigfaltigkeiten erster bis dritter Dimension aus einem gemeinsamen Principe ergeben, können ersichtlich in ganz analoger Formulirung auch für mehr Dimensionen fortgeführt werden. Ich möchte indess auf diese weiteren Formulirungen hier nicht eingehen, vielmehr die in den vorstehenden Paragraphen gewonnenen Hülfsmittel noch verwenden, um die bisherigen Abzählungen, welche nur für *lineare* Mannigfaltigkeiten fixirt sind, die von Punkten, Curven bez. Flächen begrenzt sind, auch noch auf geschlossene Mannigfaltigkeiten auszudehnen. Dabei seien nur zwei- und dreidimensionale Gebilde in Betracht gezogen.

Wir stellen uns dann »geschlossene Mannigfaltigkeiten« dadurch her, dass wir bei den ebenen M_2 die begrenzenden Randcurven paarweise einander zugeordnet denken, und ebenso für die bisher betrachteten M_3 eine paarweise Zuordnung ihrer Begrenzungsflächen gegeben denken. Um dann die Characteristik der geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, bedarf es nur noch zweier Sätze, welche die Aenderung der Characteristik durch die Zuordnung je zweier Begrenzungscurven bez. Begrenzungsflächen angeben, Sätze, deren Umkehrung den Einfluss einer Zerschneidung einer M_2 bez. M_3 längs geschlossener Flächen angiebt.

Insoferne man nun einen geschlossenen innerhalb einer M_2 verlaufenden Schnitt durch eine »Punktirung« (-1) und eine »Querlinie« $(+1)$, welche von der Punktirung auslaufend wieder in dieselbe mündet, zusammengesetzt denken kann, folgt der Satz:

Ein geschlossener Curvenschnitt im Innern einer M_2 ändert deren Characteristik nicht. Ebenso bleibt also umgekehrt die Characteristik ungeändert bei der Zuordnung zweier Randcurven einer M_2.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich sofort die Characteristik einer beliebigen geschlossenen M_2 bestimmen durch Summation der Characteristik der ebenen Flächenstücke, deren Zusammensetzung jene M_2 ausmacht.

Beispielsweise wird eine »Kugelfläche« durch Zuordnung der Randcurven zweier E_2 gebildet und es kommt derselben sonach die Characteristik 2 zu. Eine Ringfläche, durch Zuordnung der Ränder eines ebenen zwischen zwei concentrischen Kreisen eingeschlossenen Gebietes herstellbar, erhält die Characteristik Null u. s. w.

Man erkennt gleichzeitig den (auch für mehr Dimensionen ausdehnbaren) Satz:

Die Characteristik K_2 einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M_2, die wir uns als Fläche in einem linearen dreidimensionalen Raume aufgeblasen denken können, ist gleich der doppelten Characteristik K_3 des zugehörigen Innenraumes jener Fläche.

Um auf den Einfluss eines im Innern einer M_3 ausgeführten Schnittes längs einer geschlossenen M_2 zu kommen, betrachten wir zunächst einen im Innern einer M_3 ausgeführten Kugelschnitt. Derselbe kann aus einer Punktirung $(+1)$ und einer Querfläche (von der Characteristik $+1$) zusammengesetzt werden, ändert also die Characteristik von M_3 um $+1+1=2$. Aehnliche Ueberlegungen ergeben den allgemeinen Satz:

Ein im Innern einer M_3 ausgeführter geschlossener Flächenschnitt von der Flächencharacteristik K_2 erhöht die Characteristik von M_3 um K_2. Umgekehrt wird durch die Zuordnung zweier Begrenzungsflächen einer M_3, welche beide die Characteristik K_2 besitzen, die Characteristik der M_3 um K_2 vermindert.

§ 6.

Unveränderlichkeit der Characteristik für verschiedene Erzeugungsweisen einer Mannigfaltigkeit.

Die Bedeutung der Characteristik liegt in der Unveränderlichkeit derselben all den verschiedenen Processen gegenüber, durch welche wir uns eine Mannigfaltigkeit erzeugt denken können. Bei der im Vorstehenden gegebenen Ableitung von K mit Hülfe *eines* Entstehungsprocesses der Mannigfaltigkeit ist es erforderlich, zu beweisen, *dass wir bei jedem Wege, auf welchem wir uns die Mannigfaltigkeit M entstanden denken können, auf dieselbe Zahl K geführt werden.* Dieser Satz ist unmittelbar bewiesen, sobald wir zeigen, dass unsere bisherige Ableitung der Characteristik *zu einer bestimmten Definition derselben an der fertigen Mannigfaltigkeit führt.*

Es seien diese Definitionen für *lineare zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten* (§ 3, 4) formulirt. Es genügt dabei nur von *zusammenhängenden* Mannigfaltigkeiten zu reden, denn es gilt (aus der *bisherigen* Ableitung von K) ganz allgemein der Satz:

Die Characteristik K einer aus beliebig vielen getrennten Theilen bestehenden Mannigfaltigkeit setzt sich aus der Summe der Characteristiken der Theile zusammen.

Ein zusammenhängendes ebenes Flächenstück kann man nun bezeichnen als ein Elementargebilde E_2, aus dessen Innern n ebensolche Elementargebilde E_2 herausgeschnitten sind: *Dann* *ist* $K_2 = 1 - n$ *d. i. die Differenz der Characteristiken des zu Grunde gelegten und der herausgeschnittenen Flächenstücke* E_2 *die unmittelbar an dem fertigen Flächenstücke ersichtliche Characteristik*[1]).

Ein zusammenhängendes und nur von *einer* geschlossenen Fläche begrenztes Stück unseres Raumes kann man bezeichnen als einen Elementarraum E_3, welcher n Durchbohrungen erhalten hat *und hier ist wieder* $K_3' = 1 - n$ *die unmittelbar am Gebilde selbst abzulesende Characteristik.* Allgemein wird man jedes *zusammenhängende Stück unseres Raumes* bezeichnen können als einen von einer geschlossenen Fläche nach aussen abgegrenzten Raum von der Characteristik K_3', aus dessen Inneren weitere Räume der obigen Art bez. von den Characteristiken K_3'', K_3''', ... $K_3^{(\nu)}$ herausgeschnitten sind. *Dann ist* $K_3 = \Sigma K_3^{(\nu)}$, *d. h. die Summe der Characteristiken des zu Grunde gelegten und der herausgeschnittenen Raumstücke die unmittelbar am Gebilde selbst abzulesende Characteristik*[2]).

II. Abschnitt.

Analytische Formulirungen.

Nachdem wir im Vorhergehenden überhaupt irgend welche continuirlichen Processe zur Erzeugung einer Mannigfaltigkeit M betrachtet haben, handelt es sich jetzt, wo wir uns eine solche Mannigfaltigkeit durch eine Gleichung gegeben denken, darum, derartige geometrische Umformungsprocesse für die Herstellung unserer Gebilde einzuführen, die gleichzeitig einer analytischen Behandlung fähig sind. Die folgenden Darstellungen bieten für Mannigfaltigkeiten von ein bis drei Dimensionen specielle Beispiele solcher Umformungsprocesse, die, zu einem Theile schon in meiner ersten Abhandlung angeführt, hier in systematischer Zusammenfassung erscheinen. Sie bezeichnen, ungeachtet ihres specielleren Characters, im Wesentlichen die Art auch allgemeinerer Formulirungen, auf welche noch in § 11 kurz hingewiesen wird.

Es sei bezüglich der nachstehend betrachteten Functionen f, f_1, f_2 ... noch bemerkt, dass wir sie an dieselben Bedingun-

---

1) cf. § 3. Satz 3.

2) Vergl. § 4. Satz 4.

gen geknüpft annehmen, die Kronecker für die Functionen seines Functionensystems zu Grunde legt[1]); ebenso ist die Bezeichnungsweise, wie schon in der ersten Mittheilung, mit der Kronecker'schen übereinstimmend.

§ 7.

Characteristik eindimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Gegeben eine Curve $f(x, y) = 0$. Man bestimme die Characteristik derjenigen Mannigfaltigkeit M_1, welche von den innerhalb $f = 0$ liegenden Theilen der Geraden $y = y_a$ gebildet wird.

Indem man eine Gerade parallel zur Geraden $y = y_a$ über die ganze Curve, von oben beginnend, mit abnehmendem y hingleiten lässt, entsteht die fragliche M_1 in der Art, dass bei jedem Maximum der Curve eine neue Strecke auftritt, bez. eine vorhandene sich theilt, während bei jedem Minimum eine Strecke verschwindet, bez. zwei Strecken zusammenwachsen. *Nach der Definition der Characteristik einer M_1 haben wir also sofort*

$$(1) \qquad \underset{y = y_a}{K_1} = \Sigma\, [f_2 \cdot f_{11}]\,,$$

diese Summe verstanden über alle Punkte

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0\,, \quad y > y_a\,.$$

Ferner ergiebt sich, da alle im Laufe der Bewegung entstandenen Strecken wieder verschwunden sind, wenn wir die ganze Curve mit der Geraden überstrichen haben:

$$(2) \qquad \Sigma\, [f_2 \cdot f_{11}] = 0\,,$$

soferne die Summation jetzt über alle Punkte

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0$$

ausgedehnt wird. *Durch diese Formel (2) ist eine erste Beziehung zwischen den Berührungspunkten horizontaler Tangenten einer ebenen Curve ausgedrückt.*

---

1) Für die Zusammenstellung der Kronecker'shen Formeln vergl. Monatsberichte 1878 pag. 145 oder auch A. S. I. § 4.

§ 8.

Characteristik zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Gegeben eine Fläche $f(x, y, z) = 0$. Man bestimme die Characteristik der Mannigfaltigkeit zweiter Dimension M_2, welche von den innerhalb $f = 0$ liegenden Theilen der Ebene $z = z_a$ gebildet wird.

Wir lassen eine Ebene $z =$ const. über die Fläche herabgleiten (mit abnehmenden Werthen z) und fragen nach der Characteristik des jedesmaligen ebenen Schnittes. Die Schnitte bilden auf die xy-Ebene projicirt das einfach unendliche System $f(x, y, z) = 0$ mit z als Parameter. Die Characteristik des Innern dieser Schnittcurven ändert sich jedesmal in den Tangentialebenen der Fläche, so zwar, dass wir für diese Aenderung vier Arten von Berührungen unterscheiden können.

(a) und (b). Die Schnittcurve hat an der Berührungsstelle einen isolirten Doppelpunkt.

Dann wird bei der Bewegung der Ebene $z =$ const. im vorgeschriebenen Sinne (mit abnehmendem z) ein Stück der Mannigfaltigkeit M_2 entstehen, bez. eine Oeffnung in demselben verschwinden, oder aber es wird ein vorhandenes Stück der M_2 verschwinden bez. eine Oeffnung in einem solchen entstehen. Die beiden ersten Vorkommnisse sind ersichtlich mit $+1$ für die Aenderung der Characteristik von M_2 zu zählen, die letzten beiden als -1.[1])

(c) und (d). Die Schnittcurve hat an der Berührungsstelle einen Doppelpunkt mit reellen Zweigen.

Dann wird bei der Bewegung unserer Ebene $z =$ const. mit abnehmendem z entweder ein Stück der M_2 sich in zwei spalten, oder es werden zwei vorher getrennte Theile sich vereinigen. Das erste Vorkommniss ist ersichtlich mit $+1$, das zweite mit -1 für die Characteristik von M_2 in Rechnung zu bringen[2]).

---

[1]) Man mag die Unterscheidung auch durch den Umstand characterisiren, dass man in den ersten beiden Fällen »von oben betrachtet« die Aussenseite, in den beiden letzten Fällen die Innenseite der Fläche $f = 0$ sieht. Die analoge Unterscheidung tritt auch für die Fälle (c) und (d) ein.

[2]) Vergl. die vorstehende Anmerkung.

Die analytische Formulirung der bezeichneten Unterschiede ergiebt nun sofort die verlangte *Characteristik* $K_{2\atop z=z_a}$ *des ebenen Schnittes* $z = z_a$ *in der Formel:*

$$(3) \qquad K_{2\atop z=z_a} = \Sigma \left[f_3 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right],$$

in welcher die Summation über alle Punkte

$$f = 0\,,\quad f_1 = 0\,,\quad f_2 = 0\,,\quad z > z_a$$

verstanden ist.

Die Gleichung

$$(4) \qquad \Sigma \left[f_3 \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right] = 0\,,$$

welche, analog wie in § 7, wieder eintritt, wenn wir die Summation über alle Punkte

$$f = 0\,,\quad f_1 = 0\,,\quad f_2 = 0$$

ausdehnen, giebt dabei eine (erste) Beziehung zwischen den Doppelpunkten jenes Curvensystems. Dabei sei hervorgehoben, dass wir diese Beziehung auffassen können als geltend für ein auf der Fläche $f = 0$ *verlaufendes System von sich nicht schneidenden Curven*[1]) *oder aber, als geltend für ein beliebiges ebenes Curvensystem* $f(x, y, z) = 0$ *mit* z *als willkürlichem Parameter.*

Zusatz. Wir können die hiermit gefundene Characteristik eines Curveninneren sofort auch verwerthen, um für die in § 7 gegebenen Berührungspunkte horizontaler Tangenten einer Curve $f(x, y) = 0$ eine weitere Formel abzuleiten. Betrachten wir nämlich, um die Characteristik des Innenraumes der Curve $f(x, y) = 0$ zu bestimmen, das Curvensystem

$$f(x, y) + z = 0\,,$$

so wird nach Formel (3) die fragliche Characteristik gegeben durch

$$(5) \qquad K_{2\atop z=0} = \Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right],$$

wobei die Summation verstanden ist über alle Punkte

$$f(x, y) + z = 0\,,\quad f_1 = 0\,,\quad f_2 = 0\,,\quad z > 0\,,$$

---

[1]) Also für ein »Curvensystem S« von der in A. S. 1 (§ 2) gebrauchten Art.

oder kürzer, über alle Punkte

$$f(x,\, y) < 0\,, \quad f_1 = 0\,, \quad f_2 = 0\,.$$

Diese Characteristik lässt sich aber auch durch die andere Formel

$$(6) \qquad \underset{z=0}{K_2} = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, [f_{11}]$$

darstellen, wobei diese Summation jetzt über alle Punkte

$$f = 0\,, \quad f_1 = 0\,,$$

d. h. eben über jene in § 7 betrachteten Berührungspunkte, ausgedehnt ist [1]). *Formel* (6) *liefert also eine zweite Beziehung zwischen jenen Berührungspunkten, deren geometrische Bedeutung sich in einfachster Weise formulirt* [2]).

§ 9.

Characteristik dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Gegeben ein geschlossener Raum von drei Dimensionen in einem linearen Raume von vier Dimensionen durch $f(x, y, z, w) = 0$. *Man bestimme die Characteristik der Mannigfaltigkeit* M_3, *welche von den innerhalb* $f = 0$ *liegenden Theilen des linearen Raumes* $w = w_a$ *gebildet wird.*

Wir lassen die lineare M_3' $w =$ const. über die gegebene Mannigfaltigkeit $f = 0$ herabgleiten und fragen nach der Characteristik des vom jedesmaligen Schnitte begrenzten dreidimensionalen Raumes M_3. Die Reihenfolge aller dieser Schnitte bildet nach $w = 0$, d. h. in unsern Raum projicirt, das Flächensystem $f(x, y, z, w) = 0$ mit w als Parameter. Die Characteristik für den Innenraum der einzelnen Flächen dieses Systems ändert sich nun jedesmal für »berührende« $w =$ const., d. h. jedesmal, wenn eine Fläche des Systems einen Knotenpunkt besitzt. Dabei sind für die Aenderung der Characteristik, wie aus den Definitionen in § 4 des I. Abschnittes sofort folgt, vier Unterschiede bezüglich der Art der auftretenden Knotenpunkte zu treffen:

---

[1]) Vergl. Kronecker Monatsber. 1878 pag. 145.
[2]) A. S. I. § 5.

(a) und (b). Für isolirte Knotenpunkte ist zu unterscheiden

ob in dem betreffenden Punkte (und der durch »abnehmende« w bezeichneten Richtung der Durchlaufung unseres Flächensystems) ein reeller (elliptisch gekrümmter) Flächentheil entsteht, oder umgekehrt

sich ein reeller Flächentheil in einen Punkt zusammenzieht und dann verschwindet.

(c) und (d). Die Knotenpunkte mit reellem Tangentialkegel sind zu trennen

in solche, bei denen ein hyperbolisch gekrümmter Flächentheil sich in zwei elliptische spaltet, und umgekehrt

in solche, bei denen zwei elliptisch gekrümmte Flächentheile sich zu einem hyperbolisch gekrümmten vereinigen.

Die in § 4 des I. Abschnittes gegebenen Entwickelungen zeigen, dass für die Abzählung der Characteristik des Innenraumes unserer Flächen die Fälle (a) und (c) mit $+1$, die Fälle (b) und (d) mit -1 zu rechnen sind. *Analytisch ergiebt sich die fragliche Summation, welche die Characteristik des Schnittes $w = w_a$ von $f(x, y, z, w) = 0$ liefert, durch die Formel*

$$(7) \qquad \underset{w = w_a}{K_3} = \Sigma \left[f_4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \right]$$

die Summation erstreckt über alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \qquad w > w_a.$$

Dabei liegt wieder in der Gleichung

$$(8) \qquad \Sigma \left[f_4 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \right] = 0,$$

welche bei der Summation über a l l e Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

statthat, eine erste Relation zwischen jenen Knotenpunkten vor. Auch diese Beziehung mag man dabei wieder geometrisch deuten als geltend für ein System von Flächen, welche sich nicht schneidend als lineare Schnitte auf jener M_3 $f(x, y, z, w) = 0$ angeordnet sind, oder aber als eine Relation zwischen den Knotenpunkten *eines beliebigen Flächensystemes $f(x, y, z, w) = 0$ in unserem gewöhnlichen Raume mit w als Parameter.*

Zusatz. Die hiermit gefundene Characteristik eines von einer Fläche begrenzten linearen Raumes von drei Dimensionen können wir wieder für die in § 8 gegebene Fläche $f(x, y, z) = 0$ verwenden, indem wir diese successive entstehen lassen aus dem Flächensysteme (von sich nicht schneidenden Flächen):

$$f(x, y, z) + w = 0 .$$

Wir erhalten hierfür durch Anwendung der Formel, dass die Characteristik des Innenraumes der Fläche $w = 0$ gegeben ist durch

$$(9) \qquad \underset{z=0}{K_3} = \Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \right],$$

diese Summe verstanden über alle Punkte

$$f < 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0 .$$

Diese Formel lässt sich, wie schon in dem ersten Aufsatze[1]) erwähnt, umsetzen in die andere

$$(10) \qquad \underset{z=0}{K_3} = \tfrac{1}{2} \Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \right],$$

in welcher die Summation über alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0$$

verstanden ist.

Sie giebt, da sie sich wieder auf die schon in Formel (4) betrachteten Berührungspunkte horizontaler Tangentialebenen der Fläche $f(x, y, z) = 0$ bezieht (und zwar diesmal ihrem Character als Doppelpunkte mit imaginären bez. reellen Tangenten entsprechend) eine zweite Relation für jene Punkte.

§ 10.

Zweite Relation zwischen den Knotenpunkten eines Flächensystems.

Die ganz analoge Ausführung der Abzählung bei mehr Dimensionen sei hier nur *in der einen Relation besprochen, welche*

1) Vergl. Kronecker, Monatsberichte 1878 pag. 145 und A. S. I. § 6.

(den Formeln (6) *und* (10) *analog) eine zweite Beziehung für die Knotenpunkte des in* § 9 *behandelten Flächensystems* $f(x, y, z, w) = 0$ *giebt*, durch die besondere Abzählung der Characteristik des durch $f = 0$ begrenzten linearen vierdimensionalen Raumes, bei welcher wir denselben entstehen lassen durch successives Anwachsen aus dem Systeme $f(x, y, z, w) + t = 0$. Es ergiebt sich dann für die Characteristik $\underset{t=0}{K_4}$ der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit zunächst eine den Formeln (5) und (9) analoge Darstellung, welche (Formel (6) und (11) entsprechend) umgesetzt werden kann in

$$(11) \qquad \underset{t=0}{K_4} = \frac{1}{2} \Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \right],$$

die Summe auf alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

ausgedehnt. Diese Formel verlangt jetzt die Knotenpunkte des Flächensystems $f = 0$ derart zu summiren,

dass alle *isolirten Knotenpunkte* der einzelnen Flächen des Systems mit $+1$ oder -1 gezählt werden, je nachdem der den Knotenpunkt umgebende Raum positiv oder negativ ist mit Bezug auf die betreffende Fläche, und analog

die *Knotenpunkte mit reellem Tangentialkegel* mit $+1$ oder -1 für die Characteristik zählen, je nachdem der *ein*theilige oder der *zwei*theilige Raum, welcher die Kegelfläche umgiebt, positiv oder negativ ist.

Dieser Unterschied ist aber geometrisch sofort am Flächensystem selbst erkennbar, da nach unserer Annahme für alle Flächen des Systems der unendlich ferne Punkt des Raumes im positiven Gebiet von f liegt.

§ 11.

Allgemeinere Formulirungen.

Die in den vorstehenden Paragraphen gegebenen Entwickelungen haben uns — ich beschränke mich in der Sprechweise auf die Gebiete von zwei und drei Dimensionen — für ebene Curvensysteme $f(x, y, z) = 0$ und für Flächensysteme

$f(x, y, z, w) = 0$ je mit einem Parameter z bez. w in unserem gewöhnlichen Raume jedesmal zwei Relationen erkennen lassen, die zwischen den »besonderen Punkten« dieser Systeme bestehen. Die Auffassungsweise dieser Systeme als den Entstehungsprocess zwei- und dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten schildernd, macht es evident, dass irgend anderen als den hier zu Grunde gelegten einfachsten Entwickelungsarten einer Mannigfaltigkeit analoge Relationen entspringen müssen, dass also die hier abgeleiteten Beziehungen, ohne einen wesentlich neuen Gedanken auch übertragbar sind, beispielsweise für Curvensysteme auf beliebigen Flächen, für Flächensysteme in beliebig gestalteten dreidimensionalen Räumen.

Der Umstand weiter, dass die Characteristik unserer Mannigfaltigkeiten in *gleicher* Weise sich für »geschlossene«, wie für berandete Gebiete abzählen lässt, führt zur Aufstellung von Relationen für Curvensysteme, die nicht mehr ein geschlossenes Ganze bilden, sondern durch gewisse Randcurven begrenzt erscheinen[1]), weiter zu Relationen für solche Flächensysteme, die, in einem dreidimensionalen Raume gelegen, jetzt auch wieder nur bis zu gewissen Grenzflächen betrachtet sein sollen.

Auch wird man sich, geometrisch wenigstens, von den im Vorstehenden eingeführten Einschränkungen über die Art der »besonderen« Punkte in unseren Systemen frei zu machen haben, um auf die allgemeineren Formulirungen im Sinne des I. Abschnittes meiner ersten Mittheilung zu gelangen.

Ich hoffe im Verfolg der Untersuchungen auch hierauf eingehen zu können.

---

1) Also Relationen von der in A. S. I. Abschnitt I. gegebenen Art.