

## VIII.

### Topologische Betrachtungen.

Von

Dr. HERMANN BRUNN

in München.

Hierzu Tafel IV, Figur 1—11.

#### I.

#### Kritische Bemerkungen zu dem von Simony aufgestellten Begriffe der Torsion verknoteter Bänder.

In seiner Schrift: „Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: „in ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen“ und verwandter merkwürdiger Probleme“ bestimmt O. Simony u. A. die „Torsion“ gewisser geschlossener Bänder, eine Constante, die in der That in vielen Fällen direct auf den gewöhnlichen Begriff der Torsion sich bezieht. Der Umstand, dass seine populären Auseinandersetzungen hierüber Versehen enthalten, die in den späteren Aufsätzen Simony's keine Berichtigung finden und neuerdings auch in eine andere wissenschaftliche Schrift\* übergegangen sind, veranlasst mich zu einigen Bemerkungen über diesen für die Lehre von den verschlungenen Bändern fundamentalen Punkt.

Wir geben zunächst einen wörtlichen Abdruck der auf die Bestimmung der Torsionszahl bezüglichen Hauptstelle (l. c. § 1, S. 2—4).

#### Citat I.

„Man verwendet ... einen rechteckigen Papierstreifen, in dessen Ecken auf seiner oberen und unteren Fläche beispielsweise nach dem Muster der schematischen Figur 1 die Ziffern 1, 2, 3, 4 geschrieben werden mögen, wobei jedes Eck beiderseits mit derselben Ziffer zu versehen ist. Biegt man hierauf die beiden Enden des Streifens in der durch die schematische Figur 2\*\* versinnlichten Art gegen einander und verdreht dessen recht-

\* Topologische Studien etc. von Dr. Fr. Dingeldey. Leipzig 1890 bei B. G. Teubner.

\*\* Siehe auf unserer Tafel IV, Figur 1. Die Figurenummern im Folgenden beziehen sich stets auf Tafel IV.

seitiges Ende so lange, bis die Ecken (1) und (4), (2) und (3) zum ersten Male neben einander zu liegen kommen, so hat man eine Drehung um  $1 \times 180^\circ$  ausgeführt. Ich nenne dieselbe positiv (+), wenn sie im Sinne des Pfeiles ( $p$ ), negativ (-), wenn sie im entgegengesetzten Sinne vorgenommen worden ist. Durch Verdoppelung, Verdreifachung etc. der eben charakterisirten Drehung lässt sich analog eine Verdrehung des rechtseitigen Endes um  $2 \times 180^\circ$ ,  $3 \times 180^\circ$  etc. erzeugen; sie wird als positiv oder negativ zu bezeichnen sein, je nachdem sie aus einer Verdoppelung, Verdreifachung etc., einer positiven oder einer negativen Drehung um  $1 \times 180^\circ$  hervorgegangen ist.

Die Vereinigung beider Enden des Streifens liefert natürlich stets einen ringförmig geschlossenen, knotenfreien Streifen, dessen Gesamttorsion ( $T$ ) mit jener des rechtseitigen Endes des ungeschlossenen Streifens übereinstimmt. Handelt es sich also umgekehrt um den Nachweis einer bestimmten Gesamttorsion in einem ringförmig geschlossenen, knotenfreien Streifen, so verwandle man denselben mittels eines, seine ganze Breite durchsetzenden Querschnittes in einen Streifen mit zwei freien Enden und verdrehe dessen rechtseitiges Ende bei negativem  $T$  in positivem, bei positivem  $T$  in negativem Sinne um jenes Vielfache von  $180^\circ$ , welches für  $T$  angegeben wurde. War die betreffende Angabe richtig, so müssen nach Vollendung dieser Operation sämtliche Torsionen aus dem Streifen verschwunden sein. Ebenso einfach gestaltet sich die Prüfung der Gesamttorsion eines ringförmig geschlossenen Streifens, falls derselbe einen Knoten von dem Habitus der schematischen Figuren 13, 14, 27, 28, 31, 32\* besitzt. Schneidet man nämlich den Streifen unmittelbar neben den Umschlingungen des Knotens quer durch und zieht jenen Theil des Streifens, welcher die Umschlingungen trägt, ohne Drehung aus den letzteren heraus, so hat man den vorgelegten Streifen ohne Aenderung seiner Gesamttorsion in einen knotenlosen Streifen mit zwei freien Enden transformirt, dessen Gesamtverdrehung wieder in der zuvor beschriebenen Weise controlirt werden kann.“

Vor Allem sei der mit Knotenexperimenten nicht vertraute Leser gewarnt, die hier mit den Streifen vorgenommene Operation für eine harmlose und überhaupt ein Aufschneiden und Hervorziehen eines Streifentheiles, wenn nur keine neue Torsion hinzugefügt wird, bei Bestimmung der Torsionszahl für erlaubt zu halten. Einige Beispiele werden sofort zeigen, in welche Widersprüche man dadurch gerathen kann. Figur 4 entspricht der Figur 19 bei Simony. Wollte man die Torsion des abgebildeten Bandes dadurch bestimmen, dass man dasselbe bei  $a$  aufschneidet, den Theil  $ab$  aus den Umschlingungen ohne Torsion hervorzieht und über den früheren Umschlingungen zur Schnittstelle  $a$  hinlaufen lässt, so würde das jetzt unverknotete Band eine Torsion von  $4\pi$  aufweisen; verführe man genau so,

\* Vergl. auf unserer Tafel die als Repräsentanten ausgewählten Fig. 2 und 3.

nur mit der Aenderung, den herausgezogenen Streifen unter den früheren Umschlingungen zur Schnittstelle hinlaufen zu lassen, so würde sich eine Torsion von  $8\pi$  ergeben. Welche der beiden Zahlen soll nun als Torsionszahl des ursprünglichen, verknoteten Bandes angesehen werden? Und warum soll nicht jede der beiden Operationen zur Bestimmung der Torsion ebenso berechtigt sein, wie die von Simony vorgeschlagene? Oder: Figur 5 stellt ein Band vor, dessen Torsion entweder direct nach der für unverknotete Ringe gegebenen Vorschrift oder mittels Aufschneiden bei  $a$  und Herausziehen von  $ab$  aus der Umschlingung etc. bestimmt werden kann, wobei die einer Umwandlung unterworfenen Stelle der in Fig. 14 bei Simony abgebildeten ganz gleich ist. Das erste Verfahren giebt als Torsionszahl  $-\pi$ , das zweite  $+3\pi$ . Wie steht es mit der Berechtigung eines Verfahrens, das schon bei so einfachem Beispiel zu den bedenklichsten Widersprüchen führt?

Nun sagt allerdings Simony selbst in der auf das Citat I bezüglichen Anmerkung 5:

Citat II.

„Dieser Satz hat lediglich den Werth einer empirischen Regel, welche zwar speciell für die hier in Betracht kommenden Knotenformen richtige Resultate liefert, im Allgemeinen jedoch keine unbedingte Giltigkeit besitzt.“

„Empirisch“ möchten wir die Regel deswegen nicht nennen, weil nur ein einziger Umstand bei ihrer Begründung auf Empirie gestützt werden kann. Bei einem einzigen der von Simony in § 1 behandelten Gebilde nämlich kann die Torsion einwurfsfrei empirisch bestimmt werden. Es ist dies Gebilde das durch Mittelschnitt aus einem geschlossenen, einmal tordirten Bande entstehende Band, und die dafür gefundene Torsionszahl ordnet sich allerdings dem Gesetze unter, das für die Torsionszahlen der aus mehrfach tordirten Bändern entstehenden Streifen mittels obiger Regel aufgestellt wird.

Für diese letzteren Streifen aber stellt die Regel dogmatisch, nicht empirisch, etwas fest.

Es ist noch zweckdienlich, die Gründe kennen zu lernen, die Simony veranlassten, seiner Regel unbedingte Giltigkeit abzusprechen. In einem seiner anderen Aufsätze: „Sitzb. d. Wien. Ac. II. Abth. 1881, S. 250“ findet sich die Stelle:

Citat III.

„Endlich muss bei der Erledigung des 2. Hauptfalles noch der Thatsache Rechnung getragen werden, dass die hierbei in Betracht kommenden Verknüpfungen und Verschlingungen je nach der Art ihrer Auflösung verschiedene Torsionszahlen liefern, also durch das Experiment im Allgemeinen nur die ausserhalb der betreffenden Verknüpfung resp. Verschlingung auf-

tretenden Torsionen um je  $180^\circ$ , welche in ihrer Gesamtheit die jeweilige äussere Verdrehung:  $V = \xi \times 180^\circ$  der untersuchten Fläche bestimmen, ihrem Sinne und ihrer Anzahl nach eindeutig festgestellt werden können.“

Den einfachsten Fall der in Frage stehenden Verknüpfungen und Verschlingungen stellen die beiden Figuren 6 und 7 dar. Im allgemeinen Fall dürfen an Stelle der einen Umschlingung bei  $ab$  beliebig viele gleichsinnige Umschlingungen des horizontalen Streifentheiles treten, auch darf der Sinn der Umschlingungen bei  $ab$  und  $cd$  ein anderer als in der Figur sein. Simony setzt auseinander, dass für Figur 6, je nachdem man die im Citat I am Schlusse beschriebene Operation nur auf die Stelle  $ab$ , nur auf die Stelle  $cd$ , oder auf beide Stellen zusammen anwendet, die Torsionen  $-4\pi$ ,  $+4\pi$  oder  $0$  erhalten werden, dass aber bei Vergleichung der Figur mit einer symmetrischen Gründe sich ergeben, welche nur die letzte Torsion als die richtige erscheinen lassen. Analoges gilt von Figur 7.

Was nun hier nachgewiesen werden soll, ist, dass die in Citat I gegebene Regel nicht nur für die Knoten im Citat III zweifelhafte, sondern auch für die in der populären Schrift behandelten direct verwerfliche Resultate giebt, dass aber sehr wohl eine Regel aufgestellt werden kann, welche stets unzweideutige, unter einander widerspruchsfreie und mit der Empirie übereinstimmende Torsionszahlen liefert.

Es ist klar, dass die Regel Citat I hätte in Beziehung gesetzt werden müssen zu der Stelle S. 5—6, wo das Torsionsäquivalent von Ueberkreuzungen in folgender Weise besprochen wird:

Citat IV.

„An die hier gegebene elementare Erläuterung des ersten und zweiten Experiments knüpft sich ausserdem noch eine theoretische Folgerung, welche speciell für die Beurtheilung der jeweiligen Gesamtverdrehung eines geschlossenen, mit einem Knoten versehenen Streifens von Bedeutung ist. Da sich nämlich die Figuren 4 und 6\* lediglich durch die zwischen ihren Hälften auftretenden Ueberkreuzungen unterscheiden, so bildet eine Ueberkreuzung zweier Theile eines und desselben geschlossenen Streifens, gemäss unserer letzten Bemerkungen, das charakteristische Aequivalent für eine Torsion um  $+2.180^\circ$  resp.  $-2.180^\circ$ , je nachdem sie mit der als positiv zu bezeichnenden Ueberkreuzung in Figur 4 oder mit der negativen Ueberkreuzung in Figur 6 gleichsinnig ist. Es kann daher auch umgekehrt eine Torsion um  $+2.180^\circ$  als positive Ueberkreuzung, eine solche um  $-2.180^\circ$  als negative Ueberkreuzung zweier Streifentheile auftreten, welcher Satz sich u. A. durch Flachdrücken eines um  $2.180^\circ$  resp. um  $-2.180^\circ$  verdrehten, ringförmig geschlossenen Streifens besonders anschaulich controliren lässt.“

\* Siehe unsere Tafel Fig. 8 und 9, wo die Stellung der Figuren übrigens verändert ist.

Denn bei der in der Regel Citat I vorgeschriebenen Operation werden Ueberkreuzungen aufgehoben, oder ihre Natur verändert. Es scheint nun Simony das Versehen passirt zu sein, die aufgehobenen Ueberkreuzungen als paarweise einander entgegengesetzt, und somit einer Torsion 0 äquivalent angesehen zu haben. Indem nämlich bei ihm S. 5 und 6 der Unterschied einer positiven und negativen Ueberkreuzung einfach durch Hinweis auf seine Figuren 4 und 6 erklärt wird, lag die Gefahr nahe, Ueberkreuzungen durch eine oberflächliche Vergleichung nur der unmittelbar in der Nähe der Ueberkreuzungen befindlichen Streifentheile falsch zu beurtheilen.

Man braucht, um ein gleiches Aussehen beider Figuren in der Nähe der Ueberkreuzungsstelle herbeizuführen, nur eine derselben in ihrer Ebene, um  $90^\circ$  zu drehen. Es ist daher gerathen, den „Sinn“ einer Ueberkreuzung etwas sorgsamer, etwa folgendermassen zu definiren:

Man halte die Ueberkreuzung so vor sich hin, dass der dem Blick zugewendete (vordere) Streifentheil in der Nähe der Ueberkreuzungsstelle senkrecht, der andere wagrecht verläuft, und denke sich von der Kreuzungsstelle  $o$  nach oben gegen  $a$  einen das Band durchlaufenden Punkt ausgehen; kommt derselbe im weiteren Verlaufe von rechts, von  $b$ , zur Ueberkreuzungsstelle zurück, so liegt eine rechtsinnige, positive Ueberkreuzung vor (s. Fig. 8); im entgegengesetzten Falle eine linksinnige, negative (s. Fig. 9).\*

Beachtet man diese Vorschrift und nimmt man den Satz von der Aequivalenz einer positiven Streifen-Ueberkreuzung mit einer Torsion von  $+2\pi$ , einer negativen Streifen-Ueberkreuzung mit einer Torsion von  $-2\pi$  als allgemein gültig an, so kommt man in allen von mir untersuchten Fällen zu einer einheitlichen, unzweideutigen und mit der Erfahrung übereinstimmenden Bestimmung der Torsionszahl.

Beispiele. Die Ueberkreuzungen in den Fig. 13, 27, 31\*\* bei Simony sind sämtlich positiv, die in seinen Fig. 14, 28, 32 sämtlich negativ.

S. Fig. 5. Die beiden Ueberkreuzungen sind negativ, ausserdem in dem Bande 3 positive Torsionen um  $\pi$  vorhanden. Die Gesammttorsion wird somit  $(3-4)\pi = -\pi$  sein, wie man dies auch beim Auseinanderfalten, Aufschneiden und Torsionslosmachen des Bandes bestätigt findet.

S. Fig. 6. Die beiden Ueberkreuzungen bei  $a$ ,  $b$  sind positiv, die bei  $c$ ,  $d$  negativ, so dass ihre Torsionsäquivalente sich aufheben; die Ueberkreuzung bei  $e$  ist negativ, ausserdem besitzt das Band 2 Torsionen um  $\pi$ , so dass als Gesammttorsion 0 sich ergibt, entsprechend dem von Simony, unter den drei von ihm erhaltenen, aus Symmetriegründen als einzig richtig hervorgehobenen Resultate.

\* Diese Erklärungen sind verwandt, aber nicht identisch mit der von Listing gegebenen Unterscheidung einer dextropen und laetropen Ueberkreuzung. S. in den Göttinger Studien I. 1847 die „Vorstudien zur Topologie“. S. 860 u. ff.

\*\* Vergl. auf unserer Tafel Fig. 2 und 3.

Die Verschiedenheit der Resultate bei Simony hängt damit zusammen, dass er einmal eine positive, einmal eine negative, und einmal zwei entgegengesetzte Ueberkreuzungen aufhebt und in entgegengesetzte verwandelt.

S. Fig. 4. An dieser Figur bestimmt Simony die Torsion eines Bandes, die er vorher nach Regel Citat I bestimmt hat, direct durch Flachdrücken und Abzählen der Torsionen und Ueberkreuzungen. Auffälliger Weise gelangt er zu dem nämlichen Ergebniss wie vorher. Sollen wir also Recht haben, so muss hier abermals ein Fehler vorliegen, und in der That bezeichnet Simony die Ueberkreuzung bei  $p$  als negativ, während sie doch positiv ist, und erhält dadurch eine um  $+4\pi$  zu kleine Torsionszahl.

Ganz ähnliche Versehen liegen bei den Torsionsbestimmungen sämtlicher Knoten in §§ 1 und 2 vor, indem Simony allgemein bei einem Knoten, der aus  $(2K+1)$ -fach tordirtem Ringbande durch Mittelschnitt entstanden ist,  $2K$  gleichsinnige Ueberkreuzungen bei der Zählung vernachlässigt, und dadurch den absoluten Werth der Torsion um  $4K\pi$  zu klein erhält. Demgemäss ist die Stelle auf Seite 15, Zeile 17 von oben in folgenden Wortlaut umzugestalten:

„Ausser dem Knoten besitzt der neu erzeugte Streifen auch noch eine charakteristische Verdrehung, indem seine Gesamttorsion zwar mit jener des ursprünglichen Streifens gleichsinnig, ihr absoluter Betrag jedoch auf  $4(2K+1).180^\circ$  [nicht  $4(K+1).180^\circ$ ] gestiegen ist, wobei  $2(2K+1)$  Torsionen um je  $180^\circ$  stets in der Form von  $2K+1$  Ueberkreuzungen zweier Streifentheile auftreten.“

Ebenso ist auf Seite 19, Zeile 17 von oben entsprechend zu corrigiren in: „...Beide Streifen zeigen eine mit jener des ursprünglichen Streifens gleichsinnige Gesamtverdrehung, deren absoluter Werth bei dem längeren  $4(2K+1).180^\circ$  ausmacht, etc.“

## II.

### Andere Auffassung des Torsionsbegriffes. Die Zahl $\nu$ .

Nachdem sich nun gezeigt hat, dass die im Vorliegenden behandelte Eigenschaft der „Torsion“ bei Verknotung des Bandes gar nicht rein durch eine Torsion des Bandes dargestellt werden kann, ohne Aenderungen an dem Bande vorzunehmen, deren Zulässigkeitsbeweis bei rein empirischem Verfahren zu einem *circulus vitiosus* verführt, wird man über das rein empirische Verfahren hinausgehen und versuchen müssen, von vornherein eine auf alle Bänder gleichmässig anwendbare Definition zu erlangen.

Eine solche Definition lässt sich gewinnen, indem man die Verschlingung\* der Randcurven, resp. der Randcurve des Bandes ins Auge fasst.

Wir knüpfen die Betrachtung an die plattgedrückte Form der Bänder, wie sie unsere Figuren aufweisen, und beginnen mit dem Fall, dass das

\* Die Wichtigkeit des Gauss'schen Begriffes der Verschlingung an dieser Stelle wurde mir gesprächsweise von Herrn Prof. W. Dyck betont.

Band zwei Randcurven besitzt, wie sich dies bei den strittigen Figuren Simony's in der That immer so verhält.

Die beiden Ränder sind dann zwei geschlossene Curven in einer Ebene, an deren Kreuzungspunkten ein Untenliegen der einen und Obenliegen der andern unterschieden wird. Es lässt sich für diese „Ueberkreuzungen“ zweier Curven der relative Sinn ganz ähnlich feststellen, wie dies für die Ueberkreuzungen einer Curve oder eines Streifens schon oben auf Seite 110 von uns ausgeführt worden ist.

Man theile jeder Curve einen bestimmten Sinn — Pfeil — zu, in dem sie durchlaufen werden soll. Eine Ueberkreuzung soll positiv oder rechts-sinnig heissen, wenn, sobald man in der Richtung des Pfeiles der obern, dem Beschauer zugewendeten Curve blickt, der Pfeil der untern Curve von rechts zur Ueberkreuzungsstelle kommt, nach links sie verlässt. Die Seite, von welcher man die Ebene der Curven ansieht, hat hierbei keinen Einfluss auf die Bestimmung. Dagegen ändert sich allerdings der Sinn der Ueberkreuzung, sobald man den Pfeil einer der beiden Curven umdreht, was bei der Bestimmung des Charakters der Ueberkreuzungen einer Curve nicht der Fall ist. Die Unterscheidung, welche Ueberkreuzungen gleichen, welche entgegengesetzten Sinn haben, ist aber wieder unabhängig von der Richtung der Pfeile, mit anderen Worten, es ist der „relative“ Sinn der Ueberkreuzungen eindeutig bestimmt; ebenso auch der absolute Werth der Differenz  $\delta - \lambda$ , wo  $\delta$  die Anzahl der positiven,  $\lambda$  die der negativen gegenseitigen Ueberkreuzungen beider Curven bedeutet.

Diese Differenz  $\delta - \lambda$  ist bei Unveränderlichkeit der Pfeile für stetige Gestaltsveränderungen beider Curven, die unter Wahrung der Undurchdringlichkeit derselben vorgenommen werden, eine Invariante, da bei diesen Aenderungen neue Doppelpunkte nur in Paaren, deren Individuen entgegengesetzten Ueberkreuzungssinn haben, gewonnen oder verloren werden, indem irgend zwei (endlose) Theile beider Curven sich gegeneinander-übereinander oder übereinander-auseinander schieben.

Für die beiden Randcurven eines Bandes wählen wir die Pfeile so, dass sie in den benachbarten nebeneinander herlaufenden Theilen beider Curven gleichen Sinn haben, besser gesagt so, wie sie sich ergeben, wenn man dem ganzen Bande einen bestimmten Sinn beilegt, indem es von einem Querschnitt durchlaufen wird. Unter Festhaltung dieser Beschränkung über die Pfeilrichtung wird das Vorzeichen der Ueberkreuzungen des Weiteren von der Pfeilstellung unabhängig, da eine Aenderung derselben den Sinn in beiden Curven ändert.

An einem flachgedrückten Bande zeigen sich zwei Arten von Singularitäten: Knickungs- und Ueberkreuzungsstellen. Während bei der früheren, von der Torsion des gestreckten oder ringförmigen Bandes ausgehenden Begriffsfassung nur die ersteren unmittelbar evident zur Torsion beitragen, die letzteren nur auf Umwegen als äquivalent gewissen Torsionen erkannt

wurden, erscheinen beide Singularitäten bei unserer gegenwärtigen Begriffsfassung nur gradweise verschieden.

Jede Knickung führt eine Ueberkreuzung beider Curven herbei und zwar eine positive für die Form von Figur 10, eine negative für die Form von Figur 11. Für die geradlinig begrenzten und undehnbar Papierbänder lassen sich beide Formen folgendermassen bequem auseinander halten:

Nimmt man seinen Augpunkt über einem Punkte des Winkels  $< \pi$ , den beide in der Knickung zusammenstossende Bandtheile bilden, und denkt sich den Scheitel dieses Winkels vom Beschauer weggewendet ( $\wedge$ ), so hat man eine Plus-Ueberkreuzung vor sich, wenn der obere, dem Auge nähere Bandtheil nach rechts, eine Minus-Ueberkreuzung, wenn er nach links zieht.

Jede Ueberkreuzung des Bandes führt zwei gleichsinnige Ueberkreuzungen beider Curven herbei, und zwar zwei positive oder zwei negative, je nachdem die Bandüberkreuzung nach der auf Seite 110 gegebenen Definition positiv oder negativ ist.

Die Differenz der sämtlichen in den Knickungen und Ueberkreuzungen des Bandes enthaltenen positiven und negativen Randcurvenüberkreuzungen ist die für das Band charakteristische Zahl  $\nu = \delta - \lambda$ , um die es sich handelt, und für welche man, wenn man will, den Namen Torsionszahl beibehalten kann, insofern sie in den Fällen des tordirten gestreckten oder unverknoteten ringförmigen Bandes nach Multiplication durch  $\pi$  offenbar übereinstimmt mit der von Simony definirten Torsion. Eine noch schärfere Begriffstheilung aber würde man erhalten, wenn man mit Torsion nur solche Erscheinungen an Bändern bezeichnete, welche sich durch Drehung sei es eines variablen Querschnittes, einer variablen Ebene oder dergl. ausreichend definiren lassen bei jeder Gestalt des Bandes;\* mit der obigen Eigenschaft scheint mir dies nach meinen bisherigen Versuchen nicht der Fall zu sein.

Doch es liegt uns noch ob, unsere charakteristische Zahl auch für einrandige Bänder zu definiren. Es ergibt sich hier eine kleine Schwierigkeit. Während nämlich bei zweirandigen Bändern nur die Ueberkreuzungen der Curven untereinander zur Bestimmung von  $\nu$  beigezogen, die Ueberkreuzungen der Curven mit sich selbst vernachlässigt wurden, fliessen bei einrandigen Bändern beide Arten von Ueberkreuzungen in eine zusammen, und man ist in Gefahr, auf eine mit der früheren wenig verwandte Zahl  $\nu$  zu gerathen. Man kann sich aber dadurch helfen, dass man das einrandige Band quer durchschneidet, so, dass der Querschnitt keine Ueberkreuzung oder Knickung passirt, und durch Hinzufügen einer Torsion des einen Endes um  $\pi$  und Wiedervereinigung der Enden ein zweirandiges Band herstellt, dessen  $\nu = \alpha$  nach dem Obigen bestimmt werden kann. Dem

\* Wohl dasselbe, was Simony unter „äusserer Verdrehung“ versteht.

einrandigen Bande wird man dann die charakteristische Zahl  $\nu = \alpha - 1$  zuordnen. Zu zeigen ist dann jedenfalls, dass es gleichgiltig ist, an welcher Stelle der Querschnitt angebracht wird.

Für die Knickungsstellen ändert sich offenbar gar nichts, wo man auch den Querschnitt hin verschieben mag. Bei einer Ueberkreuzungsstelle ist es möglich, dass bei einer Lagenänderung des Querschnittes die beiden Punkte, welche zuerst Selbstüberkreuzungen beider Randcurven vorstellten, mit jenen, welche gegenseitige Ueberkreuzungen waren, die Rollen tauschen. Dies macht aber für  $\nu$  nichts aus, weil das Vorzeichen aller vier Ueberkreuzungen das nämliche ist.

Das Resultat der obigen Vorschrift für einrandige Bänder ist also das nämliche, als ob man sämtliche Ueberkreuzungen der Randcurve mit sich selbst an dem unveränderten Bande bestimmt, die Anzahl der von Bandüberkreuzungen herrührenden sowohl positiven als negativen aber nur halbirt in die Differenz  $\delta - \lambda$  hätte eingehen lassen.

Ein etwas organischeres Verfahren der Bestimmung von  $\nu$  bei einrandigen Bändern scheint übrigens wünschenswerth. Die eben berührte Schwierigkeit ist von allgemeinerer Bedeutung; sie behindert immer wieder den Uebergang von der Theorie der Verschlingung zweier Curven zur Verknotung einer Curve und ist auch in Bölddicker's Arbeit: „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen etc.“ mehr verdeckt als gehoben. Der Verfasser hofft auf diese Dinge an anderer Stelle zurückzukommen.

### III.

#### Beziehung der Zahl $\nu$ zu dem Gauss'schen Verschlingungsintegral.

Die Zahl  $|\nu| = |\delta - \lambda|$  für zwei getrennte Randcurven ist eine gerade Zahl, weil  $\delta + \lambda$  als Anzahl der Schnittpunkte zweier geschlossenen Curven in einer Ebene gerade ist. Sie ist gleich dem absoluten Werth des halben Coefficienten von  $\pi$  in dem Werthe, den das Gauss'sche Integral

$$\iint \frac{\begin{vmatrix} x' - x & dx & dx' \\ y' - y & dy & dy' \\ z' - z & dz & dz' \end{vmatrix}}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{3}{2}}} = 4 m \pi$$

annimmt, wenn die Integrationen über die Punkte  $x, y, z$  der einen und die Punkte  $x', y', z'$  der andern Curve ausgedehnt werden.  $m$  zählt hierbei die Differenz der positiven und negativen „Umschlingungen“ der einen Curve  $C$  um die andere  $C'$ .

Bölddicker\* hat gezeigt, dass  $m$  zugleich die Differenz der Anzahlen zweier Schnittpunktgruppen ist; die erste Gruppe enthält jene Schnittpunkte,

\* Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen etc. Stuttgart 1876.

in welchen  $C$  eine von  $C'$  begrenzte zweiseitige Fläche in einem Sinne durchsetzt, die zweite Gruppe enthält die Schnittpunkte entgegengesetzten Sinnes.

Dies vorausgesetzt, lässt sich die Gleichung:

$$|v| = |2m|$$

folgendermassen beweisen:

$C$  und  $C'$  seien wieder in einer Ebene gedacht, mit Unterscheidung eines „oben“ und „unten“ an den Kreuzungspunkten.

Von einem beliebigen Punkte  $p'$  der Ebene, der sich in endlicher Entfernung von der Curve befindet, denke man sich die Radienvectoren  $R'$  nach den Punkten  $c'$  von  $C'$  gezogen. Die  $R'$  bilden eine plattgedrückte Kegelfläche  $\mathfrak{R}'$  mit der Spitze  $p'$  und der Randcurve  $C'$ , welche im Allgemeinen die Ebene mit mehreren, an verschiedenen Orten verschieden vielen Blättern bedeckt. An diesen Blättern lässt sich im Anschluss an die Curvenkreuzpunkte ein „oben“ und „unten“ unterscheiden, wenn auch nicht in völlig bestimmter Weise. Bis zu einem gewissen Grade bleiben nämlich die Lagen der  $R'$ , nach welchen sich die Kegelfläche selbst durchsetzt und ein Blatt in Bezug auf ein anderes von „unten“ nach „oben“ übergeht, willkürlich. Diese Willkürlichkeit schwindet, wenn man  $C$ ,  $C'$  und  $\mathfrak{R}'$  als Projectionen zweier bestimmten, im Raum gewundenen Curven und eines im Raum sich ausdehnenden Kegels ansieht.

Der Sinn, in welchem die  $c'$  auf  $C'$  durchlaufen werden, überträgt sich auf die  $R'$  der Fläche  $\mathfrak{R}'$ , wodurch es gelingt, die beiden Seiten der Fläche zu unterscheiden; die eine, von der aus betrachtet die  $R'$  die Uhrzeigerbewegung haben und die wir willkürlich die rechte, positive Seite der Fläche nennen, die andre, wo das entgegengesetzte der Fall ist. Diese Unterscheidung der Seiten bleibt auch bestehen für die Sektoren, in welche wir die  $\mathfrak{R}'$  jetzt zerlegen wollen. Jeder dieser Sektoren  $\mathfrak{S}'$  bedecke die Ebene in seiner ganzen Ausdehnung einfach und sei von zwei verschiedenen Radienvectoren  $R'_1$  und  $R'_2$  seitlich begrenzt. Eine Zerlegung der Fläche in Sektoren, welche diese Bedingungen erfüllen, ist immer möglich. Das dritte Stück der Begrenzung, der Curve  $C'$  angehörig, heisse  $S'$ . Es darf sich offenbar nicht selbst schneiden. Wir geben dem Contur eines jeden  $\mathfrak{S}'$  einen bestimmten Umkreisungssinn, übereinstimmend mit dem für  $S'$  geltenden Pfeile. Hierdurch erhalten auch die  $R'_1$ ,  $R'_2$  bestimmte Sinne und zwar wird jeder dieser Radienvectoren als Grenze für zwei benachbarte Sektoren zweimal in entgegengesetzten Weisen in Anspruch genommen.

Betrachten wir nun, wie die Curve  $C$  einen beliebigen der Sektoren  $\mathfrak{S}'$  passiren kann. Denkt man sich auf  $C$  von einem bestimmten Anfangspunkte  $a$  aus einen Punkt im Sinne des Pfeiles laufen, so wird derselbe bei der Rückkehr nach  $a$  den Sector  $\mathfrak{S}'$  ebenso oft betreten als verlassen haben; und es werden diese regelmässig abwechselnden Ein- und Austritte, d. h. die Ueberkreuzungen von  $C$  mit dem Contur von  $\mathfrak{S}'$ , paarweise einander

zugeordnet werden können. Die beiden Curventüberkreuzungen eines solchen Paares sollen auf  $C$  einander unmittelbar folgen und können

- $\alpha$ ) vom nämlichen Sinne,
- $\beta$ ) vom entgegengesetzten Sinne

sein.

Im Falle  $\alpha$ ) muss die Curve  $C$ , wenn sie beim Eintritt über dem Contur von  $\mathcal{S}$  läuft, beim Austritt unter demselben laufen, und umgekehrt, woraus zu schliessen ist, dass  $C$  zwischen den beiden Ueberkreuzungen den Sector einmal öfter im einen Sinn durchsetzt hat, als im entgegengesetzten.

Im Falle  $\beta$ ) dagegen erfolgen Ein- und Austritt von  $C$  auf der nämlichen Flächenseite von  $\mathcal{S}$ ; der Sector muss gerade so oft im einen wie im andern Sinne durchsetzt worden sein.

Und zwar entspricht nach den oben getroffenen Festsetzungen über die Vorzeichen zwei positiven Ueberkreuzungen eine Flächendurchsetzung von der positiven zur negativen Seite, was wir willkürlich als positive Durchsetzung bezeichnen dürfen, etc.

Es gilt natürlich auch umgekehrt: Wenn  $C$  beim einmaligen Passiren eines Sectors denselben einmal öfter positiv als negativ durchsetzt, so entstehen zwei positive Ueberkreuzungen etc.

Da nun feststeht, dass bei einmaligem Passiren des Sectors zwei positiven Ueberkreuzungen eine überschüssige positive, zwei negativen Ueberkreuzungen eine überschüssige negative, zwei entgegengesetzten Ueberkreuzungen keine überschüssige Flächendurchsetzung entspricht, so ist leicht ersichtlich, wie sich durch Summation über die verschiedenen Durchschreitungen eines Sectors, dann über die sämtlichen Sektoren der gewünschte Satz

$$|\nu| = |2m|$$

nach den getroffenen Vorzeichenbestimmungen sogar

$$\nu = 2m$$

ergibt. Hierbei ist nur auf das Eine noch aufmerksam zu machen, dass die für die Ueberkreuzungen von  $C$  mit sämtlichen Sectorconturen gebildete Differenz  $\delta - \lambda$  deswegen direct gleich  $\nu$ , d. h. gleich der für die Ueberkreuzungen von  $C$  mit  $C'$  gebildeten Differenz  $\delta - \lambda$  ist, weil jede Ueberkreuzung von  $C$  mit einem  $R'_1$  oder  $R'_2$  zweimal auftritt, das eine Mal positiv, das andere Mal negativ (s. oben Seite 115, Zeile 9 v. u.).

München, 30. Juli 1891.

Fig.1.

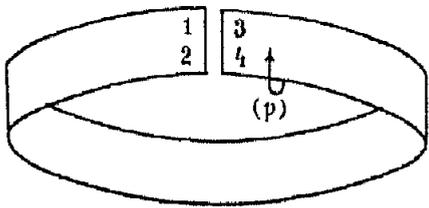


Fig.2.

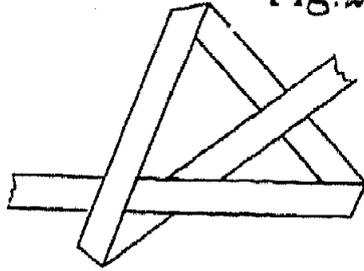


Fig.3.

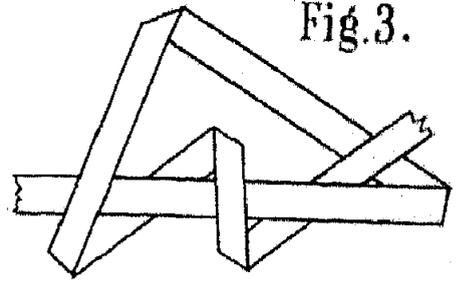


Fig.4.

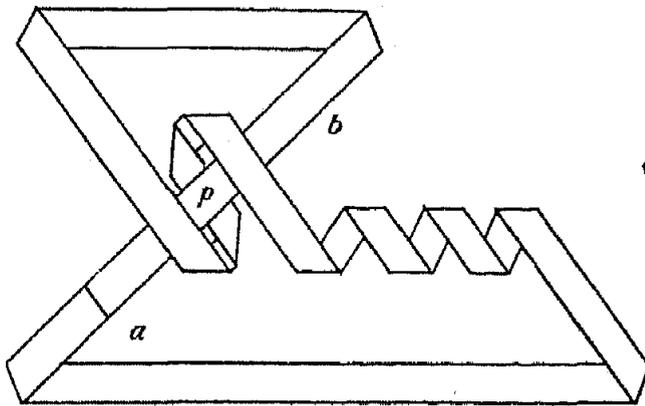


Fig.5.

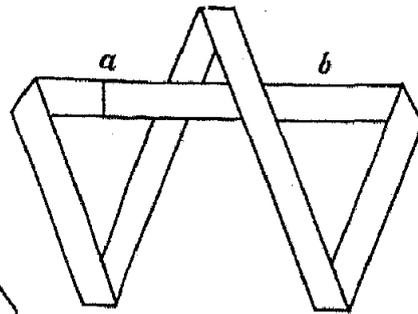


Fig.6.

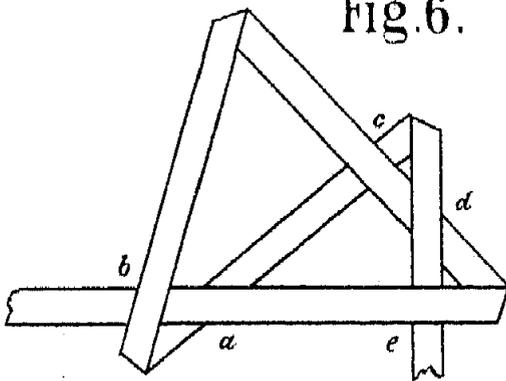


Fig.7.

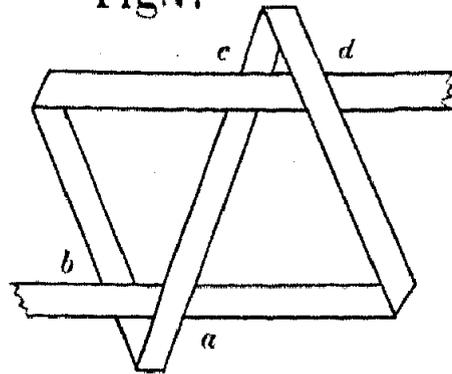


Fig.8.

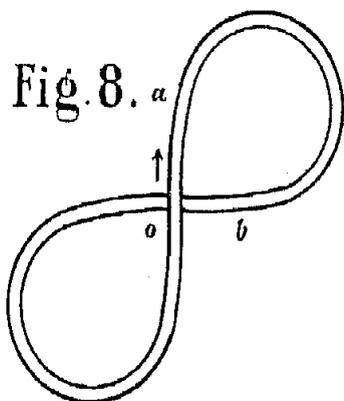


Fig.10.

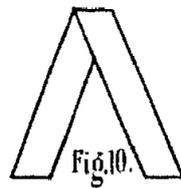


Fig.11.

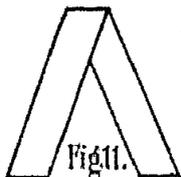


Fig.9.

