Harmonische Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Informatik und Mathematik
der Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Christian Kohl
aus Darmstadt

Frankfurt 2009
(D 30)

Tag der mündlichen Prüfung: 04.06.2009
Erstgutachter: Prof. J. Bliedtner
Zweitgutachter: Prof. J. Baumeister

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Funktionen *beschränkter mittlerer Oszillation* wurden von F. John und L. Nirenberg in ihrer Arbeit [JN] 1961 eingeführt. Eine Funktion f aus $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ heißt dabei von beschränkter mittlerer Oszillation, wenn das Supremum über die Menge $\mathcal{Q}$ aller Würfel Q mit Achsen parallel zu den Koordinatenachsen

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q| dm$$

endlich ist. Hierbei sei f_Q der Integralmittelwert von f über Q und m das n-dimensionale Lebesguemaß des $\mathbb{R}^n$.
Das Konzept der beschränkten mittleren Oszillation findet erste Verwendung beim Beweis der Harnackschen Ungleichung für elliptische partielle Differentialgleichungen durch Moser in [MO].

In dieser Arbeit wird die Idee der beschränkten mittleren Oszillation auf harmonische Räume $(X, \mathcal{H})$ übertragen. Erstmals wurde dieses Konzept von H. Leutwiler in einem Artikel [LE2] für allgemeine harmonische Räume entwickelt. Dabei heißt eine harmonische Funktion h von *beschränkter mittlerer Oszillation*, wenn das Supremum

$$\|h\|_* := \sup_{x \in X} M(h - h(x))^+(x)$$

endlich ist. Ms bezeichnet hierbei die kleinste harmonische Majorante einer subharmonischen Funktion s. Der so aus h erhaltene Wert $\|h\|_*$ soll als BMO-Norm von h bezeichnet werden.

Da die Mehrzahl der Ergebnisse in [LE2] nur für Brelotsche Räume oder sogar nur für die Laplacegleichung auf der oberen Halbebene gezeigt werden konnten, sind diese zum Beispiel nicht auf harmonische Räume anwendbar, die durch einen parabolischen Differentialoperator, wie die klassische Wärmeleitungsgleichung, erzeugt wurden. Ziel dieser Arbeit ist es nun die Theorie der harmonischen Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation für allgemeine harmonische Räume zu entwickeln und unter anderem die Leutwilerschen Resultate zu beweisen. Naturgemäß lassen sich die Beweise aus [LE2] im Allgemeinen nicht einfach übertragen. Vielmehr mußten zum Teil neue Beweisideen und Methoden gefunden werden. Insbesondere wird konsequent von Bezugsmaßen Gebrauch gemacht, die eine allgemeine Harnacksche Ungleichung für diesen Rahmen zur Verfügung stellen.
Die wichtigsten Ergebnisse sollen hier kurz beschrieben werden.

Das erste Kapitel enthält die grundlegenden Definitionen aus der Theorie der harmonischen Räume und stellt die für den Fortgang der Arbeit notwendigen Hilfsmittel bereit.

Mit Hilfe eines Resultats von T. Lyons, der eine John-Nirenberg Ungleichung für allgemeine harmonische Räume in [LY] beweist, sowie unter Verwendung einer äquivalenten Definition des Raumes der harmonischen Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation auf dem Grundraum X ($BMO(X)$), kann im zweiten Kapitel eine Charakterisierung von $BMO(X)$ durch Theorem 2.4.6 gezeigt werden, die bisher nur für die klassische Potentialtheorie der Laplacegleichung auf der oberen Halbebene bekannt war. (Siehe [LE2]).

Aufbauend auf der Arbeit [BL] wird im dritten Kapitel zuerst eine abstrakte Integraldarstellung quasibeschränkter Funktionen hergeleitet, die in Theorem 3.1.9 ihren Niederschlag findet. Dieses Theorem erlaubt eine Darstellung der kleinsten harmonischen Majorante gewisser subharmonischer Funktionen in Theorem 3.1.15.
Ausgehend von diesen Resultaten werden schließlich in Theorem 3.2.2 und

Korollar 3.2.3 Charakterisierungen harmonischer Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation durch ihr Randverhalten erzielt, wie sie bisher nur im klassischen Fall der Laplacegleichung auf der oberen Halbebene in [LE3] gezeigt werden konnten.

Im vierten Kapitel werden die harmonischen Räume $(X, \mathcal{H})$ der Laplace- und Wärmeleitungsgleichung betrachtet, die die Berechnung der Funktion $x \mapsto M(h - h(x))^+(x)$ und der BMO-Norm zumindest in einigen Fällen mit Hilfe von Maple zulassen.

Im fünften Kapitel wird die Vollständigkeit gewisser Teilmengen des Raumes $(BMO(X)/\mathbb{R})$ untersucht. In Theorem 5.1.10 wird durch Modifikation der Norm gezeigt, daß dieser so modifizierte Raum ein Banachraum ist, allerdings zu dem Preis, daß sämtliche Funktionen in diesem Raum beschränkt sind.
Aus Theorem 5.2.4 ergibt sich als Korollar 5.2.6 ein neuer Beweis der Tatsache, daß im Spezialfall Brelotscher harmonischer Räume der Raum $(BMO(X)/\mathbb{R}, \| \|_*)$ ein Banachraum ist.
Schließlich zeigt Theorem 5.2.12, daß gewisse Teilmengen von $(BMO(X)/\mathbb{R})$ vollständig bezüglich der BMO-Norm sind, ohne daß man dabei zusätzliche Bedingungen (wie etwa Brelotscher Raum) an $(X, \mathcal{H})$ stellen muß.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Jürgen Bliedtner ganz herzlich für die hervorragende Betreuung während der Anfertigung dieser Arbeit bedanken. Durch viele anregende Gespräche hat er mir wertvolle Hilfestellungen geben können und mich stets unterstützt. Weiterhin möchte ich mich bei Frau Christa Belz und Frau Jacqueline Habash für die gute Zusammenarbeit bedanken.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Harmonische Räume

In dieser Arbeit sei X stets ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis und $(X, \mathcal{H})$ ein harmonischer Raum im Sinne von Constantinescu und Cornea mit den Eigenschaften:

1. $1 \in \mathcal{H}(X)$.
2. Das Doobsche Konvergenzaxiom gilt.

Für weitere Einzelheiten zu harmonischen Räumen siehe [CC2].
Sei $\mathcal{V}$ die Menge aller offenen und relativ kompakten Mengen $V \subset X$. Das harmonische Maß bezüglich $V \in \mathcal{V}$ und $x \in X$ sei mit μ_x^V bezeichnet. Der Vektorraum aller harmonischen Funktionen h, die sich als Differenz zweier positiver harmonischer Funktionen darstellen lassen, wird im Folgenden mit

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0(X) := \big\{h \in \mathcal{H}(X) : \ h = h_1 - h_2; \ h_1, h_2 \in \mathcal{H}^+(X)\big\}$$

bezeichnet.
Die kleinste harmonische Majorante einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ (falls diese existiert) werde mit Mf bezeichnet. Für Mf gilt also:

1. $Mf \geq f$.
2. $Mf \in \mathcal{H}(X)$.

3. Für alle $h \in \mathcal{H}(X)$ mit $h \geq f$ folgt $h \geq Mf$.

Für jedes $h \in \mathcal{H}_0$ existiert eine Funktion $m \in \mathcal{H}^+$, so daß $|h| \leq m$ gilt. Für alle $x \in X$ besitzen dann die Funktionen $(h - h(x))^+$ sowie $|h - h(x)|$ eine kleinste harmonische Majorante.

Definition 1.1.1 *Eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ eines harmonischen Raumes X heißt* Absorptionsmenge, *wenn für alle $x \in A$ und jede reguläre Umgebung V von x das zu V gehörige harmonische Maß μ_x^V von A getragen wird.*

Bemerkung 1.1.2 *$A \subset X$ ist genau dann eine Absorptionsmenge, wenn eine positive hyperharmonische Funktion u existiert, so daß*

$$A = u^{-1}(0)$$

gilt. Stets sind X und die leere Menge Absorptionsmengen.

Definition 1.1.3 *Ein positives Radon-Maß r auf X heißt* Bezugsmaß *zum harmonische Raum $(X, \mathcal{H})$, wenn X die kleinste Absorptionsmenge ist, die den Träger von r enthält. Falls r ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so heißt r* normiertes *Bezugsmaß.*

Für Bezugsmaße gilt die folgende Harnacksche Ungleichung.

Theorem 1.1.4 *Zu jedem Bezugsmaß r und jeder kompakten Teilmenge K von X gibt es eine Konstante C_K, so daß für alle $h \in \mathcal{H}^+$ gilt*

$$\sup_K h \leq C_K \int h dr.$$

Beweis:
Siehe [BA] Satz 1.4.4.

□

Als Korollar folgt

Korollar 1.1.5 *Sei r ein Bezugsmaß. Zu $K \subset X$ kompakt existiert eine Konstante C_K, so daß für alle $h \in \mathcal{H}^+$ gilt*

$$\sup_K \left(h + \int h dr \right) \leq C_K \inf_K \left(h + \int h dr \right).$$

Beweis:
Nach Theorem 1.1.4 gibt es eine Konstante C_K mit

$$\sup_K h \leq C_K \int h dr.$$

Nun folgt für die positive harmonische Funktion $h + \int h dr$

$$\sup_K \left(h + \int h dr \right) \leq C_K \left(2 \int h dr \right).$$

Da h positiv ist, gilt für alle $x \in K$

$$\sup_K \left(h + \int h dr \right) \leq 2C_K \left(h(x) + \int h dr \right).$$

□

Definition 1.1.6 *Ist für jedes Gebiet $G \subset X$ und jedes $x \in G$ das Maß ε_x ein Bezugsmaß im Unterraum $(G, \mathcal{H}_{|G})$ und ist X zusammenhängend, so heißt $(X, \mathcal{H})$* Brelotscher Raum.

Bemerkung 1.1.7 *Aus Theorem 1.1.4 folgt für Brelotsche Räume sofort, daß für jede kompakte Menge $K \subset X$ eine positive Konstante C_K existiert mit*

$$\sup_K h \leq C_K \inf_K h$$

für alle positiven harmonischen Funktionen h.

Definition 1.1.8 *Ein Kern R auf X heißt* Bezugskern, *wenn $R(x, \ )$ für alle $x \in X$ ein Bezugsmaß ist.*

Beispiel 1.1.9 *Sei $(X, \mathcal{H})$ ein harmonischer Raum und r ein Bezugsmaß auf X, dann ist durch*

$$R(x, \ ) := \frac{1}{2}(\varepsilon_x + r)$$

eine Bezugskern auf X gegeben.

Da in einem späteren Abschnitt der Begriff der Keldychmenge benötigt wird, soll dieser hier kurz eingeführt werden.

Definition 1.1.10 *Ein linearer und positiver Operator* $L : \mathcal{C}(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ *heißt* Keldychoperator *auf der offenen und relativ kompakten Menge* $U \subset X$, *wenn*

$$L\left(h_{|\partial U}\right) = h_{|U}$$

für jede auf U *harmonische und auf* $\overline{U}$ *stetige Funktion* h *gilt.*

Ausgehend von dieser Definition legt man fest.

Definition 1.1.11 *Eine offene Menge* $U \subset X$ *heißt* Keldychmenge, *wenn für jeden Keldychoperator* L *auf* U *und jede auf dem Rand von* U *stetige Funktion* f

$$Lf = H_f^U$$

gilt. Dabei bezeichnet H_f^U *die Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems.*

Für eine offene und relativ kompakte Menge V wird die Verbindung zwischen den zum simplizialen Kegel $S(V)$ der auf V superharmonischen und $\overline{V}$ stetigen Funktionen gehörigen, minimalen Maße $D^V(x,\ )$ und den harmonischen Maßen durch das folgende Lemma hergestellt.

Lemma 1.1.12 *Eine offene (relativ kopmakte) Menge* V *ist eine Keldychmenge genau dann, wenn für alle* $x \in V$ *das zu* x *und* V *gehörige minimale Maß* $D^V(x,\ )$ *mit dem gefegten Maß* $\varepsilon_x^{\complement V}$ *übereinstimmen. Es sind also äquivalent*

1. *V ist eine Keldychmenge.*
2. *Für alle* $x \in V$ *folgt* $D^V(x,\ ) = \varepsilon_x^{\complement V} = \mu_x^V$.

Beweis: *Siehe [BH] VII Korollar* 7.2. □

1.2 Harmonische Majoranten

Das folgende Lemma aus [JA] zeigt, wie man unter bestimmten Bedingungen die Funktion Mf einer subharmonischen Funktion f als Grenzwert einer gewissen Funktionenfolge erhält.

Lemma 1.2.1 (K. Janßen) *Seien (V_n) eine Ausschöpfung von X, r ein Bezugsmaß auf X und $s \in L^1(r)$ eine auf X subharmonische Funktion. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ folgende Abbildung $s_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$*

$$s_n(x) = \begin{cases} \int s(z)\mu_x^{V_{n+1}}(dz) & x \in \overline{V}_n \\ s(x) & x \in \complement\overline{V}_n \end{cases}$$

Dann steigt die Funktionenfolge (s_n) auf. Die Funktion $u := \sup_n s_n$ ist genau dann r-integrierbar, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\int\limits_{\overline{V}_n} s_n(y)r(dy) \leq K \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

In diesem Fall ist $u = Ms$ die kleinste harmonische Majorante von s, und es gilt.

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\overline{V}_n} s_n(y)r(dy) = \int u(y)r(dy).$$

Beweis: Siehe [JA] Lemma 1.5 . □

Von besonderem Interesse für die weiteren Untersuchungen ist die kleinste harmonische Majorante der subharmonischen Funktion $(h - h(x))^+$, wobei h eine auf ganz X harmonische Funktion ist und $x \in X$ fest gewählt wurde. Aus Lemma 1.2.1 folgt:

Bemerkung 1.2.2 *Seien h eine auf X harmonische Funktion, ϕ eine konvexe reellwertige Funktion, (V_n) eine Ausschöpfung von X und $x \in X$. Wenn ein Bezugsmaß r auf X existiert, so daß*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\overline{V}_n} \int \phi(h(z))\mu_y^{V_n+1}(dz)r(dy) < \infty$$

gilt, dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi(h(z))\mu_y^{V_n}(dz) = M[\phi(h)](y)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\overline{V}_n} \int \phi(h(z))\mu_y^{V_{n+1}} r(dy) = \int M[\phi(h)](y)r(dy).$$

Sofort ergibt sich

Lemma 1.2.3 *Für eine subharmonische Funktion $s \geq 0$ in einem harmonischen Raum $(X, \mathcal{H})$ sind äquivalent*

1. *Es existiert eine harmonische Majorante h.*

2. *Die kleinste harmonische Majorante Ms existiert.*

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Wenn h existiert, dann gilt für alle $y \in X$

$$\int h(z)\mu_y^V(dz) = h(y) \geq \int s(z)\mu_y^V(dz) \geq s(y).$$

Zu h gibt es ein Bezugsmaß r, so daß h und vor allem s $r-$integrierbar sind. Daraus folgt

$$\infty > \int h(y)r(dy) \geq \int \int s(z)\mu_y^V r(dy)$$

für alle offenen und relativ kompakten V. Nach Lemma 1.2.1 existiert dann die kleinste harmonische Majorante von s.

2. $\Rightarrow$ 1.

Klar. $\square$

1.3 Maßtheorie

Der Vollständigkeit halber werden die folgenden Tatsachen aus der Maßtheorie kurz erwähnt.

Lemma 1.3.1 *Seien $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f \in L^1_+(\mu)$. Definiere für $\lambda > 0$ die Mengen A^f_λ durch*

$$A_\lambda = A^f_\lambda := \{x \in X : \; f(x) > \lambda\},$$

dann gilt für alle $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda}\int f d\mu \geq \mu\left(A_{\lambda}\right).$$

Beweis: Klar. $\square$

Lemma 1.3.2 *Sei* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine strikt positive und streng monoton wachsende Funktion. Dann gilt*

$$A_{\lambda}^{f} = A_{\phi(\lambda)}^{\phi \cdot f}.$$

Beweis: Sei $x \in A_{\lambda}^{f}$. Wegen der strikten Monotonie folgt dann $\phi(f(x)) > \phi(\lambda)$, also $x \in A_{\phi(\lambda)}^{\phi \cdot f}$. Für $x \in A_{\phi(\lambda)}^{\phi \cdot f}$ ergibt sich dann $x \in A_{\lambda}^{f}$ aufgrund der strikten Monotonie . $\square$

Theorem 1.3.3 *Seien* $f \in L_{+}^{1}(\mu)$ *und* ϕ *eine positive, streng monoton wachsende Funktion* $\phi : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}_{+}$, *so daß gilt* $\phi \circ f \in L_{+}^{1}(\mu)$. *Dann gilt für alle* $\lambda > 0$

$$\mu\left(A_{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\phi(\lambda)}\int \phi \circ f d\mu.$$

Beweis: Aus Lemma 1.3.1 folgt

$$\mu\left(A_{\phi(\lambda)}^{\phi \cdot f}\right) \leq \frac{1}{\phi(\lambda)}\int \phi \circ f d\mu.$$

Mit Lemma 1.3.2 ergibt sich dann das Resultat

$$\mu\left(A_{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\phi(\lambda)}\int \phi \circ f d\mu.$$

$\square$

1.4 Gleichgradige Integrierbarkeit

Da zu einem späteren Zeitpunkt das Konzept der gleichgradigen Integrierbarkeit benötigt wird, soll dieses hier dargestellt werden. Für eine Übersicht siehe [DM] oder [KL].

Definition 1.4.1 *Sei* $(X_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)_{i\in I}$ *eine Familie von Maßräumen mit* $\sup\limits_{i\in I} \mu_i(X_i) < \infty$. *Sei* $(f_i)_{i\in I}$ *eine Familie von Funktionen, mit* $f_i \in \mathcal{F}_i$ *für alle* $i \in I$. *Die Familie* (f_i) *heißt* gleichgradig integrierbar bezüglich (μ_i) *genau dann, wenn gilt*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int\limits_{|f_i|\geq a} |f_i| d\mu_i = 0.$$

Eine äquivalente Beschreibung der gleichgradigen Integrierbarkeit liefert das folgende Theorem

Theorem 1.4.2 *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*

1. (f_i) *ist gleichgradig integrierbar bezüglich* (μ_i).

2. *Es gibt eine monoton wachsende, konvexe Funktion* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *mit* $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t} = \infty$ *und*

$$\sup_{i\in I} \int \phi\left(|f_i|\right) d\mu_i < \infty \ .$$

3. (a) *Es gilt*

$$\sup_{i\in I} \int |f_i| d\mu_i < \infty.$$

   (b) *Für jede Familie von messbaren Abbildungen* (ξ_i)

$$\xi_i : R_+^* \to \mathcal{F}_i$$

   mit

$$\mu_i(\xi_i(\lambda)) < \lambda$$

   für alle $\lambda > 0$ *folgt*

$$\lim_{\lambda\to 0} \left(\sup_{i\in I} \int\limits_{\xi_i(\lambda)} |f_i| d\mu_i \right) = 0.$$

Beweis: Siehe [DM] Kapitel II, 2 und [KL] 6.2. □

1.5 Q-Kompaktifizierung

Zu einem lokal-kompakten Raum mit abzählbarer Basis X sowie einer Menge Q stetiger, beschränkter Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ existiert immer eine Kompaktifizierung $\widehat{X}$ von X, so daß die folgenden Bedingungen gelten

1. X ist eine dichte Teilmenge von $\widehat{X}$.

2. Alle f aus Q sind stetig auf $\widehat{X}$ fortsetzbar.

3. Die Menge der Fortsetzungen von Q trennt die Punkte von $\widehat{X} \setminus X$.

Zwei Kompaktifizierungen von X, die diese Eigenschaften erfüllen, sind zueinander homöomorph. Für weitere Einzelheiten siehe die Arbeiten [CC1] und [LO].

Kapitel 2

Harmonische Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation

2.1 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt wird der Raum der harmonischen Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation definiert sowie einige für den späteren Verlauf nützliche Resultate gezeigt.

Definition 2.1.1 *Eine harmonische Funktion $h \in \mathcal{H}_0$ auf X heiße von* beschränkter mittlerer Oszillation*, wenn gilt*

$$\|h\|_* := \sup_{x \in X} M(h - h(x))^+(x) < \infty.$$

Mit $BMO(X)$ werde der Raum aller dieser Funktionen bezeichnet.

Bemerkung 2.1.2 *Bei der Definition von $BMO(X)$ könnte man statt $(h - h(x))^+$ auch die Funktion $|h - h(x)|$ verwenden. Für harmonische Funktionen u, die sich als Differenz zweier positiver harmonischer Funktionen schreiben lassen, gilt nämlich*

$$2M(u^+) = M|u| + u.$$

Speziell für $u = h - h(x)$ folgt

$$2M(h - h(x))^+(x) = M|h - h(x)|(x). \tag{2.1}$$

Die so entstehende Abbildung

$$h \mapsto \sup_{x \in X} M|h - h(x)|(x)$$

ist ebenso wie $\| \ \|_*$ eine Halbnorm und wäre um den Faktor 2 größer. Aus sprachlichen Gründen wird in dieser Arbeit trotzdem von $\| \ \|_*$ als der BMO-Norm einer Funktion gesprochen werden.

Definition 2.1.3 *Seien $h \in \mathcal{H}_0$, $V \in \mathcal{V}$ und $x \in X$. Definiere den Kern $H_V(x, \ )$ durch*

$$H_V(x, \ ) := \begin{cases} \mu_x^V & x \in V \\ \varepsilon_x & x \in \complement V. \end{cases}$$

Für die Funktion $(h - h(x))^+$ gilt dann für alle $y \in X$

$$H_V(h - h(x))^+(y) = \begin{cases} \int (h(z) - h(x))^+ \mu_y^V(dz) & y \in V \\ (h(y) - h(x))^+ & y \in \complement V \end{cases}$$

Bemerkung 2.1.4 *Für $h \in \mathcal{H}_0$ und $x \in X$ besitzt die Funktion $H_V(h - h(x))^+$ unter anderem die folgenden Eigenschaften*

1. *Für alle $V \in \mathcal{V}$ gilt $(h - h(x))^+ \leq H_V(h - h(x))^+$.*

2. *Für $h \in \mathcal{H}(X)^+$ und $V \in \mathcal{V}$ gilt $h \geq H_V(h - h(x))^+$.*

3. *Die Funktion $H_V(h - h(x))^+$ ist harmonisch auf V und subharmonisch auf X.*

Es gilt das folgende Lemma

Lemma 2.1.5 *Seien $h \in \mathcal{H}_0$, $V, W \in \mathcal{V}$, $x \in X$ mit $\overline{V} \subset W$, dann gilt*

$$H_V(h - h(x))^+ \leq H_W(h - h(x))^+.$$

Beweis: Sei $y \in V$, dann ist zu zeigen

$$\int (h(z) - h(x))^+ \mu_y^V(dz) \leq \int (h(z) - h(x))^+ \mu_y^W(dz).$$

Dies folgt aber sofort, wenn man bedenkt, daß $H_V(h - h(x))^+$ die kleinste harmonische Majorante von $rest_V(h - h(x))^+$ und $H_W(h - h(x))^+$ eine harmonische Majorante von $rest_V(h - h(x))^+$ ist.
Sei nun $y \in \complement V \cap W$.
Dann folgt sofort $H_V(h - h(x))^+(y) \leq H_W(h - h(x))^+(y)$, weil $(h - h(x))^+$ auf ganz X subharmonisch ist.
Für $y \in \complement W$ gilt trivialerweise $H_V(h-h(x))^+(y) = H_W(h-h(x))^+(y)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

□

Bemerkung 2.1.6 *Dieses Lemma behält seine Gültigkeit, wenn man anstatt einer harmonischen Funktion h eine subharmonische Funktion s betrachtet.*

Sei $R(x,\ )$ eine Familie von positiven Maßen auf X (so, daß $h \in L^1(R(x,\ ))$ für alle $x \in X$). Desweiteren sei $(V_n) \subset \mathcal{V}$ eine Ausschöpfung von X durch offene, relativ kompakte Mengen, das heißt

1. $V_n \in \mathcal{V}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. $\overline{V_n} \subset V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X$.

Definiere eine Abbildung $\|\ \|_R$ von $\mathcal{H}_0$ in $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch

$$\|h\|_R := \sup_{V \in \mathcal{V}, x \in V} \int H_V(h - h(x))^+(y) R(x, dy). \tag{2.2}$$

Mit dieser Definition gilt

Lemma 2.1.7 *Sei (V_n) eine Ausschöpfung von X und $h \in \mathcal{H}_0$. Dann gilt*

$$\|h\|_R = \sup_{V_n, x \in V_n} \int H_{V_n}(h - h(x))^+(y) R(x, dy).$$

Beweis: Die Ungleichung

$$\|h\|_R \geq \sup_{V_n, x \in V_n} \int H_{V_n}(h - h(x))^+(y) R(x, dy)$$

gilt trivialerweise.
Sei nun $V \in \mathcal{V}$ und $x \in V$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\overline{V} \subset V_n$.
Mit Lemma 2.1.5 folgt

$$H_V(h - h(x))^+ \leq H_{V_n}(h - h(x))^+,$$

also gilt

$$\int H_V(h - h(x))^+(y) R(x, dy) \leq \int H_{V_n}(h - h(x))^+(y) R(x, dy).$$

Da $V \in \mathcal{V}$ beliebig war, erhält man

$$\sup_{V_n, x \in V_n} \int H_{V_n}(h - h(x))^+(y) R(x, dy) \geq \|h\|_R.$$

$\square$

Bemerkung 2.1.8 *Aus Lemma 2.1.5 folgt sofort, daß es unerheblich ist, welche Ausschöpfung man verwendet.*

Es ergibt sich die folgende Charakterisierung von BMO-Funktionen.

Theorem 2.1.9 *Sei $h \in \mathcal{H}_0$, dann sind äquivalent*

1. $h \in BMO(X)$.
2. $\sup_{V \in \mathcal{V}, x \in V} \int (h(z) - h(x))^+ \mu_x^V(dz) < \infty$.

Es gilt in diesem Fall

$$\|h\|_* = \sup_{V \in \mathcal{V}, x \in V} \int (h(z) - h(x))^+ \mu_x^V(dz) < \infty.$$

Beweis: 2. $\Rightarrow$ 1.
Wähle zu $M(h-h(x))^+$ und $x \in X$ ein Bezugsmaß r, so daß $M(h-h(x))^+$ r-integrierbar ist. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$M(h-h(x))^+(y) \geq \int (h(z)-h(x))^+ \mu_y^{V_n}(dz) \geq (h(y)-h(x))^+,$$

weil für $y \in V_n$ die Abbildung $y \mapsto \int (h(z)-h(x))^+ \mu_y^{V_n}(dz)$ die kleinste harmonische Majorante von $rest_{V_n}(h-h(x))^+$ ist. Daraus folgt

$$\int \int (h(z)-h(x))^+ \mu_y^{V_n}(dz) r(dy) \leq \int M(h-h(x))^+(y) r(dy) < \infty,$$

da $M(h-h(x))^+$ integrierbar bezüglich r ist.
Aufgrund von Bemerkung 1.2.2 gilt außderdem für alle $x, y \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \int (h(z)-h(x))^+ \mu_y^{V_n}(dz) = M(h-h(x))^+(y). \tag{2.3}$$

Vor allem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int (h(z)-h(x))^+ \mu_x^{V_n}(dz) = M(h-h(x))^+(x), \tag{2.4}$$

woraus nach Voraussetzung

$$\sup_{x\in X} M(h-h(x))^+(x) < \infty$$

folgt.
1. $\Rightarrow$ 2.
Sei nun $h \in BMO(X)$; dann gilt immer

$$M(h-h(x))^+(x) \geq \int (h(z)-h(x))^+ \mu_x^V(dz)$$

und die zweite Behauptung folgt. Aufgrund von Gleichung 2.4 folgt weiterhin

$$\|h\|_* = \sup_{V\in\mathcal{V}, x\in V} \int (h(z)-h(x))^+ \mu_x^V(dz) < \infty.$$

$\square$

2.2 Eine John-Nirenberg Ungleichung

Im Wesentlichen orientiert sich die folgende Darstellung an der Arbeit [LY].

In diesem Abschnitt wird eine John-Nirenberg Ungleichung (JNU) für allgemeine harmonische Räume hergeleitet. Diese ist ein wesentliches Hilfsmittel für die spätere Charakterisierung der BMO-Funktionen.
Ihren Namen erhält diese Ungleichung von einem klassischen Resultat von John und Nirenberg (siehe [JN]):

Theorem 2.2.1 *Ist für eine lokalintegrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das folgende Supremum über die Menge $\mathcal{Q}$ aller Würfel Q mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen endlich, das heißt*

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f - f_Q| dm < \infty,$$

dann existieren Konstanten K und γ, die nur von n abhängen, so daß für jeden Würfel Q mit Seiten parallel zu den Achsen und jedes $\lambda > 0$, die folgende Ungleichung gilt

$$m\left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - \frac{1}{m(Q)} \int\limits_Q f dm| > \lambda \right\} \leq m(Q) K \exp\left(-\frac{\gamma}{\|f\|_{BMO}} \lambda \right)$$

Eine Funktion von beschränkter mittlerer Oszillation schwingt also nicht zu stark um ihren Mittelwert, in dem Sinn, daß die Menge der Punkte, für die diese Abweichung größer als eine gewisse Schranke ist, exponentiell abnimmt. Der Beweis einer solchen Ungleichung für allgemeine harmonische Räume ist Lyons (siehe [LY]) mit Hilfe einer entsprechenden Ungleichung aus der Stochastik gelungen. Im Folgenden sei $h \in \mathcal{H}_0$. h ist also darstellbar als die Differenz zweier, auf ganz X positiver harmonischer Funktionen. Es wird die folgende Abbildung betrachtet

$$\|h\|_{BMO^*} := \sup_{V \in \mathcal{V}, x \in V} \int |h(z) - h(x)| \mu_x^V(dz).$$

Nach Theorem 2.1.9 und Bemerkung 2.1.2 gilt

$$\|h\|_* = \frac{1}{2} \|h\|_{BMO^*}.$$

Bemerkung 2.2.2 *Im nun folgenden Abschnitt sei V immer eine offene und relativ kompakte Menge. Mit $S(V)$ werde der Kegel aller auf $\overline{V}$ stetigen und auf V superharmonischen Funktionen bezeichnet. Dieser Kegel ist simplizial. Siehe hierfür [BH] . Dementsprechend existiert zu jedem $x \in \overline{V}$ genau ein minimales Darstellungsmaß, welches mit $D^V(x, \ )$ bezeichnet wird.*

Da es nach Lemma 2.1.5 und der anschließenden Bemerkung unerheblich ist, welche Ausschöpfung man betrachtet, sei im Folgenden eine Ausschöpfung von Keldychmengen (V_n) gewählt. Aufgrund von 1.1.12 erhält man also eine Verbindung zwischen minimalen Maßen und dem Raum $BMO(X)$:

Bemerkung 2.2.3 *Für einen gegebenen harmonischen Raum X existiert immer eine Auschöpfung durch Keldychmengen. Für einen Beweis siehe [BH] VII Proposition 7.3. Eine harmonische Funktion ist also genau dann ein Element von $BMO(X)$, wenn für eine Auschöpfung (V_n) von X durch Keldychmengen gilt*

$$\sup_{V_n, x \in V_n} \int |h(z) - h(x)| D^{V_n}(x, dz) < \infty.$$

Im Folgenden wird auf der Menge V ein diskreter stochastischer Prozeß konstruiert, mit dessen Hilfe später die JNU bewiesen werden kann. Seien also V eine Keldychmenge und h eine harmonische Funktion auf X. Definiere für $\lambda > 0$ die Mengen U_λ^x durch

$$U_\lambda^x := \{z \in X : \ |h(x) - h(z)| < \lambda\}.$$

Die Menge U_λ^x ist also das Urbild des offenen Intervalls mit Durchmesser 2λ um den Punkt $h(x)$ und damit als Urbild einer offenen Menge selbst wieder eine offene Menge.
Wähle eine (lokal endliche) abzählbare Zerlegung der Eins $(\Phi_w)_{w \in W}$ mit Indexmenge W, so daß gilt

$$supp\,(\Phi_w) \subset U_{\lambda/2}^w.$$

Solche eine Zerlegung existiert in unserem Kontext immer. Mit Hilfe dieser Zerlegung der Eins konstruiert man nun einen diskreten Prozeß auf $\overline{V}$, wie folgt.

Definition 2.2.4 *Definiere für $x \in \overline{V}$ einen Kern K auf $\overline{V}$ durch*

$$K(x,\ ) := \sum_{w \in W} \Phi_w(x) D^{V \cap U_\lambda^w}(x,\ ).$$

Da die Konstanten nach Voraussetzung harmonisch sind, kann man eine Markovprozeß (X_n) mit Zustandsraum $\overline{V}$ und Übergangskern K konstruieren. Es gilt also

$$P(X_n \in B | X_{n-1}) = K(X_{n-1}, B)$$

für meßbare Mengen B. Der so definierte Prozeß besitzt die folgende Eigenschaft.

Lemma 2.2.5 *Für die Pfade ω von (X_n) gilt*

$$|h(X_{n-1}) - h(X_n)|(\omega) < \lambda/2 \Rightarrow X_{n+j}(\omega) = X_n(\omega)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $X_n(\omega)$ im Choquetrand des simplizialen Kegels $S(V)$ enthalten.

$$X_n(\omega) \in Ch_{S(V)}\overline{V}.$$

Beweis: Da die Zerlegung der Eins lokal endlich ist, gilt für den Kern K an der Stelle X_{n-1}

$$K(X_{n-1}, B) = \sum_{w=1}^{m} \Phi_w(X_{n-1}) D^{V \cap U_\lambda^w}(X_{n-1}, B).$$

Das bedeutet, daß X_n mit Wahrscheinlichkeit 1 in der Menge

$$\bigcup_{w=1}^{m} Ch_{S(V \cap U_\lambda^w)} \overline{V \cap U_\lambda^w}$$

enthalten ist, da die Masse der minimalen Maße nur auf dem Choquetrand der jeweiligen Menge liegt. Es folgt also, daß es ein w gibt mit

$$X_n \in Ch_{S(V \cap U_\lambda^w)} \overline{V \cap U_\lambda^w},$$

wobei notwendigerweise $\Phi_w(X_{n-1}) > 0$ gilt, woraus $X_{n-1} \in U_{\lambda/2}^w$ folgt.

Zusammenfassend hat man also ein w gefunden, so daß gilt

1. $X_n \in Ch_{S(V\cap U_\lambda^w)}\overline{V \cap U_\lambda^w}$.
2. $X_{n-1} \in \overline{V} \cap U_{\lambda/2}^w$.

Aufgrund der Voraussetzung folgt

$$\begin{aligned} |h(X_n) - h(w)| &= |h(X_n) - h(w) + h(X_{n-1}) - h(X_{n-1})| \\ &\leq |h(X_n) - h(X_{n-1})| + |h(X_{n-1}) - h(w)| \\ &< \lambda. \end{aligned}$$

Also gilt $X_n \in U_\lambda^w$.
Insgesamt gilt also $X_n \in Ch_{S(V\cap U_\lambda^w)}\overline{V \cap U_\lambda^w} \cap U_\lambda^w$. Der Choquetrand $Ch_{S(V)}\overline{V}$ für eine offene und relativ kompakte Menge V ist bekanntlich gleich der Menge $\partial V \cap \beta(\complement V)$.
Dabei bezeichnet β den Operator, der jeder Menge ihre wesentliche Basis ("essential base") zuordnet.
Deshalb gilt

$$Ch_{S(V\cap U_\lambda^w)}\overline{V \cap U_\lambda^w} \cap U_\lambda^w = \beta(\complement V \cup \complement U_\lambda^w) \cap U_\lambda^w \cap \partial(V \cap U_\lambda^w).$$

Mit Hilfe einfacher Umformungen gelangt man dann zu dem Ergebniss, daß die obige Menge im Choquetrand von $S(V)$ enthalten sein muß.
Dann gilt aber notwendigerweise

$$K(X_n, \ ) = \varepsilon_x$$

und damit

$$X_{n+j} = X_n \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Aufgrund der Harmonizität von h ist der Prozeß $h(X_n)$ wieder ein Martingal, wie man aus einer einfachen Rechnung erkennt.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} E(h(X_n)|X_{n-1} = x) = \int h(y)K(x,dy) &= \int h(y)(\sum_{j=1}^{m} \psi_{w_j}(x) D^{V\cap U_\lambda^{w_j}}(x,dy)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \psi_{w_j}(x) \int h(y) D^{V\cap U_\lambda^{w_j}}(x,dy) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \psi_{w_j}(x) h(x) = h(x) = h(X_{n-1}). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.2.6 *Aufgrund der Stetigkeit von h ist h auf $\overline{V}$ beschränkt und $h(X_n)$ somit ein beschränktes Martingal. Damit konvergiert $h(X_n)$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable Z_∞.*

Aufgrund dieser Bemerkung gilt nun das folgende Lemma

Lemma 2.2.7 *Mit Wahrscheinlichkeit 1 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt*

$$X_{n+j}(\omega) = X_n(\omega) \textit{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Da das Martingal $h(X_n)$ fast sicher konvergiert, existieren mit Wahrscheinlichkeit 1 ein reelles c und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (abhängig von ω) mit

$$|h(X_n) - c| < \lambda/4 \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |h(X_n) - h(X_{n+1})| &= |h(X_n) - c + c - h(X_{n+1})| \\ &\leq |h(X_n) - c| + |h(X_{n+1}) - c| < \lambda/2. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.2.5 folgt

$$X_{n+1+j} = X_{n+1} \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit Wahrscheinlichkeit 1.}$$

□

Dieser Grenzwert sei im Folgenden mit $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ bezeichnet. Aus Lemma 2.2.5 folgt weiterhin

$$X_\infty \in Ch_{S(V)}\overline{V}.$$

Nun stellt sich die Frage nach der Verteilung von X_∞. Da X_∞ den Choquetrand $Ch_{S(V)}\overline{V}$ fast sicher trifft, liegt es nahe, $D^V(x, \ )$ als einen Kandidaten zu nehmen, wenn man der Prozeß in x gestartet hat. Das soll im Folgenden gezeigt werden.

Lemma 2.2.8 *Für alle meßbaren Mengen* $B \subset Ch_{S(V)}\overline{V}$ *und* $x \in \overline{V}$ *gilt*

$$P(X_\infty \in B | X_0 = x) = D^V(x, B).$$

Beweis: Sei μ_x das Maß auf $Ch_{S(V)}\overline{V}$ mit der Eigenschaft

$$P(X_\infty \in B | X_0 = x) = \mu_x(B).$$

Für g aus $S(V)$ gilt

$$\int g d\mu_x = E(g(X_\infty)|X_0 = x) \leq g(X_0) = g(x).$$

Das Maß μ_x ist also ein Darstellungsmaß für den Punkt x bezüglich des Kegels $S(V)$. Weiterhin gilt

$$\mu_x(\overline{V} \setminus Ch_{S(V)}) = 0.$$

Also ist μ_x ein minimales Maß und aufgrund der Simplizialität von $S(V)$ folgt schließlich

$$\mu_x = D^V(x, \ ).$$

$\square$

Für die harmonische Funktion h ist der Prozeß $h(X_n)$ also ein Martingal und konvergiert fast sicher gegen die Zufallsvariable $h(X_\infty)$. Für die BMO_1-Martingalnorm von $h(X_n)$ gilt nach Definition (siehe [GA])

$$\|h(X_\infty)\|_{BMO_1} = \sup_{n\geq 1} \|E^x(|h(X_\infty) - h(X_{n-1})| \ |\mathcal{F}_n)\|_\infty.$$

Diese Norm läßt sich nun nach oben durch die BMO-Norm der Funktion h abschätzen. Genauer gilt das Lemma

Lemma 2.2.9 *Für alle* $\lambda > 0$ *gilt*

$$\|h(X_\infty)\|_{BMO_1} \leq \|h\|_{BMO^*} + (3/2)\lambda.$$

Beweis: Sei $\lambda > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|h(X_\infty)\|_{BMO_1} &= \sup_{n\geq 1} \|E^x(|h(X_\infty) - h(X_{n-1})| \ |\mathcal{F}_n)\|_\infty \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \|h(X_n) - h(X_{n-1})\|_\infty + \sup_{n\geq 1} \|E^x(|h(X_\infty) - h(X_n)| \ |\mathcal{F}_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.5 gibt es ein $w \in X$ mit

$$X_n \in Ch_{S(V \cap U_\lambda^w)} \overline{V \cap U_\lambda^w}$$

und

$$X_{n-1} \in U_{\lambda/2}^w.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|h(X_n) - h(X_{n-1})| < (3/2)\lambda$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ fast sicher.
Aufgrund der Markoveigenschaft gilt

$$\begin{aligned} E^x(|h(X_\infty) - h(X_n)|\,|\mathcal{F}_n) &= E(|h(X_\infty) - h(X_n)|\,|\mathcal{F}_n) \\ &= E(|h(X_\infty) - h(X_n)|\mid X_n) \\ &= E^{X_n}(|h(X_\infty) - h(X_n)|). \end{aligned}$$

Wegen

$$E^{X_n}(|h(X_\infty) - h(X_n)|) = \int |h(y) - h(X_n)| D^V(X_n, dy)$$

ergibt sich dann

$$E^{X_n}(|h(X_\infty) - h(X_n)|) \leq \|h\|_{BMO^*} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Um nun eine JNU für den harmonischen Raum $(X, \mathcal{H})$ zu erhalten, benötigt man, wie eingangs erwähnt, ein ähnliches Resultat aus der Stochastik. Es lautet:

Theorem 2.2.10 *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit Startwert x bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das fast sicher gegen die integrierbare Zufallsvariable X konvergiert. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung*

$$E^x(e^{|X - X_{n-1}|}|\mathcal{F}_n) \leq \frac{1}{1 - 8\|X\|_{BMO_1}},$$

wann immer

$$\|X\|_{BMO_1} := \sup_{n\geq 1} \|E^x(|X - X_{n-1}|\,|\mathcal{F}_n)\|_\infty < \frac{1}{8}$$

gilt.

Beweis: Siehe [GA] III 1.4. $\square$

Mit Hilfe von Theorem 2.2.10 soll jetzt gezeigt werden

Theorem 2.2.11 *Seien V offen und relativ kompakt und $x \in \overline{V}$. Für jede auf X harmonische Funktion h mit*

$$\|h\|_{BMO^*} < \frac{1}{8}$$

gilt die Ungleichung

$$\int e^{|h(z)-h(x)|} D^V(x, dz) \leq \frac{1}{1 - 8\|h\|_{BMO^*}}.$$

Beweis: Nach Theorem 2.2.10 gilt

$$E^x(e^{|h(X_\infty)-h(X_{n-1})|} | \mathcal{F}_n) \leq \frac{1}{1 - 8\|h(X_\infty)\|_{BMO_1}}.$$

Nach Lemma 2.2.9 folgt deswegen

$$E^x(e^{|h(X_\infty)-h(X_{n-1})|} | \mathcal{F}_n) \leq \frac{1}{1 - 8(\|h\|_{BMO^*} + 3/2\lambda)}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
E^x(e^{|h(X_\infty)-h(X_n)|} | \mathcal{F}_n) &= E(e^{|h(X_\infty)-h(X_{n-1})+h(X_{n-1})-h(X_n)|} | \mathcal{F}_n) \\
&\leq E(e^{|h(X_\infty)-h(X_{n-1})|+|h(X_{n-1})-h(X_n)|} | \mathcal{F}_n) \\
&= e^{|h(X_{n-1})-h(X_n)|} E(e^{|h(X_\infty)-h(X_{n-1})|} | \mathcal{F}_n) \\
&\leq e^{(3/2)\lambda} \frac{1}{1 - 8\left(\|h\|_{BMO^*} + (3/2)\lambda\right)}.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\lambda > 0$, also

$$\int e^{|h(z)-h(X_n)|} D^V(X_n, dz) = E^x(e^{|h(X_\infty)-h(X_n)|} | \mathcal{F}_n) \leq \frac{1}{1 - 8\|h\|_{BMO^*}}.$$

Speziell für $n = 0$ ergibt sich

$$E^x(e^{|h(X_\infty)-h(x)|}) = \int e^{|h(z)-h(x)|} D^V(x, dz) \leq \frac{1}{1 - 8\|h\|_{BMO^*}}.$$

$\square$

Korollar 2.2.12 *Seien h eine harmonische Funktion mit $\|h\|_* < \infty$, $x \in V \in \mathcal{V}$. Dann gibt es Konstanten $\gamma > 0$ und $K < \infty$ mit*

$$\sup_{V \in \mathcal{V},\, x \in V} \int e^{\gamma|h(z)-h(x)|} D^V(x, dz) \leq K.$$

Beweis: Normiere gegebenfalls die Funktion h. □

Nach dieser Vorarbeit kann man nun eine JNU für harmonische Räume zeigen.

Theorem 2.2.13 (John-Nirenberg Ungleichung) *Sei $h \in \mathcal{H}_0$ eine harmonische Funktion mit $\|h\|_* < \infty$. Dann gilt für $\lambda > 0$ die folgende Ungleichung*

$$D_x^V \{|h - h(x)| > \lambda\} \leq e^{-\gamma\lambda} \int e^{\gamma|h(z)-h(x)|} D^V(x, dz) \leq K e^{-\gamma\lambda}.$$

Beweis: Korollar 2.2.12 und Theorem 1.3.3 □

Weiterhin gilt

Korollar 2.2.14 *Sei $h \in BMO(X)$. Dann gibt es $K, \gamma > 0$, so daß gilt*

$$\sup_{V \in \mathcal{V},\, x \in V} \int e^{\gamma|h(z)-h(x)|} \mu_x^V(dz) \leq K.$$

Vor allem erhält man

$$\mu_x^V \{h - h(x) > \lambda\} \leq \mu_x^V \{|h - h(x)| > \lambda\} \leq K e^{-\gamma\lambda},$$

unabhängig von x und V.

Beweis: Wähle für V eine Keldychmenge W mit $\overline{V} \subset W$, dann wende Lemma 2.1.5 auf die subharmonische Funktion $e^{\gamma|h-h(x)|}$ an. □

Leicht erhält man nun die folgende Charakterisierung der Funktionen aus $BMO(X)$.

Lemma 2.2.15 *Sei $h \in \mathcal{H}_0$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent*

1. $h \in BMO(X)$.
2. $\exists \gamma, K > 0 : \sup\limits_{(x,V)} \int e^{\gamma |h-h(x)|} d\mu_x^V \leq K$.
3. $\sup\limits_{(x,V)} \int |h-h(x)|^p d\mu_x^V < \infty, \ \forall p \in \mathbb{N} \geq 2$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2.
Folgt nach Korollar 2.2.14.
2. $\Rightarrow$ 3.
Stets gilt

$$e^{\gamma x} \geq \frac{1}{p!} \gamma^p x^p, \quad \forall \gamma, x \geq 0.$$

3. $\Rightarrow$ 1.
Wegen $|h-h(x)|^p + 1 \geq |h-h(x)| \geq (h-h(x))^+, \ \forall p \geq 2$ gilt auch die letzte Implikation. $\square$

Bemerkung 2.2.16 *Vor allem zeigt die letzte Eigenschaft des vorherigen Lemmas, daß man zur Definition von $BMO(X)$ anstelle von $|h-h(x)|$ auch die Funktion $|h-h(x)|^p$ mit Exponent $p \geq 2$ wählen kann und trotzdem die gleiche Klasse an Funktionen erhält. Nur die BMO-Norm verändert sich.*

Die in diesem Abschnitt erzielten Resultate sollen im Folgenden verwendet werden, um eine Charakterisierung der harmonischen Funktionen zu erzielen, die von der Klasse BMO sind.

2.3 Quasibeschränktheit

Bekanntlich heißt eine positive harmonische Funktion $h \in \mathcal{H}^+(X)$ quasibeschränkt, wenn es eine Folge (h_n) von positiven und beschränkten harmonischen Funktionen gibt, so daß (h_n) gegen h aufsteigt. Für ein beliebiges Element $h \in \mathcal{H}_0(X)$ soll gelten.

Definition 2.3.1 *Eine Funktion $h = h_1 - h_2$ aus $\mathcal{H}_0(X)$ heiße* quasibeschränkt*, wenn die positiven harmonischen Funktionen h_1 und h_2 jeweils quasibeschränkt sind. Die Menge der quasibeschränkten Funktionen auf X werde mit $\mathcal{Q}(X, \mathcal{H})$ bezeichnet.*

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß jede harmonische Funktion von beschränkter mittlerer Oszillation auch quasibeschränkt ist.
Zuerst eine Definition:

Definition 2.3.2 *Seien h aus $\mathcal{H}_0(X)$ und $x \in X$. Die Funktionenfamilie $(h_{x,n})$ sei gegeben durch*

$$h_{x,n} := |h - h(x)|.$$

Diese Familie ist also unabhängig vom zweiten Index.
Die Familie von Maßen $(\mu_{x,n})$ sei definiert durch

$$\mu_{x,n} := \mu_x^{V_n}.$$

Mit Hilfe dieser Definitionen ergibt sich sofort

Theorem 2.3.3 *Eine harmonische Funktion $h \in \mathcal{H}_0$ ist von der Klasse $BMO(X)$ genau dann, wenn $(h_{x,n})$ gleichgradig integrierbar bezüglich $(\mu_{x,n})$ ist.*

Beweis: Aufgrund von Korollar 2.2.14 gibt es Konstanten $\gamma, K > 0$ mit

$$\int e^{\gamma|h(z)-h(x)|} \mu_x^{V_n}(dz) \leq K,$$

unabhängig von x und n. Nach Theorem 1.4.2 folgt dann aus Bedingung 2 die gleichgradige Integrierbarkeit.

Ist die Familie $(h_{x,n})$ gleichgradig integrierbar, so gilt nach Theorem 1.4.2, Bedingung 3

$$2\|h\|_* = \sup_{(x,n)\in X\times\mathbb{N}} \int |h - h(x)|\mu_x^{V_n} < \infty.$$

□

Lemma 2.3.3 erlaubt es nun eine weitere Eigenschaft von harmonischen Funktionen mittlerer beschränkter Oszillation zu beweisen.

Theorem 2.3.4 *Sei $h \in BMO(X)$ dann gilt*

$$\lim_{\lambda\to\infty} M(h-\lambda)^+ = 0.$$

Beweis: Sei x aus X, dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} M(h-\lambda)^+(x) &= \lim_{\lambda\to\infty} M(h-h(x)-\lambda)^+(x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\lim_n \int (h-h(x)-\lambda)^+ d\mu_x^{V_n} \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\lim_n \left(\int\limits_{h-h(x)>\lambda} (h-h(x))d\mu_x^{V_n} - \lambda\mu_x^{V_n}\{h-h(x)>\lambda\} \right) \\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty}\lim_n \left(\int\limits_{|h-h(x)|>\lambda} |h-h(x)|d\mu_x^{V_n} \right) = 0,
\end{aligned}$$

da die Familie $(h_{x,n})$ aufgrund von Lemma 2.3.3 gleichgradig integrierbar bezüglich $(\mu_{x,n})$ ist. □

Nach diesen Vorarbeiten wird jetzt das Hauptresultat diese Abschnitts bewiesen.

Theorem 2.3.5 *Sei $h \geq 0$ von der Klasse $BMO(X)$, dann ist h quasibeschränkt.*

Beweis: Definiere die Folge (h_n) durch

$$h_n := h - M(h-n)^+.$$

Dann ist (h_n) eine monoton wachsende, positive Folge beschränkter harmonischer Funktionen und aufgrund von Theorem 2.3.4 gilt $h_n \uparrow h$. Also ist h quasibeschränkt. □

Bemerkung 2.3.6 *Eine beliebige Funktion $h \in BMO(X)$ ist stets als Differenz zweier positiver Funktionen h_1, h_2 aus $BMO(X)$ darstellbar, da $BMO(X)$ offensichtlich ein Rieszunterraum von $\mathcal{H}_0$ ist.*

Korollar 2.3.7 *Jede Funktion h in $BMO(X)$ ist quasibeschränkt.*

Beweis: Wende Theorem 2.3.5 auf den Positiv- und den Negativteil von h an. □

Bemerkung 2.3.8 *Leutwiler ist in [LE2], Proposition* 2.1 *der Beweis von Theorem 2.3.5 mit Hilfe abstrakt definierter Operatoren gelungen.*

2.4 Charakterisierung von BMO-Funktionen

In diesem Abschnitt soll jetzt eine Charakterisierung der harmonischen Funktionen gegeben werden, die von beschränkter mittlerer Oszillation sind. Dazu benötigt man die folgende Definition

Definition 2.4.1 *Seien $h \in \mathcal{H}_0(X)$ und $x \in X$. Dann ist die Funktion $\lambda \mapsto M(h - h(x) - \lambda)^+(x)$ eine konvexe und monoton fallende Funktion auf $[0, \infty)$. Deshalb existiert für alle $\lambda > 0$ die rechtsseitige Ableitung*

$$\lambda \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_+ M(h - h(x) - \lambda)^+(x).$$

Definiere die Funktion p_h^x für $\lambda > 0$ durch

$$p_h^x(\lambda) := -\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_+ \left[M(h - h(x) - \lambda)^+(x)\right]$$

und die Funktion p_h für alle $\lambda > 0$ durch

$$p_h(\lambda) = \sup_{x \in X} p_h^x(\lambda).$$

Es gilt:

Lemma 2.4.2 *Sei $h \in \mathcal{Q}(X, \mathcal{H})$. Wenn die Funktion p_h Lebesgue-integrierbar auf $(0, \infty)$ ist, dann ist h von der Klasse $BMO(X)$.*

Beweis: Siehe [LE2], Proposition 7.3. □

Um in Lemma 2.4.2 eine Äquivalenz zu erhalten benötigt man das folgende Lemma.

Lemma 2.4.3 *Seien (f_n) eine Folge konvexer Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f_n : I \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß (f_n) punktweise gegen die endliche (konvexe) Funktion f konvergiert. Dann konvergiert $\left(f_n'\right)$ punktweise gegen f' fast überall auf I.*

Beweis: Siehe [RV], Seite 20. □

Definiere nun für $x \in X$ und $h \in BMO(X)$ die Funktionenfolge $\left(f_n^{x,h}\right)$ durch

$$f_n^{x,h}(\lambda) := \int (h - h(x) - \lambda)^+ d\mu_x^{V_n}, \quad \lambda > 0.$$

Bemerkung 2.4.4 *Die Folge $\left(f_n^{x,h}\right)$ hat die folgenden Eigenschaften*

1. *$f_n^{x,h}$ ist konvex für alle $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Es gilt $f_n^{x,h}(\lambda) \uparrow M(h - h(x) - \lambda)^+(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.*
3. *$-\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_+ \left[f_n^{x,h}(\lambda)\right] = \mu_x^{V_n}\left\{h - h(x) > \lambda\right\}$ für alle $\lambda > 0$.*

Um das nachfolgende Theorem beweisen zu können, benötigt man ein Lemma über nach oben halbstetige Funktionen.

Lemma 2.4.5 *Sei F eine nach oben halbstetige Funktion, $F : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ mit $F \geq 0$ auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}_+^*$. Dann ist F auf ganz $\mathbb{R}_+^*$ positiv.*

Beweis: Angenommen, es gibt ein $x \in \mathbb{R}_+^*$ mit $F(x) < 0$. Da F nach oben halbstetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $F(y) < 0$ für alle $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Dies widerspricht der Tatsache, daß F auf einer dichten Teilmenge positiv sein soll. □

Es gilt nun das Folgende:

Theorem 2.4.6 *Für $h \in \mathcal{H}_0$, sind die folgenden Aussagen äquivalent*

1. *$h \in BMO(X)$.*
2. *Es gibt $\gamma, K \in \mathbb{R}_+$ mit $p_h(\lambda) \leq Ke^{-\gamma\lambda}$ für alle $\lambda > 0$ und h ist quasi-beschränkt.*

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Sei $h \in BMO(X)$, dann gilt nach Lemma 2.4.3 und Bemerkung 2.4.4

$$\lim_n -\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_+ \left[f_n^{x,h}(\lambda)\right] = -\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_+ \left[M(h - h(x) - \lambda)^+(x)\right] = p_h^x(\lambda)$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Es gilt

$$-\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_+ \left[f_n^{x,h}(\lambda)\right] = \mu_x^{V_n}\left\{h - h(x) > \lambda\right\}.$$

Da $h \in BMO(X)$, gibt es nach Theorem 2.2.13 beziehungsweise Korollar 1.3.3 Zahlen $\gamma, K \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\mu_x^{V_n}\left\{h - h(x) > \lambda\right\} \leq Ke^{-\gamma\lambda}\ \forall n \in \mathbb{N};\ x \in V_n$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt für fast alle $\lambda > 0$

$$p_h^x(\lambda) \leq Ke^{-\gamma\lambda}.$$

Da die Funktion p_h^x monoton fallend und rechtsseitig stetig ist, ist sie nach unten halbstetig. Definiere die Menge N_x durch

$$N_x := \left\{\lambda > 0 :\ p_h^x(\lambda) > Ke^{-\gamma\lambda}\right\},$$

dann gilt $N_x = \emptyset$. Dies folgt mit Lemma 2.4.5, weil die Funktion $t \mapsto Ke^{-\gamma t} - p_h^x(t)$ eine nach oben halbstetige und auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}_+^*$ positive Funktion ist. Also gilt

$$p_h^x(\lambda) \leq Ke^{-\gamma\lambda}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ und $x \in X$. Daraus folgt

$$p_h(\lambda) \leq Ke^{-\gamma\lambda}$$

für alle $\lambda > 0$. Mit Theorem 2.3.5 folgt, daß h quasibeschränkt ist.
2. $\Rightarrow$ 1. Angenommen es gibt $\gamma, K \in \mathbb{R}_+^*$ mit $p_h(\lambda) \leq Ke^{-\gamma\lambda}$, dann folgt

$$\int_0^\infty p_h(s)ds \leq \int_0^\infty Ke^{-\gamma s}ds < \infty.$$

Nach Lemma 2.4.2 gilt $h \in BMO(X)$, weil h nach Voraussetzung quasibeschränkt ist. $\square$

Kapitel 3

Randverhalten von BMO-Funktionen

3.1 Integraldarstellung harmonischer Majoranten

Sei weiterhin $(X, \mathcal{H})$ ein harmonische Raum und r ein normiertes Bezugsmaß. Das Tripel $(X, \mathcal{H}(X), r)$ erfüllt alle Voraussetzungen der Arbeit [BL]. Insbesondere existiert eine (bis auf Homöomorphismen) eindeutige Kompaktifizierung X^F des Grundraumes X, so daß sich alle beschränkten Elemente von $\mathcal{H}$ stetig auf den Rand $X^F \setminus X$ fortsetzen lassen und die Menge dieser Fortsetzungen die Punkte des Randes trennt. Diese Kompaktifizierung heiße die Feller-Kompaktifizierung von X. Die Menge $X^F \setminus X$ ist der **Feller-Rand** von X^F und wird mit $\triangle_F$ bezeichnet.
Die beschränkten Elemente von $\mathcal{H}$ seien im Folgenden mit $\mathcal{H}_b$ bezeichnet.
Da die Menge $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^+$ ein Vektorverband bezüglich der durch den Kegel $\mathcal{H}^+$ definierten Ordnung ist, existiert zu $h, g \in \mathcal{H}_b$ neben dem punktweisen Infimum $h \wedge g$ auch die größte Minorante von $h \wedge g$ in $\mathcal{H}_b$. Diese werde mit $h \wedge_{\mathcal{H}} g$ bezeichnet. Definiert man den **harmonischen Teil** Γ_F von $\triangle_F$ durch

$$\Gamma_F := \{x \in \triangle_F : \ h \wedge g(x) = h \wedge_{\mathcal{H}} g(x) \text{ für alle } h, g \in \mathcal{H}_b\},$$

so ist Γ_F eine nicht-leere und kompakte Menge. Es gilt das folgende Theorem.

Theorem 3.1.1 *Die Banachverbände* $(\mathcal{H}_b, \| \|_X)$ *und* $(\mathcal{C}(\Gamma_F), \| \|_{\Gamma_F})$ *sind isometrisch isomorph unter der Restriktionsabbildung* $\phi : h \mapsto h_{|\Gamma_F}$.

Beweis:
Siehe [BL] Proposition 4.3.

$\square$

Aus diesem Theorem und $1 \in \mathcal{H}$ folgt, daß es zu jedem Punkt $z \in X^F$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_z^F auf Γ_F gibt, so daß jedes $h \in \mathcal{H}_b$ durch genau ein $f \in \mathcal{C}(\Gamma_F)$ mittels

$$h(z) = \int f d\mu_z^F$$

dargestellt wird.
Diese Integraldarstellung läßt sich auf die quasibeschränkten Elemente von $\mathcal{H}^+$ ausdehnen. Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 3.1.2 *Sei* $h \in \mathcal{H}^+$ *quasibeschränkt, dann gibt es eine nach unten halbstetige Funktion* f *auf* Γ_F *mit*

$$h(x) = \int f d\mu_x^F \quad \forall x \in X.$$

Beweis:
Da h quasibeschränkt ist, gibt es eine Folge $(h_n) \subset \mathcal{H}_b^+$ mit $h_n \uparrow h$. Zu jedem h_n gibt es ein $f_n \in \mathcal{C}^+(\Gamma_F)$ mit

$$h_n(x) = \int f_n d\mu_x^F \text{ für alle } x \in X.$$

Wegen $h_n \geq h_{n-1}$ auf X folgt $h_n \geq h_{n-1}$ auf X^F, da X eine dichte Teilmenge von X^F ist und $(h_n) \subset \mathcal{C}(X^F)$ gilt. Auf Γ_F gilt $h_n = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also folgt

$$f_n \geq f_{n-1} \text{ auf } \Gamma_F$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Definiere $f := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Dann ist f als aufsteigender Grenzwert stetiger Funktionen eine auf Γ_F nach unten halbstetige Funktion. Für $x \in X$ gilt

$$h_n(x) = \int f_n d\mu_x^F \leq h(x) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu_x^F < \infty.$$

Mit Hilfe des Satzes von Beppo-Levi gilt für $x \in X$

$$h(x) = \sup_n h_n(x) = \sup_n \int f_n d\mu_x^F = \int \sup_n f_n d\mu_x^F = \int f d\mu_x^F.$$

□

Definition 3.1.3 *Für eine quasibeschränkte Funktion $h \in \mathcal{H}^+$ existiert nach Theorem 3.1.2 eine Funktion f auf Γ_F, die h bezüglich der Maße (μ_x^F) darstellt. Dieses f werde als* Randfunktion *von h bezeichnet. Soll explizit auf f hingewiesen werden, so wird statt h auch h_f geschrieben. Es gilt also*

$$h_f(x) = \int f d\mu_x^F \text{ für alle } x \in X.$$

Betrachtet man die reellwertige Abbildung r_F auf der Menge $\mathcal{C}^+(\Gamma_F)$ gegeben durch $f \mapsto r(h_f)$, so ergibt sich: Aufgrund der Eigenschaften von r ist diese Abbildung darstellbar als ein positives Radonmaß auf dem Meßraum $(\Gamma_F, \mathcal{B}(\Gamma_F))$, wobei $\mathcal{B}(\Gamma_F)$ die Menge der Borelschen Mengen von Γ_F ist (vergleiche die Arbeit [BL]).
Der Maßraum $(\Gamma_F, \mathcal{B}(\Gamma_F), r_F)$ hat nun eine spezielle Eigenschaft, die sich als äußerst nützlich erweisen wird.

Theorem 3.1.4 *Der Maßraum $(\Gamma_F, \mathcal{B}(\Gamma_F), r_F)$ ist ein perfekter Maßraum, daß heißt, zu jeder Äquivalenzklasse aus $L^\infty(r_F)$ gibt es genau einen Repräsentanten aus $\mathcal{C}(\Gamma_F)$.*

Beweis:
Siehe [BL] Theorem 4.4.

□

Das so aus r konstruierte Wahrscheinlichkeitsmaß r_F steht mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_x^F in folgender Beziehung.

Theorem 3.1.5 *Für jedes $x \in X$ gibt es genau eine auf ganz X^F stetige Funktion h_x mit*

1. $h_{x|X} \in \mathcal{H}_b^+$.
2. $\frac{d\mu_x^F}{dr_F} = h_x$.

Beweis:
Siehe [BL] Proposition 4.6.

□

Die Abbildung r_F läßt sich auf die Randfunktionen f von r-integrierbaren, quasibeschränkten Funktionen h_f ausdehnen.

Lemma 3.1.6 *Sei h_f quasibeschränkt mit Randfunktion f. Weiterhin gelte $h_f \in L^1(r)$. Dann gilt*

$$r(h_f) = r_F(f).$$

Beweis: Die Funktion f auf Γ_F existiert nach Lemma 3.1.2. Da h_f quasibeschränkt ist, gibt es eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{C}(\Gamma_F)$, die gegen f aufsteigt. Mit

$$h_n(x) := \int f_n d\mu_x^F$$

folgt aus

$$r(h_f) = \int h_f dr = \int \sup_n h_n dr = \sup_n \int h_n dr = \sup_n r_F(f_n) = r_F(f)$$

die Behauptung.

□

Lemma 3.1.7 *Sei $f \in L^1(\mu_x^F)$ für alle $x \in X$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto \int f d\mu_x^F$ eine quasibeschränkte harmonische Funktion auf X.*

Beweis:
Definiere die Folge $f_n := (f \wedge n)$. Dies ist eine Folge von beschränkten Funktionen auf Γ_F. Also gilt $(f_n) \subset L^\infty(r_F)$. Aufgrund von Theorem 3.1.4 und

Theorem 3.1.5 kann also bei Integration gegen die Maße μ_x^F für die Folge (f_n), $(f_n) \subset \mathcal{C}(\Gamma_F)$ angenommen werden. Nun erhält man durch $h_n(x) := \int f_n d\mu_x^F$ eine aufsteigende Folge beschränkter, positiver harmonischer Funktionen, die aufgrund von

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \leq \int f d\mu_x^F < \infty \quad \text{für alle } x \in X$$

gegen eine harmonische Funktion h konvergiert. Wegen

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_x^F = \int f d\mu_x^F \text{ für alle } x \in X$$

folgt dann die Behauptung.

□

Korollar 3.1.8 *Sei $f \in L^1(\mu_x^F)$ für alle $x \in X$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto \int f d\mu_x^F$ eine harmonische Funktion, die sich als Differenz zweier quasibeschränkter Funktionen schreiben läßt. Aus*

$$h(x) := \int f d\mu_x^F < \infty \quad \textit{für alle } x \in X$$

folgt also

$$h = h_1 - h_2, \textit{ mit } h_1, h_2 \textit{ quasibeschränkt}.$$

Beweis:
Wende Theorem 3.1.7 auf den Positiv- und Negativteil von f an.

□

Zusammenfassend erhält man die folgende Charakterisierung der quasibeschränkten harmonischen Funktionen.

Theorem 3.1.9 *Sei r ein normiertes Bezugsmaß. Dann sind folgenden Aussagen über eine positive harmonische Funktion $h \in L^1(r)$ äquivalent*

1. *h ist quasibeschränkt.*

2. *Es gibt eine positive Funktion f auf Γ_F mit $f \in L^1(\mu_x^F)$ für alle $x \in X$, so daß gilt*
$$h(x) = \int f d\mu_x^F \quad \forall x \in X.$$

3. *Es gibt eine positive Funktion f auf Γ_F mit $f \in L^1(r_F)$, so daß gilt*
$$h(x) = \int f h_x dr_F \quad \forall x \in X.$$

Beweis:
1. $\Rightarrow$ 2. folgt mit Lemma 3.1.2.
2. $\Rightarrow$ 1. folgt mit Lemma 3.1.7.
3. $\Rightarrow$ 2. Es ist lediglich $f \in L^1(\mu_x^F)$ für alle $x \in X$ zu zeigen. Dies folgt sofort, da die Dichte von μ_x^F bezüglich r_F eine beschränkte Abbildung ist.
1. $\Rightarrow$ 3. h besitzt nach dem bisher Gezeigten eine Integraldarstellung
$$h(x) = \int f h_x dr_F.$$
Aus Lemma 3.1.6 folgt $r_F(f) = r(h) < \infty$, also gilt $f \in L^1(r_F)$.

$\square$

Ausgehend von diesen Überlegungen ist man nun in der Lage eine Integraldarstellung für die kleinste harmonische Majorante $M(\phi \circ h)$ zu erhalten, wobei ϕ eine konvexe und positive Funktion und h quasibeschränkt ist. Zuerst wird jetzt eine solche Darstellung gezeigt, wenn h beschränkt ist. Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 3.1.10 *Sei (s_m) eine Folge positiver subharmonischer Funktionen, die gegen eine subharmonische Funktion s aufsteigt, deren kleinste subharmonische Majorante Ms existiert. Dann konvergiert die Folge Ms_m gegen Ms lokal gleichmäßig.*

Beweis:
Sei x aus X. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\lim_{n \to \infty} \int s_m d\mu_x^{V_n} = Ms_m(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{m\to\infty}\int s_m d\mu_x^{V_n} = \int s d\mu_x^{V_n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei (V_n) ein Auschöpfung von X ist.
Sei $x \in X$. Definiere für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$a_{mn} := \int s_m d\mu_x^{V_n}.$$

Dann ist (a_{mn}) eine positive, monoton wachsende [1] Doppelfolge, die aufgrund von

$$\int s_m d\mu_x^{V_n} \leq Ms_m(x) \leq Ms(x)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$, beschränkt ist. Dementsprechend ist die Vertauschung der Grenzwerte erlaubt und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int s_m d\mu_x^{V_n} = Ms(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int s_m d\mu_x^{V_n} = \lim_{m\to\infty} Ms_m(x).$$

Mit (s_m) steigt auch die Folge (Ms_m) auf. Daher konvergiert (Ms_m) gleichmäßig gegen Ms auf kompakten Mengen.

□

Es ergibt sich als einfache Folgerung:

Korollar 3.1.11 *Seien h eine quasibeschränkte harmonische Funktion, (h_n) eine Folge beschränkter harmonischer Funktionen, die gegen h aufsteigt und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine konvexe und monoton wachsende Funktion. Existiert die kleinste harmonische Majorante der subharmonischen Funktion $\phi \circ h$, so gilt*

$$M(\phi \circ h_n) \uparrow M(\phi \circ h).$$

Beweis:
Die Folge $(\phi \circ h_n)$ ist positiv, subharmonisch und steigt gegen $\phi \circ h$ auf.

□

Dies läßt sich zusammenfassen zu der Bemerkung:

[1] Monoton wachsend bedeutet $m \geq s \wedge n \geq t \to a_{mn} \geq a_{st}$

Bemerkung 3.1.12 *Ist eine positive harmonische Funktion h quasibeschränkt und existiert für eine monoton wachsende positive und konvexe Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ die kleinste harmonische Majorante $M(\phi \circ h)$, so ist $M(\phi \circ h)$ quasibeschränkt.*

Lemma 3.1.13 *Sei h_f eine beschränkte harmonische Funktion mit Randfunktion $f \in \mathcal{C}(\Gamma_F)$. Weiterhin sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Für eine beschränkte harmonische Funktion h_g mit Randfunktion g gilt die folgende Implikation.*

$$h_g \geq \phi(h_f) \text{ auf } X \;\Rightarrow h_g \geq h_{\phi \circ f} \text{ auf } X.$$

Beweis:
Da die auf X^F stetige Funktion h_g die stetige Funktion $\phi \circ h_f$ auf einer dichten Teilmenge (auf X) von X^F dominiert, gilt

$$h_g \geq \phi \circ h_f \text{ auf } \Gamma_F.$$

Auf Γ_F gilt aber $h_g = g$ und $\phi \circ h_f = \phi \circ f$. Da das Maß μ_x^F für alle $x \in X$ von Γ_F getragen wird, folgt

$$h_g(x) = \int g d\mu_x^F \geq \int \phi(f) d\mu_x^F = h_{\phi \circ f}(x).$$

□

Nun ist man in der Lage die beiden zentralen Sätze dieses Abschnitts zu beweisen, die eine Integraldarstellung von $M(\phi \circ h)$ ermöglichen.

Theorem 3.1.14 *Seien $h_f \in \mathcal{H}_b$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ konvex und monoton wachsend. Dann gilt für die kleinste harmonische Majorante der beschränkten subharmonischen Funktion $\phi \circ h$:*

$$M(\phi \circ h)(x) = \int \phi(f) d\mu_x^F \quad \forall x \in X.$$

Beweis:
Die Funktion $x \mapsto \int \phi(f) d\mu_x^F$ ist harmonisch und dominiert aufgrund der Konvexität von ϕ die Funktion $\phi \circ h$, also gilt zunächst

$$M(\phi \circ h) \leq h_{\phi \circ f}.$$

Da $M(\phi \circ h)$ eine beschränkte harmonische Funktion ist, die $\phi \circ h$ dominiert, folgt mit vorangehendem Lemma

$$h_{\phi \circ f} \leq M(\phi \circ h).$$

Also gilt

$$M(\phi \circ h)(x) = h_{\phi \circ f}(x) = \int \phi(f) d\mu_x^F.$$

$\square$

Das vorausgehende Theorem kann man nun leicht auf quasibeschränkte Funktionen ausdehnen.

Theorem 3.1.15 *Seien $h \in \mathcal{H}^+$ quasibeschränkt mit auf Γ_F nach unten halb stetiger Randfunktion f und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ konvex und monoton wachsend. Ist das Integral $\int \phi(f) d\mu_x^F$ endlich für alle $x \in X$, dann existiert $M(\phi \circ h)$ und es gilt*

$$M(\phi \circ h)(x) = \int \phi(f) d\mu_x^F \quad \forall x \in X.$$

Beweis:
Wenn $\int \phi(f) d\mu_x^F$ endlich ist für alle $x \in X$, dann ist die Abbildung $x \mapsto \int \phi(f) d\mu_x^F$ nach Lemma 3.1.7 eine harmonische Majorante von $\phi \circ h$, also existiert die kleinste Majorante. Da h quasibeschränkt ist, kann h nach Lemma 3.1.2 für alle $x \in X$ dargestellt werden durch

$$h(x) = \int f d\mu_x^F.$$

Dabei ist f eine nach unten halbstetige Funktion. Weiterhin gibt es eine Folge $(h_n) \subset \mathcal{H}_b$ mit $h_n \uparrow h$. Zu jedem h_n existiert eine stetige Funktion f_n auf Γ_F mit $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$. Die subharmonische Folge $(\phi \circ h_n)$ steigt gegen die subharmonische Funktion $\phi \circ h$ auf. Aufgrund von Lemma 3.1.10 beziehungsweise Korollar 3.1.11 gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} M(\phi \circ h_n)(x) = M(\phi \circ h)(x) \quad \forall x \in X.$$

Aufgrund von Lemma 3.1.14 gilt die Identität

$$M(\phi \circ h_n)(x) = \int \phi(f_n) d\mu_x^F.$$

Dies liefert dann sofort die gewünschte Gleichung

$$M(\phi \circ h)(x) = \lim_{n\to\infty} \int \phi(f_n) d\mu_x^F = \int \phi(f) d\mu_x^F.$$

$\square$

Bemerkung 3.1.16 *Das vorangehende Theorem behält seine Gültigkeit, wenn h durch $h - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ersetzt wird. Also gilt*

$$M(\phi \circ (h - \lambda))(x) = \int \phi(f - \lambda) d\mu_x^F \quad \forall x \in X.$$

Denn falls $t \mapsto \phi(t)$ die Bedingungen von Theorem 3.1.15 erfüllt, dann tut dies auch die Abbildung $t \mapsto \phi(t - \lambda)$.

3.2 Feller-Kompaktifizierung

Aus dem vorangehenden Abschnitt folgt, falls ein $h \in \mathcal{H}^+$ quasibeschränkt ist, so kann $M(h - h(x))^+(x)$ für $x \in X$ durch das Integral

$$M(h - h(x))^+(x) := \int (f - h(x))^+ d\mu_x^F$$

dargestellt werden, mit f als der zu h gehörige Randfunktion. Ausgehend von den Überlegungen in Kapitel 2 erhält man das folgenden Resultat, welches den klassischen Fall als Spezialfall enthält.

Theorem 3.2.1 *Sei $h \in \mathcal{H}^+$, dann sind äquivalent:*

1. $h \in BMO(X)$.
2. h ist quasibeschränkt mit Randfunktion f. Weiterhin gibt es $K, \gamma > 0$ mit
$$\mu_x^F \{y \in \Gamma_F : \ f - h(x) > \lambda\} \leq Ke^{-\gamma\lambda}$$
für alle $x \in X$.

Beweis: 1. $\Rightarrow$ 2. Wenn $h \in BMO(X)$ ist, gibt es $K, \gamma > 0$, so daß auf $\mathbb{R}_+$ gilt

$$p_h^x(\lambda) \leq Ke^{-\gamma\lambda},$$

unabhängig von $x \in X$. Dies folgt aus dem Beweis von Theorem 2.4.6. Da h nach Voraussetzung quasibeschränkt ist, folgt die erste Implikation mit Hilfe von Lemma 3.1.2 und Theorem 3.1.15, denn es gilt

$$p_h^x(\lambda) = -\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_+ \left[M(h - h(x) - \lambda)^+(x)\right] = \mu_x^F \{y \in \Gamma_F : \ f - h(x) > \lambda\}.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Wenn es $K, \gamma > 0$ gibt mit

$$p_h^x(\lambda) = \mu_x^F \{y \in \Gamma_F : \ f - h(x) > \lambda\} \leq Ke^{-\gamma\lambda}$$

für alle $x \in X$, dann folgt für

$$p_h(\lambda) := \sup_{x \in X} p_h^x(\lambda)$$

trivialerweise

$$p_h(\lambda) \leq Ke^{-\gamma\lambda}.$$

Aufgrund von Lemma 2.4.2 gilt also $h \in BMO(X)$.

□

Mit Hilfe von Theorem 3.2.1 ist man nun in der Lage eine weitere Charakterisierung der Klasse der BMO-Funktionen zu geben. Es gilt das folgende Theorem.

Theorem 3.2.2 *Für eine positive harmonische Funktion h sind äquivalent.*

1. Die Funktion h ist von der Klasse BMO.

2. h ist quasibeschränkt, und es gibt ein $\beta > 0$, so daß die kleinste harmonische Majorante der subharmonischen Funktion $e^{\beta h}$ existiert mit

$$\sup_X Me^{\beta(h-h(x))}(x) < \infty.$$

Beweis:
1. $\Rightarrow$ 2. Da $h \in BMO(X)$ gilt, existieren $K, \gamma > 0$ mit

$$\sup_X \mu_x^F \{y \in \Gamma_F : \ f - h(x) > \lambda\} \leq Ke^{-\gamma\lambda}.$$

Wähle $x \in X$ sowie $0 < \beta < \gamma$ und betrachte das Integral

$$\int e^{\beta(f-h(x))} d\mu_x^F.$$

Hierbei ist f die zu h gehörige Randfunktion.

Für eine meßbare Abbildung g von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(X, \mathcal{F}, \mu)$ nach $\mathbb{R}_+$ gilt bekanntlich:[2]

$$\int g d\mu \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu \{g > n\}.$$

[2]Siehe zum Beispiel Klenke Satz 4.26, Seite 95 für einen Beweis

In diesem Fall erhält man

$$\int e^{\beta(f-h(x))} d\mu_x^F \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_x^F \left\{ e^{\beta(f-h(x))} > n \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_x^F \left\{ e^{\beta(f-h(x))} > n \right\}.$$

Stets gilt

$$\mu_x^F \left\{ e^{\beta(f-h(x))} > n \right\} = \mu_x^F \left\{ f - h(x) > \frac{\ln n}{\beta} \right\}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\mu_x^F \left\{ f - h(x) > \frac{\ln n}{\beta} \right\} \leq K e^{-\gamma \frac{\ln n}{\beta}} = K n^{-\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Einsetzen liefert

$$\int e^{\beta(f-h(x))} d\mu_x^F \leq 1 + K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{\beta}}. \tag{3.1}$$

Da β strikt kleiner als γ gewählt war, gilt $\frac{\gamma}{\beta} > 1$. Also konvergiert die Reihe gegen eine Konstante, die unabhängig von x ist. Ungleichung (3.1) zeigt also

$$\sup_X \int e^{\beta(f-h(x))} d\mu_x^F \leq L < \infty.$$

Hieraus sieht man sofort, daß das Integral

$$\int e^{\beta f} d\mu_x^F$$

für jedes $x \in X$ aufgrund von

$$\int e^{\beta f} d\mu_x^F = e^{\beta h(x)} \int e^{\beta(f-h(x))} d\mu_x^F \leq e^{\beta h(x)} L$$

eine endlichen Wert hat. Also existiert die kleinste harmonische Majorante von $e^{\beta h}$ und es gilt

$$M e^{\beta h}(x) = \int e^{\beta f} d\mu_x^F \leq e^{\beta h(x)} L.$$

Aufgrund von Ungleichung (3.1) folgt

$$\sup_X M e^{\beta(h-h(x))}(x) \leq 1 + K \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{\beta}}.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Ergibt sich sofort aus der elementaren Ungleichung

$$x^+ \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Man erhält

$$\beta(h - h(x))^+ \leq e^{\beta(h-h(x))} \Rightarrow \beta M(h - h(x))^+(x) \leq Me^{\beta(h-h(x))}(x).$$

Insgesamt erhält man also für $0 < \beta < \gamma$

$$M(h - h(x))^+(x) \leq \frac{1}{\beta}\left(1 + K\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{\beta}}\right).$$

□

Als Korollar ergibt sich:

Korollar 3.2.3 *Für $h \in \mathcal{H}^+$ sind äquivalent.*

1. Die Funktion $h \in BMO(X)$.

2. Für alle $p \in \mathbb{N}$ existiert $M(h^p)$, und es gilt

$$\sup_X M[(h - h(x))^+]^p(x) < \infty.$$

Beweis:
1. $\Rightarrow$ 2. Sei $p \in \mathbb{N}$. Nach Theorem 3.2.2 existiert $Me^{\beta h}$ für ein $\beta > 0$. Wegen $h \geq 0$ folgt

$$Me^{\beta h} \geq e^{\beta h} \geq \frac{\beta^p}{p!}(h)^p.$$

und $M(h)^p$ existiert dementsprechend, da die subharmonische Funktion $(h)^p$ eine harmonische Majorante besitzt. Wegen

$$Me^{\beta(h-h(x))^+}(x) \geq \frac{\beta^p}{p!}M[(h - h(x))^+]^p(x)$$

folgt die Implikation.
2. $\Rightarrow$ 1. Setze $p = 1$.

□

Bemerkung 3.2.4 *Für den Fall der Laplacegleichung auf der oberen Halbebene wurden die vorangehenden Resultate bereits in [LE2] beziehungsweise [LE3] gezeigt.*

3.3 Kompaktifizierung vom Typ Martin

Die Fellerkompaktifizierung X^F von X stellt eine recht "große" Kompaktifizierung dar. Anschaulich gesprochen kommen sehr viele Punkte hinzu. Allerdings konnten Bliedtner und Loeb in [BL] die Existenz einer Kompaktifizierung $\widehat{X}$ nachweisen, die in vielen Fällen mit der Martinkompaktifizierung von X übereinstimmt. Dabei handelt es sich um die Q-Kompaktifizierung von X bezüglich der Familie $Q := \{h_x : x \in X\}$.
Da für jedes $x \in X$ die Funktion h_x auf X eine stetige und beschränkte harmonische Funktion darstellt, existiert eine stetige Surjektion Φ von X^F auf $\widehat{X}$. Mit Hilfe dieser Abbildung können die Maße μ_x^F beziehungweise r_F von X^F auf $\widehat{X}$ projeziert werden.

Definition 3.3.1 *Für jedes $x \in X$ definiere*

$$\mu_x := \Phi(\mu_x^F), \quad \sigma := \Phi(r_F).$$

Aus den Definitionen und aufgrund von

$$supp(\mu_x^F) \subset \Gamma_F \subset \triangle_F$$

folgt sofort, daß

$$supp(\mu_x) \subset \triangle := \widehat{X} \setminus X$$

für alle $x \in X$ gelten muß.

Bemerkung 3.3.2 *Mit diesen Definitionen erhält man für eine integrierbare Funktion $f: \triangle \to \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{\triangle} f d\mu_x = \int\limits_{\Gamma_F} (f \circ \Phi) d\mu_x^F.$$

Die Schnittstelle zur vorliegenden Arbeit liefert nun das folgende Theorem. Vergleiche hierzu Proposition 8.5 in [BL].

Theorem 3.3.3 *Für eine positive und bezüglich eines Bezugsmaßes r integrierbare, harmonische Funktion h sind äquivalent:*

1. *h ist quasibeschränkt.*

2. Es gibt eine positive Funktion $f \in L^1(\sigma)$ mit

$$h(x) = \int f d\mu_x \text{ für alle } x \in X.$$

Beweis:
Siehe [BL] Proposition 8.5.

□

Wegen

$$\int (f-\lambda)^+ d\mu_x = \int ((f \circ \Phi) - \lambda)^+ \, d\mu_x^F$$

erhält man:

Theorem 3.3.4 *Sei h ein positive harmonische Funktion, dann sind äquivalent.*

1. $h \in BMO(X)$.

2. h ist quasibeschränkt, und es gibt $K, \gamma > 0$ mit

$$\mu_x \{f - h(x) > \lambda\} \leq K e^{-\gamma\lambda}.$$

Beweis: Aufgrund von

$$\mu_x \{f - h(x) > \lambda\} = \mu_x^F \{(f \circ \Phi) - h(x) > \lambda\}$$

für alle $x \in X$, ergibt sich die Behauptung mit Hilfe von Theorem 3.2.1. □

Kapitel 4

Beispiele

Im nun folgenden Abschnitt werden die Funktion $h^\sharp(x) := M(h - h(x))^+(x)$ und die BMO-Norm $\|h\|_*$ für harmonisches h und $x \in X$ in einigen konkreten Fällen mit Hilfe von Maple berechnet.

4.1 Klassische Potentialtheorie auf dem Einheitsintervall

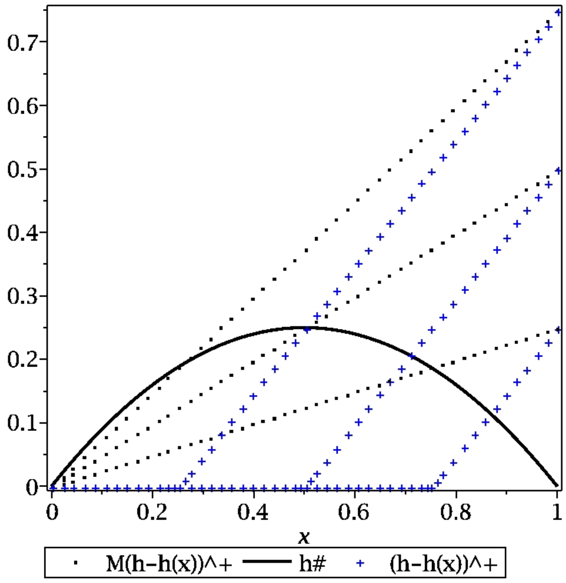
Als Einstieg wird der Fall des harmonischen Raumes $(]0,1[, \mathcal{H})$ der auf dem offenen Einheitsintervall (im klassischen Sinne) harmonischen Funktionen betrachtet. Dies sind bekanntlich gerade die affin-linearen Funktionen. Für die harmonische Funktion $h(x) := x,\ x \in]0,1[$ folgt

$$M(h - h(x))^+(y) = (1-x)y \text{ für alle } x, y \in]0,1[$$

und dementsprechend

$$h^\sharp(x) := (1-x)x \text{ für alle } x \in]0,1[,$$

womit $\|h\|_* = \frac{1}{4}$ folgt.
Die nachstehende Abbildung zeigt die Konstruktion von $h^\sharp$.



Ist nun h eine beliebige, auf $]0,1[$ harmonische Funktion, so gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = ax + b,\ x \in]0,1[.$$

Somit gilt für $\|h\|_*$

$$\|h\|_* = |a| \|(x \mapsto x)\|_* = \frac{|a|}{4}.$$

Solch einfache Zusammenhänge kann man für allgemeine harmonische Räume natürlich nicht erwarten, da dort bereits die Bestimmung von $M(h - h(x))^+$ wesentlich schwieriger ist, als in diesem einfachen Fall.

Damit eine graphische Darstellung möglich ist, dient die obere Halbebene des $\mathbb{R}^2$ in den folgenden Beispielen als Grundraum. Im Folgenden sei also

$$X = \mathbb{R}^2_+ := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 :\ t > 0\right\}.$$

In Abschnitt 4.2 wird der harmonischen Raum, der durch die Wäremleitungsgleichung

$$\partial_{xx} h - \partial_t h = 0$$

erzeugt wird, betrachtet. Das zweite Beispiel in Abschnitt 4.3 behandelt den Fall des durch den Laplaceoperator

$$\triangle h := \partial_{xx} h + \partial_{tt} h = 0$$

gegebenen harmonischen Raums der oberen Halbebene.

Da in diesen beiden Fällen der Martinrand durch den topologischen Rand gegeben ist, werden die harmonischen Majoranten durch Integrale der entsprechenden Randfunktionen bezüglich der harmonischen Maße dargestellt. Dies folgt aus den Überlegungen in den Abschnitten 3.1 beziehungsweise 3.3. Die Dichten dieser Maße bezüglich des Lebesguemaßes sind in diesen speziellen Fällen explizit angebbar.

4.2 Wärmeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt ist der Grundraum durch die obere Halbebene des $\mathbb{R}^2$ gegeben. Es gilt also

$$X = \mathbb{R}^2_+ := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ t > 0\right\}.$$

Es soll der (parabolische) harmonische Raum $(X, \mathcal{H})$ betrachtet werden, der durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_{xx} h - \partial_t h = 0$$

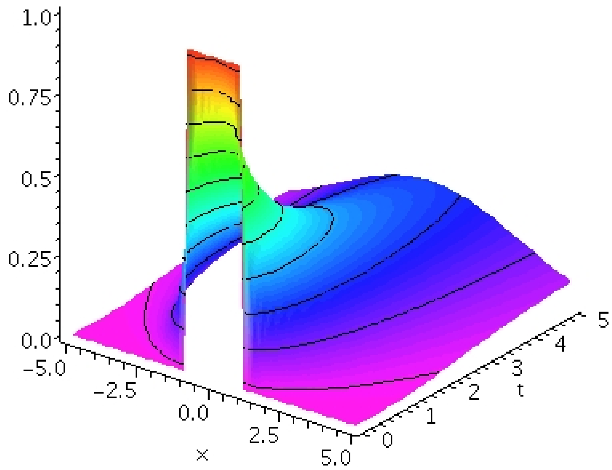
erzeugt wird. Zu einer gegebenen reellwertigen Randfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sucht man also eine auf X harmonische Funktion h mit $\lim\limits_{t \to 0} h(x,t) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Im ersten Beispiel sei f gegeben durch

$$f := 1_{[-1,1]}.$$

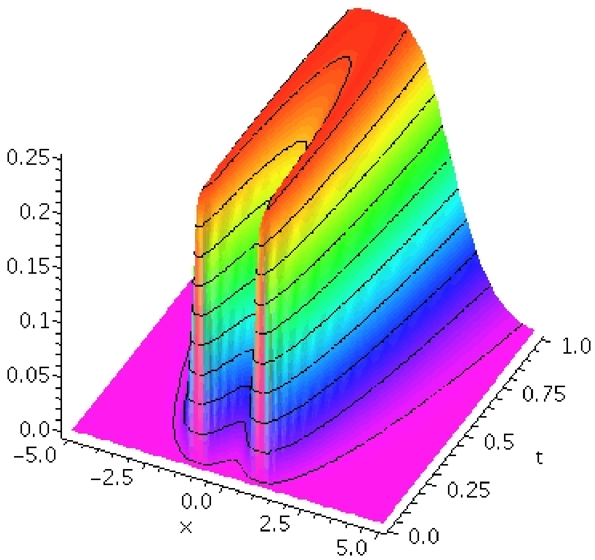
f ist also die Indikatorfunktion des Intervalls $[-1,1]$. Für die Lösung h unter dieser Randbedingung (Anfangsbedingung) gilt

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Dabei bezeichnet erf die Gaußsche Fehlerfunktion. Die folgende Abbildung zeigt die Funktion h.



Mit Hilfe dieser Lösung kann nun $h^\sharp$ berechnet werden. Da es sich bei h um eine beschränkte Funktion handelt, gilt $h \in BMO(X)$. Also ist $h^\sharp$ ebenfalls beschränkt. Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis der mit Hilfe von Maple ausgeführten Berechnungen.



Konkret ergibt sich $h^\sharp$ als

$$\begin{aligned} h^\sharp(x,t) =& \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right]\left|\mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right)\right| \\ &+\frac{1}{4}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right]\left|2+\mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right)\right|. \end{aligned}$$

Da diese Funktion aus einer Summe von beschränkten Funktionen besteht, ist sie selbst, wie erwartet, beschränkt. Für die BMO-Norm von h gilt

$$\|h\|_* = \frac{1}{4}.$$

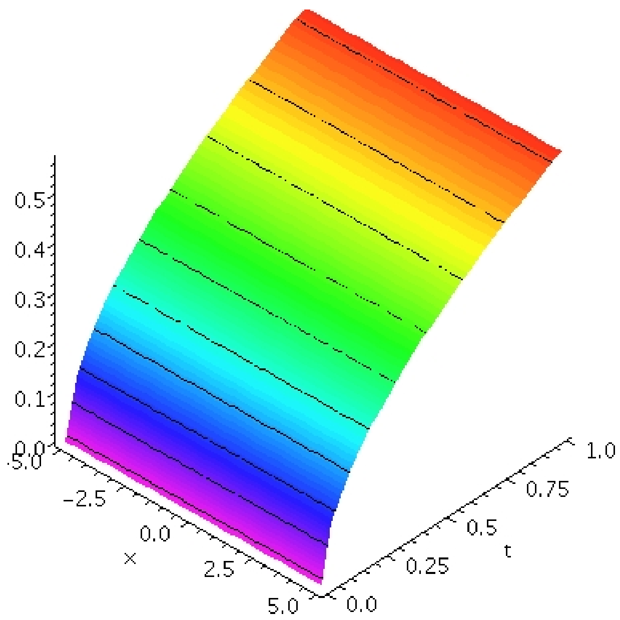
Als nächstes Beispiel wird jetzt als Randfunktion f die Identität auf $\mathbb{R}$ betrachtet. Eine harmonische Fortsetzung von f ist (trivialerweise)

$$h(x,t) = x.$$

Die zur harmonischen Funktion h gehörige Funktion $h^\sharp$ ergibt sich nach einfacher Rechnung als

$$h^\sharp(x,t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}},\ (x,t) \in X.$$

Also ist h nicht in der Klasse BMO, da $h^\sharp$ nicht beschränkt ist. Die folgende Abbildung zeigt $h^\sharp$ für $f(y) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$..



4.3 Laplacegleichung

In diesem Abschnitt sei wiederum X gegeben durch

$$X = \mathbb{R}^2_+ := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ t > 0\right\}.$$

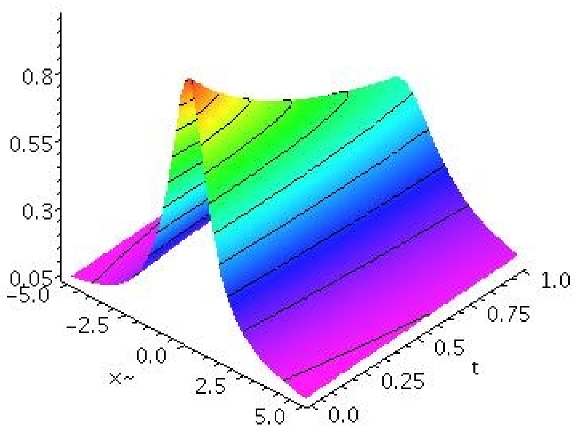
Betrachtet wird der harmonische Raum aller Funktionen $h : X \to \mathbb{R}$, der durch den Lapalaceoperator

$$\triangle h := \partial_{xx} h + \partial_{tt} h = 0$$

erzeugt wird.
Die Randfunktion f sei durch $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$ gegeben. Die harmonische Fortsetzung von f auf X lautet:

$$h(x,t) := \frac{t+1}{x^2 + (t+1)^2}.$$

Die nächste Abbildung zeigt den Graph von h.



Die zu h gehörige Funktion $h^\sharp$ ist gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
h^\sharp(x,t) &= \frac{(2t^3+2t-2tx^2)}{\pi\left(2x^2+1-2t^2+t^4+2t^2x^2+x^4\right)}\arctan\left(\frac{a-1}{a}\right)\\
&+ \frac{(ax^4+a+t^4a-x^2-2t^2a+t^2-1+2ax^2+2t^2ax^2)}{\pi\left(2x^2+1-2t^2+t^4+2t^2x^2+x^4\right)}\arctan\left(\frac{xa-1+a}{at}\right)\\
&+ \frac{(-t^2+2t^2a+1+x^2-a-t^4a+2t^2ax^2-2ax^2-ax^4)}{\pi\left(2x^2+1-2t^2+t^4+2t^2x^2+x^4\right)}\arctan\left(\frac{xa+1-a}{at}\right)\\
&+ \frac{tx\ln\left(t^2a^2+x^2a^2+a^2+2xa-2xa^2-2a+1\right)}{\pi\left(2x^2+1-2t^2+t^4+2t^2x^2+x^4\right)}\\
&- \frac{tx\ln\left(t^2a^2+x^2a^2+a^2-2xa+2xa^2-2a+1\right)}{\pi\left(2x^2+1-2t^2+t^4+2t^2x^2+x^4\right)}.
\end{aligned}
$$

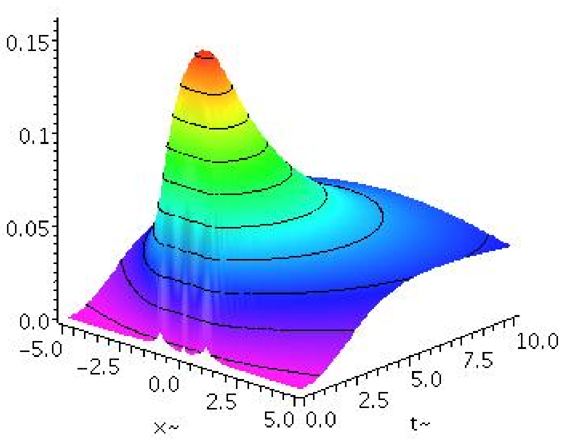
Wobei a durch

$$a := h(x,t) := \frac{t+1}{x^2+(t+1)^2}$$

definiert ist.

Dies zeigt vor allem, daß die konkrete Berechnung von $h^\sharp$ selbst in einfachen Fällen schon sehr schwierig werden kann. Es ist also im konkreten Fall meistens keine gute Idee (und oft auch überhaupt nicht durchführbar!) anhand von $h^\sharp$ zu entscheiden, ob eine harmonische Funktion von der Klasse BMO ist oder nicht.

Die nachstehende Abbildung zeigt $h^\sharp$ für die Randfunktion $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.



Wie erwartet, erkennt man auch hier, daß $h^\sharp$ beschränkt und die Abbildung $(x,t) \mapsto \frac{t+1}{x^2+(t+1)^2}$ dementsprechend ein Element von $BMO(X)$ ist.

Kapitel 5

Funktionalanalystische Eigenschaften von $BMO(X)$

5.1 Der Banachraum $BMO^r(X)/\mathbb{R}$

In seinem Beweis, daß $BMO/\mathbb{R}$ ein Banachraum ist, mußte sich H. Leutwiler in [LE2] auf Brelotsche Räume beschränken, da sein Beweis auf der klassischen Harnackschen Ungleichung basiert.
Im allgemeinen Fall gilt die Harnacksche Ungleichung nicht.
Man kann allerdings auch im allgemeinen Fall die nun folgenden Beobachtungen machen.
Sei r ein Bezugsmaß auf X. Für $h \in BMO \cap L^1(r)$, $K \subset X$ kompakt und $x, y \in K$ gilt die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} |h(y) - h(x)| &\leq M|h - h(x)|(y) \leq M|h - h(x)|(y) + \int M|h - h(x)|dr \\ &\leq C_K \left(M|h - h(x)|(x) + \int M|h - h(x)|dr \right) \\ &\leq C_K \left(2\|h\|_* + \int M|h - h(x)|dr \right). \end{aligned}$$

Die Existenz der nur von K abhängigen Konstanten C_K ergibt sich aus Theorem 1.1.4 und Korollar 1.1.5. Dabei folgt die Integrierbarkeit von $M|h - h(x)|$ bezüglich r aufgrund von:

Lemma 5.1.1 *Für eine Funktion $h \in BMO(X)$ folgt aus der r Integrierbarkeit von h die r Integrierbarkeit von $M|h - h(x)|$ für alle $x \in X$.*

Beweis: Für den Ausdruck $\int M|h - h(x)|dr$ gilt (vergleiche [JA]):

$$\int M|h - h(x)|dr = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\overline{V}_n} \int |h(z) - h(x)|\mu_y^{V_n}(dz)r(dy). \tag{5.1}$$

Die Funktion $y \mapsto \int |h(z) - h(x)|\mu_y^V$ läßt sich nach oben wie folgt abschätzen.

$$\begin{aligned}
\int |h(z) - h(x)|\mu_y^V(dz) &= \int |h(z) - h(y) + h(y) - h(x)|\mu_y^V(dz) \\
&\leq \int |h(z) - h(y)|\mu_y^V + |h(y) - h(x)| \\
&\leq M|h - h(y)|(y) + |h(y) - h(x)| \\
&\leq 2\|h\|_* + |h(y) - h(x)|.
\end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (5.1) ergibt

$$\int M|h - h(x)|dr \leq 2\|h\|_* + \int |h - h(x)|dr.$$

□

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
|h(y) - h(x)| &\leq C_K \left(4\|h\|_* + \int |h - h(x)|dr\right) \\
&\leq C_K \left(4\|h\|_* + \sup_{x\in X} \int |h - h(x)|dr\right) \\
&\leq C_K \left(4\|h\|_* + 2\sup_{x\in X} \int |h - h(x)|dr\right) \\
&= 2C_K \left(2\|h\|_* + \sup_{x\in X} \int |h - h(x)|dr\right).
\end{aligned}$$

Dies führt zu folgender Definition

Definition 5.1.2 *Seien $(X, \mathcal{H})$ ein harmonischer Raum und r ein Bezugsmaß auf X. Definiere die Abbildung $\| \|_*^r : \mathcal{H}_0 \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ durch*

$$\|h\|_*^r := 2\|h\|_* + \sup_{x\in X} \int |h - h(x)|dr.$$

Diese Abbildung erfüllt die Dreiecksungleichung und ist positiv homogen. Weiterhin sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\|h\|_*^r = 0$.

2. $h \equiv c$, für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis:
1. $\Rightarrow$ 2. Nach Voraussetzung ist $\|h\|_* = 0$, also folgt $h \equiv c\ , c \in \mathbb{R}$.
2. $\Rightarrow$ 1. Klar.

$\square$

Es gilt:

Lemma 5.1.3 *Sei K eine kompakte Teilmenge von X. Dann existiert eine Konstante C_K , so daß für alle $x, y \in K$ und $h \in \mathcal{H}_0$ mit $\|h\|_*^r < \infty$ gilt*

$$|h(y) - h(x)| \leq C_K \|h\|_*^r,$$

unabhängig von $x, y \in K$ und h .

Beweis:
Siehe die Rechnung im Beweis von Lemma 5.1.1.

$\square$

Definition 5.1.4 *Definiere $BMO^r(X)$ als den UnterVektorraum aller Elemente h von $\mathcal{H}_0$ für die $\|h\|_*^r$ endlich ist.*

Bemerkung 5.1.5 *Der Raum $(BMO^r/\mathbb{R}, \ \| \ \|_*^r)$ ist ein normierter Raum.*

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß dieser normierte Raum sogar ein Banachraum ist. Allerdings hat man einen gewissen Preis für Lemma 5.1.3 zu zahlen, denn es gilt.

Lemma 5.1.6 *Eine Funktion $h \in \mathcal{H}_0$ ist in $BMO^r(X)$ genau dann, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis:
Sei h beschränkt, dann gilt trivialerweise $h \in BMO^r(X)$.
Ist h aus $BMO^r(X)$, so gilt

$$\sup_{x \in X} \int |h - h(x)| dr < \infty.$$

Wegen

$$\int |h - h(x)| dr \geq |h(x) - \int h dr|$$

für alle $x \in X$ folgt nach Voraussetzung

$$\sup_{x \in X} |h(x) - \int h dr| \leq \sup_{x \in X} \int |h - h(x)| dr \leq K < \infty.$$

Hieraus folgt die Beschränktheit von h.

$\square$

Eine Funktion h ist also in $BMO^r(X)$ genau dann, wenn sie aus $\mathcal{H}_0$ und beschränkt ist. Zur Vorbereitung des Hauptresultates dieses Abschnittes werden noch einige Lemmata benötigt, die jetzt vorgestellt werden sollen.

Lemma 5.1.7 *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X und sei (h_n) eine Folge beschränkter Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion h konvergiert. Weiterhin sei (h_n) eine Cauchyfolge bezüglich der $L^1(\mu)$-Norm. Dann konvergiert (h_n) gegen h in $L^1(\mu)$.*

Beweis:
Sei K kompakt und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $N = N(\varepsilon, K)$ mit

$$|h_n(x) - h(x)| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in K$ und $n \geq N$.
Folglich gilt

$$\int_K |h_n - h| d\mu \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert (h_n) gegen h in $L^1_{loc}(\mu)$. Nach Voraussetzung konvergiert (h_n) gegen eine Funktion $g \in L^1(\mu)$. Bleibt zu zeigen, daß $h = g$ μ-fast sicher gilt.

Wähle eine kompakte Menge K, dann folgt

$$\int\limits_K |h-g|d\mu \leq \int\limits_K |h_n-h|d\mu + \int |h_n-g|d\mu$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, daß h und g auf K fast sicher übereinstimmen. Da X nach Voraussetzung σ-kompakt ist, gilt $h = g$ fast sicher auf ganz X. Also konvergiert die Folge (h_n) gegen h in $L^1(\mu)$.

□

Lemma 5.1.8 *Sei (h_n) eine Cauchfolge in $BMO^r(X)$, dann konvergiert (h_n) gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h.*

Beweis:
Aufgrund von Lemma 5.1.3 konvergiert die Folge lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h. Wegen

$$\int |h_m-h_n|dr \leq \int |h_m-h_n-(h_m(x)-h_n(x))|dr + |h_m(x)-h_n(x)|$$

ist (h_n) eine $L^1(r)$ Cauchyfolge und konvergiert nach Lemma 5.1.7 gegen h auch in $L^1(r)$. Für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} |h_m(x)-h_n(x)| &\leq \int |h_m-h_n-(h_m(x)-h_n(x))|dr + \int |h_m-h_n|dr \\ &\leq \|h_m-h_n\|_*^r + \|h_m-h_n\|_{1,r}, \end{aligned}$$

woraus

$$\|h_m-h_n\|_\infty \leq \|h_m-h_n\|_*^r + \|h_m-h_n\|_{1,r}$$

folgt. Die Folge konvergiert also gleichmäßig gegen h auf ganz X. Vor allem ist h selbst wieder eine beschränkte Funktion, weil alle h_n beschränkt waren.

□

Lemma 5.1.9 *Sei $(h_n) \subset BMO(X)$, so daß die Folge gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h konvergiert. Dann gilt*

1. *Die Funktion h ist von der Klasse BMO.*

2. Die Folge (h_n) konvergiert gegen h in BMO-Norm.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|h - h_n\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Für $n \geq N$, $V \subset X$ offen, relativ-kompakt und $x \in X$ folgt

$$\int |h - h_n - (h(x) - h_n(x))|\mu_x^V \leq \int |h - h_n|\mu_x^V + |h(x) - h_n(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Also gilt für alle $x \in X$

$$M|h - h_n - (h(x) - h_n(x))|(x) \leq 2\varepsilon,$$

woraus sich

$$\|h - h_n\|_* \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ ergibt. Für h gilt deshalb

$$\|h\|_* \leq \|h - h_n\|_* + \|h_n\|_* < \infty.$$

$\square$

Theorem 5.1.10 *Der Raum $(BMO^r/\mathbb{R}, \|\ \|_*^r)$ ist ein Banachraum.*

Beweis:
Sei (h_n) eine Cauchyfolge in $(BMO^r/\mathbb{R})$. Es folgt mit Lemma 5.1.8, daß (h_n) gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h konvergiert. Nach Lemma 5.1.9 konvergiert (h_n) gegen h in $BMO(X)$. Es gilt also

$$\|h - h_n\|_* \to 0.$$

Bleibt zu zeigen, daß

$$\sup_X \int |h - h_n - (h(x) - h_n(x))|dr \to 0$$

gilt. Dies folgt aber wegen

$$\int |h - h_n - (h(x) - h_n(x))|dr \leq \int |h - h_n|dr + |h(x) - h_n(x)|.$$

Denn nach dem oben Gezeigten konvergiert (h_n) gegen h gleichmäßig. Es folgt

$$\|h - h_n\|_*^r \to 0.$$

$\square$

5.2 Vollständigkeit von $BMO(X) \cap A$

Im vorherigen Abschnitt konnte gezeigt werden, daß man einen Banachraum erhält, wenn man die Norm in einer gewissen Weise abändert. Allerdings erwies sich diese Abänderung als so stark, daß der Raum nur noch aus beschränkten Funktionen bestand. In diesem Teil der Arbeit soll nun gezeigt werden, daß gewisse Teilmengen des Raumes $BMO(X)/\mathbb{R}$ vollständig bezüglich der Norm $\| \|_*$ sind .

Definition 5.2.1 *Sei $(X, \mathcal{H})$ ein harmonischer Raum und r ein Bezugsmaß auf X, dann sei die Menge $\mathcal{H}_r^1$ wie folgt definiert*

$$\mathcal{H}_r^1 := \left\{ h \in \mathcal{H}^+(X) : \int h dr \le 1 \right\}.$$

Bemerkung 5.2.2 *Die Menge $\mathcal{H}_r^1$ ist kompakt bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz. Für einen Beweis siehe [JA], Proposition* 2.4.

Definition 5.2.3 *Sei $(h_n) \subset BMO(X)$ und sei $x \in X$.*
Definiere die harmonische Funktion $u_{mn}^x : X \to \mathbb{R}_+$ durch

$$u_{mn}^x(y) := M|h_m - h_n - (h_n(x) - h_m(x))|(y) \quad \text{für alle } y \in X.$$

Theorem 5.2.4 *Sei $(h_n) \subset BMO(X)$ eine BMO-Cauchyfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h konvergiert. Gibt es zu $x \in X$ ein Bezugsmaß r mit*

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} \int u_{mn}^x dr \le C_x < \infty,$$

so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$M|h - h_n - (h(x) - h_n(x))|(x) \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Dieses N kann unabhängig von x gewählt werden.

Beweis:
Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(u^x_{mn})_{m=1}^{\infty}$ nach Voraussetzung in der (bezüglich lokal gleichmäßiger Konvergenz) kompakten Menge $\mathcal{H}_r^{C_x}$ enthalten und besitzt dementsprechend eine Teilfolge $(u^x_{m_k n})_k$, die lokal gleichmäßig gegen eine positive harmonische Funktion u^x_n konvergiert.
Da (h_n) ein Cauchyfolge bezüglich $\| \ \|_*$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $p \in \mathbb{N}$ mit

$$u^x_{mn}(x) = M|h_m - h_n - (h_n(x) - h_m(x))|(x) \leq 2\|h_m - h_n\|_* \leq 2\varepsilon$$

für alle $m, n \geq p$ unabhängig von $x \in X$.
Also gilt für $m_k, n > L$

$$|h_{m_k} - h_n - (h_{m_k}(x) - h_n(x))| \leq u^x_{m_k n}.$$

Im Grenzwert erhält man

$$M|h - h_n - (h(x) - h_n(x))|(x) \leq u^x_n(x) \leq \varepsilon.$$

□

Korollar 5.2.5 *Seien $(h_n) \subset BMO(X)$ eine BMO-Cauchyfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h konvergiert, und r ein Bezugsmaß auf X mit*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int |h_n| dr < \infty.$$

Dann konvergiert (h_n) gegen h bezüglich $\| \ \|_*$.

Beweis: Für alle $m, n \in \mathbb{N}, x \in X$ folgt wegen

$$\begin{aligned}
\int u^x_{mn} dr &\leq \int M|h_m - h_m(x)| dr + \int M|h_n - h_n(x)| dr \\
&\leq 2\|h_m\|_* + \int |h_m - h_m(x)| dr + 2\|h_n\|_* + \int |h_n - h_n(x)| dr \\
&\leq 2\|h_m\|_* + 2\|h_n\|_* + \int |h_m| dr + \int |h_n| dr + |h_m(x)| + |h_n(x)|
\end{aligned}$$

mit Theorem 5.2.4 die Behauptung.

□

Hieraus ergibt sich der anfangs erwähnte Satz von H. Leutwiler (siehe [LE2]).

Korollar 5.2.6 *[H. Leutwiler] Sei* $(X, \mathcal{H})$ *ein Brelotscher Raum. Dann ist* $(BMO(X)/\mathbb{R}, \| \ \|_*)$ *ein Banachraum.*

Beweis:
Sei (h_n) eine Cauchfolge in $(BMO(X)/\mathbb{R}, \| \ \|_*)$. Aus Lemma 4.1 in [LE2] folgt, daß (h_n) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion h konvergiert. Wähle für $x \in X$ das Punktmaß ε_x als Bezugsmaß. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{m,n\in\mathbb{N}} \int u^x_{mn} dr &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} M|h_m - h_n - (h_n(x) - h_m(x))|(x) \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{N}} M|h_m - h_m(x)|(x) + \sup_{n\in\mathbb{N}} M|h_n - h_n(x)|(x) \\
&= 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} M|h_n - h_n(x)|(x) \\
&\leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} 2\|h_n\|_* = 4 \sup_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|_* < \infty.
\end{aligned}$$

Nun folgt nach Theorem 5.2.4 für alle $\varepsilon > 0$ die Existenz von $N \in \mathbb{N}$ mit

$$M|h - h_n - (h(x) - h_n(x))|(x) \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und $x \in X$, also ist h eine Element von $BMO(X)$ mit $\|h - h_n\|_* \to 0$.

□

Lemma 5.2.7 *Sei* $A \subset \mathcal{H}$ *eine lokal gleichmäßig beschränkte Menge, dann existieren ein Bezugsmaß* r *und eine positive Konstante* C*, mit*

$$\int |h| dr \leq C$$

für alle $h \in A$.

Beweis:
Seien (K_m) eine Ausschöpfung von X durch kompakte Teilmengen und $(x_k) \subset X$ eine dichte Folge. Definiere für alle $m \in \mathbb{N}$

$$c_m := \sup_{h \in A} \|h\|_{K_m} < \infty.$$

Setzt man

$$r_m := \sum_{x_k \in K_m} \frac{1}{2^k(c_m + 1)} \varepsilon_{x_k},$$

so ist r_m ein Subwahrscheinlichkeitsmaß mit Träger in K_m.
Für eine Folge (α_m) strikt positiver Zahlen mit $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_m = 1$ gilt

$$0 < S := \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m r_m(X) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m = 1.$$

Daher definiert

$$r := \frac{1}{S} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m r_m$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X. Da der Träger von r X ist, ist r ein normiertes Bezugmaß. Für $h \in A$ gilt

$$\begin{aligned} r(|h|) &= \frac{1}{S} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m r_m(|h|) \\ &= \frac{1}{S} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sum_{x_k \in K_m} \frac{1}{2^k(c_m + 1)} |h(x_k)| \\ &\leq \frac{1}{S} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m = \frac{1}{S}. \end{aligned}$$

□

Für positive harmonische Funktionen gilt sogar Äquivalenz.

Lemma 5.2.8 *Für eine Familie harmonischer Funktionen $A \subset \mathcal{H}^+$ sind äquivalent*

1. *Die Menge A ist lokal gleichmäßig beschränkt.*

2. Es existiert ein Bezugsmaß r auf X und eine Konstante C mit

$$\sup_{h\in A}\int hdr \leq C < \infty.$$

Beweis:
1. $\Rightarrow$ 2. Folgt aus Lemma 5.2.7.
2. $\Rightarrow$ 1. Sei r das Bezugmaß mit der geforderten Eigenschaft und K eine kompakte Teilmenge von X. Nach Theorem 1.1.4 gibt es eine Konstante C_K mit

$$\sup_K h \leq C_K \int hdr \leq C_K C$$

für alle $h \in A$. Also ist A lokal gleichmäßig beschränkt.

□

Bemerkung 5.2.9 *Lemma 5.2.8 zeigt vor allem, daß jede Teilmenge $A \subset \mathcal{H}^+$, die lokal gleichmäßig beschränkt ist, in der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz relativ kompakt ist. Denn für A gibt es nach Lemma 5.2.8 stets eine Konstante C, so daß $A \subset \mathcal{H}_r^C$ gilt und diese Menge ist kompakt.*

Theorem 5.2.10 *Sei $(h_n) \subset \mathcal{H}^+$ eine BMO-Cauchyfolge, die lokal gleichmäßig beschränkt ist. Dann konvergiert (h_n) gegen eine harmonische Funktion $h \in BMO(X)$ bezüglich $\| \|_*$.*

Beweis:
Nach Lemma 5.2.7 gibt es ein Bezugsmaß r und eine Konstante C, so daß stets

$$\int h_n dr \leq C < \infty$$

gilt. Also ist die Folge (h_n) in $\mathcal{H}_r^C$ enthalten und besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(h_{n_k})_k$. Dann folgt mit Korollar 5.2.5 die Behauptung.

□

Beachtet man nun, daß $\mathcal{H}(X)$ versehen mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz ein Montelraum ist, so gilt das folgende Theorem.

Theorem 5.2.11 *Eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathcal{H}$ ist kompakt genau dann, wenn A lokal gleichmäßig beschränkt ist.*

Beweis:
Siehe [CC2] Kapitel 11.

□

Nun folgt sofort:

Theorem 5.2.12 *Sei $A \subset \mathcal{H}$ eine Menge, die kompakt bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz ist, dann ist $((BMO(X) \cap A)/\mathbb{R}, \| \|_*)$ vollständig.*

Beweis:
Nach Theorem 5.2.11 ist A lokal gleichmäßig beschränkt und nach Voraussetzung abgeschlossen bezüglich lokal gleichmäßiger Konvergenz. Dann folgt mit Korollar 5.2.5 und Lemma 5.2.7 die Behauptung.

□

Als Korollar ergibt sich.

Korollar 5.2.13 *Die Menge $((BMO(X) \cap \mathcal{H}^1_r)/\mathbb{R}, \| \|_*)$ ist vollständig.*

Beweis: Klar, da $\mathcal{H}^1_r$ nach Bemerkung 5.2.2 kompakt bezüglich lokal gleichmäßiger Konvergenz ist.

□

Bemerkung 5.2.14 *Korollar 5.2.13 läßt sich sehr leicht auf die Menge $BMO(X) \cap (\mathcal{H}^1_r - \mathcal{H}^1_r)$ ausdehnen, wenn man bedenkt, daß für einen lokalkonvexen Raum E und eine Teilmenge $K \subset E$ stets aus der Kompaktheit von K die Kompaktheit von $K - K$ folgt.*

Bemerkung 5.2.15 *Es bleibt ein offenes Problem, ob $BMO(X)/\mathbb{R}$ im allgemeinen Fall ein Banachraum ist.*

5.3 Variante der Harnackschen Ungleichung für BMO-Funktionen

In diesem Teil werden zwei Abschätzungen für harmonische Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation auf kompakten Teilmengen $K \subset X$ hergeleitet. Diese ähneln in gewisser Weise der klassischen Harnackschen Ungleichung, wie sie für den klasssichen Fall beziehungsweise für den Fall Brelotscher harmonischer Räume gilt.
Zunächst eine Definition.

Definition 5.3.1 *Definiere für einen harmonischen Raum* $(X, \mathcal{H})$ *und* $\lambda > 0$, $m > \lambda$ *die Mengen* $\mathcal{H}^{\lambda +}$ *und* $\mathcal{H}_r^m$ *durch*

$$\mathcal{H}^{\lambda +} := \left\{ h \in \mathcal{H}^+ : \inf_X h \geq \lambda \right\}$$

sowie

$$\mathcal{H}_r^m := \left\{ h \in \mathcal{H}^+ : \int h dr \leq m \right\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt das folgende Lemma

Lemma 5.3.2 *Sei* $K \subset X$ *kompakt, dann existiert eine Konstante* $A_K^{\lambda,m}$*, so daß für alle* $h \in \mathcal{H}^{\lambda +} \cap \mathcal{H}_r^m$ *gilt*

$$\sup_K h \leq A_K^{\lambda,m} \inf_K h.$$

Beweis:
Nach Theorem 1.1.4 gibt es zu K eine Konstante $C_K \geq 1$ (da 1 harmonisch ist) mit

$$\sup_K \left(h + \int h dr \right) \leq C_K \inf_K \left(h + \int h dr \right).$$

Für alle $h \in \mathcal{H}^{\lambda +} \cap \mathcal{H}_r^m$ folgt dann nach einfacher Umformumg

$$\sup_K h \leq C_K \inf_K h + (C_K - 1) \int h dr.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\sup_K h \leq C_K \inf_K h + (C_K - 1) \int h dr \leq C_K \inf_K h + (C_K - 1)\, m.$$

Betrachte jetzt die Konstante

$$A_K^{\lambda,m} := C_K + \frac{1}{\lambda}(C_K - 1)m,$$

so folgt

$$\begin{aligned} A_K^{\lambda,m} \inf_K h &= C_K \inf_K h + \frac{1}{\lambda}(C_K - 1)m \inf_K h \\ &\geq C_K \inf_K h + (C_K - 1)m \\ &\geq \sup_K h. \end{aligned}$$

□

Für $x, y \in K \subset_k X$ und $h \in \mathcal{H}^{\lambda+} \cap \mathcal{H}_r^m \cap BMO(X)$ gilt

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| \leq M|h - h(x)|(y) &\leq M|h - h(x)|(x) + |h(y) - h(x)| \\ &\leq M|h - h(x)|(x) + (1 + A_K^{\lambda,m})h(y) \\ &\leq 2\|h\|_* + (1 + A_K^{\lambda,m}) \sup_K h \\ &\leq 2\|h\|_* + A_K^{\lambda,m}(1 + A_K^{\lambda,m}) \inf_K h. \end{aligned}$$

Diese Rechnung beweist also

Theorem 5.3.3 *Sei K eine kompakte Teilmenge von X, dann existiert eine Konstante $M_K^{\lambda,m}$, so daß für alle $h \in \mathcal{H}^{\lambda+} \cap \mathcal{H}_r^m \cap BMO(X)$ und $x, y \in K$ gilt*

$$|h(x) - h(y)| \leq 2\|h\|_* + M_K^{\lambda,m} \inf_K h.$$

Beweis:
Siehe obige Überlegungen.

□

Literaturverzeichnis

[BA] Heinz Bauer, *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1966

[BH] Jürgen Bliedtner und Wolfhard Hansen, *Potential Theory. An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage*, Springer Verlag, 1986.

[BL] Jürgen Bliedtner und Peter A. Loeb, *Sturdy Harmonic Functions and their Integral Representations* , Positivity 7, 2003.

[CC1] Corneliu Constantinescu und Aurel Cornea, *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Ergebnisse der Mathematik 32, 1962.

[CC2] Corneliu Constantinescu und Aurel Cornea, *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer Verlag, 1972.

[DM] Claude Dellacherie und Paul-André Meyer, *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1975.

[FS] Ch. Fefferman und E.M. Stein, *H^p-Spaces of Several Variables*, Acta Mathematica 129, 1972

[GA] Adriano M. Garsia, *Martingale Inequalities, Seminar Notes on Recent Progress*, Mathematics Lecture Notes Series, W.A. Benjamin, 1973.

[JA] Klaus Janßen, *Martin Boundary and $\mathcal{H}^p$-theory of harmonic spaces. In: Seminar on Potential Theory II* , Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1972

[JN] F. John und L. Nirenberg, *On Functions of Bounded Mean Oscillation*, Communications on Pure and Applied Mathematics 14, 1961.

[KL] Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer Verlag, 2006.

[LE1] Heinz Leutwiler, *Quasi-bounded and Singular Functions*, Transactions of the Mathematical Society 189, 1974.

[LE2] Heinz Leutwiler, *Harmonic Functions of Bounded Mean Oscillation*, Mathematische Annalen 244, 1979.

[LE3] Heinz Leutwiler, *On BMO and the Torsion Function. In: Complex Analysis* , Birkhäuser Verlag, 1988.

[LO] Peter A. Loeb, *A minimal compactification for extending continuous functions* , Proceedings of the American Mathematical Society 18, 1967.

[LY] Terry Lyons, *A Definition of BMO_p for an Abstract Harmonic Space and a John-Nirenberg Theorem*, Bulletin of the London Mathematical Society 12, 1980.

[MO] Jürgen Moser, *On Harnack´s Theorem for Elliptic Differential Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics 14, 1961.

[RV] A. Wayne Roberts und Dale E. Varberg, *Convex Functions* , Academic Press, 1973.

—Lebenslauf—

Persönliche Daten

- Name: Christian Kohl
- Geburtsdatum: 26.07.1978 in Langen (Hessen)
- Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulische Ausbildung

- 1986-1989 Ludwig Schwamb Grundschule in Darmstadt.
- 1989-1998 Lichtenberg Gymnasium in Darmstadt,

  1998 Abschluß: Allgemeine Hochschulreife.

Berufliche Ausbildung

- 1999-2001 Ausbildung bei der BHF-BANK Aktiengesellschaft in Frankfurt am Main,

  2001 Abschluß: Bankkaufmann.

Universitäre Ausbildung

- 10/2001-07/2006 Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Goethe-Universität in Frankfurt.

  Diplomarbeit am Lehrstuhl für BWL und Financial Engineering unter Anleitung von Prof. Dr. C. Schlag zum Thema "Lineare Filter in diskreter und stetiger Zeit".

  2006 Abschluß: Diplom-Kaufmann.

- 10/2003-07/2006 Studium der Mathematik an der Goethe-Universität in Frankfurt.

  2005: Vordiplom in Mathematik.

Wissenschaftliche Tätigkeit

- 09/2006- Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. J. Bliedtner am Fachbereich Informatik und Mathematik der Goethe Universität in Frankfurt.

Meine akademischen Lehrer waren: Prof. Dr. J. Bliedtner, Prof. Dr. J. Wolfart, Prof. Dr. J. Geiger, Prof. Dr. G. Kersting und Prof. Dr. P. Kloeden.